

DETERMINAÇÃO SIMULTÂNEA DA DIFUSIVIDADE EFETIVA E DO COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA CONVECTIVO DE MASSA DURANTE A SECAGEM DE BANANAS INTEIRAS USANDO SOLUÇÕES ANALÍTICAS E O MÉTODO INVERSO

Cleide M. D. P. S e Silva, cleidedps@uol.com.br¹

Vera S. O. Farias, vera-solange@uol.com.br²

Pedro L. Nascimento, pedropln@yhao.com.br¹

Wilton Pereira da Silva, wiltonps@uol.com.br¹

Josivanda Palmeira Gomes, josi@deag.ufcg.edu.br³

Marcos A. A. Lins, ma1809al@yahoo.com.br¹

¹Universidade Federal de Campina Grande, UAF, PB, Brasil,

²Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, I.C.T., Campus de Diamantina, MG, Brasil

³Universidade Federal de Campina Grande, UAEAg, PB, Brasil

Resumo: Neste artigo, é usada uma metodologia para a determinação simultânea da difusividade efetiva e do coeficiente de transferência convectivo de massa em sólidos porosos que possam ser considerados como um cilindro infinito, durante a sua secagem. Dois modelos são utilizados para a otimização e simulação do processo de secagem: o modelo 1 (volume e difusividade constantes, com condição de contorno de equilíbrio); e o modelo 2 (volume e difusividade constantes, com condição de contorno convectiva). Algoritmos de otimização por varredura, baseados no método inverso, foram acoplados às soluções analíticas referentes aos dois modelos utilizados, possibilitando ajustar tais soluções aos dados experimentais da cinética de secagem em camada fina de produtos com a forma cilíndrica. Foi feita uma aplicação da metodologia de otimização na descrição da cinética de secagem de bananas inteiras, usando dados experimentais disponíveis na literatura. Os indicadores estatísticos relativos aos ajustes possibilitam afirmar que a solução da equação de difusão com condição de contorno convectiva produz resultados muito melhores que aqueles considerando a condição de contorno de equilíbrio.

Palavras-chave: cinética de secagem, algoritmo de otimização, difusão, meios porosos, cilindro infinito.

1. INTRODUÇÃO

Secagem é um mecanismo usado em vários campos do setor produtivo como, por exemplo, na indústria de produtos alimentícios, madeira, cerâmica, farmacêutica e de papel. A secagem de um produto úmido pode acontecer de maneira natural ou artificial. No caso da secagem artificial, o método mais comum para produtos agrícolas é aquecer o ar, diminuindo a sua umidade relativa, transferindo-o em seguida para o ambiente em que ele é colocado em contato com o produto úmido. Então, ocorre um processo contínuo de transferência de calor para dentro do produto. Simultaneamente, ocorre a transferência de umidade do interior do produto para a superfície, e da superfície para o ar de secagem, na forma de vapor. Em geral, o processo de transferência de calor e massa entre o produto e o meio pode ser descrito através da equação de difusão (Luikov, 1968; Crank, 1992; Bird et al., 2001). Para que a equação de difusão possa ser resolvida, é necessário que a condição de contorno entre o meio e a superfície externa do produto seja conhecida. Na secagem de muitos produtos agrícolas, usando ar quente, verifica-se que a condição de contorno mais adequada é a convectiva (Queiroz e Nebra, 2001; Wu et al., 2004; Erdogdu, 2005; Mariani et al., 2008; Silva et al., 2010), embora a condição de contorno de equilíbrio também seja usada na descrição de muitos processos de secagem (Gastón et al., 2002; Lima et al., 2004; Doymaz, 2005; Amendola e Queiroz, 2007; Hacıhafizoglu et al., 2008; Silva et al., 2009).

Para a determinação da difusividade efetiva e do coeficiente de transferência convectiva de massa, muitas vezes a solução da equação de difusão é acoplada a um otimizador que, em geral, baseia-se no método inverso (Mariani et al., 2008; Silva et al., 2008; Da Silva et al., 2009; Silva et al., 2009; Silva et al., 2010). Da Silva et al. (2009) propuseram dois algoritmos, um determinístico e outro estocástico, para determinar a difusividade efetiva de massa na secagem de cogumelos, supondo a condição de contorno de equilíbrio e a geometria parede infinita. Silva et al. (2009), supondo condição de contorno de equilíbrio, propuseram um otimizador que varre o domínio da difusividade em busca de um mínimo para a função objetivo, e acoplou tal otimizador na solução analítica da equação de difusão para a esfera. A vantagem deste último otimizador sobre outros disponíveis na literatura, é que neste otimizador não é necessário que seja estipulado um valor inicial ou uma faixa de valores para a determinação da variável de interesse, por parte do

usuário. Uma revisão da literatura possibilita constatar que são escassos os trabalhos propondo algoritmos de otimização acoplados a soluções analíticas da equação de difusão com condição de contorno convectiva, particularmente quando muitos termos da série que representa tais soluções são utilizados. Em geral, para a condição de contorno convectiva, soluções numéricas são utilizadas na descrição do processo de secagem. Esta constatação contrasta com a farta quantidade de artigos sobre o tema para a condição de contorno de equilíbrio. Uma possível razão para a falta de soluções analíticas na literatura para o problema de difusão com condição de contorno convectiva, pode ser a grande quantidade de raízes da equação característica que devem ser determinadas de modo a cobrir todo o domínio do número de Biot, quando muitos termos da série são levados em conta.

