



MODELAGEM MATEMÁTICA E PROJETO DE CONTROLE DE SISTEMAS MECÂNICOS - O PÊNDULO INVERTIDO

Rodrigo Costa de Oliveira
Roberto Firmento de Noronha
José Andrés Santisteban Larrea
Leonardo Tadeu Garcia Lima

Laboratório de Automação e Robótica, PGMEC, Universidade Federal Fluminense
rua Passo da Pátria 156, Niterói/RJ

rodrigoengenharia@hotmail.com; rnoronha@mec.uff.br; jasl@mec.uff.br; leonardo.lima@ieee.org

Resumo. *Os avanços tecnológicos ocorridos nos últimos anos colocam novos desafios e oportunidades aos engenheiros, requerendo o domínio de um conhecimento interdisciplinar em áreas tais como atuadores, sensores e controle de movimento, levando ao desenvolvimento do conceito da mecatrônica, a qual tenta unir o conhecimento requerido nessas aplicações. Nesse sentido, disciplinas de teoria de controle bem como de eletrônica têm se tornado bastante comuns no currículo do atual engenheiro mecânico e termos como lugar das raízes, controle PID e diagramas de Bode começam a integrar o vocabulário deste. Com o objetivo de abordar de uma maneira bastante prática essa gama de conhecimentos necessários ao moderno engenheiro mecânico, o trabalho em questão mostra passo a passo o que deve ser feito para alcançar-se o equilíbrio de um sistema instável, utilizando para tanto um protótipo do pêndulo invertido. Este consiste em um carrinho que anda sobre trilhos, tendo uma haste com um peso em sua extremidade, anexada a ele através de uma rótula. Um motor acionador através de um sistema de polias move o carrinho na horizontal. Este sistema pode ser estabilizado controlando-se o torque no motor acionador. Este artigo apresenta a modelagem matemática bem como o procedimento de projeto e implementação física do controle em malha fechada a ser utilizado no protótipo sendo desenvolvido na UFF.*

Palavras-chave: *modelagem matemática, lugar das raízes, controle de sistemas mecânicos, pêndulo invertido.*

1. INTRODUÇÃO:

No Brasil, nos últimos anos, tem havido uma crescente incorporação de novos conhecimentos dentro da engenharia mecânica, o que levou ao surgimento de uma importantíssima área dentro desta modalidade de engenharia; a mecatrônica que faz a fusão de conhecimentos antes somente de engenharia elétrica e eletrônica aos já existentes conhecimentos da engenharia mecânica. Com o surgimento desta nova e promissora área torna-se necessário a esse profissional o domínio da teoria de controle e também uma razoável base de eletrônica. Ambos são abordados nesse trabalho de cunho didático mas de grande complexidade, através do projeto de um sistema de controle para um pêndulo invertido.

O pêndulo invertido é um equipamento clássico para o ensino da teoria de controle aplicada a sistemas mecânicos. Consiste em um carrinho ao qual é fixada uma haste que pode se deslocar angularmente à medida que o carrinho se move na horizontal. Tem-se então um sistema de dois graus de liberdade, sendo um o deslocamento do carrinho e o outro o deslocamento angular da haste. Como a haste tende a cair sob influência da gravidade, pode-se dizer que este é um sistema

instável. Entretanto, este sistema pode ser estabilizado aplicando uma força horizontal ao carrinho, fazendo a haste ficar na vertical.

Foi construído um protótipo para o pêndulo invertido, sobre o qual foi realizado todo um estudo e projeto de controle. Este protótipo consiste em um carrinho que se move sobre dois trilhos paralelos entre si. Ao carrinho, através de uma rótula, foi anexada uma haste com um peso em sua extremidade, conforme mostrado na Fig. (1).



Figura 1. Protótipo do pêndulo invertido

O deslocamento horizontal do carrinho será realizado através de um sistema de polias em que uma das polias é acionada pelo motor. Desse modo, a força horizontal que fará o carrinho se deslocar está diretamente relacionada ao torque aplicado pelo motor, que é regulado através de sua tensão de alimentação.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem do pêndulo invertido é encontrada em livros textos de teoria de controle, tais como os de Ogata (1990) e Bélanger (1995).

