COMPROMETIDA COM A PROMOÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DA ENGENHARIA E DAS CIÊNCIAS MECÂNICAS

VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA
VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING
18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil
August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil

APLICAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS COM CARGA DE DOMÍNIO

Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela, candres@ufrrj.br

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Caixa Postal, 74517, Seropédica, RJ, CEP 23890-971

Resumo: *O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma técnica numérica importante dentro da mecânica computacional e diversos algoritmos foram desenvolvidos para resolver os mais variados problemas das ciências e engenharias. Um problema clássico está relacionado com a aplicação de cargas de domínio como, por exemplo, o peso próprio, forças centrífugas e outros. Uma técnica recente e que apresenta ótimos resultados neste tipo de problemas dentro do MEC é a formulação com Dupla Reciprocidade que tem a vantagem de não precisar do uso de células para discretizar o domínio do problema, assim a discretização mantém a filosofia do MEC que é a divisão em somente elementos de contorno e a utilização de pontos internos a fim de determinar deslocamentos e tensões no domínio do problema. A Dupla Reciprocidade foi apresentada inicialmente para resolver problemas de autovalores e autovetores. Seus resultados mostraram-se equivalentes aos conseguidos pelo Método dos Elementos Finitos, mas com uma quantidade de dados de entrada bem mais reduzida. Esta técnica consiste no emprego de soluções fundamentais independentes do tempo, juntamente com um procedimento que elimina todas as integrações no domínio, mesmo originárias do processo de transciência ou da presença de ações no interior do sistema. O MEC e a técnica da Dupla Reciprocidade também tem se mostrado muito eficiente no tratamento de problemas da elastodinâmica 2D e em simulações de problemas da mecânica da fratura, em cálculo de autovalores, etc. Recentemente foi desenvolvida esta formulação do Método dos Elementos de Contorno com a técnica da Dupla Reciprocidade e os primeiros testes foram para estudar e analisar os exemplos clássicos da literatura, de forma a verificar a validade e precisão do algoritmo. Neste trabalho apresentam-se os resultados de uma seleção cuidadosa de diversas aplicações encontradas na literatura e que vão permitir uma comparação mais detalhada e em situações reais. O fato de ter a solução exata é importante nas comparações realizadas.*

Palavras-chave: *Método dos Elementos de Contorno, Dupla Reciprocidade, Carga de Domínio*

1. INTRODUÇÃO

O grande desenvolvimento da matemática aplicada e computacional para a solução de problemas das ciências e engenharias fica evidente quando se observa o número crescente de trabalhos publicados envolvendo as principais técnicas numéricas como são o Método dos Elementos Finitos (MEF) (Taylor, Zienkiewicz & Zhu., 2005), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Brebbia, Telles & Wrobel, 1984; Aliabadi, 2002) e o Método das Diferenças Finitas (MDF) (Forsythe &Wasow, 2004). Muitas vezes estes métodos são combinados com outros de forma a acrescentar ou melhorar algumas das aplicações. Por exemplo, existem estudos para resolver problemas utilizando o acoplamento MEC-MEF (Warszawski, 2005) para resolver problemas acústico-elastodinâmicos, onde o meio acústico é modelado através do Método dos Elementos de Contorno e o meio elástico é modelado através do Método dos Elementos Finitos.

O Método dos Elementos de Contorno, como os demais métodos numéricos, é uma ferramenta poderosa na solução de problemas diversos. Sua utilização se torna imprescindível quando os problemas analisados alcançam um nível de complexidade que dificulta a obtenção da solução analítica ou exata. Uma das principais vantagens do MEC, quando comparado com os outros métodos é o menor número de incógnitas devido à necessidade de discretizar somente o contorno do problema. Assim, o sistema de equações a ser resolvido tem menos graus de liberdade, mas em compensação a matriz formada é cheia.

Diversas técnicas numéricas podem ser implementadas junto com o MEC de forma a aumentar as potencialidades do método. Por exemplo, recentemente o autor vem trabalhando com a formulação do MEC e o Método da Quadratura Operacional (MQO) (Lubich, 1988; Lubich, 1988A; Lubich, 1994), chamado acoplamento MEC-MQO (Vera-Tudela, Fontes Jr & Telles, 2008; Vera-Tudela, et al., 2009). Esta formulação permite resolver problemas no domínio do tempo utilizando o domínio transformado de Laplace mas a solução é dada no domínio do tempo. Desta forma é possível utilizar soluções fundamentais no domínio transformado, que certamente são mais fáceis de manipular e obter o resultado obedecendo às condições iniciais do problema, ou seja, no tempo.

