

PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO USANDO A EXPANSÃO DE KARHUNEM-LOÈVE NO AMBIENTE DAKOTA

Lira Júnior, José Dásio, josedasio@yahoo.com.br¹
Willmersdorf, Ramiro Brito, ramiro@willmendorf.net²
Horowitz, Bernardo, horowitz@ufpe.br¹

¹Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Civil,
Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n – Cid. Universitária – Recife – Brasil. CEP: 50740-530

²Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Mecânica,
Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n – Cid. Universitária – Recife – Brasil. CEP: 50740-530

Resumo: *A inclusão da incerteza no desenvolvimento de simulações computacionais relacionadas a reservatório de petróleo vem tornando-se essencial na busca de se alcançar estimativas ótimas de produção e lucro. O conhecimento das propriedades petrofísicas dos reservatórios é sempre incerto, e esta incerteza deve ser considerada no desenvolvimento de simulações computacionais. O escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo é determinado a partir dos valores e da distribuição espacial das propriedades petrofísicas, e, devido à incerteza relacionada a estas propriedades, os resultados de simulações de reservatórios também devem ser considerados incertos. É evidente que a incerteza em variáveis de entrada do modelo computacional afeta diretamente as estimativas de produção e o gerenciamento dos campos de petróleo. Técnicas clássicas para propagação de incertezas, como a aplicação do método de Monte Carlo, raramente são viáveis para problemas realistas de simulação de reservatórios. Estas técnicas demandam um número grande de realizações para a convergência, o que implica em custos computacionais impraticáveis quando cada realização requer em uma simulação computacional de grande porte. Neste trabalho, as propriedades petrofísicas do reservatório são consideradas como campos estocásticos de segunda ordem. Estes campos são representados em termos de uma expansão espectral global, a expansão de Karhunen-Loève, que é uma expansão em termos dos autovalores e autovetores da matriz de covariância espacial do campo, e de variáveis aleatórias normais padrão. Em muitos casos, esta expansão pode ser truncada em poucos termos, de forma que as propriedades estocásticas do campo podem ser representadas por um pequeno número de variáveis aleatórias. O cálculo dos autopares da matriz de covariância espacial pode ser também um problema intratável para reservatórios de grande porte, neste projeto foi empregada a técnica da matriz núcleo, esta técnica realiza o cálculo dos autopares indiretamente, de maneira muito mais eficiente. Os algoritmos foram implementados localmente em Matlab/Octave, e as simulações de reservatório foram realizadas com o programa comercial IMEX. Como alternativa ao método de Monte Carlo, foram testados métodos baseados em Caos Polinomial e Colocação Estocástica, disponíveis no sistema computacional DAKOTA (Design Analysis Kit for Optimization and Terascale Applications). O Dakota é um sistema de código aberto para otimização, quantificação de incertezas, confiabilidade e estimativa de parâmetros, entre outras capacidades para análise de problemas de grande porte de engenharia. A interface entre o DAKOTA e o IMEX foi feita com programas de pré e pós processamento escritos em Matlab/Octave. Foram realizados estudos para determinar as ordens de expansão e de integração numérica adequada para a expansão em Caos Polinomial, estudos sobre a ordem de interpolação adequada para a Colocação Estocástica, e estudos comparativos de qualidade e custo computacional entre estas duas técnicas, para problemas modelo e para um problema de grande porte. Finalmente, estas técnicas foram comparadas ao método de Monte Carlo.*

Palavras-chave: *Reservatórios de Petróleo, Propagação de incertezas, Caos Polinomial, Karhunen-Loève.*

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de simulações de escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo é parte essencial no processo de gerenciamento de campos de petróleo. Adicionalmente, nosso conhecimento sobre o reservatório é sempre incerto e esta incerteza deve ser considerada nas simulações computacionais. O escoamento de fluidos em reservatórios

de petróleo é determinado a partir dos valores e da distribuição espacial das propriedades petrofísicas, e, devido à incerteza relacionada a estas propriedades, os resultados de simulações de reservatórios também devem ser considerados incertos.

Propagação de incertezas significa determinar estatísticas de uma determinada resposta referente a um modelo matemático ou computacional, a partir de distribuições de probabilidades nos parâmetros de entrada. O modelo computacional utilizado neste trabalho foram as equações de fluxo multifásico em meios porosos, resolvidas de acordo com o modelo black-oil de um simulador comercial. O campo de permeabilidades será considerado como um campo estocástico, caracterizando a incerteza numa das variáveis de entrada no modelo.

É evidente que a incerteza em variáveis de entrada do modelo computacional afeta diretamente as estimativas de produção e o gerenciamento dos campos de petróleo. Técnicas clássicas para propagação de incertezas, como a aplicação do método de Monte Carlo, raramente são viáveis para problemas realistas de simulação de reservatórios. Estas técnicas demandam um número grande de realizações para a convergência, o que implica em custos computacionais impraticáveis quando cada realização requer em uma simulação computacional de grande porte.

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo de propagação das incertezas em reservatórios de petróleo considerando as incertezas nos campos de permeabilidades, calculando então o valor presente líquido médio do reservatório num determinado período de tempo.

