

AVALIAÇÃO DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO EM SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS BASEADA EM SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO

Márcio A. F. Martins¹, marciomartins@ufba.br

Ricardo de A. Kalid¹, kalid@ufba.br

¹Universidade Federal da Bahia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial, Rua Aristides Novis n° 02
Federação, Salvador, Brasil.

Resumo. *Em muitos sistemas industriais duas ou mais grandezas, que necessitam serem medidas, dependem em comum de um conjunto de grandezas de entrada para compor as funções de medição. O método padrão para avaliação da incerteza de medição desses sistemas multivariáveis será de responsabilidade do suplemento 2 do guia de expressão para a incerteza de medição. Esse suplemento demonstrará que a lei de propagação de incertezas pode ser expressa em uma forma matricial equivalente quando aplicada a um sistema monovariável. Contudo, este método é robusto somente quando as funções de medição são lineares. O presente trabalho visa demonstrar um método numérico não linear para avaliar a incerteza de medição de sistemas multivariáveis baseado em simulações de Monte Carlo. O método proposto foi aplicado em um reator químico (sistema não linear), no qual o principal objetivo é determinar as melhores estimativas das concentrações molares do reagente e do produto, bem como as incertezas padrão e os intervalos de abrangência individuais dessas estimativas. Além disso, uma análise comparativa foi realizada entre ambos os métodos e, portanto, verificou-se que o método numérico deveria ser mais robusto quando aplicados em funções de medição não lineares.*

Palavras-chave: *Incerteza de medição, Lei de propagação de incertezas, Lei de propagação de funções densidade de probabilidade, Sistemas multivariáveis, Funções não lineares.*

1. INTRODUÇÃO

Em um processo industrial é imprescindível medir variáveis de processo, seja para controlá-las, monitorá-las ou até mesmo investigá-las para um fim tecnológico ou científico (Albertazzi e Souza, 2008). Entretanto, em qualquer procedimento de medição de uma grandeza física, o resultado dessa medição será uma estimativa do valor verdadeiro dessa grandeza; logo uma indicação quantitativa associada a essa estimativa é necessária para avaliar a qualidade do resultado de medição. O conceito metrológico que aborda tal assunto é a incerteza de medição. Segundo o Vocabulário Internacional de Metrologia (BIPM *et al.*, 2008a), a incerteza de medição é “um parâmetro não-negativo que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos a um mensurando com base nas informações usadas”.

A metodologia padrão para expressar um resultado de medição e sua respectiva incerteza foi desenvolvida pelo Bureau International des Poids et Mesures em 1980 (CIPM, 1980), reconhecida internacionalmente pela comunidade metrológica como Recomendação INC-1980. Porém, essa Recomendação INC-1980 foi aprovada em 1981 (Giacomo, 1982) e retificada em 1986 (Giacomo, 1987). Baseado nesta Recomendação INC-1980, um guia mais detalhado foi desenvolvido pela International Organization for Standardization (ISO), juntamente com o apoio de mais sete organizações internacionais¹. O documento resultante, conhecido como “Guide to the expression of uncertainty in measurement” (ISO-GUM), foi publicado em 1993 e reimpresso com algumas correções em 1995. Esse guia é periodicamente submetido a revisões, onde sua última edição foi publicada em 2008 (BIPM *et al.*, 2008c). O método ISO-GUM consiste em propagar as estimativas, as incertezas padrão e os respectivos coeficientes de correlação das grandezas de entrada, através da função de medição, para a única grandeza de saída de maneira a obter sua melhor estimativa e sua incerteza padrão; esse procedimento abordado

¹Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), International Electrotechnical Commission (IEC), International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine (IFCC), International Laboratory Accreditation Cooperation (ILAC), International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) and International Organization of Legal Metrology (OIML).

pelo ISO-GUM é conhecido como a lei de propagação de incertezas.

Após a publicação do ISO-GUM, o BIPM criou grupos de trabalhos que são responsáveis por desenvolver suplementos ao guia ISO-GUM de modo a proporcionar uma maior aplicabilidade ao método ISO-GUM. O suplemento mais conhecido e usado pela comunidade científica é o suplemento 1 do ISO-GUM (ISO-GUMS1); esse suplemento aborda um método mais abrangente do que o método ISO-GUM para expressar e avaliar a incerteza de medição. Diferentemente do método ISO-GUM, o método ISO-GUMS1 consiste em estimar uma função densidade de probabilidade (PDF) para a grandeza de saída (mensurando) através da propagação das PDF's previamente atribuídas às grandezas de entrada (BIPM *et al.*, 2008b). A lei de propagação de PDF's, proposta pelo ISO-GUMS1, é implementada por um método numérico baseado em simulações de Monte Carlo (SMC). Todavia, tanto o método ISO-GUM como o ISO-GUMS1 são aplicados em sistemas de medição que possuem apenas uma grandeza de saída na função de medição, tais sistemas de medição são classificados como sistemas MISO (Multiple input, single output). Em processos industriais raramente encontra-se tais sistemas MISO, pelo contrário, esses processos são formados por sistemas multivariáveis, isto é, um conjunto de variáveis de saída depende mutuamente de um conjunto de grandezas de entrada caracterizando os sistemas MIMO (Multiple input, multiple output).

