



## ANÁLISE DA DINÂMICA DA EUTROFIZAÇÃO DE CORPOS D'ÁGUA A PARTIR DE UM MODELO MATEMÁTICO

**Sandra Regina F. A. Silva**

**Marcelo Amorim Savi**

Instituto Militar de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais

22.290.270 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

E-Mail: savi@ime.eb.br

**Resumo.** A palavra eutrofização deriva do grego e significa “bem nutrido”. Ela é utilizada para denotar o processo de adição de nutrientes aos corpos d’água e os efeitos resultantes desta adição. Este trabalho discute o fenômeno da eutrofização de corpos d’água, propondo um modelo matemático para descrever a dinâmica da competição das espécies envolvidas no processo. Simulações numéricas mostram como a alteração de determinados parâmetros pode influenciar o tipo de resposta do sistema.

**Palavras-chave:** Eutrofização, Água, Dinâmica Não-Linear, Modelagem Matemática.

### 1. INTRODUÇÃO

A descrição de fenômenos biológicos e biomecânicos através de modelos matemáticos tem ganho importância nos últimos anos. Estes modelos descrevem a evolução no tempo desses sistemas e podem associar alguns fenômenos importantes com efeitos dinâmicos: *doenças dinâmicas*. Os modelos matemáticos podem identificar em que situações a alteração de parâmetros fisiológicos pode acarretar a substituição de processos normalmente ritmados por processos erráticos e caóticos (Vandermeer, 2001; Ruxton, 1998; Bolker & Grenfell, 1993; Scheren, 2000; Mäler, 2000; Holton & May, 1993).

A dinâmica de sistemas biológicos vem sendo extensamente pesquisada nos últimos anos (Hassell *et al.*, 1976; Godfray & Blythe, 1990; Tilman & Wedin, 1991; Bascompte & Solé, 1995). A literatura apresenta uma série de modelos utilizados para a descrição de sistemas ecológicos. Dentre os modelos empíricos, destacam-se Triantafyllou (2000) que descreve a evolução de comunidades bênticas, e as alterações no forçamento físico-químico; Ravagnan (1999) analisa o uso intensivo da agricultura nas proximidades de ecossistemas lagunais; Menéndez & Comim (2000) tratam a proliferação de algas durante a primavera e o verão; Jorgensen (1995) estuda sistemas de comunidades planctônicas à beira do Caos, enquanto Arif (1998) analisa o fenômeno do *bloom* de algas e Aoki (1997) analisa o processo de maturação em lagos eutrofizados.

Os modelos matemáticos para sistemas ecológicos podem ser classificados em 3 grupos: mapas, equações diferenciais ordinárias (EDOs) e equações diferenciais parciais (EDPs). Dentre os mapeamentos, vale destacar Solé (1999) que estuda o comportamento de populações do besouro da farinha; Rinaldi & Solidoro (1998) propõem modelos de interação plâncton/peixe; Vandermeer (2001) e May (1976) descrevem o comportamento de comunidades de insetos; Kendall & Fox (1998) descrevem o comportamento entre comunidades biológicas que migram como borboletas inglesas, mariposas e roedores. Com relação às EDOs, destacam-se os estudos sobre pestes (Vandermeer, 2001); análise de comunidades planctônicas (Solé, 1999; Stone, 2000); doenças infantis (Ruxton, 1998; Bolker & Grenfell, 1993); populações aquáticas (Scheren, 2000; Mäler,

2000); e a interação entre o sistema imunológico e o vírus HIV (Holton & May, 1993). As EDPs tratam a evolução das variáveis no espaço e no tempo. Os principais trabalhos da literatura descrevem o comportamento de populações aquáticas (Mordasova, 1999; Sorokim, 1998; Gilbert & Giavarini, 2000).

Neste trabalho, propõe-se um sistema não-linear para descrever a competição de espécies associadas ao fenômeno da eutrofização de corpos d'água. Considera-se um pequeno volume de um corpo d'água, o que resulta em um sistema dinâmico discreto no espaço (EDOs). O modelo proposto baseia-se em estudo anterior (Barcellos Jr. & Savi, 1998) que por sua vez é inspirado em outros modelos de competição de espécies aplicados a outros fenômenos biológicos e biomecânicos. As simulações numéricas mostram-se qualitativamente consistentes.

## 2. EUTROFIZAÇÃO

A eutrofização é o processo de adição de nutrientes aos corpos d'água e os efeitos desta adição. Portanto, é um fenômeno associado ao enriquecimento nutritivo de corpos d'água por substâncias orgânicas e inorgânicas. A entrada de nutrientes tais como o fósforo, na forma de fosfato, e o nitrato, em um ambiente aquático deve-se a existência de fontes que podem ser artificiais, geradas pela poluição humana, ou naturais, geradas pela presença de minerais nas rochas e nos solos. As fontes artificiais têm maior peso no fornecimento de nutrientes dentre as quais vale destacar: lixo municipais, lixo industriais, resíduos agrícolas, resíduos florestais, resíduos urbanos e precipitações atmosféricas (Thomann & Mueller, 1987).

