



## **PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE LAMB EM PLACAS COLADAS**

**Silvio Romero de Barros**

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines – LEMA E-mail: silvio.debarros@meca.uvsq.fr

**Martine Rousseau**

Université Paris VI - LMM CNRS UMR 7607 E-mail: mrousse@moka.ccr.jussieu.fr

**Bernard Collet**

Université Paris VI - LMM CNRS UMR 7607 E-mail: bc@ccr.jussieu.fr

**Antonio Lopes Gama**

Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Mecânica  
24210-000, Niterói, RJ, Brasil. E-mail: agama@mec.uff.br

***Resumo.** Neste trabalho utilizou-se um modelo onde a camada de adesivo entre duas placas coladas é representada por molas distribuídas. Através desta abordagem, a propagação de ondas de Lamb foi estudada para diferentes condições da camada de adesivo, onde defeitos ou baixas propriedades desta camada foram simulados através da modificação da rigidez das molas. Os espectros de dispersão de ondas de Lamb foram determinados para diversas situações. Diferenças significativas foram verificadas em relação ao espectro de dispersão de ondas para uma condição ideal de adesão, comprovando as potenciais aplicações de ondas guiadas na inspeção de estruturas coladas.*

***Palavras-chave:** placas coladas, ondas de Lamb, integridade estrutural.*

### **1. INTRODUÇÃO**

Principalmente a partir da metade do século vinte, os avanços na área dos materiais e a constante necessidade de estruturas mais eficientes, apresentando menor peso, alta resistência e confiabilidade, têm motivado o desenvolvimento de novos métodos de união para fins estruturais. A união através de adesivos surge como uma técnica promissora devido ao baixo peso das juntas coladas, possibilidade de união entre materiais diferentes, diminuição dos problemas de corrosão, boa resistência à fadiga, possibilidade de uniões em formas complexas e atenuação de choques (Heller, K. *et al.*, 2000). De fato, nota-se um aumento da aplicação deste método de união em processos industriais, substituindo em muitos casos, as outras técnicas de união correntes, como a soldagem e a rebiteagem.

O processo de união através de adesivos, entretanto, apresenta inconvenientes como baixa resistência à temperatura e absorção de água. Componentes colados também podem apresentar defeitos que venham a comprometer o seu desempenho, entre eles a presença de vazios e porosidades, adesão ineficiente e baixa resistência da camada de adesivo (Guyott, C.C.H. *and* Cawley, P., 1988). Uma boa qualidade da adesão é somente garantida através de ensaios específicos, com os quais se é capaz de determinar as características mecânicas e de resistência da adesão, além de detectar defeitos em seu interior (Kundu, T. *and* Maslov, K., 1996). Para estes fins, existem ensaios destrutivos e não destrutivos. Dentre os métodos de controle não destrutivos, os

ensaios por ultra-som são os mais utilizados, entretanto os métodos tradicionais de inspeção por ultra-som, cujo princípio baseia-se na análise de ecos anormais refletidos pelos defeitos, apresentam inconvenientes no caso da inspeção de juntas coladas (Mal, A.K. et al., 1989). Devido à pequena espessura da camada de adesivo, ondas ultra-sônicas refletidas pelas interfaces do adesivo normalmente não podem ser separadas no domínio do tempo, e interferem (Lavrentyev, A. I. and Rokhlin, S.I., 1998). Além disso, tal tipo de processo não é prático na inspeção de grandes superfícies, tornando-se pois demorado e dispendioso, além da inconveniente necessidade da presença do fluido de acoplamento.

Uma alternativa empregada para análise das finas camadas de adesivo é a aplicação de ondas guiadas na região colada. Como vantagens desta metodologia pode-se citar a intensificação dos efeitos das grandezas medidas sobre a onda que se propaga, a capacidade de testar camadas de adesivo muito finas, o fato de serem menos sensíveis às alterações sofridas pelos aderentes e a possibilidade de inspecionar grandes áreas a um custo inferior (Singher, L. et al., 1994). As ondas de Lamb tem sido cada vez mais utilizadas para testes não destrutivos de placas coladas devido à possibilidade de inspecionar grandes áreas, uma vez que estas podem se propagar por longas distâncias. Também apresentam uma infinidade de modos de propagação que podem ser escolhidos para finalidades específicas em virtude de sua maior sensibilidade à determinados aspectos como tipos de defeitos, materiais e geometria do componente inspecionado (Mustafa, V. et al., 1997). Contudo, técnicas de inspeção baseadas em ondas de Lamb são geralmente mais complicadas em relação às técnicas de inspeção por ultra-som tradicionais, devido à sua natureza dispersiva e aos vários modos que podem se propagar simultaneamente em uma mesma frequência. Novas metodologias de inspeção utilizando ondas de Lamb, onde são utilizados transdutores piezoelétricos interdigitais e técnicas de geração de ondas ultra-sônicas por laser, têm sido investigados e já mostram resultados encorajadores (Badcock, B.A. and Birt, E.A., 1998, Monkhouse, R.S.C. et al., 1998, Heller, K. et al., 2000).