O suplemento 2 do ISO-GUM, ainda em desenvolvimento, será responsável pelo desenvolvimento do método de avaliação da incerteza de medição em sistemas MIMO. Tal método é baseado na lei de propagação de incertezas, assim como é abordado pelo método ISO-GUM, no qual somente é aplicado em sistemas MISO. Na literatura Bich (1996) e Kacker e Jones (2003) apresentam uma simples fórmula para a incerteza de medição em sistemas MIMO considerando apenas duas grandezas de saída. Lira (2002) demonstra uma equação geral, uma forma matricial equivalente ao método ISO-GUM, denominada de lei de propagação de incertezas generalizada (LPIG). O método LPIG é baseado em uma aproximação linear das funções de medição que compõem os sistemas MIMO, portanto, sua aplicação pode gerar resultados inconsistentes quanto maior for a não linearidade dessas funções de medição.

Inspirado na lei de propagação de PDF's, o presente trabalho visa apresentar um método para estimar a matriz de incerteza, como também os intervalos de abrangência individuais das grandezas de saída de um sistema MIMO de medição baseado em SMC. Como ilustração, o método proposto será aplicado em um sistema não linear (reator químico), além disso, um estudo comparativo entre resultados provenientes dos métodos linear e não linear será esboçado nesse trabalho.

2. METODOLOGIA

Nesta seção são apresentados os métodos linear e não linear para avaliação da incerteza de medição em sistemas MIMO. Além disso, os detalhes do objeto de estudo desse trabalho, reator químico CSTR, serão expostos para aplicação de ambos os métodos.

2.1 A Lei de Propagação de Incertezas

A lei de propagação de incertezas em sistemas multivariáveis (LPIG) consiste em avaliar as incertezas padrão das várias grandezas de saídas Y_j relacionadas com as diversas grandezas de entradas X_i por meio de f_K funções de medição linear ou linearizadas. Considere um sistema MIMO de medição representado pela (1).

$$\begin{cases} f_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_K; X_1, X_2, \dots, X_N) & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ f_K(Y_1, Y_2, \dots, Y_K; X_1, X_2, \dots, X_N) & = & 0 \end{cases} \quad (1)$$

Em um sistema de medição representado pela Eq.(1), as funções de medição podem ser resolvidas de forma analítica ou numérica; podem ser obtidas através de modelagens fenomenológicas ou empíricas; devem incluir as possíveis compensações sistemáticas provenientes dos sistemas de medição das grandezas de entrada; além disso, o número de funções f_K deve ser igual ao número de grandezas de saída ou mensurandos Y_j .

Conforme exposto inicialmente na seção anterior, o método LPIG é uma extensão do método ISO-GUM, dessa forma uma aproximação linear das funções de medição deve ser considerada também nesse método. Em notação matricial as funções de medições podem ser escritas de uma forma mais compacta, i.e.:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Y}; \mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

Onde $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_K)^T$ representa o vetor das grandezas de saída; $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ representa o vetor das grandezas de entrada; enquanto que o símbolo $\mathbf{0}$ é um vetor coluna com todos seus elementos iguais a zero e $\mathcal{F}(\mathbf{Y}; \mathbf{X})$ representa um vetor coluna $(f_1(\mathbf{Y}; \mathbf{X}), \dots, f_K(\mathbf{Y}; \mathbf{X}))^T$.

De forma análoga ao método ISO-GUM, a linearização das funções de medição é realizada através de uma expansão da série de Taylor truncada nos termos lineares em torno das melhores estimativas tanto das grandezas de saída $\mathbf{M}_y = (y_1, \dots, y_K)^T$ como das grandezas de entrada $\mathbf{M}_x = (x_1, \dots, x_N)^T$. Dessa maneira, a linearização da Eq.(2) rende a seguinte expressão:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Y}; \mathbf{X}) \approx \mathcal{F}(\mathbf{M}_y; \mathbf{M}_x) + \mathbf{S}_y(\mathbf{Y} - \mathbf{M}_y) + \mathbf{S}_x(\mathbf{X} - \mathbf{M}_x) = \mathbf{0} \quad (3)$$

As matrizes de sensibilidades das grandezas de saída (\mathbf{S}_y) e entrada (\mathbf{S}_x) contêm as derivadas parciais de primeira ordem de cada função de medição f_K em relação as grandezas \mathbf{Y} e \mathbf{X} , avaliadas nas estimativas \mathbf{M}_y e \mathbf{M}_x , respectivamente. As expressões dessas matrizes são apresentadas da seguinte forma:

$$\mathbf{S}_y = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial y_1 & \dots & \partial f_1 / \partial y_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_K / \partial y_1 & \dots & \partial f_K / \partial y_K \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{S}_x = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_K / \partial x_1 & \dots & \partial f_K / \partial x_N \end{pmatrix} \quad (5)$$

Como a estimativa $\mathcal{F}(\mathbf{M}_y; \mathbf{M}_x)$ é solução da Eq.(3), i.e., $\mathcal{F}(\mathbf{M}_y; \mathbf{M}_x) = 0$. Logo, a Eq.(3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{S}_y(\mathbf{Y} - \mathbf{M}_y) + \mathbf{S}_x(\mathbf{X} - \mathbf{M}_x) = \mathbf{0} \quad (6)$$

Se o vetor das grandezas de saída (\mathbf{Y}) for explicitado da Eq.(6), por meio da álgebra matricial, é obtida a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{S}(\mathbf{X} - \mathbf{M}_x) + \mathbf{M}_y \\ \mathbf{S} &= -(\mathbf{S}_y)^{-1} \mathbf{S}_x \end{aligned} \quad (7)$$

A aplicação do operador variância vetorial² em ambos os lados da Eq.(7) rende a lei de propagação de incertezas generalizada, ou seja, essa operação matemática fornece a matriz de covariância das grandezas de saída de ordem K (\mathbf{U}_y) a partir do conhecimento da matriz de covariância das grandezas de entrada de ordem N (\mathbf{U}_x).

$$\mathbf{U}_y = \mathbf{S} \mathbf{U}_x \mathbf{S}^T \quad (8)$$

Como pode ser observado na Eq.(8), o método LPIG consiste em propagar as informações disponíveis das grandezas de entrada: vetor das estimativas \mathbf{M}_x e a matriz de covariância (ou matriz de incerteza) \mathbf{U}_x ; para as grandezas de saída, por meio de um procedimento linear, conforme é abordado pelo ISO-GUM em sistemas MISO de medição.

