



## FORMULAÇÃO ELASTO-PLÁSTICA PARA MATERIAIS DANIFICADOS

**João Batista de Aguiar**

Depto de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica, USP

e-mail: [jbaguiar@usp.br](mailto:jbaguiar@usp.br)

**Fulgêncio Antônio Aquino Duarte**

Fac. de Ciencias y Tecnología, Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción, Encarnación, Paraguay

e-mail: [antaq@usp.br](mailto:antaq@usp.br)

**Resumo.** Neste artigo são apresentados os principais fenômenos que deram início à Mecânica do Dano Contínuo (MDC). São discutidas as principais hipóteses envolvidas na MDC (deformação equivalente, energia potencial elástica equivalente etc.). Posteriormente é desenvolvida uma formulação de elasto-plasticidade para materiais danificados considerando deformações finitas. A superfície de elasto plástica de Gurson é utilizada para descrever o comportamento do material no espaço danificado, com a inclusão de um controle para início, desenvolvimento e fim da evolução do processo de deterioro através de uma superfície de dano, baseada na energia de deformação elástica. Esta energia é relacionada ao deterioro do módulo elástico do material. Baseado nesta hipótese o sistema de equações constitutivo para materiais danificados, em forma incremental, é desenvolvido. Como resultado desse procedimento espera-se ampliar grandemente a faixa de aplicabilidade do procedimento de Gurson.

**Palavras-chave:** Teoria do Dano Contínuo, Termodinâmica, Mecânica do Contínuo.

### 1. INTRODUÇÃO

A Mecânica do Dano Contínuo evoluiu a partir de um modelo uniaxial inicial, dependente de uma variável de dano escalar, até modelos generalizados tridimensionais do presente. Em geral, a presença de danos no material pode ser associada à variação das propriedades desse material, e portanto a escolha da variável de dano representa uma parte importante do problema. Alguns mecanismos de formação de dano são (Lemaitre et al, 2000): Dano plástico dúctil acompanhado de grandes deformações de metais, Dano visco-plástico dúctil (função do tempo que, para metais em média e alta temperatura, corresponde à perda de coesão intergranular acompanhada de deformação visco-plástica), Fadiga (causada pela repetição de deformações e identificada como função do número de ciclos). Outros fenômenos que podem ser considerados como dano são: o processo de oxidação, corrosão, etc.

Podemos construir o nosso modelo imaginando que o material em estudo possua as três configurações a seguir:  $C_0$  configuração virgem i.e. indeformada e sem dano,  $C$  configuração danificada e deformada,  $\bar{C}$  configuração deformada e sem dano i.e. configuração fictícia obtida a partir de  $C$  removendo o dano (configuração equivalente).

O material evolui de  $C_0$  a  $C$ , existindo um mapeamento contínuo entre  $C$  e  $\bar{C}$ .

Uma vez escolhida a variável de dano podemos propor várias hipóteses: Deformação equivalente (Lemaitre, 1985) i.e. as deformações nas configurações  $C$  e  $\bar{C}$  são iguais, Energia de

deformação equivalente (Sidoroff et al, 1981) i.e. as energias de deformação nas configurações  $C$  e  $\bar{C}$  são iguais, Tensão equivalente, i.e. as tensões nas configurações  $C$  e  $\bar{C}$  são iguais.

A hipótese da deformação equivalente prediz a variação do módulo elástico. Essa pode ser, inclusive, uma forma de medir o dano no material.

## 2. FORMULAÇÃO

### 2.1 Equilíbrio

A influência do dano começa, em geral, a ficar importante quando a deformação for considerável (deformação finita). Isso nos leva a considerar equações constitutivas envolvendo grandes deformações. Outra consideração importante é a objetividade. Ela pode ser abordada utilizando uma formulação em forma de taxas, considerando as rotações que acontecem no material. Aqui é utilizada a taxa de Jaumann (derivada co-rotacional).

Na formulação que se segue é utilizada a hipótese de Sidoroff de equivalência de energia.