Existem evidências numéricas de que o problema matemático de simulação (estocástica) de reservatórios possui uma dimensão pequena, significando que o problema estocástico depende apenas de um número relativamente pequeno de variáveis aleatórias. Considerando as propriedades petrofísicas do reservatório como campos estocásticos de segunda ordem, uma forma possível de descrever os campos randômicos consiste em utilizar uma expansão de Karhunen-Loeve (K-L). A expansão de K-L é uma expansão em termos dos autovalores e autovetores da matriz de covariância espacial do campo, e de variáveis aleatórias normais padrão. Com a utilização da expansão de K-L, o campo de permeabilidades é parametrizado em termos de um pequeno conjunto de variáveis independentes. O cálculo dos autovetores da matriz de covariância espacial pode ser também um problema intratável para reservatórios de grande porte, e neste projeto foi empregada a técnica da matriz núcleo que realiza este cálculo indiretamente, de maneira muito mais eficiente.

Os algoritmos relacionados aos estudos de propagação de incertezas foram implementados em Matlab/Octave, e as simulações de reservatório foram realizadas com o programa comercial IMEX.

Como alternativa ao método de Monte Carlo, foram testados métodos baseados em Caos Polinomial e Colocação Estocástica, disponíveis no sistema computacional DAKOTA (Design Analysis Kit for Optimization and Terascale Applications). O Dakota é um sistema de código aberto para otimização, quantificação de incertezas, confiabilidade e estimativa de parâmetros, entre outras capacidades para análise de problemas de grande porte de engenharia. A interface entre o DAKOTA e o IMEX foi feita com programas de pré e pós processamento escritos em Matlab/Octave. Foram realizados estudos para determinar ordens de expansão e ordens de integração numérica adequada para a expansão em Caos Polinomial, estudos sobre a ordem de interpolação adequada para a Colocação Estocástica e estudos comparativos de qualidade e custo computacional entre estas duas técnicas aplicadas a um problema modelo. Finalmente, estas técnicas foram comparadas ao método de Monte Carlo.

2. EXPANSÃO DE KARHUNEM-LOEVE

A partir da consideração que o campo de permeabilidades do reservatório é um campo estocástico, várias são as possibilidades de realizações. Com o objetivo de honrar as características geológicas e geofísicas do reservatório, as realizações são obtidas com o auxílio de técnicas geoestatísticas utilizadas a partir de medições em poços e das medições sísmicas no reservatório. Neste trabalho as realizações serão criadas a partir de uma função de covariância conhecida, como mostrado por Ghanem (1998), considerando que no futuro realizações reais de reservatórios poderão ser utilizadas. A função de covariância usada inicialmente está mostrada na Eq. (1):

$$\text{COV}(x, y) = \sigma_E e^{-\frac{(|x_1 - y_1|)}{b_1} - \frac{(|x_2 - y_2|)}{b_2}} \quad (1)$$

Onde (x_1, x_2) e (y_1, y_2) são as coordenadas dos pontos x e y , b_1 e b_2 são comprimentos de correlação e σ_E é o desvio padrão.

A expansão de K-L é uma técnica que permite representar campos aleatórios estacionários e os fracamente estacionários com o conhecimento explícito de funções de covariância. Sendo assim, um campo aleatório pode ser representado como uma série, envolvendo um conjunto de funções determinísticas com seus respectivos coeficientes aleatórios, como apresentado por Sarma et al. (2008).

Considerando y_k um conjunto de realizações discretas centradas (média zero) condicionadas ou não condicionadas de um campo estocástico, com $k = 1, \dots, N_r$ ($y_k \in R^{N_G}$), A matriz de covariância das realizações pode ser calculada com a seguinte expressão, de acordo com Scholkopf et al. (1996):

$$C = \frac{1}{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} y_j y_j^T \quad (2)$$

Onde N_r é o número de realizações, que deve ser grande o bastante para garantir a convergência da matriz de covariância C .

A expansão de K-L discreta, usada para gerar realizações com a matriz de covariância C é apresentada em Sarma et al. (2008):

$$y = E\Lambda^{1/2}\xi \quad (3)$$

Onde E é a matriz dos auto-vetores da matriz de covariância C , Λ é a matriz diagonal de autovalores de C , e ξ é um vetor de variáveis aleatórias não correlacionadas.

A expansão de K-L é uma parametrização de y na forma $y = f(\xi)$ onde a relação funcional é linear. A matrix C é do tamanho $N_c \times N_c$. O tamanho máximo de E como também de Λ é $N_c \times N_c$, sendo o vetor ξ de tamanho $N_c \times 1$.

O desenvolvimento da expansão de K-L implica no seguinte problema de autovetores e autovalores, Scholkopf et al. (1996) :

$$\lambda v = Cv \quad (4)$$

Onde λ é um autovalor de C , e v um autovetor de C . A solução de equação com algoritmos padrões como SVD (Single Value Decomposition) é um processo computacionalmente caro, com ordem de complexidade $O(N_c^3)$, Golub e Loan (1996). Em problemas reais de reservatórios de petróleo, devido ao alto custo computacional, fica impossível resolver esta equação numericamente. Uma alternativa para calcular os autovetores e autovalores da Eq.(4) é uma formulação conhecida como técnica da matriz núcleo, Sarma et al. (2008).

