

# SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BOLTZMANN COM SEPARAÇÃO DO OPERADOR E FATOR INTEGRANTE EM UM MEIO UNIDIMENSIONAL COM FONTE INTERNA E SUPERFÍCIES REFLETORAS

**Rosana da Paz F. Pinheiro** – rpaz@iprj.uerj.br

**Francisco D. Moura Neto** – fmoura@iprj.uerj.br

**Antônio J. Silva Neto\*** – ajsneto@iprj.uerj.br

Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, CP 97.282, CEP 28601-970, Nova Friburgo, RJ, Brasil.

***Resumo.** Neste trabalho são empregados os métodos de separação do operador e do fator integrante para a solução da equação de Boltzmann em meios participantes unidimensionais homogêneos, com fontes internas, espalhadores isotrópicos, cinzas (sem dependência espectral), com superfícies refletoras difusas e sujeitas à incidência de radiação externa isotrópica. Vários casos-teste são considerados sendo comparados os resultados com os métodos de ordenadas discretas e Galerkin base global.*

***Palavras-chave:** Transferência radiativa, Meios participantes, Ordenadas discretas, Separação do operador, Fator integrante.*

## 1. INTRODUÇÃO

A solução do problema de transferência radiativa no interior de meios participantes, ou seja, meios absorvedores, emissores e espalhadores, possui aplicações tecnológicas relevantes não só em engenharia, no projeto de equipamentos térmicos (Varma e Mengüç, 1989), de barreiras térmicas (Howe e Yang, 1993) ou em ensaios não-destrutivos (Kauati *et al.*, 2000), como também em medicina, para diagnóstico e terapia (Anderson *et al.*, 1989, Carita Montero *et al.*, 1999, 2000).

A crescente preocupação com o meio ambiente, como por exemplo no uso mais eficiente de recursos naturais ou minimização da emissão de poluentes, leva à busca do melhor conhecimento dos fenômenos físicos e químicos envolvidos e do aperfeiçoamento da modelagem matemática utilizada. Para equipamentos que operam com a queima de combustíveis fósseis a altas temperaturas (Selçuk e Kayakol, 1997, Varma e Mengüç, 1989), a transferência de calor por radiação térmica representa uma parcela preponderante da troca térmica no interior dos mesmos.

---

\* Autor para correspondência.

Ainda no sentido da preocupação com o meio ambiente onde a modelagem dos fenômenos envolvidos em transferência radiativa possui um papel importante, pode ser mencionada a avaliação da qualidade da água bem como a poluição térmica em reservatórios, lagos e rios (Viskanta e Toor, 1973).

Alguns trabalhos recentes em transferência radiativa levam em consideração a dependência espectral das propriedades do meio como por exemplo na fabricação de lentes de alta qualidade para componentes ópticos (Lee e Viskanta, 1997), ou os efeitos de radiação polarizada em estudos climáticos na atmosfera da Terra ou em processos de combustão (Haferman *et al.*, 1997).

Os fenômenos de absorção, emissão e espalhamento de radiação eletromagnética, ou de partículas não carregadas, em um meio participante, são modelados matematicamente pela equação linearizada de Boltzmann, ou equação de transporte. Vários métodos têm sido desenvolvidos para a solução desta equação. Silva Neto e Roberty (1998) apresentaram uma comparação dos resultados obtidos para meios unidimensionais, espalhadores isotrópicos e com superfícies transparentes, empregando três métodos diferentes: ordenadas discretas ( $S_N$ ), expansão em harmônicos esféricos ( $P_N$ ) e Galerkin base global. Barichello e Siewert (1998) provaram a equivalência dos métodos de ordenadas discretas e harmônicos esféricos para o cálculo da transferência radiativa em regime permanente em meios planos-paralelos.

O método de ordenadas discretas originalmente proposto por Chandrasekhar (1960), visando aplicações em astrofísica, foi aplicado na solução do problema de transporte de nêutrons e de fótons (Lathrop, 1966), sendo ainda hoje objeto de intensa atividade de pesquisa (Barros *et al.*, 1998, Barichello e Siewert, 1999). Diversos pesquisadores aplicaram este método na solução da transferência de calor por radiação térmica em meios participantes (Fiveland, 1984, Truelove, 1988) e muitos trabalhos têm sido publicados sobre este assunto recentemente (Silva *et al.*, 1997, Sakami *et al.*, 1998).

Silva Neto e Moura Neto (1998) e Moura Neto e Silva Neto (1999) têm desenvolvido os métodos de separação do operador (SO) e do fator integrante (FI) para a solução da equação de transporte em meios homogêneos unidimensionais, espalhadores isotrópicos, sem fonte interna e com superfícies transparentes, tendo comparado os resultados destes métodos com aqueles obtidos com o método de ordenadas discretas ( $S_N$ ).

Na maioria das aplicações mencionadas anteriormente é necessário levar em consideração o termo de emissão (ou fontes internas) no interior do meio e/ou reflexões nas superfícies do meio, e diversos trabalhos têm sido realizados visando analisar os efeitos destes fenômenos (Menart *et al.*, 1993, Pessoa Filho e Thynell, 1994, Siegel e Spuckler, 1994, O'Brien, 1998). Neste trabalho serão estendidos os métodos SO e FI para a solução da equação de transporte em meios participantes homogêneos unidimensionais, espalhadores isotrópicos, com fontes internas e paredes refletoras difusas. Os resultados são comparados com aqueles obtidos com o método  $S_N$  e com o método de Galerkin base global (Özisk e Yener, 1982, Cengel *et al.*, 1984).