#### 2.1.1. Dano : Isotrópico e Anisotrópico

Suponhamos, inicialmente, que o dano consista de vazios e microfissuras num material. Esses danos podem ser mais severos numa direção que noutra. Teremos então danos anisotrópicos e portanto a variável de dano não pode ser simplesmente determinada por um escalar. Quando a distribuição de danos é aleatória, é bastante útil supor uma distribuição isotrópica de dano.

Consideremos agora que existe um mapeamento  $\mathbf{M}(\mathbf{D})$  entre a tensor de tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  (Cauchy) no material na configuração  $C$  e a tensor  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  na configuração equivalente  $\bar{C}$ . Teremos então a seguinte relação, em forma matricial, (Chaboche, 1981).

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{D}) \quad (1)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  é o tensor de tensões efetivas, e  $\mathbf{M}$  é o tensor que mede o efeito do dano.

Aqui o tensor  $\mathbf{M}$  pode ser um tensor de segunda ou quarta ordem dependendo do tensor de dano  $\mathbf{D}$ . Não existe uma única formulação matemática para  $\mathbf{M}(\mathbf{D})$ , mas é sempre possível escrevê-lo em termos das direções principais de  $\mathbf{D}$  (Zhu, Y. e Cescotto, S., 1995). Sabemos que o tensor de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  é simétrico, mas o tensor de tensão efetiva  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  não é necessariamente simétrico. Pode-se escrever, no entanto, a Eq.(1) na seguinte forma matricial:

$$[\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{33} \bar{\sigma}_{23} \bar{\sigma}_{31} \bar{\sigma}_{12}]^T = \mathbf{M}[\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{31} \sigma_{12}]^T \quad (2)$$

onde os tensores de Cauchy de segunda ordem, são degenerados em vetores num espaço de seis dimensões e as componentes do tensor  $\mathbf{M}$  são dadas por uma matriz  $6 \times 6$  segundo a expressão

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde a diagonal da matriz  $\mathbf{M}$  possui as seguintes componentes

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{1}{1-D_1} & M_{22} &= \frac{1}{1-D_2} & M_{33} &= \frac{1}{1-D_3} & M_{44} &= \frac{1}{\sqrt{(1-D_2)(1-D_3)}} \\
M_{55} &= \frac{1}{\sqrt{(1-D_3)(1-D_1)}} & M_{66} &= \frac{1}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_2)}}
\end{aligned} \tag{4}$$

que depende dos valores principais (autovalores) do tensor de danos  $\mathbf{D}$  expresso segundo as direções principais.

### 2.1.2. Hipótese da energia equivalente

Adotando a hipótese de energia complementar elástica equivalente (Cordebois e Sidoroff, 1979), podemos escrever a seguinte equação

$$V_e(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = V_e(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{0}) \tag{5}$$

que pode ser rescrita como

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \bar{\mathbf{C}}_e^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}_e^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{6}$$

onde  $\mathbf{C}_e$  e  $\bar{\mathbf{C}}_e$  são os tensores que representam as características do material virgem e com dano, respectivamente, e estão, portanto, relacionados pela seguinte expressão

$$\bar{\mathbf{C}}_e^{-1} = \mathbf{M}^T \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{M}; \tag{7}$$

onde devemos lembrar que a matriz  $\mathbf{M}$  é simétrica.

Da hipótese da energia complementar equivalente podemos obter uma deformação elástica  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$  no espaço não danificado, cuja expressão seria

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_e \tag{8}$$

## 2.2. Energia

O “método do estado local” é utilizado para as considerações termodinâmicas. Para isso supomos que o “estado” de um sistema termodinâmico possa ser determinado através do conhecimento dos valores de algumas variáveis num ponto e instante dados, o que é dependente do ponto escolhido. Tendo em conta que a derivada dessas variáveis não aparecem na definição do “estado” termodinâmico do sistema, resulta que qualquer evolução do sistema pode ser considerada como uma sucessão de estados de equilíbrio. O fenômeno físico pode ser descrito com maior ou menor precisão dependendo da escolha das variáveis de estado. As variáveis de estado podem ser divididas em dois tipos: as variáveis internas e as observáveis. O processo termodinâmico a ser descrito usando o “método do estado local” deve cumprir com a desigualdade de Clausius-Duhem para garantir que o processo seja termodinamicamente admissível.

