

# FUNDAMENTOS DA MUDANÇA DE FASE EM SÓLIDO SEMI-TRANSPARENTE SOB INCIDÊNCIA DE RADIAÇÃO LASER

**Marcelo R. Errera**

Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal do Paraná (UFPR)  
CP 19011 - Curitiba, PR 81531-990 Brasil - errera@demec.ufpr.br

**Silvio L. M. Junqueira**

Departamento Acadêmico de Mecânica - Núcleo de Pesquisa em Engenharia Simultânea  
Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (CEFET-PR)  
Av. Sete de Setembro, 3165 – Curitiba, PR 80230-901 Brasil - silvio@nupes.cefetpr.br

***Resumo.** Aplicações de laser tem se tornado comum em bio-engenharia como instrumento de cirurgia (cutânea, sub-cutânea, entre outras) e para corte e perfuração em fabricação mecânica. Muitos trabalhos computacionais, empíricos e práticos têm sido apresentados na literatura de transferência de calor em tecidos biológicos. Por outro lado, estudos fundamentais de sólidos semi-transparentes em mudança de fase devido à incidência de radiação laser, são escassos. Neste trabalho apresenta-se um estudo onde determinam-se as escalas características e o equacionamento fenomenológico destes processos. Apresentam-se soluções numéricas que são confrontadas com a literatura. São apresentadas correlações para auxiliar o trabalho experimental e prático de cirurgia a laser e para outras aplicações como corte industrial. Grupos adimensionais são sugeridos.*

**Palavras-chave:** Laser, Mudança de Fase, Bio-Engenharia, Corte a Laser.

## 1. INTRODUÇÃO

Neste artigo serão discutidos os fundamentos de transferência de calor devido à incidência de radiação laser sobre um meio sólido semi-transparente em condições de mudança de fase. Este fenômeno está associado a algumas das principais aplicações do laser no mundo atual.

O laser foi descoberto no início da década de 60 e desde então múltiplas aplicações foram desenvolvidas. Observam-se exemplos do emprego de lasers nas áreas de fabricação mecânica (corte e soldagem), telecomunicações (fibra ótica), metrologia (anemometria, sensoriamento), informática (saídas gráficas) e numa área fundamental à humanidade em si: a medicina (corte e remoção de tecidos, e fotocoagulação). Um relato sintético sobre aplicações de laser com inúmeras referências bibliográficas pode ser encontrado em Berns (1983), Ready (1978), Junqueira (1996) e Junqueira & Lage (1999).

O termo *laser* tem origem na língua inglesa e significa “Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation”, e é um dispositivo que produz e amplifica luz. O mecanismo físico chama-se emissão estimulada e foi primeiramente postulado por Einstein em 1917. O que difere o laser de outras emissões eletromagnéticas são a monocromaticidade, a pequena divergência, a coerência, a intensidade e o perfil espacial da onda, e.g., Ready (1978). Existem várias classes de lasers segundo o meio no qual ocorre o processo de inversão populacional dos elétrons para estados energéticos mais excitados (condição para emissão estimulada); existem lasers de estado sólido, à gás, líquidos, semi-condutores e químicos.

Estudos numéricos e experimentais sobre o uso de laser associado à mudança de fase podem ser encontrados em Venugopalan *et al* (1994), Armon & Laufer (1986), Walsh *et al* (1988), Armon & Laufer (1987), Partovi *et al* (1987), Zweig (1991), Nowak & Pryputniewicz (1992), Erhart *et al* (1993) e Yu *et al* (1991). Um trabalho fundamental, pioneiro e genérico sobre mudança de fase com termo fonte foi proposto por Rosenthal (1951), que se utilizou do conhecimento clássico de problemas de condução de calor em processos de tratamento térmicos para obter uma solução analítica. Outras contribuições teóricas podem ser encontradas em Venugopalan *et al* (1994), onde foi sugerido um número de Peclet baseado na velocidade de ablação e no coeficiente de atenuação para se determinar a extensão da zona afetada pelo laser; Armon & Laufer (1986) determinaram limites superiores e inferiores para o volume evaporado e profundidade de cratera em aplicações cutâneas, utilizando análise assintótica adimensional para identificar parâmetros ótimos de exposição. Destaca-se também o modelo proposto por Zweig (1991) que derivou uma expressão explícita para a velocidade de perfuração em gelatina com boa concordância experimental. Um dos modelos teóricos mais abrangentes foi apresentado por Partovi *et al* (1987). Naquele trabalho foram derivadas expressões para a velocidade de ablação e parâmetros de limiares de danificação de tecidos vivos numa modelagem tri-dimensional, incluindo espalhamento do laser através do tecido.