2.1. Equações Mecânicas para o Sistema

Conforme mostrado na Fig.(2), as coordenadas generalizadas são o deslocamento horizontal do carrinho, x , e o deslocamento angular da haste, θ .

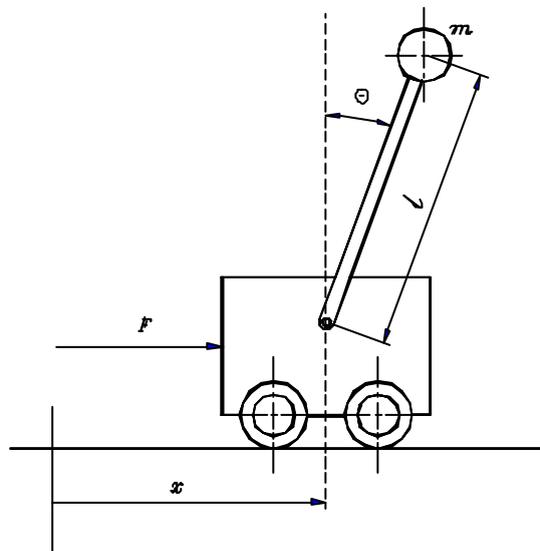


Figura 2. Desenho esquemático com as coordenadas generalizadas

A massa m da extremidade da haste tem duas componentes de posição: uma componente horizontal, expressa por $x_m = x + l \cdot \sin \theta$ e uma componente vertical expressa por $y_m = l \cdot \cos \theta$. Aplicando-se a 2ª Lei de Newton para a massa m da extremidade da haste e para a massa M do carrinho, pode-se obter o conjunto de equações Eq.(1).

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 &= F \\ \ddot{x} \cos \theta + l \ddot{\theta} - g \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

2.2. Equações Elétricas para o Motor Acionador:

Considerando-se uma caixa de redução acoplada ao motor, como mostra a Fig.(3), pode-se obter o conjunto de equações Eq.(2) para o motor acionador.

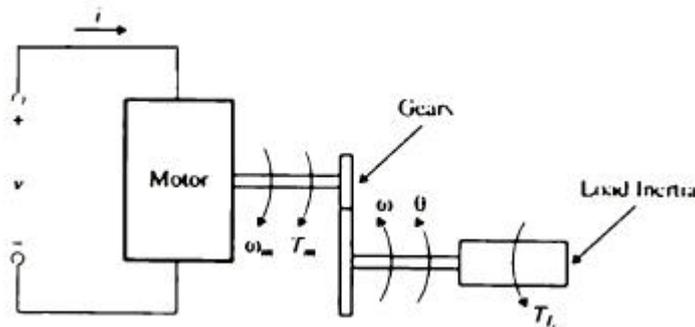


Figura 3. Motor acionador com caixa de redução

$$\begin{aligned} \dot{i} &= -\frac{Ri}{L_a} - \frac{k_e N \dot{\theta}_e}{L_a} + \frac{v}{L_a} \\ \ddot{\theta}_e &= \frac{Nk_t i}{J_e} - \frac{T_l}{J_e} \end{aligned} \quad (2)$$

Onde i - corrente elétrica passando pelo motor
 v - tensão elétrica aplicada ao motor
 k_e - constante de força contra-eletromotriz do motor
 N - razão de redução da caixa
 θ_e - ângulo de rotação do eixo de saída da caixa de redução
 R - resistência do circuito da armadura do motor
 L_a - indutância do circuito da armadura do motor
 k_t - constante de torque do motor
 T_l - torque útil fornecido pelo conjunto motor - caixa de redução
 J_e - momento de inércia polar efetivo em relação ao eixo de saída da caixa.

