

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E EXPERIMENTOS COM UM PÊNDBULO DUPLO

Raissa de Melo Brandão, Samantha Oliveira dos Santos, Domingos Alves Rade

UFU, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Campus Santa Mônica - Santa Mônica - CEP 38408-100 - Uberlândia - Minas Gerais
E-mail para correspondência: rah.brandao@hotmail.com

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar movimento de um pêndulo duplo e as variáveis que o afetam. Foi feita a simulação numérica do movimento no *software* Matlab®, mediante a integração das equações diferenciais não lineares do movimento. Paralelamente, um protótipo foi construído para a realização de ensaios no laboratório. Fizeram-se filmagens digitais, permitindo a comparação entre o movimento ideal do pêndulo simulado e o movimento real filmado. Foi feita também a instrumentação do protótipo com o uso de um acelerômetro piezolétrico e um analisador de sinais. Compararam-se os valores simulados e medidos para a aceleração de um ponto do pêndulo duplo.

Equações Diferenciais do Movimento

Para obter as equações não lineares do movimento ideal do pêndulo duplo esquematizado na Fig. 1, em função das coordenadas angulares mostradas, foram aplicados os princípios de Newton-Euler para corpos rígidos (Hibbeler, 2005; Rade, 2005; Rade, 2006). Visando à consideração dos efeitos dissipativos, como atrito nos mancais e resistência do ar, foram introduzidos nas juntas A e B momentos viscosos resistentes, expressos segundo: $\tau_A = -c_A \dot{\theta}_1$; $\tau_B = -c_B (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$.

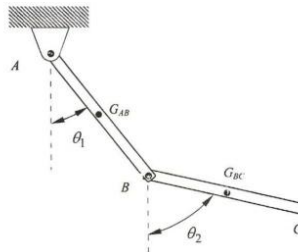


Figura 1 – Esquematização do pêndulo duplo.

As duas equações de segunda ordem obtidas para o movimento foram reescritas na forma de quatro equações de primeira ordem para fins de integração numérica, sendo expressas de acordo com as Eq. (1) a (4):

$$\left[\frac{m_1}{12} h_1^2 + \left(\frac{m_1}{3} + m_2 \right) l_1^2 \right] \dot{z}_2 + \left[m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \cos(z_1 - z_3) \right] \dot{z}_4 = - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g l_1 \text{sen}(z_1) - m_2 l_1 \frac{l_2}{2} z_4^2 \text{sen}(z_1 - z_3) - c_A z_4 \quad (1)$$

$$\left[m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \cos(z_1 - z_3) \right] \dot{z}_2 + \left[\frac{m_2}{12} h_2^2 + \frac{m_2}{3} l_2^2 \right] \dot{z}_4 = - m_2 g \frac{l_2}{2} \text{sen}(z_3) + m_2 l_1 \frac{l_2}{2} z_2^2 \text{sen}(z_1 - z_3) + c_B (z_2 - z_4) \quad (2)$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \quad (3)$$

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (4)$$

onde m_1 , l_1 e h_1 são respectivamente a massa, o comprimento e a largura da barra AB; m_2 , l_2 e h_2 , a massa, o comprimento e a largura da barra BC; g é a aceleração da gravidade; e as variáveis de estado são definidas segundo: $z_1 = \theta_1$, $z_2 = \dot{\theta}_1$, $z_3 = \theta_2$ e $z_4 = \dot{\theta}_2$. É importante observar que, na obtenção das equações do movimento, as barras foram consideradas como prismas retos de bases retangulares.

Simulação Numérica e Experimentos

A simulação numérica do movimento do pêndulo duplo foi feita por meio da integração numérica das Eq. (1) a (4), empregando a função ODE45 do *software* Matlab®. Adotaram-se os seguintes valores dos parâmetros físicos e condições iniciais: $m_1 = 0,254 \text{ kg}$; $m_2 = 0,106 \text{ kg}$; $l_1 = 0,3 \text{ m}$; $l_2 = 0,235 \text{ m}$; $h_1 = 0,0254 \text{ m}$; $h_2 = 0,0256 \text{ m}$; $c_A = 0,0013 \text{ Nms}$; $c_B = 0,0015 \text{ Nms}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \pi/2$; e velocidades angulares iniciais nulas. Os resultados numéricos da simulação foram utilizados para gerar uma animação, que foi gravada em vídeo no formato AVI.

