

ESTUDO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DAS DIFERENÇAS DE VELOCIDADE EM UM SISTEMA DE COUETTE-TAYLOR, SOB TURBULÊNCIA, SIMULADO EM CFD

CON10-1477

Resumo. A formulação clássica do experimento Couette-Taylor tem sido objeto de estudos teóricos e experimentais. Este experimento consiste em um fluido incompressível contido no espaço anular entre dois cilindros concêntricos, onde o interno gira com uma velocidade angular constante Ω e o externo é mantido fixo. Além de estudar a validade do princípio da isotropia no nosso modelo, também investigamos as distribuições de probabilidade da vorticidade, diferenças de velocidade e pressão, coletados em uma simulação computacional do experimento de Couette-Taylor e comparamos com modelos reportados na literatura baseados na mecânica estatística não aditiva

Palavras-chave: Turbulência, experimento de Couette-Taylor, superestatística, fluidodinâmica computacional.

1. INTRODUÇÃO

Na teoria de Kolmogorov de 1941 (Kolmogorov, 1941), o processo de desenvolvimento da turbulência consiste na injeção de energia nas grandes escalas e sua transferência para escalas menores até as escala dissipativa, processo conhecido como cascata de energia. Na faixa da escala limitada pelo comprimento característico do sistema e o comprimento de Kolmogorov essa transferência independe da forma de injeção de energia e das condições iniciais das grandes escalas (ordem de tamanho do comprimento característico do sistema). Um importante estudo na caracterização da turbulência é a função distribuição de probabilidade (FDP) para as diferenças de velocidade a uma distancia r , em diferentes escalas. Perto das grandes escalas, essas FDP's tendem a ser gaussianas, enquanto que em escalas menores, as FDP's se afastam desse tipo de função de distribuição (Jung e Swinney, 2005). A não-gaussianidade das FDP's da diferenças de velocidades a pequenas escalas tem sido estudada com a ajuda da superestatística, que tem como caso particular a mecânica estatística não aditiva (Beck, 2004). Como forma de superação das dificuldades da aplicação da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG), que se baseia na entropia dada por $S[\{p_i\}] = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$, vem sendo desenvolvida desde do final do século passado uma estatística baseada em uma forma generalizada da entropia (Tsallis, 1988):

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad (1)$$

onde q é o índice entrópico também chamado de grau de não-extensividade (Tsallis, 1999), p_i é a probabilidade do sistema estar no microestado i , k é uma constante positiva e W é o numero total de possibilidades microscópicas do sistema. Esta expressão recupera a forma usual da entropia de Boltzmann-Gibbs no limite $q \rightarrow 1$.

Essa generalização tem como característica a boa representação de sistemas que não obedecem a propriedade da aditividade (Tsallis, 2009). Surge disto a mecânica estatística não aditiva que possibilita obter uma FDP generalizada, conhecida como q -gaussiana, que tem a gaussiana da estatística convencional como caso particular. A partir da mecânica estatística não aditiva, outros tipos de estatísticas também foram generalizadas como a superestatística- χ^2 e a superestatística log-normal, que também possuem suas FDP características e tem a q -gaussiana como caso particular.

O nosso trabalho consiste em estudar as distribuições dos dados obtidos através de simulação fluidodinâmica computacional de um sistema de Couette-Taylor, em regime turbulento. Alguns estudos mostram que as distribuições de probabilidade das diferenças de velocidade a altos números de Reynolds (Eq. 4) são melhor representadas pelas funções de probabilidade baseada na superestatística (Beck *et al.*, 2001) se comparado com a gaussiana da estatística convencional. O experimento foi construído em 3 dimensões para verificar se os modelos reportados na literatura são também identificáveis nas simulações.

O artigo está separado por seções: na introdução foi feito um breve resumo sobre mecânica estatística não aditiva e suas generalizações com maior atenção nos conceitos necessários para um melhor entendimento desse trabalho. Na

seção 2, fizemos uma breve explicação sobre uma das propostas de modelagem para FDP das diferenças de velocidades em sistemas turbulentos com base na mecânica estatística não aditiva. Na seção 3, descrevemos o sistema Couette–Taylor e detalhes sobre sua construção no *software*, assim como na seção 4, abordamos brevemente sobre modelos de fluidodinâmica computacional para resolução da turbulência. Na seção 5, discutimos os resultados e fizemos nossas considerações.