Queiroz e Nebra (2001) apresentaram um estudo sobre a cinética de secagem de bananas inteiras, usando ar quente, sob diferentes condições de temperatura e de umidade relativa do ar. Para simular numericamente a cinética de secagem usando modelos de difusão com condição de contorno convectiva, os autores usaram o método das diferenças finitas. Amendola e Queiroz (2007) descreveram a cinética de secagem de bananas discretizando a equação de difusão para um cilindro infinito, considerando volume e difusividade constantes, e condição de contorno de equilíbrio. Neste trabalho, os autores usaram coordenadas cilíndricas e o método das diferenças finitas. Silva et al. (2008) descreveu a cinética de secagem de bananas e eles assumiram que a condição de contorno do primeiro tipo fosse adequada para o processo de secagem. A partir desse ponto, uma metodologia numérica foi proposta para resolver a equação da difusão em sólidos cilíndricos. Os autores escolheram uma expressão decrescente $D = f(X, a, b)$ em que a difusividade depende do teor de umidade X . Usando um algoritmo de otimização e dados experimentais, os pesquisadores determinaram os valores dos parâmetros “a” e “b”, minimizando a função objetivo definida pelo qui-quadrado do ajuste. Mas os autores reconheceram que, se a condição de contorno de equilíbrio não for completamente aceitável para descrever o processo de secagem, a difusividade obtida deve ser interpretada apenas como uma expressão que ajusta a solução numérica aos dados experimentais.

Neste artigo, a descrição da cinética de secagem de bananas inteiras é feita usando algoritmos de otimização acoplados às soluções analíticas da equação de difusão para o cilindro infinito, pressupondo as condições de contorno de equilíbrio e convectiva para o fenômeno de transporte a ser descrito. A comparação dos resultados possibilita apontar a adequada condição de contorno para a descrição da secagem do produto. Ainda, as ferramentas utilizadas possibilitam determinar a difusividade efetiva e o coeficiente de transferência convectiva de massa e também fazer uma descrição detalhada do processo de secagem.

2. MATERIAL E MÉTODOS

No presente artigo, o modelo da difusão líquida foi considerado adequado para descrever a secagem de bananas em camada fina. Neste caso, a equação de difusão deve ser usada e, portanto, será apresentada a seguir.

2.1. Equação de Difusão

Na descrição de um processo de secagem, a equação de difusão em um sólido cuja geometria possa ser aproximada por um cilindro infinito pode ser escrita do seguinte modo (Luikov, 1968; Crank, 1992):

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_{ef} \frac{\partial X}{\partial r} \right), \quad (1)$$

em que r define a posição de um ponto em relação ao eixo central do cilindro, t é o tempo de secagem, D_{ef} é a difusividade efetiva de massa, e X é o teor de umidade em base seca. A Eq. (1) pode ser resolvida numericamente e, admitindo-se determinadas hipóteses, também pode ser resolvida analiticamente.

A determinação da solução analítica para a Eq. (1) pressupõe as seguintes hipóteses:

- o sólido deve ser considerado homogêneo e isotrópico;
- a distribuição do teor de umidade dentro do sólido deve ser inicialmente uniforme;
- o único mecanismo de transporte de água dentro do sólido é difusão líquida;
- as dimensões do sólido não variam durante a difusão;
- a difusividade efetiva não varia durante a difusão;
- para a condição de contorno convectiva, o coeficiente de transferência convectiva de massa não varia durante a difusão.

2.2. Solução Analítica para a Condição de Contorno de Equilíbrio

Para a condição de contorno do primeiro tipo, a solução da Eq. (1) é obtida por separação de variáveis, e o resultado é dado a seguir (Luikov, 1968; Crank, 1992):

$$X(r, t) = X_{eq} - (X_{eq} - X_i) \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r/R) \exp(-\mu_n^2 \frac{D_{ef}}{R^2} t) \quad (2)$$

em que $X(r, t)$ é o teor de umidade (base seca) numa posição r com relação ao eixo central do cilindro num instante t , X_{eq} é o teor de umidade para $t \rightarrow \infty$, e X_i é o teor de umidade para $t = 0$. R é o raio do cilindro, e μ_n são as raízes da equação característica

$$J_0(\mu_n) = 0, \quad (3)$$

onde J_0 é referente à função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero. O coeficiente A_n é definido a seguir:

$$A_n = \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)}, \quad (4)$$

em que J_1 é a função de Bessel do primeiro tipo e ordem um.

