

# CONDUÇÃO DE CALOR HIPERBÓLICA: FORMULAÇÃO E SIMULAÇÃO

**Fernando P. Duda**

Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

Programa de Engenharia Mecânica, C.P. 68503, 21945-970 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

**Luiz C.G. Pimentel**

Universidade Federal do Rio de Janeiro,

Departamento de Meteorologia, RJ, Brasil

**Jesús S. Perez Guerrero**

Comissão Nacional de Energia Nuclear CNEN/COREJ, RJ, Brasil

***Resumo.** Neste trabalho consideraremos aspectos relacionados com a formulação do modelo de Cattaneo visando a simulação do problema de condução hiperbólica. Obteremos a solução analítica para o problema de condução em uma placa finita, usando a Técnica da Transformada Integral e o Mathematica. A solução encontrada apresenta comportamento não realista do ponto de vista físico, o que pode estar relacionado com o fato do modelo de Cattaneo utilizado ser inconsistente com a segunda lei da termodinâmica. Finalmente, mostraremos como o arcabouço da termomecânica do contínuo pode ser utilizado para tornar o modelo de Cattaneo consistente com a segunda lei, resultando numa forma especial para a equação constitutiva para a energia interna.*

***Palavras-chave:** condução de calor hiperbólica, termomecânica do contínuo, transformada integral*

## 1. INTRODUÇÃO

Dois importantes fatos sobre condução de calor foram descobertos por volta dos anos 40:

- a) a equação da difusão de calor, a qual é baseada na Lei de Fourier, fornece velocidade de propagação infinita para uma onda de temperatura;
- b) observação de um valor finito para a velocidade de propagação de uma onda de temperatura em certos materiais.

Desde então, a partir do trabalho pioneiro do Cattaneo (Cattaneo, (1948)), diversos mo-

delos de condução, conhecidos como modelos de condução hiperbólica, foram propostos visando corrigir as deficiências apresentadas pelo modelo de Fourier (Joseph e Preziosi, (1989, 1990), Ozisik e Tsou, (1994)). No modelo de Cattaneo a única diferença em relação ao modelo de Fourier está na equação constitutiva para o fluxo de calor. Contudo, análises realizadas no modelo de Cattaneo revelaram a possibilidade de incompatibilidade com a Segunda Lei da Termodinâmica (Zanchini, (1999)). Naturalmente, esta incompatibilidade está intimamente relacionada com a maneira pela qual o modelo é construído: a única alteração em relação ao modelo de Fourier está na modificação da equação constitutiva para o fluxo de calor, sem mencionar a equação constitutiva para a energia interna e a segunda lei da termodinâmica. Além disso, a análise numérica realizada em (Chen e Lin, (1993)) revelou a presença de uma solução fisicamente inconsistente, fato este que pode estar relacionado com a incompatibilidade do modelo com a segunda lei. Estas considerações nos levam a seguinte indagação: é possível construir um modelo de condução hiperbólica cuja consistência com a segunda lei seja garantida? A resposta é sim, desde que usemos, por exemplo, o arcabouço da Termomecânica do Contínuo para construir o modelo de condução.

O arcabouço da termomecânica do contínuo, construído pelos mecanicistas Noll, Coleman, Ericksen, Truesdell, entre outros, é baseado nos três ingredientes principais:

- (i) leis de balanço;
- (ii) desigualdade representando a segunda lei;
- (iii) equações constitutivas.

Neste arcabouço, (i) e (ii) são considerados como leis básicas, que governam um amplo espectro de materiais, enquanto que (iii) define elementos dentro desse espectro. Este arcabouço tem sido usado com sucesso para o desenvolvimento de teorias gerais de materiais (Fried e Gurtin, 1999). Neste arcabouço, (ii) é tratada como restrição que deve ser satisfeita pelas equações constitutivas.

Neste trabalho consideraremos alguns aspectos de formulação e simulação relacionados com o modelo de condução de Cattaneo. Ilustraremos como a Técnica da Transformada Integral (Cotta e Mikhailov, 1997) pode ser empregada para obtenção de soluções através da análise do fenômeno da transferência de calor em uma placa finita. Neste caso, a solução obtida é analítica, sendo determinada com o auxílio do *Mathematica*. Como já observado em (Chen e Lin, (1993)), a solução obtida é fisicamente não realista. Utilizando os resultados obtidos em (Coleman et al, (1986)) (ver também (Shilavy, (1997))), mostraremos como o arcabouço da termomecânica do contínuo pode ser empregado para obtenção do modelo de Cattaneo consistente com a segunda lei, cujo principal resultado nos permite concluir que: as formas das equações constitutivas para energia interna no modelo de Cattaneo e no modelo de Fourier devem ser obrigatoriamente diferentes entre si.