2. MODELO TEÓRICO PARA A FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE PARA DIFERENÇAS DE VELOCIDADE

Diversos exemplos de aplicação das funções distribuição de probabilidade oriundas da superestatística e da mecânica estatística não aditiva têm sido reportados na literatura: o estudo do formato da FDP de sinais climatológicos do fenômeno climático El Niño (Ausloos e Petroni, 2007), estudos comparativos da velocidade turbulenta da superfície limite da atmosfera sobre camadas geladas, campos e florestas (Katul *et al.*, 2006), mercado financeiro (Ramos *et al.*, 1999), turbulência hidrodinâmica e atmosférica (Beck, 2004; Gotoh e Kraichnan, 2004; Shivamoggi, 2003; Peyrard e Daumont, 2002; Beck, 2002; Ramos *et al.*, 2001; Neto *et al.*, 2001; Beck *et al.*, 2005).

No artigo (Beck, 2004), identificou-se que as distribuições de diferenças de velocidade de sistemas em regime de turbulência completamente desenvolvida são bem representadas por funções densidade de probabilidade da superestatística- χ^2 . Com base na superestatística- χ^2 , (Beck *et al.*, 2001) mostra uma proposta de função de probabilidade (equação 2) para dados oriundos do experimento Couette–Taylor em regime completamente turbulento :

$$p(u) = \frac{1}{Z_q} [1 + \beta(q-1)\epsilon(u)]^{\frac{-1}{q-1}}, \quad (2)$$

onde Z_q é o fator de normalização, u é a diferença de velocidade $u = v(x-l) - v(x)$ e $\beta = \frac{1}{5-3q}$ é um parâmetro que pode ser relacionado com a dissipação da energia do escoamento (Beck, 2004). O termo $\epsilon(u)$ e chamado da energia efetiva associada as diferenças de velocidade u :

$$\epsilon(u) = \frac{1}{2}|u|^{2\alpha} - c\sqrt{\gamma\tau} \operatorname{sgn}(u)(|u|^\alpha - \frac{1}{3}|u|^{3\alpha}), \quad (3)$$

sendo γ^{-1} o tempo de relaxamento do estado estacionário, τ o tempo de escala das diferenças de velocidade e c é um parâmetro que depende do sistema estudado e do parâmetro q . A variação do termo α permite que outros níveis de energia sejam alcançados.

É importante salientar quando $q \rightarrow 1$ a gaussiana é recuperada. Em (Beck *et al.*, 2001) empiricamente é proposto que o parâmetro α seja em função de q : $\alpha = 2 - q$ e $c\sqrt{\gamma\tau} = 0,124(q-1)$. Para $c = 0$ e $\beta = \frac{2}{(5-3q)}$, a Eq (2) tem média 0 e variância 1. Entretanto, se $c \neq 0$ e β seja ainda mantido igual a $\frac{2}{(5-3q)}$, então a média de u é da ordem de $\sqrt{\gamma\tau}$ e a variância $\sigma = (\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$ é ligeiramente diferente de 1. Um media de 0 e variância de 1 é alcançada com a renormalização $\tilde{p}(u) = \sigma p(\frac{u - \langle u \rangle}{\sigma})$.

3. SISTEMA COUETTE–TAYLOR

O sistema Couette–Taylor (figura 1) utilizado consiste em dois cilindros concêntricos de mesmo comprimento $L = 30$ cm e raios interno e externo, $R_1 = 15,9$ cm, $R_2 = 22,1$ cm respectivamente. A Eq. (4) é utilizada para o cálculo do numero de Reynolds no sistema Coutte–Taylor, onde a velocidade angular do cilindro interno é Ω_1 e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

$$R = \frac{\Omega_1 R_1 (R_2 - R_1)}{\nu}. \quad (4)$$

Construímos o modelo computacional do sistema Coutte–Taylor no software Gambit 2.2 com dimensões que estão de acordo com as relações sugeridas no artigo (Lewis e Swinney, 1999): $R_2 - R_1 = 6,2$ cm e $\eta = \frac{R_1}{R_2} = 0,72$. Utilizamos o número de Reynold de 69000, coletamos os dados no ponto médio entre os dois cilindros, com um espaçamento temporal de $\delta t = 3 \times 10^{-5}$ s. O líquido utilizado na região anular foi a água com temperatura de 298 K (sistema isotérmico). O tratamento dos dados fundamenta-se na hipótese de Taylor para turbulência, onde a flutuação temporal de velocidade em um ponto do sistema reflete sua flutuação espacial (Beck *et al.*, 2001) em um determinado instante de tempo.