O valor médio $\bar{X}(t)$ de $X(r, t)$, para um dado tempo t , é determinado por meio da expressão:

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{V} \int X(r, t) dV, \quad (5)$$

em que V é o volume do cilindro.

A solução da equação de difusão para o valor médio $\bar{X}(t)$ em um cilindro infinito é obtida substituindo a Eq. (2) na Eq. (5), e o resultado é:

$$\bar{X}(t) = X_{eq} - (X_{eq} - X_i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\mu_n^2} \exp(-\mu_n^2 \frac{D_{ef}}{R^2} t). \quad (6)$$

2.3. Solução Analítica para a Condição de Contorno Convectiva

A condição de contorno convectiva é expressa através da imposição de igualdade entre o fluxo interno (difusivo) no contorno do cilindro infinito e o fluxo externo (convectivo) nas vizinhanças deste contorno, através da expressão:

$$-D_{ef} \frac{\partial X(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = h [X(r, t) \Big|_{r=R} - X_{eq}], \quad (7)$$

em que h é o coeficiente de transferência convectiva de massa.

A solução da Eq. (1), para a condição de contorno definida pela Eq. (7), também é obtida por separação de variáveis e resulta em (Luikov, 1968; Crank, 1992):

$$X(r, t) = X_{eq} - (X_{eq} - X_i) \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r/R) \exp(-\mu_n^2 \frac{D_{ef}}{R^2} t), \quad (8)$$

em que

$$A_n = \frac{2Bi}{J_0(\mu_n)[\mu_n^2 + Bi^2]}. \quad (9)$$

O parâmetro Bi é o número de Biot para a transferência de massa, μ_n são as raízes da equação característica para o cilindro infinito com condição de contorno convectiva, e são respectivamente definidos conforme as equações a seguir:

$$Bi = \frac{hR}{D_{ef}}, \quad (10)$$

e

$$\frac{J_0(\mu_n)}{J_1(\mu_n)} = \frac{\mu_n}{Bi} \quad (11)$$

Substituindo a Eq. (8) na Eq. (5), é obtida a seguinte expressão para o teor de umidade médio $\bar{X}(t)$ do sólido cilíndrico em um instante t:

$$\bar{X}(t) = X_{eq} - (X_{eq} - X_i) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\mu_n^2 \frac{D_{ef}}{R^2} t), \quad (12)$$

em que o parâmetro B_n é dado por

$$B_n = \frac{4Bi^2}{\mu_n^2 (Bi^2 + \mu_n^2)}. \quad (13)$$

Com o objetivo de determinar $\bar{X}(t)$ através da Eq. (12) para um dado número de Biot, foi criado um programa em Fortran que calcula as 30 primeiras raízes μ_n da equação característica definida pela Eq. (11). Neste programa foram especificados 452 números de Biot distintos, cobrindo a região de 0 (correspondente a uma resistência infinita ao fluxo de água na superfície) até 200 (correspondente à uma condição de contorno de equilíbrio). Então, para cada número de Biot, as primeiras 30 raízes da Eq. (11) foram determinadas. Obviamente, os cálculos efetuados resultaram em um grande banco de dados, com 13560 valores de raízes. A determinação de todas estas raízes e a sua estruturação em uma subrotina que viabiliza o processo de otimização é uma tarefa árdua, devido ao tempo demandado na realização desta tarefa. Entretanto, como será visto a seguir, a implementação computacional é uma tarefa relativamente simples.

2.4. Otimizadores

2.4.1. Solução analítica com condição de contorno de equilíbrio

Silva et al. (2009) propuseram um algoritmo para um otimizador usando a varredura do domínio para a determinação da difusividade de água, para secagens descritas pela equação de difusão com condição de contorno de equilíbrio. A função objetivo definida pelos autores foi o qui-quadrado referente ao ajuste da curva simulada aos dados experimentais (Bevington e Robinson, 1992; Taylor, 1997; Silva et al., 2009):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_p} [\bar{X}_i^{\text{exp}} - \bar{X}_i^{\text{ana}}(D_{ef})]^2 \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (14)$$

onde \bar{X}_i^{exp} é o teor de umidade médio medido experimentalmente, referente ao ponto i; $\bar{X}_i^{\text{ana}}(D_{ef})$ é o teor de umidade médio correspondente ao ponto i obtido através da solução analítica da equação de difusão; σ_i é o desvio padrão do teor de umidade médio medido experimentalmente, relativo ao ponto i; D_{ef} é a difusividade efetiva e N_p é o número de pontos experimentais. Para a condição de contorno do primeiro tipo, o qui-quadrado depende de um único parâmetro de processo, a difusividade efetiva. Assim, para cada conjunto de dados experimentais, um “ D_{ef} ” ótimo pode ser determinado através da minimização do qui-quadrado, usado como função objetivo. Se σ_i não for conhecido, ou seja, se não foi obtido nos experimentos realizados, este parâmetro deve ser feito igual a 1 para todos os pontos experimentais, isto é, todos os pontos devem ter o mesmo peso estatístico $1/\sigma_i^2$.