A eutrofização artificial, ou cultural, pode ser considerada como um dos principais problemas relacionado à qualidade dos corpos aquáticos a partir da segunda metade do século XX (Esteves, 1988). Suas causas foram reconhecidas pelos limnólogos somente na década de 60, quando surgiram os primeiros modelos quantitativos relacionados à eutrofização e às concentrações de fósforo (Volenweider, 1968).

A crescente urbanização e o desenvolvimento de atividades industriais agrícolas diminuem, do ponto de vista da qualidade, a vida útil dos corpos d'água. As conseqüências da eutrofização podem ser drásticas para o ambiente, impedindo a utilização dos ecossistemas aquáticos e afetando diretamente o componente biótico dos recursos hídricos. Isso gera um excesso de matéria orgânica que, de um modo geral, é superior a capacidade de decomposição do sistema natural o que provoca uma ruptura do equilíbrio ecológico.

A alta proliferação de plantas aquáticas é basicamente resultante da conversão dos nutrientes inorgânicos em material orgânico através da fotossíntese. Observa-se, principalmente em lagos, que a eutrofização é um processo que dá preferência ao desenvolvimento de organismos autotróficos como o fitoplâncton, sendo a radiação solar um fator limitante.

Em um corpo d'água, os nutrientes estão disponíveis em várias formas, onde algumas são determinantes ao crescimento da população fitoplanctônica. O fósforo é o principal elemento na eutrofização de ambientes lacustres. Toda a forma de fósforo presente em águas naturais, quer ela seja iônica ou complexa, encontra-se sob a forma de fosfato (Thomann & Mueller, 1987).

O ciclo dos nutrientes em um ambiente aquático varia devido às condições físico-químicas do ambiente. De um modo geral, os nutrientes são absorvidos pelos organismos, especialmente o fitoplâncton, e incorporados à sua biomassa. O fitoplâncton é consumido por populações de zooplâncton e por alguns tipos de peixes. A morte do fitoplâncton e a eliminação de excrementos do zooplâncton e dos peixes geram detritos que são depositados nos sedimentos, levando consigo os nutrientes. Os nutrientes são, então decompostos pelos microorganismos (bacterioplâncton) e reassimilados pelo fitoplâncton. A Figura 1 mostra esquemas da cadeia alimentar em ambientes aquáticos.

No caso específico do fosfato, a reassimilação de grande parte dos detritos ocorre antes da sedimentação. O fosfato orgânico dissolvido é rapidamente decomposto pelos microorganismos e reassimilado pela comunidade fitoplanctônica. A parte do fosfato presente nos detritos, que não é prontamente liberada para a coluna d'água, deposita-se no sedimento, voltando a seguir o padrão

geral da ciclagem. A cinética da absorção de fosfato mostra que a velocidade máxima de absorção diminui com o aumento da concentração no interior da célula.

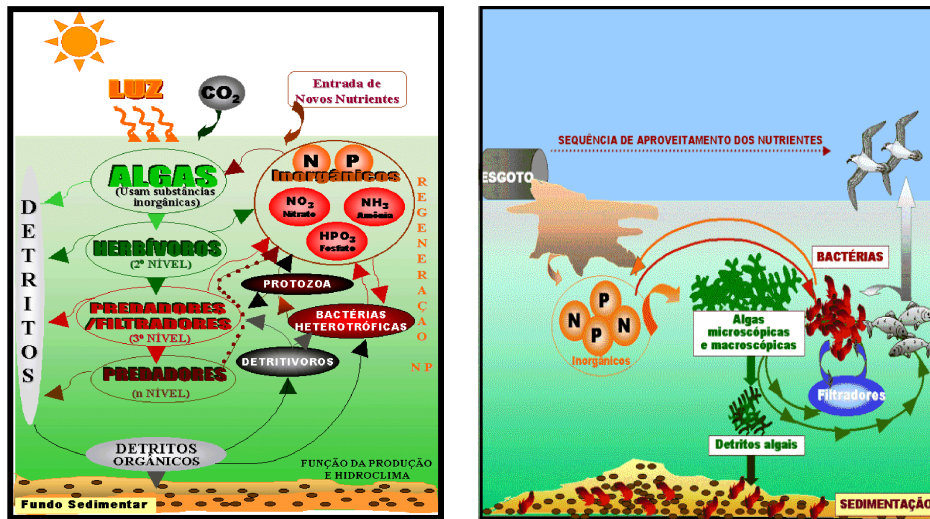


Figura 1 - Representação esquemática da cadeia alimentar em ambientes aquáticos.

