

## **MODELAGEM DINÂMICA E ANÁLISE MODAL DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO COM DOIS ELOS FLEXÍVEIS**

**Clayton Rodrigues Bernardo, claytonrb@gmail.com<sup>1</sup>**  
**Fábio Alonso da Silva, fabioalonso@hotmail.com<sup>1</sup>**  
**Luiz Carlos Sandoval Góes, goes@ita.br<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA / ITA - Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 - Vila das Acácias,  
Cep: 12.228-900 - São José dos Campos - SP – Brasil.

***Resumo:** Sistemas manipuladores flexíveis apresentam muitas vantagens sobre os sistemas tradicionais (manipuladores com braço rígido). No entanto, sua utilização em diversas áreas industriais não tem sido favorecida devido à sua óbvia dificuldade no controle destes manipuladores flexíveis. Este trabalho apresenta estudo teórico e prático para a modelagem dinâmica e caracterização de um sistema manipulador flexível. Um sistema mecânico com dois apêndices flexíveis é utilizado para a validação deste experimento. A matemática e modelo do sistema são desenvolvidos baseados no método dos modos assumidos. O modelo matemático obtido é finalmente simulado para investigar o comportamento do sistema.*

***Palavras-chave:** 1. Identificação de parâmetros. 2. Estimação de sistemas. 3. Sistemas flexíveis.*

### **1. INTRODUÇÃO**

Muitos equipamentos de hoje são obrigados a executar tarefas, que exigem alto nível de precisão no posicionamento de braços mecânicos articulados. Utilizando-se braços mecânicos rígidos as articulações destes equipamentos tendem a serem grandes, rígidas e pesadas. Isso evita oscilações nos elos, que é um das principais causas de erros de posicionamento no sistema, porém, muito da potência do motor nas articulações é gasta para movimentação de pesados braços rígidos e muitas vezes atuando contra a ação da força da gravidade, além disso, a carga deve ser mantida absolutamente pequena quando comparada à massa do equipamento propriamente dito, uma vez que grandes cargas irão causar vibrações e insegurança posicional no fim dos braços mecânicos. Estas limitações resultam em uma situação em que estes sistemas de braços rígidos são muito ineficazes e lentos para a realização de determinadas atividades.

Na tentativa de se resolver estes problemas foram desencadeadas várias pesquisas no meio acadêmico envolvendo manipuladores mecânicos de braços flexíveis entre os quais temos (Fonseca et al, 1995 e Oakley et al 1989). Um manipulador mecânico é flexível, se ao menos um dos braços é feito de material leve e não rígido. Em geral, manipuladores mecânicos flexíveis apresentam muitas vantagens relativamente aos manipuladores mecânicos de braço rígido:

- Requerem menos material em sua construção;
- São mais leves;
- Consomem menos energia;
- Exigem pequenos atuadores;
- São mais manobráveis e transportáveis;
- Têm menor custo e;
- Possuem maior relação entre carga a ser movimentada e o peso global do manipulador mecânico Book et al (1983).

### **2. APARATO EXPERIMENTAL**

O experimento é composto por dois apêndices flexíveis de alumínio, o primeiro apêndice encontra-se engastado em uma de suas extremidades ao eixo de um motor de corrente contínua (motor 1), enquanto que a outra extremidade desta primeira viga encontra-se acoplada ao suporte do outro motor (motor 2), não apresentando nenhuma interligação com o eixo de rotação deste segundo motor. São utilizados quatro tipos de sensores: dois potenciômetros, dois tacômetros, cada motor de corrente contínua possui acoplado um par destes sensores, cada apêndice possui uma ponte

extensométrica fixada em determinada posição cuja função é medir a deformação no apêndice flexível. O apêndice flexível acoplado ao motor 1 possui um acelerômetro próximo ao suporte do motor 2. Existe outro acelerômetro, localizado na extremidade do apêndice conectado ao eixo de rotação do motor 2. Os extensômetros e os acelerômetros são utilizados para medir as deformações elásticas da estrutura e os seus graus de liberdade de vibração. Todo o conjunto encontra-se apoiado sobre uma mesa de vidro retangular com dimensões suficientes para a movimentação do modelo em estudo. O esquema está mostrado na Fig. 1.