O Método da Dupla Reciprocidade (MDR) (Partridge, 1997; Partridge, Brebbia & Wrobel, 1992 ; Dominguez, 1993) também é muito utilizado junto com o MEC. Este método foi apresentado inicialmente para resolver problemas transientes usando soluções fundamentais estáticas, mas que se revelou bastante adequado e eficaz na solução de problemas com ações no domínio. O objetivo do método é transformar a integral de domínio da "força de volume" em uma integral de contorno. A estratégia é fazer a substituição da variável que tem as características de ação de domínio pelo produto de duas variáveis, ficando apenas uma delas dependente das grandezas espaciais.

Neste trabalho são apresentadas algumas aplicações que complementam trabalhos anteriores (Vera-Tudela & Telles, 2005) que analisam situações diferentes às anteriormente estudadas. Dois exemplos são apresentados e as soluções numéricas são comparadas com as soluções analíticas.

2. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno-MEC (Brebbia, Telles and Wrobel, 1984) é uma técnica numérica eficiente e com aplicações em diversas áreas das ciências e engenharias. Uma das principais características está na necessidade de discretização de somente o contorno do problema. Mas existem alguns desafios principalmente quando se estuda problemas com ações de domínio, por exemplo, quando se considera a ação do peso próprio. Inicialmente será discutida brevemente a teoria geral do MEC, como base para em seguida apresentar a Técnica da Dupla Reciprocidade.

Inicia-se o estudo tomando a Equação de Navier, considerando a carga de domínio de valor nulo ($b_i = 0$).

$$\mu\, u_{j,ii} + (\lambda + \mu)\, u_{i,ij} = 0 \tag{1}$$

onde μ e λ são os coeficientes de Lamé. A formulação tradicional do MEC consiste em ponderar a Eq. (1) por uma função u^*, com características especiais e depois integrá-la no domínio (Ω), obtendo-se a expressão seguinte:

$$\mu \int_\Omega u_{j,ii}\, u_j^*\, d\Omega + (\lambda + \mu) \int_\Omega u_{i,ij}\, u_j^*\, d\Omega = 0 \tag{2}$$

Por meio de um tratamento matemático adequado, em que se utiliza principalmente a integração por partes e o teorema da divergência, transforma-se esta equação integral de domínio em uma integral de contorno (Γ):

$$u_i(\xi) + \int_\Gamma u_j(x)\, p_{ij}^*(\xi, x)\, d\Gamma(x) = \int_\Gamma p_j(x)\, u_{ij}^*(\xi, x)\, d\Gamma(x) \tag{3}$$

onde x é o ponto campo, ξ é o ponto fonte; u_{ij}^* e p_{ij}^* são as soluções fundamentais para deslocamento e força de superfície respectivamente. Equação (3) foi escrita para um ponto no interior do domínio. Uma vez que o ponto fonte é interno, a equação contém apenas integrandos regulares. Uma vez que as incógnitas $u_j(x)$ e $p_j(x)$ do problema pertencem ao contorno para a resolução do problema, torna-se necessário considerar o limite quando o ponto fonte tende ao contorno. Desta forma a Eq. (3) é escrita da forma seguinte:

$$C_{ij}(\xi)\, u_j(\xi) + \int_\Gamma u_j(x)\, p_{ij}^*(\xi, x)\, d\Gamma(x) = \int_\Gamma p_j(x)\, u_{ij}^*(\xi, x)\, d\Gamma(x) \tag{4}$$

onde a integral do lado direito é interpretada no sentido de valor principal de Cauchy em ξ. O coeficiente $C_{ij}(\xi)$ para contornos suaves, vale $\delta_{ij}/2$.

Obtida a equação integral, Eq. (4), a etapa seguinte baseia-se na formulação do MEC como técnica numérica propriamente dita. Isto consiste na discretização desta equação integral e na formulação de um sistema matricial preparado para sua posterior solução computacional.

A discretização de uma geometria considera o contorno Γ composto por elementos distintos, sobre os quais são definidas variações para o deslocamento e a tensão em função de valores em determinados pontos (denominados nós ou pontos nodais). Estes pontos podem variar em sua quantidade e em seu posicionamento, dependendo do nível de refinamento desejado, da ordem de interpolação, da geometria do elemento e de outros aspectos. O programa usado para a obtenção dos resultados aqui apresentados encontra-se estruturado com elementos retilíneos com uma interpolação linear entre os valores calculados nos seus extremos (pontos nodais).