## 2.1 FLORAÇÃO DE ALGAS (*BLOOM*)

O excesso de nutrientes em um corpo d'água atua no sentido de favorecer a um crescimento descontrolado de organismos aquáticos, em especial da comunidade fitoplanctônica. Tal crescimento recebe o nome de floração, ou *bloom*, de algas. Este processo está associado a um florescimento excessivo, monoespecífico, no sentido de que decorre de apenas uma espécie de alga. Associado a esse processo, existe um crescimento oportunista de determinadas microalgas quando ocorrem simultaneamente, condições ótimas de luminosidade, nutrientes e dispersão espacial reduzida. O fenômeno do *bloom* de algas tende a alterar a coloração da água de acordo com as espécies envolvidas (Brandini *et al.*, 1997).

O *bloom* de algas provoca uma escassez de nutrientes o que acarreta um grande número de mortes na comunidade fitoplanctônica. A partir daí, tem-se início um acelerado processo de decomposição bacteriana, que utiliza o oxigênio contido na água, diminuindo consideravelmente a concentração de oxigênio. Isso provoca o desenvolvimento de condições anóxicas, o que ocasiona mortandade de zooplâncton, bem como de peixes. A Figura 2 mostra um esquema do processo do *bloom* de algas.

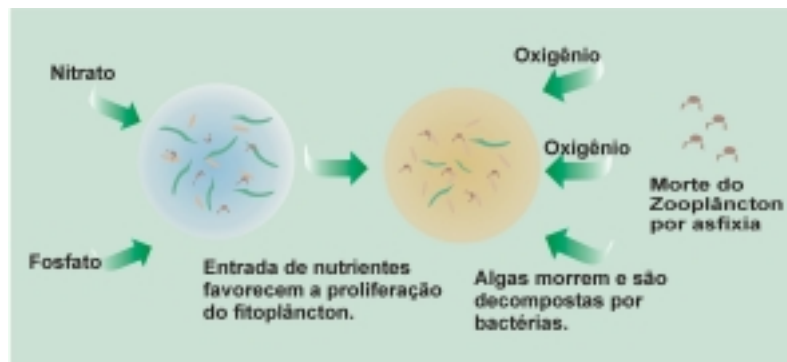


Figura 2 - Esquema do *bloom* de algas: Excesso de nutrientes provoca crescimento descontrolado de fitoplâncton, acarretando falta de oxigenação o que mata o zooplâncton.

Em alguns casos especiais, o *bloom* de algas pode ser favorável para a economia pesqueira, pois proporciona a fertilização natural, acarretando aumento considerável na quantidade de peixes existentes no ambiente marinho. No entanto, esse *bloom* também pode atrapalhar a atividade pesqueira por dificultar a navegação na região.

Algumas espécies produzem substâncias nocivas ao homem provocando o chamado *bloom nocivo*. Este fenômeno é pouco conhecido sendo, portanto, de difícil previsão. As conseqüências de um *bloom* nocivo podem ser catastróficas para o ecossistema podendo apresentar efeitos devastadores para as atividades sócio-econômicas da região afetada.

No Brasil, o primeiro registro de um *bloom* nocivo foi o de Faria (1914), que mencionou uma floração na Baía de Guanabara causando grande mortalidade de peixes. Semeraro & Costa (1972) também destacaram o *bloom* nas lagoas de Rodrigo de Freitas, Camorim, Tijuca e Jacarepaguá, todas no litoral fluminense, ambientes sujeitos à poluição antropogênica a partir das décadas de 60 e 70. Além disso, existem registros de *blooms* em águas costeiras próximas a Recife - PE (Sato *et al.*, 1963), nas águas de Tramandaí - RS (Rosa & Buselato, 1981) e alguns registros no município de Ubatuba - SP (Kutner & Sassi, 1978; Gianesella-Galvão *et al.*, 1995), apesar de não terem sido constatadas conseqüências nocivas aos ecossistemas locais (Brandini *et al.*, 1997).

*Blooms* de algas nocivas no Brasil começaram a ser estudadas recentemente com a adesão do Brasil ao programa *Blooms* de Algas Nocivas ("*Harmful Algal Blooms*") da Comissão Oceanográfica Intergovernamental da UNESCO (IOC/FAO, 1995). A ocorrência de *blooms* de algas no Brasil, segundo Garcia *et al.* (1994), possui registros históricos do começo do século e a maior freqüência de *blooms* de dinoflagelados tóxicos na Região Sul, onde uma recente mortalidade de moluscos foi associada à incidência de *blooms* nocivos (Odebrecht *et al.*, 1995; Brandini *et al.*, 1997).