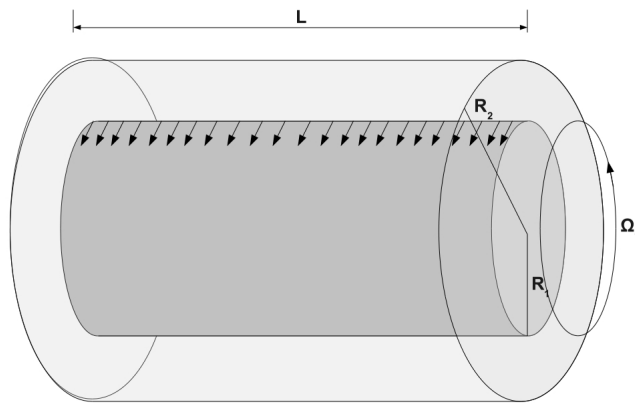


Figura 1. Sistema Couette–Taylor.

4. FLUIDODINAMICA COMPUTACIONAL

Os movimento de fluidos newtonianos incompressíveis homogêneos é regido pelas equações de Navier–Stokes incompressível escrito aqui na forma euleriana e em notação vetorial:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6)$$

onde $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ é a derivada substancial da velocidade \mathbf{v} , ρ é a massa específica assumida aqui constante, ν é a viscosidade cinemática do fluido também constante, p é a pressão e g é a gravidade. Basicamente a fluidodinâmica computacional consiste em quatro problemas: geração da geometria e do *grid* (malha), representar o modelo físico com os parâmetros adequados, resolver as equações necessárias e tratar os dados. Dentre estes, provavelmente o mais difícil de ser resolvido são as equações. No caso da resolução das equações de um sistema sob fluxo laminar, o esforço computacional é relativamente menor que sob regime turbulento, sendo necessário apenas a resolução da equação de Navier-Stokes com poucos graus de liberdades. No caso dos fluxos turbulentos, um maior esforço computacional é requerido, devido o grande numero de graus de liberdades a serem resolvidos. Uma forma de evitar esse grande esforço computacional é o uso de alguns métodos de modelagem para certas escalas da turbulência. Alguns métodos de resolução modelam todas as escalas do fenômeno da turbulência (método $\kappa - \varepsilon$, Equações Médias de Reynolds Modeladas (EMRM), etc), outros resolvem as escalas maiores (próximo ao comprimento característico do sistema) com o uso da equação de Navier-Stokes, enquanto que as escala menores (próximo ao comprimento de Kolmogorov) são modeladas (Simulação de Grandes Escalas (SGE)) e ainda existem métodos que resolvem a equação de Navier-Stokes para todas as escalas do fenômeno (Simulação numérica direta (SND)), como podemos ver na representação gráfica Fig. (2). Para esse trabalho, fizemos uma malha com uma distancia média de 1 cm entre os pontos (*mesh*= 10 mm) com elementos finitos dos tipos triangulares e quadráticos. O método de resolução do problema da turbulência utilizado foi o Simulação em grandes escalas (SGE). O método da Simulação em grandes escalas consiste em dividir as variáveis que possuem alta variabilidade em duas partes: uma media local espacial (correspondente as grandes escalas e resolvidas por equações da fluidodinâmica) e as flutuações em torno da media (correspondente as escalas menores e que são modeladas).

5. RESULTADOS

Verificamos a hipótese da isotropia (similaridade das distribuições entre os eixos cartesianos x , y e z), principio importante no estudo da turbulência. Os resultados (Fig. 3) sugerem que os eixos não são completamente similares e isso pode representar um desvio da isotropia, onde identificamos um desvio na função de probabilidade dos dados coletados no eixo x em relação a um eixo central das FDP.