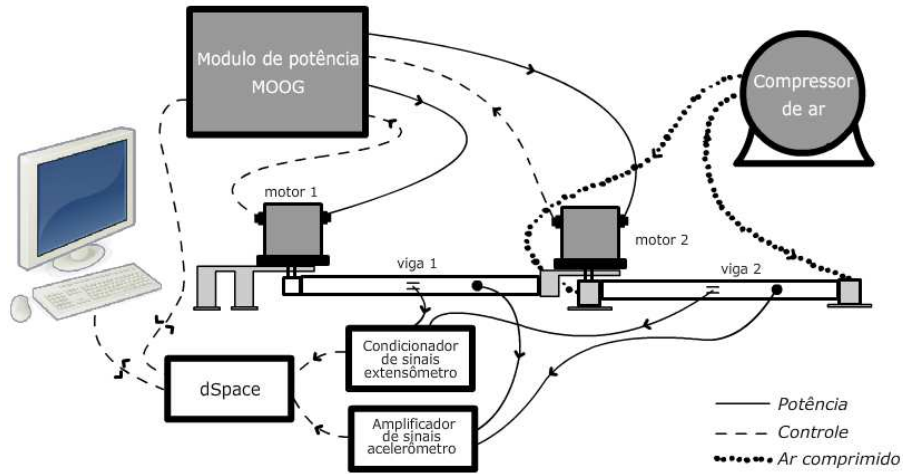


Figura 1. Esquema da Montagem Experimental dos Apêndices Flexíveis

O experimento encontra-se no Laboratório de Mecânica do ITA. Toda parte móvel do sistema encontra-se apoiada sobre uma placa retangular de vidro, o motor 2 encontra-se acoplado ao suporte aerostático que permite a criação de um colchão de ar entre o suporte e a placa de vidro cujo propósito é o de se minimizar o atrito estático e permitir uma maior mobilidade à estrutura. O motor 1 fornece o torque de controle necessário à movimentação de toda a estrutura (motor 2, apêndices flexíveis e sensores). Foi utilizado um acoplamento flexível confeccionado em alumínio (para minimizar a inércia e a massa) tornando mais eficiente a utilização do suporte aerostático.

### 3. MODELAGEM DO MANIPULADOR COM DOIS APÊNDICES FLEXÍVEIS

Para se modelar este sistema à parâmetros distribuídos, usou-se o método de Lagrange, através da obtenção das densidades de energias cinética e potencial elástica do sistema. As equações obtidas foram do tipo equações diferenciais parciais não lineares, com o movimento de corpo rígido e elástico acoplados.

A discretização do sistema é feita pelo Método dos Modos Assumidos, que resulta na separação das coordenadas acopladas em dois tipos distintos de equações somente temporais e equações somente espaciais, Junkins et al (1993).

Foi considerado um manipulador planar com dois apêndices flexíveis como mostrado na Fig. 2, cada apêndice é modelado como uma viga uniforme flexível, utilizando-se as considerações de Euler-Bernoulli.

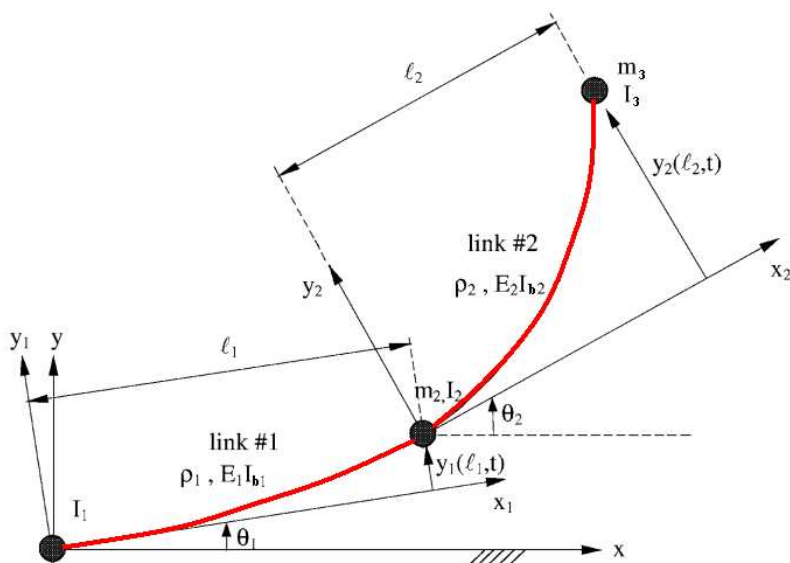


Figura 2. Manipulador de dois apêndices flexíveis

Para descrever a posição da deflexão de cada elo utiliza-se de duas coordenadas de referência  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  cuja origem esta localizada na junta 1 e na junta 2, respectivamente. Assim, a posição  $(x, y)$  de um ponto qualquer no elo flexível 1 pode ser representado pela Eq. (1) e no elo flexível 2 pela Eq. (2).

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \theta_1 - y_1(x_1, t) \sin \theta_1 \\ y &= x_1 \sin \theta_1 + y_1(x_1, t) \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos \theta_1 - y_1(l_1, t) \sin \theta_1 + x_2 \cos \theta_2 - y_2(x_2, t) \sin \theta_2 \\ y &= l_1 \sin \theta_1 + y_1(l_1, t) \cos \theta_1 + x_2 \sin \theta_2 + y_2(x_2, t) \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Onde  $l_1$  é o comprimento do elo 1,  $x_1$  e  $x_2$  fornecem a posição da deformação dos elos 1 e 2,  $y_1$  e  $y_2$  são os deslocamentos elásticos transverso e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  representam o deslocamento angular das juntas 1 e 2, respectivamente. A velocidade angular  $v$  para um ponto arbitrário  $(x_2, y_2)$  no elo 2 é dada pela Eq. (3).

$$\begin{aligned} v(x_2, y_2) &= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} = \{ [l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{y}_1(l_1, t)]^2 + \dot{y}_1(l_1, t)^2 \dot{\theta}_1^2 + [x_2 \dot{\theta}_2 + \dot{y}_2(x_2, t)]^2 + y_2(x_2, t)^2 \dot{\theta}_2^2 \\ &+ 2[l_1 x_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_1 \dot{y}_2(x_2, t) \dot{\theta}_1 + y_1(l_1, t) y_2(x_2, t) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{y}_1(l_1, t) x_2 \dot{\theta}_2 + \dot{y}_1(l_1, t) \dot{y}_2(x_2, t)] \\ &\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2[l_1 y_2(x_2, t) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - y_1(l_1, t) x_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - y_1(l_1, t) \dot{y}_2(x_2, t) \dot{\theta}_1 + \dot{y}_1(l_1, t) y_2(x_2, t) \dot{\theta}_2] \\ &\sin(\theta_1 - \theta_2) \}^{1/2} \end{aligned} \quad (3)$$

