



UMA ABORDAGEM DA MECÂNICA LAGRANGEANA APLICADA A SISTEMAS DE MULTICORPOS

Cleves Mesquita Vaz, Domingos Alves Rade, Elson Lima de Albuquerque

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Caixa Postal 593 – CEP 38400-902 - Uberlândia – MG

mesquitav@mecanica.ufu.br, domingos@ufu.br, elsonlima@rocketmail.com

Resumo. *O presente trabalho busca apresentar uma abordagem didática da dinâmica de sistemas de multicorpos rígidos bidimensionais, com ênfase na modelagem numérica e na simulação computacional. Tal tema constitui um dos importantes tópicos do ensino de graduação e pós-graduação em Engenharia Mecânica. Neste sentido, busca-se explicitar o papel fundamental dos sistemas de coordenadas, os significados das coordenadas lineares e rotacionais empregadas para caracterizar as posições dos corpos que compõem o sistema e o significado das equações de restrição e dos multiplicadores de Lagrange a elas associados. É ainda evidenciada a natureza não linear das equações algébrico-diferenciais do movimento. Um mecanismo do tipo biela-cursor-manivela é usado para ilustrar a metodologia, sendo desenvolvidas as equações do movimento e apresentados os resultados de simulações numéricas.*

Palavras-chave: *Sistemas de Multicorpos, Mecanismos, Análise Dinâmica, Equações Algébrico-Diferenciais.*

1. INTRODUÇÃO

Na moderna Engenharia Mecânica, *sistemas de multicorpos* são entendidos como sistemas mecânicos constituídos por conjuntos de componentes rígidos e/ou flexíveis interconectados. Estas características se aplicam a numerosos tipos de sistemas mecânicos industriais, tais como mecanismos geradores/transformadores de movimento, veículos, estruturas espaciais e robôs (Shigley & Uicker Jr., 1980). A pesquisa na área de dinâmica de sistemas de multicorpos tem sido motivada pelo crescente interesse no projeto e simulação do comportamento destes tipos de sistemas. Mais recentemente, com o interesse pela concepção de sistemas leves e precisos, geralmente operando a altas velocidades, ênfase tem sido dada à caracterização dos efeitos da flexibilidade dos elementos sobre o comportamento dinâmico de sistemas de multicorpos. Nestes casos, técnicas de discretização, tais como o Método dos Elementos Finitos, têm sido empregadas (Bauchau, 1998; Damilano, 1993).

Embora reconheçam que as técnicas de modelagem de sistemas de multicorpos sejam hoje bem estabelecidas, havendo, para este fim, numerosos “pacotes” computacionais disponíveis no mercado (DADS[®], ADAMS[®]..., dentre outros) os autores consideram ser imprescindível ao usuário destas técnicas o pleno domínio dos fundamentos teóricos e numéricos subjacentes. Tal domínio é às vezes dificultado pela ausência, nos *currícula* dos cursos de graduação, de disciplinas tratando especificamente do tema. Nota-se ainda a pouca disponibilidade de textos em língua portuguesa dedicados ao assunto, havendo, contudo, importantes contribuições (Santos, 2001).

No contexto do ensino de Engenharia Mecânica, este trabalho tem por objetivo apresentar uma abordagem lagrangeana para modelagem matemática e resolução numérica de sistemas de multicorpos. Sem negligenciar a possibilidade de extensão a casos mais complexos, o estudo restringe-se aos sistemas bidimensionais, formados por elementos idealmente rígidos, com enfoque nos seguintes aspectos fundamentais: a natureza dos sistemas de coordenadas, os significados das coordenadas lineares e rotacionais empregadas para caracterizar as posições dos corpos que compõem o sistema, o significado das equações de restrição e dos multiplicadores de Lagrange a elas associados.

A exemplificação do procedimento de modelagem e a interpretação do significado das grandezas envolvidas são feitas a partir de um exemplo numérico simples, consistindo de um mecanismo biela-cursor-manivela. Empregando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, as equações do movimento deste sistema são resolvidas numericamente, sendo apresentados os resultados em termos de posições, velocidades e acelerações dos corpos que o compõem e das forças de restrição a que estão submetidos.

2. SISTEMAS DE REFERÊNCIA

O movimento de um sistema de multicorpos pode ser descrito utilizando grandezas cinemáticas vetoriais: posição, velocidade e aceleração. Estas grandezas devem ser caracterizadas em termos de suas componentes nas direções de eixos de referências, previamente escolhidos.

Na análise de sistemas de multicorpos convém empregar dois tipos de sistemas de referência. O primeiro é um sistema de coordenadas fixo no tempo, tomado como padrão para todos os corpos do sistema, chamado de *sistema de referência global* ou *inercial*. Os demais são os *sistemas de referências locais*, ou seja, são sistemas de referência fixados a cada um dos corpos, tendo, portanto, as posições de suas origens e as orientações de seus eixos variáveis com tempo.

Considerando genericamente o i -ésimo componente de um sistema de multicorpos, ilustrado na Fig. 1, escolhem-se dois sistemas de referência distintos:

- um sistema inercial OX_1X_2 , ao qual se associa uma base ortogonal de vetores unitários \mathbf{i}_1 e \mathbf{i}_2 .
- um sistema de eixos ortogonais $O^iX_1^iX_2^i$, rigidamente ligado ao corpo, com origem no ponto O^i . A este sistema se associa uma base ortogonal de vetores unitários \mathbf{i}_1^i e \mathbf{i}_2^i . Estando ligado ao corpo, este segundo sistema se movimenta junto com ele, desenvolvendo movimento plano geral, que pode ser considerado como resultante da combinação do deslocamento de sua origem e de uma rotação em torno de um eixo perpendicular ao plano do movimento, passando por esta origem.