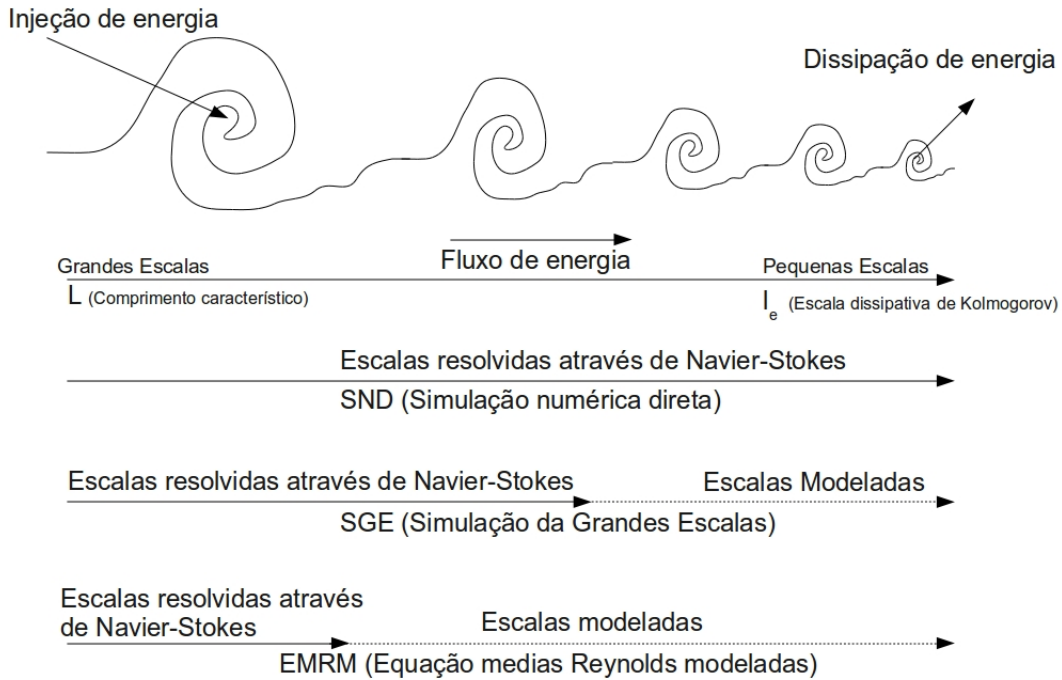


Figura 2. Comparação dos métodos de resolução do problema da turbulência em CFD.