Com relação aos modelos empregados para o estudo de uniões coladas através de propagação de ondas, são adotados normalmente dois tipos. O primeiro é um modelo reológico da interface onde a camada de adesivo é inteiramente substituída por molas que trabalham em tração e compressão, ou em cisalhamento. O contato perfeito, o deslizamento e a delaminação aparecem como casos limites. A segunda abordagem consiste em levar em conta a camada de adesivo na sua integridade. O contato entre o adesivo e os aderentes é então suposto perfeito enquanto que a melhor ou pior qualidade da colagem é caracterizada pelo valor maior ou menor das impedâncias acústicas (longitudinal e transversal) médias do adesivo.

Neste trabalho, um modelo baseado na distribuição contínua de molas (Jones, J.P. and Whittier, J.S., 1967; Lavrentyev, A.I., and Rokhlin, S.I., 1994; Pecorari, C. and Kelly, P.A., 2000) foi utilizado para representar a camada de adesivo, com a finalidade de estudar a propagação de ondas de Lamb em placas coladas. Pretende-se avaliar através do modelo adotado, a influência de defeitos ou baixas propriedades da camada de adesivo sobre os modos de propagação de ondas de Lamb. Os defeitos ou baixas propriedades da camada de adesivo, podem ser reproduzidos principalmente através da modificação da rigidez das molas (Pecorari, C. and Kelly; P.A., 2000, Singher, L. et al., 1994; Xu, P.C., and Datta, S.K., 1990). Os espectros de dispersão das ondas de Lamb foram então determinados para diversas condições da camada de adesivo, modificando-se a rigidez das molas. Verificou-se que variações significativas, em relação às curvas de dispersão para uma condição ideal de união, ocorrem a medida em que a rigidez das molas é alterada. O objetivo deste estudo é verificar a possibilidade da utilização de ondas de Lamb para monitorar as condições do adesivo (Heller, K. et al., 2000, Grondel, S. et al, 1999, Singher, L. et al., 1994).

## **2. PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE LAMB EM UMA PLACA INFINITA**

Os conceitos básicos sobre propagação de ondas de Lamb serão introduzidos através da análise da propagação de ondas em uma única placa, infinita e homogênea, de espessura  $2h$ , conforme mostra a Fig.(1). As obras de Achenbach, J.D., 1975 e Graff, K.F., 1991, são as referências básicas

para esta seção. Considera-se um estado de deformações planas no plano  $(o,x,z)$  e conseqüentemente as ondas que podem se propagar na placa são ondas longitudinais (P ou L) e transversais (T ou SV). A equação de dispersão para este caso será obtida de acordo com os procedimentos descritos a seguir.

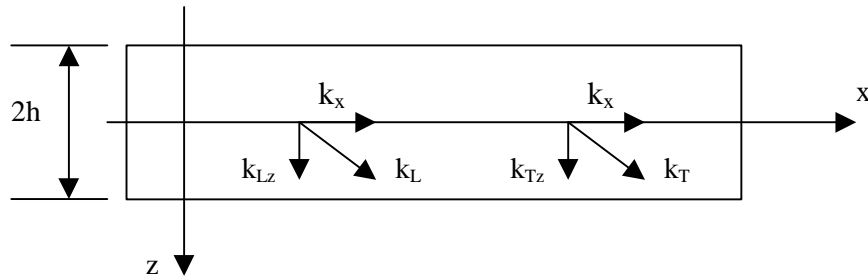


Figura 1. Placa infinita de espessura  $2h$ .

Para um meio isotrópico homogêneo, as equações que governam o movimento, podem ser escritas em função dos deslocamentos como:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{m}$  são os coeficientes de Lamé. Através da decomposição de Helmholtz o campo de deslocamentos será expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{N}} \varphi + \tilde{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{y} \quad (2)$$

onde  $\varphi$  é um potencial escalar e  $\mathbf{y}$  um potencial vetorial, respeitando a condição  $\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{y} = 0$ .

Ondas harmônicas podem se propagar ao longo da placa através de reflexões sucessivas nas duas superfícies livres. Numa situação de regime permanente, o conjunto de ondas incidentes e refletidas formam, entretanto, ondas estacionárias através da espessura, de forma que a propagação ocorre essencialmente ao longo da placa. Para um comportamento harmônico de frequência  $\omega$ , propõe-se um potencial escalar e um potencial vetorial representados pela soma de componentes associadas com o movimento no sentido positivo e negativo de  $z$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \mathbf{j}_d e^{i(k_x x + k_{Lz} z - \omega t)} + \mathbf{j}_i e^{i(k_x x - k_{Lz} z - \omega t)} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}_d e^{i(k_x x + k_{Tz} z - \omega t)} + \mathbf{y}_i e^{i(k_x x - k_{Tz} z - \omega t)} \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $k_x$  e  $k_{Lz}$  são componentes do vetor número de onda longitudinal e  $k_x$  e  $k_{Tz}$ , são componentes do vetor número de onda transversal. Os subscritos d e i, referem-se respectivamente as componentes que se propagam no sentido positivo e negativo de  $z$ .