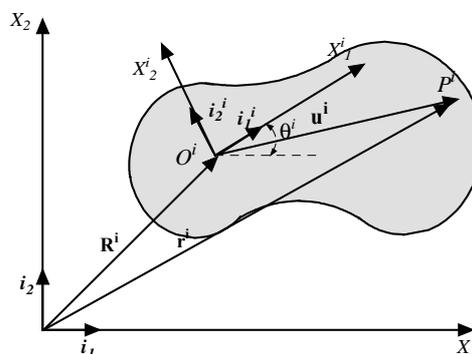


Figura 1. Sistemas de referência para o i -ésimo componente do sistema de multicorpos

Ainda com relação à Fig. 1, consideremos o ponto genérico P_i , cuja posição, em relação ao sistema de referência local é dado por:

$$\bar{\mathbf{u}}^i = \bar{u}_1^i \mathbf{i}_1^i + \bar{u}_2^i \mathbf{i}_2^i, \quad (1)$$

O mesmo vetor pode ser expresso em termos de suas componentes no sistema de coordenadas global segundo:

$$\mathbf{u}^i = u_1^i \mathbf{i}_1 + u_2^i \mathbf{i}_2, \quad (2)$$

Nas equações acima, $(\bar{u}_1^i, \bar{u}_2^i)$ e (u_1^i, u_2^i) indicam as componentes de \mathbf{u}^i no sistema de coordenadas local e global, respectivamente. Pode-se mostrar que estes dois conjuntos de componentes se relacionam através da seguinte transformação linear:

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{T}^i \bar{\mathbf{u}}^i, \quad (3)$$

com $\mathbf{u}^i = [u_1^i \quad u_2^i]^T$, $\bar{\mathbf{u}}^i = [\bar{u}_1^i \quad \bar{u}_2^i]^T$.

Designando por θ^i o ângulo formado entre os dois sistemas de referência, conforme ilustrado na Fig. 1, a *matriz de rotação* \mathbf{T}^i toma a forma:

$$\mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta^i & -\sin \theta^i \\ \sin \theta^i & \cos \theta^i \end{bmatrix}, \quad (4)$$

notando-se que tal matriz é uma *matriz ortogonal*, que satisfaz a propriedade $(\mathbf{T}^i)^T \mathbf{T}^i = \mathbf{T}^i (\mathbf{T}^i)^T = \mathbf{I}$

De acordo com a Fig. 1, o vetor-posição \mathbf{r}^i do ponto P^i é dado pela seguinte equação, em termos de suas componentes *relativas ao sistema de referência global*:

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{T}^i \bar{\mathbf{u}}^i, \quad (5)$$

onde $\mathbf{R}^i = [R_1^i \quad R_2^i]^T$ indica o vetor-posição da origem do sistema de coordenadas local.

Como as coordenadas que formam o vetor $\bar{\mathbf{u}}^i$ são constantes, conclui-se que a posição do ponto P^i no plano é determinada pelos valores das seguintes coordenadas, ditas *coordenadas generalizadas*:

$$\mathbf{q}^i = [R_1^i \quad R_2^i \quad \theta^i]^T \quad (6)$$

Derivando a Eq. (5) em relação ao tempo, temos:

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\mathbf{T}}^i \bar{\mathbf{u}}^i, \quad (7)$$

Utilizando a Regra da Cadeia da derivação, escrevemos:

$$\dot{\mathbf{T}}^i = \frac{d\mathbf{T}^i}{dt} = \frac{d\mathbf{T}^i}{d\theta^i} \frac{d\theta^i}{dt} = \mathbf{T}_\theta^i \dot{\theta}^i, \text{ onde } \mathbf{T}_\theta^i = \begin{bmatrix} -\sin \theta^i & -\cos \theta^i \\ \cos \theta^i & \sin \theta^i \end{bmatrix}$$

e $\dot{\theta}^i$ é a *velocidade angular* do sistema de referência local, que confunde-se com a velocidade angular do corpo. Assim, (7) pode ser reescrita sob a forma:

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\theta}^i \mathbf{T}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}^i, \quad (8)$$

A extensão da formulação precedente ao caso de sistemas tridimensionais não envolve grandes complicações, devendo-se notar que os sistemas de referência passam a ser formados por conjuntos de três vetores perpendiculares dois a dois e que os vetores-posição passam a possuir três componentes. Além disso, a orientação dos sistemas de referência locais requerem o emprego de, no mínimo, três parâmetros rotacionais.

3. RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS

O movimento de um sistema de multicorpos bidimensional, formado por c corpos componentes fica completamente determinado quando se conhecem os valores de $3c$ coordenadas generalizadas que podem ser agrupadas no seguinte vetor:

$$\mathbf{q} = [R_1^1 \quad R_2^1 \quad \theta^1 \quad R_1^2 \quad R_2^2 \quad \theta^2 \quad \dots \quad R_1^n \quad R_2^n \quad \theta^n]^T \quad (9a)$$

ou, genericamente:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T, \quad n=3c \quad (9b)$$

Contudo, o movimento de cada corpo pode ser restringido pela presença de juntas que ligam os componentes entre si ou ao sistema de referência fixo (solo). Há também a possibilidade de que alguns pontos do sistema sejam forçados a seguir trajetórias previamente estabelecidas. Deste fato resulta que as coordenadas generalizadas podem não ser todas independentes, estando relacionadas por um número r de chamadas *equações de restrição*. Se estas equações puderem ser escritas sob a forma de equações algébricas (geralmente não lineares) da forma:

$$\begin{cases} C_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \\ C_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \\ \vdots \\ C_r(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \end{cases},$$

ou, em notação vetorial:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (10)$$

tais restrições são ditas *holonômicas*. Caso contrário, são chamadas *não holonômicas*. (Shabana, 1998).