### 3. MODELO MATEMÁTICO PARA A EUTROFIZAÇÃO

Considere um elemento de volume que faz parte do volume total de um corpo d'água. Neste elemento, considere a quantidade de nutriente (fósforo),  $P(t)$ , de fitoplâncton,  $F(t)$ , e de zooplâncton,  $Z(t)$ . O nutriente possui um fluxo de entrada quantificada por  $\alpha(t)$  e uma saída com uma taxa constante,  $\delta$ . Além disso, o nutriente é consumido pelo fitoplâncton a uma taxa,  $\beta$ .

O fitoplâncton cresce como conseqüência da entrada no volume,  $\varepsilon$ . O crescimento da população está diretamente associada a quantidade de nutriente disponível. Os termos,  $\phi P$  e  $\gamma\beta F P$  definem esta interação. O fator  $\gamma$  está relacionado à luminosidade, condição essencial para a realização da fotossíntese. Quanto ao decréscimo da população, ele pode ser pela saída,  $\lambda$ , ou provocado pelo consumo do zooplâncton, associados à taxa  $\eta$ . O zooplâncton possui uma taxa de entrada  $\mu$  e uma taxa de saída  $\psi$ . Os termos  $\nu F$  e  $\eta F Z$  definem a interação com a população de fitoplâncton. As constantes  $c$  e  $k$  definem termos de interação quadrática entre fitoplâncton e fósforo, e fitoplâncton e zooplâncton, respectivamente. Desta forma, pode-se escrever o seguinte modelo matemático para o processo de eutrofização de corpos d'água,

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \alpha(t) - \beta P F (1 + k F) - \delta P \\ \dot{F} &= \varepsilon + \phi P + \gamma \beta P F (1 + k F) - \eta F Z (1 + c Z) - \lambda F \\ \dot{Z} &= \mu + \nu F + \eta F Z (1 + c Z) - \psi Z\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $\beta, \delta, \varepsilon, \phi, \gamma, \eta, \lambda, \mu, \nu, \psi, c, k$  são constantes e o termo  $\alpha(t)$  representa a entrada de fósforo no sistema e pode ser entendido como um termo de forçamento:  $\alpha(t) = \alpha_0 + P_0 \text{sen}(\omega t)$ .

#### 4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Visando analisar do ponto de vista qualitativo a resposta do modelo proposto, consideram-se os seguintes parâmetros:  $\alpha_0 = 20$ ;  $F_0 = 20$ ;  $\mu = \varepsilon = 0$ ;  $\beta = \phi = \eta = \nu = 0.1$ ;  $\delta = \psi = 1$ ;  $\lambda = c = k = 1$ . As simulação são efetuadas a partir do método de *Runge Kutta* de quarta ordem.

Para iniciar a análise, considere os diagramas de bifurcação avaliados a partir da variação do parâmetro  $\gamma$  em um intervalo de 0 a 1. Quando  $\gamma = 0$ , significa que não existe luminosidade e, portanto, não ocorre fotossíntese. Quando  $\gamma = 1$ , a luminosidade é máxima e representa a superfície da água. A Figura 3 mostra um diagrama 3D onde consideram-se as variações das populações de  $F$  e  $Z$  em função de  $\gamma$ , assim como a sua projeção em 2D. Note que a primeira bifurcação ocorre em torno de  $\gamma = 0,12$ . Note também a existência de uma região associada a uma nuvem de pontos,  $0,23 < \gamma < 0,3$ . Esta região pode ser interpretada, do ponto de vista físico, como uma região mais propensa a apresentar o *bloom* de algas. Observe que as condições ideais não ocorrem na superfície, onde existe excesso de luminosidade, e nem em regiões muito profundas, onde existe falta de luminosidade. A Figura 4 apresenta uma ampliação desta região associada à nuvem de pontos.

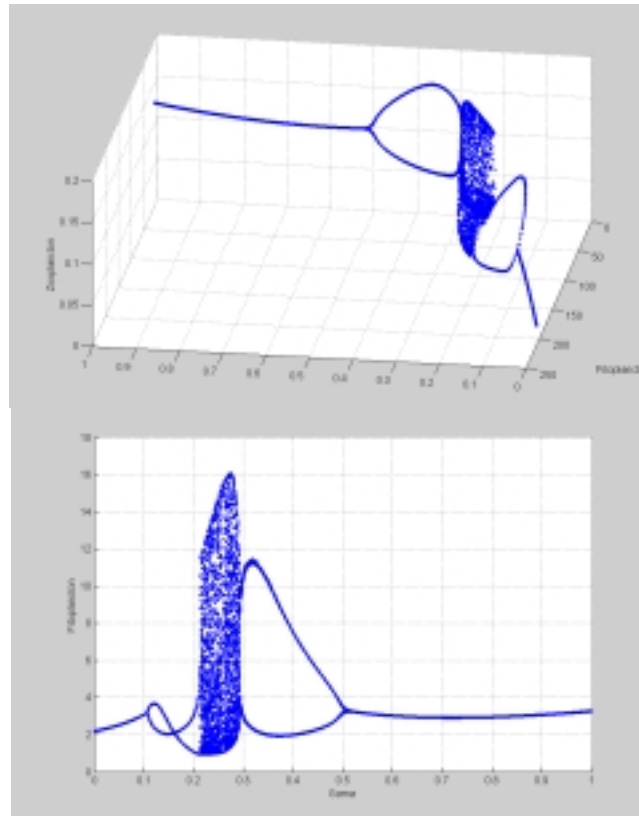


Figura 3 - Diagramas de bifurcação.