Uma maneira interessante para descrever a propagação das ondas na placa é agrupar as componentes simétricas e anti-simétricas do potencial escalar e do potencial vetorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= [S_L \cos(k_{Lz} z) + A_L \text{sen}(k_{Lz} z)] e^{i(k_x x - \omega t)} \\ \mathbf{y} &= [A_T \cos(k_{Tz} z) + S_T \text{sen}(k_{Tz} z)] e^{i(k_x x - \omega t)} \end{aligned} \quad (4)$$

onde S e A representam respectivamente as componentes simétricas e anti-simétricas e os subscritos L e T referem-se as componentes de ondas longitudinais e transversais respectivamente. As componentes do vetor deslocamento  $\mathbf{u}$  podem ser então determinadas substituindo as equações (4) na eq. (2) :

$$\begin{aligned} u_x &= [ik_x S_L \cos(k_{Lz} z) + ik_x A_L \text{sen}(k_{Lz} z) + k_{Tz} A_T \text{sen}(k_{Tz} z) - k_{Tz} S_T \cos(k_{Tz} z)] e^{i(k_x x - \omega t)} \\ u_z &= [-k_{Lz} S_L \text{sen}(k_{Lz} z) + k_{Lz} A_L \cos(k_{Lz} z) + ik_x A_T \cos(k_{Tz} z) + ik_x S_T \text{sen}(k_{Tz} z)] e^{i(k_x x - \omega t)} \end{aligned} \quad (5)$$

Utilizando a Lei de Hooke, as tensões podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{xz} &= \mathbf{m} \left[ -2ik_{Lz} k_x S_L \text{sen}(k_{Lz} z) + S_T (k_T^2 - 2k_x^2) \text{sen}(k_{Tz} z) + \right. \\ &\quad \left. + 2ik_{Lz} k_x A_L \cos(k_{Lz} z) + A_T (k_T^2 - 2k_x^2) \cos(k_{Tz} z) \right] e^{i(k_x x - \omega t)} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{zz} &= \mathbf{m} \left[ (k_T^2 - 2k_x^2) S_L \cos(k_{Lz} z) + 2ik_{Tz} k_x S_T \cos(k_{Tz} z) + \right. \\ &\quad \left. - (k_T^2 - 2k_x^2) A_L \text{sen}(k_{Lz} z) - 2ik_{Tz} k_x A_T \text{sen}(k_{Tz} z) \right] e^{i(k_x x - \omega t)} \end{aligned}$$

Por outro lado, as condições de contorno para as superfícies livres da placa permitem escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{xz} = 0 &\Rightarrow z = \pm h \nabla x, t \\ \mathbf{s}_{zz} = 0 &\Rightarrow z = \pm h \nabla x, t \end{aligned} \quad (7)$$

Aplicando estas condições de contorno, obtém-se um sistema de equações que será decomposto em dois sistemas: um para os modos simétricos e outro para os modos anti-simétricos.

Para os modos simétricos obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -2ik_{Lz} k_x \text{sen}(k_{Lz} h) & (k_T^2 - 2k_x^2) \text{sen}(k_{Tz} h) \\ -(k_T^2 - 2k_x^2) \cos(k_{Lz} h) & 2ik_{Tz} k_x \cos(k_{Tz} h) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_L \\ S_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

e para os modos anti-simétricos:

$$\begin{bmatrix} 2ik_{Lz} k_x \cos(k_{Lz} h) & (k_T^2 - 2k_x^2) \cos(k_{Tz} h) \\ (k_T^2 - 2k_x^2) \text{sen}(k_{Lz} h) & 2ik_{Tz} k_x \text{sen}(k_{Tz} h) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_L \\ A_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

O gráfico apresentado na Fig.(2) mostra as curvas que relacionam a frequência adimensional ( $\omega h / C_T$ ) com a componente na direção "x" de diferentes vetores de onda adimensionalizados pela metade da espessura da placa ( $k_x h$ ).

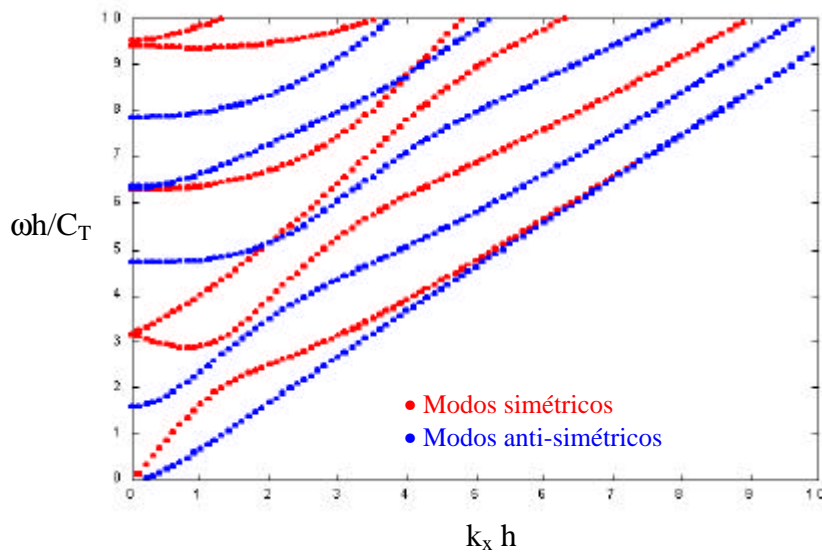


Figura 2. Espectro de dispersão de ondas de Lamb para uma placa de alumínio.