2.1. Expansão de Karhunen-Loeve com a Utilização da Matriz núcleo

A expansão de K-L como comentado anteriormente possui uma grande desvantagem, o alto custo computacional, problema que pode ser resolvido com a utilização da matriz núcleo. A partir da Eq. (4), e com a formulação da matriz de covariância dada pela Eq. (2), de acordo com Scholkopf et al. (1996), a seguinte equação é obtida:

$$Cv = \frac{1}{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} (y_j \cdot v) y_j \quad (5)$$

A partir de equação acima, temos que todos os vetores soluções v com $\lambda \neq 0$ encontram-se no espaço gerado por N_r realizações (y_1, \dots, y_{N_r}) , portanto, a Eq. (5) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\lambda(y_k \cdot v) = (y_k \cdot Cv) \quad (6)$$

Com $k = 1, \dots, N_r$, Também a partir da equação 5, pode-se afirmar que existe um coeficiente α_j , que pode ser expresso da seguinte forma (Scholkopf, 1996):

$$v = \sum_{j=1}^{N_r} \alpha_j y_j \quad (7)$$

Combinando as equações 4 e 5, temos:

$$\lambda \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i (y_k \cdot y_i) = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i \left(y_k \cdot \sum_{j=1}^{N_r} y_j \right) (y_j \cdot y_i) \quad (8)$$

Definindo a matriz K de tamanho $N_r \times N_r$ como $K_{ij} = (y_i \cdot y_j)$, ou seja, K_{ij} é o produto interno das realizações i e j , logo a Eq. (8) pode ser escrita da seguinte forma:

$$N_r \lambda K \alpha = K^2 \alpha \quad (9)$$

A matriz K é conhecida como matriz Núcleo, tem tamanho $N_r \times N_r$, lembrando que a matriz de covariância C é de tamanho $N_c \times N_c$. $K_{ij} = (y_i \cdot y_j)$ é chamado de polinômio kernel de ordem 1. A Eq. (9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$N_r \lambda \alpha = K \alpha \quad (10)$$

A equação 10 é conhecida como problema de autovalor do núcleo. Resolver esta equação é o mesmo que resolver a Eq. (4). Logo, λ são os autovalores da matriz de covariância C diferentes de zeros e α seus respectivos autovetores.

A principal vantagem de utilizar este método é que podemos resolver a Eq. (10), em vez de resolver diretamente a Eq. (4), lembrando que geralmente $N_r \ll N_c$.

A matriz núcleo K foi calculada utilizando da seguinte forma:

$$K_{ij} = (y_i \cdot y_j)^d \quad (11)$$

A expansão de K-L desenvolvida no espaço original das realizações R^{N_c} , com matriz núcleo de polinômios de primeira ordem ($d = 1$), somente irá preservar os momentos de primeira e segunda ordem (estatística de dois pontos), ou seja, não poderá representar canais de permeabilidade.

3. EXPANSÃO EM CAOS POLINOMIAL

A expansão em caos polinomial permite que um processo aleatório de segunda-ordem seja expandido em termos de polinômios Hermitianos em variáveis aleatórias Gaussianas, como pode ser visto em Eldred et al. (2008). É importante lembrar que processos aleatórios de segunda-ordem são processos de variância finita, ou seja, a maioria dos processos físicos (Sarma, 2006).

Um caos polinomial é uma expressão em termos de polinômios ortogonais em variáveis estocásticas, composta por um somatório infinito no grau do polinômio de somatórios infinitos no número de variáveis aleatórias de polinômios ortogonais. Uma variável aleatória de segunda-ordem $S(\theta)$, sendo θ um evento independente, pode ser representada da seguinte forma (Xiu, 2003):

$$S(\theta) = a_0 \phi_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \phi_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \phi_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \phi_3(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \xi_{i_3}(\theta)) + \dots \quad (12)$$

$\phi_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$ são os polinômios Hermitianos de ordem n em função das variáveis aleatórias Gaussianas Independentes $(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$, com média zero e variância unitária. De acordo com Xiu e Karniadakis (2003), a expressão geral para os polinômios hermitianos ϕ_n é dada por :

$$\phi_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}) = \exp\left(\frac{1}{2} \xi^T \xi\right) (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^T \xi\right) \quad (13)$$

Onde $\xi = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$ é o vetor com n variáveis aleatórias Gaussianas. A definição de ortogonalidade depende da definição de um produto interno, que no caso é dada pela Eq. (14)

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_{\xi_1 \xi_2 \dots} \phi_i(\xi_1, \xi_2, \dots) \phi_j(\xi_1, \xi_2, \dots) \rho(\xi_1, \xi_2, \dots) d\xi_1 d\xi_2 \dots \quad (14)$$

Nesta equação, $\rho(\xi_1, \xi_2, \dots)$ é a densidade conjunta de probabilidade das variáveis incertas. Os polinômios ϕ_i e ϕ_j são ortogonais quando o produto interno definido pela Eq. (14) é nulo.

É possível mostrar que os polinômios de grau k , em k variáveis, mostrados na Eq. (12), podem ser escritos como produtos de k polinômios de grau k em uma variável, isto é:

$$\phi_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = \psi_k(\xi_1)\psi_k(\xi_2)\dots\psi_k(\xi_k) = \Psi_k(\xi), \quad (15)$$

Onde fica subentendido que $\psi_o(\xi_i) = 1, i = 1, \dots, k$ e que ξ representa o conjunto das variáveis incertas. Com esta observação, é possível reescrever a Eq. (12) em uma forma mais convencional, como um somatório infinito de termos mostrado na Eq. (16).

$$S(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Psi_i(\xi). \quad (16)$$