Matematicamente, essas interpolações dos valores nodais sobre cada elemento podem ser caracterizadas por:

$$u_i = \underset{\sim}{\mathbf{N}}\,\underset{\sim}{\mathbf{u}}^{(n)} \tag{5}$$

e

$$p_j = \underset{\sim}{\mathbf{N}}\,\underset{\sim}{\mathbf{p}}^{(n)} \tag{6}$$

onde $\underset{\sim}{\mathbf{N}}$ contém as funções de interpolação e n indica o ponto nodal ao longo do elemento i.

Aplicando-se estas considerações na Eq. (4) e admitindo-se que o contorno Γ tenha sido discretizado em M elementos, chega-se à seguinte expressão:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{M}}\left[\int_{\Gamma_j} p_{ij}^{*}\,\underset{\sim}{\mathbf{N}}\,d\Gamma\right]\underset{\sim}{\mathbf{u}}^{(n)} = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{M}}\left[\int_{\Gamma_j} u_{ij}^{*}\,\underset{\sim}{\mathbf{N}}\,d\Gamma\right]\underset{\sim}{p}^{(n)} \tag{7}$$

Expandindo-se esta equação através da aplicação dos pontos ξ como sendo coincidentes com todos os pontos nodais, pode-se escrever matricialmente o seguinte sistema de equações lineares:

$$\underset{\sim}{\mathbf{H}}\,\underset{\sim}{\mathbf{u}}_i = \underset{\sim}{\mathbf{G}}\,\underset{\sim}{\mathbf{p}}_j \tag{8}$$

3. O MÉTODO DA DUPLA RECIPROCIDADE EM PROBLEMAS COM CARGA DE DOMÍNO: PESO PRÓPRIO

O Método da Dupla Reciprocidade (Nardini e Brebbia, 1983; Partridge et al., 1992) foi apresentado inicialmente para resolver problemas transientes usando soluções fundamentais estáticas, e se revelou bastante adequado e eficaz na solução de problemas com ações de domínio.

O objetivo do método é transformar a integral de domínio da força de volume em uma integral de contorno. A estratégia é fazer a substituição da variável que tem as características de ação de domínio pelo produto de duas outras variáveis, sendo apenas uma delas dependentes das grandezas espaciais.

O Método da Dupla Reciprocidade surge, então, como uma formulação alternativa do MEC, que mediante o uso de funções auxiliares permite a transformação das integrais de domínio em integrais de contorno, de acordo com os procedimentos clássicos do método.

Seja a equação de Navier, Eq. (1), considerando a carga de domínio:

$$\mu\, u_{j},_{ii} + (\lambda + \mu)\, u_{i},_{ij} = b_j \tag{9}$$

A solução fundamental para deslocamentos, u_{ij}^{*}, e para forças de superfície, p_{ij}^{*}, associada à Eq. (9) e os procedimentos clássicos do Método dos Elementos de Contorno geram a seguinte equação integral de contorno com um integral de domínio:

$$C_{ij}\,u_j + \int_{\Gamma} u_j\, p_{ij}^{*}\, d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j\, u_{ij}^{*}\, d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^{*}\, b_j d\Omega \tag{10}$$

O método da Dupla Reciprocidade é introduzido de forma a expressar o termo de domínio como integrais de contorno. Para isso, representa-se a ação de domínio por um somatório de funções na forma indicial seguinte:

$$b_j(x) = \alpha_j^m\, f^m = \alpha_j^1\, f^1 + \alpha_j^2\, f^2 + \ldots + \alpha_j^n\, f^n \tag{11}$$

onde os pontos *m* são pontos de colocação, *f* é uma função de aproximação e α é um conjunto de coeficientes iniciais desconhecidos.

Desta forma, a integral de domínio passa a ser escrita como:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^{*}\, b_j\, d\Omega = \alpha_j^m \int_{\Omega} f^m\, u_{ij}^{*}\, d\Omega \tag{12}$$

Para transformar a Eq. (12) numa integral de contorno, é necessário reescrever f^m em termos de uma função primitiva $\hat{u}_{nj}^k$, que satisfaz a Equação de Navier, com o termo de domínio sendo concentrado no volume, ou seja,

$$\mu \hat{u}_{nj}^k,_{ii} + (\lambda + \mu)\hat{u}_{ni}^k,_{ij} = \delta_{nj} f^k \tag{13}$$

Desta forma, substituindo as Eqs. (13) e (12) na Eq. (10) e verificando que, por analogia, as mesmas operações já desenvolvidas para os termos estacionários podem ser empreendidas (daí o nome Dupla Reciprocidade), obtém-se:

$$C_{ij}^k u_j^k + \int_\Gamma u_j\, p_{ij}^*\, d\Gamma - \int_\Gamma p_j\, u_{ij}^*\, d\Gamma = \left(C_{ij}^k\, \hat{u}_{nj}^{km} + \int_\Gamma \hat{u}_{nj}^m\, p_{ij}^*\, d\Gamma - \int_\Gamma \hat{p}_{nj}^m\, u_{ij}^*\, d\Gamma \right) \alpha_n^m \tag{14}$$

onde $\hat{p}_{nj}^m$ corresponde as forças de superfície recíprocas, referentes a função auxiliar de interpolação, e $\hat{u}_{nj}^m$ corresponde aos deslocamentos.