Assim, as equações de energia cinética e potencial são dadas pelas Eq. (4) e Eq. (5)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \left( \dot{\theta}_2 + \frac{\partial \dot{y}_2(l_2, t)}{\partial x_2} \right)^2 + \\ &\frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 v(x_1, y_1)^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 v(x_2, y_2)^2 dx_2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} EI_{b1} \left( \frac{\partial^2 y_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} EI_{b2} \left( \frac{\partial^2 y_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 \quad (5)$$

De posse das equações de energia cinética e potencial podemos formar o Lagrangeano do sistema. Da forma como esta apresentada, a energia potencial e cinética, não é possível obter-se diretamente um sistema de equações diferenciais linear, deste modo utiliza-se o método dos modos assumidos. O método dos modos assumidos utiliza-se de funções de forma para descrever as deformações  $y_1(x_1, t)$  e  $y_2(x_2, t)$ .

$$\begin{aligned} y_1(x_1, t) &= \Psi^T(x_1) \mathbf{p}(t); \quad \Psi^T = [\phi_{1,1}, \phi_{1,2}] \quad \mathbf{p}^t = [\eta_{1,1}, \eta_{1,2}] \\ y_2(x_2, t) &= \Gamma^T(x_2) \mathbf{g}(t) \quad \Gamma^T = [\phi_{2,1}, \phi_{2,2}] \quad \mathbf{g}^t = [\eta_{2,1}, \eta_{2,2}] \end{aligned} \quad (6)$$

Onde  $\Psi(x_1)$  e  $\Gamma(x_2)$  são as funções de forma associadas ao elo flexível 1 e 2, respectivamente. E  $\mathbf{p}(t)$  e  $\mathbf{g}(t)$  representa o vetor de coordenadas generalizadas para o elo flexível 1 e 2.

Após a aplicação do método dos modos assumidos tem-se o manipulador de dois apêndices flexíveis expressos em função das coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}^T = [\theta_1, \theta_2, \mathbf{p}^t, \mathbf{g}^t]$ .

O trabalho virtual devido ao torque aplicado pelos motores 1 e 2 é dado pela Eq. (7) e as forças generalizadas dadas pela Eq. (8).

$$\delta W = \tau_1 \delta \theta_1 + \tau_2 \delta \{ \theta_2 - [\theta_1 + \Psi^T(l_1) \mathbf{p}(t)] \} \quad (7)$$

$$f_1 = \tau_1 - \tau_2, \quad f_2 = \tau_2 \theta_2, \quad \mathbf{f}_3 = 0, \quad \mathbf{f}_4 = 0 \quad (8)$$

Onde  $\tau_1$  e  $\tau_2$  representam o torque no motor 1 e 2, respectivamente e  $\Psi(l_1)$  representa o valor de  $d\Psi(l_1)/dx_1$  calculado em  $x_1=l_1$ .

As equações de energia cinética e potencial podem ser descritas através das funções de forma em conjunto com as coordenadas generalizadas, Soares (1997). Aplicando-se o método de Lagrange, um sistema de equações não lineares pode ser obtido a partir do Lagrangeano.

Este sistema de equações não lineares pode ser representado pela Eq. (9).

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{14} \\ M_{12} & M_{22} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{M}_{24} \\ \mathbf{M}_{13}^T & \mathbf{M}_{23}^T & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{34} \\ \mathbf{M}_{14}^T & \mathbf{M}_{24}^T & \mathbf{M}_{34}^T & \mathbf{M}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \mathbf{H}_3 \\ \mathbf{H}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 - \tau_2 \\ \tau_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

onde  $M_{ij}$  representa os termos da matriz de inércia, e  $K_{ij}$  representa os termos da matriz de rigidez e  $H_{ij}$  representa o vetor de Coriolis e as forças centrífugas, assim como descrito em (Lee et al 2002 e Luca et al 1990).

A seguir os termos das matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{K}$  são representados da Eq. (9) até a Eq. (24).