Os elementos das matrizes de covariância tanto das grandezas de saída como das grandezas de entrada representam: a variância (ou incerteza padrão elevada ao quadrado) das grandezas (todos os elementos da diagonal principal); e a covariância existente entre cada grandeza de saída e entrada, respectivamente (todos os elementos que não pertencem à diagonal principal). Essas matrizes são apresentadas nas Eq.(9) e Eq.(10).

$$\mathbf{U}_y = \begin{pmatrix} u^2(y_1) & \dots & u(y_1, y_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(y_K, y_1) & \dots & u^2(y_K) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{U}_x = \begin{pmatrix} u^2(x_1) & \dots & u(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & \dots & u^2(x_N) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Em algumas aplicações industriais é necessário expressar a incerteza de medição como um intervalo em torno do resultado de medição – no qual espera-se abranger uma extensa faixa dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. Essa métrica atribuída ao resultado de medição é conhecida como

²O operador variância de uma grandeza vetorial \mathbf{Z} , cuja melhor estimativa é \mathbf{M}_z com PDF igual a $g(\mathbf{Z})$, é proveniente da seguinte expressão: $Var[\mathbf{Z}] = E[(\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z)(\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z)^T] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z)(\mathbf{Z} - \mathbf{M}_z)^T g(\mathbf{Z}) d\mathbf{Z}$.

incerteza expandida. A incerteza expandida é obtida com base em uma probabilidade de abrangência requerida para a PDF das grandezas de saída. Os valores típicos da probabilidade de abrangência variam de 68,3% a 99%, um valor típico bastante adotado em muitas sistemas de medição é 95,45%. Contudo, a escolha da probabilidade de abrangência deve ser mais criteriosa conforme à aplicação da incerteza expandida.

Em sistemas MISO de medição, a incerteza expandida é determinada através da Eq.(11), onde k representa o fator de abrangência, que depende dos graus de liberdade efetivos (ν_{eff}) da incerteza padrão da única grandeza de saída Y da função de medição e da probabilidade de abrangência p . O conhecimento de ambos ν_{eff} e p habilita estimar o valor de k pela PDF t -Student, ver (BIPM *et al.*, 2008c).

$$U = k(\nu_{eff}, p) \cdot u(y) \quad (11)$$

Os graus de liberdade efetivos são obtidos pela fórmula de Welch-Satterthwaite (BIPM *et al.*, 2008c). Porém, o uso desta fórmula W-S requer muito cuidado visto que sua aplicação requer as seguintes hipóteses: todas as grandezas de entrada e suas respectivas incertezas padrão bem como a grandeza de saída devem ser gaussianas; as grandezas de entrada e suas respectivas incertezas padrão devem ser independentes. Maiores detalhes sobre a aplicação dessa fórmula podem ser consultados em Kirkup e Frenkel (2006). Uma fórmula W-S menos restritiva foi desenvolvida por Lepek (2003), nessa nova fórmula W-S as grandezas de entrada podem ser consideradas dependentes. Portanto, o conhecimento da incerteza expandida permite estimar o intervalo de abrangência para a grandeza de saída da seguinte forma: $Y = [y \pm U] = [y \pm k \cdot u(y)]$.

Em sistemas MIMO de medição, deve-se considerar a matriz de covariância das grandezas de saída para estimar uma região de abrangência para uma dada probabilidade de abrangência p , ou seja, essa região deve ser determinada pela PDF conjunta dos possíveis valores das grandezas de saída. Entretanto, a modelagem matemática dessa região de abrangência é muito dispendiosa e, ainda pouco desenvolvida na literatura. Logo, assume-se o caso mais simples, isto é, essa região será composta pelo produtório dos intervalos de abrangência individuais de cada grandeza de saída, estimados pela Eq.(11), conforme recomendação dos renomados autores da área de metrologia Cox e Harris (2003).

2.2 A Lei de Propagação de Funções Densidade de Probabilidade

A abordagem proposta pela lei de propagação de incertezas é bastante usada para caracterizar a incerteza de medição tanto para sistemas MISO como em sistemas MIMO. Todavia, essa abordagem possui limitações quanto à sua aplicação, nas quais as principais são: a linearização da(s) função(s) de medição; e assumir que a(s) grandeza(s) de saída e as grandezas de entrada devem possuir PDF gaussiana para estimativa do(s) intervalo(s) de abrangência da(s) grandeza(s) de saída. Entretanto, existem funções de medição em que aplicação dessas suposições não podem ser satisfeitas, principalmente quando essas funções são fortemente não lineares.