Após a discretização e aproximação da variação de ***u, p, û,*** $\hat{\boldsymbol{p}}$ sobre cada elemento, usando os valores nodais com o mesmo grupo de funções de interpolação, a Eq. (14) pode ser escrita da forma seguinte:

$$C^k u^k + \sum_{j=1}^{Ne} h_{kj} u_j - \sum_{j=1}^{Ne} g_{kj}\, p_j = \sum_{j=1}^{Ne} \left(C^k \hat{u}^{km} + \sum_{j=1}^{Ne} h_{kj} \hat{u}_j^m - \sum_{j=1}^{Ne} g_{kj}\, \hat{p}_j^m \right) \alpha^m \tag{15}$$

Finalmente, aplicando a equação anterior para todos os nós de contorno e pontos internos, e incorporando a matriz **C** em **h**, forma-se o seguinte sistema de equações:

$$Hu - Gp = (H\hat{u} - G\hat{p})\alpha \tag{16}$$

e, lembrando que pela Eq. (11) tem-se que $\alpha = f^{-1} b$, resulta

$$Hu - Gp = (H\hat{u} - G\hat{p})\, f^{-1} b = B \tag{17}$$

4. FUNÇÃO AUXILIAR DE INTERPOLAÇÃO

Uma etapa muito importante nessa formulação é a escolha das funções f^k. Essas funções servem para interpolar os valores da carga em todo o domínio, com base nos pontos em que seus valores são conhecidos, tendo grande influência na precisão dos resultados.

Para o caso dos problemas da elasticidade, a função auxiliar $\hat{u}$ pode ser obtida da seguinte forma: primeiro, considere-se uma função radial básica, à qual pertencem todas as funções de *r*. As funções radiais básicas são uma poderosa ferramenta matemática para a interpolação de dados dispersos e tem a propriedade de melhorar a convergência com o incremento das dimensões. A função radial básica mais usada no Método dos Elementos de Contorno é a função linear *r*. A função cúbica r^3 e a “thin plate spline (TPS)” $r^2 \log(r)$ foram introduzidas recentemente. Como antes, a variável *r* é aquela que quantifica a distância euclidiana entre dois pontos (Partridge, 1997).

Assim, neste trabalho tem-se que $f^k = r(x^k, x)(1 + \delta_{ij})$ e, portanto:

$$\hat{u}_{ij} = \frac{1}{30(1-\nu)\mu} \left[\left(3 - \frac{10\nu}{3} \right) \delta_{ij} - r,_i\, r,_j \right] r^3 \tag{18}$$

e

$$\hat{p}_{ij} = \frac{1}{15(1-\nu)} \left[(4-5\nu) r,_i\, n_j - (1-5\nu) r,_j\, n_i + \left[(4-5\nu)\delta_{ij} - r,_j\, r,_i \right] \frac{\partial r}{\partial n} \right] r^2 \tag{19}$$

onde $\frac{\partial r}{\partial n} = n_i \, r,_i$.

5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Dois exemplos de aplicação são apresentados para verificar a validade da formulação apresentada e que complementam trabalhos anteriormente iniciados pelo autor (Vera-Tudela, 1999; .Vera-Tudela & Telles, 2005).

O primeiro exemplo corresponde a uma placa quadrada sob a ação do peso próprio, na direção *y*, distribuído de forma uniforme no domínio do corpo. A placa quadrada tem lados de dimensão igual a 100mm como pode ser observado na Fig. (1). O problema é resolvido considerando o estado plano de tensão com as seguintes propriedades físicas: Módulo de Young, *E = 210 GPa*; Coeficiente de Poisson, $\nu = 0.3$, a densidade do corpo é ρ , e considera-se o peso específico igual a $\rho g = 1x10^{-4} \, Nmm^{-3}$.

Para comparar os resultados obtidos os exemplos apresentados foram tomados como referência os resultados obtidos em Ochiai, Nisitani & Sekiya (1996) , utilizando células para resolver a integral de domínio, e com valores teóricos.