Nesta equação α_i são os coeficientes a determinar, e os polinômios $\Psi(\xi)$ são conhecidos, sendo produtos de polinômios ortogonais unidimensionais como mostrado na Eq. (15). As Equações 12 e 16 são igualdades exatas, em termos probabilísticos, mas não são de uso prático, pois dependem de um número infinito de variáveis aleatórias e de polinômios de grau infinito. Na prática, truncamos as duas coisas: usa-se um número finito de variáveis e o grau dos polinômios é limitado também, e em geral, limitado a um grau relativamente baixo, sendo a Eq. (16) reescrita como

$$S(\xi) \approx \sum_{i=1}^p \alpha_i \Psi_i(\xi). \quad (17)$$

É claro que agora o somatório é apenas uma aproximação para a função desconhecida, mas mostra-se que para funções que atendem a alguns requisitos a convergência é muito rápida. O número de coeficientes indeterminados α_i é dado por

$$N = \frac{(n+p)!}{n!p!}, \quad (18)$$

Onde n é o número de variáveis incertas e p é o grau do polinômio empregado (admitindo-se aqui o uso da mesma ordem de aproximação para todas as variáveis incertas).

O cálculo dos coeficientes da expansão referente a Eq. (17) pode ser feito de duas formas. A técnica mais consistente teoricamente é considerar a Eq. (17) como uma igualdade, e projetar cada lado desta igualdade ao longo de cada direção da base, isto é

$$\langle S, \Psi_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p \alpha_i \Psi_i, \Psi_k \right\rangle \quad (19)$$

Como os polinômios são ortogonais, o produto escalar do lado direito na Eq. (19) só é diferente de zero para $i = k$. Assim, pode-se escrever

$$\alpha_i = \frac{\langle S, \Psi_i \rangle}{\langle \Psi_i^2 \rangle} = \frac{1}{\langle \Psi_i^2 \rangle} \int_{\xi_1 \dots \xi_k} S(\xi_1, \dots, \xi_k) \Psi_i(\xi_1, \dots, \xi_k) \rho(\xi_1, \dots, \xi_k) d\xi_1 \dots d\xi_k. \quad (20)$$

O denominador da Equação 20 pode ser computado analiticamente, e é tabelado para as famílias de polinômios ortogonais empregados na propagação de incertezas. O numerador, no entanto, é uma integral multidimensional que precisa ser avaliada para cada problema. A técnica padrão para a avaliação desta integral é a quadratura numérica, com pontos de integração e pesos determinados segundo fórmulas Gaussianas. A função S deve ser avaliada para cada ponto de integração, e como o integrando é relativamente “complicado”, podem ser necessários muitos pontos de integração ao longo de cada dimensão para que estes coeficientes sejam avaliados precisamente. O problema com esta técnica é que o número de pontos necessário para computar esta integral cresce exponencialmente com o número de variáveis incertas do problema.

Uma outra alternativa é usar regressão linear, resolvendo um problema de mínimos quadrados linear da forma

$$\Psi \alpha = S \quad (21)$$

Onde α é um vetor com os coeficientes a determinar, o vetor S contém valores da função desconhecida calculados para um conjunto de pontos pré-determinados, empregando um esquema de projeto de experimentos em computador,

por exemplo e a matriz Ψ contém os polinômios avaliados nestes pontos. O número total de avaliações de função necessárias com esta técnica é dado por

$$N = 2 \frac{(n+p)!}{n!p!}, \quad (22)$$

O que pode ser bem mais econômico do que a quadratura multidimensional.

4. APLICAÇÃO EM RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO

As técnicas para estudos de propagação de incertezas apresentadas foram aplicadas num caso de um reservatório de petróleo com injeção de gás, este caso é apresentado em Aziz (1981). O exemplo é também conhecido como problema SPE 1 (Computer Modeling Group, 2006) no tutorial do IMEX (Computer Modeling Group, 2006).

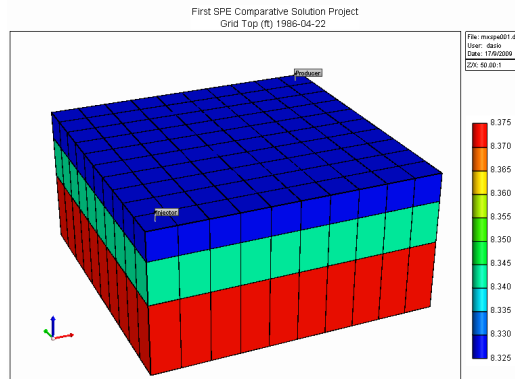


Figura 1. Modelo do reservatório com injeção de gás.

Neste trabalho empregou-se as técnicas de propagação de incertezas presente no sistema DAKOTA, Eldred et al. (2008). As simulações de reservatórios foram executadas no IMEX (Computer Modeling Group, 2006). Os programas de pré e pós processamento para intercâmbio de dados entre o DAKOTA e o IMEX foram escritos e implementados em Octave (Gnu), uma versão da linguagem Matlab para o sistema operacional Linux.

No problema original proposto existem dois poços, um injetor e outro produtor. O reservatório possui três camadas de permeabilidades, as camadas possuem permeabilidades constantes na direção i com os valores de 200 mD, 50mD e 500mD. As permeabilidades na direção j possuem o mesmo valor que na direção i . Os valores das permeabilidades na direção k são de 20 mD, 40mD e 60 mD. O poço injetor tem a vazão constante de gás $1 \times 10^8 \text{ ft}^3/\text{dia}$ std, já o poço produtor opera com o limite de vazão máxima de óleo de 20000 bbl/dia std.