A Eq. (14) dá o qui-quadrado em função do valor da difusividade, que é o parâmetro que se deseja determinar. No algoritmo proposto por Silva et al. (2009), não é necessário que o usuário atribua um valor inicial ao parâmetro a ser determinado, e nem que se estipule um intervalo de busca por “ D_{ef} ” ótimo. Essencialmente, Silva et al. (2009) propuseram os seguintes passos:

- 1) Inicialmente é atribuído um valor próximo de zero (1×10^{-20}) para D_{ef} , que é substituído na Eq. (6) com uma certa quantidade de termos da série. Assim, $\bar{X}_i^{ana}(D_{ef})$ pode ser calculado nos tempos de interesse, o que possibilita determinar χ^2 para um conjunto de dados experimentais através da Eq. (14). Então, o valor da D_{ef} é dobrado, e um novo χ^2 é calculado. O novo qui-quadrado é comparado com o valor anterior. Se o novo valor for menor, D_{ef} é dobrado novamente, e outro valor para χ^2 é calculado, seguindo-se a comparação com o valor anterior. Este procedimento é repetido até que o último χ^2 calculado seja maior que o valor anterior. Dessa forma, o antepenúltimo e o último valores da D_{ef} , respectivamente denotados por D_a e D_b , definem uma região grosseira que contém o valor mínimo de χ^2 .
- 2) O intervalo definido pelo antepenúltimo e o último valores de D_{ef} é dividido por um inteiro n , estabelecendo-se novos valores para a difusividade efetiva. Tais valores são substituídos na solução da equação de difusão, seguindo-se o cálculo de $\bar{X}_i^{ana}(D_{ef})$, o que possibilita determinar χ^2 através da Eq. (14). Cada novo χ^2 deve, então, ser comparado com o valor calculado anteriormente, até que um novo mínimo seja determinado.
- 3) O passo 2 é repetido até que um critério de convergência para a difusividade efetiva seja atingido.

2.4.2. Solução Analítica com Condição de Contorno Convectiva

Quando a condição de contorno for convectiva, a Eq. (12) tem que ser utilizada na descrição da cinética de secagem de sólidos cilíndricos. Dessa forma, a função objetivo a ser minimizada passa a ser expressa do seguinte modo (Silva et al., 2010):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_p} [\bar{X}_i^{exp} - \bar{X}_i^{ana}(D_{ef}, Bi)]^2 \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (15)$$

A função objetivo, dada pela Eq. (15), depende da difusividade efetiva e também do número de Biot para transferência de massa ou, equivalentemente, do coeficiente de transferência convectiva de massa. Por outro lado, para um número de Biot especificado, a Eq. (15) passa a ser função apenas da difusividade efetiva. Dessa forma, a Eq. (15) torna-se equivalente à Eq. (14). Então, o otimizador desenvolvido por Silva et al. (2009) pode ser aplicado na minimização da Eq. (15), determinando-se um valor mínimo para a difusividade efetiva referente ao número de Biot especificado. Admitindo que a difusividade efetiva D_{ef} e o coeficiente de transferência convectiva de massa h sejam parâmetros independentes entre si, o procedimento de minimização apresentado pode ser repetido para todos os 452 números de Biot que cobrem o domínio de 0 até 200. Após a varredura de todos os números de Biot, deve ser feita a identificação do menor qui-quadrado entre os 452 mínimos determinados. Vale salientar que, como todo o domínio do número de Biot para a transferência de massa é varrido, não é necessário que valores iniciais ou faixas de valores sejam estipulados para a busca por valores ótimos para D_{ef} e Bi e, conseqüentemente, h .

Uma vez que a difusividade efetiva e o número de Biot tenham sido determinados através do algoritmo de otimização proposto na Seção 2.4 para um conjunto de dados experimentais, a Eq. (8) pode ser usada para determinar a distribuição do teor de umidade do sólido cilíndrico como função do raio r , entre 0 e R , para um dado instante de tempo. Já a Eq. (12) deve ser usada para descrever a cinética de secagem do produto.

Os otimizadores apresentados no presente artigo para serem acoplados às soluções analíticas referentes ao cilindro infinito foram desenvolvidos em um computador Intel Pentium IV com 1 GB (RAM). A compilação do código fonte foi feita no estúdio Compaq Visual Fortran (CVF) 6.6.0 Professional Edition, usando uma opção de programação denominada QuickWin Application, enquanto que a plataforma foi Windows XP. Por outro lado, as soluções analíticas da equação de difusão para o cilindro infinito foram dadas pelos 30 primeiros termos das Eqs. (6) e (12), que relacionam o valor médio de X e um dado instante t . O critério de convergência estipulado para a determinação da difusividade para um número de Biot especificado foi de 1×10^{-15} .