São determinados os valores dos deslocamentos e tensões para diversos pontos ao longo dos valores correspondentes a *x=50mm* e *x=90mm*, e os resultados são apresentados na Fig. (2) e Fig. (3), respectivamente. Para a formulação do MEC com dupla reciprocidade foi empregada uma discretização de 80 elementos de contorno lineares, 4 nós duplos nos quatro cantos da placa e 27 pontos internos. Os pontos internos foram distribuídos ao longo do eixo *y* para valores de *x=10mm*, *x=50mm* e *x=90mm*, distribuídos de forma uniforme e simétrica na placa quadrada.

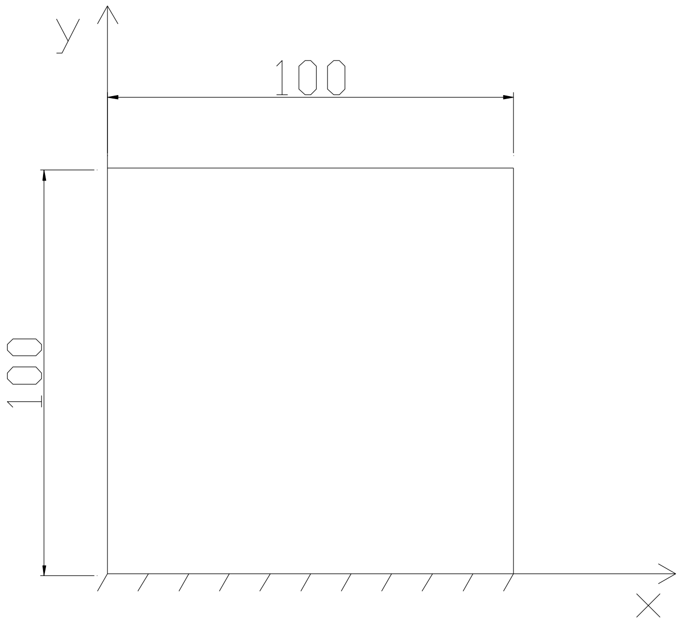

Figura 1. Placa Quadrada com densidade uniforme.

Na Figura (2) podem-se observar os valores para deslocamentos na direção *y* e verifica-se a boa concordância dos resultados quando comparados com a solução exata.

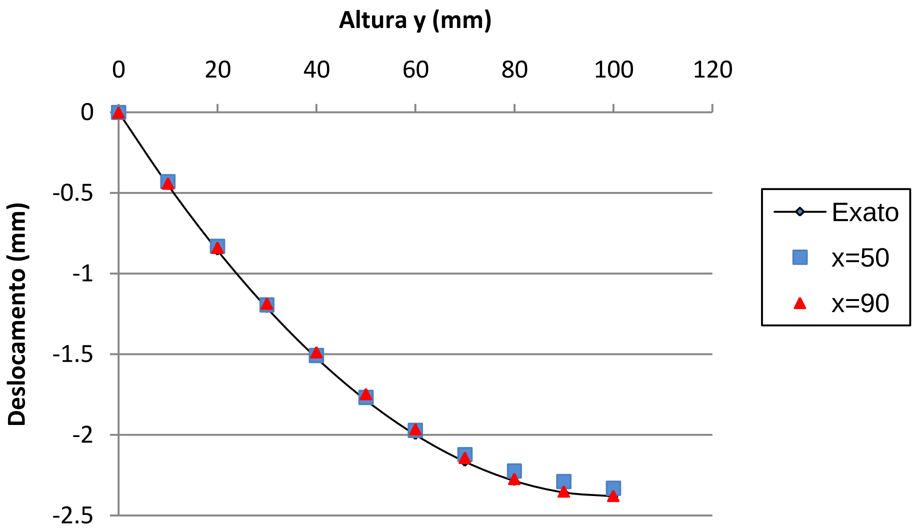

Figura 2. Distribuição do deslocamento na direção *y* no caso da densidade uniforme.

Na Figura (3) tem-se o gráfico das tensões na direção *y* e também verifica-se uma boa precisão quando comparados com os valores exatos.