4.1. Problema com uma variável incerta

Como primeiro exemplo, a permeabilidade na direção i da primeira camada foi considerada uma variável incerta, chamada de permeabilidade base, sendo as permeabilidades nesta mesma direção nas camadas dois e três com os valores de 0,25 e 2,5 vezes a permeabilidade base. As permeabilidades na direção j foram consideradas iguais as permeabilidades na direção i . As permeabilidades na direção z foram consideradas 0,2 vezes os valores da permeabilidade na direção i , de forma que o problema tem apenas uma única variável incerta. O objetivo da análise foi o valor presente líquido do campo (VPL), calculado de acordo com a Eq.(23) (Oliveira, 2006).

$$VPL = f(x_{p,t}, u) = \sum_{\tau=0}^T \left[\frac{1}{(1+d)^\tau} F_\tau(x_{p,t}, u) \right] \quad (23)$$

Onde d é a taxa de desconto, \mathcal{T} é o período de concessão e F_τ é fluxo de caixa no tempo \mathcal{T} , que representa a receita do óleo menos o custo da injeção e produção de água, $x_{p,t}$ representa as vazões no poço p , no intervalo de tempo t . O parâmetro u representa as varáveis de estado do problema.

Inicialmente, 200 mD foi tomado como valor médio da permeabilidade base, com uma distribuição normal e desvio padrão igual a 100 mD. Infelizmente, este esquema não se mostrou apropriado para demonstração de técnicas de propagação de incertezas, pois para esta faixa de valores, o VPL tem pouca variação. Como este trabalho tem o objetivo de apenas apresentar às técnicas de propagação de incertezas, para permeabilidade base foi escolhido o valor de 70 mD, com densidade de probabilidade lognormal e desvio padrão igual a 15 mD.

Problemas de reservatório de petróleo como este não possuem solução analítica. Um estudo de propagação de incerteza com o método de Monte Carlo foi desenvolvido com o objetivo de ter uma solução aproximada, para comparação com as técnicas de Caos Polinomial e Colocação Estocástica, utilizadas neste trabalho. Os resultados obtidos com o método de Monte Carlos são mostrados na Tab.(1), onde são estão os valores para o valor esperado, desvio padrão e coeficiente de variação do VPL, todos em função do número de amostras.

Tabela 1. Resultado para o método de Monte Carlo.

Amostras	E(VPL) (10 ⁸ US\$)	S (VPL) (10 ⁸ US\$)	COV
100	8,3508	0,4051	0,0485
200	8,2345	0,6541	0,0794
400	8,2522	0,5963	0,0723
800	8,2461	0,6088	0,0738
1600	8,2342	0,6392	0,0776
3200	8,2146	0,6922	0,0843
6400	8,2263	0,6665	0,0810
8000	8,2281	0,6739	0,0819
10000	8,2286	0,6672	0,0811

A Figura 2 mostra histogramas produzidos a partir do método de Monte Carlo, visualizando as ocorrências de permeabilidade e VPL, com também seus valores médios.

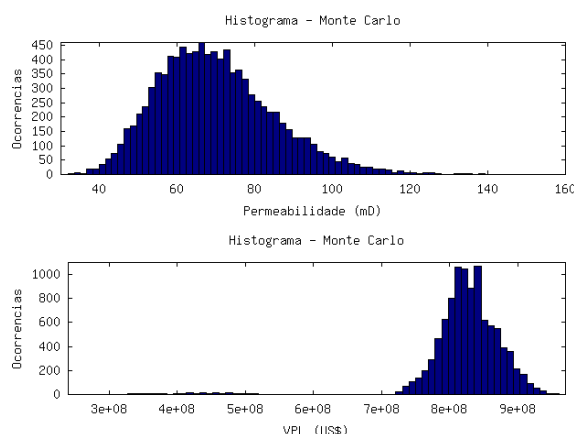


Figura 2. Histograma das variáveis de entrada (Permeabilidade) e de saída (VPL).

4.1.1. Caos polinomial

Há duas escolhas importantes na expansão em caos polinomial: a ordem de expansão, isto é, o grau máximo do polinômio usado na expansão, e a ordem de quadratura, isto é, o número de pontos usado na integração numérica. A quadratura Gaussiana empregada integra exatamente um polinômio de grau $2m - 1$ com m pontos de integração, e como na integral dos coeficientes aparece um polinômio de grau pelo menos $2p$ (um polinômio de grau p , multiplicado pela função S aproximada a mais ou menos esta ordem), é de se esperar que seja necessária a ordem de quadratura $p + 1$ para o cálculo dos coeficientes com precisão adequada. Nesta seção foram feitas experiências numéricas variando-se a ordem de expansão e a ordem de quadratura, inclusive com a utilização de ordens de quadratura nitidamente abaixo do necessário, apenas para levantar o comportamento do método nesta situação extrema.

Na Tabela 2 são mostrados o valor esperado E , o desvio padrão S e o coeficiente de variação (COV), computados com uma expansão de caos polinomial variando a ordem da expansão OE , e com a respectiva ordem de quadratura OQ ($p + 1$). Não se poderia esperar bons resultados com uma aproximação tão pobre, mas é interessante observar que os resultados para o valor esperado são muito bons, quando comparados àqueles obtidos pelo método de Monte Carlo, lembrando que neste caso unidimensional, o número de pontos de avaliação da função é igual à ordem de quadratura.

Estudos com variação da ordem de expansão em caos polinomial foram desenvolvidos, foi percebido que, para este problema, a ordem de quadratura pode ser estimada acima de $p + 1$, fornecendo bons resultados, mas não necessariamente os melhores. É interessante observar também que o uso de pontos de integração insuficientes fornece resultados ainda razoáveis para o valor esperado, mas pode fornecer resultados completamente absurdos para a variância.