A análise estatística dos resultados obtidos foi feita através do LAB Fit Curve Fitting Software (www.labfit.net). Na análise dos resultados, foram utilizados como indicadores estatísticos o coeficiente de determinação R^2 e o qui-quadrado χ^2 (Bevington e Robinson, 1992; Taylor, 1997). Por outro lado, no processo de digitalização de dados experimentais disponíveis na literatura foi usado o software xyExtract Graph Digitizer (http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/index_xyExtract.htm).

2.5. Dados Experimentais

Os otimizadores acoplados às soluções analíticas para o cilindro infinito foram usados para a determinação da difusividade efetiva e do coeficiente de transferência convectiva de massa relativo aos dados experimentais disponíveis em Silva et al. (2008) referentes à secagem de banana em camada fina, usando ar quente. O teor de umidade inicial e de equilíbrio do produto foram respectivamente $X_i = 3,214$ (b.s.) e $X_{eq} = 0,0559$ (b.s.), a temperatura do ar de secagem foi de $50\text{ }^\circ\text{C}$ com umidade relativa de 20%, e a velocidade do ar foi mantida em $1,5\text{ ms}^{-1}$. Silva et al. (2008) consideraram todos os pesos estatísticos iguais a 1, o que também foi feito no presente artigo. Por outro lado, o raio da banana é $R = 1,522\text{ cm}$, e o produto foi considerado como um cilindro infinito.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Condição de Contorno de Equilíbrio

Usando o algoritmo disponibilizado por Silva et al. (2009) para a otimização de processos difusivos com condição de contorno de equilíbrio acoplado aos trinta primeiros termos da Eq. (6), é obtido o ajuste mostrado na Fig. 1.

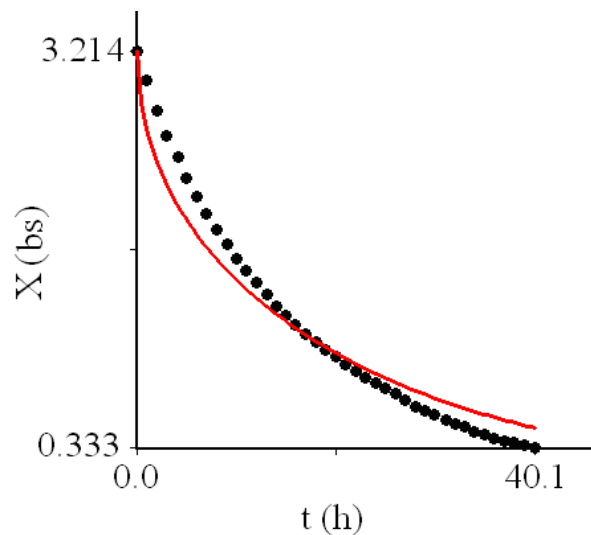


Figura 1. Cinética de secagem de banana para a condição de contorno de equilíbrio.

Considerando o número de Biot infinito, foi obtido $D_{ef} = 4,567 \times 10^{-10}\text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ($D_{ef} = 1,644 \times 10^{-6}\text{ m}^2\text{h}^{-1}$), com os indicadores estatísticos para o ajuste dados por $R^2 = 0,987774$ e $\chi^2 = 1,1734$. Os indicadores estatísticos do ajuste são considerados muito ruins e, por isto, Silva et al. (2008) propuseram uma difusividade variável em função do teor de umidade local, visando ajustar a solução analítica aos dados experimentais, mantendo a condição de contorno de equilíbrio para o processo difusivo. Mas como os próprios autores reconheceram, este procedimento deve ser interpretado apenas como um recurso para ajustar a solução numérica aos dados experimentais, usando condição de contorno de equilíbrio.

3.2 Condição de Contorno Convectiva

Acoplado-se os primeiros trinta termos da Eq. (12) ao algoritmo de otimização proposto por Silva et al. (2010) para a condição de contorno convectiva, e ajustando esta equação aos dados experimentais, um conjunto de resultados é obtido para os vários números de Biot de transferência de massa estipulados. Assim pode-se estabelecer uma relação entre o qui-quadrado (χ^2) de cada ajuste e o correspondente número de Biot (Bi), especificado de 0 até 200. O gráfico mostrando χ^2 versus Bi para os dados experimentais da secagem de banana pode ser observado na Fig. 2.

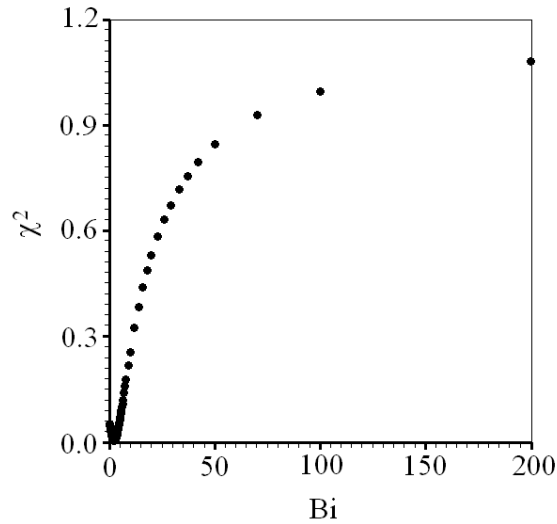


Figura 2. Qui-quadrado versus o número de Biot para os valores especificados entre 0 e 200.