$$M_{11} = \int_0^{l_1} \rho_1 x_1^2 dx_1 + I_1 + \mathbf{p}^T(t)\mathbf{p}(t) + \{l_1 + [\Psi^T(l_1)\mathbf{p}(t)]^2\} \left( m_2 + m_3 + \int_0^{l_2} \rho_2 x_2 dx_2 \right) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} M_{12} = & \int_0^{l_2} \rho_2 \{l_1 x_2 + [\Psi^T(l_1)\mathbf{p}(t)][\Gamma^T(x_2)\mathbf{g}(t)] \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ & [l_1 \Gamma^T(x_2)\mathbf{g}(t) - \Psi^T(l_1)\mathbf{p}(t)x_2] \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\} dx_2 + \\ & m_3 \{l_1 l_2 + [\Psi^T(l_1)\mathbf{p}(t)][\Gamma^T(l_2)\mathbf{g}(t)] \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ & [l_1 \Gamma^T(l_2)\mathbf{g}(t) - \Psi^T(l_1)\mathbf{p}(t)l_2] \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_{13} = \int_0^{l_1} \rho_1 x_1 \Psi^T(x_1) dx_1 + l_1 \Psi^T(l_1) \int_0^{l_2} \rho_2 dx_2 + (m_2 + m_3) l_1 \Psi^T(l_1) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{14} = & \int_0^{l_2} \rho_2 \{l_1 \Gamma^T(x_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - [\Psi^T(l_1)\mathbf{p}(t)l_2] \Gamma^T(x_2) \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\} dx_2 \\ & m_3 \{l_1 \Gamma^T(l_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - [\Psi^T(l_1)\mathbf{p}(t)l_2] \Gamma^T(l_2) \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$M_{22} = \int_0^{l_2} \rho_2 x_2^2 dx_2 + I_2 + I_3 + m_3 I_2^2 + m_3 [\Gamma^T(l_2)\mathbf{g}(t)]^2 + \mathbf{g}^T(t)\mathbf{g}(t) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{23} = & \int_0^{l_2} \rho_2 \{ \Psi^T(l_1) x_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + [\Gamma^T(x_2)\mathbf{g}(t)] \Psi^T(l_1) \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \} dx_2 \\ & m_3 + \{ \Psi^T(l_1) l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + [\Gamma^T(l_2)\mathbf{g}(t)] \Psi^T(l_1) \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{M}_{24} = \int_0^{l_2} \rho_2 x_2 \Gamma^T(x_2) dx_2 + I_3 \Gamma^T(l_2) + m_3 l_2 \Gamma^T(l_2) \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_{33} = \boldsymbol{\Psi}(l_1)\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\int_0^{l_2}\rho_2 dx_2 + [\mathbf{I}] + (m_2 + m_3)\boldsymbol{\Psi}(l_1)\boldsymbol{\Psi}^T(l_1) \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_{34} = \int_0^{l_2}\rho_2\boldsymbol{\Psi}(l_1)\boldsymbol{\Gamma}^T(x_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)dx_2 + m_3[\boldsymbol{\Psi}(l_1)\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)]\cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (17)$$

$$\mathbf{M}_{44} = [\mathbf{I}] + I_3\boldsymbol{\Gamma}'(l_2)\boldsymbol{\Gamma}'^T(l_2) + m_3\boldsymbol{\Gamma}(l_2)\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} H_1 = & \int_0^{l_2}\rho_2\{2[\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)][\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\dot{\mathbf{p}}(t)]\dot{\theta}_1 + (l_1x_2\dot{\theta}_2 + 2l_1\boldsymbol{\Gamma}^T(x_2)\dot{\mathbf{g}}(t) + [\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)] \\ & [\boldsymbol{\Gamma}^T(x_2)\mathbf{g}(t)]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) - (l_1\boldsymbol{\Gamma}^T(x_2)\mathbf{g}(t)\dot{\theta}_2 - \boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)x_2\dot{\theta}_2 - 2[\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)] \\ & [\boldsymbol{\Gamma}^T(x_2)\dot{\mathbf{g}}(t)]\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\}dx_2 - m_2\{2[\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)][\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\dot{\mathbf{p}}(t)]\dot{\theta}_1\} - m_3\{2[\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)] \\ & [\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\dot{\mathbf{p}}(t)]\dot{\theta}_1 + (l_1l_2\dot{\theta}_2 + 2l_1\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\dot{\mathbf{g}}(t) + [\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)][\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \\ & - (l_1\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)\dot{\theta}_2 - \boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)l_2\dot{\theta}_2 - 2[\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)][\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\dot{\mathbf{g}}(t)]\times\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\} - 2\mathbf{p}^T(t)\dot{\mathbf{p}}(t)\dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H_2 = & \int_0^{l_2}\rho_2\{-(l_1x_2\dot{\theta}_1 + 2[\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\dot{\mathbf{p}}(t)]x_2 + [\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)][\boldsymbol{\Gamma}^T(x_2)\mathbf{g}(t)]\dot{\theta}_1\}\times\dot{\theta}_1\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \\ & + (l_1\boldsymbol{\Gamma}^T(x_2)\mathbf{g}(t)\dot{\theta}_1 - \boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)x_2\dot{\theta}_1 + 2[\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\dot{\mathbf{p}}(t)][\boldsymbol{\Gamma}^T(x_2)\mathbf{g}(t)]\dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2)\}dx_2 - \\ & m_2\{2[\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)][\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)]\dot{\theta}_2\} - m_3\{2[\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)][\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)]\dot{\theta}_2 - (l_1l_2\dot{\theta}_1 + 2l_2\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\dot{\mathbf{p}}(t) \\ & + [\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)][\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) + (\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)\dot{\theta}_1 - \boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)l_2\dot{\theta}_1 + \\ & 2[\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)][\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)]\dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2)\} - 2\mathbf{g}^T(t)\dot{\mathbf{g}}(t)\dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_3 = & \int_0^{l_2}\rho_2\{-\boldsymbol{\Psi}(l_1)\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)\dot{\theta}_1^2 + (\boldsymbol{\Psi}(l_1)x_2\dot{\theta}_2 + 2\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\boldsymbol{\Gamma}^T(x_2)\dot{\mathbf{g}}(t))\times \\ & \dot{\theta}_2\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) - \boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\boldsymbol{\Gamma}^T(x_2)\mathbf{g}(t)\dot{\theta}_2^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\}dx_2 - \\ & m_2\{-\boldsymbol{\Psi}(l_1)\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)\dot{\theta}_1^2\} - m_3\{-\boldsymbol{\Psi}(l_1)\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)\dot{\theta}_1^2 + \\ & (\boldsymbol{\Psi}(l_1)l_2\dot{\theta}_2 + 2\boldsymbol{\Psi}(l_1)\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\dot{\mathbf{g}}(t)\dot{\theta}_2\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) - \\ & \boldsymbol{\Psi}(l_1)\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)\dot{\theta}_2^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\} + \dot{\theta}_1^2\mathbf{p}(t) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_4 = & -\int_0^{l_2}\rho_2\{\boldsymbol{\Gamma}(x_2)\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\dot{\mathbf{p}}(t)\dot{\theta}_1\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) + \\ & (\boldsymbol{\Gamma}(x_2)l_1\dot{\theta}_1 + \boldsymbol{\Gamma}(x_2)\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\dot{\mathbf{p}}(t))\dot{\theta}_1\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) + \\ & \boldsymbol{\Gamma}(x_2)\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\dot{\mathbf{p}}(t)\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\}dx_2 + \\ & m_3\{\boldsymbol{\Gamma}(l_2)\boldsymbol{\Gamma}^T(l_2)\mathbf{g}(t)\dot{\theta}_2^2 + (l_1\boldsymbol{\Gamma}(l_2)\dot{\theta}_1 + 2\boldsymbol{\Gamma}(l_2)\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\dot{\mathbf{p}}(t))\times \\ & \dot{\theta}_1\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) + \boldsymbol{\Gamma}(l_2)\boldsymbol{\Psi}^T(l_1)\mathbf{p}(t)\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\} + \dot{\theta}_2^2\mathbf{g}(t) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_{33} = \int_0^{l_1}EI_{b1}[\boldsymbol{\Psi}''^T(x_1)]^2 dx_1 \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_{44} = \int_0^{l_2} EI_{b2} [\Gamma^{T'}(x_2)]^2 dx_2 \quad (24)$$