Tabela 2 - Caos polinomial uma variável incerta.

OE	OQ	E(VPL) (10 ⁸ US\$)	S (VPL) (10 ⁸ US\$)	COV
1	2	8,2958	0,3925	0,0473
2	3	8,2669	0,4193	0,0507
3	4	8,1591	0,8940	0,1096
4	5	8,2397	0,6530	0,0792

Como pode ser visto nos resultados apresentados, valores do VPL médio próximos do valor obtido com o método de Monte Carlo podem ser obtidos com expansões de baixa ordem. É importante ressaltar que não deve-se esperar mais de dois algarismos de precisão nos resultados.

4.1.2. Colocação Estocástica

O método de Colocação Estocástica é conceitualmente bem mais simples do que o a expansão em caos polinomial, e consiste simplesmente em adotar um polinômio interpolador Lagrangeano multidimensional, que passa uma série de pontos de colocação pré-definidos em uma malha regular, como mostrado na Eq. (24).

$$S(\xi) \approx \sum_{i=1}^{N_p} r_i L_i(\xi) \quad (24)$$

Como os polinômios de Lagrange tem o valor 1 em um ponto de colocação e 0 nos demais, os coeficientes r_i da Eq. (24) são diretamente os valores da função S nos pontos de colocação.

Os resultados obtidos utilizando o método da colocação estocástica podem ser visualizados na Tab.(3), onde diversas ordens de interpolação foram utilizadas. Neste caso o número de avaliações da função é um mais a ordem de interpolação.

Tabela 3. Colocação estocástica.

OE	E(VPL) (10 ⁸ US\$)	S (VPL) (10 ⁸ US\$)	COV
1	8,2682	0,0000	0,0000
2	8,2958	0,3924	0,0473
3	8,2669	0,4192	0,0507
4	8,1591	0,8940	0,1096
5	8,2397	0,6530	0,0792
6	8,2749	0,4984	0,0602

Os resultados do valor esperado do VPL obtidos com método da colocação estocástica, como no caso do caos polinomial convergem rapidamente sem considerar precisão acima de dois algarismos significativos. Como os resultados obtidos com o caos polinomial e a colocação estocástica são equivalentes, porém a segunda técnica tem uma implementação muito mais simples, esta técnica é muito interessante para implementações independentes.

4.2. Problema com três variáveis incertas

Neste caso foi utilizado o mesmo problema de reservatório, considerando agora três variáveis incertas no campo de permeabilidades. Neste caso as permeabilidades na direção i em cada uma das três camadas são consideradas variáveis incertas, com distribuição lognormal com os valores médios de 70 mD, 18 mD e 175 mD. Os desvios padrões são de 15 mD, 4mD, 37 mD. Os valores foram escolhidos mantendo a proporção das permeabilidades referente ao caso com uma variável incerta. As permeabilidades na direção de j são iguais as na direção i , e as permeabilidades na direção de z são iguais as permeabilidades na direção i multiplicado por 0,2.

Na Tabela 4 estão os resultados obtidos para o estudo de propagação de incertezas utilizando o método de Monte Carlo.

Tabela 4. Resultado para o método de Monte Carlo, com três variáveis incertas.

Amostras	E(VPL) (10 ⁸ US\$)	S (VPL) (10 ⁸ US\$)	COV
100	8,5005	1,1099	0,1305
200	8,4946	1,0090	0,1187
400	8,4283	1,0220	0,1212
800	8,3985	1,0132	0,1206
1600	8,3643	0,9922	0,1186
3200	8,3571	1,0005	0,1197
6400	8,3480	1,0083	0,1207
8000	8,3476	1,0059	0,1205
10000	8,3465	1,0092	0,1209

Na Tabela 5 se observa os resultados de propagação de incertezas utilizando os métodos de caos polinomial.

Tabela 5. Expansão em caos polinomial, com três variáveis incertas.

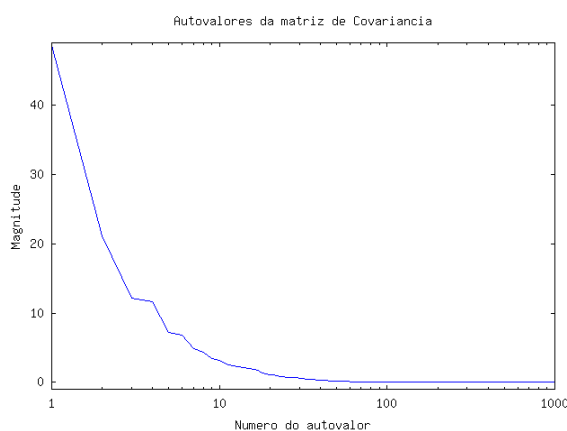
OE	OQ	E(VPL) (10 ⁸ US\$)	S (VPL) (10 ⁸ US\$)	COV
2	3	8,3418	1,0008	0,1199
3	4	8,3333	1,0026	0,1203

4.3. Problema de alta dimensão

As técnicas de propagação de incerteza demonstradas acima são de grande potencial, mas devido ao alto custo computacional de associar uma variável incerta a cada célula do reservatório torna-se inviável a utilização das mesmas em problemas reais de reservatório. Neste trabalho foi usada a técnica de Karhunen-Loève, como descrita acima, com objetivo de obter uma redução dimensional do problema real de reservatório.