O *número de graus de liberdade* de um sistema de multicorpos é definido como sendo o número de coordenadas generalizadas independentes. Para um sistema formado por n corpos componentes, sujeito a r equações de restrição, o número de graus de liberdade é dado pela expressão:

$$N = n - r \quad (11)$$

Sob o ponto de vista físico, a existência de restrições implica o aparecimento dos chamados *esforços de restrição* (forças ou momentos), atuando segundo as coordenadas restringidas (lineares ou angulares, respectivamente).

4. EQUAÇÕES DE LAGRANGE - MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

No contexto da Mecânica Lagrangeana, as equações diferenciais do movimento de sistemas mecânicos podem ser obtidas, empregando-se as *Equações de Lagrange*. Considerando inicialmente os sistemas mecânicos descritos por n coordenadas generalizadas *sem restrições*, estas equações são obtidas do Princípio do Trabalho Virtual admitindo-se que os deslocamentos virtuais dados às coordenadas generalizadas sejam arbitrários e independentes. Neste caso, as Equações de Lagrange apresentam-se sob a forma (Meriam, 1976):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (12)$$

onde T designa a energia cinética do sistema e $\mathbf{Q} = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_n]^T$ é o vetor das chamadas *forças generalizadas*.

Consideremos agora o caso de sistemas mecânicos sujeitos a restrições cinemáticas. Conforme visto na seção precedente, as restrições cinemáticas estabelecem relações de dependência entre as coordenadas. Este fato implica que as Eqs. (12) não podem ser empregadas, devendo ser modificadas para levar em conta a dependência entre as coordenadas. Um dos procedimentos mais frequentemente utilizados é aquele baseado nos *multiplicadores de Lagrange*. Pode-se demonstrar (a demonstração foge do escopo deste trabalho) que as equações do movimento podem ser obtidas em termos do conjunto completo de n coordenadas, levando-se em conta a dependência existente entre elas, mediante o emprego de Equações de Lagrange modificadas, expressas sob a forma (Shabana, 1998):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right) + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}, \quad (13)$$

onde $(\mathbf{C}_q)_{r \times n} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}}$ é a chamada *matriz Jacobiana das restrições* e $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_r]^T$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

A Eq. (13) representa um conjunto de n equações diferenciais que, juntamente com as r equações de restrição (10), podem ser resolvidas para obtenção das n coordenadas generalizadas e dos r multiplicadores de Lagrange.

Comparando as Eqs. (12) e (13), podemos observar que o termo $\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}$ desempenha o papel de forças generalizadas devidas à existência de restrições cinemáticas. Este termo representa, portanto, os esforços de restrição, que atuam segundo as coordenadas restringidas.

5. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Para obter as equações diferenciais do movimento a partir das Equações de Lagrange, formulemos a energia cinética do sistema de multicorpos. Para o i -ésimo corpo componente, tal energia se escreve:

$$T^i = \frac{1}{2} \int_{V^i} \rho^i (\dot{\mathbf{r}}^i)^T \dot{\mathbf{r}}^i dV^i \quad (14)$$

onde ρ^i e V^i são, respectivamente, a densidade volumétrica e o volume e $\dot{\mathbf{r}}^i$ representa a velocidade, em relação ao sistema de referência fixo, de um ponto genérico do i -ésimo componente.

Introduzindo (10) em (14), escrevemos:

$$T^i = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\theta}^i \end{pmatrix}^T \right] \left\{ \int_{V^i} \rho^i \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{T}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}^i \\ (\bar{\mathbf{u}}^i)^T (\mathbf{T}_\theta^i)^T & (\bar{\mathbf{u}}^i)^T (\mathbf{T}_\theta^i)^T \mathbf{T}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}^i \end{array} \right] dV^i \right\} \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\theta}^i \end{pmatrix} \right],$$

ou ainda:

$$T^i = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^T \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i, \quad (15)$$

onde: $\mathbf{q}_r^i = \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\theta}^i \end{pmatrix}^T \right]^T$ é o vetor das velocidades generalizadas e \mathbf{M}^i é dita *matriz de massa* do i -ésimo componente, sendo dada por:

$$\mathbf{M}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{RR}^i & \mathbf{M}_{R\theta}^i \\ \text{simét.} & \mathbf{M}_{\theta\theta}^i \end{bmatrix},$$

com:

$$\mathbf{M}_{RR}^i = \int_{V^i} \rho^i dV^i \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{M}_{R\theta}^i = \mathbf{T}_\theta^i \int_{V^i} \rho^i \bar{\mathbf{u}} dV^i$$

$$\mathbf{M}_{\theta\theta}^i = \int_{V^i} \rho^i \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{u}} dV^i$$

Desenvolvendo as equações acima em termos das componentes do vetor $\bar{\mathbf{u}}^i$ definidas na Eq. (1), obtemos:

$$\bullet \mathbf{M}_{RR}^i = \begin{bmatrix} m^i & 0 \\ 0 & m^i \end{bmatrix}, \quad (16)$$

onde m^i é a massa do corpo, e:

$$\bullet \mathbf{M}_{R\theta}^i = \mathbf{T}_\theta^i \int_{V^i} \rho^i \bar{\mathbf{u}} dV^i = \mathbf{T}_\theta^i \bar{\mathbf{s}}^i, \quad (17)$$

$$\text{com: } \bar{\mathbf{s}}^i = \begin{bmatrix} \int_{V^i} \rho^i \bar{u}_1^i dV^i \\ \int_{V^i} \rho^i \bar{u}_2^i dV^i \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{M}_{\theta\theta}^i = \int_{V^i} \rho^i \left[(\bar{u}_1^i)^2 + (\bar{u}_2^i)^2 \right] dV^i \quad (18)$$

A energia cinética do sistema de multicorpos é dada pela soma das energias cinéticas dos c corpos componentes, ou seja:

$$T = \sum_{i=1}^c \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^T \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i \quad (19)$$

Definindo o vetor das coordenadas generalizadas do sistema de multicorpos como sendo:

$$\mathbf{q}_{(3c \times 1)} = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_c^T]^T, \quad (20)$$

a Eq. (19) pode ser reescrita sob a forma:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad (21)$$

onde $\mathbf{M} \in R^{3c \times 3c}$ é a matriz de massa do sistema de multicorpos, que tem a seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & & & \\ & \mathbf{M}^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{M}^c \end{bmatrix} \quad (22)$$

Tendo determinado a energia cinética do sistema de multicorpos, expressamos o trabalho virtual das forças externas aplicadas ao sistema sob a forma:

$$\delta W_e = \mathbf{Q}_e^T \delta \mathbf{q} \quad (23)$$

Da equação acima obtemos a expressão dos esforços generalizados \mathbf{Q}_e .