Em sistemas MISO, o método não linear mais usado para avaliação da incerteza de medição é baseado na lei de propagação de PDF's (LPPDF). O princípio básico da LPPDF é derivar uma PDF que engloba os possíveis valores da grandeza de saída (mensurando) com base na PDF conjunta das grandezas de entrada. A avaliação da incerteza de medição, proposta no suplemento 1 do ISO-GUM, é realizada através da LPPDF numérica, uma vez que seu tratamento analítico é viável apenas para funções de medição simples (casos pouco prováveis na prática). A implementação geral mais eficiente do método numérico para a propagação de PDF's é baseado em SMC (Lepek, 2003; Cox *et al.*, 2001a,b).

Como nesse trabalho o foco principal são os sistemas MIMO de medição, o método LPPDF será ampliado para tais sistemas, aqui denominado como método LPPDFM. O método LPPDFM consiste em atribuir uma PDF conjunta³ às grandezas de entrada e propagá-las, por meio das funções de medição, de modo a fornecer PDF's marginais das grandezas de saída do sistema MIMO de medição. A Figura (1) mostra uma representação esquemática do método LPPDFM para esses sistemas MIMO.

Como pode ser observado na Fig.(1), a PDF das grandezas de saída não necessariamente será gaussiana, principalmente quando a não linearidade das funções de medição é mais significativa. Por meio das SMC, a idéia básica do método LPPDFM é retirar M amostras da PDF conjunta ou das PDF's individuais das grandezas de entrada e propagar esses valores, através das funções de medição, de modo a produzir M amostras das grandezas de saída. Dessa maneira, são construídas as PDF's marginais aproximadas das respectivas grandezas de saída. Em cada PDF marginal é possível estimar: a média, na qual será a melhor estimativa y_j de cada grandeza de saída Y_j ; o desvio padrão, no qual será a incerteza padrão $u(y_j)$ da melhor estimativa y_j de Y_j ; e os intervalos de abrangência individuais $I_j(y_j)$ com base em uma probabilidade de abrangência p .

É importante salientar que as SMC produz resultados tão bons quanto maior for o número de amostras Monte Carlo (M) visto que para um número M finito de resultados existe um erro aleatório e, portanto, o valor

³Quando as grandezas de entradas são mutuamente dependentes estatisticamente, essas possuem uma PDF conjunta, caso sejam independentes cada grandeza possui sua PDF específica.

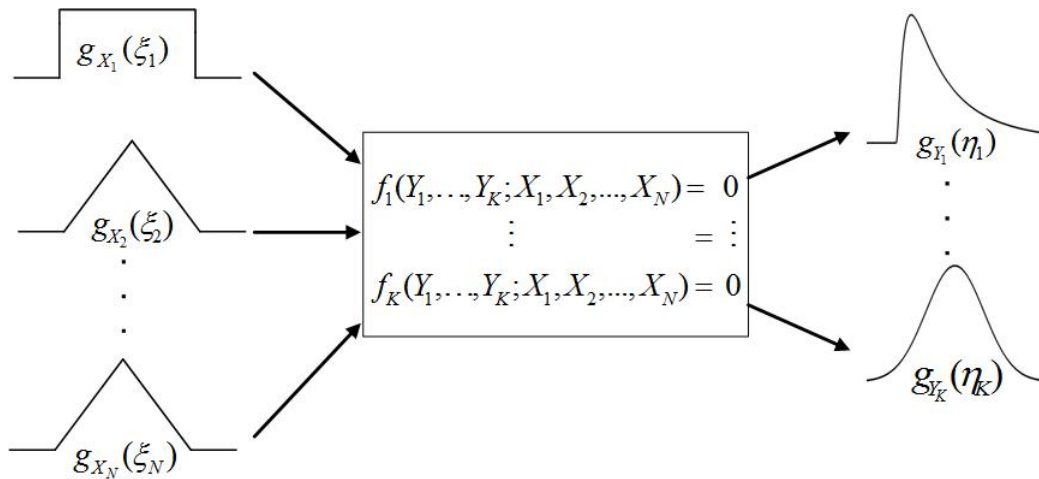


Figura 1. O conhecimento dos possíveis valores ξ_i das grandezas de entrada X_i é expresso por uma PDF. A propagação destas PDF's traz como resultado as PDF's marginais das grandezas de saída do sistema MIMO de medição.

de M deve ser escolhido suficientemente grande para assegurar um erro suficientemente pequeno.

2.3 Estudo de Caso

A partir do anteriormente exposto sobre os métodos linear (LPIG) e não linear (LPPDFM) para sistemas MIMO de medição, um estudo de caso será abordado nesta seção para elucidar uma aplicação desses métodos de modo a obter uma maior clareza e assimilação dos mesmos. O estudo de caso, aqui abordado, será um reator tanque agitado contínuo (reator CSTR) da planta didática simulada do PROTEC-UFBA (Kalid, 2005).