Esse trabalho será organizado como segue: na Seção 2 apresentaremos os elementos básicos para a construção de modelos de Fourier e de Cattaneo para condução de calor. Na Seção 3 obteremos a solução analítica, via transformada integral, para condução de calor em uma placa usando o modelo de Cattaneo. Em seguida, na Seção 4, mostraremos como o arcabouço da termomecânica do contínuo pode ser utilizado para tornar o modelo de Cattaneo consistente como a segunda lei da termodinâmica. Finalmente, na Seção 5 as conclusões serão apresentadas.

## 2. OS MODELOS DE FOURIER E CATTANEO

De agora em diante denotaremos por  $\Omega$  um condutor rígido, estacionário e isotrópico, e por  $\mathbf{x}$  um ponto de  $\Omega$ . O objetivo da teoria de condução de calor é construir uma lei de evolução para o campo de temperaturas  $\theta(\mathbf{x}, t) > 0$ . Esta lei de evolução é baseada na primeira lei da termodinâmica, que na forma local é escrita como

$$\dot{e} = -\operatorname{div}\mathbf{q} + r, \quad (1)$$

juntamente com as equações constitutivas para os campos  $e$  e  $\mathbf{q}$ . Aqui,  $e$  é a energia interna,  $\mathbf{q}$  o fluxo de calor,  $r$  o calor fornecido ao corpo pelo meio externo e  $\operatorname{div}$  é o operador divergência. O modelo de Fourier é baseado nas seguintes hipóteses constitutivas:

$$e = \hat{e}(\theta), \quad \mathbf{q} = -k(\theta)\mathbf{g}, \quad (2)$$

sendo a segunda equação conhecida como Lei de Fourier. Aqui,  $\hat{e}$  é a função constitutiva para energia interna,  $k(\theta) > 0$  a condutividade térmica, e  $\mathbf{g}$  o gradiente de temperaturas

$$\mathbf{g} = \nabla\theta. \quad (3)$$

Na ausência de radiação, e considerando o calor específico  $\gamma$  e a condutividade  $k$  constantes, obtemos, considerando o modelo de Fourier, a equação de difusão de calor

$$\dot{\theta} = \alpha\Delta\theta \quad (4)$$

onde  $\Delta$  é o Laplaciano, e  $\alpha > 0$  é a difusividade térmica do material. Esta equação, que é *parabólica*, tem a seguinte característica: a velocidade de propagação de uma onda de temperatura é infinita.

Já o modelo de Cattaneo é baseado nas seguintes equações constitutivas:

$$e = \hat{e}(\theta), \quad \mathbf{q} + \tau(\theta)\dot{\mathbf{q}} = -k(\theta)\mathbf{g}, \quad (5)$$

onde  $\tau$  é o tempo de relaxação térmica. Admitindo a ausência de radiação, que  $\tau$ ,  $k$  e  $\gamma$  são constantes, obtemos a seguinte equação de evolução para  $\theta$ :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\theta}{\partial t} = c^2\Delta\theta, \quad (6)$$

onde  $c^2 = \frac{k}{\tau\gamma}$ . A equação acima é *hiperbólica* e transmite ondas de temperatura com uma velocidade finita  $c$ .

## 3. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO HIPERBÓLICA

Nesta seção obteremos, usando o modelo de Cattaneo, a solução analítica para o problema de condução de calor unidimensional e transiente em uma placa finita com condição de contorno do primeiro tipo em uma das faces, condição de contorno do segundo tipo na face oposta, e com condições iniciais homogêneas. Utilizando os mesmos grupos adimensionais apresentados em (Chen e Lin, 1993), o presente problema consiste em

resolver

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}, \quad (7)$$

sujeita as seguintes condições iniciais

$$\theta(0, \eta) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0, \eta) = 0, \quad (8)$$

e as seguintes condições de contorno

$$\theta(\xi, 0) = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\xi, 1) = 0, \quad (9)$$

cuja solução será obtida com o auxílio da Técnica da Transformada Integral. Para a utilização da técnica da transformada integral, introduzimos inicialmente a variável  $\Theta(\xi, \eta)$ , definida pela relação

$$\Theta(\xi, \eta) = \theta(\xi, \eta) - 1, \quad (10)$$

a fim de homogeneizar as condições de contorno. Em termos desta nova variável, as equações (7-8) passam a ser reescritas, respectivamente como:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2}, \quad (11)$$

$$\Theta(0, \eta) = -1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(0, \eta) = 0, \quad (12)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\xi, 1) = 0. \quad (13)$$