Admitindo a existência de equações de restrição relacionando as coordenadas generalizadas do sistema de multicorpos, introduzimos as expressões de T , dada por (21) e de \mathbf{Q}_e , extraído de (23) na Eq. (13), obtendo:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \lambda = \mathbf{Q}_e, \quad (24)$$

As equações diferenciais (24) e as equações algébricas de restrição (10) devem ser resolvidas simultaneamente. Sendo as equações de restrição geralmente não lineares, na maioria das vezes não é possível obter soluções analíticas em forma fechada, recorrendo-se, neste caso, a procedimentos numéricos de resolução aproximada. Para tanto, calcula-se a derivada segunda das equações de restrição (10) em relação ao tempo, o que conduz à seguinte expressão:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q} \partial t} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (25)$$

Podemos então combinar as equações (24) e (25) na seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_e \\ \mathbf{Q}_r \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

onde:

$$\mathbf{Q}_r = - \left[\frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial t} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (27)$$

A Eq. (26) constitui um sistema de equações algébricas lineares que pode ser resolvido para as acelerações $\ddot{\mathbf{q}}$ e os multiplicadores de Lagrange λ . Dado então um conjunto de condições iniciais $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$, utilizando um procedimento recursivo, o vetor aceleração pode ser integrado numericamente para obter as velocidades e as coordenadas generalizadas em instantes de tempo futuros $(\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots)$.

6. RESOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

No processo de resolução numérica do sistema (26), busca-se obter os valores das coordenadas generalizadas \mathbf{q} e de suas derivadas temporais $\dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$, além do vetor de multiplicadores de Lagrange em valores discretos de tempo. Para um dado instante, designado genericamente pelo superscrito $^{(i)}$, o procedimento de resolução segue duas etapas:

1ª etapa: determinam-se os vetores das acelerações e dos multiplicadores de Lagrange resolvendo o sistema de equações (26):

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^{(i)} \\ \lambda^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & (\mathbf{C}_q^T)^{(i)} \\ (\mathbf{C}_q)^{(i)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_e^{(i)} \\ \mathbf{Q}_r^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

2ª etapa: a partir dos vetores $\ddot{\mathbf{q}}^{(i)}$ e $\lambda^{(i)}$ integra-se numericamente o primeiro conjunto de equações em (26) para determinar os vetores das velocidades $\dot{\mathbf{q}}^{(i)}$ e deslocamentos $\mathbf{q}^{(i)}$. Diversos métodos de integração requerem que tais equações sejam expressas sob a forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, o que pode ser feito escrevendo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^{(i)} \\ \ddot{\mathbf{q}}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{(i)} \\ \dot{\mathbf{q}}^{(i)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} [(\mathbf{Q}_e)^{(i)} - (\mathbf{C}_q^T)^{(i)} \lambda^{(i)}] \end{Bmatrix} \quad (29)$$

A Eq. (29) pode ser escrita na forma:

$$\dot{\mathbf{Y}}^{(i)} = \mathbf{B} \mathbf{Y}^{(i)} + \boldsymbol{\gamma}^{(i)}, \quad (30)$$

onde: $\mathbf{Y}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{(i)} \\ \dot{\mathbf{q}}^{(i)} \end{Bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{\gamma}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} [(\mathbf{Q}_e)^{(i)} - (\mathbf{C}_q^T)^{(i)} \lambda^{(i)}] \end{Bmatrix}$

Dentre as numerosas variantes de métodos de integração numérica, alguns dos mais utilizados são aqueles da família Runge-Kutta, sendo o método de quarta ordem um dos mais usados. Os fundamentos deste método, que será empregado no exemplo a ser apresentado, podem ser encontrados em (Carnahan, 1969).

7. APLICAÇÃO NUMÉRICA

7.1. Mecanismo Biela-Cursor-Manivela

Nesta seção apresenta-se, como exemplo, o mecanismo biela-cursor-manivela mostrado na Fig. 2. Trata-se de um tipo de mecanismo encontrado em numerosos sistemas mecânicos, tais como motores de combustão interna e máquinas ferramentas (Shigley & Uicker Jr., 1980).