## **2. MODELAGEM MATEMÁTICA DA TRANSFERÊNCIA RADIATIVA**

Considere um meio unidimensional homogêneo de espessura óptica  $\tau_0$ , cinza, espalhador isotrópico, com uma fonte interna e com superfícies de contorno refletoras difusas sujeitas a fontes de radiação isotrópicas externas (vide Fig. 1). Os efeitos devidos a uma possível diferença dos índices de refração do meio e do seu contorno não são considerados. A modelagem matemática das interações da radiação com este meio participante é feita com a equação linearizada de Boltzmann, ou equação de transporte, que pode ser escrita na seguinte forma adimensional, tendo sido considerada simetria azimutal,

$$i \frac{\partial I(\hat{\delta}, \mu)}{\partial \hat{\delta}} + I(\hat{\delta}, \mu) = S(\hat{\delta}, \mu) + \frac{\hat{\mu}}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\hat{\mu}' \quad \text{em } 0 < \hat{\delta} < \hat{\delta}_0, -1 \leq i \leq 1 \quad (1a)$$

$$I(0, i) = A_1 + 2\tilde{n}_1 \int_0^1 I(0, -i') i' di' \quad , \quad i > 0 \quad (1b)$$

$$I(\hat{\delta}_0, -i) = A_2 + 2\tilde{n}_2 \int_0^1 I(\hat{\delta}_0, i') \mu' d\mu' \quad , \quad i > 0 \quad (1c)$$

onde  $I$  é a intensidade da radiação,  $\tau$  é a variável óptica,  $\tau_0$  é a espessura óptica do meio,  $\mu$  é o cosseno do ângulo polar, ou seja, cosseno do ângulo do feixe de radiação com o eixo  $\tau$ ,  $\omega$  é o albedo de espalhamento simples,  $A_1$  e  $A_2$  são as intensidades das fontes isotrópicas externas de radiação incidentes respectivamente em  $\tau=0$  e  $\tau=\tau_0$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são as reflectividades difusas nestas superfícies, na parte interna ao meio, e  $S(\tau, \mu)$  é o termo fonte com dependência espacial e angular que por conveniência é escrito na seguinte forma

$$S(\tau, \mu) = (1 - \omega)H(\tau, \mu) \quad (2)$$

onde  $H(\tau, \mu)$  representa um termo fonte genérico.

Nas subseções 2.1 a 2.3 serão descritos os métodos de ordenadas discretas, separação do operador e fator integrante para a solução do problema (1) com a fonte (2).

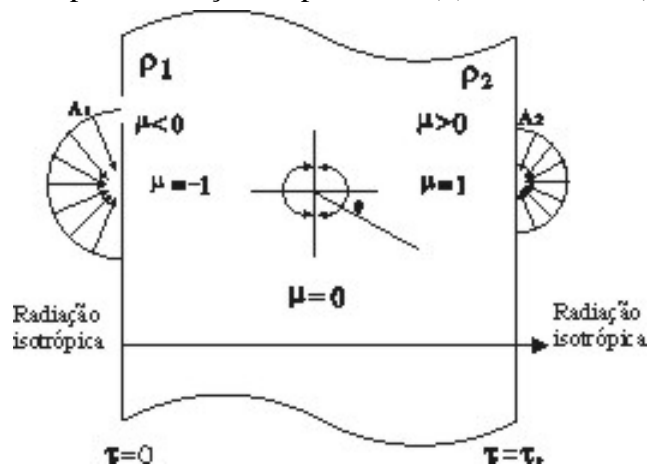


Figura 1 – Meio participante unidimensional com superfícies refletoras difusas.

## 2.1 Método de ordenadas discretas ( $S_N$ )

Considere uma discretização do domínio espacial de forma que para um determinado nó da malha computacional,  $i$ , corresponda a coordenada espacial (óptica)  $\tau_i = i\Delta\tau$ , com  $i = 0, 1, 2, \dots, M$ , sendo  $\Delta\tau$  calculado usando  $\Delta\tau = \tau_0/M$ .

Nesse método é realizada uma seqüência de marchas para a frente (da esquerda para a direita) e de marchas para trás (da direita para a esquerda) na malha computacional, capturando primeiro a condição de contorno em  $\tau=0$  e depois aquela em  $\tau=\tau_0$ , e corrigindo ao longo do procedimento iterativo o termo integral do lado direito da Eq. (1a) (Silva Neto e Roberty, 1998).

Usando uma aproximação por diferenças finitas avançadas e a quadratura gaussiana representadas a seguir

$$\left( \mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} \right)_{i,m} \cong \mu_m \frac{I_m^{i+1} - I_m^i}{\Delta \tau} \quad \text{e} \quad q^i = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') \Big|_{\tau=i\Delta\tau} d\mu' \cong \frac{\omega}{2} \sum_{n=1}^N a_n I_n^i \quad (3a,b)$$

onde  $i$  representa a discretização da coordenada espacial e  $m$  a discretização da coordenada angular,  $a_n$  é o peso da quadratura gaussiana, e o índice  $n$  indica os pontos de colocação, que no caso da quadratura Gauss-Legendre corresponde às raízes do polinômio de Legendre.