Onde  $\Gamma(l_2)$  representa o valor de  $d\Gamma(x_2)/dx_2$  calculado em  $x_2=l_2$ ,  $\Gamma''(x_2)$  representa o valor de  $d^2\Gamma(x_2)/dx_2^2$  e  $[\mathbf{I}]$  é uma matriz identidade  $2 \times 2$ .

Neste trabalho foi desconsiderada a parte não linear do sistema manipulador de dois apêndices flexíveis. É assumido que os termos derivativos  $d\theta_1/dt$  e  $d\theta_2/dt$  possuem valor muito próximo a zero uma vez que são consideradas pequenas deflexões no sistema manipulador de dois apêndices flexíveis.

Após a obtenção da matriz de massa e rigidez pode-se calcular os autovalores resultantes da multiplicação de  $M^{-1}K$ . Estes autovalores são as frequências de ressonância do manipulador de dois apêndices flexíveis. Obtêm-se neste trabalho a primeira e a segunda frequência ressonante para cada apêndice flexível.

Com relação aos sensores as seguintes considerações são importantes:

O sinal do acelerômetro é amplificado. Cada acelerômetro possui um coeficiente de sensibilidade global,  $G_a$ , expresso em [V/cm]. Dessa forma, pode-se escrever:

$$e_{ac} = G_a(l_{ac}\theta + y(l,t)) \quad (25)$$

A variável  $l_{ac}$  é a posição do acelerômetro na viga.

O potenciômetro fornece um sinal de tensão proporcional ao deslocamento angular da barra, ou seja:

$$e_p = G_p \theta(t) \quad (26)$$

O circuito de ponte extensométrica fornece um sinal proporcional à deformação axial sofrida pela barra, no ponto onde os extensômetros estão colados (posição central de cada barra). Para pequenas deformações, pode-se relacionar a deformação axial neste ponto, com a derivada da inclinação da barra, no mesmo ponto. Dessa forma, tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{e_i}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_x \quad (27)$$

Onde  $\varepsilon_x$  é a deformação axial no ponto  $x$ ,  $e_i$  é a espessura da viga e  $\partial^2 y / \partial x^2 \Big|_x$  é a derivada da inclinação no ponto  $x$ .