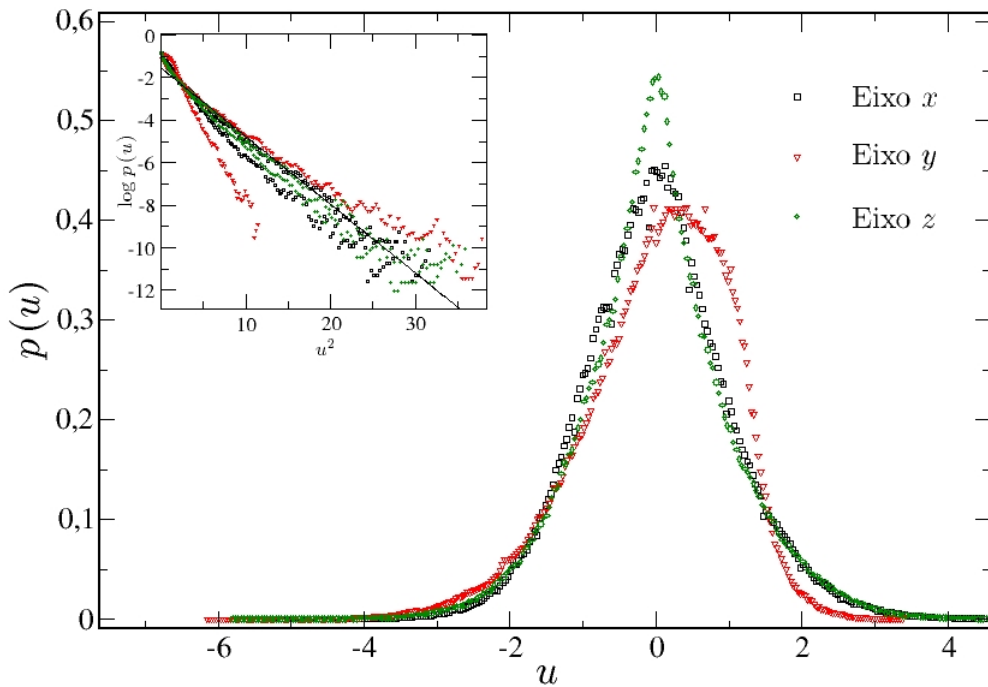


Figura 3. Comparação das PDF's nas direções x, y, z do plano cartesiano.

Comparamos a função densidade de probabilidade Fig. (4) construída com os dados obtidos a partir do simulador com o modelo teórico Eq. (2 e 3) proposto com base na superestatística (Beck *et al.*, 2001). A partir de uma análise visual da Fig. (4) identificamos que os dados obtidos do simulador mostram um comportamento próximo ao esperado pelo modelo teórico como também podemos identificar na comparação dos parâmetros β , c , α e q determinados para

ambos os casos Tab. (5). Verificamos que a relação $\alpha = 2 - q$, encontrada de forma empírica no artigo (Beck *et al.*,

Tabela 1. Dados dos parâmetros do modelo.

	Teórico	Simulado
β	4,000	4,000
c	0,125	0,125
α	0,9522	0,9622
q	1,623	1,823

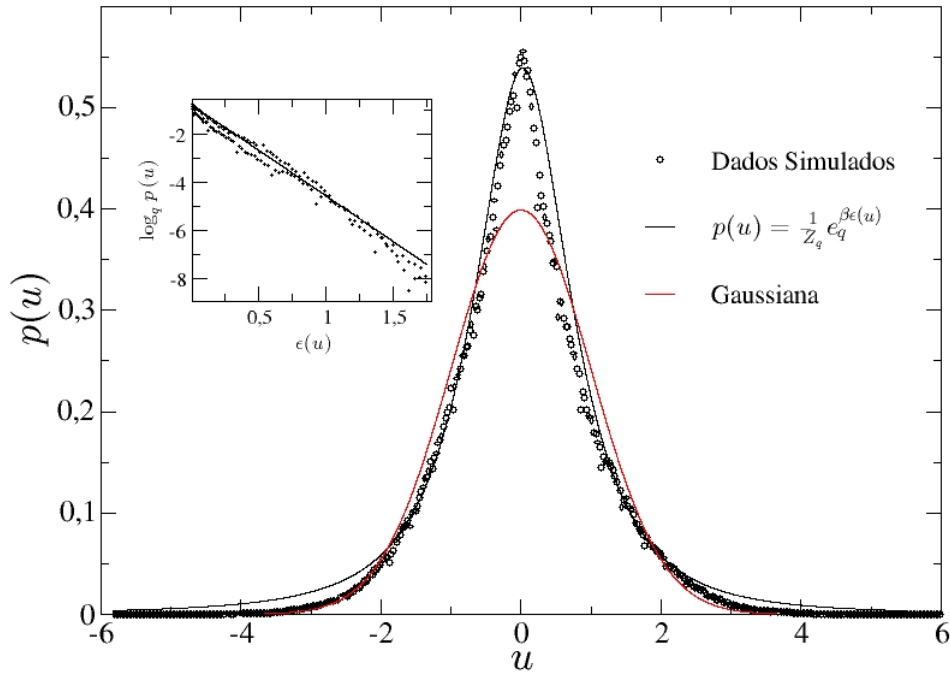


Figura 4. Comparação entre a eq(2) e a gaussiana na representação dos dados simulados.

2001), não foi encontrada nesse trabalho, verificando a seguinte expressão $\alpha = 2,7850 - q$ nos nossos dados. Para o parâmetro c , o artigo (Beck *et al.*, 2001) sugere a seguinte expressão $c\sqrt{\gamma\tau} = 0,124(q - 1)$, sendo que para os dados simulados verificamos a expressão $c\sqrt{\gamma\tau} = 0,152(q - 1)$.