A equação 1 foi utilizada para gerar campos normais com média zero e variância de 1.61. A distribuição de probabilidades mais natural para campos de permeabilidades gerados aleatoriamente é a lognormal, porém os campos recuperados com a Eq. (3) são Gaussianos. A expansão foi aplicada portanto no logaritmo natural dos campos de permeabilidade desejada. O valor médio das permeabilidades é adicionado a cada célula do reservatório. Neste exemplo, desejava-se campos lognormais com média 1000 mD e desvio padrão igual a 2000 mD, e os parâmetros para a distribuição normal associada são de média igual a 6,103 e desvio padrão igual a 1,27 (variância igual a 1,61).

Nesta etapa foram usadas 1000 realizações para computar os autovalores e autovetores da matriz de covariância. A Figura 3 mostra um gráfico da magnitude destes autovalores, ordenados em ordem decrescente.

**Figura 3. Magnitude das autovalores da Matriz de Covariância.**

Da Figura 3 se observa que, para os parâmetros empregados, os autovalores decaem realmente muito rapidamente. Normalmente, uma quantidade de autovalores cuja soma acumulada normalizada seja da ordem de 0,80 é uma escolha razoável. Neste caso, obtêm-se este valor com aproximadamente 10 autovalores. Com a utilização da expansão de

Karhunen-Loève, os campos de permeabilidades podem agora ser representados por poucas variáveis aleatórias (10 variáveis neste trabalho). A Figura 4 mostra uma realização obtida com a expansão de K-L.

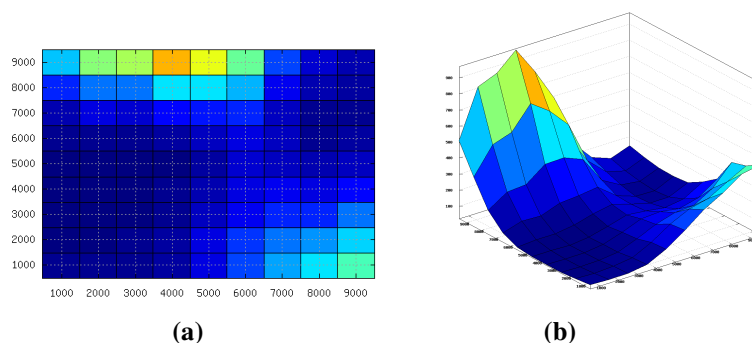


Figura 4. Visualização da Realização de permeabilidade obtida a partir da expansão de K-L: (a) 2d, (b) 3d

Inicialmente foi desenvolvido um estudo de propagação de incertezas utilizando o método de Monte Carlo, como nos casos de uma e três variáveis incertas, as variáveis incertas são os coeficientes da expansão de K-L (ξ), caracterizando o campo de permeabilidades. Como nos casos anteriores, o objetivo é o VPL. O problema de reservatório empregado possui um baixo custo computacional, isto permite a utilização das estatísticas obtidas como referências para comparação com o caos polinomial. A Tabela 6 mostra os resultados obtidos com o método de Monte Carlo.

Tabela 6. Resultado para o método de Monte Carlo, alta dimensão.

Amostras	E(VPL) (10^9 US\$)	S (VPL) (10^7 US\$)	COV
1000	1,1616	8,9311	0,0768
2000	1,1593	9,8971	0,0853
4000	1,1594	10,3535	0,0892
8000	1,1585	10,8368	0,0935

Para aplicação do caos polinomial ou colocação estocástica, as variáveis ξ são usadas diretamente como as variáveis incertas na expansão ou interpolação, sendo seus valores não mais gerados aleatoriamente, mas vindo dos pontos de quadratura numérica no caso de caos polinomial, e dos pontos de interpolação, no caso da colocação estocástica. Novamente o somatório da Eq. (3) é feito, e a realização assim gerada é usada em uma simulação. Os valores de interesse na saída são usados como apropriado na técnica correspondente: como integrandos no caos polinomial e como valores nos pontos de interpolação para colocação estocástica.

Um problema óbvio surge aqui, pois, mesmo com apenas 10 variáveis incertas, com uma expansão polinomial de ordem 3, por exemplo, provavelmente será necessária ordem de quadratura igual a 4, o que implica em $4^{10} = 1048576$ avaliações de função. Claramente este número é impraticável. O número de coeficientes a determinar para ordem 3 com 10 variáveis é, no entanto, é igual a 286, de forma que o cálculo aproximado dos coeficientes por regressão linear requer apenas 572 avaliações, o que é viável quando se considera computação paralela. Esta foi a técnica usada neste exemplo.

A Tabela 7 mostra os resultados obtidos com a expansão em caos polinomial. O valor esperado do VPL obtido com a expansão de ordem dois foi satisfatório, de acordo com o resultado obtido com o método Monte Carlo. O desvio padrão obtido com a expansão de ordem dois não foi satisfatório, sendo necessário utilizar a expansão de ordem 3 para um melhor aproximação.

Tabela 7. Expansão em caos polinomial, alta dimensão.