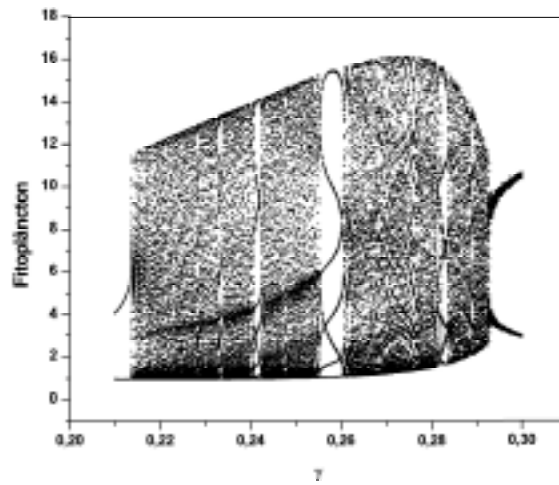


Figura 4 - Ampliação do diagrama de bifurcação.

A partir das informações extraídas dos diagramas de bifurcação, apresentam-se algumas simulações para diferentes tipos de respostas. Considere então uma região associada a uma resposta de período-1 ( $\gamma = 0,1$ ). A Figura 5 apresenta a evolução no tempo das populações e o espaço de estado. A Figura também mostra a seção de Poincaré que apresenta um único ponto, o que caracteriza a resposta de período-1.

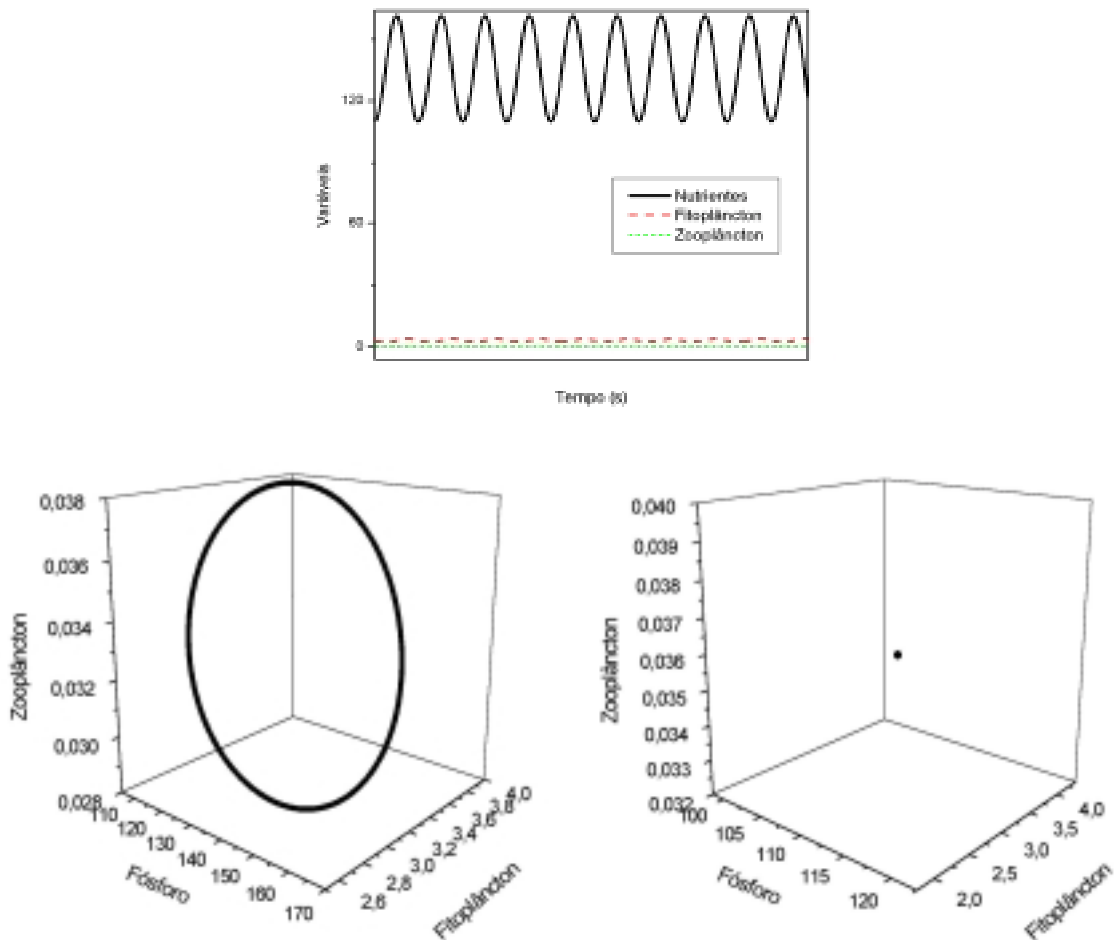


Figura 5 - Resposta do sistema para  $\gamma = 0,1$ .