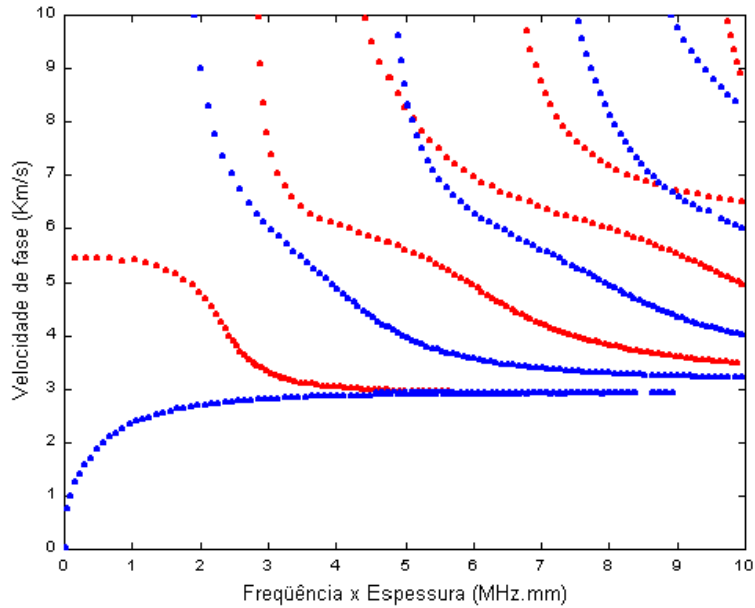


Figura 3. Curvas de velocidade de fase para uma placa de alumínio.

São mostrados os modos simétricos e anti-simétricos de uma placa de alumínio ( $E = 71 \times 10^9 Pa$  e  $\nu = 0,3$ ). Estas curvas correspondem às soluções não nulas das equações (8) e (9). A Fig. (3) mostra as curvas de velocidade de fase.

### 3. PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE LAMB EM DUAS PLACAS COLADAS

Nesta seção, um modelo baseado na distribuição contínua de molas foi utilizado para representar a camada de adesivo que une duas placas, com a finalidade de estudar as mudanças sofridas pelos modos de Lamb devido às alterações do adesivo. Através deste modelo, a presença de defeitos ou baixas propriedades da camada de adesivo podem ser reproduzidas através da modificação da rigidez das molas (Pecorari, C. and Kelly; P.A., 2000, Singher, L. et al., 1994; Xu, P.C., and Datta, S.K., 1990 e de Barros, S.R., 2001). O caso analisado é o de duas placas coladas, homogêneas e infinitas, de espessuras  $h_1$  e  $h_2$ , conforme mostra a Fig. (4).

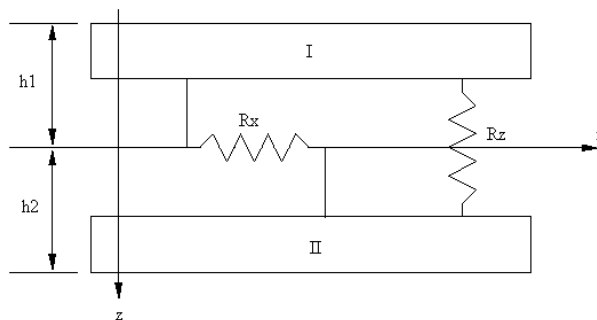


Figura 4. Representação da camada de adesivo através de molas distribuídas.

As equações obtidas para os deslocamentos  $u_x$ ,  $u_z$  (eq. (5)) e para as tensões  $s_{xz}$ ,  $s_{zz}$  (eq. (6)) continuam válidas para esse novo modelo. Será adotada entretanto, uma nova notação para especificar em qual das placas as equações estão sendo aplicadas. Desta forma, os sobrescritos ( I ) e ( II ) serão utilizados para a placa superior e inferior respectivamente. Aplicando as condições de contorno para as superfícies livres obtém-se as seguintes equações :

para  $\mathbf{s}_{xz}^{(I)} \Big|_{z=-h_1} = 0$

$$2ik_{Lz}k_x \text{sen}(k_{Lz}h_1)S_L^{(I)} - (k_T^2 - 2k_x^2)\text{sen}(k_{Tz}h_1)S_T^{(I)} + 2ik_{Lz}k_x \cos(k_{Lz}h_1)A_L^{(I)} + (k_T^2 - 2k_x^2)\cos(k_{Tz}h_1)A_T^{(I)} = 0 \quad (10)$$

para  $\mathbf{s}_{zz}^{(I)} \Big|_{z=-h_1} = 0$

$$-(k_T^2 - 2k_x^2)\cos(k_{Lz}h_1)S_L^{(I)} + 2ik_{Tz}k_x \cos(k_{Tz}h_1)S_T^{(I)} + (k_T^2 - 2k_x^2)\text{sen}(k_{Lz}h_1)A_L^{(I)} + 2ik_{Tz}k_x \text{sen}(k_{Tz}h_1)A_T^{(I)} = 0 \quad (11)$$