Uma inspeção na Fig. 2 possibilita concluir que o menor qui-quadrado corresponde a um número de Biot entre 0 e 5. Assim, o gráfico da Fig. 2 pode ser ampliado nesta região, que é a região próxima do valor mínimo para χ^2 , conforme é mostrado através da Fig. 3.

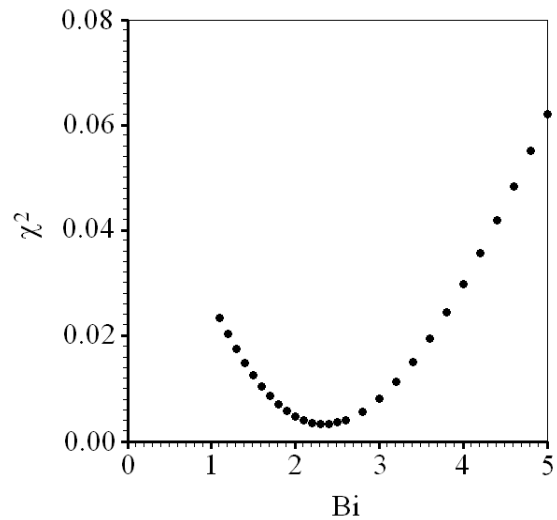


Figura 3. Destaque do gráfico de qui-quadrado versus o número de Biot nas vizinhanças do ponto ótimo.

Para os dados experimentais da secagem de banana, o número de Biot referente ao menor qui-quadrado é $Bi = 2,35$, correspondente a uma difusividade efetiva $D_{ef} = 1,336 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ($D_{ef} = 4,811 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ h}^{-1}$), o que possibilita calcular o coeficiente de transferência convectiva de massa: $h = 2,064 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$ ($h = 7,429 \times 10^{-4} \text{ m h}^{-1}$). Assim, é possível desenhar um gráfico que representa a cinética de secagem de bananas, mostrando também os dados experimentais, o que é feito através da Fig. 4.

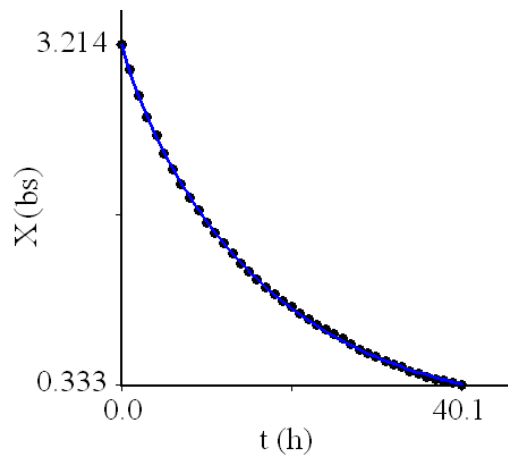


Figura 4. Cinética de secagem de banana para a condição de contorno convectiva.

Os indicadores do ajuste, obtidos através da metodologia de otimização usada neste artigo, são os seguintes: $R^2 = 0,999880$ e $\chi^2 = 3,2443 \times 10^{-3}$. Um resumo de todos os resultados obtidos pode ser dado através da Tab. 1.

Tabela 1. Parâmetros ótimos e indicadores estatísticos para as duas condições de contorno analisadas para a descrição da secagem de bananas.

	$D_{ef} (m^2 s^{-1})$	$h (ms^{-1})$	R^2	χ^2
Primeiro tipo	$4,567 \times 10^{-10}$	-	0,987774	1,1734
Terceiro tipo	$1,336 \times 10^{-9}$	$2,064 \times 10^{-7}$	0,999880	$3,2443 \times 10^{-3}$

Diferentemente de muitos grãos, em que a condição de contorno de equilíbrio é usada com sucesso na descrição da cinética de secagem (BROOKER, 1992), no caso de bananas, uma inspeção na Tab. 1 indica que esta condição de contorno é totalmente inadequada, quando comparada com a condição, de contorno convectiva.

3.3. Discussão

Ao estudar a cinética da secagem de arroz em casca, Silva et al. (2010) mostrou que, embora a condição de contorno adequada ao processo difusivo fosse convectiva, a condição de contorno de equilíbrio também era aceitável para descrever o processo. Entretanto, no caso da secagem de bananas, considerando a difusividade constante, apenas a condição de contorno convectiva é satisfatória na descrição do processo difusivo, conforme a discussão a seguir.