Neste trabalho inicial foi investigado o problema de fusão de um sólido semi-transparente devido à incidência de laser. A questão da ablação<sup>1</sup> será abordada futuramente. O problema específico abordado por este trabalho leva à descoberta de grupos adimensionais que permitem caracterizar e classificar tipos de problemas, contribuindo para melhor controle e dimensionamento de aplicações com o laser. Para tanto, o problema será abordado em sua forma mais simples, sem no entanto perder as principais características fenomenológicas.

Os grupos adimensionais encontrados são discutidos. Observa-se que os grupos “ $k(\Delta T_{ref})/\beta L^2 I_0 e^{-\beta L}$ ” e “ $\beta L$ ” caracterizam o fenômeno em dois extremos distintos. Quando o primeiro deles tende a um valor muito menor que um, o processo de mudança de fase tende a ocorrer predominantemente devido à absorção local do laser, ao passo que no outro extremo, o fenômeno tende ao tradicional problema de Stefan com radiação como condição de contorno a exemplo de Junqueira & Milanez (1993) e Alexiades & Salomon (1993). No caso do grupo “ $\beta L$ ”, quando este for muito menor que a unidade, indica que a radiação laser penetra através de toda a espessura da placa sólida. No outro limite, o grupo indica que a radiação laser é toda absorvida nas proximidades da superfície onde se incide laser. Sugestões para futuros estudos são apresentadas.

---

<sup>1</sup> *Ablação*: modo de proteção térmica que ocorre por ação de transformações físico-químicas nos substratos submetidos a um fluxo de calor radiativo e/ou convectivo. (...) Pode ser considerado como um fenômeno no qual a manutenção de condições aceitáveis de fluxo submetido num substrato, é mantido graças a uma destruição parcial de sua superfície (Hewitt *et al* (1997)).

## 2. O PROBLEMA FUNDAMENTAL

A Fig. 1 apresenta um corpo sólido isotrópico, homogêneo, semi-transparente e de aspecto bi-dimensional de espessura  $L$  que recebe incidência uniforme de laser,  $I_0 = I_\infty(1-\rho)$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], sobre sua superfície superior ( $z = 0$ ), onde  $I_\infty$  é a razão da potência original do laser pela área transversal do feixe e  $\rho$ , a refletividade da superfície do sólido. A superfície é plana e lisa com área total,  $A = H \times W$ . O sólido encontra-se inicialmente a temperatura do banho  $T_0 < T_m$ . Devido ao ganho de energia, a temperatura de fusão ( $T_m$ ) é atingida e forma-se uma frente plana e lisa de fusão, que se propaga adentro do sólido ( $z > 0$ ).

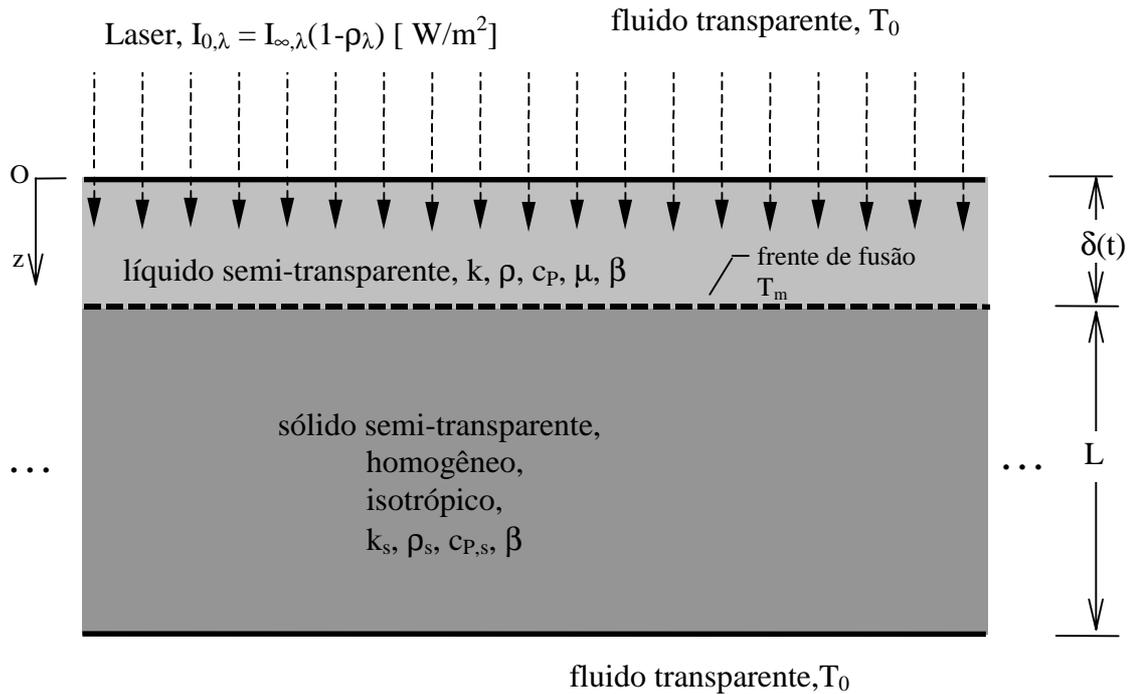


Figura 1 - Sólido semi-transparente em mudança de fase devido à incidência de radiação laser.