Alterando o parâmetro  $\gamma = 0,2$ , a resposta passa a ser de período-2. A Figura 6 apresenta a evolução no tempo das populações e o espaço de estado, assim como a seção de Poincaré, que apresenta dois pontos.

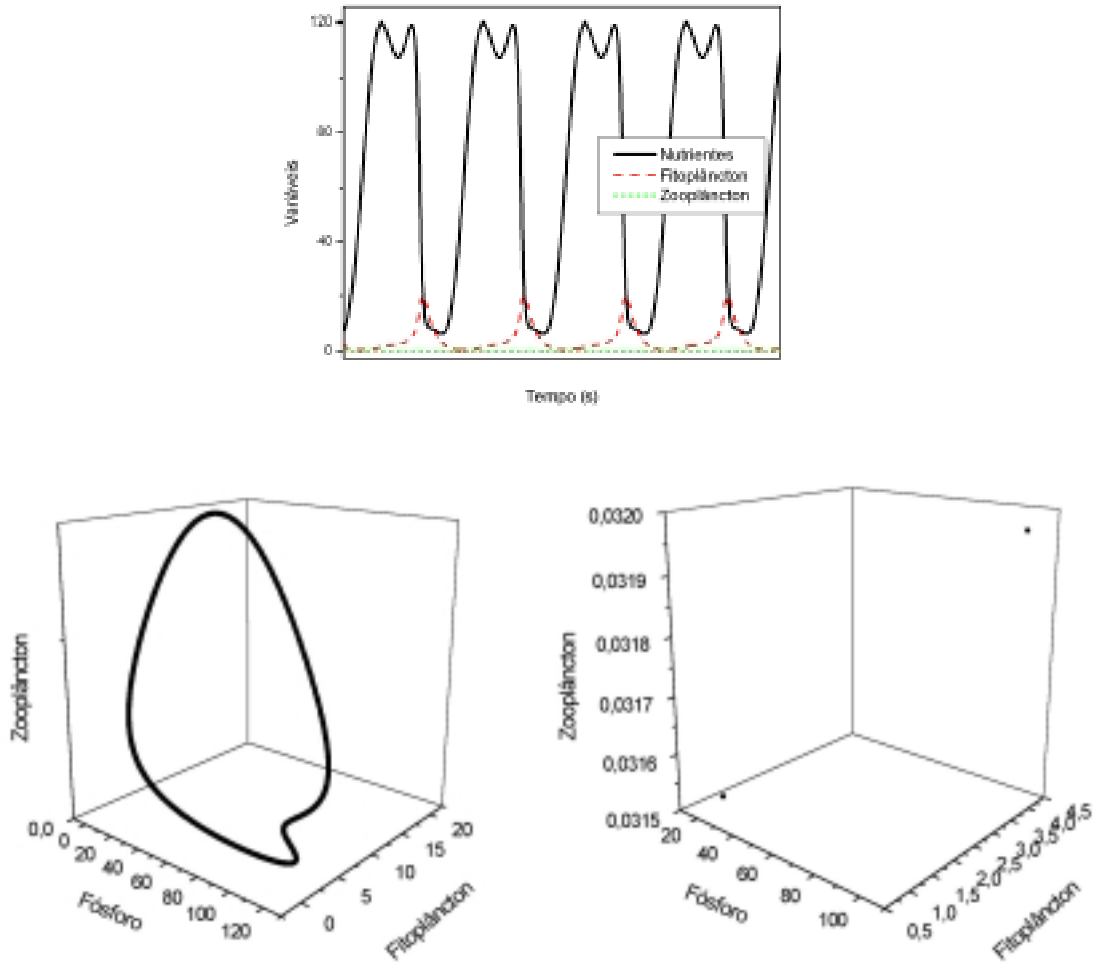


Figura 6 - Resposta do sistema para  $\gamma = 0,2$ .

Para  $\gamma = 0,25$ , o que corresponde a um valor dentro da nuvem de pontos do diagrama de bifurcação, a resposta passa a ser mais complexa. A Figura 7 apresenta a evolução no tempo das populações e o espaço de estado. A seção de Poincaré mostra uma curva fechada o que caracteriza uma resposta quasi-periódica. A avaliação dos expoentes de Lyapunov, efetuada a partir do algoritmo de Wolf *et al.* (1985), apresenta os seguintes valores,  $\lambda_i \equiv (0, -0.29, -1.26)$  o que confirma a resposta quasi-periódica.