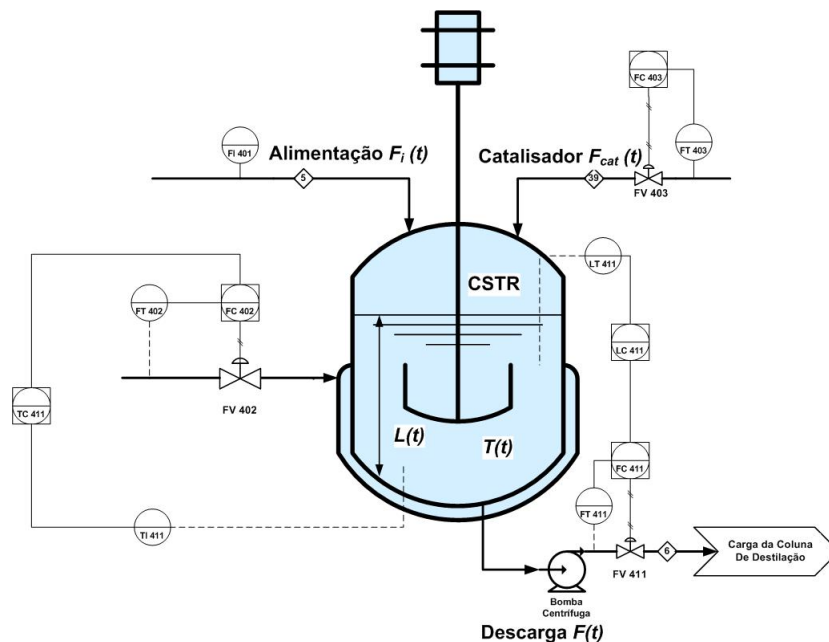


Figura 2. Fluxograma simplificado do reator CSTR da planta didática PROTEC-UFBA.

A função desse reator é transformar o reagente A no produto B por meio de uma catálise homogênea em fase líquida. Por tratar-se de uma reação endotérmica, um fluido de aquecimento é requerido para que ocorra a mesma. A Figura (2) apresenta um fluxograma simplificado desse reator CSTR, na qual são mostradas as correntes de alimentação, catalisador, fluido de aquecimento e descarga do mesmo, assim como suas malhas de controle de temperatura e nível. A aplicação dos métodos LPIG e LPPDFM nesse sistema MIMO será avaliada sob o regime estacionário. O objetivo é estimar a incerteza padrão de medição e os respectivos intervalos de

abrangência das concentrações molares do reagente A (C_A) e do produto B (C_B) dentro do reator.

As funções de medição associadas às concentrações molares são obtidas de modelagem fenomenológica, essas funções são representadas pelas Eq.(12) e Eq.(13) respectivamente.

$$f_1 = \frac{(C_{A,i} - C_A) \cdot F_i}{\rho_m \cdot A_t \cdot L} - k_o \cdot e^{-E/(R \cdot (T+273,15))} \cdot C_A \quad (12)$$

$$f_2 = \frac{(C_{B,i} - C_B) \cdot F_i}{\rho_m \cdot A_t \cdot L} + k_o \cdot e^{-E/(R \cdot (T+273,15))} \cdot C_A \quad (13)$$

Onde: $C_{A,i}$ e $C_{B,i}$ são as concentrações molares do reagente A e produto B da corrente de alimentação respectivamente, em $kmol/m^3$; F_i é a vazão mássica da corrente de alimentação, em t/min ; L é o nível do reator, em m ; T é a temperatura do reator, em $^{\circ}C$; ρ_m é a massa específica da mistura reacional, em kg/m^3 ; E é energia de ativação da reação, em $J/kmol$; R é a constante universal dos gases, em $J/(kmol \cdot K)$; k_o é o fator pré-exponencial da reação, em $1/min$.

Nesse estudo de caso, somente a vazão mássica de alimentação (F_i), a temperatura (T) e o nível (L) do reator serão consideradas como grandezas de entrada do sistema MIMO de medição. Quanto às demais variáveis (aqui classificados como parâmetros) assume-se que suas respectivas incertezas são desprezíveis em relação às incertezas das grandezas de entrada especificadas. Os valores de cada parâmetro associados ao reator CSTR são apresentados na Tab.(1).

Tabela 1. Parâmetros do reator CSTR.

Parâmetros	Valores
$C_{A,i}$ ($kmol/m^3$)	16, 22
$C_{B,i}$ ($kmol/m^3$)	0, 65
ρ_m (kg/m^3)	$1,00 \times 10^3$
E ($J/kmol$)	$1,18 \times 10^7$
R ($J/kmol \cdot K$)	8314, 39
k_o ($1/min$)	64, 43

Um experimento foi realizado para obter dados de medição referente às grandezas de entrada F_i , L e T . A aquisição dos dados de medição dessas grandezas de entrada foi caracterizada pelos seguintes aspectos: séries de observações independentes de cada grandeza foram amostradas; correções sistemáticas, como também resolução da escala dos instrumentos de medição, foram consideradas na construção de cada modelo metrológico respectivamente. Os valores das melhores estimativas e as respectivas incertezas padrão das grandezas de entradas são mostrados na Tab.(2). As covariâncias existentes entre essas grandezas de entrada foram: $u(F_i, L) = u(L, F_i) = -0,001$ ($m \cdot t/min$); $u(F_i, T) = u(T, F_i) = 0,007$ ($^{\circ}C \cdot t/min$) e $u(L, T) = u(T, L) = 0,022$ ($m \cdot ^{\circ}C$). O conhecimento das informações referente às grandezas de entrada permite aplicar ambos os métodos LPIG e LPPDFM para estimar a matriz de incerteza (U_y) e os intervalos de abrangência individuais, conforme será apresentado na próxima seção deste artigo.

Tabela 2. Tratamento dos dados experimentais das grandezas de entrada.

Grandezas	Média (x_i)	Incerteza padrão ($u(x_i)$)
F_i (t/min)	1, 48	0, 26
L (m)	0, 998	0, 016
T ($^{\circ}C$)	58, 6	3, 9

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste tópico serão mostrados os resultados obtidos de ambos os métodos no estudo de caso proposto. Além disso, uma comparação desses resultados será realizada, enfatizando os méritos e limitações de cada um dos métodos.