Conforme as condições poder-se-á iniciar um processo de convecção natural através da formação de plumas térmicas acima da superfície do sólido. Isto dependerá do tempo do pulso do laser e de outros parâmetros físicos (e.g, p.373, Bejan (1993)).

Consideram-se os efeitos de espalhamento e reflectância no interior do sólido e da fase líquida desprezíveis para o comprimento de onda,  $\lambda$ , do laser utilizado. Assim, a radiação laser se propaga no corpo através do caso particular da Lei de Bouguer, conhecido como a Lei de Beer, como vista, por exemplo, em Modest (1993) e Siegel & Howell (1992):

$$I_\lambda(z) = I_0 e^{-\beta_\lambda z} \quad (1)$$

onde,  $\beta_\lambda$  [ $\text{cm}^{-1}$ ] é o coeficiente médio de extinção no corpo em ambas as fases, e será considerado como função somente da absorvância do material (sem espalhamento). Este coeficiente depende de fatores como o material, o comprimento de onda do laser e a temperatura local. Para ser mais conciso, será omitido o índice referente ao comprimento de onda do laser,  $\lambda$ .

Ao entrar em contato com o substrato, o laser provoca a formação de uma película líquida na superfície do corpo. Nesta região, denominada (*l*), o fenômeno de transferência de energia é modelado por:

$$\rho c_p \frac{\partial T_l}{\partial t} = \beta I_0 e^{-\beta z} + k \frac{\partial^2 T_l}{\partial z^2} \quad (2)$$

onde, *k*,  $\rho$ ,  $c_p$  são respectivamente a condutibilidade térmica [W/mK], a massa específica [kg/m<sup>3</sup>] e o calor específico [J/kg] a pressão constante da fase líquida (o subscrito “s” irá corresponder as propriedades da fase sólida).

Na região sólida, o balanço de energia leva a uma relação similar:

$$\rho_s c_{p,s} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \beta I_0 e^{-\beta z} + k_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \quad (3)$$

Foi assumido que o coeficiente de atenuação,  $\beta$ , é o mesmo para as duas fases, como em Modest (1993).

Embora neste trabalho considera-se a frente de mudança de fase distinta, plana e lisa, atenção especial tem sido dada a um modelo mais complexo de interface sólido-líquido, denominado "mushy zone" (p.724 Modest (1993) e Chan *et al* (1983)).

No nosso modelo, a frente de fusão se propaga na direção *z* conforme a função de posição desconhecida,  $\delta(t)$ . Um balanço de energia nesta interface leva a seguinte expressão:

$$\rho \frac{d\delta}{dt} h_{sl} = I_0 e^{-\beta z} + k_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=\delta} - k \left. \frac{\partial T_l}{\partial z} \right|_{z=\delta} \quad (4)$$

onde  $h_{sl}$ , é o calor latente de fusão [J/kg] do sólido em estudo.

Dois situações bem distintas e que deverão receber tratamento diferenciado são imediatamente identificadas: a) quando as regiões mais próximas da superfície externa são de maior interesse, permitindo considerar o corpo como um sólido semi-infinito,  $\delta(t)/L \ll 1$ ; b) quando a incidência de laser leva a completa fusão do sólido,  $\delta(t = t_{final}) \sim L$ . O caso a) geralmente envolve o interesse de ablação e o caso b), de perfuração.

Nos próximos parágrafos será estudado o caso onde a parcela fundida é da ordem de grandeza da espessura original do sólido (placa). Para caracterizar as diversas situações do problema em estudo, realiza-se uma análise de escala (e.g., Bejan (1995)). Inicia-se identificando  $\Delta T \sim (T_m - T_0)$  [°C] e  $z \sim L$  [m] como escalas do fenômeno. No início do processo, somente existe a fase sólida (Eq. (3)), assim:

$$\rho_s c_{p,s} \frac{\Delta T}{\tau} \sim \beta I_0 e^{-\beta L}, k_s \frac{\Delta T}{L^2} \quad (5)$$

onde  $\tau$  é a escala desconhecida de tempo.