OE	NP	E(VPL) (10^9 US\$)	S (VPL) (10^7 US\$)	COV
2	132	1,1449	14,5466	0,1270
3	572	1,1606	10,5014	0,0948

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou uma alternativa para o desenvolvimento de simulações de reservatórios considerando incertezas. A redução do espaço probabilístico utilizando a expansão de Karhunen-Loève mostrou ser uma metodologia eficiente, a qual preserva a matriz do covariância dos campos estocásticos. A utilização da expansão em caos polinomial e colocação estocástica para aproximar variáveis aleatórias estocásticas mostraram resultados

satisfatórios, principalmente na obtenção de valor esperado. Duas alternativas para calcular os coeficientes da expansão polinomial foram mostradas neste trabalho, quadratura Gaussiana e por regressão linear. Nos problemas da alta dimensão, o cálculo dos coeficientes da expansão polinomial utilizando quadratura numérica torna-se inviável devido ao alto número de análises requeridas. Logo, a metodologia utilizando regressão linear mostrou ser uma alternativa viável.

6. BIBLIOGRAFIA

- Aziz, S. O., 1981, "Comparision of Solutions to a Three-Dimensional Black-Oil Reservoir Simulation Problem". Journal of Petroleum Technology.
- Computer Modeling Group Ltd, 2006, "Imex - User's Guide".
- Eldred, M. S., Webster C. G., 2008, "Evaluation of non-Intrusive Approaches for Winer-Askey Generalizaed Polynomial Chaos". AIAA Paper 2008-1892.
- Eldred, M. S., et al., 2008, "Dakota - User's Manual".
- Ghanem, R., 1998, "Probabilistic Characterization of Transport in Heterogeneous Media". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 158 199-220.
- GNU Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- Golub, G., Loan, V., 1996, "Matrix Computation". The Jhon Hopkins Press, Baltimore.
- Oliveira, D.F.B., 2006, "Técnicas de Otimização da Produção para Reservatórios de Petróleo: Abordagens Sem Uso de Derivadas para Alocação Dinâmica das Vazões de Produção e Injeção". Dissertação de Mestrado, Engenharia Civil, UFPE, Brasil.
- Sarma, P., Durlorfky, L. J., Aziz, K., 2008, "Kernel Principal Component Analysis for Efficient Differentiable Parameterization of Multipoint Geostatistics". Math Geosci 40:3-32.
- Sarma, P., 2006, "Efficient Closed-Loop Optimal Control of Petroleum Reservoir Under Uncertainty". Phd Thesis, Stanford University, Stanford, CA.
- Xiu, D., Karniadakis, G., 2003, "Modeling Uncertainty in Flow Simulation via Generalized Polynomial Chaos". Journal of Computational Physics 187 137-167.
- Scholkopf, B., Smola, A, Muller K., 1996, "Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue Problem", Technical Report No. 44, Max-Planck Institut für biologische Kybernetik, Arbeitsgruppe Bülthoff,

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

UNCERTAINTY PROPAGATION IN PETROLEUM RESERVOIR USING KARHUNEM-LOÈVE EXPANSION IN DAKOTA ENVIRONMENT

Lira Júnior, José Dásio, josedasio@yahoo.com.br¹
Willmersdorf, Ramiro Brito, ramiro@willmerdorf.net²
Horowitz, Bernardo, horowitz@ufpe.br¹

¹Federal University of Pernambuco, Civil Engineering Department,
Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n – Cid. Universitária – Recife – Brazil. CEP: 50740-530

²Federal University of Pernambuco, Mechanical Engineering Department
Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n – Cid. Universitária – Recife – Brazil. CEP: 50740-530

Abstract : *The inclusion of uncertainty in the development of computer simulations related to the oil reservoir is becoming essential in the quest to achieve optimal estimates of production and profit. The knowledge of the petrophysical properties of reservoirs is always uncertain, and this uncertainty should be considered in the development of computer simulations. The flow in oil reservoirs is determined from the values and spatial distribution of petrophysical properties, and due to uncertainty related to these properties, the results of simulations of reservoirs should also be considered uncertain. It is clear that the uncertainty in input variables of the computer model directly affects the estimates of production and management of oil fields. Classical techniques for the propagation of uncertainties, such as the application of the Monte Carlo method, are rarely feasible for realistic problems of reservoir simulation. These techniques require a large number of realizations for convergence, which implies a computational cost impractical when each realization requires a large computer simulation. In this work, the petrophysical properties of reservoir are considered as stochastic fields of second order. These fields are represented in terms of a global spectral expansion, the expansion of Karhunen-Loève, which is an expansion in terms of eigenvalues and eigenvectors of the covariance matrix of the space field, and standard normal random variables. In many cases, this expansion can be truncated at a few terms, so that the stochastic properties of the field can be represented by a small number of random variables. The calculation of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrix can also be an intractable problem for large reservoirs, this project has employed the technique of the kernel matrix, this technique then calculates the eigenvalues and eigenvectors indirectly, much more efficient. The algorithms were implemented locally in Matlab / Octave, and reservoir simulations were performed with the commercial program IMEX. As an alternative to the Monte Carlo method, were tested methods based on Polynomial Chaos and Stochastic Collocation, available on computer system DAKOTA (Design Analysis Kit for Optimization and Terascale Applications). The Dakota is an open source system for optimization, uncertainty quantification, reliability and cost parameters, among other capabilities for analysis of large-scale problems of engineering. The interface between DAKOTA and IMEX was developed with the pre and post processing written in Matlab / Octave. Studies were conducted to determine the order of expansion and numerical integration suitable for Polynomial Chaos expansion, studies on the order of interpolation for the appropriate Stochastic Collocation, and studies for comparison of quality and computational cost between these two techniques to simple model problems and to a large problem. Finally, these techniques were compared to the Monte Carlo method.*

Keywords: *Petroleum reservoir, Uncertainty Propagation, Polynomial Chaos, Karhunen-Loève*