Uma etapa fundamental da aplicação do método LPPDFM é a escolha das amostras M para as SMC. A escolha adequada para M deve ser obtida mediante uma análise de sensibilidade desse parâmetro sobre as funções de medição conforme é recomendado em BIPM *et al.* (2008b). Essa análise é baseada na realização

de um número crescente para M até a incerteza padrão de ambas as grandezas de saída estabilizem em um determinado valor, isto é, o número M a ser escolhido deve ser proveniente da repetição das incertezas padrão das PDF's marginais obtidas das SMC. É importante salientar que nessa análise deve-se estabelecer um grau de precisão baseado na tolerância numérica requerida para as incertezas padrão.

Nesse trabalho o grau de precisão requerido foi baseado em quatro algarismos significativos para as incertezas padrão. Para essa análise uma PDF conjunta gaussiana foi atribuída às grandezas de entrada com vetor média e matriz de covariância iguais aos valores estimados dos dados experimentais, mostrados na seção anterior. A Figura (3) mostra a análise de sensibilidade realizada no estudo de caso.

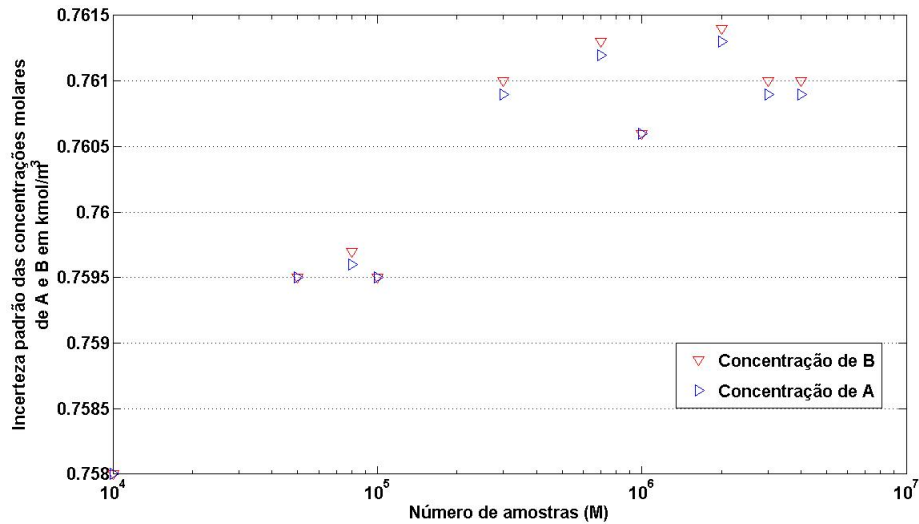


Figura 3. Análise de sensibilidade das simulações de Monte Carlo.

Como mostrado na Fig.(3), quando M é igual a 4×10^6 , o valor da incerteza padrão de ambas as grandezas manteve o mesmo valor daquele obtido para $M = 3 \times 10^6$. Portanto, o valor de $M = 4 \times 10^6$ deve ser utilizado nesse sistema MIMO de medição. Os resultados processados pelo método não linear LPPDFM, usando $M = 4 \times 10^6$, são comparados com os resultados provenientes do método linear LPIG. Como o método LPPDFM permite gerar as PDF's marginais das concentrações molares dos componentes A e B do reator, as Fig.(4) e Fig.(5) apresentam essas PDF's e os intervalos de abrangência estimados por ambos os métodos usando uma probabilidade de abrangência $p = 90\%$.

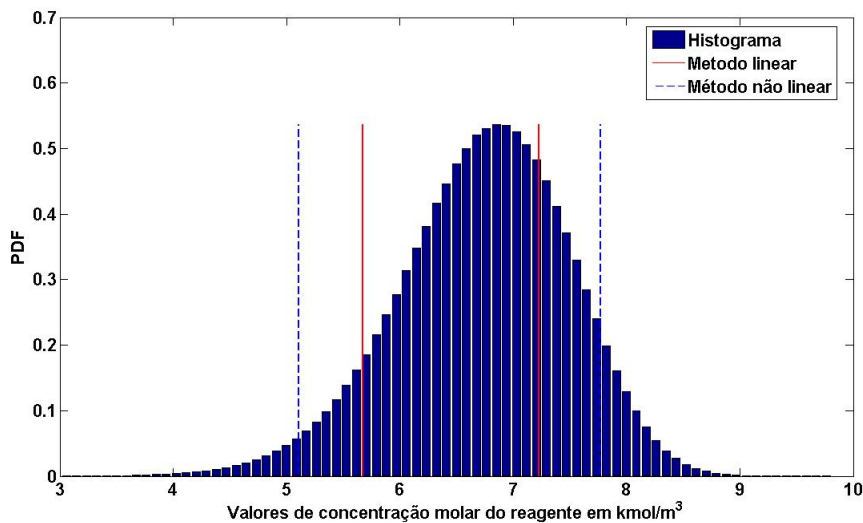


Figura 4. PDF marginal para concentração molar do reagente A comparando os intervalos de abrangência pelos métodos LPIG e LPPDFM.