No período transitório, duas possibilidades podem ocorrer: a) a variação temporal de temperatura ocorre predominantemente devido à penetração da radiação laser, ou b) devido à difusão de calor. A consideração da primeira hipótese leva a obtenção da seguinte expressão:

$$\frac{\rho_s c_{p,s} \Delta T}{\tau \beta I_0 e^{-\beta L}} \sim 1, \frac{k_s \Delta T}{L^2 \beta I_0 e^{-\beta L}} \quad (6)$$

portanto,

$$\frac{k_s \Delta T}{L^2 \beta I_0 e^{-\beta L}} \ll 1 \quad (7)$$

A expressão acima é a condição necessária para que os efeitos de difusão térmica sejam bem menores que os efeitos da absorção local da radiação laser. A condição inversa ocorre quando o grupo da equação acima tem ordem de grandeza muito maior que a unidade.

A ordem de grandeza do tempo necessário para desencadear a mudança de fase é determinada através da expressão (6):

$$\tau_i \sim \frac{\rho_s c_{p,s} \Delta T}{\beta I_0} \text{ [s]} \quad (8)$$

que representa a razão entre a energia volumétrica acumulada (até o sólido atingir a temperatura de fusão) e o fluxo energético volumétrico disponível. Note que a Eq. (8) não é função do comprimento característico, uma vez que a fusão se inicia na região próxima à superfície em quaisquer circunstâncias. O termo  $e^{-\beta L}$  é considerado de ordem “1” pois para o caso no qual a radiação laser penetra por toda a espessura da placa sólida, a profundidade ótica ( $1/\beta$ ) deve ser da ordem de grandeza de “L”, ou maior.

Para o caso predominantemente difusivo, a ordem de grandeza do tempo necessário para desencadear a mudança de fase é dada por:  $\tau_{i,d} \sim \rho_s c_{p,s} \Delta T L / I_0$  [s].

Após o início do processo de mudança de fase, surge uma camada líquida superficial. Faz-se necessário, então, incluir a equação da fase líquida, Eq. (2), que em termos de ordem de grandezas se torna:

$$\rho c_p \frac{\Delta T}{\tau} \sim \beta I_0 e^{-\beta L}, k \frac{\Delta T}{L^2} \quad (9)$$

Se a absorção da radiação também for predominante, chega-se a uma conclusão semelhante à da Eq. (7), ou seja, as condições necessárias são  $k \Delta T / L^2 \beta I_0 \ll 1$  e  $\beta L \ll 1$ .

Uma análise de escala na expressão da mudança de fase (Eq. (4)), leva a:

$$\rho h_{sl} \dot{\delta} \sim I_0 e^{-\beta \delta(t)} \quad (10)$$

onde  $\dot{\delta}$  é a velocidade de avanço da frente de fusão, que se considerados:  $\delta(t_0) \ll L$  e  $\beta L \ll 1$ , a velocidade terá ordem de grandeza:  $\dot{\delta} \sim I_0 / \rho h_{sl}$  [m/s]. Assim, quando a absorção do laser for predominante, ou seja,  $k(\Delta T) / \beta L^2 I_0 \ll 1$  e  $\beta L \ll 1$ , as Eqs.(2)-(4) se tornam:

$$\rho c_p \frac{\partial T_l}{\partial t} = \beta I_0 e^{-\beta z}, \quad 0 < z < \delta(t) \quad (11)$$

$$\rho \frac{d\delta}{dt} h_{sl} = I_0 e^{-\beta z} \text{ e } T_l = T_s = T_m, z = \delta(t) \quad (12)$$

$$\rho_s c_{p,s} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \beta I_0 e^{-\beta z}, \delta(t) < z < L \quad (13)$$

A rigor, pode ser mostrado que o grupo “ $\beta L$ ” pode ser até de ordem 1 para este resultado.

No sistema de equações acima,  $T_l$ ,  $T_s$  e  $\delta(t)$  são as incógnitas e somente é necessário o estabelecimento das condições iniciais:  $T_l(z, t_i)$ ,  $T_s(z, t_i)$  e  $\delta(t_i)$ , que resultam do problema inicial de condução de calor no sólido (Eq.(3)):  $t < t_i$ , onde  $t_i$  é o período necessário para se iniciar a mudança de fase. Interessante observar a ausência de condições de contorno em ‘z’.

Para se adimensionalizar o sistema (11)-(13) sugere-se a utilização da escala de tempo  $\tau \sim \rho L h_{sl} / I_0$  [s], ao invés da tradicional escala difusiva “ $L^2/\alpha$ ”, onde  $\alpha$  é a difusividade térmica do material (c.f., p. 134, Alexiades & Salomon (1993)).