para  $\mathbf{s}_{xz}^{(II)} \Big|_{z=h_2} = 0$

$$-2ik_{Lz}k_x \text{sen}(k_{Lz}h_2)S_L^{(II)} + (k_T^2 - 2k_x^2)\text{sen}(k_{Tz}h_2)S_T^{(II)} + 2ik_{Lz}k_x \cos(k_{Lz}h_2)A_L^{(II)} + (k_T^2 - 2k_x^2)\cos(k_{Tz}h_2)A_T^{(II)} = 0 \quad (12)$$

para  $\mathbf{s}_{zz}^{(II)} \Big|_{z=h_2} = 0$

$$-(k_T^2 - 2k_x^2)\cos(k_{Lz}h_2)S_L^{(II)} + 2ik_{Tz}k_x \cos(k_{Tz}h_2)S_T^{(II)} - (k_T^2 - 2k_x^2)\text{sen}(k_{Lz}h_2)A_L^{(II)} + 2ik_{Tz}k_x \text{sen}(k_{Tz}h_2)A_T^{(II)} = 0 \quad (13)$$

Como a camada de adesivo está sendo representada pôr uma distribuição contínua de molas, as condições de interface das placas serão obtidas considerando-se os esforços normais e tangenciais na camada de adesivo conforme mostra a Fig.(5).

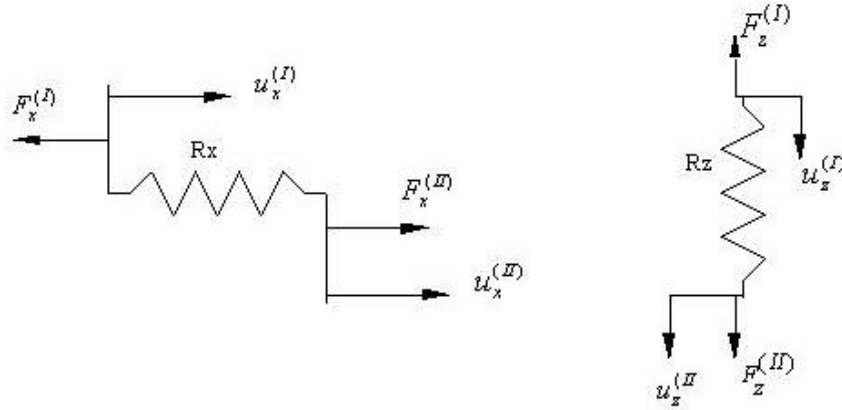


Figura 5. Diagrama de esforços nas molas que representam a camada de adesivo.

Portanto, pode-se chegar as seguintes equações de equilíbrio na interface:

$$\mathbf{s}_{xz}^{(I)} = \hat{R}_x(u_x^{(II)} - u_x^{(I)}) \quad (14)$$

$$\mathbf{s}_{zz}^{(I)} = \hat{R}_z(u_z^{(II)} - u_z^{(I)}) \quad (15)$$

$$\mathbf{s}_{xz}^{(II)} \Big|_{z=0^+} = \mathbf{s}_{xz}^{(I)} \Big|_{z=0^-} \quad (16)$$

$$\mathbf{s}_{zz}^{(II)} \Big|_{z=0^+} = \mathbf{s}_{zz}^{(I)} \Big|_{z=0^-} \quad (17)$$

onde  $\hat{R}x = \frac{Rx}{S}$  e  $\hat{R}z = \frac{Rz}{S}$ , sendo S a área da seção da camada de adesivo no plano da placa.

Utilizando as equações (5) e as equações (6) para  $z = 0$ , pode-se obter as expressões para os deslocamentos e tensões na interface:

$$u_x^{(I)} \Big|_{z=0} = [iS_L^{(I)}k_x - S_T^{(I)}k_{Tz}]e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (18)$$

$$u_z^{(I)} \Big|_{z=0} = [A_L^{(I)}k_{Lz} + iA_T^{(I)}k_x]e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (19)$$

$$u_x^{(II)} \Big|_{z=0} = [iS_L^{(II)}k_x - S_T^{(II)}k_{Tz}]e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (20)$$

$$u_z^{(II)} \Big|_{z=0} = [A_L^{(II)}k_{Lz} + iA_T^{(II)}k_x]e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (21)$$

$$s_{xz}^{(I)} \Big|_{z=0^-} = \mathbf{m} [2iA_L^{(I)}k_{Lz}k_x + A_T^{(I)}(k_T^2 - 2k_x^2)]e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (22)$$

$$s_{zz}^{(I)} \Big|_{z=0^-} = \mathbf{m} [-S_L^{(I)}(k_T^2 - 2k_x^2) + 2iS_T^{(I)}k_{Tz}k_x]e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (23)$$

$$s_{xz}^{(II)} \Big|_{z=0^+} = \mathbf{m} [2iA_L^{(II)}k_{Lz}k_x + A_T^{(II)}(k_T^2 - 2k_x^2)]e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (24)$$

$$s_{zz}^{(II)} \Big|_{z=0^+} = \mathbf{m} [-S_L^{(II)}(k_T^2 - 2k_x^2) + 2iS_T^{(II)}k_{Tz}k_x]e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (25)$$