Levando as Eqs. (3a,b) na Eq. (1a) obtém-se a expressão usada na marcha para frente

$$I_m^{i+1} = \left( 1 - \frac{\Delta \tau}{\mu_m} \right) I_m^i + \frac{\Delta \tau}{\mu_m} (S_m^i + q^i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad \mu_m > 0 \quad (4a)$$

Observe que neste passo são calculadas apenas as intensidades da radiação para  $\mu > 0$ .

Usando uma aproximação por diferenças finitas atrasadas e a quadratura gaussiana, Eq. (3b), obtém-se a expressão usada na marcha para trás

$$I_m^{i-1} = \left( 1 + \frac{\Delta \tau}{\mu_m} \right) I_m^i - \frac{\Delta \tau}{\mu_m} (S_m^i + q^i), \quad i = M, M-1, \dots, 1, \quad \mu_m < 0 \quad (4b)$$

## 2.2 Método de separação do operador (SO)

Neste método também são realizadas marchas para frente e para trás (Moura Neto e Silva Neto, 1999). Vamos primeiro considerar a marcha para frente. O problema (1) é dividido em dois passos usando uma separação do operador,

$$\mu \frac{\partial I^*(\tau, \mu)}{\partial \tau} = -I^*(\tau, \mu), \quad i\Delta\tau \leq \tau \leq (i+1)\Delta\tau \quad (5a)$$

$$I^*(i\Delta\tau, \mu) = I(i\Delta\tau, \mu) \quad (5b)$$

e

$$\mu \frac{\partial \bar{I}(\tau, \mu)}{\partial \tau} = S(\tau, \mu) + \frac{\omega}{2} \int \bar{I}(\tau, \mu') d\mu', \quad i\Delta\tau \leq \tau \leq (i+1)\Delta\tau \quad (6a)$$

$$\bar{I}(i\Delta\tau, \mu) = I^*((i+1)\Delta\tau, \mu) \quad (6b)$$

de forma que

$$I((i+1)\Delta\tau, \mu) = \bar{I}((i+1)\Delta\tau, \mu) \quad (7)$$

O problema (5) é de fácil solução analítica

$$I^*((i+1)\Delta\tau, \mu) = I^*(i\Delta\tau, \mu) e^{-\Delta\tau/\mu} = I(i\Delta\tau, \mu) e^{-\Delta\tau/\mu} \quad \text{ou} \quad I_m^{*i+1} = I_m^i e^{-\Delta\tau/\mu} \quad (8)$$

Para a solução do problema (6) também são usadas a aproximação por diferenças finitas e a quadratura gaussiana dadas pelas Eqs. (3a,b). Combinando, então, essa formulação com o resultado dado pela Eq. (8) obtém-se a expressão a ser usada na marcha para frente

$$I_m^{i+1} = \bar{I}_m^{i+1} = I_m^i e^{-\Delta\tau/\mu} + \frac{\Delta \tau}{\mu_m} (S_m^i + q^i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad \mu_m > 0 \quad (9)$$

Usando uma aproximação por diferenças finitas atrasadas e a quadratura gaussiana dada pela Eq. (3b) obtém-se a expressão usada na marcha para trás

$$I_m^{i-1} = \bar{I}_m^{i-1} = I_m^i e^{\Delta\tau/\mu} - \frac{\Delta \tau}{\mu_m} (S_m^i + q^i), \quad i = M, M-1, \dots, 1, \quad \mu_m < 0 \quad (10)$$

### 2.3 Método do fator integrante (FI)

Neste método é primeiro definida uma nova variável dependente (Moura Neto e Silva Neto, 1999),

$$J(\tau, \mu) = e^{\tau/\mu} I(\tau, \mu) \quad (11)$$

onde  $e^{\tau/\mu}$  é o fator integrante, de forma que o problema original dado pelas Eqs. (1a - c) é reescrito como

$$\frac{\partial J(\tau, \mu)}{\partial \tau} = F(\tau, \mu) + \frac{\omega}{2\mu} \int_{-1}^1 e^{\tau \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu'} \right)} J(\tau, \mu') d\mu' \quad \text{em } 0 < \tau < \tau_0, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (12a)$$

$$J(0, \mu) = A_1 + 2\rho_1 \int_0^1 J(0, -\mu') \mu' d\mu', \quad \mu > 0 \quad (12b)$$

$$J(\tau_0, -\mu) = A_2 e^{-\tau_0/\mu} + 2\rho_2 \int_0^1 e^{-\tau_0 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \right)} J(\tau_0, \mu') \mu' d\mu', \quad \mu > 0 \quad (12c)$$

onde  $F(\tau, \mu) = \frac{e^{-\tau/\mu}}{\mu} S(\tau, \mu)$ .