### 2.2.1. Variáveis de Estado e Forças Termodinâmicas Associadas

Na presente formulação, foram escolhidas as variáveis de estado segundo a tabela seguinte, o que determina a formulação termodinâmica posterior.

Tabela 1. Variáveis internas e forças termodinâmicas associadas

Variáveis de estado	Forças termodinâmicas associadas
Deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}_e$	Tensor de tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$
Deformação plástica acumulada $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Limiar de encruamento plástico $S_y$
Variável de dano $\mathbf{D}$	Taxa de energia livre de dano $\mathbf{Y}$
Dano total $\beta$	Limiar de encruamento por dano $B$
Temperatura $T$	Entropia $s$

Segundo os comentários feitos acima, para obtermos uma formulação coerente podemos utilizar a função de energia livre de Helmholtz, que é definida como a porção da energia interna que pode ser utilizada para realizar trabalho a temperatura constante. Matematicamente esta energia pode ser expressa como

$$\psi = e - sT \quad (9)$$

onde  $e$  é a energia interna por unidade de volume,  $s$  é a entropia por unidade de volume, e  $T$  a temperatura do volume elementar.

O balanço de energia expresso por meio da primeira lei da Termodinâmica pode ser escrito, em sua forma local, como

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^0 + q_g - \text{div } \mathbf{q}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T); \quad \mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v} \quad (10)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $q_g$  é o calor produzido por unidade de volume dentro do sistema,  $\mathbf{q}$  é o fluxo de calor pela fronteira,  $\mathbf{L}$  é o gradiente do vetor de velocidades  $\mathbf{v}$ . Da mesma forma, a desigualdade de Clausius-Duhem, relacionada à segunda lei da Termodinâmica, pode ser expressa como

$$\boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \mathbf{q}^T \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0 \quad (11)$$

sendo que a função energia livre pode ser dividida em três parcelas: elástica, plástica e de dano

$$\rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{D}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \beta) = W_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{D}) + \psi_p(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \psi_d(\beta) \quad (12)$$

de maneira que em utilizando a transformação de Legendre-Fenchel da energia livre em relação à deformação temos

$$\rho\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \beta) = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e - \rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{D}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \beta) = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_e - W_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{D}) - \psi_p(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \psi_d(\beta) \quad (13)$$

sendo que a componente elástica da energia livre pode ser expressa como

$$W_e = \bar{W}_e; \quad \bar{W}_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}; \quad W_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_e \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \mathbf{C}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (14)$$

o que mostra a inclusão do fenômeno de dano na energia potencial elástica.

Portanto, a expressão analítica para a desigualdade de Clausius-Duhem, será expressa para o caso isotérmico e rigidamente térmico através da equação

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}\right)^T \boldsymbol{\varepsilon}_e - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_p \geq 0; \quad \dot{T} = 0, \text{grad}T = 0 \quad (15)$$

que pode ser simplificada, se atentarmos para o fato de que em derivando a Eq.(13) resulta

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}(\rho \psi) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} W_e = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \bar{\mathbf{C}}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e \right) = \bar{\mathbf{C}}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\sigma}; \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (16)$$

e portanto temos uma definição para  $\boldsymbol{\sigma}$  em termos de  $\psi$ . Substituindo este resultado na Eq.(15) resulta a seguinte forma simplificada

$$-\frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} - \frac{\partial \rho \psi}{\partial \boldsymbol{\beta}} \dot{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_p \geq 0 \quad (17)$$

a partir da qual podemos definir as chamadas forças termodinâmicas, segundo as igualdades seguintes

$$S_y = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}; \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \boldsymbol{\beta}}; \quad \mathbf{Y} = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \mathbf{D}} \quad (18)$$

Assim  $S_y$  é um escalar que determina o limite da região elástica no espaço das tensões,  $\mathbf{B}$  é o equivalente para a superfície de dano, no espaço determinado pelas componentes principais do tensor  $\mathbf{D}$ , e  $\mathbf{Y}$  pode ser considerado como a “taxa de energia de deformação elástica associada com uma unidade de dano incrementada”. É também chamada de razão de liberação de energia por dano.