2.3. Obtenção das Equações de Estado:

As equações (2) e (3) podem ser correlacionadas entre si através das Eqs. (3), onde r é o raio da polia que está fixada ao eixo de saída do motor:

$$\begin{aligned} T_l &= Fr \\ x &= \theta_e \cdot r \end{aligned} \quad (3)$$

Juntando-se as equações (1), (2) e (3) e linearizando-as em torno da posição de equilíbrio pode-se obter as equações de estado para o modelo linear da planta, dadas pela Eq.(4):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-mgr^2}{Mr^2 + J_e} & 0 & 0 & \frac{Nk_t r}{Mr^2 + J_e} \\ 0 & \frac{(Mr^2 + mr^2 + J_e)g}{l(Mr^2 + J_e)} & 0 & 0 & \frac{-Nk_t r}{l(Mr^2 + J_e)} \\ 0 & 0 & \frac{-Nk_e}{L_a r} & 0 & \frac{-R}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} v \quad (4)$$

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + [0]v$$

3. PROJETO DE CONTROLE:

3.1. Seleção do Motor Acionador:

A partir das Eqs.(4), os zeros e pólos do modelo da planta a se controlar foram determinados utilizando as especificações de diferentes tipos de motores descritos no catálogo do fornecedor Pittman Motors (2000). Foi montada uma estratégia de controle baseada na introdução de pólos e zeros como descrita linhas abaixo. Na simulação foi imposta como restrição uma tensão máxima de armadura igual a 24V, tensão disponível no laboratório. Após a realização de diversas simulações com diferentes motores, foi selecionado o GM14904S012 (Pittman Motors, 2001) de 24 V com caixa redutora de 5,9:1, cujos parâmetros são $R = 1,01 \ \Omega$; $L_a = 1,6 \text{ mH}$; $k_t = k_e = 61 \times 10^{-3} \text{ N.m/A}$ (ou V.s/rd) e $J_e = 9,05 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^2$. Com esses parâmetros, a função de transferência da planta, $G_p(s)$, é dada pela Eq. (5), a qual possui cinco pólos (-420; -211; -23; 0; 23) e quatro zeros (-2,73x10⁸; 2,73x10⁸ e dois zeros na origem):

$$G_p(s) = \frac{-9,095 \times 10^{-13} s^4 - 2,328 \times 10^{-10} s^3 + 6,803 \times 10^4 s^2 - 2,235 \times 10^{-7} s}{s^5 + 631,2 s^4 + 8,814 \times 10^4 s^3 - 3,42 \times 10^5 s^2 - 4,804 \times 10^7 s} \quad (5)$$

Para estabilizar o sistema foram adicionados três pólos (dois na origem e um em -1000) e três zeros: -1; -25 para anular o efeito do pólo em -23 da planta e -220 para anular o efeito do pólo em -211 da planta. Foi escolhido um ganho crítico, k_c , de 521, o que fornece um sistema de fase não-mínima com um zero no semiplano direito do plano s. A partir dos pólos e zeros adicionados para estabilizar o sistema e do ganho crítico selecionado, chegou-se à função de transferência para o controlador, $G_c(s)$, dada pela Eq. (6):

$$G_c(s) = \frac{521 \cdot (s + 25)(s + 220)(s + 1)}{s^2(s + 1000)} \quad (6)$$

O lugar das raízes para o sistema em malha fechada é apresentado na Fig. (4).