Diversas propostas de representações das FDP's para os tipos de dados mostrados nesse trabalho estão propostos na literatura, mas não temos um modelo que represente bem todas as partes da FDP, isto é, representar bem a cauda e o pico com uma incerteza baixa. Na Fig. (4) foi plotada a gaussiana como forma de comparação com os modelos sugerido nesse trabalho. É possível ver que o modelo proposto com base na mecânica estatística não aditiva representa melhor os dados.

A diferença da pressão estática e a vorticidade também foram calculados na simulação e estão representados abaixo.

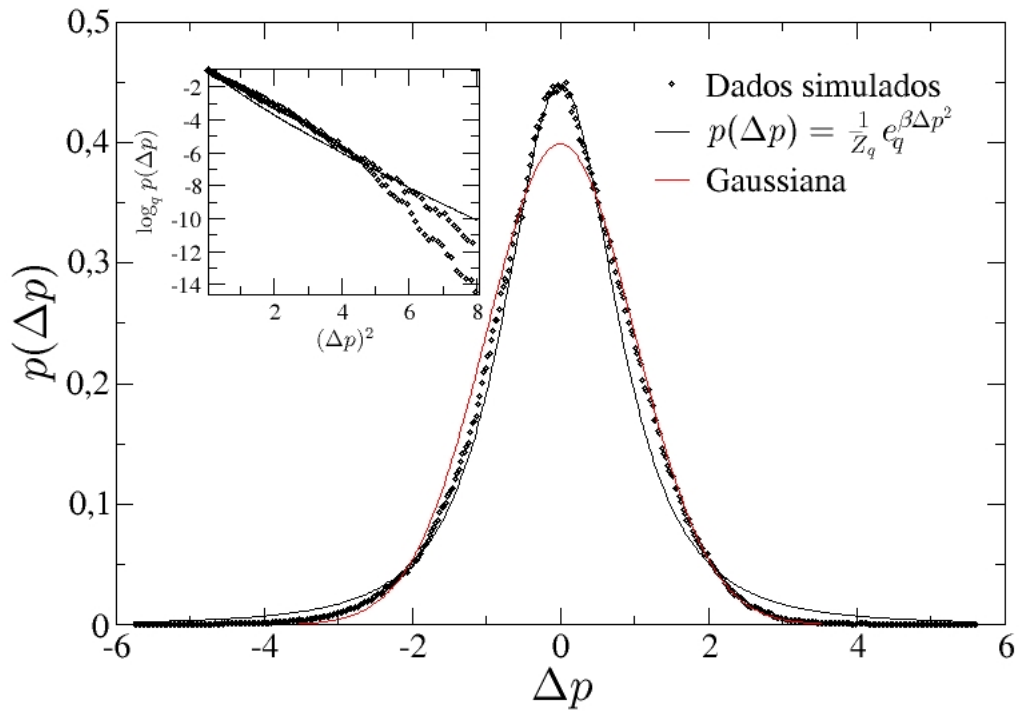


Figura 5. Representação da diferença da pressão estática e comparada com os modelos de função de probabilidades propostos: equação (2) - $\beta = 2, 4$ e $q = 1, 26$.