Substituindo as equações (18), (20) e (22) na eq. (14), temos:

$$ik_x S_L^{(I)} - k_{Tz} S_T^{(I)} - ik_x S_L^{(II)} + k_{Tz} S_T^{(II)} + \frac{\mathbf{m}}{\hat{R}x} 2ik_{Lz} k_x A_L^{(II)} + \frac{\mathbf{m}}{\hat{R}x} (k_T^2 - 2k_x^2) A_T^{(II)} = 0 \quad (26)$$

Substituindo as equações (19), (21) e (23) na eq. (15), temos:

$$k_{Lz} A_L^{(I)} + ik_x A_T^{(I)} - \frac{\mathbf{m}}{\hat{R}z} (k_T^2 - 2k_x^2) S_L^{(II)} + \frac{\mathbf{m}}{\hat{R}z} 2ik_{Tz} k_x S_T^{(II)} - k_{Lz} A_L^{(II)} - ik_x A_T^{(II)} = 0 \quad (27)$$

Substituindo as equações (22) e (24) na eq. (16), temos:

$$2iA_L^{(I)}k_{Lz}k_x + A_T^{(I)}(k_T^2 - 2k_x^2) - 2iA_L^{(II)}k_{Lz}k_x - A_T^{(II)}(k_T^2 - 2k_x^2) = 0 \quad (28)$$

Substituindo as equações (23) e (25) na eq. (17), temos:

$$-S_L^{(I)}(k_T^2 - 2k_x^2) + 2iS_T^{(I)}k_{Tz}k_x + S_L^{(II)}(k_T^2 - 2k_x^2) - 2iS_T^{(II)}k_{Tz}k_x = 0 \quad (29)$$

As equações (10) a (13) e (26) a (29) formam o sistema de equações que permite obter o espectro de dispersão de ondas guiadas do tipo Lamb para duas placas coladas.

#### 4. ESPECTROS DE DISPERSÃO DE ONDAS GUIADAS

Um programa desenvolvido em ambiente MATLAB, foi utilizado para obter as curvas de dispersão para várias condições do adesivo (de Barros, S.R., 2001). Para verificação do programa, a adesão perfeita foi simulada atribuindo-se um valor muito alto para as constantes  $\hat{R}x$  e  $\hat{R}z$ . A rigidez da camada de adesivo é então considerada infinita. Para esta condição, o espectro de dispersão de ondas obtido para as duas placas coladas, foi comparado ao espectro de dispersão de uma placa única de espessura equivalente a  $2h$ . Os resultados apresentaram uma concordância perfeita. Nas simulações posteriores, a rigidez das molas foi reduzida gradativamente, com o

objetivo de simular condições de adesão deficientes. O comportamento das curvas de velocidade de fase em relação a variação do valor das constantes de mola  $\hat{R}_x$  e  $\hat{R}_z$  foi então observado.

A comparação entre as curvas de dispersão para uma placa de espessura equivalente a  $2h$  e as curvas de dispersão para  $\hat{R}_x$  e  $\hat{R}_z$  igual a  $1 \times 10^{17} \text{ N/m}^3$  mostra que este valor de rigidez corresponde numericamente a infinito. De fato, para valores de  $\hat{R}_x$  e  $\hat{R}_z$  superiores as curvas de dispersão não apresentam mudança.

Nas Figuras (6) e (7), as mudanças sofridas pelas curvas de velocidade de fase devido a redução, respectivamente, de  $\hat{R}_x$  e  $\hat{R}_z$  é verificada. Em ambos os casos os resultado são comparados com a condição ideal de adesão ( $\hat{R}_x$  e  $\hat{R}_z$  igual a  $1 \times 10^{17} \text{ N/m}^3$ ).

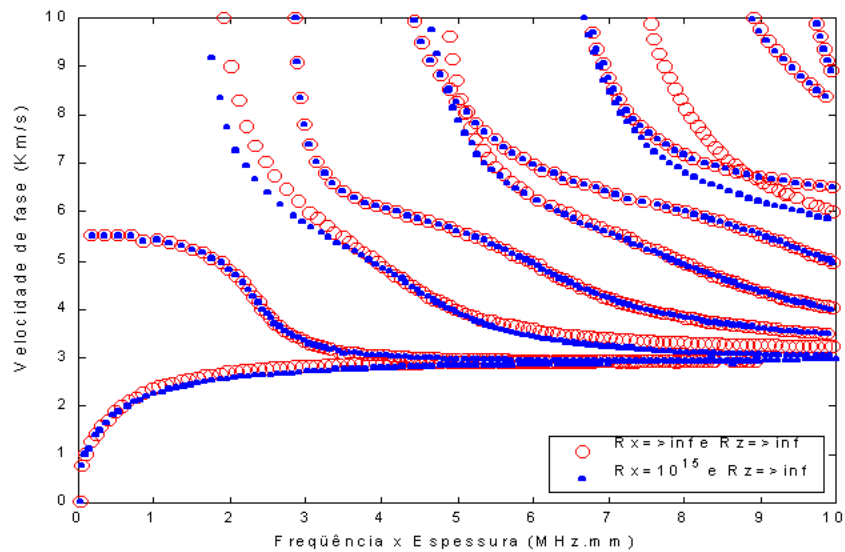


Figura 6. Variação das curvas de velocidade de fase devido a redução de  $\hat{R}_x$  para  $10^{15} \text{ N/m}^3$ .