Em seguida, torna-se necessário a escolha de um problema de autovalor associado ao termo difusivo do problema original:

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \eta^2} + \mu_i^2 = 0, \quad \Psi_i = 0, \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial \eta}(1) = 0. \quad (14)$$

A solução do problema acima é:

$$\Psi_i(\eta) = \sin(\mu_i \eta), \quad (15)$$

onde  $\mu_i = \frac{\pi}{2}(2i - 1)$ . A partir do problema de autovalor escolhido e da propriedade de ortogonalidade, obtemos o par transformada-inversa

$$\bar{\Theta}(\xi) = \int_0^1 \bar{\Psi}_i(\eta) \Theta(\xi, \eta) d\eta, \quad \Theta(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Psi}_i(\eta) \bar{\Theta}_i(\xi), \quad (16)$$

onde

$$\bar{\Psi}_i = \frac{\Psi_i}{\sqrt{n_i}}, \quad e \quad n_i = \frac{1}{2}, \quad (17)$$

Aplicando o operador  $\int_0^1 \bar{\Psi}_i(\eta) d\eta$  sobre a equação diferencial parcial, e com auxílio da propriedade de ortogonalidade, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem não linear da seguinte forma:

$$\frac{d^2 \bar{\Theta}_k}{d\xi^2} + 2 \frac{d\bar{\Theta}_k}{d\xi} = -\mu_k^2 \delta_{ik} \bar{\Theta}_k, \quad (18)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\bar{\Theta}_k(0) = -\int_0^1 \bar{\Psi}_i d\eta, \quad \dot{\bar{\Theta}}_k(0) = 0. \quad (19)$$

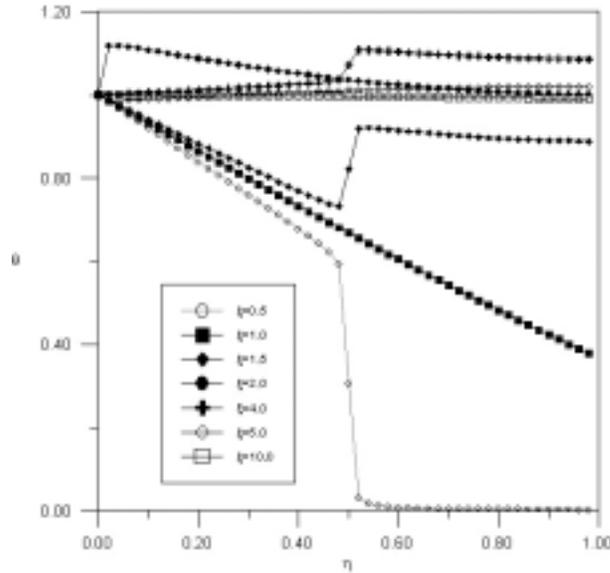
A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias foi obtida com auxílio do manipulador simbólico Mathematica, sendo dada pela expressão:

$$\bar{\Theta}_k(\xi) = \exp^{-\xi} \bar{\Theta}_k(0) \left[ \cos(\xi \sqrt{\mu_k^2 - 1}) + \frac{\sin(\xi \sqrt{\mu_k^2 - 1})}{\sqrt{\mu_k^2 - 1}} \right]. \quad (20)$$

Assim, a solução do problema original é dada pela equação

$$\theta(\xi, \eta) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_i \eta)}{\sqrt{n_i}} \bar{\Theta}_i(\xi). \quad (21)$$

A figura 1 apresenta a distribuição de temperaturas adimensional. Podemos notar que para algumas situações a temperatura na placa atinge valores superiores ao valor na face com temperatura prescrita, ao contrário do que se esperaria fisicamente. Tal comportamento já havia sido descrito em (Chen e Lin, (1993)), usando para simulação o método da Transformada de Laplace em conjunto com método de diferenças finitas. Vale ressaltar que, no presente estudo, a solução do problema de condução de calor hiperbólica foi obtida a partir das técnicas inteiramente analíticas, indicando que o modelo proposto para a representação do fenômeno não é completamente consistente.



**Figura 1:** Perfil de Temperatura Adimensional para Vários  $\xi$ .

#### 4. O MODELO DE CATTANEO CONSISTENTE

No modelo de Cattaneo apresentado anteriormente, nenhuma menção foi feita com respeito a segunda lei da termodinâmica. De fato, o modelo de Cattaneo se mostrou incompatível com a segunda lei. Nesta seção mostraremos como o modelo de Cattaneo pode ser elaborado usando o arcabouço da termodinâmica do contínuo.