### 2.2.2 Dissipações

No caso em que hajam variações de temperatura, teríamos a entropia definida em função da variação da energia livre com a temperatura, restrição em Eq. (15), e assim teríamos expressões um tanto mais complexas que as apresentadas aqui. Precisamos então de um formalismo adicional para determinar a evolução das variáveis internas. Essa é a razão da introdução do potencial de dissipação. Assim, a partir da Eq. (17)

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_p - \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{D}} - S_y \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} - \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\beta}} \geq 0 \quad (19)$$

sendo que dissipação pode ser dividida em duas partes, uma relativa à dissipação plástica e a outra à dissipação por dano

$$\Phi_p = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_p - S_y \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \geq 0; \quad \Phi_d = -\mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{D}} - \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\beta}} \geq 0 \quad (20)$$

Admitindo a existência dos potenciais plástico e de dano,  $F_p$  e  $F_d$ , respectivamente, cada um deles dependendo de várias variáveis termodinâmicas, com normalidade e convexidade obedecidas, segundo a expressão

$$F_p = F_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, S_y); \quad F_p = 0 \quad \vee \quad F_d = F_d(\mathbf{Y}, \mathbf{B}); \quad F_d = 0 \quad (21)$$

e utilizando o "princípio da máxima entropia", teremos o problema de maximizar a Eq.(20) sujeito às condições dadas acima. O problema de maximização então pode ser resolvido introduzindo multiplicadores de Lagrange sob considerações matemáticas adequadas sobre a condição de ótimo. Obtemos a partir das Eqs.(19) e (21) a expressão seguinte

$$\Phi^* = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_p - S_y \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{Y}^T \mathbf{D} - B \dot{\boldsymbol{\beta}} - \dot{\lambda}_p F_p - \dot{\lambda}_d F_d \quad (22)$$

A estacionariedade da função  $\Phi^*$  em relação às diferentes variáveis termodinâmicas envolvidas dão finalmente a evolução das variáveis internas em função dos potenciais plástico e de dano de acordo com as igualdades seguintes

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial S_y}; \quad \mathbf{D} = -\dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}}; \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = -\dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d}{\partial B} \quad (23)$$

### 3. MODELO ELASTO-PLÁSTICO COM DANO ISOTRÓPICO

Um modelo constitutivo para materiais metálicos sob deformações inelásticas foi introduzido por Gurson (Gurson, 1977). Este modelo considera a presença de vazios distribuídos no material de base. Localmente consideramos frações de volume suficientemente grandes a fim de admitir homogeneidade para a distribuição de defeitos contidos nele e ao mesmo tempo suficientemente pequenas para evitar grandes variações das grandezas de interesse i.e. é feita uma homogeneização em cada elemento de volume considerado. Globalmente teremos as formas conhecidas de incremento de tensão, deformação, etc., adicionando à reologia a evolução dos vazios.

#### 3.1. Superfície de Escoamento

Seja a função de escoamento, relativa ao comportamento de materiais com vazios internos de forma esférica, e dada pela expressão

$$F_p = \left( \frac{\{3J_2\}^{1/2}}{S_y} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left( -\frac{3q_2 I_1}{2 S_y} \right) - (1 - q_3 f^2) = 0; \quad J_2 = \frac{\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}{2}; \quad I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}; \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \quad (24)$$

A Eq.(24) é a função de escoamento de Gurson, onde  $S_y$  é a tensão de escoamento do material sólido equivalente,  $J_2$  é o segundo invariante da componente antiesférica do tensor de tensões,  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões,  $f$ , ( $0 \leq f \leq 1$ ) é a fração de vazios no material. Assim para  $f = 0$  a Eq.(24) reduz-se à função de von Mises. Finalmente os parâmetros  $q_1, q_2, q_3$  são coeficientes que dependem do material e foram introduzidos por Tvergaard.