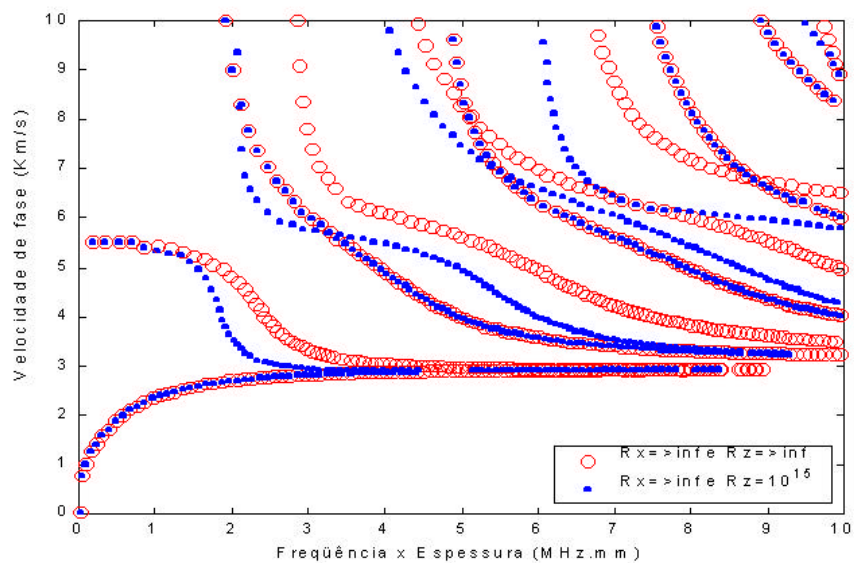


Figura 7. Variação das curvas de velocidade de fase devido a redução de  $\hat{R}_z$  para  $10^{15} \text{ N/m}^3$ .



Observando as equações (5) para  $z = 0$ , pode-se verificar a influencia de  $\widehat{R}_x$  e  $\widehat{R}_z$  nos modos simétricos (parte simétrica de  $u_x = 0$ ) e anti-simétricos (parte anti-simétrica de  $u_z = 0$ ). Os gráficos comprovam que a variação de  $\widehat{R}_x$  não tem efeito sobre os modos simétricos, fazendo variar somente os modos anti-simétricos. Por outro lado, a variação de  $\widehat{R}_z$  não tem efeito sobre os modos anti-simétricos, fazendo variar somente os modos simétricos. A variação da curva de velocidade de fase em função da variação de  $\widehat{R}_x$  para o primeiro modo anti-simétrico A0 é mostrada em detalhe na Fig. (8 (a)). Já a Fig. (8(b)), mostra a curva de velocidade de fase para o primeiro modo simétrico S0 em função da variação de  $\widehat{R}_z$ .

Estes resultados mostram uma redução da velocidade de fase dos modos A0 e S0, respectivamente, a medida em que a rigidez da camada de adesivo é reduzida. Estas variações na velocidade de fase podem ser utilizadas para monitorar as condições do adesivo através de ensaios de ultra-som onde determinados modos de ondas de Lamb são excitados (Heller, K. et al., 2000; Mustafa, V. et al., 1997).