No outro extremo, onde predominam os efeitos difusivos (o transporte difusivo é muito maior que a absorção local de radiação laser), a condição suficiente é  $\beta L \gg 1$ . Em outras palavras, toda a energia é absorvida na superfície do corpo ( $z = 0$ ), sendo então transportada adentro exclusivamente por difusão. Neste segundo caso, o processo de fusão do sólido se torna o conhecido problema de Stefan de duas fases, com a diferença de apresentar fluxo de calor ( $I_0$ ) imposto como condição de contorno. Complicações analíticas e numéricas encontradas na solução de tais problemas são amplamente discutidas na literatura (e.g., Alexiades & Salomon (1993)) e serão portanto, omitidas deste artigo.

Para estes casos, a escala de tempo deve ser “ $\tau \sim L^2 / \alpha Ste$ ”, onde  $Ste = c_p \Delta T / h_{sl}$  é o número de Stefan.

A discussão acima é válida para placas finitas na direção de aplicação do laser. Quando se deseja retirar material imediatamente próximo da superfície ou simplesmente realizar alterações físico-químicas superficiais, caracteriza-se um problema de ablação onde, do ponto de vista geométrico, considera-se um sólido semi-infinito. Na análise de escala, não haverá comprimento característico conhecido à priori, portanto utiliza-se a posição da frente de fusão,  $\delta(t)$ . Este tópico será apresentado subsequentemente em outro artigo.

### 3. UM ESTUDO DE CASO

Nesta seção é investigado um caso particular do problema apresentado na seção anterior, onde a temperatura inicial do sólido é a própria temperatura de fusão,  $T_s(z, t) = T_m$ . Este problema constitui-se numa variação do problema de Stefan de uma fase. Note que nesta situação, a energia do laser é absorvida volumetricamente e através da difusão do fluxo de calor imposto na superfície do corpo,  $I_0$ .

Uma análise de escala levou a seguinte adimensionalização:

$$\theta = \frac{T - T_m}{I_0 L / k}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{\alpha t}{L^2}, \quad \bar{\beta} = \beta L \text{ e } \tilde{\delta} = \frac{\delta}{L} \quad (14)$$

onde observa-se que foi mantida a adimensionalização convencional (e.g. Alexiades & Salomon (1993)) do problema de Stefan de uma fase com fluxo de calor imposto. Optou-se por utilizá-la para facilitar o entendimento do leitor ao comparar este estudo com a literatura.

A forma final adimensionalizada do novo problema é baseada nos grupos apresentados acima e nas Eqs.(2) e (4).

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \theta_l}{\partial \tilde{z}^2} + \bar{\beta} e^{-\bar{\beta} \tilde{z}} \quad \text{para } 0 < \tilde{z} < \tilde{\delta}(\tilde{t}) \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \tilde{t}} = \text{Ste} \left[ \left. \frac{\partial \theta_l}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=\tilde{\delta}} + e^{-\bar{\beta} \tilde{\delta}} \right], \quad \theta_l = 0 \quad \text{para } \tilde{z} = \tilde{\delta}(\tilde{t}) \quad (16)$$

onde  $\text{Ste} = \text{Ste}_{10} = c_p I_0 L / h_{sl} k$ . As condições de contorno são as seguintes:

$$\theta_s = 0 \quad \text{para } \tilde{\delta}(\tilde{t}) < \tilde{z} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta_l}{\partial \tilde{z}} = -1 \quad \text{para } \tilde{z} = 0 \quad (17)$$

Para ilustrar o conteúdo teórico deste trabalho, o problema acima foi resolvido utilizando um código computacional baseado num esquema de diferenças finitas centrais para discretização espacial. O avanço da interface sólido-líquido foi considerado através do emprego do método das malhas móveis. Os valores iniciais da posição e da velocidade da frente de fusão ( $\dot{\delta}(t)$ ), necessários para iniciar o processo iterativo, foram obtidos utilizando a solução de London e Seban (1943), particularizada para as condições de contorno aqui consideradas. Tal técnica foi empregada com sucesso por Junqueira & Milanez (1993). Condições de estabilidade numérica e de precisão foram observadas. Para gerar os resultados apresentados na Figura (2) foram utilizados 20 nós na malha espacial, observando-se que a variação nos resultados quando este número era dobrado não era significativa.