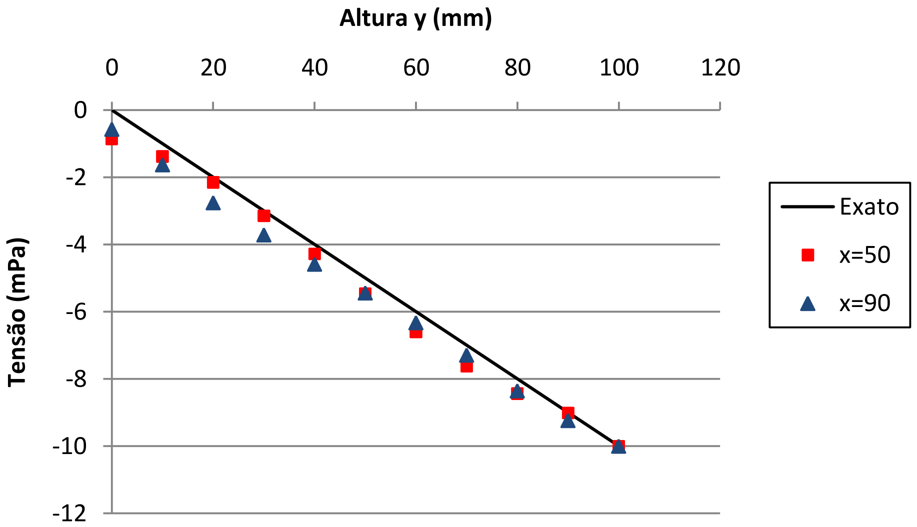

Figura 3. Distribuição de tensão na direção y no caso da densidade uniforme.

O segundo exemplo corresponde a uma placa quadrada de lado *100mm* e onde a densidade é variável seguindo a variação apresentada na Fig. (4). Se definirmos a altura vertical como L, então a função de densidade pode ser escrita dependendo da variável y como se segue:

$$\rho(y) = \begin{Bmatrix} \rho_0 & 0 \le y < L/2 \\ \rho_0\left(\dfrac{2y}{L}\right) & L/2 \le y \le L \end{Bmatrix} \tag{20}$$

Finalmente, considera-se que o peso específico é $\rho g_0 = 1x10^{-4}\,Nmm^{-3}$ e todas as propriedades físicas do material são as mesmas do exemplo anterior. Para a formulação do MEC com dupla reciprocidade foi empregada uma discretização de 80 elementos de contorno lineares, 4 nós duplos nos quatro cantos da placa e 27 pontos internos. Os pontos internos foram distribuídos ao longo do eixo *y* para valores de *x=10mm*, *x=50mm* e *x=90mm*, distribuídos de forma uniforme e simétrica na placa quadrada.

Segundo Ochiai, Nisitani & Sekiya (1996) as expressões para deslocamentos (D_y) e tensões ($\sigma(y)$) são dadas pelas seguintes expressões:

$$D_y = \begin{cases} -\dfrac{g\rho_0}{E}\left[-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{5Ly}{4}\right] & 0 \le y < L/2 \\ \dfrac{g\rho_0}{E}\left[(L-y)^2-\dfrac{(L-y)^3}{3L}-\dfrac{17L^2}{24}\right] & L/2 \le y \le L \end{cases} \quad (21)$$

$$\sigma(y) = \begin{cases} -\dfrac{g\rho_0}{4}(-4y+5L) & 0 \le y < L/2 \\ \dfrac{g\rho_0}{E}\left[-2(L-y)+\dfrac{(L-y)^2}{L}\right] & L/2 \le y \le L \end{cases} \quad (22)$$

Os resultados obtidos para a distribuição de deslocamentos e tensões são mostrados nas Figs. (5) e (6).

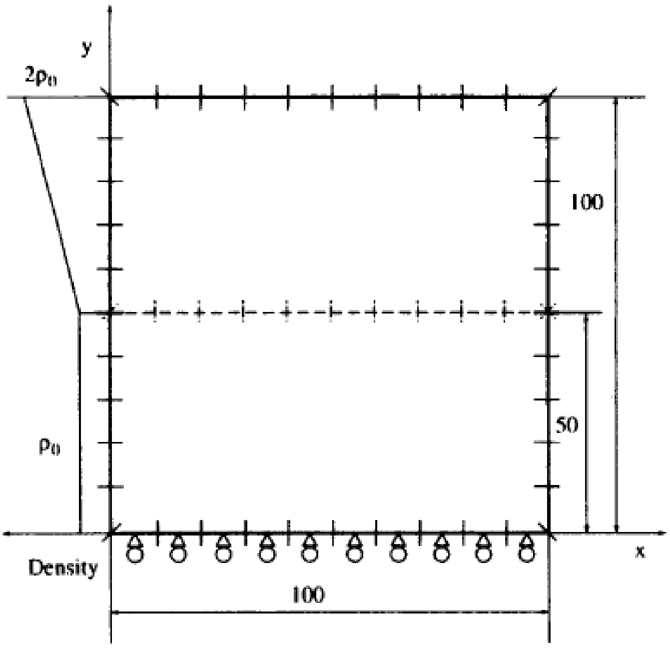

Figura 4. Placa Quadrada com densidade variável.

Na Fig. (5) são apresentados os deslocamentos na direção *y* para o problema proposto e são comparados com a solução exata.