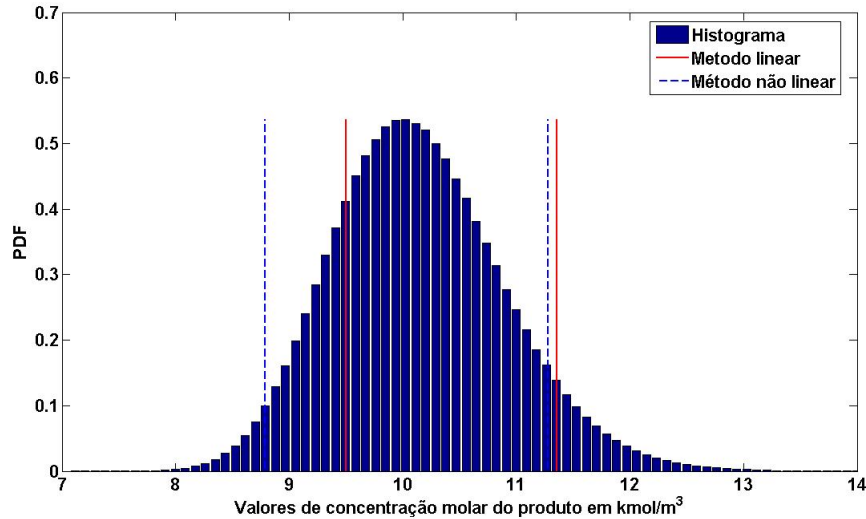


Figura 5. PDF marginal para concentração molar do produto B comparando os intervalos de abrangência pelos métodos LPIG e LPPDFM.

Através das Fig.(4) e Fig.(5) fica evidente a diferença dos resultados proveniente de cada método. Em termos quantitativos as Tab.(3) e Tab.(4) mostram quanto se desvia os resultados (média, incerteza padrão, limites inferior e superior das grandezas de saídas) do método LPIG em relação ao método LPPDFM por meio do desvio percentual das grandezas de saídas C_A e C_B , respectivamente.

Tabela 3. Resultados obtidos para a concentração molar de A por ambos os métodos LPIG e LPPDFM.

Resultados	Método LPIG	Método LPPDFM	Desvio percentual (%)
Média ($kmol/m^3$)	6,45	6,73	4,21
Incerteza padrão ($kmol/m^3$)	0,27	0,76	65,04
Limite inferior ($kmol/m^3$)	5,67	5,11	11,05
Limite superior ($kmol/m^3$)	7,23	7,77	6,99

Tabela 4. Resultados obtidos para a concentração molar de B por ambos os métodos LPIG e LPPDFM.

Resultados	Método LPIG	Método LPPDFM	Desvio percentual (%)
Média ($kmol/m^3$)	10,43	10,14	2,80
Incerteza padrão ($kmol/m^3$)	0,48	0,76	37,25
Limite inferior ($kmol/m^3$)	9,50	8,79	8,13
Limite superior ($kmol/m^3$)	11,36	11,28	0,67

Os resultados estimados por ambos os métodos mostram uma diferença significativa entre os mesmos, principalmente no parâmetro mais importante da avaliação da incerteza de medição, que é a incerteza padrão de medição. A discrepância observada dos resultados provenientes dos métodos LPIG e LPPDFM pode ser explanada pela forte não linearidade das funções de medição. Portanto, quando as funções de medição do sistema MIMO forem não lineares, o uso do método não linear é mais robusto do que o método LPIG uma vez que sua aplicação gera resultados mais consistentes a medida que a não linearidade das funções de medição são mais significativas.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados dois métodos para a avaliação da incerteza de medição em sistemas MIMO: o método linear, baseado na lei de propagação de incertezas; e o método não linear, baseado na lei de propagação de PDF's através de SMC. O método LPIG pode ser bastante usado para caracterizar uma medição de sistemas MIMO devido às seguintes vantagens: primeiro, não há necessidade do conhecimento completo da PDF conjunta das grandezas de entrada, nesse método são requeridas apenas as estimativas \mathbf{M}_y e a matriz de covariância \mathbf{U}_y das grandezas de entradas; segundo, esse método possui simples cálculos para estimar as incertezas de medição das grandezas de saída do sistema MIMO, que torna-o como um método mais aceito pelos profissionais que necessitam expressar um resultado de medição adequado; por último, quando as funções de medição são lineares, os valores das estimativas \mathbf{M}_y e a matriz de covariância \mathbf{U}_y associada a essas estimativas, representam valores robustos para as grandezas de saída.

Por outro lado, o método LPIG possui limitações relevantes quanto ao seu uso, o que justifica a necessidade de um método mais robusto para estimar a incerteza de medição, as principais limitações são: quando as funções de medição são não lineares, a expansão em série de Taylor truncada no termo linear deve fornecer resultados inconsistentes e/ou enganosos quanto maior for essa não linearidade; para estimar os intervalos de abrangência individuais das grandezas de saída é necessário assumir uma PDF gaussiana para as estimativas y_j e suas respectivas incertezas padrão $u(y_j)$, além disso, as grandezas de entrada e suas respectivas incertezas padrão devem ser independentes e gaussianas também. Ou seja, existem muitas hipóteses que não podem ser satisfeitas em muitos casos.

O método LPPDFM é menos restritivo do que o método LPIG, isto é, esse método requer menos hipótese para sua aplicação. As principais vantagens desse método são: uma PDF marginal para cada grandeza de saída é fornecida; não existem limitações no que tange à natureza não linear das funções de medição; não há necessidade de assumir que a PDF das grandezas de entrada deve ser gaussiana para estimar os intervalos de abrangência das mesmas.