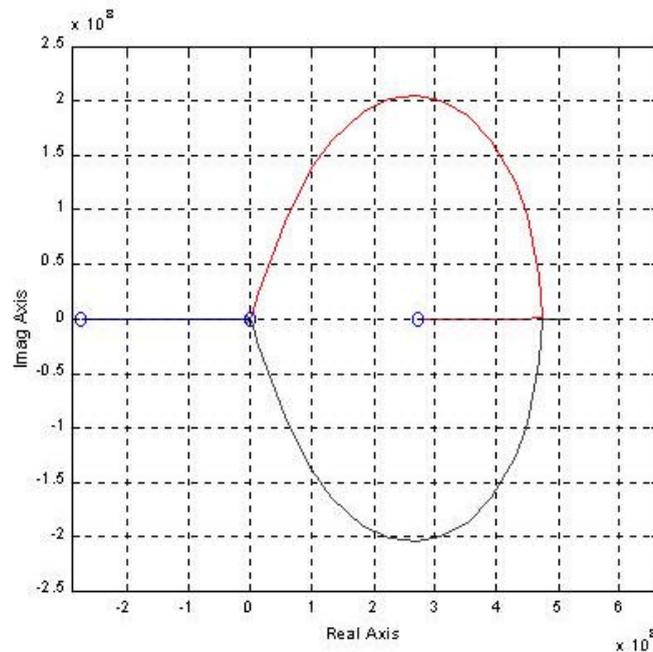


Figura 4. Lugar das raízes do sistema em malha fechada

Com o objetivo de se testar o controlador para uma situação que representasse melhor a realidade, foi realizada uma simulação em SIMULINK (Mathworks, 1997) para o modelo não-linear, dado pelas Eqs. (7):

$$\ddot{x} = \frac{(ml \sin \theta) \dot{\theta}^2 - mg \sin \theta \cos \theta + (Nk_t i / r)}{M + m \sin^2 \theta + (J_e / r^2)}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m + (J_e / r^2))g \sin \theta - (ml \sin \theta \cos \theta) \dot{\theta}^2 - (Nk_t i \cos \theta) / r}{l(M + m \sin^2 \theta + (J_e / r^2))} \quad (7)$$

$$\dot{i} = \frac{-Nk_e}{L_a r} \dot{x} - \frac{R}{L_a} i + \frac{v}{L_a}$$

Utilizando-se um ângulo inicial para o pêndulo de 20° e a malha fechada mostrada na Fig.(5), obteve-se os resultados da simulação quanto a tensão elétrica aplicada e corrente no motor, apresentadas na Fig. (6), e quanto a posição angular da haste e deslocamento do carrinho, estes últimos apresentados na Fig. (7).