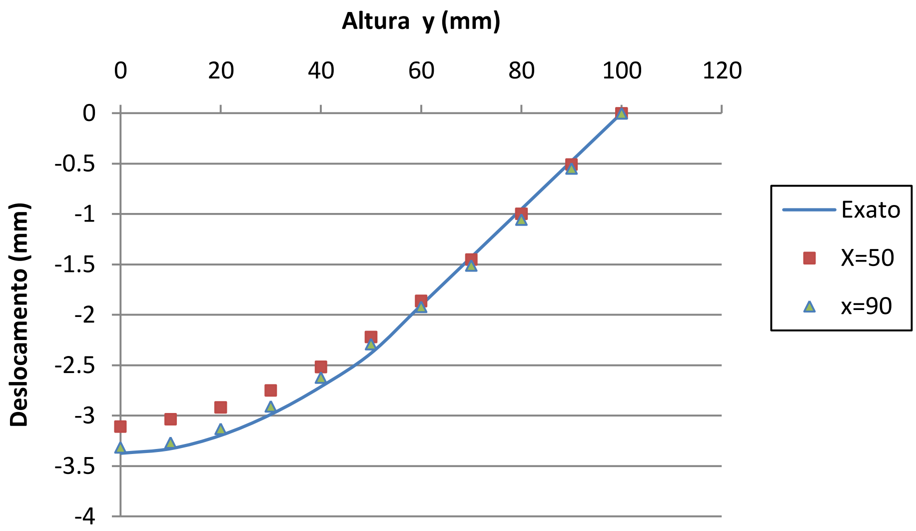

Figura 5. Distribuição do deslocamento na direção *y* no caso da densidade variável.

Na fig. (6) são apresentados os resultados para a tensão na direção *y* e os valores obtidos são comparados com os valores dados pela fórmula (22).

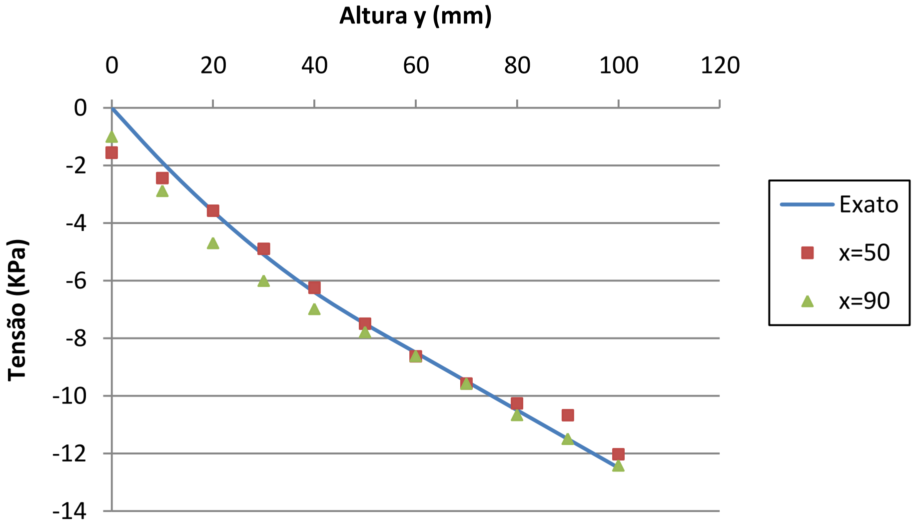

Figura 6. Distribuição de tensão na direção y no caso da densidade variável.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada a formulação do Método dos Elementos de Contorno com o Método da Dupla Reciprocidade com o objetivo de resolver problemas com carga de domínio representado como peso próprio. Dois exemplos foram executados, o primeiro considera o peso próprio constante no corpo e o segundo o considera variável. Os resultados obtidos foram muito próximos dos valores exatos demonstrando que a formulação desenvolvida oferece uma boa precisão. Pode-se acrescentar a importância que tem o método da Dupla Reciprocidade pois evita a necessidade da discretização do domínio em problemas com carga de domínio, o que implica em menor número de incógnitas, pois somente o contorno é discretizado, mantendo assim, a filosofia inicial do Método dos Elementos Contorno.

Outros tipos de aplicações bem comportadas pelo método da Dupla Reciprocidade são problemas que envolvem esquemas de avanço no tempo, problemas que envolvem cálculo de autovalores e autovetores, alguns problemas particulares da mecânica da fratura linear elástica, dentre outros.

Finalmente, pode-se afirmar que a formulação desenvolvida é uma importante ferramenta de trabalho, eficiente e econômica desde o ponto de vista da economia computacional. Uma aplicação futura deverá ser desenvolver uma ferramenta computacional para visualização científica e a análise de problemas que envolvam grande número de incógnitas.