As equações básicas para a construção de modelos são a primeira lei e a segunda lei da termodinâmica

$$\dot{s} \geq -\operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} + \frac{r}{\theta}, \quad (22)$$

onde  $s$  é a entropia, e as equações constitutivas

$$\tau \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = -k \mathbf{g}, \quad e = \bar{e}(\theta, \mathbf{q}). \quad (23)$$

Note que neste caso, as variáveis de estado são formadas pelo par  $(\theta, \mathbf{q})$ . A segunda lei da termodinâmica pode ser equivalentemente colocada na seguinte forma, que é uma forma alternativa da desigualdade de Clausius:

$$\int_0^{d_\pi} \int_P \left( \frac{\dot{e}}{\theta} - \frac{z \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} k^{-1}}{\theta^2} \right) dV dt \leq 0 \quad (24)$$

para toda parte  $P$  de  $\Omega$  e todo processo cíclico  $\pi$ , onde  $d_\pi$  é a duração do processo e  $z = \frac{\tau}{k}$ .

Agora, enunciaremos o seguinte Teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em (Coleman et al, (1986), Shilavy, (1997)):

**Teorema:** O condutor de Cattaneo satisfaz a desigualdade de Clausius para todos processos cíclicos se e somente se as duas declarações abaixo forem simultaneamente satisfeitas:

- (1)  $k$  é positivo para todo  $\theta$ ;
- (2)  $\bar{e}$  é da forma

$$\bar{e} = \hat{e} - \frac{1}{2} \theta^2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{z(\theta)}{\theta^2} \right) \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}. \quad (25)$$

Do Teorema acima concluímos que o modelo de Cattaneo apresentado na Seção 2 só será compatível com a segunda lei quando for acrescentado um termo adicional a equação constitutiva para a energia interna apresentada na Seção 2.

#### 5. CONCLUSÕES

A exemplo do que acontece com outros modelos constitutivos em engenharia, modificações na Lei de Fourier são motivadas por suas deficiências em aplicações avançadas. Antes que um novo modelo seja alvo de intensa simulação computacional, é importante que: a) exista uma certeza de que o novo modelo é consistente com as leis básicas; b) seja desenvolvido um sentimento sobre o comportamento do modelo. No caso do modelo de Cattaneo para condução de calor concluímos que:

- 1) o modelo de Cattaneo apresentado na Seção 2 fornece, no caso de uma placa finita, solução não realista. Para chegarmos a esta conclusão foi fundamental a obtenção da solução na forma analítica;

2) para que o modelo de Cattaneo seja consistente, a equação constitutiva para a energia interna deve ser modificada.

Finalmente, vale ressaltar mais a importância:

- (i) do arcabouço de termomecânica do contínuo com ferramenta para formulação do modelo;
- (ii) da técnica da transformada integral, em conjunção com o *Mathematica*, para obtenção de soluções confiáveis, tão importantes para análise do modelo.

## REFERÊNCIAS

- Cattaneo, C., 1948, "Sulla conduzione de calore", Atti del Semin. Mat e Fis. Univ. Modena, **3**, 3-21.
- Joseph, D.D., Preziosi, L., 1989, "Heat waves", Rev. Mod. Physics, **61**(1), 41-73.
- Joseph, D.D., Preziosi, L., 1990, "Addendum to the paper :Heat waves", Rev. Mod. Physics, **62**(2), 375-391.
- Ozisk, M.N., Tzou, D.Y., 1994, "On the Wave Theory in Heat Conduction", Journal of Heat Transfer, **116**, 526-534.
- Zanchini, E., 1999, "Hyperbolic-heat-conduction theories and nondecreasing entropy", Physical Review B, **60**(2), 991-997.
- Chen, H.T., Lin, J.Y., 1993, "Numerical analysis for hyperbolic heat conduction", Int. J. Heat Mass Transfer, **36**(11), 2891-2898.
- Fried, E., Gurtin, M., 1999, "coherent Solid-State Phase Transitions with Atomic Diffusion: A Thermomechanical Treatment", Journal of Statistical Physics, **95**(5/6), 1361-1425.
- Cotta, R.M., Mikhailov, M.D., 1997, Heat Conduction:- Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation, Wiley-Interscience/Europe.
- Coleman, B.D., Fabrizio, M., Owen, D.R., 1986, "Thermodynamics and the constitutive relations for the second sound in crystals". Em "New Perspectives in Thermodynamics", J. Serrin(ed.), 171-184, Springer-Berlin.
- Silhavy, M., 1997, The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media, Springer-Berlin.