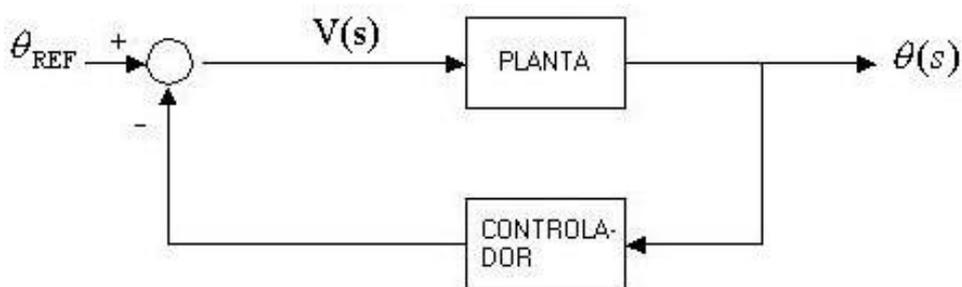


Figura 5. Diagrama de blocos da planta em malha fechada

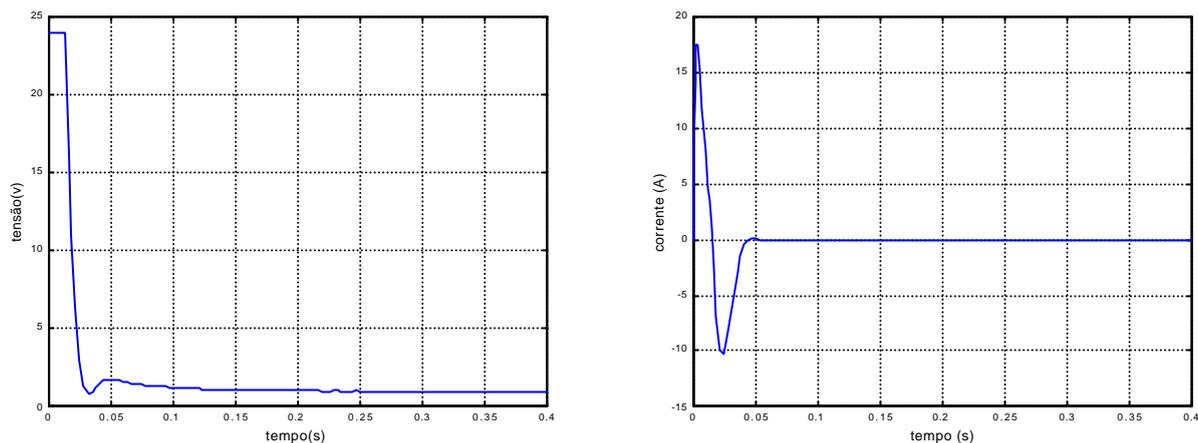


Figura 6. Simulação não-linear – tensão elétrica aplicada e corrente no motor

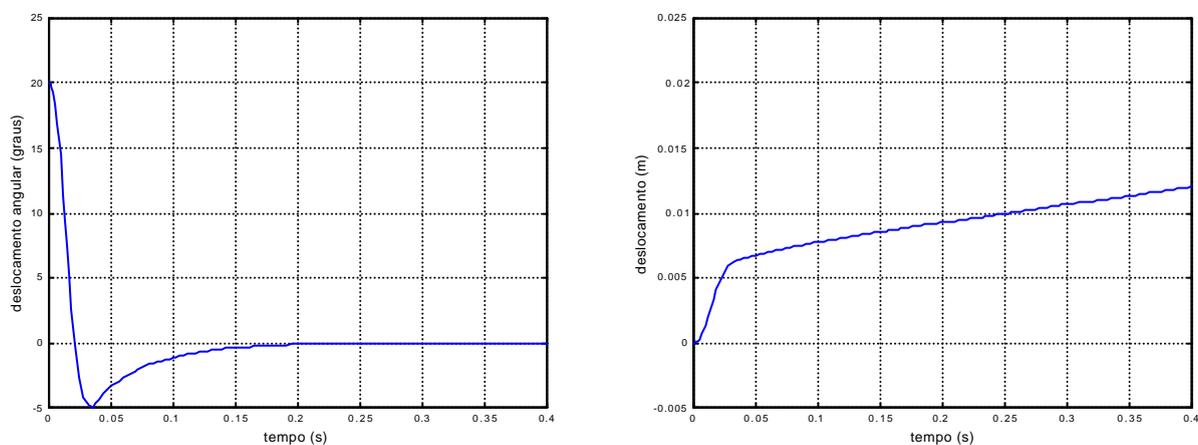


Figura 7. Simulação não-linear – posição angular da haste e deslocamento do carrinho

Analisando-se os gráficos da Fig.(6), pode-se constatar que é possível se estabilizar o pêndulo sem ultrapassar o valor de tensão nominal do motor enquanto que a inversão de corrente mostra que o motor, após acelerar o carrinho, necessita freá-lo. As curvas da Fig. (7), por sua vez, mostram que, apesar do controlador estabilizar a haste em pouco mais de 0,2 segundos, o que implica em um deslocamento do carrinho de menos de 1 cm, o conjunto continua a se movimentar com velocidade uniforme. Ou seja, a partir dos gráficos acima, pode-se concluir que a função de transferência obtida para o controlador na análise linear funciona também para estabilizar a haste na vertical, conforme desejado, no modelo não-linear. Tendo em vista este resultado, decidiu-se partir para a implementação do controlador e verificar, experimentalmente, como se comporta o sistema, tendo em vista que houveram efeitos não modelados, tais como os atritos e arraste do ar sobre a haste.