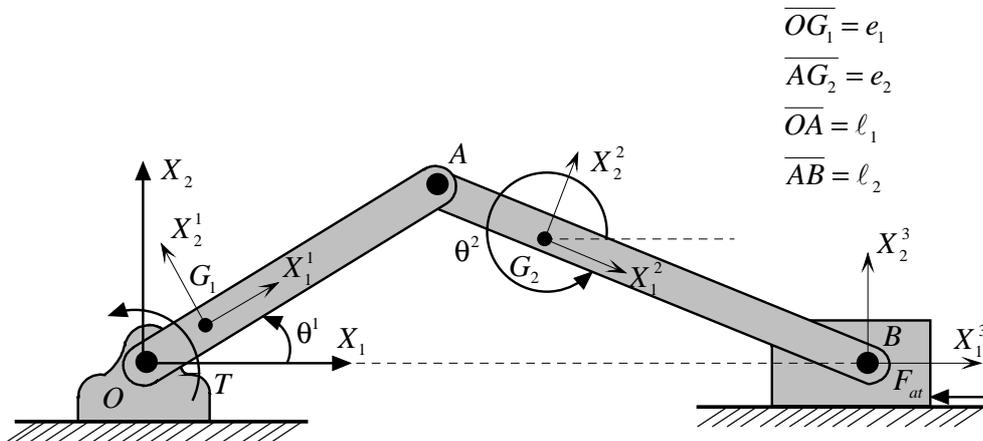


Figura 2 – Mecanismo biela-cursor-manivela

Os corpos do sistema serão identificados como segue: corpo 1: manivela; corpo 2: biela; corpo 3: cursor. Quatro sistemas de coordenadas são utilizados: um sistema global (fixo) OX_1X_2 situado na extremidade da manivela e três sistemas locais associados a cada corpo do mecanismo: $G_1X_1^1X_2^1$, com origem no centro de massa da manivela G_1 ; $G_2X_1^2X_2^2$, com origem no centro de massa da biela G_2 e $BX_1^3X_2^3$, com origem no centro de massa do cursor.

São escolhidas as seguintes *coordenadas generalizadas*:

$$\mathbf{q} = [R_1^1 \quad R_2^1 \quad \theta^1 \quad R_1^2 \quad R_2^2 \quad \theta^2 \quad R_1^3 \quad R_2^3]^T, \quad (31)$$

onde R_1^i e R_2^i ($i = 1, \dots, 3$) designam, respectivamente, a componente horizontal e a componente vertical do vetor posição do centro de massa do i -ésimo corpo, em relação ao sistema de referência global, e θ^i ($i = 1, 2$) indica a orientação angular do i -ésimo corpo. Observe-se que uma vez que o cursor descreve movimento de translação, será negligenciada a coordenada de rotação a ele associada.

Admite-se que o mecanismo seja acionado por um torque constante $T = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$ aplicado à manivela e que o cursor receba a ação de uma força de atrito, na direção horizontal, resultante de sua interação com o plano fixo sobre o qual desliza.

Os valores das propriedades físicas e geométricas dos componentes do mecanismo são:

- $m_1 = 0,0340 \text{ kg}$: massa da manivela;
- $m_2 = 0,1360 \text{ kg}$: massa da biela;
- $m_3 = 0,907 \text{ kg}$: massa do cursor;
- $J_{G_1} = 0,01830 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$: momento de inércia baricêntrico da manivela;
- $J_{G_2} = 0,01065 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$: momento de inércia baricêntrico da biela;
- $\ell_1 = 0,0508 \text{ m}$: comprimento da manivela;
- $\ell_2 = 0,2032 \text{ m}$: comprimento da biela;

- $e_1 = 0,0101 m$: posição do centro de massa da manivela;
- $e_2 = 0,0407 m$: posição do centro de massa da biela.
- $\mu_c = 0,10$: coeficiente de atrito cinético entre o cursor e o plano horizontal.

7.2 Matriz de Massa

A matriz de massa do sistema, obtida a partir de (25), é dada por:

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{m_1 \quad m_1 \quad J_{G1} \quad m_2 \quad m_2 \quad J_{G2} \quad m_3 \quad m_3\} \quad (32)$$

7.3 Equações de Restrição

Para o sistema em questão, as restrições cinemáticas são as seguintes:

- **1ª restrição:** posição absoluta do ponto O é invariável com o tempo:

$$\mathbf{R}^1 - \mathbf{T}^1 \bar{\mathbf{u}}_0^1 = \mathbf{0},$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_0^1 = [-e_1 \quad 0]^T$ é o vetor posição do ponto O em relação ao sistema $G_1 X_1^1 X_2^1$.

Desenvolvendo:

$$\begin{Bmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \theta^1 & -\text{sen } \theta^1 \\ \text{sen } \theta^1 & \cos \theta^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -e_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R_1^1 = e_1 \cos \theta^1 \\ R_2^1 = e_1 \text{sen } \theta^1 \end{cases} \quad (33)$$

- **2ª restrição:** posição absoluta do ponto A :

$$\mathbf{R}^1 + \mathbf{T}^1 \bar{\mathbf{u}}_A^1 = \mathbf{R}^2 - \mathbf{T}^2 \bar{\mathbf{u}}_A^2,$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_A^1 = [\ell_1 - e_1 \quad 0]^T$ e $\bar{\mathbf{u}}_A^2 = [-e_2 \quad 0]^T$ são os vetores posição do ponto A em relação aos sistemas $G_1 X_1^1 X_2^1$ e $G_2 X_1^2 X_2^2$, respectivamente.

Desenvolvendo:

$$\begin{Bmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta^1 & -\text{sen } \theta^1 \\ \text{sen } \theta^1 & \cos \theta^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ell_1 - e_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^2 \\ R_2^2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \theta^2 & -\text{sen } \theta^2 \\ \text{sen } \theta^2 & \cos \theta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -e_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1^1 + (\ell_1 - e_1) \cos \theta^1 = R_1^2 - e_2 \cos \theta^2 \\ R_2^1 + (\ell_1 - e_1) \text{sen } \theta^1 = R_2^2 - e_2 \text{sen } \theta^2 \end{cases} \quad (34)$$

- **3ª restrição:** posição absoluta do ponto B :

$$\mathbf{R}^2 + \mathbf{T}^2 \bar{\mathbf{u}}_B^2 = \mathbf{R}^3 + \mathbf{T}^3 \bar{\mathbf{u}}_B^3,$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_B^2 = [\ell_2 - e_2 \quad 0]^T$ e $\bar{\mathbf{u}}_B^3 = [0 \quad 0]^T$ são os vetores posição do ponto B em relação aos sistemas $G_2 X_1^2 X_2^2$ e $BX_1^3 X_2^3$, respectivamente.