Para a solução deste problema também é usado um procedimento iterativo onde são realizadas sequencialmente marchas para frente e marchas para trás. Usando a quadratura gaussiana

$$\frac{\omega}{2\mu} \int_{-1}^1 e^{\tau \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu'} \right)} J(\tau, \mu') d\mu' \cong \frac{\omega}{2\mu_m} \sum_{n=1}^N a_n e^{i\Delta\tau \left( \frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_n} \right)} J_n^i \quad (13)$$

e uma aproximação da derivada por diferenças finitas avançadas na Eq. (12a), obtém-se a expressão usada na marcha para frente

$$J_m^{i+1} = J_m^i + \frac{\Delta\tau}{2} (F_m^i + F_m^{i+1}) + \frac{\Delta\tau\omega}{2\mu_m} \sum_{n=1}^N a_n e^{i\Delta\tau \left( \frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_n} \right)} J_n^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad \mu_m > 0 \quad (14)$$

e com uma aproximação por diferenças finitas atrasadas obtém-se a expressão usada na marcha para trás

$$J_m^{i-1} = J_m^i - \frac{\Delta\tau}{2} (F_m^i + F_m^{i-1}) - \frac{\Delta\tau\omega}{2\mu_m} \sum_{n=1}^N a_n e^{i\Delta\tau \left( \frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_n} \right)} J_n^i, \quad i = M, M-1, \dots, 1, \quad \mu_m < 0 \quad (15)$$

Uma vez calculados os valores de  $J(\tau, \mu)$ , os valores da intensidade da radiação,  $I(\tau, \mu)$ , são calculados usando a Eq. (11).

### 2.4 Comparação entre os métodos apresentados

Os métodos FI, SO e  $S_N$  podem ser obtidos, alternativamente, de forma unificada. Inicialmente, considera-se uma discretização da variável óptica obtendo-se um sistema de equações diferenciais ordinárias (método de ordenadas discretas). O próximo passo é o que diferencia os métodos sob análise. O método  $S_N$  procede considerando-se um método de diferenças finitas para transformar o sistema de equações diferenciais ordinárias em um sistema algébrico. Já o método FI aplica uma mudança linear da variável dependente,  $I$ , antes de usar diferenças finitas. Finalmente, o método SO considera separadamente os efeitos de extinção (espalhamento – out scattering – e absorção) e de espalhamento da radiação (in scattering) antes de aplicar diferenças finitas.

## 2.5 Comentário sobre as condições de contorno e o critério de parada

Conforme representado na Fig. 2, uma parcela da intensidade da radiação que chega nas superfícies de contorno é refletida difusamente de volta para o interior do meio. Esta parcela é calculada usando o segundo termo do lado direito da Eq. (1b) e da Eq. (1c) usando a malha computacional com discretização espacial e angular. A parcela restante atravessa a superfície de contorno.

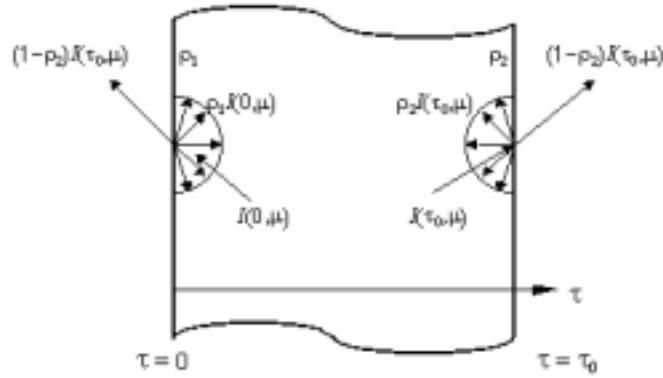


Figura 2 - Paredes refletoras difusas.

O procedimento iterativo com os cálculos sequenciais das marchas para frente e para trás para os três métodos apresentados nas seções 2.1 a 2.3 é interrompido quando o erro relativo em cada ponto da malha computacional é suficientemente pequeno, ou seja,  $\left| I_m^{i^{k+1}} - I_m^{i^k} \right| / I_m^{i^k} < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é uma tolerância definida *a priori* e  $k$  é o contador de iterações.

## 3. RESULTADOS

Em todos os casos apresentados a seguir foi usada uma quadratura Gauss-Legendre com  $N = 20$ . Na Tabela 1 são apresentados os pontos de colocação  $\mu_n$  e os pesos  $a_n$  correspondentes.

Tabela 1. Pontos de colocação e pesos para quadratura Gauss-Legendre com  $N = 20$

| $\mu$                                 | $a$          |
|---------------------------------------|--------------|
| $\mu_1 = -\mu_{20} = 0,0765265211$    | 0,1527533871 |
| $\mu_2 = -\mu_{19} = 0,2277858511$    | 0,1491729864 |
| $\mu_3 = -\mu_{18} = 0,3737060887$    | 0,1420961093 |
| $\mu_4 = -\mu_{17} = 0,5108670019$    | 0,1316886384 |
| $\mu_5 = -\mu_{16} = 0,6360536807$    | 0,1181945319 |
| $\mu_6 = -\mu_{15} = 0,7463319064$    | 0,1019301198 |
| $\mu_7 = -\mu_{14} = 0,8391169718$    | 0,0832767415 |
| $\mu_8 = -\mu_{13} = 0,9122344282$    | 0,0626720483 |
| $\mu_9 = -\mu_{12} = 0,9639719272$    | 0,0406014298 |
| $\mu_{10} = -\mu_{11} = 0,9931285991$ | 0,0176140071 |

Na Tabela 2 são apresentados os valores da reflectividade hemisférica,  $R$ , e da transmissividade,  $T$ ,

$$R = 2\pi \int_0^1 I(0, -\mu) \mu d\mu / 2\pi \int_0^1 \mu d\mu; \quad T = 2\pi \int_0^1 I(\tau_0, \mu) \mu d\mu / 2\pi \int_0^1 \mu d\mu \quad (16a,b)$$

obtidos com os métodos de ordenadas discretas ( $S_{20}$ ), separação do operador (SO) e fator integrante (FI), sendo os resultados comparados com aqueles obtidos por Özisik e Yener (1982) usando o método de Galerkin base global. Para obtenção destes resultados foi considerada a seguinte situação:  $A_1 = 1,0$ ,  $\rho_1 = A_2 = H(\tau, \mu) = 0$ .