Assumindo a associatividade i.e. assumindo que o nosso potencial é dado pela Eq.(24), teremos a seguinte regra de evolução da deformação plástica

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\lambda}_p \geq 0 \quad (25)$$

evidentemente que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  não é dependente apenas da parte hidrostática do tensor de tensão. O encruamento do material é obtido a partir de

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{S}_y} \quad (26)$$

sendo a regra de carregamento/descarregamento dada pela relação de Kuhn-Tucker

$$F_p \leq 0; \quad \dot{\lambda}_p \geq 0; \quad \dot{\lambda}_p F_p = 0 \quad (27)$$

### 3.2. Superfície de Dano

Em forma similar ao caso plástico, podemos propor a existência de uma superfície que separa o domínio danificado do não-danificado e considerando que seja associativo, temos então a expressão que segue

$$F_d = Y_{eq} - B(\beta); \quad F_d = F_d(\mathbf{Y}, B) \quad (28)$$

Aqui  $F_d$  é uma função homogênea de grau dois em relação a  $\mathbf{Y}$ . A taxa de energia livre de dano equivalente  $Y_{eq}$  está definida na forma seguinte

$$Y_{eq} = \left\{ \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{Y}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \bar{\mathbf{J}} \mathbf{Y} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}; \quad 0 \leq \boldsymbol{\mu} \leq 1 \quad (29)$$

onde  $\mathbf{J}$  é o tensor característico do dano.

O tensor  $\mathbf{J}$  serve para caracterizar a evolução não linear e anisotrópica do dano. O tensor  $\mathbf{J}$  é positivo semi-definido com valor zero na origem e para garantir a condição  $\mathbf{D} \geq 0$  exigida pela segunda lei da termodinâmica teremos que admitir que as componentes de  $\mathbf{J}$  como não negativas.

A evolução da deformação plástica do material contínuo equivalente, está dado pela lei de equivalência seguinte

$$(1-f) \mathbf{S}_y \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (30)$$

enquanto que a evolução de vazios, englobando nucleação e crescimento de vazios, está dada pela expressão

$$\dot{f} = \dot{f}_c + \dot{f}_n; \quad \dot{f}_g = (1-f) \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{I}; \quad \dot{f}_n = A \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad (31)$$

onde a primeira parcela da Eq.(31) corresponde ao crescimento dos vazios existentes e a segunda à nucleação dos mesmos, sendo  $\mathbf{I}$  a matriz de identidade, e

$$A = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \boldsymbol{\varepsilon}_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (32)$$

é a distribuição normal do estiramento da nucleação com valor medio  $\boldsymbol{\varepsilon}_N$ , desvio padrão  $s_N$  e fração de volume de nucleação  $f_N$ , i.e. ( $f_N = \frac{V_{vazios}}{V}$ ). A integração é realizada através de um esquema de Euler retroactivo (Aravas, 1987).

#### 4. EQUAÇÃO CONSTITUTIVA : FORMA INCREMENTAL

Normalmente a solução de problemas elasto-plásticos envolvendo materiais danificados, dada a natureza não linear do problema, é resolvido de forma incremental. Nessas circunstâncias tensões necessitam ser atualizadas de maneira discreta, a partir do conhecimento do incremento de deformações  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ . A partir da equação constitutiva, Eq. (19), podemos escrever os incrementos de tensão a partir da forma corrotacional desta equação

$$\overset{0}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e \overset{0}{\mathbf{M}}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_e + \mathbf{C}_e \mathbf{M}^{-1} \overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}_e; \quad \overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p; \quad \overset{0}{\mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial D}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_e = \bar{\mathbf{C}}_e^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (33)$$

sendo que utilizamos a forma corrotacional de Jaumann

$$\overset{0}{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\nabla \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\nabla = \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\boldsymbol{\Omega}} \quad (34)$$

Na equação acima podemos introduzir as diferentes derivadas necessárias, e nos referirmos ao mapeamento no espaço danificado, para escrever os incrementos de tensão como

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{A}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \hat{\mathbf{B}} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \hat{\mathbf{C}} \Delta f \quad (35)$$

onde

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_e \mathbf{M}^{-1}; \quad \hat{\mathbf{B}} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_e \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_e \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} \boldsymbol{\sigma} \quad (36)$$

com os tensores degenerados de ordem 3 representados com um traço sob o símbolo.