3.2. Implementação do Controlador:

A função de transferência para o controlador, obtida na etapa anterior, pode ser representada fisicamente através de um circuito baseado em amplificadores operacionais. Como no projeto em questão a tensão do motor será ajustada com o objetivo de fornecer um torque que estabilize o sistema, tem-se que igualando-se a função de transferência do controlador à função de transferência de um circuito eletrônico (relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada do circuito eletrônico) obtém-se a representação física para o controlador. Depois de obtidas as funções de

transferência para vários filtros, foi realizada uma combinação de 4 filtros em série de modo que sua função de transferência fornecesse um número de pólos e zeros igual ao da função de transferência do controlador (três zeros e três pólos, sendo dois zeros na origem). O diagrama deste circuito é apresentado na Fig. (8):

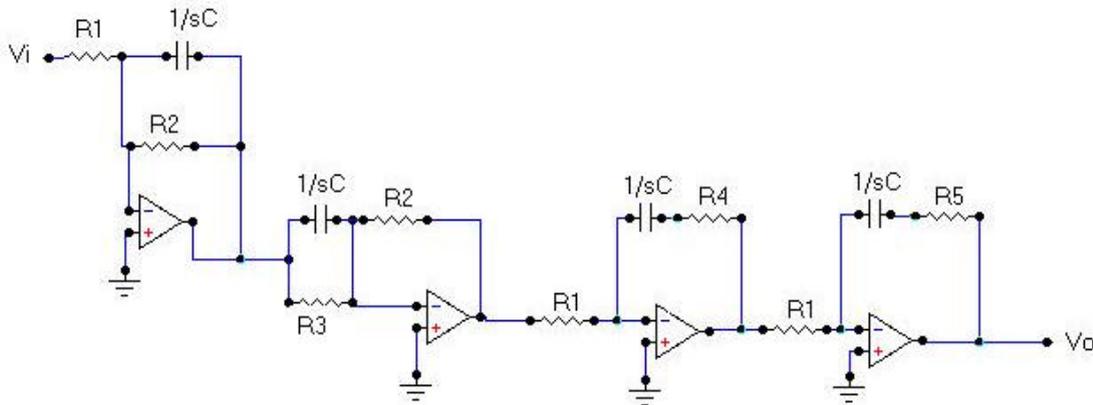


Figura 8. Diagrama do circuito eletrônico do controlador

A função de transferência para o circuito acima é dada pelo produto das funções de transferência dos 4 filtros em cascata. O que fornece a função de transferência dada pela Eq.(8):

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2 \cdot R_3 \cdot (1 + sCR_3) \cdot (1 + sCR_4) \cdot (1 + sCR_5)}{s^2 C^2 R_1^3 R_2 (1 + sCR_2)} \quad (8)$$

Supondo-se capacitores de 0,1 μ F, com o objetivo de se evitar a ionização, e igualando-se as Eqs.(6) e (8), obtêm-se os seguintes valores para as resistências do circuito:

$$\begin{aligned} R_1 &= 240,779 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 10 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 400 \text{ k}\Omega \\ R_4 &= 45,45 \text{ k}\Omega \\ R_5 &= 10 \text{ M}\Omega \end{aligned}$$

Estes valores terão futuramente que ser ajustados para poder compensar o ganho do sensor ótico, o qual será discutido mais adiante.

4. PROJETO DO SENSOR ÓTICO:

Para o sensoriamento da posição da haste, decidiu-se utilizar um sistema ótico composto de um par de foto-transistores, onde um LED funciona como fonte luminosa, cuja intensidade pode ser considerada constante. Pode-se também considerar que a corrente no coletor do foto-transistor será proporcional à intensidade de luz incidente sobre ele. Foram levantadas diversas curvas da área iluminada pelo LED versus deslocamento angular da haste, considerando-se foto-transistores de 5mm de diâmetro, com o objetivo de se decidir qual seria o melhor posicionamento dos mesmos em relação ao eixo de rotação da haste (onde será fixado o anteparo), conforme apresentado na Fig. (9). Nesta figura R é a distância entre o centro dos foto-transistores e o eixo de rotação da haste.