Entretanto, o método LPPDFM também possui limitações: à atribuição apropriada da PDF das grandezas de entrada pode ser difícil por causa da imprecisão de dados ou falta de conhecimento dos processos físicos e/ou químicos que influenciam diretamente o processo de medição; o tempo de processamento pode ser muito longo à medida que aumenta-se a complexidade e não linearidade das funções de medição; por fim, outra dificuldade reside no fato de gerar números aleatórios para uma PDF conjunta diferente da distribuição gaussiana, visto que a grande maioria dos *softwares* geram números aleatórios somente para PDF conjunta gaussiana.

Baseado nas vantagens e nas desvantagens apresentadas, bem como nos resultados mostrados de cada método para avaliação da incerteza de medição em sistemas MIMO, pode-se concluir que o método LPIG deve ser usado sob certas restrições, enquanto que o método LPPDFM é mais abrangente e pode ser aplicado para quaisquer funções de medição, principalmente as funções não lineares. Portanto, o método não linear LPPDFM é mais robusto e mais eficiente para avaliar a incerteza de medição em sistemas multivariáveis não lineares do que o método linear LPIG.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) pelo suporte financeiro desta pesquisa.

6. REFERÊNCIAS

- Albertazzi, A. e Souza, A., 2008. *Fundamentos de Metrologia Científica e Industrial*. Manole, Barueri, Brasil.
- Bich, W., 1996. "Simple formula for the propagation of variances and covariances". *Metrologia*, Vol. 33, No. 2, pp. 181–183.
- BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP e OIML, 2008a. "Evaluation of measurement data - guide to the expression of uncertainty in measurement. joint committee for guides in metrology". Technical report, Bureau International des Poids et Mesures, JCGM 100:2008.
- BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP e OIML, 2008b. "Evaluation of measurement data-supplement 1 to the guide to the expression of uncertainty in measurement-propagation of distributions using a monte carlo method". Technical report, Joint Committee for Guides in Metrology, Bureau International des Poids et Mesures, JCGM 200:2008.
- BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP e OIML, 2008c. "International vocabulary of metrology : Basic and general concepts and associated terms (vim). joint committee for guides in metrology". Technical report, Bureau International des Poids et Mesures, JCGM 200:2008.
- CIPM, 1980. "Rapport bipm-80/3, report on the bipm enquiry on error statements". Technical report, Bureau

International des Poids et Measures.

- Cox, M.G., Dainton, M.P. e Harris, P.M., 2001a. "Software specifications for uncertainty evaluation and associated statistic analysis". Technical report, National Physical Laboratory, Teddington, UK.
- Cox, M.G., Dainton, M.P. e Harris, P.M., 2001b. "Software support for metrology best practice guide". Technical Report 06, National Physical Laboratory, Teddington, UK.
- Cox, M. e Harris, P., 2003. "The gum and its planned supplemental guides". *Accred Qual Assur*, Vol. 8, No. 4, pp. 375–379.
- Giacomo, P., 1982. "News from the bipm". *Metrologia*, Vol. 18, No. 1, pp. 41–44.
- Giacomo, P., 1987. "News from the bipm". *Metrologia*, Vol. 24, No. 1, pp. 45–51.
- Kacker, R. e Jones, A., 2003. "On use of bayesian statistics to make the guide to the expression of uncertainty in measurement consistent". *Metrologia*, Vol. 40, No. 5, pp. 235–248.
- Kalid, R., 2005. "Planta didática simulada do protec-ufba". Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da EPUFBA, Salvador, Brasil. 15 de julho de 2009 <<http://www.teclim.ufba.br/ead>>.
- Kirkup, L. e Frenkel, R.B., 2006. *An Introduction to uncertainty in Measurement*. Cambridge University Press, New York, USA.
- Lepk, A., 2003. "A computer program for a general case evaluation of the expanded uncertainty". *Accred Qual Assur*, Vol. 8, pp. 296–299.
- Lira, I., 2002. *Evaluating the measurement uncertainty: fundamentals and practical guidance*. Institute of Physics Publishing, Bristol, UK.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores Márcio André Fernandes Martins e Ricardo de Araújo Kalid são os únicos responsáveis pelo conteúdo desse trabalho.

EVALUATION OF MEASUREMENT UNCERTAINTY IN MULTIVARIATE SYSTEMS BASED ON MONTE CARLO SIMULATIONS

Márcio A. F. Martins¹, marciomartins@ufba.br

Ricardo de A. Kalid¹, kalid@ufba.br

¹Federal University of Bahia, Graduate Program in Industrial Engineering, 02, Aristides Novis Street, Federação, Salvador, Brazil.

Abstract. *In many industrial systems two or more quantities, which need to be measured, depend on a common set of input quantities to compose the measurement functions. O supplement 2 of the guide to the expression of uncertainty in measurement will be responsible by the standard method for estimating of measurement uncertainty in such multivariate systems. This supplement will demonstrate that the law of propagation of uncertainties may be expressed in an equivalent matrix form when applied to a univariate model. However, this method only is robust when the measurement functions are linear. The present work aims to demonstrate a numerical non linear method for evaluating measurement uncertainty of the multivariate systems based on Monte Carlo simulations. This proposed method have been applied a chemical reactor (non linear system) which the main goal is calculate the best estimate of the molar concentrations of the reagent and product respectively, the standard uncertainties as well the coverage intervals associated to these estimates. Furthermore, a comparison analysis was carried out between the methods, and therefore, the numerical method is more robust when applied to non linear measurement functions.*

keywords: *Measurement uncertainty, Law of propagation of uncertainties, Law of propagation of probability density functions, Multivariate systems, Non linear functions.*