Tabela 2. Reflectividade hemisférica e transmissividade para uma placa sem fonte interna, com superfície refletora difusa em  $\tau = \tau_0$  e superfície transparente em  $\tau = 0$ , e com radiação externa incidente em  $\tau = 0$ .  $A_1 = 1,0$  e  $\rho_1 = A_2 = H(\tau, \mu) = 0$ . (O & Y – Özisik & Yener, 1982)

| $\omega$ | $\rho_2$ | Métodos         | $\tau_0 = 0,5$ |         |        |         | $\tau_0 = 1,0$ |         |        |         | $\tau_0 = 2,0$ |         |        |         |
|----------|----------|-----------------|----------------|---------|--------|---------|----------------|---------|--------|---------|----------------|---------|--------|---------|
|          |          |                 | R              | Dif.(%) | T      | Dif.(%) | R              | Dif.(%) | T      | Dif.(%) | R              | Dif.(%) | T      | Dif.(%) |
| 0,0      | 0,0      | O & Y           | 0,0000         | –       | 0,4432 | –       | 0,0000         | –       | 0,2194 | –       | 0,0000         | –       | 0,0603 | –       |
|          |          | S <sub>20</sub> | 0,0000         | 0,00    | 0,4432 | 0,00    | 0,0000         | 0,00    | 0,2194 | 0,00    | 0,0000         | 0,00    | 0,0602 | 0,17    |
|          |          | SO              | 0,0000         | 0,00    | 0,4432 | 0,00    | 0,0000         | 0,00    | 0,2194 | 0,00    | 0,0000         | 0,00    | 0,0603 | 0,00    |
|          |          | FI              | 0,0000         | 0,00    | 0,4433 | 0,00    | 0,0000         | 0,00    | 0,2194 | 0,00    | 0,0000         | 0,00    | 0,0603 | 0,00    |
|          | 0,5      | O & Y           | 0,0982         | –       | 0,2216 | –       | 0,0241         | –       | 0,1097 | –       | 0,0018         | –       | 0,0301 | –       |
|          |          | S <sub>20</sub> | 0,0982         | 0,00    | 0,2216 | 0,00    | 0,0241         | 0,00    | 0,1097 | 0,00    | 0,0018         | 0,00    | 0,0301 | 0,00    |
|          |          | SO              | 0,0982         | 0,00    | 0,2216 | 0,00    | 0,0241         | 0,00    | 0,1097 | 0,00    | 0,0018         | 0,00    | 0,0301 | 0,00    |
|          |          | FI              | 0,0982         | 0,00    | 0,2216 | 0,00    | 0,0241         | 0,00    | 0,1097 | 0,00    | 0,0018         | 0,00    | 0,0301 | 0,00    |
|          | 1,0      | O & Y           | 0,1964         | –       | 0,0000 | –       | 0,0481         | –       | 0,0000 | –       | 0,0036         | –       | 0,0000 | –       |
|          |          | S <sub>20</sub> | 0,1965         | 0,05    | 0,0000 | 0,00    | 0,0481         | 0,00    | 0,0000 | 0,00    | 0,0036         | 0,00    | 0,0000 | 0,00    |
|          |          | SO              | 0,1965         | 0,05    | 0,0000 | 0,00    | 0,0481         | 0,00    | 0,0000 | 0,00    | 0,0036         | 0,00    | 0,0000 | 0,00    |
|          |          | FI              | 0,1965         | 0,05    | 0,0000 | 0,00    | 0,0481         | 0,00    | 0,0000 | 0,00    | 0,0036         | 0,00    | 0,0000 | 0,00    |
| 0,5      | 0,0      | O & Y           | 0,1077         | –       | 0,5350 | –       | 0,1342         | –       | 0,3067 | –       | 0,1451         | –       | 0,1071 | –       |
|          |          | S <sub>20</sub> | 0,1086         | 0,84    | 0,5353 | 0,06    | 0,1351         | 0,67    | 0,3069 | 0,07    | 0,1460         | 0,62    | 0,1071 | 0,00    |
|          |          | SO              | 0,1086         | 0,84    | 0,5353 | 0,06    | 0,1351         | 0,67    | 0,3069 | 0,07    | 0,1461         | 0,69    | 0,1072 | 0,09    |
|          |          | FI              | 0,1085         | 0,74    | 0,5353 | 0,06    | 0,1350         | 0,60    | 0,3069 | 0,07    | 0,1459         | 0,55    | 0,1071 | 0,00    |
|          | 0,5      | O & Y           | 0,2589         | –       | 0,2827 | –       | 0,1846         | –       | 0,1644 | –       | 0,1513         | –       | 0,0577 | –       |
|          |          | S <sub>20</sub> | 0,2601         | 0,46    | 0,2830 | 0,11    | 0,1856         | 0,54    | 0,1645 | 0,06    | 0,1522         | 0,59    | 0,0578 | 0,17    |
|          |          | SO              | 0,2601         | 0,46    | 0,2830 | 0,11    | 0,1856         | 0,54    | 0,1646 | 0,12    | 0,1523         | 0,66    | 0,0578 | 0,17    |
|          |          | FI              | 0,2600         | 0,43    | 0,2830 | 0,11    | 0,1855         | 0,49    | 0,1645 | 0,06    | 0,1521         | 0,53    | 0,0578 | 0,17    |
|          | 1,0      | O & Y           | 0,4284         | –       | 0,0000 | –       | 0,2428         | –       | 0,0000 | –       | 0,1585         | –       | 0,0000 | –       |
|          |          | S <sub>20</sub> | 0,4300         | 0,37    | 0,0000 | 0,00    | 0,2439         | 0,45    | 0,0000 | 0,00    | 0,1594         | 0,57    | 0,0000 | 0,00    |
|          |          | SO              | 0,4301         | 0,40    | 0,0000 | 0,00    | 0,2440         | 0,49    | 0,0000 | 0,00    | 0,1595         | 0,63    | 0,0000 | 0,00    |
|          |          | FI              | 0,4300         | 0,37    | 0,0000 | 0,00    | 0,2439         | 0,45    | 0,0000 | 0,00    | 0,1593         | 0,50    | 0,0000 | 0,00    |
| 1,0      | 0,0      | O & Y           | 0,2958         | –       | 0,7042 | –       | 0,4466         | –       | 0,5534 | –       | 0,6099         | –       | 0,3901 | –       |
|          |          | S <sub>20</sub> | 0,2974         | 0,54    | 0,7046 | 0,06    | 0,4483         | 0,38    | 0,5537 | 0,05    | 0,6118         | 0,31    | 0,3902 | 0,03    |
|          |          | SO              | 0,2974         | 0,54    | 0,7047 | 0,07    | 0,4485         | 0,43    | 0,5539 | 0,09    | 0,6128         | 0,48    | 0,3911 | 0,26    |
|          |          | FI              | 0,2973         | 0,51    | 0,7045 | 0,04    | 0,4480         | 0,31    | 0,5534 | 0,00    | 0,6106         | 0,11    | 0,3894 | 0,18    |
|          | 0,5      | O & Y           | 0,5868         | –       | 0,4132 | –       | 0,6437         | –       | 0,3563 | –       | 0,7193         | –       | 0,2807 | –       |
|          |          | S <sub>20</sub> | 0,5889         | 0,36    | 0,4138 | 0,15    | 0,6458         | 0,33    | 0,3568 | 0,14    | 0,7213         | 0,28    | 0,2810 | 0,11    |
|          |          | SO              | 0,5890         | 0,34    | 0,4139 | 0,17    | 0,6463         | 0,40    | 0,3570 | 0,20    | 0,7230         | 0,14    | 0,2818 | 0,39    |
|          |          | FI              | 0,5888         | 0,34    | 0,4138 | 0,15    | 0,6454         | 0,26    | 0,3566 | 0,08    | 0,7197         | 0,06    | 0,2802 | 0,18    |
|          | 1,0      | O & Y           | 1,0000         | –       | 0,0000 | –       | 1,0000         | –       | 0,0000 | –       | 1,0000         | –       | 0,0000 | –       |
|          |          | S <sub>20</sub> | 1,0039         | 0,39    | 0,0000 | 0,00    | 1,0038         | 0,38    | 0,0000 | 0,00    | 0,9979         | 0,21    | 0,0000 | 0,00    |
|          |          | SO              | 1,0040         | 0,40    | 0,0000 | 0,00    | 1,0048         | 0,48    | 0,0000 | 0,00    | 1,0075         | 0,75    | 0,0000 | 0,00    |
|          |          | FI              | 1,0036         | 0,36    | 0,0000 | 0,00    | 1,0028         | 0,28    | 0,0000 | 0,00    | 0,9998         | 0,02    | 0,0000 | 0,00    |