Na Figura 2(a) são mostrados perfis de temperatura,  $\theta(\tilde{z})$ , para quatro instantes do processo para  $\bar{\beta} = 1$  e 10, enquanto  $\text{Ste} = 0,1$ . Percebe-se um perfil quase-linear de queda de temperatura até a temperatura de fusão do sólido,  $T_m$  ( $\theta = 0$ ). Os pontos onde as curvas de temperatura encostam na abscissa, correspondem à posição da frente de fusão naquele dado instante. A influência do parâmetro  $\bar{\beta}$  demonstra que a medida que o grau de transparência aumenta, a frente de fusão avança mais rapidamente.

Na Figura 2(b) observa-se o avanço da frente de fusão,  $\tilde{\delta}(\tilde{t})$ , ao longo do tempo para  $\bar{\beta} = 1, 10$  e 100. Quando  $\bar{\beta} = 100$ , o resultado tende ao problema de Stefan convencional sem nenhum ganho volumétrico de energia, ou seja, o corpo se apresenta praticamente opaco para o laser. O resultado mais importante, e esperado, é a considerável diminuição do tempo de perfuração da placa quando os efeitos de absorção da radiação laser se fazem presentes ( $\bar{\beta} \leq 1$ ). O tempo de perfuração da placa quando  $\bar{\beta} = 1$  é de 5,7 e chega a 10,4 para  $\bar{\beta} = 100$ .

Na Figura 2(c) é mostrada a variação da velocidade de avanço da frente de fusão de acordo com sua posição durante o processo. Importante notar que sob influência do laser ( $\bar{\beta} = 1$ ), a velocidade se mantém crescente por toda a fusão da placa e superior às dos casos quando  $\bar{\beta} = 10$  e 100. Outra tendência interessante é a leve desaceleração da frente quando  $\bar{\beta} > 10$ , devido a fusão ocorrer sem a energia do laser a partir de certa profundidade. A súbita aceleração ao final segue a tendência do problema de Stefan convencional (e.g., Junqueira & Milanez (1993)).

Na Figura 4(d) apresenta-se o tempo total de perfuração da placa para vários  $\text{Ste}$  e  $\bar{\beta}$ . Nota-se a tendência assintótica nos dois extremos de  $\bar{\beta}$ : quando  $\bar{\beta} \gg 1$  o tempo total do processo tende ao tempo total obtido no problema de Stefan convencional (com fluxo

imposto), dado por  $\tau_{p,d} \cong Ste_{lo}^{-1}$  devido às escalas da Eq. (14). No outro extremo, o tempo do processo de fusão completa tende a ser metade do tempo  $\tau_{p,d}$ .