Desenvolvendo:

$$\begin{Bmatrix} R_1^2 \\ R_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta^2 & -\text{sen } \theta^2 \\ \text{sen } \theta^2 & \cos \theta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ell_2 - e_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^3 \\ R_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta^3 & -\text{sen } \theta^3 \\ \text{sen } \theta^3 & \cos \theta^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1^2 + (\ell_2 - e_2) \cos \theta^2 = R_1^3 \\ R_2^2 + (\ell_2 - e_2) \text{sen } \theta^2 = R_2^3 \end{cases} \quad (35)$$

- **4ª restrição:** posição absoluta do ponto B:

Admitindo que os pontos O e B estejam posicionados sobre uma mesma linha vertical, devemos ter:

$$R_2^3 = 0 \quad (36)$$

Observamos que o sistema possui $n=8$ coordenadas generalizadas e está sujeito a $c = 7$ equações de restrição. Assim, de acordo com a equação (11) o sistema tem $N = 1$ grau de liberdade.

O vetor das equações de restrição, expresso por (10), pode ser obtido agrupando as equações (33) a (36), apresentando-se sob a forma:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \left\{ \begin{array}{c} R_1^1 - e_1 \cos \theta^1 \\ R_2^1 - e_1 \sin \theta^1 \\ R_1^2 - R_1^1 - (\ell_1 - e_1) \cos \theta^1 - e_2 \cos \theta^2 \\ R_2^2 - R_2^1 - (\ell_1 - e_1) \sin \theta^1 - e_2 \sin \theta^2 \\ R_1^3 - R_1^2 - (\ell_2 - e_2) \cos \theta^2 \\ R_2^3 - R_2^2 - (\ell_2 - e_2) \sin \theta^2 \\ R_2^3 \end{array} \right\} \quad (37)$$

A matriz jacobiana das restrições toma a forma:

$$\mathbf{C}_q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e_1 \sin \theta^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e_1 \cos \theta^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (\ell_1 - e_1) \sin \theta^1 & 1 & 0 & e_2 \sin \theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -(\ell_1 - e_1) \cos \theta^1 & 0 & 1 & -e_2 \cos \theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & (\ell_2 - e_2) \sin \theta^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -(\ell_2 - e_2) \cos \theta^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Detalharemos agora a construção do vetor \mathbf{Q}_r , dado por (27). De acordo com (38), \mathbf{C}_q não depende explicitamente do tempo. Em consequência, os vetores $\frac{d\mathbf{C}_q}{dt}$ e $\frac{d^2\mathbf{C}}{dt^2}$ resultam nulos e (27) assume a forma simplificada:

$$\mathbf{Q}_r = -(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} \quad (39a)$$

É apresentada, nas equações seguinte, a expressão final de (39a):

$$\mathbf{Q}_r = \left\{ \begin{array}{c} -e_1(\dot{\theta}^1)^2 \cos \theta^1 \\ -e_1(\dot{\theta}^1)^2 \sin \theta^1 \\ -(\ell_1 - e_1)(\dot{\theta}^1)^2 \cos \theta^1 - e_2(\dot{\theta}^2)^2 \cos \theta^2 \\ -(\ell_1 - e_1)(\dot{\theta}^1)^2 \sin \theta^1 - e_2(\dot{\theta}^2)^2 \sin \theta^2 \\ -(\ell_2 - e_2)(\dot{\theta}^2)^2 \cos \theta^2 \\ -(\ell_2 - e_2)(\dot{\theta}^2)^2 \sin \theta^2 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (39b)$$

7.4 Vetor de Esforços Externos

Negligenciando a ação gravitacional, os esforços externos que atuam no sistema são o torque constante $T = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$, aplicado na manivela e a força de atrito exercida pelo plano horizontal sobre o cursor, força esta dada por:

$$F_{at} = -\mu_c \cdot N^3 \cdot \text{sgn}(\dot{R}_1^3), \quad (40)$$

onde sgn é a função que fornece o sinal algébrico de seu argumento, μ_c é o coeficiente de atrito cinético e N^3 é a força normal de contato entre as duas superfícies.

Observando que estes dois esforços atuam segundo as coordenadas θ^1 e R_1^3 , respectivamente, o vetor dos esforços externos generalizados é escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}_e = [0 \ 0 \ T \ 0 \ 0 \ 0 \ F_{at} \ 0]^T \quad (41)$$

7.5 Equações do Movimento

As equações do movimento do sistema são dadas por (26), repetida abaixo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_e \\ \mathbf{Q}_r \end{Bmatrix}, \quad (42)$$

onde:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5 \ \lambda_6 \ \lambda_7]^T \quad (43)$$

Empregando as equações anteriores e desenvolvendo o primeiro grupo de equações em (42), obtém-se as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases}
m_1 \ddot{R}_1^1 = -\lambda_1 + \lambda_3 \\
m_1 \ddot{R}_2^1 = -\lambda_2 + \lambda_4 \\
J_{G_1} \ddot{\theta}^1 = T - \lambda_1 e_1 \sin \theta^1 + \lambda_2 e_1 \cos \theta^1 - \lambda_3 (\ell_1 - e_1) \sin \theta^1 + \lambda_4 (\ell_1 - e_1) \cos \theta^1 \\
m_2 \ddot{R}_1^2 = -\lambda_3 + \lambda_5 \\
m_2 \ddot{R}_2^2 = -\lambda_4 + \lambda_6 \\
J_{G_2} \ddot{\theta}^2 = -\lambda_3 e_2 \sin \theta^2 + \lambda_4 e_2 \cos \theta^2 - \lambda_5 (\ell_2 - e_2) \sin \theta^2 + \lambda_6 (\ell_2 - e_2) \cos \theta^2 \\
m_3 \ddot{R}_1^3 = F_{at} - \lambda_5 \\
m_3 \ddot{R}_2^3 = -\lambda_6 - \lambda_7
\end{cases} \quad (44)$$

Com base nos diagramas de corpo livre dos corpos componentes do mecanismo, mostrados na Fig. 3, conclui-se que cada um dos três grupos de equações (44) resulta da aplicação, a cada corpo que compõe o sistema, das chamadas *equações de Newton-Euler* que, para problemas bidimensionais, assumem as formas (Beer & Johnston, 1996):

$$\begin{cases}
\sum F_x = m a_x \\
\sum F_y = m a_y \\
\sum M_G = J_G \alpha
\end{cases} \quad (45)$$

onde $\sum F_x$, $\sum F_y$ e $\sum M_G$ designam, respectivamente, as resultantes das forças externas nas direções x e y e o momento resultante das forças externas em relação ao eixo baricêntrico perpendicular ao plano do movimento e a_x , a_y e α designam as componentes da aceleração do centro de massa nas direções x e y e a aceleração angular do corpo, respectivamente.