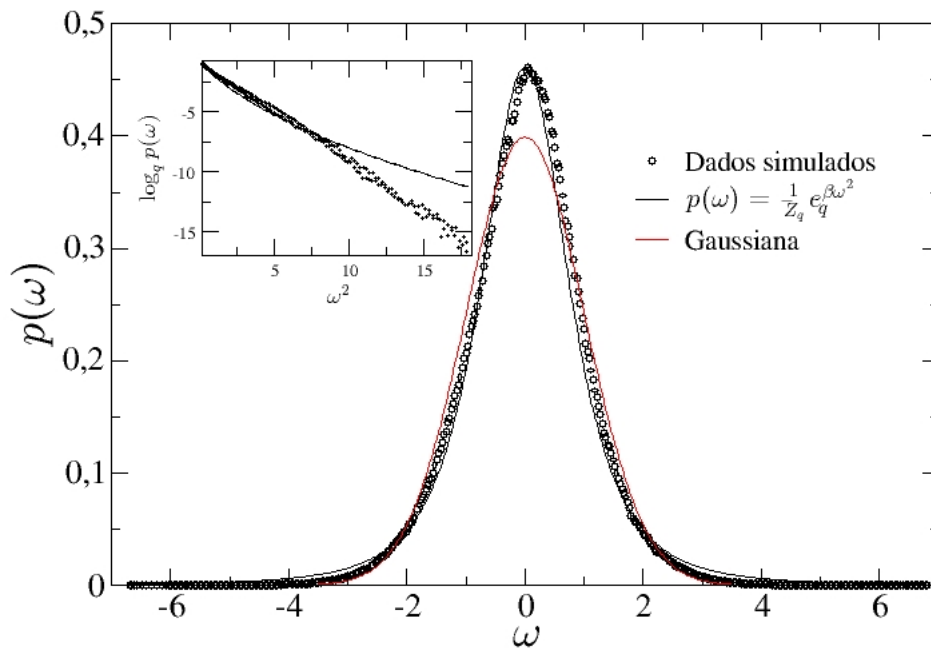


Figura 6. Representação da vorticidade e comparada com os modelos de função de probabilidades propostos: equação (2) - $\beta = 1.5$ e $q = 1.43$.

Não é comum o estudo das distribuições para outros parâmetros diferentes da velocidade, conseqüentemente temos

poucos trabalhos nesse sentido. Construímos as FDP's das diferenças da pressão estática, Δp , e da vorticidade, ω e comparamos com FDP's baseadas na superestatística. Observamos que as FDP's da vorticidade e da diferença da pressão estática podem ser aproximadas por pelas funções densidade de probabilidades baseadas na superestatística.

Nesse trabalho é possível identificar que as simulações fornecem resultados de velocidade em concordância com os trabalhos sobre turbulência encontrados na literatura que se baseiam na superestatística. Podemos concluir que outros parâmetros são possíveis de serem ajustadas com a ajuda da fluidodinâmica computacional e estudados com essa generalização da estatística convencional.