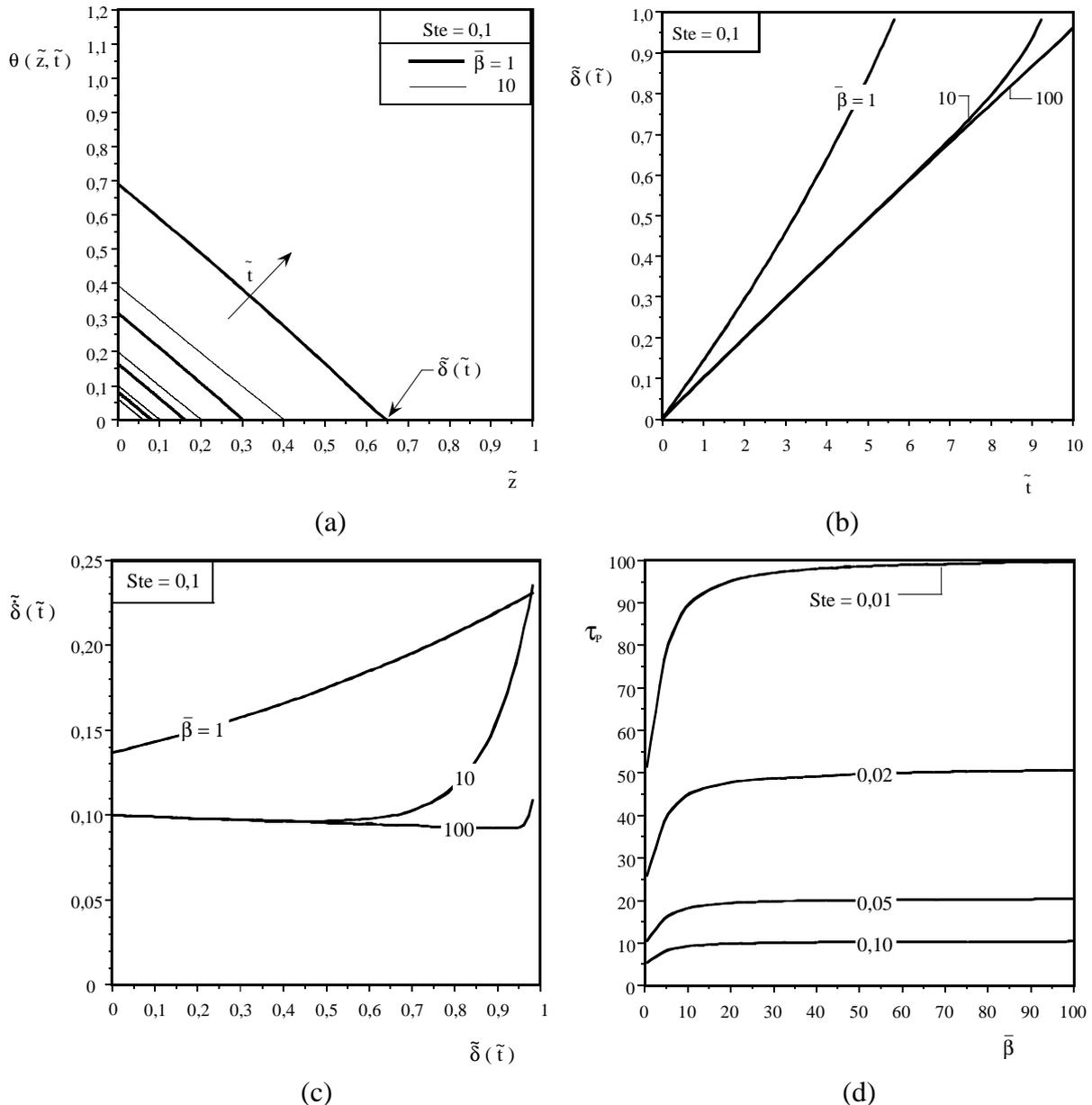


Figura 2 – Resultados numéricos do problema adimensional de Stefan de uma fase com fluxo de calor imposto e absorção volumétrica de energia. (a) Campo de temperatura; (b) avanço da frente de fusão; (c) variação da velocidade da frente e (d) variação do tempo de perfuração do processo.

### 3. CONCLUSÃO

A abordagem e a contribuição teórica apresentadas nesta comunicação demonstrou, através de um caso ilustrativo, ser de grande utilidade para assistir em simulações, e conseqüentemente, planejamento de experimentos, projetos e controle de dispositivos a laser. O trabalho também apresentou novos esclarecimentos sobre este fenômeno para discussão e apreciação da comunidade científica. Foram apresentados modelos mais simplificados para o

caso extremo onde predomina a absorção da radiação laser. Este trabalho também estabelece uma plataforma para futuros modelos com evaporação da fase líquida.

Os casos extremos (difusivo ou laser) foram identificados através de análise de escala. Descobriu-se que para  $\bar{\beta} \gg 1$  o problema será sempre predominantemente difusivo, independentemente da intensidade do laser. O período para início do processo de fusão seria  $\tau_{i,d} \sim \rho_s c_{p,s} \Delta T L / I_0$  [s] e o tempo de fusão completa de uma placa seria  $\tau \sim \rho L h_{sl} / I_0$  [s]. Para ocorrer o outro caso extremo, quando a absorção volumétrica do laser predomina, faz-se necessárias duas condições:  $k(\Delta T) / \beta L^2 I_0 \ll 1$  e  $\beta L \ll 1$ . Neste caso o tempo necessário para desencadear a fusão é dado por  $\tau_i \sim \rho_s c_{p,s} \Delta T / \beta I_0$ , e para perfuração completa da placa,  $\tau \sim \rho L h_{sl} / I_0$ . Estes grupos são contribuições originais deste artigo. Para o caso específico do problema genérico de uma fase, o tempo total de perfuração tem limite superior em  $\tau_{p,d} \cong Ste_{lo}^{-1}$  e inferior na metade,  $\tau_{p,d} \cong Ste_{lo}^{-1} / 2$ , como visto na Fig. 4(d).

Na sequência deste trabalho, serão abordados casos mais complexos do problema de Stefan de duas fases com várias situações e condições de contorno, e detalhados os casos de sólido semi-infinito, onde há o interesse de ablação. Serão utilizados parâmetros mais voltados a bioengenharia.

### *Agradecimentos*

MRE agradece a bolsa de pesquisador do CNPq e SLMJ agradece o suporte do NUPES.