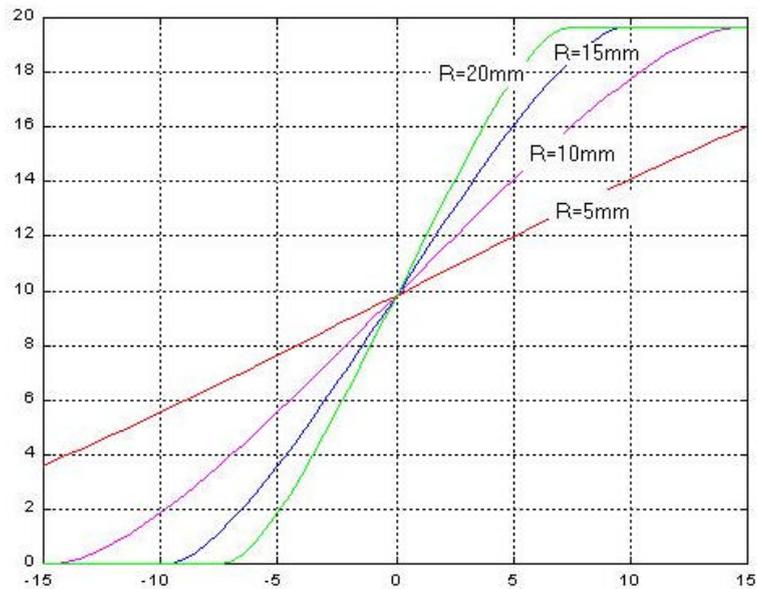


Figura 9. Curvas de área iluminada pelo LED x posição angular da haste

Analisando-se as curvas acima e as dimensões do pêndulo invertido foi confeccionado um suporte para o par LED - foto-transistor, o qual foi acoplado à lateral do carrinho na qual será fixado um anteparo opaco que se deslocará juntamente com a haste do pêndulo, fazendo variar a corrente no coletor do foto-transistor. Este suporte, cujo desenho é mostrado na Fig. (10), foi acoplado ao carrinho de modo que a distância entre o sensor e o eixo de rotação da haste fosse de 12,7 mm.

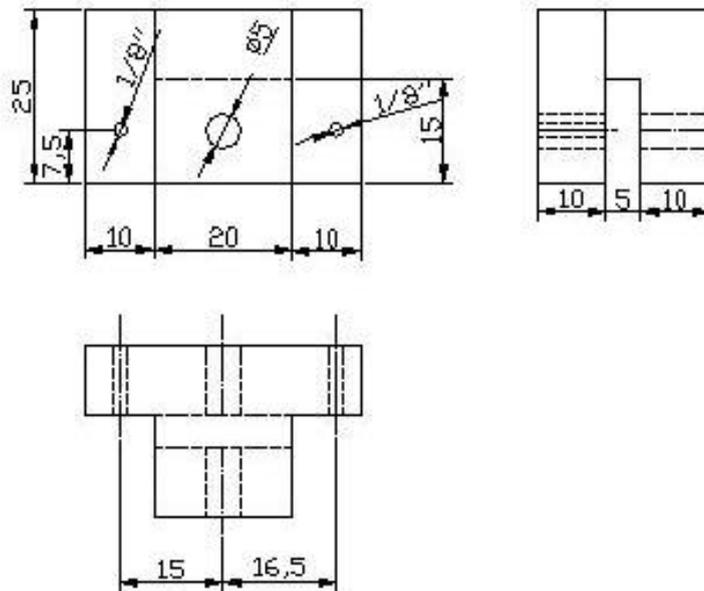


Figura 10. Desenho do suporte para os foto-transistores

Das curvas da Fig. (9) pode-se concluir que o anteparo deve ser tal que a área iluminada pelo LED quando a haste estiver na vertical deverá ser igual à metade da área dos foto-transistores. Decidiu-se então por um anteparo de formato triangular, conforme mostrado na Fig. (11).