Na Fig. 3 é feita uma comparação dos resultados obtidos para a intensidade da radiação que sai do meio em  $\tau=0, I(0,\mu)$ , para  $\mu < 0$ , e em  $\tau=\tau_0, I(\tau_0,\mu)$ , para  $\mu > 0$ , com os métodos  $S_{20}$ , SO e FI, com os resultados obtidos por Cengel *et al.* (1984) com o método de Galerkin base global. Para a obtenção dos resultados foi considerada a seguinte situação:  $A_1 = A_2 = \rho_1 = \rho_2 = 0,0$ ;  $S(\tau, \mu) = 1,0 + \tau$ .

Para todos os casos apresentados na Tabela 2 e na Figura 3 é observada uma excelente concordância dos resultados obtidos com todos os métodos considerados.

Para a obtenção de cada um dos resultados aqui apresentados com os métodos de ordenadas discretas, separação do operador e fator integrante são necessários alguns poucos segundos de tempo de CPU em um PC IBM compatível com processador PENTIUM II 400 MHz. Um custo computacional um pouco mais elevado é observado para o método do fator integrante devido à necessidade do cálculo de exponenciais. A discretização espacial foi feita considerando 2000 nós, i.e.  $M = 2000$  na malha computacional. O número de marchas para frente e para trás usado em todos os casos garantiu a convergência da solução até o quarto dígito após a vírgula no valor da intensidade da radiação. Convergência ainda melhor é observada nos valores de reflectividade e de transmissividade.