6. REFERÊNCIAS

- Ausloos, M. e Petroni, F., 2007. "Tsallis non-extensive statistical mechanics of el niño southern oscillation index". *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, Vol. 373, pp. 721–736. ISSN 0378-4371. doi:DOI:10.1016/j.physa.2006.05.044. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-4K7NG5V-3/2/7ae96f7122cf94c97c25fabfabecf814>.
- Beck, C., Cohen, E.G. e Rizzo, S., 2005. "Atmospheric turbulence and superstatistics". *Europhysics News*, Vol. 36, No. 6, pp. 189–191. doi:10.1051/epn:2005603. URL <http://dx.doi.org/10.1051/epn:2005603>.
- Beck, C., 2002. "Nonextensive methods in turbulence and particle physics". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 305, No. 1-2, pp. 209–217. ISSN 0378-4371. doi:DOI:10.1016/S0378-4371(01)00664-1. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-44XCC98-1/2/2cfd5510756fd42ef3d07725cbf4c7a5>.
- Beck, C., 2004. "Superstatistics in hydrodynamic turbulence". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 193, No. 1-4, pp. 195–207. ISSN 0167-2789. doi:DOI:10.1016/j.physd.2004.01.020. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVK-4BT7J1K-4/2/bc9776af5f60bcb3dfdaf3323e9b50f7>. Anomalous distributions, nonlinear dynamics, and nonextensivity.
- Beck, C., Lewis, G.S. e Swinney, H.L., 2001. "Measuring nonextensivity parameters in a turbulent couette-taylor flow". *Phys. Rev. E*, Vol. 63, No. 3, p. 035303. doi:10.1103/PhysRevE.63.035303.
- Gotoh, T. e Kraichnan, R.H., 2004. "Turbulence and tsallis statistics". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 193, No. 1-4, pp. 231–244. ISSN 0167-2789. doi:DOI:10.1016/j.physd.2004.01.034. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVK-4C2FJ5V-1/2/1eb70f410532a1fe32f72ebb20d25697>. Anomalous distributions, nonlinear dynamics, and nonextensivity.
- Jung, S. e Swinney, H.L., 2005. "Velocity difference statistics in turbulence". *Phys. Rev. E*, Vol. 72, No. 2, p. 026304. doi:10.1103/PhysRevE.72.026304.
- Katul, G., Porporato, A., Cava, D. e Siqueira, M., 2006. "An analysis of intermittency, scaling, and surface renewal in atmospheric surface layer turbulence". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 215, No. 2, pp. 117–126. ISSN 0167-2789. doi:DOI:10.1016/j.physd.2006.02.004. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVK-4JJG9YG-1/2/8b7ebf9977dafc7ad5c8e741508ae3f4>.
- Kolmogorov, A., 1941. "Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence". *Royal Society of London Proceedings Series A*, Vol. 434, pp. 15–17.
- Lewis, G.S. e Swinney, H.L., 1999. "Velocity structure functions, scaling, and transitions in high-reynolds-number couette-taylor flow". *Phys. Rev. E*, Vol. 59, No. 5, pp. 5457–5467. doi:10.1103/PhysRevE.59.5457.
- Neto, C.R., Zanandrea, A., Ramos, F.M., Rosa, R.R., Bolzan, M.J.A. e Sá, L.D.A., 2001. "Multiscale analysis from turbulent time series with wavelet transform". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 295, No. 1-2, pp. 215–218. ISSN 0378-4371. doi:DOI:10.1016/S0378-4371(01)00076-0. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-4343B1S-19/2/af8e7f1177ffafba7e79bd44ad04a3b0>.
- Peyrard, M. e Daumont, I., 2002. "Statistical properties of one-dimensional 'turbulence'". *EPL (Europhysics Letters)*, Vol. 59, No. 6, pp. 834–840. URL <http://stacks.iop.org/0295-5075/59/834>.
- Ramos, F.M., Neto, C.R. e Rosa, R.R., 1999. "Intermittency and nonextensivity in turbulence and financial markets". URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:cond-mat/9907348>.
- Ramos, F.M., Rosa, R.R., Neto, C.R., Bolzan, M.J.A., Sá, L.D.A. e Velho, H.F.C., 2001. "Non-extensive statistics and three-dimensional fully developed turbulence". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 295, No. 1-2, pp. 250–253. ISSN 0378-4371. doi:DOI:10.1016/S0378-4371(01)00083-8. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-4343B1S-1J/2/d80b491e064221bd53f3a60711126f6c>.
- Shivamoggi, B.K., 2003. "Non-extensive statistical mechanics of compressible turbulence". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 318, No. 3-4, pp. 358–370. ISSN 0378-4371. doi:DOI:10.1016/S0378-4371(02)01368-7. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVG-46TBWHH-9/2/e78b12204976b99725b0508d699dbbc5>.
- Tsallis, C., 1988. "Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics". *Journal of Statistical Physics*, Vol. Volume 52, No. Numbers 1-2, pp. 479–487. ISSN 0022-4715 (Print) 1572-9613 (Online). doi:10.1007/BF01016429. URL

<http://www.springerlink.com/content/t24g22415r2qw367/>.

Tsallis, C., 1999. "Nonextensive statistics: Theoretical, experimental and computational evidences and connections". *BRAZ.J.PHYS.*, Vol. 29, p. 1. URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:cond-mat/9903356>.

Tsallis, C., 2009. "Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics -an overview after 20 years". *Brazilian Journal of Physics*, Vol. 39, pp. 337–356. ISSN 0103-9733. URL http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-97332009000400002&nrm=iso.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

STUDY OF PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF VELOCITY DIFFERENCES IN A TURBULENT COUETTE–TAYLOR FLOW, SIMULATED WITH COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

CON10-1477

Abstract. *The classical formulation of the Couette–Taylor has the long been subject of theoretical and experimental investigation. This experiment consist of an incompressible fluid which is contained between two coaxial cylinders, where the outer cylinder is held fixed and the inner rotates at constant angular velocity ω . In this work we investigate the probability distribution functions (PDF) of vorticity, velocity and pressure differences from a simulated model of Couette–Taylor experiment with the help of non-extensive statistics mechanics .*

keywords: *Turbulence, Couette–Taylor Flow, Non-extensive, Computational fluid dynamics (CFD).*