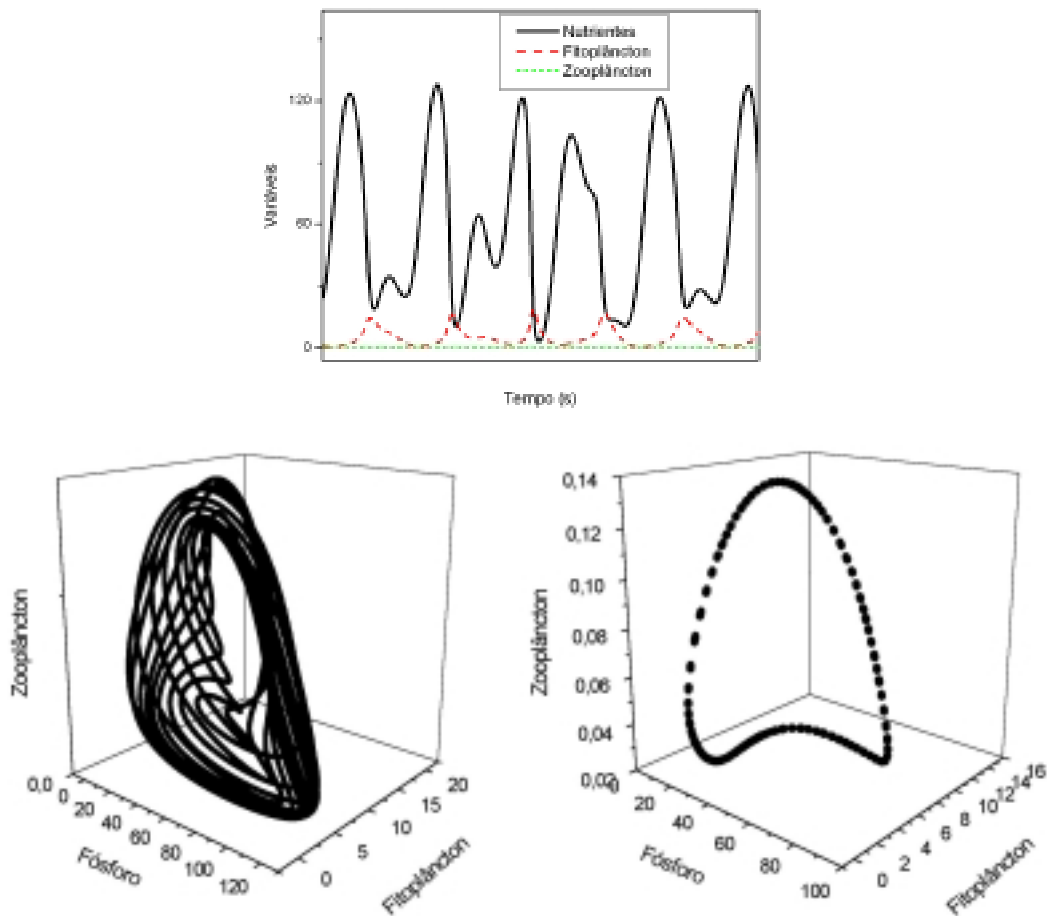


Figura 7 - Resposta do sistema para  $\gamma = 0,25$ .

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta um modelo matemático para analisar a dinâmica da eutrofização de corpos d'água. A análise desenvolvida mostra como a profundidade pode alterar o tipo de resposta do sistema, apresentando comportamentos periódicos e quasi-periódicos. Os autores acreditam que padrões de resposta mais complexos, como quasi-periódicos ou caóticos, possam ser associados ao fenômeno do *bloom* de algas.

## 6. REFERÊNCIAS

- Al-Homaida, A.A. & Arif, I.A. "Ecology and Bloom Formingh Algae of a Semi-permanent Rain-fed Pool at Al-Kharj, Saudi Arabia". *Journal of Arid Enviroments*, 1998.
- Aoki, I. "Comparative Study of Flow-indices in Lake-ecosystems and the Implication for Maturation Process". *Ecological Modeling*, 1997.
- Barcelos Jr., M.N.D. & Savi, M.A. "Dinâmica da Eutrofização de Lagos", *Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste*, 1998.
- Buzzeli, C.P., Wetzel, R.L. & Meyers, M.B. "A Linked Physical and Biological Framework to Asses Biogeochemical Dynamics in a Shallow Estuarine Ecosystem", *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, Academic Presss, 1999.
- Faria, J.G. "Um Ensaio Sobre o Plâncton, Seguido de Observações Sobre a Ocorrência de Plâncton Monótono, Causando Mortandade entre Peixes na Baía do Rio de Janeiro", Dissertação de Livre Docência, Universidade do Brasil, 48p, 1914.