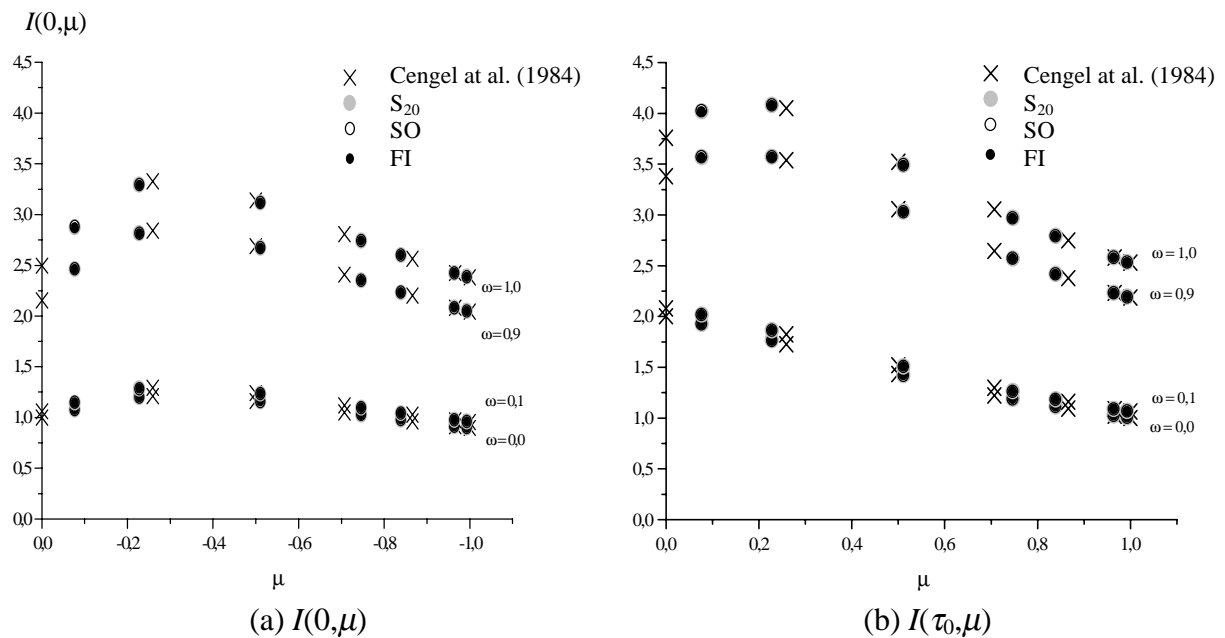


Figura 3 – Intensidade da radiação para  $\tau_0 = 1,0$ ,  $A_1 = A_2 = \rho_1 = \rho_2 = 0$  e  $S(\tau, \mu) = 1 + \tau$ .

#### 4. CONCLUSÕES

Os métodos de separação do operador (SO) e do fator integrante (FI) apresentaram resultados bastante satisfatórios com um esforço analítico e computacional muito inferior àquele necessário para os métodos de expansão em harmônicos esféricos e Galerkin base global. Juntamente com o método de ordenadas discretas ( $S_N$ ), estes métodos se prestam, portanto, para aplicações onde seja necessário o cálculo repetitivo da equação de transporte, como por exemplo na solução de problemas inversos em transferência radiativa usando algoritmos implícitos (Silva Neto e Özisik, 1995).



## REFERÊNCIAS

- Anderson, R. R., Beck, H., Bruggemann, U., Farinelli, W., Jacques, S. L. e Parrish, J., 1989, Pulsed Photothermal Radiometry in Turbid Media: Internal Reflection of Backscattered Radiation Strongly Influences Optical Dosimetry, *Applied Optics*, vol. 28 n. 12, pp. 2256-2262.
- Barichello, L. B. e Siewert, C. E., 1998, On the Equivalence Between the Discrete Ordinates and the Spherical Harmonics Methods in Radiative Transfer, *Nuclear Science and Engineering*, vol. 130, pp. 79-84.
- Barichello, L. B. e Siewert, C. E., 1999, A Discrete-Ordinates Solution for a Non-Grey Model with Complete Frequency Redistribution, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 62, pp. 665-675.
- Barros, R. C., Yavuz, M., Abreu, M. P., Alves Filho, H. e Mello, J. A. M., 1998, Progress in Spectral Nodal Methods Applied to Discrete Ordinates Transport Problems, *Progress in Nuclear Energy*, vol. 33, n. 1/2, pp. 117-154.
- Berkowski, C. A. e Kaminski, D. A., 1994, Assessment of the P-1 Approximation in Cold-Walled Enclosures with Internal Heat Generation, *Numerical Heat Transfer, part B*, vol. 25, pp. 309-329.
- Carita Montero, R. F., Roberty, N. C. e Silva Neto, A. J., 1999, Natural Base Construction for Absorption Coefficient Estimation in Heterogeneous Participating Media with Divergent Beams, *Proc. 3<sup>rd</sup> International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, Port Ludlow, USA.
- Carita Montero, R. F., Roberty, N. C. e Silva Neto, A. J., 2000, Absorption Coefficient Estimation in Two-Dimensional Participating Media Using a Base Constructed with Divergent Beams, *2000 National Heat transfer Conference*, Pittsburgh, USA.
- Cengel, Y. A., Özisik, M. N. e Yener, Y., 1984, Determination of Angular Distribution of Radiation in an Isotropically Scattering Slab, *Journal of Heat Transfer*, vol. 106, pp. 248-252.
- Chandrasekhar, S., 1960, *Radiative Transfer*, Dover, New York.
- Fiveland, W. A., 1984, Discrete-Ordinates Solutions of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures, *Journal of Heat Transfer*, vol. 106, pp. 699-706.
- Haferman, J. L., Smith, T. F. e Krajewski, 1997, A Multi-Dimensional Discrete-Ordinates Method for Polarized Radiative Transfer, Part I: Validation for Randomly Oriented Axisymmetric Particles, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 58, n. 3, pp. 379-398.
- Howe, J. T. e Yang, L., 1993, Earth Atmosphere Entry Thermal Protection by Radiation Backscattering Ablating Materials, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 7, n. 1, pp. 74-81.
- Kauati, A. T., Silva Neto, A. J. e Roberty, N. C., 2000, A Source Detector Methodology for the Construction and Solution of the One-Dimensional Inverse Transport Equation, *Inverse Problems in Engineering*, em impressão.
- Lathrop, K. D., 1966, Use of Discrete-Ordinates Methods for Solution of Photon Transport Problems, *Nuclear Science and Engineering*, vol. 24, pp. 381-388.
- Lee, K. H. e Viskanta, R., 1997, Prediction of Spectral Radiative Transfer in a Condensed Cylindrical Medium Using Discrete Ordinates Method, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 58, n. 3, pp. 329-345.
- Menart, J. A., Lee, H. S., e Kim, T.-K., 1993, Discrete Ordinates Solutions of Nongray Radiative Transfer with Diffusely Reflecting Walls, *Journal of Heat Transfer*, vol. 115, pp. 184-193.
- Moura Neto, F. D. e Silva Neto, A. J., 1999, Solução da Equação de Transporte Unidimensional com Separação do Operador e com Fator Integrante, *XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Águas de Lindóia, São Paulo.