Ainda com base na interpretação das equações (45), conclui-se que os multiplicadores de Lagrange representam as forças de restrição aplicadas nas juntas do mecanismo, conforme ilustrado na Fig. 3. Em particular, nota-se que a força normal de contato entre o cursor e o plano horizontal, que intervém no cálculo da força de atrito em (40) identifica-se com o multiplicador de Lagrange λ_7 .

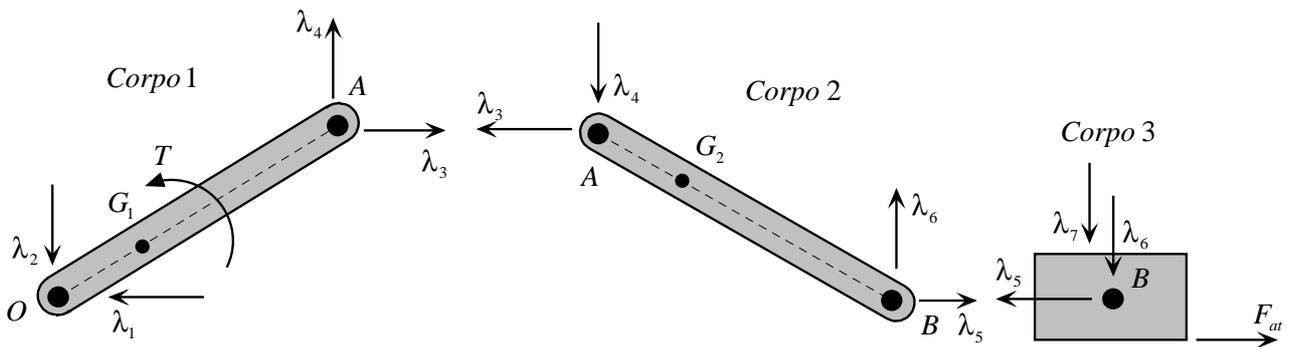


Figura 3 – Diagramas de corpo livre dos componentes do mecanismo biela-cursor-manivela

7.6 Resultados de Simulação Computacional

Admitindo que o mecanismo parta da configuração inicial com velocidade nula, com a biela e a manivela alinhadas na direção horizontal, o vetor das condições iniciais \mathbf{Y}_0 é dado por:

$$\mathbf{Y}_0 = [\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [e_1 \ 0 \ 0 \ (\ell_1 + e_2) \ 0 \ 0 \ (\ell_1 + \ell_2) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

As equações do movimento foram resolvidas empregando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, no intervalo $[0 - 0,5 \text{ s}]$, com $\Delta t = 2,5 \times 10^{-4} \text{ s}$ (2000 pontos de integração). Alguns dos resultados obtidos são apresentados graficamente nas figuras seguintes, correspondendo às componentes de movimento do cursor (posição, velocidade e aceleração) e das forças de restrição:

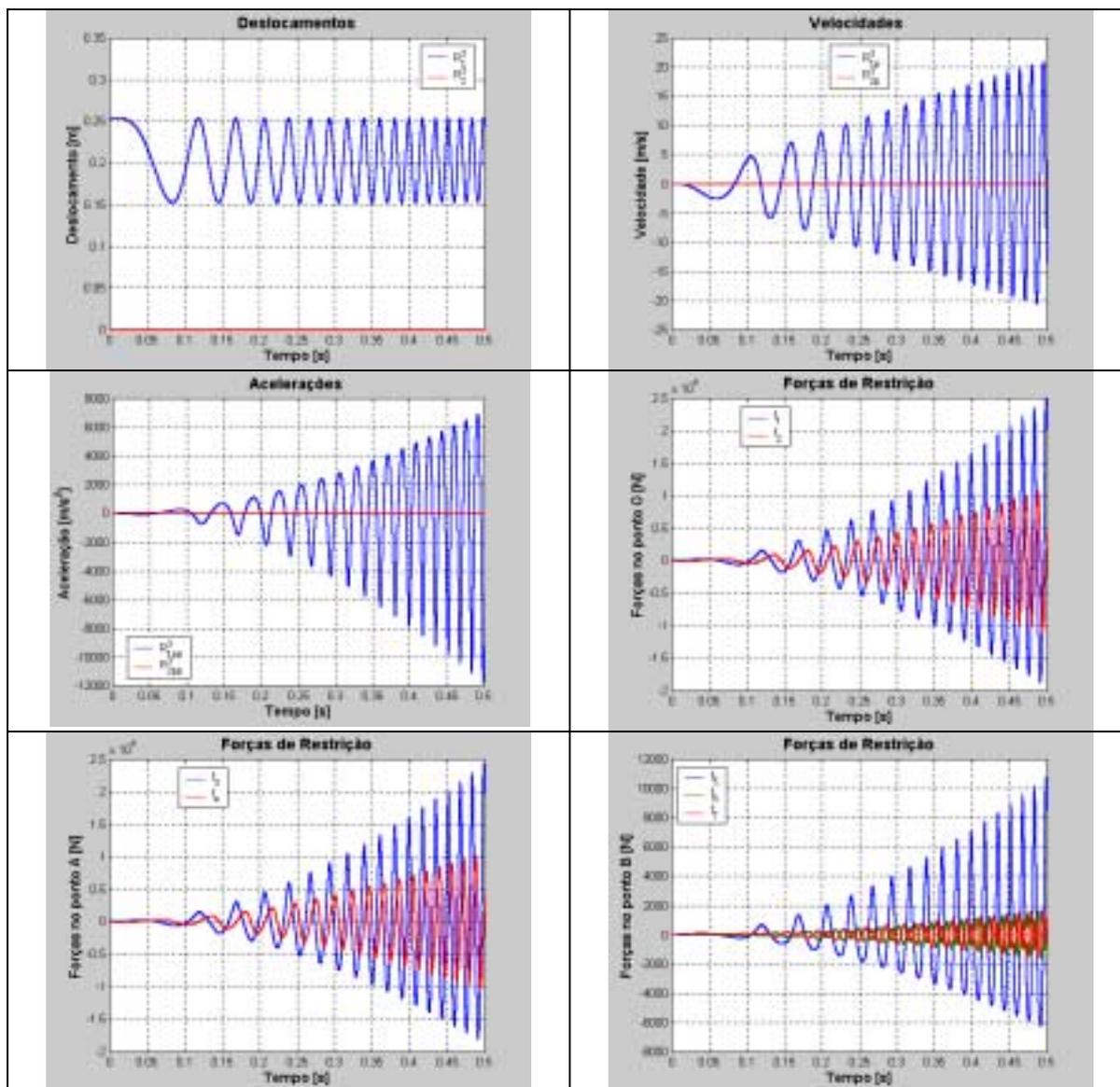


Figura 4 – Comp. de deslocamento, velocidade e aceleração do cursor e das forças de restrição

8. CONCLUSÕES

Foi desenvolvida a formulação lagrangeana para a modelagem de sistemas de multicorpos rígidos bidimensionais, sujeitos a restrições cinemáticas, sendo obtidas as equações algébrico-diferenciais do movimento. No desenvolvimento, buscou-se explicitar a natureza dos sistemas de referência e das coordenadas generalizadas empregadas para representar a posição instantânea dos corpos que compõem o sistema. Foi dada ênfase à interpretação física das grandezas envolvidas e ao significado das equações, objetivando reduzir a abstração da formulação. O procedimento de modelagem foi ilustrado com auxílio de um sistema biela-cursor-manivela, para o qual foram apresentados os resultados de simulação computacional. Observa-se que, dada a facilidade que oferece para a generalização, a abordagem lagrangeana revela-se bastante conveniente para a análise dinâmica de sistemas multicorpos mais complexos, tais como aqueles envolvendo sistemas tridimensionais e a flexibilidade dos elementos.

9. REFERÊNCIAS

- Bauchau, O.A.**, 1998, “Computational Schemes for Flexible, Nonlinear Multi-Body Systems”, *Multibody System Dynamics*, Vol. 2, pp. 169-225.
- Beer, F. and Johnston Jr., E. R.**, 1996, “Mecânica Vetorial para Engenheiros – Dinâmica”, 5ª Edição, Makron Books, Rio de Janeiro.
- Carnahan, B.**, 1969, “Applied Numerical Methods”, John Wiley & Sons, New York.
- Damilano, J.G.**, 1993, “Finite Element Method for Nonlinear Elastic Constrained Multibody Systems”, Ph.D. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute Troy, New York.
- Mabie, H.H. and Ocvirk, F.W.**, 1967, “Mecanismos e Dinâmica das Máquinas”, LTU, Rio de Janeiro, Brasil.
- Meriam, J.L.**, 1976, “Dinâmica”, LTC, Rio de Janeiro.
- Santos, I.F.**, 2001, “Dinâmica de Sistemas Mecânicos – Modelagem, Simulação, Visualização e Verificação”, Makron Books.
- Shabana, A.A.**, 1998, “Dynamic of Multibody Systems”, Cambridge University Press, New York
- Shigley, J.E. and Uicker Jr., J.J.**, 1980, “Theory of Machines and Mechanisms”, McGraw-Hill Books, New York.

10. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material incluído no seu trabalho.

11. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pela bolsa concedida a C.M. Vaz no âmbito do programa PICDT, ao CNPq pela bolsa de produtividade em pesquisa concedida a D.A. Rade e pelo financiamento de projeto de pesquisa (Processo nº 461465/00-0), e à FAPEMIG pela bolsa de iniciação científica atribuída a E.L. Albuquerque.

A LAGRANGEAN APPROACH APPLIED TO MULTIBODY SYSTEMS.

Cleves Mesquita Vaz, Domingos Alves Rade, Elson Lima de Albuquerque

Federal University of Uberlândia

School of Mechanical Engineering

Caixa Postal 593 – CEP 38400-902 - Uberlândia – MG - Brazil

mesquitav@mecanica.ufu.br, domingos@ufu.br, elsonlima@rocketmail.com

Abstract. *The dynamics of multibody systems constitutes one of the relevant topics of undergraduate and graduate programs in Mechanical Engineering. The aim of this paper is to present in detail an approach to the dynamics of two-dimensional multibody systems, with emphasis placed on the procedures for numerical modeling and computational simulation. In this sense, one attempts to clarify the fundamental role of coordinate systems, the meaning of linear and angular coordinates employed to characterize the positions of the bodies that form the system and the meaning of the constraint equations and associated Lagrange Multipliers.. In the second part, presented in a companion paper, numerical procedures for solving the equations of motion are discussed. A slider-crank mechanism is presented as an example, being used to illustrate the various phases of the methodology, including the detailed development of the equations of motion and presentation of computer simulation results. Using a slider-crank mechanism as an example, the equations of motion are developed in detail. Then those equations are solved numerically using the fourth-order Runge-Kutta method. The results are presented.*

Keywords: *Multibody Systems, Mechanisms, Dynamic Analysis, Algebraic-Differential Equations.*