A Fig. 4 e a Tab. 1 possibilitam afirmar que a equação de difusão para o cilindro infinito com condição de contorno convectiva descreve satisfatoriamente o processo de secagem. Conforme pode ser observado na Tab. 1, os indicadores estatísticos referentes aos resultados obtidos considerando a condição de contorno convectiva são significativamente melhores que aqueles no qual a condição de contorno de equilíbrio é considerada. Por exemplo, o qui-quadrado do ajuste referente à otimização com condição de contorno convectiva é reduzido 362 vezes com relação à otimização considerando a condição de contorno do primeiro tipo.

Em muitos processos de secagem de sólidos cilíndricos, como é o caso de bananas, o encolhimento é tão significativo que este efeito não pode ser descartado na descrição de tal processo. Em adição, pode acontecer que os parâmetros termo-físicos sejam variáveis. Nestes casos, a solução analítica não é apropriada para descrever o processo difusivo, que pode ser melhor descrito por soluções numéricas. Mas mesmo nestes casos, o otimizador proposto e acoplado à solução analítica da equação de difusão para um cilindro infinito é útil porque, através da metodologia apresentada, podem-se extrair resultados que servem como valores iniciais para outros processos de otimização, particularmente quando tal processo envolve a solução numérica da equação de difusão.

Uma pergunta que poderia ser feita acerca dos resultados obtidos na descrição da cinética de secagem via equação de difusão com condição de contorno convectiva é a seguinte: se existe um forte encolhimento durante a secagem, que não foi considerado, porque os resultados são tão bons? Uma possível explicação é a seguinte: durante a secagem ocorre um forte encolhimento do produto e ocorre, também, uma modificação da difusividade efetiva de massa, devido às modificações ocorridas na estrutura interna do produto, devido ao encolhimento. Como estes dois fenômenos foram simultaneamente desconsiderados, nas hipóteses formuladas para a modelagem matemática, é possível que os seus efeitos mutuamente se cancelem.

Embora a determinação das raízes da equação característica do cilindro infinito e a sua organização em tabelas acessíveis ao software desenvolvido seja uma tarefa árdua, a implementação computacional do algoritmo é bastante simples, e esta é uma característica favorável à metodologia usada neste artigo. Por outro lado, o tempo de execução do software desenvolvido depende fortemente do número de dados experimentais utilizados na realização do ajuste. No

presente caso, por exemplo, para um conjunto de 41 pares (t, \bar{X}) , o tempo total demandado na determinação dos parâmetros foi de 28 s. Apesar de que este tempo possa ser considerado elevado, a possível lentidão do processo é compensada pelo fato da implementação computacional do algoritmo ser bastante simples, uma vez que tenham sido determinadas todas as raízes da equação característica relativa ao cilindro infinito. Além disso, no processo de otimização, não há a necessidade, por parte do usuário, de informar valores iniciais ou faixas de valores para os parâmetros a serem determinados, o que é uma característica muito útil, por facilitar tal processo de otimização, cabendo ao usuário do algoritmo apenas informar o conjunto de dados experimentais.

4. CONCLUSÕES

Conforme foi percebido neste artigo, a superfície externa do corpo não entra em equilíbrio com o ar de secagem imediatamente. Assim, na descrição da secagem de bananas, a condição de contorno adequada para o problema é a convectiva, que considera o efeito resistivo com relação ao fluxo de umidade na superfície do sólido.

Conforme foi observado, os indicadores estatísticos relativos ao ajuste considerando a condição de contorno convectiva são muito melhores que aqueles considerando a condição de contorno de equilíbrio. O coeficiente de determinação passou de 0,987774 para 0,999880, enquanto que o qui-quadrado passou de 1,1734 para $3,2443 \times 10^{-3}$. Sob o ponto de vista da duração do processo de otimização, o tempo de execução passou de cerca de 8 s (condição de contorno de equilíbrio) para 28 s (condição de contorno convectiva).

Com relação ao algoritmo de otimização usado para a determinação de D_{ef} e h , pode-se concluir que tal algoritmo produz resultados compatíveis com os valores esperados para estes parâmetros. A principal vantagem deste algoritmo é o fato de não ser necessário informar valores iniciais (ou faixas de valores) para os parâmetros a serem determinados, por parte do usuário. Por tratar-se de solução analítica, a desvantagem é a imposição de volume e parâmetros termo-físicos constantes, durante o processo de secagem. Mas mesmo quando tais parâmetros forem variáveis, os resultados obtidos com a presente metodologia podem ser utilizados como valores iniciais em outros processos de otimização que incluem estas restrições.

5. REFERÊNCIAS

AMENDOLA, M.; QUEIROZ, M. R. Mathematical methodologies for calculating the mass diffusion coefficient of bananas during drying. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v. 11, n. 6 p. 623-627, 2007.

BEVINGTON P. R.; ROBINSON, D. K. *Data reduction and error analysis for the physical sciences*. Boston: WCB/McGraw-Hill, Second Edition, 1992, 328 p.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Transport phenomena*. 2nd Ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001, 912 p.

BROOKER, D. B.; BAKKER-ARKEMA, F. W.; HALL, C. W. *Drying and storage of grains and oilseeds*. Westport: The AVI Publishing Company, 1992, 450 p.