### **REFERÊNCIAS**

- Alexiades, V. & Salomon, A.D., 1993, The mathematical modeling of melting and freezing processes, Hemisphere Publishing Co., Washington-DC.
- Armon, E. & Laufer, G., 1986, Asymptotic and dimensional analysis of the response of living tissue to surgical pulsed CO<sub>2</sub> laser, ASME Journal of Biomechanical Engineering, vol. 108, November, pp.368-371.
- Armon, E. & Laufer, G., 1987, New techniques for reducing the thermochemical damage in the course of laser surgery, Laser Surg. Med., vol. 7, n. 2, pp.162-168.
- Bejan, A., 1993, Heat Transfer, JohnWiley & Sons, New York.
- Bejan, A., 1995, Convection Heat Transfer, 2<sup>nd</sup> ed., Wiley, New York.
- Berns, M.W., 1983, Viewpoint lasers in biomedicine, Laser Focus, vol. 19, n. 6, pp.66-81.
- Chan, S.H., Cho, D.H. & Kocamustafaogullari, G, 1983, Melting and solidification with internal radiative transfer - a generalized phase change model, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 26, n.4, pp-621-633.
- Ehrhart, P., Christoph, H. & Karcher, C., 1993, Temperature and penetration depth prediction for a three-dimensional field below a moving heat source, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 36, n. 16, pp.3997-4008.
- Hewitt, G.F., Shires, G.L. and Polezhaev, Y.V., (eds.), 1997, International Encyclopedia of Heat and Mass Transfer, CRC Press.
- Junqueira, S.L.M. & Lage, J.L., 1999, The fluid effect on the effective attenuation coefficient of a fully saturated porous medium under laser radiation, Experimental Heat Transfer, vol. 12, pp.157-174.
- Junqueira, S.L.M., 1996, Caracterização numérica e experimental da atenuação da radiação laser em espuma metálica. Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.

- Junqueira, S.L.M. & Milanez, L.F., 1993, Mudança de fase em condições de contorno de convecção e radiação, Anais do XII COBEM, Brasília, Brasil, pp.605-608.
- London, A.L. & Seban, R.A., 1943, Rate of ice formation, Trans. ASME, vol.65, p.771-778.
- Modest, M. F., 1993, Radiative Heat Transfer, McGraw-Hill.
- Nowak, T. & Pryputniewicz, R.J., 1992, Theoretical and experimental investigation of laser drilling in a partially transparent medium, Journal of Electronic Packaging, vol. 114, March, pp.11-80.
- Partovi, F., Izatt, J.A., Cothren, R.M., Kittrell, C., Thomas, J.E., Strikwerda, S., Kramer, J.R. & Feld, M.S., 1987, A model for thermal ablation of biological tissue using laser radiation, Lasers Surg. Med., vol. 7, n. 2, pp.141-154.
- Ready, J.A., 1978, Industrial applications of lasers, Academic Press, New York, NY.
- Rosenthal, D., 1946, The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments, Trans. ASME, vol. 68, pp.849-866.
- Siegel, R. & Howell, J.R., 1992, Thermal Radiation Heat Transfer, 3<sup>rd</sup>. ed., Hemisphere Publishing Company, Washington-DC.
- Venugopalan, V., Nishiok, N.S. & Mikiç, B.B., 1994, The effect of laser parameters on the zone of thermal injury produced by laser ablation of biological tissue, ASME Journal of Biomechanical Engineering, vol. 116, February, pp.62-70.
- Walsh Jr, J.T., Flotte, T.J., Anderson, R.R. & Deutsch, T. F., 1988, Pulsed CO<sub>2</sub> laser tissue ablation: effect of tissue type and pulse duration on thermal damage, Laser Surg. Med., vol. 8, n. 20, pp.108-118.
- Yu, D., Fox, J.L., Hsu, J., Powell, G.L. & Higuchi, W.I., 1993, Computer simulation of surface temperature profiles during CO<sub>2</sub> laser irradiation of human enamel, Optical Engineering, vol. 32, n. 2, pp.298-304.
- Zweig, A.D., 1991, A thermo-mechanical model for laser ablation, J. Appl. Phys., vol. 70, n. 3, pp.1684-1691.

## **FUNDAMENTALS OF PHASE-CHANGE OF SEMI-TRANSPARENT SOLIDS UNDER LASER IRRADIATION**

**Abstract:** *Laser is being employed in diverse applications nowadays, especially as a surgical tool as well as machining tool. Applied, empirical and experimental research has been the main focus of the work found in the Bioengineering literature. On the other hand, fundamental and theoretical studies of semi-transparent solid materials under phase-change due to laser radiation are not so frequently published. This paper deals with the fundamentals of such phenomena and leads to a mathematical model, to the main scales and physical groups. Numerical solutions of a case study are presented, discussed and compared to the literature. Expressions and correlations are presented in order to assist experimental and applied work of laser surgery and industrial applications.*

**Keywords:** Laser, Phase Change, Bioengineering, Stefan Problem, Laser Machining.