Da mesma forma, incrementos da razão de liberação de energia elástica relacionada com o incremento de dano  $\mathbf{Y}$ , Eqs. (18), (14) e (6)

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} (\rho \Psi) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} W_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{D}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} V_e(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \quad (37)$$

ou

$$-\mathbf{Y} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Z} \boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{Z} = \mathbf{M} \mathbf{C}_e^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{D}} \quad (38)$$

que podemos escrever em forma incremental, utilizando derivadas corrotacionais, como

$$\Delta \mathbf{Y} = \hat{\mathbf{D}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \hat{\mathbf{E}} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \hat{\mathbf{F}} \Delta f \quad (39)$$

com



$$\hat{\mathbf{D}} = -2\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Z}\hat{\mathbf{A}}; \quad \hat{\mathbf{E}} = -2\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Z}\hat{\mathbf{B}}; \quad \hat{\mathbf{F}} = -2\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Z}\mathbf{C} + \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} \boldsymbol{\sigma} \quad (40)$$

que é então um sistema de equações que pode ser resolvido a partir dos incrementos em  $\Delta f_p$  e  $\Delta f_d$

$$\begin{aligned} \Delta f_p &= \frac{\partial f_p^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f_p}{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p; \quad \Delta f_p = 0 \\ \Delta f_d &= \frac{\partial f_d^T}{\partial \mathbf{Y}} \Delta \mathbf{Y} + \frac{\partial f_d}{\partial f} \Delta f; \quad \Delta f_d = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

que então pode ser resolvido, considerando as expressões para os incrementos de tensão e energia, em forma de sistemas de equações

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p &= \frac{1}{\det \Xi} \left[ \left( \frac{\partial f_d^T}{\partial \mathbf{Y}} \hat{\mathbf{F}} + \frac{\partial f_d}{\partial B} \right) \left( -\frac{\partial f_p^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \hat{\mathbf{A}} \Delta \boldsymbol{\epsilon} \right) + \hat{\mathbf{C}} \left( \frac{\partial f_d^T}{\partial \mathbf{Y}} \hat{\mathbf{D}} \Delta \boldsymbol{\epsilon} \right) \right] \\ \Delta f &= \frac{1}{\det \Xi} \left[ -\left( \frac{\partial f_d^T}{\partial \mathbf{Y}} \hat{\mathbf{E}} \right) \left( -\frac{\partial f_p^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \hat{\mathbf{A}} \Delta \boldsymbol{\epsilon} \right) + \left( \frac{\partial f_p^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \hat{\mathbf{B}} + \frac{\partial f_p}{\partial S_y} \right) \left( \frac{\partial f_d^T}{\partial \mathbf{Y}} \hat{\mathbf{D}} \Delta \boldsymbol{\epsilon} \right) \right] \end{aligned} \quad (42)$$

onde

$$\det \Xi = \left( \frac{\partial f_d^T}{\partial \mathbf{Y}} \hat{\mathbf{F}} + \frac{\partial f_d}{\partial B} \right) \left( \frac{\partial f_p^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \hat{\mathbf{B}} + \frac{\partial f_p}{\partial S_y} \right) - \left( \hat{\mathbf{C}} \right) \left( \frac{\partial f_d^T}{\partial \mathbf{Y}} \hat{\mathbf{E}} \right) \quad (43)$$

Dessa forma as atualizações de tensões podem ser feitas, desde que um esquema de integração das equações constitutivas seja implementado. Condições de carregamento diferente do neutro, suposto para as superfícies de escoamento e dano, podem ser igualmente obtidas como formas particulares deste desenvolvimento.