CRANK, J. *The mathematics of diffusion*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1992, 414 p.

DA SILVA, C. K. F.; DA SILVA, Z. E.; MARIANI, V. C. Determination of the diffusion coefficient of dry mushrooms using the inverse method. *Journal of Food Engineering*, v. 95, n. 1, p. 1-10, 2009.

DOYMAZ, I. Drying behaviour of green beans. *Journal of Food Engineering*, v. 69, n. 1, p. 161-165, 2005.

ERDOGDU, F. Mathematical approaches for use of analytical solutions in experimental determination of heat and mass transfer parameters. *Journal of Food Engineering*, v. 68, n. 2, p. 233-238, 2005.

GASTÓN, A. L.; ABALONE, R. M.; GINER, S. A. Wheat drying kinetics. Diffusivities for sphere and ellipsoid by finite elements. *Journal of Food Engineering*, v. 52, n. 1, p. 313-322, 2002.

HACIHAFIZOGLU, O.; CIHAN, A.; KAHVECI, K.; LIMA, A. G. B. A liquid diffusion model for thin-layer drying of rough rice. *European Food Research and Technology*, v. 226, n. 4, p. 787-793, 2008.

LIMA, A. G. B. Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de banana. 1999. 244 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil.

LIMA, D. R.; FARIAS, S. N.; LIMA, A. G. B. Mass transport in spheroids using the Galerkin method. *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, v. 21, n. 1, p. 667-680, 2004.

LUIKOV, A. V. Analytical heat diffusion theory, Academic Press, Inc. Ltd, London 1968, 685 p.

MARIANI, V. C.; LIMA, A. G. B.; COELHO, L. S. Apparent thermal diffusivity estimation of the banana during drying using inverse method. Journal of Food Engineering v. 85 n. 4, p. 569–579, 2008.

QUEIROZ, M. R; NEBRA, S. A. Theoretical and experimental analysis of the drying kinetics of bananas. Journal of Food Engineering, v. 4, n. 2, p. 127-132, 2001.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA, D. D. P. S.; SILVA, C. D. P. S. Numerical simulation of the water diffusion in cylindrical solids. International Journal of Food Engineering, v. 4: n. 2, art. 6, 2008.

SILVA, W. P.; PRECKER, J. W.; SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA, D. D. P. S. Determination of the effective diffusivity via minimization of the objective function by scanning: application to drying of cowpea. Journal of Food Engineering, v. 95, n. 2, p. 298-304, 2009.

SILVA, W. P.; PRECKER, J.W.; SILVA, C.M.D.P.S.; GOMES, J.P. Determination of effective diffusivity and convective mass transfer coefficient for cylindrical solids via analytical solution and inverse method: Application to the drying of rough rice. Journal of Food Engineering, v. 98, n. 3, p. 302-308, 2010.

TAYLOR, J. R.. An introduction to error analysis. 2.ed. Sausalito. California: University Science Books, 1997, 327 p.

WU, B.; YANG, W.; JIA, C. A three-dimensional numerical simulation of transient heat and mass transfer inside a single rice kernel during the drying process. Biosystems Engineering, v. 87, n. 2, p. 191-200, 2004.

6. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

SIMULTANEOUS DETERMINATION OF THE EFFECTIVE DIFFUSIVITY AND THE CONVECTIVE MASS TRANSFER COEFFICIENT DURING THE DRYING OF BANANAS WHOLE USING ANALYTICAL SOLUTIONS AND THE INVERSE METHOD

Cleide M. D. P. S e Silva, cleidedps@uol.com.br¹

Vera S. O. Farias, vera-solange@uol.com.br²

Pedro L. Nascimento; pedropln@yhoo.com.br¹

Wilton Pereira da Silva, wiltonps@uol.com.br¹

Josivanda Palmeira Gomes, josi@deag.ufcg.edu.br³

Marcos A. A. Lins; ma1809al@yahoo.com.br¹

¹Universidade Federal de Campina Grande, UAF, PB, Brasil,

²Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, I.C.T., Campus de Diamantina, MG, Brasil

³Universidade Federal de Campina Grande, UAEAg, PB, Brasil

Abstract: *In this article, a methodology is used for the simultaneous determination of the effective diffusivity and the convective mass transfer coefficient in porous solids which can be considered as an infinite cylinder during drying. Two models are used for optimization and simulation of the drying: model 1 (constant volume and diffusivity, with equilibrium boundary condition), and model 2 (constant volume and diffusivity with convective boundary condition). Optimization algorithms based on the inverse method were coupled to the analytical solutions, and these solutions can be fitted to the experimental data of the drying kinetics. It was made an application of optimization methodology to describe the drying kinetics of whole bananas, using experimental data available in literature. The statistical indicators enable to affirm that the solution of diffusion equation with convective boundary condition generates much better results than those with the equilibrium boundary condition.*

Keywords: drying kinetics, algorithm optimization, diffusion, porous media, infinite cylinder.