- Gianesella-Galvão, S.M.F., Costa, M.P.F. & Kurtner, M.B. “*Bloom de Oscillatoria (Trichodesmium) Erythraea (Ehr.) Kutz in Coastal Waters of the Southwest Atlantic*”, Publ. Esp. Inst. Oceanogr., 11:133-140. São Paulo, 1995.
- Gilbert, O. & Giavarini, V. “*The Lichen Vegetation of Lake Margins in Britain. Lichenologist*”, The British Lichen Society, 2000.
- IOC/FAO. “*Intergovernmental Panel on Harmful Algal Blooms, First Session*”. UNESCO, 23-25 June, 78p. Paris, 1995.
- Kurtner, M.B. & Sassi, R. “Dinoflagellates from the Ubatuba region (Lat.20°30’S –45°60’W)”. *Toxic Dinoflagellate Blooms*, 1:169-172. 1978.
- Menendez, M. & Comin, F.A. “Spring and Summer Proliferation of Floating Macroalgae in a Mediterranean Coastal Lagoon (Tancada Lagoon, Ebro Delta, NE Spain)”, *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, Academic Press, 2000.
- Mordasova, N.V. “Chlorophyll in the White Sea”, *ICES - Journal of Marine Science*, International Council for the Marine Exploitation of the Sea, 1999.
- Odebrecht, C., Rorig, L.R., Garcia, V.M.T. & Abreu, P.C. “Shellfish Mortality and a Red Tide Event in Southern Brazil”. In: Lassus, P.; Arzul, G.; Erard, E.; Gentien, P. & Marcaillou, C. (eds.), *Harmful Marine Algal Blooms*. Lavoisier Science Publishers, p.213-218. Paris, 1995.
- Rosa, Z.M. & Buselato, T.C. “Sobre a Ocorrência de Floração de Gyrodinium Aereolum Hulburt (Dinophyceae) no Litoral Sul do Estado do Rio Grande do Sul”, *Lheringia - Botânica*, 21: 169-179. 1981.
- Sato, S., Paranaguá, M.N. & Eskinazi, E. “On the Mechanism of the Red Tide of Trichodesmium in Recife Northeastern Brazil, with Some Considerations of the Relation to the Human Disease ‘Tamandaré Fever’”, *Trab. Oceanogr. Univ. Fed. PE*. 5: 7-49. 1963.
- Semeraro, J. & Costa, A.F. “O Plâncton e a Poluição nas Lagoas da Tijuca Camorim e Jacarepaguá”, *Inst. Eng. Sanit.*, p. 1-31. Rio de Janeiro, 1972.
- Sheren, P.A.G.M. & Zanting, H.A. “Estimation of Water Pollution Sources in Lake Victoria, East Africa: Application and Elaboration of the Rapid Assessment Methodology”, *Journal of Environmental Management*, International Council for the exploration of the Sea., 2000.
- Sorokin, Y.I. & Ravagnan, G. “Analysis of Lagoonal Ecosystems in the Po River Delta Associated with Intensive Aquaculture”, *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, Academic Press, 1999.
- Thomann, R.V. “Principles of Surface Water Quality Modeling and Control”, 1987
- Tommasi, L.R. “Maré Vermelha”, *Ciência e Cultura*, 37(10): 1599-1605, 1985.
- Triantafyllou G. & Petihakis G. “Temporal Variations in Benthic Communities and their Response to Physicochemical Forcing: A Numerical Approach”, *ICES Journal of Marine Science*, 2000.
- Vandermeer, J., Stone, L. & Blasius, B. “Categories of Chaos and Fractal Basin Boundaries in Forced Predator-Prey Models”, *Chaos, Solitons and Fractals*, Pergamon, 2000.
- Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. & Vastano, J.A. “Determining Lyapunov Exponents from a Time Series”, *Physica 16D*, pp.285-317, 1985.

# ANALYSIS OF THE WATER BODIES EUTROPHICATION DYNAMICS FROM A MATHEMATICAL MODEL

**Sandra Regina F. A. Silva**

**Marcelo Amorim Savi**

Instituto Militar de Engenharia

Department of Mechanical and Materials Engineering – savi@ime.eb.br

22.290.270 - Rio de Janeiro, RJ, Brazil

***Abstract.** The word eutrophication comes from greek and means “well-nourished”. This is employed to denote the process of nutrient addition in water bodies and its effects. This article discusses the water bodies eutrophication phenomenon and proposes a mathematical model to describe the dynamics of population competition. Numerical simulations show how alteration of system parameters can influence the kind of system response.*

***Key-words:** Eutrophication, Water, Nonlinear Dynamics, Mathematical Modeling.*