## 5. CONCLUSÕES

A formulação desenvolvida neste trabalho, para materiais elasto-plásticos danificados, pode ser discretizada e aplicada por meio do uso de elementos finitos na simulação do comportamento de materiais metálicos sob grandes deformações, em aplicações típicas de problemas de fabricação mecânica. Essa implementação representa a próxima etapa deste projeto.

A formulação aqui analisada representa um avanço com relação à proposta de Gurson, identificada com a evolução de danos a partir do início do processo de plastificação do material. O atraso no início, forma de evolução e valores críticos de dano podem ser considerados então como variáveis características de cada material, e portanto conformam com os resultados apresentados na literatura ( Voyiadjis, G. E Kattan, P, 1992)

Na formulação se evidencia a similitude entre o modelamento da evolução da superfície plástica e a superfície de dano, com aderência à proposta de controle do processo através da evolução da energia de deformação elástica, que pode ser diretamente relacionada à deterioração do módulo elástico do material.

Aspectos computacionais do problema relativos à forma de implementação do algoritmo numérico de solução das equações apresentadas pode seguir um dos vários algoritmos existentes, em particular o do retorno elástico (Nagtaal,1985). As variáveis materiais, bem como a forma de medida das mesmas também terão que ser analisadas no que segue do trabalho.

## 6. AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pelo financiamento do projeto de doutoramento.

## 7. REFERÊNCIAS

- Aravas, N.- 'On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models', IJNME – 24, 1395-1416 (1987).
- Cordebois, J.P. e Sidoroff, F., 'Damage Induced Elastic Anisotropy', Euromech 115, Villard de Lans, 1979
- Gurson, A. – 'Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile materials', J. Eng. Matl. Tech., 99, 2-15 (1977)
- Kachanov, L. – 'Time of the rupture process under creep conditions', IVZ Akad Nauk, S.S.R., Ord Tech Nauk, 8, (1958).
- Lemaitre, J. – 'A continuous damage mechanics model for ductile fracture', J. Eng. Matl. Tech., 107, 83-89 (1985).
- Lemaitre, J. et ali. – 'Anisotropic damage law of evolution', E. J. of M., 19, 187-208 (2000).
- Nagtaal, J. – 'On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems', Comp. M. Appl. M. Eng., 33, 469-484 (1982).
- Santaoja, K. – 'Thermomechanics of solid materials with application to Gurson-Tvergaard material model', Technical Research Centre of Finland, Espoo 1997.
- Voyiadjis G. & Kattan P. – 'A plasticity-damage theory for large deformation of solids – I: Theoretical formulation, INES, 30, 1089-1108 (1992).
- Zhu Y. & Cescotto S. – 'A fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials', IJSE, 32, 1607-1641 (1995)

## ELASTO PLASTIC FORMULATION FOR DAMAGED MATERIAL

### João Batista de Aguiar

Department of Mechanical System, Polytechnic School, University of São Paulo, São Paulo, Brazil.  
e-mail: [jbaguiar@usp.br](mailto:jbaguiar@usp.br)

### Fulgêncio Antônio Aquino Duarte

Faculty of Science and Technology, Catholic University, Encarnación, Paraguay  
e-mail: [antaq@usp.br](mailto:antaq@usp.br)

**Abstract.** *In this paper are presented various phenomena which allowed the development of Continuum Damage Mechanic (CDM) Are discussed the more important hypotheses using in CDM (equivalent strain, equivalent energy etc.). After is development a elasto plastic formulation for damaged material considering finite strain. The Gurson's elasto plastic surface is using to describe the material characteristic in the damaged space, with the inclusion of a control to begin, progress and end of damage process, throughout of damage surface, basing on elastic strain energy. This energy is connect with the variation of elastic modulus of material. Based in this hypothesis the system of constitutive equation for damaged materials, in incremental form, is development. As result of this process is possible to wait a grow of the field of application for the Gurson's theory.*

**Keywords:** *Damage Mechanic Theory, Thermodynamic, Continuum Mechanics.*