O tacômetro fornece um sinal proporcional à velocidade angular do motor.

$$e_t = C_t \dot{\theta}(t) \quad (28)$$

#### 4. COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS NUMÉRICOS E ANALÍTICOS

As matrizes  $M$  e  $K$  foram obtidas analiticamente através da utilização do Software Maple. Os valores de  $M$  e  $K$  foram calculados com base nos termos da Eq. (9). Obtiveram-se também os modos de vibração. Logo após as matrizes  $M$  e  $K$  foram exportadas para o ambiente MATLAB onde houve a geração das matrizes no espaço de estados (A, B, C, D) assim foi calculada a resposta em frequência deste sistema teórico utilizando-se a função bode.

$$M = \begin{bmatrix} 0,078212 & 0 & -0,0058527 & -0,27324 & 0 & 0 \\ 0 & 0,017613 & 0 & 0 & -0,0013719 & -0,054358 \\ -0,0058527 & 0 & 0,00044751 & 0,018713 & 0 & 0 \\ -0,27324 & 0 & 0,018713 & 1,2741 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0013719 & 0 & 0 & 0,00010942 & 0,0037789 \\ 0 & -0,054358 & 0 & 0 & 0,0037789 & 0,25462 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,023035 & -5,1964 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5,1964 & 1820,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,023035 & -5,1964 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5,1964 & 1820,6 \end{bmatrix}$$

Os modos experimentais da estrutura mecânica flexível foram identificados através de uma varredura em seno. Esta varredura utilizou uma banda de frequências de 0 a 120 Hz durante 420 segundos, com o objetivo de excitar os primeiros modos de vibração do sistema. Das Fig. 3 até Fig. 8 mostram-se as comparações dos resultados obtidos na prática e na simulação para os sensores tacômetros, extensômetros e acelerômetros.