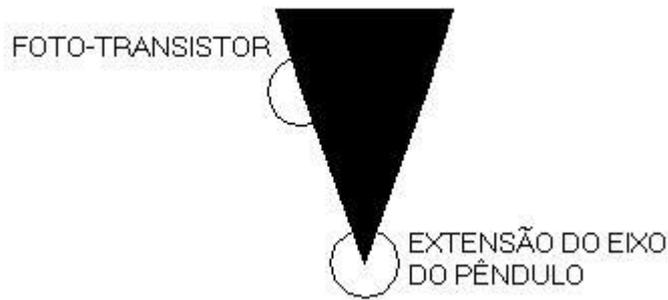


Figura 11. Anteparo para o sensor

Ainda falta determinar experimentalmente a curva de corrente no coletor do foto-transistor x posição angular da haste, o que fornecerá um determinado ganho que deverá ser compensado no circuito eletrônico do controlador através do ajuste dos valores de suas resistências, conforme mencionado no item 3.2.

5. CONCLUSÕES:

Foi apresentado o desenvolvimento de um protótipo de pêndulo invertido, desenvolvimento esse realizado não só para se ter um equipamento didático bastante útil para o ensino de teoria de controle, como também para se realizar uma atividade de “aprender fazendo”. Soluções bastante inovadoras foram adotadas no decorrer do projeto, entre as quais cabe destacar:

- i. Desenvolvimento de um protótipo de baixo custo e de fácil transporte, facilitando a utilização do mesmo para atividades didáticas;
- ii. Seleção do motor através de simulações de controle em malha fechada.
- iii. Desenvolvimento de um dispositivo ótico de sensoriamento;

Na avaliação do aspecto didático da atividade, é inquestionável que o aluno orientado teve um aprendizado bastante intenso, tanto de conhecimento tecnológico quanto de atitude em relação a enfrentar novos problemas.

6. AGRADECIMENTOS:

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq pela concessão de bolsas que tornaram possível este projeto.

7. REFERÊNCIAS:

- Bélanger, P.R., 1995, “Control Engineering - A Modern Approach”, Saunders College Pub, EUA.
Mathworks, 1997, “Matlab, Versão do Estudante – Guia do Usuário”, Versão 4, Makron Books do Brasil, São Paulo - SP.
Ogata, K., 1990, “Modern Control Engineering”, 2ªed., Prentice-Hall Int., Nova Iorque.
Pittman Motors, 2000, “Pittman Express Catalog”, <http://www.pittmannet.com>.
Pittman Motors, 2001, “GM14904S012 Gearmotor Data Sheet”, <http://www.pittmannet.com>.

8. DIREITOS AUTORAIS:

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído neste trabalho.

MATHEMATICAL MODELING AND CONTROL DESIGN OF MECHANICAL SYSTEMS – THE INVERTED PENDULUM

Rodrigo Costa de Oliveira
Roberto Firmento de Noronha
José Andrés Santisteban Larrea
Leonardo Tadeu Garcia Lima

Laboratório de Automação e Robótica, PGMEC, Universidade Federal Fluminense
rua Passo da Pátria 156, Niterói/RJ, BRASIL

rodrigoengenharia@hotmail.com; rnoronha@mec.uff.br; jasl@mec.uff.br; leonardo.lima@ieee.org

***Abstract.** Technological advances pose new challenges and opportunities to engineers and the need for interdisciplinary knowledge is evident in areas such as actuators, sensors and movement control. Applications in robotics and precision positioning, for instance, require the mastering of topics ranging from mechanical engineering to electrical and electronic engineering with a large component of control engineering. This need has led to the mechatronics concept, which tries to bring together all the required knowledge for such applications. In this sense, control theory and electronics have become commonplace in the curriculum of modern mechanical engineering courses and terms such as root loci, PID control and Bode diagrams permeate the vocabulary of up-to-date mechanical engineers. With the objective of tackling this range of knowledge in a hands-on way, this work shows, step by step, the development of a prototype of a classical unstable mechanical system, the inverted pendulum. This consists of a cart carrying a rod with a weight on its end and attached to the cart but free to rotate in one axis. Through a set of pulleys, an electric motor drives the cart horizontally on a pair of tracks. This system may be stabilized controlling the torque of the motor. The paper presents the mathematical modeling as well as the procedure for designing and physically implementing the closed loop controller to be used on the prototype developed at UFF.*

***Keywords.** mathematical modeling, root loci, control of mechanical systems, inverted pendulum*