7. REFERÊNCIAS

Aliabadi, F., 2002, “The Boundary Element Method, V.2: Applications in solid and Structures”, John Wiley Professional, England.

Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., 1984, “Boundary Elements Techniques: Theory and Applications”, Springer-Verlag, Berlin.

Dominguez, J., 1993, “Boundary Elements in Dynamics”, Seville, Spain.

Forsythe, G.E. & Wasow, W., “Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations”, Dover Publications, New York.

Lubich, C., 1988, “Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus I”, Numerische Mathematik, Vol. 52, pp. 129-145.

Lubich, C., 1988A, “Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus II”, Numerische Mathematik, Vol. 52, pp. 413-425.

Lubich, C., 1994, “On the Multistep Time Discretization of Linear Initial-Boundary Value Problems and their Boundary Integral Equations”, Numerische Mathematik, Vol. 67, pp. 365-389.

Nardini, D. and Brebbia, C.A., 1983, “A new approach to free vibration analysis using boundary elements”, Applied Mahtmatics Modelling, Vol. 7, pp. 157-162.

Ochiai, Y., Nisitani, H. & Sekiya, T., 1996, "Stress analysis with arbitrary body force by boundary element method", Engineering Analysis with Boundary Element, vol. 17, pp. 295-302.

Partridge, P.W., 1997, "Approximation Function in the Dual Reciprocity Method", Boundary Element Communications, Vol. 8, No. 1, pp. 1-4.

Partridge, P.W, Brebbia, C.A & Wrobel, L.C, 1992, "The Dual Reciprocity Boundary Element Method", Computational Mechanics Publications, London.

Taylor, R.L., Zienkiewicz, , O.C. & Zhu, J.Z., 2005, "The Finite Element Method", Elsevier Butterworth-Heineman, Oxford.

Vera-Tudela, C.A.R., 1999, Elastodinâmica Bidimensional através do Método dos Elementos de Contorno com a Dupla Reciprocidade, Dissertação, Universidade Federal do Espírito Santo.

Vera-Tudela, C.A.R., Fontes Junior, E.F., Telles, J.C.F.,2008, "BEM/OQM Formulation to Simulate Crack Problems", TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, v. 9, p. 363-373.

Vera-Tudela, C.A.R & Telles, J.C.F., 2005, "A numerical Green´s function and the dual reciprocity BEM method to solve elastodynamic crack problems", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 29, pp. 204-209.

Vera-Tudela, C.A.R., Telles, J.C.F., Mansur, W.J., Rojas, A.I.A., 2009, "APPLICATIONS OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH THE CONVOLUTION QUADRATURE", In: COBEM 2009.20th International Congress of Mechanical Engineering., 2009, Gramado - RS. Proceedings of COBEM 2009. Gramado - RS : Cobem 2009.

Warszawski, A., 2005, Acoplamento MEC-MEF para Problemas Acústico-Elastodinâmicos Axissimétricos no Domínio do Tempo, Dissertação, COPPE/UFRJ.

8. DIREITOS AUTORAIS

APPLICATIONS OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD IN PROBLEMS WITH DOMAIN LOAD

Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela, candres@ufrrj.br

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Caixa Postal, 74517, Seropédica, RJ, CEP 23890-971

Abstract: *The Boundary Element Method (BEM) is a numerical tool that is important in the computational mechanics and various algorithms was developed to solve problems in the sciences and engineering. A classic problem is related to the application of domain loads, for example the self-weight, centrifugal forces and others. A recent technique and that presents great results in this type of problems within the BEM is the formulation with Dual Reciprocity which has the advantage of not requiring the use of cells to discretized the domain of the problem, so the discretization maintains the philosophy of BEM which is the division into only boundary elements and the use of internal points to determine deformations and tensions in the domain of the problem. The Dual-Reciprocity was introduced initially to solve problems of eingenvalues and eigenvectors. Their results are equivalent to those achieved by the method of Finite Elements, but the quantity of incoming data is reduced. This technique use the time-dependent fundamental solution, together with a procedure that eliminates all integrations in the domain, even from the process of transciência or the presence of actions within the system. The BEM and the technique of the Dual-Reciprocity also has been very effective in the treatment of 2D elastodynamic problems and fracture problems, etc. Recently was developed the Boundary Element formlation with the Dual Reciprocity method and the first tests was to study and analyse the classic examples of literature, in order to verify the validity and accuracy of the algorithm. This work results from a careful selection of various applications found in the literature and that will allow a more detailed comparison and in real situations. Having the exact solution is important under the comparisons made.with tha Dual Reciprocity method.*

Keywords: *Boundary Element Method, Dual Reciprocity, Domain Load*