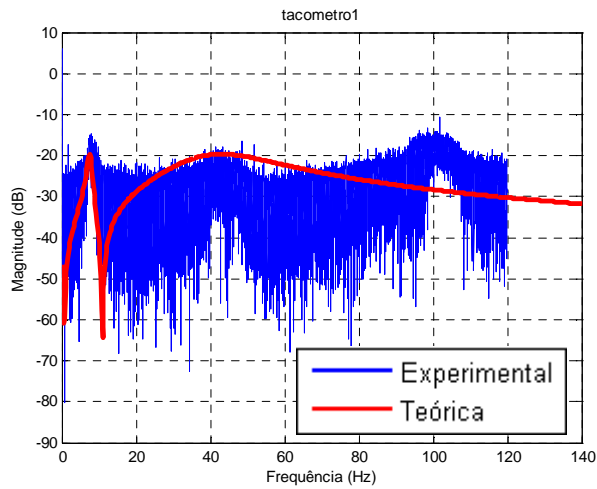


Figura 3. Função Resposta em Frequência real e simulada tacômetro 1

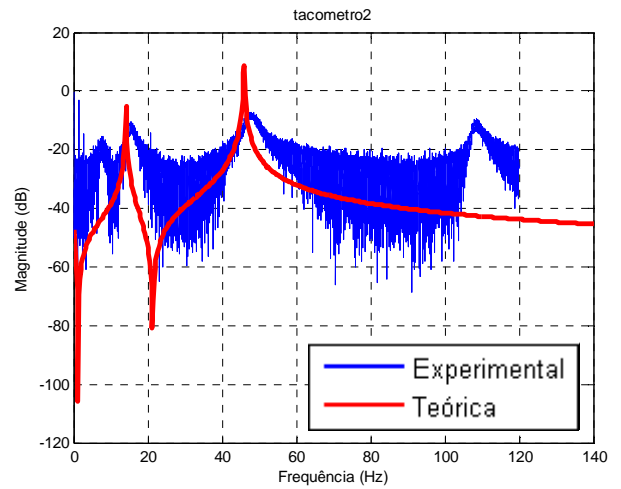


Figura 4. Função Resposta em Frequência real e simulada tacômetro 2

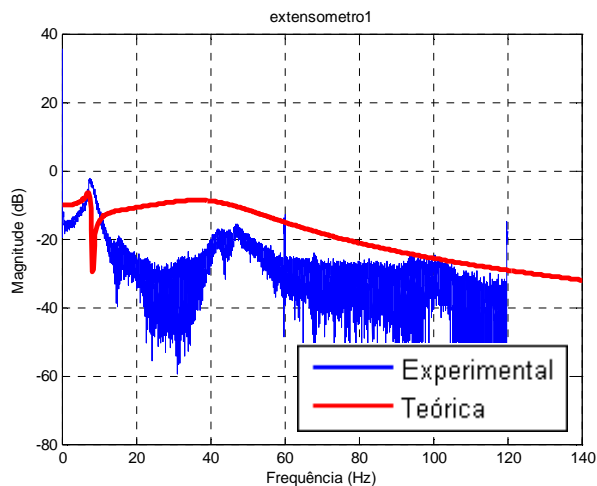


Figura 5. Função Resposta em Frequência real e simulada extensômetro 1

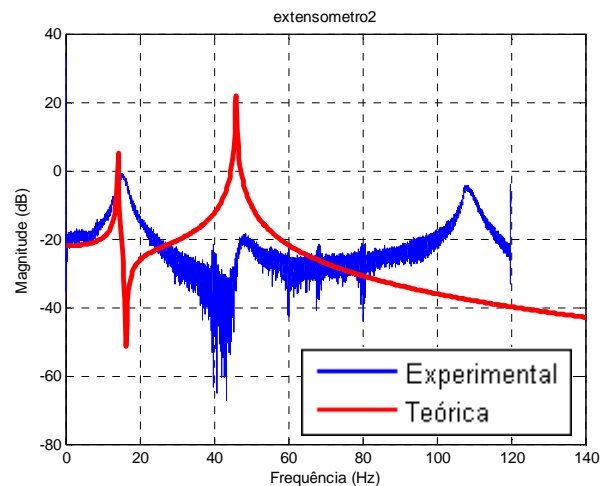


Figura 6. Função Resposta em Frequência real e simulada extensômetro 2

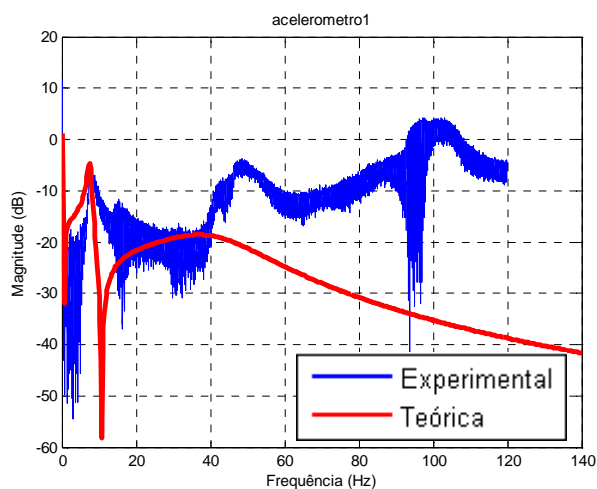


Figura 7. Função Resposta em Frequência real e simulada acelerômetro 1

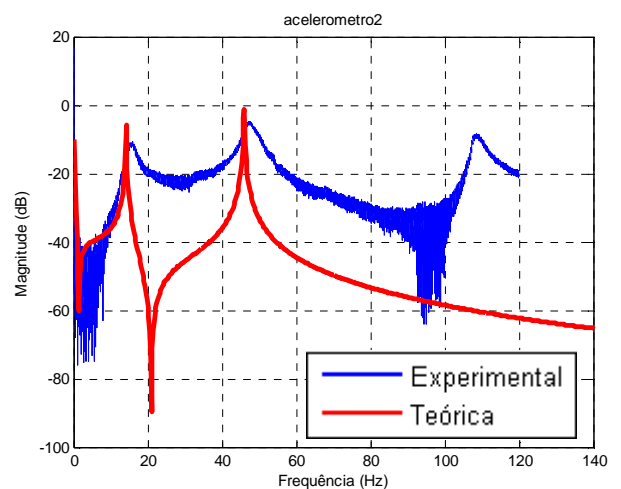


Figura 8. Função Resposta em Frequência real e simulada acelerômetro 2

As diferenças observadas entre o modelo teórico e o modelo identificado experimentalmente, representadas na Fig. 3 até Fig. 8, podem ser explicadas devido às incertezas paramétricas (parâmetros de massa e inércia) do sistema mecânico, além disso, desprezou-se a parte não linear do sistema (vetor de Coriolis e as forças centrífugas) manipulador robótico de dois apêndices flexíveis.

As frequências obtidas no programa de simulação Maple apresentaram proximidade com os dados de frequência obtidos experimentalmente. Os resultados foram obtidos com o sistema livre de forças externas e somente com a excitação dos dois motores constituintes do experimento. Os resultados obtidos estão resumidos na Tab. 1 e Tab. 2 e foram obtidos através da análise do pico de magnitude da Fig. 3 até Fig. 8.

**Tabela 1. Comparação das frequências experimentais e analíticas viga 1**

Modo viga 1	Analítico (Hz)	Experimental (Hz)	Diferença (%)
1	7,49	7,4	1,20%
2	42,88	46,5	7,78%

**Tabela 2. Comparação das frequências experimentais e analíticas viga 2**

Modo viga 2	Analítico (Hz)	Experimental (Hz)	Diferença (%)
1	14,16	15,5	8,64%
2	45,89	48,0	4,39%

Percebe-se, com base nas Tab. 1 e Tab. 2, que o modelo obtido via modelagem pela técnica dos modos assumidos, considerando dois modos, apresentou boa correlação com os resultados experimentais oferecendo uma diferença máxima de aproximadamente 8,64% para o primeiro modo e de 7,78% para o segundo modo.

Nas Tab. 3 e Tab. 4 são especificados os parâmetros do motor e da barra flexível utilizado. Os motores e as barras utilizadas são idênticos.

**Tabela 3. Parâmetros do Motor do Manipulador Mecânico Flexível**

Momento de Inércia	$0,16 \times 10^{-4} \text{ Kg m}^2$
Índice de Redução	1
Constante de Torque	0,3025 Nm/A
Constante da f.e.m	0,3025 V/(rad/s)
Torque Máximo	1,8 Nm
Velocidade Nominal	7000 rpm
Resistência da Armadura	13.6 ohm
Indutância da Armadura	19mH

**Tabela 4. Parâmetros do apêndice do Manipulador Mecânico Flexível**

Altura do apêndice	$27.8 \times 10^{-3} \text{ m}$
Espessura do apêndice	$2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$
Comprimento do apêndice	$390 \times 10^{-3} \text{ m}$
Massa Específica do Alumínio	$2710 \text{ Kg/m}^3$
Módulo de Young:	$6.89 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Momento de Inércia	$2.88 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^2$

Para obtenção das curvas experimentais e analíticas foi utilizado o passo de 1 milissegundo em todas as simulações e aquisições de sinais. O passo foi escolhido com base no hardware utilizado em laboratório: PentiumIII 500MHz, MATLAB 6.1, sistema operacional Windows 2000 com 256 Mbytes de memória RAM.



## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho expõe os resultados obtidos na modelagem e identificação de um experimento composto por dois motores e dois elos flexíveis juntamente com os seus sensores. Para a modelagem deste sistema utilizou-se da técnica de discretização do modelo através do método dos modos assumidos juntamente com a formalização Lagrangiana para um sistema de coordenadas híbridas.

Primeiramente foi feita a modelagem do sistema com apêndices flexíveis incluindo os dois primeiros modos de vibração. Posteriormente procedeu-se a identificação experimental não paramétrica no domínio de frequência via funções de resposta em frequência. Com os resultados das funções de resposta em frequência experimental e analítica verificou-se uma boa aproximação entre os modelos.

A utilização de programa de manipulação simbólica, Maple, para análise de sistemas flexíveis trouxe muitas vantagens uma vez que o cálculo torna-se exaustivo e passível de erro quando realizado sem o auxílio de tais ferramentas. Além disso, a utilização da ferramenta MATLAB mostrou-se de grande importância para a conclusão deste trabalho uma vez que a mesma proporcionou uma análise adequada das FRF, utilizando-se a função *tfestimate*, e também proporcionou a interface de comunicação com o sistema DSPACE. Observa-se também que as frequências analíticas se aproximaram bastante dos resultados experimentais, tornando o modelo mais próximo da realidade.

Tendo obtido um modelo teórico com suficiente representatividade, as etapas seguintes para trabalhos futuros incluem:

- O projeto e a determinação de um controle dos modos para a estrutura flexível;
- O controle LQG/LQR;
- A inserção de atuadores piezoelétricos ao longo dos apêndices para o controle ativo dos modos de vibração;
- Determinação de uma quantidade maior de modos vibracionais, tornando o modelo mais fiel à realidade.

## 6. AGRADECIMENTOS

A Deus por ter nos concedido a oportunidade de participar desse evento, à Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Instituto Tecnológico de Aeronáutica pelo incentivo e apoio; à e CAPES pelo financiamento.

## 7. REFERÊNCIAS

- BOOK, W. J.; MAJETTE, M. Controller design for flexible distributed parameter mechanical arm via combined state-space and frequency domain technique. Transactions of the ASME: Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, v.105, n.4, p. 246-254, 1983.
- BREMER, H.; PFEIFFER, F. Experiments with flexible manipulators. Fourth IFAC Symposium on Robot Control, p. 585-592, Setembro 1994.
- CANNON, R. H.; SCHMITZ, E. Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot. International Journal of Robotics Research, v. 3, n. 3, p 325-338, 1984.
- FONSECA, R. A.; GÓES, L. C. S. Adaptive control of a one-link robotic elastic manipulator. In: XIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1995, Belo Horizonte, MG.
- JUNKINS, J. L.; KIM, Y. Introduction to dynamics and control of flexible structures. Washington, DC: AIAA, 1993. 452p.
- LEE, S.; LEE, C. Hybrid Control Scheme for Robust Tracking of Two-Link Flexible Manipulator. Journal of Intelligent and Robotic Systems, v. 34, n. 4, p. 431-452, Aug. 2002.
- LUCA, A.; SICILIANO, B. Explicit Dynamic Modeling of a Planar Two-Link Flexible Manipulator. In: Proceedings of the 29<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, 1990, Honolulu, Hawaii.
- MEIROVITCH, L. Methods of analytical dynamics. [S.l.]: Mcgraw-Hill, 1970. 544p.
- OAKLEY, C. M.; CANNON, R. H. End-point control of a two-link manipulator with a very flexible forearm: issues and experiments. In: Proceedings of the American Control Conference, 1989, Pittsburg, PA.
- SOARES, A. M. S. Modelagem e identificação experimental de estruturas flexíveis. 1997. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica e Aeronáutica na Área de Mecatrônica e Dinâmica de Sistemas) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.
- ZHANG, X.; XU, W.; NAIR, S. S. PDE Modeling and Control of a Flexible Two-Link Manipulator. IEEE Transactions on control systems technology, v. 13, n. 2, p 301-312, março 2005.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## DYNAMICAL MODELING AND MODAL ANALYSIS OF A TWO-LINK FLEXIBLE MANIPULATOR

Clayton Rodrigues Bernardo, claytonrb@gmail.com<sup>1</sup>

Fábio Alonso da Silva, fabioalonso@hotmail.com<sup>1</sup>

Luiz Carlos Sandoval Góes, goes@ita.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA / ITA - Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 - Vila das Acácias, Cep: 12.228-900 - São José dos Campos - SP – Brasil.

**Abstract:** Flexible manipulator systems exhibit many advantages over their traditional (rigid-arm) counterparts. However, they have not been favored in production industries due to its obvious disadvantages in controlling the manipulator. This work presents a theoretical and experimental modeling and characterization of a two-link flexible manipulator system. The modeling system is based on the method of assumed modes, obtaining the first two modes of vibration for the two-link flexible manipulator system used in the experiment. After obtaining the theoretical and experimental results is made Nonparametric analysis to verify the accuracy associated with the non-parametric model obtained in theory.

**Keywords:** 1. Parameters identification. 2. System estimation. 3. Flexible systems.