- O'Brien, D. M., 1998, Monte Carlo Integration of Radiative Transfer Equation in a Scattering Medium with Stochastic Reflecting Boundary, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 60, n. 4, pp. 573-583.
- Özisik, M. N. e Yener, Y., 1982, The Galerkin Method for Solving Radiation Transfer in Plane-Parallel Participating Media, *Journal of Heat Transfer*, vol. 104, pp. 351-354.
- Pessoa Filho, J. e Thynell, S. T., 1994, Development of Approximate Solutions to Radiative Transfer in Slabs and Spheres, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 52, n. 1, pp. 59-73.
- Selçuk, N. e Kayakol, N., 1997, Evaluation of Discrete Ordinates Method for Radiative Transfer in Rectangular Furnace, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 40, n. 2, pp. 213-222.
- Sakami, M., Charette, A. e Le Dez, V., 1998, Radiative Heat Transfer in Three-Dimensional Enclosures of Complex Geometry by Using the Discrete-Ordinates Method, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 59, n. 1/2, pp. 117-136.
- Silva Neto, A. J. e Özisik, M. N., 1995, An Inverse Problem of Simultaneous Estimation of Radiation Phase Function, Albedo and Optical Thickness, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 53, n. 4, pp. 397-409.
- Silva Neto, A. J. e Moura Neto, F. D., 1998, Solução da Equação de Boltzmann para a Modelagem de Transporte em Meios Participantes Unidimensionais, I Encontro de Modelagem Computacional, Nova Friburgo, Rio de Janeiro.
- Silva, Z. E., Laurent, M, e Ballis, D., 1997, Método das Ordenadas Discretas Associado à Forma Integral da Equação de Transferência de Radiação – Caso de Geometria Unidimensional, XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Bauru, São Paulo.
- Silva Neto, A. J. e Roberty, N. C., 1998, Uma Comparação do Método de Ordenadas Discretas com Outras Técnicas para a Solução da Equação de Transporte Unidimensional, VII Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, vol. II, pp. 878-883, Rio de Janeiro.
- Siegel, R. e Spuckler, C. M., 1994, Effects of Refractive Index and Diffuse or Specular Boundaries on a Radiating Isothermal Layer, *Journal of Heat Transfer*, vol. 116, pp. 787-790.
- Truelove, J. S., 1988, Three-Dimensional Radiation in Absorbing – Emitting – Scattering Media Using the Discrete-Ordinates Approximation, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 39, n. 1, pp. 27-31.
- Varma, K. R. e Mengüç, M. P., 1989, Effects of Particulate Concentrations on Temperature and Heat Flux Distributions in a Pulverized – Coal Fired Furnace, *International Journal of Energy Research*, vol. 13, pp. 555-572.
- Viskanta, R. e Toor, J. S., 1973, Effect of Multiple Scattering on Radiant Energy Transfer in Waters, *Journal of Geophysical Research*, vol. 78, n. 18, pp. 3538-3551.

### **SOLUTION OF BOLTZMANN EQUATION WITH OPERATOR SPLITTING AND INTEGRATING FACTOR IN A ONE-DIMENSIONAL MEDIUM WITH INTERNAL SOURCES AND REFLECTING BOUNDARIES**

**Abstract.** Operator splitting and integrating factor methods are presented for the solution of the Boltzmann equation in one-dimensional homogeneous participating media with internal sources, with isotropic scattering, gray (no spectral dependency), with diffusely reflecting boundaries subject to external isotropic radiation sources. Several test cases are considered and results are compared with the discrete ordinates method and the global basis Galerkin method.

**Key-words:** Radiative transfer, Participating media, Discrete ordinates, Operator splitting, Integrating factor.