Os experimentos consistiam em liberar o protótipo, cujas propriedades coincidem com as do pêndulo simulado, de posições angulares determinadas e com velocidades iniciais nulas. O movimento subsequente foi filmado com uma câmera digital posicionada em um tripé.

Comparação entre as simulações e os experimentos

Para comparar qualitativamente os movimentos do pêndulo real e do modelado, fez-se a superposição do vídeo retirado do Matlab® e do filmado no laboratório, com auxílio do *software* Adobe Premiere Elements 4.0. Nas primeiras simulações, nas quais nenhuma resistência ao movimento foi considerada no modelo numérico, a comparação ficou limitada aos primeiros dez segundos, aproximadamente, e mostrou uma correlação satisfatória.

Em uma etapa subsequente do projeto, foi realizada a instrumentação do protótipo no laboratório (Fig. 2). Utilizando um acelerômetro piezelétrico da marca PCB Piezotronics e um analisador de sinais da marca Agilent, mediram-se as acelerações da extremidade B durante dezesseis segundos. O gráfico da aceleração medida em função do tempo foi visualizado no *software* Matlab® e comparado com o sinal da aceleração calculado pela simulação, que incluía efeitos dissipativos, conforme mostrado na Fig. 3. Os valores dos fatores de amortecimento que melhor ajustaram as duas curvas foram $c_A = 0,0013 \text{ Nms}$ e $c_B = 0,0015 \text{ Nms}$. Pode-se observar na Fig. 3 que a correlação entre as duas curvas não é satisfatória. Isso pode ser atribuído ao fato que o acelerômetro utilizado não é adequado para a medição de sinais de baixa frequência, que é o caso do movimento observado.



Figura 2 – Foto da montagem para instrumentação do pêndulo.

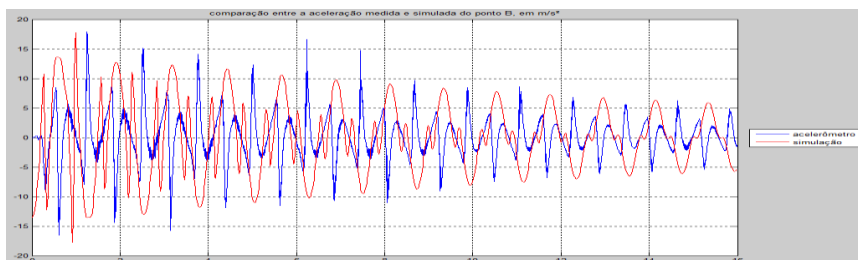


Figura 3 – Gráfico com as curvas das acelerações medida e simulada em função do tempo.

Conclusões

A modelagem de um pêndulo duplo foi realizada utilizando os conceitos de Dinâmica dos Corpos Rígidos em movimento plano. As equações diferenciais não lineares do movimento foram integradas numericamente e, paralelamente, um protótipo foi construído e ensaiado no laboratório. Compararam-se os dois conjuntos de resultados qualitativamente através da superposição de vídeos, nos primeiros segundos do movimento, e obteve-se uma correlação satisfatória.

Em um segundo estágio, a instrumentação do protótipo foi feita com uso de um acelerômetro piezelétrico e um analisador de sinais. Os valores medidos foram comparados com os sinais calculados pela simulação numérica, que inclui efeitos dissipativos, por meio de gráficos e não houve uma coincidência satisfatória das curvas.

Visando melhorar a correspondência entre os resultados simulados e experimentais, a próxima etapa do estudo incluirá o uso de procedimentos de tratamento de imagem para estimar as velocidades angulares experimentais do pêndulo. Outra alternativa consistirá em utilizar sensores da categoria MEMS (Micro Electromechanical Devices) mais bem adaptados para a medição de sinais de baixa frequência.

Referências Bibliográficas

- Rade, D. A., “Cinemática para a Engenharia”, Apostila, Universidade Federal de Uberlândia, 2005.
- Rade, D. A., “Dinâmica para a Engenharia”, Apostila, Universidade Federal de Uberlândia, 2006.
- Hibbeler, R. C., “Dinâmica: mecânica para engenharia”, Editora Prentice Hall, 10ª Edição, 2005.