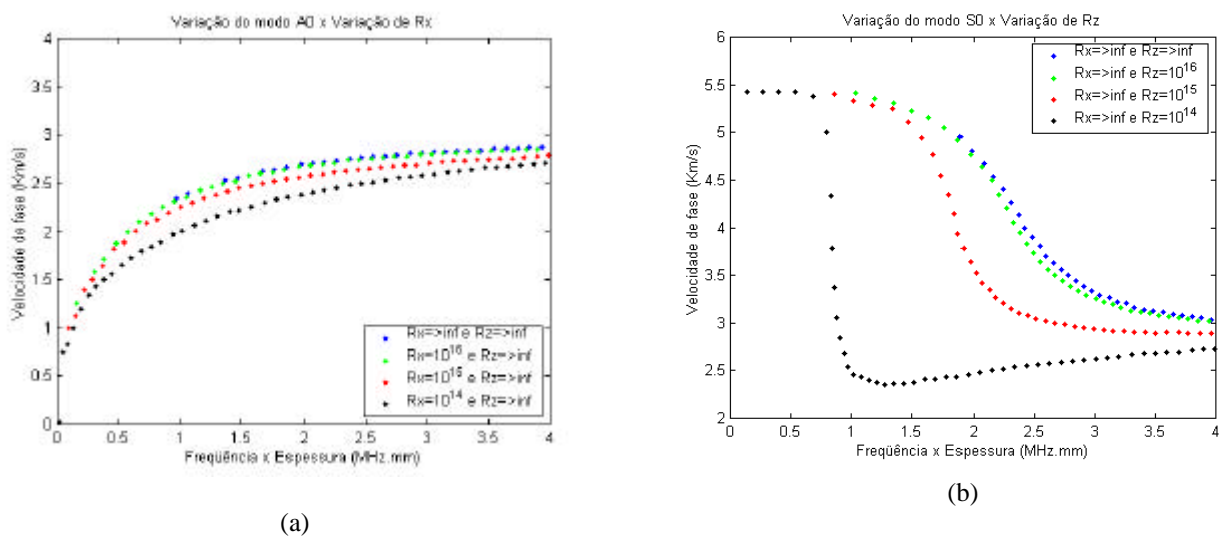


Figura 8. Variação da curva de velocidade de fase do primeiro modo anti-simétrico (A0) em função da variação de  $\widehat{R}_x$  (a) e variação da curva de velocidade de fase para o primeiro modo simétrico (S0) em função da variação de  $\widehat{R}_z$  (b).

## 5. CONCLUSÕES

Um modelo baseado na distribuição contínua de molas foi utilizado para representar a camada de adesivo no estudo da propagação de ondas de Lamb em placas coladas. Foram obtidos espectros de dispersão de ondas para diversas condições da camada de adesivo, modificando-se as constantes de mola. As curvas de dispersão determinadas para a condição de adesão perfeita ( $R_x$  e  $R_z \rightarrow \infty$ ) foram utilizadas como referência para comparações com curvas de dispersão para condições intermediárias de rigidez. Variações da velocidade de fase dos modos de onda do tipo Lamb foram observados a medida em que a rigidez da camada de adesivo foi reduzida. Estas variações na velocidade de fase podem ser utilizadas para monitorar as condições do adesivo através de ensaios de ultra-som onde determinados modos de ondas de Lamb são excitados. Além disso, a comparação entre os resultados teóricos e experiências acústicas permite avaliar o dano da interface. O dano, definido como uma relação entre a rigidez infinita e a rigidez avaliada acusticamente, pode ser usado em simulações de ensaios destrutivos.

## 6. REFERÊNCIAS

- Achenbach, J.D., 1975, Wave propagation in elastic solids, North Holland, Amsterdam.
- Badcock, R.A. and Birt, E.A., 1998, "The use of 0-3 piezocomposite embedded Lamb wave sensors for damage detection in advanced fibre composites", 4<sup>th</sup> ESSM and 2<sup>nd</sup> MIMR conference, Harrogate.
- de Barros, S.R., 2001, "Propagação de ondas SH e ondas de Lamb em placas coladas", dissertação de mestrado apresentada em 10 de agosto de 2001 no Depto. de Eng. Mec. da UFF.
- Chiu, W.K., Galea, S.C., Koss, L.L., and Rajic, N., 2000, "Damage detection in bonded repairs using piezoceramics", IOP Publishing Ltd.
- Graff, K.F., 1991, Wave motion in elastic solids, Dover Publications.
- Grondel, S., Assaad, J., Delebarre, C., 1999, "The propagation of Lamb waves in multilayered plates: phase-velocity measurement", Meas. Sci. Technol., 10, pp. 348-353.
- Guyott, C.C.H. and Cawley, P., 1988, "The ultrasonic vibration characteristics of adhesive joints", J. Acoust. Soc. Am. 83(2), pp.632-640.
- Heller, K., Jacobs, L.J., Qu, J., 2000, "Characterization of adhesive bond properties using Lamb waves", NDT&E, 33, pp. 555-563.
- J.P. Jones e J.S. Whittier, 1967, "Waves at flexibly bonded interface", J Appl. Mech, p.905-908.
- Kundu, T., and Maslov, K., 1997, "Material Interface Inspection by Lamb waves", Int. J. Solids Structures, 34, 3885-3901.
- Lavrentyev, A. I. and Rokhlin, S.I., 1998, "Ultrasonic spectroscopy of imperfect contact interfaces between a layer and two solids", J. Acoust. Soc. Am. 103(2).
- Mal, A. K., XU, P. C., and Bar-Cohen, Y., 1989, "Analysis of lake Lamb waves in bonded plates", Int. J. Eng. Sci., 27, 779-791.
- Monkhouse, R.S.C., Wilcox, P W., Lowe, M.J.S., Dalton, R.P. and Cawley, P., The rapid monitoring of structures using interdigital Lamb wave transducers, 4<sup>th</sup> ESSM and 2<sup>nd</sup> MIMR conference, Harrogate, (1998).
- Mustafa, V., Chahbaz, A., Hay, D.R., Brassard, M., Dubois, S., 1997, "Imaging of Disbond in Adhesive Joints with Lamb Waves", NDTnet.
- Pecorari, C. and Kelly; P.A., 2000, "The quasistatic approximation for a cracked interface between a layer and a substrate", J. Acoust. Soc. Am. 107(5), pp. 2454-2461.
- Singher, L., Segal, Y., Segal, E. and Shamir, J., 1994, "Considerations in bond strength evaluation by ultrasonic guided waves", J. Acoust. Soc. Am. 96(4).
- Xu, P.C., and Datta, S.K., 1990, "Guided waves in a bonded plate: A parameter study", J. Appl. Phys. 67(11), pp. 6779-6786.

## PROPAGATION OF LAMB WAVES IN BONDED PLATES

*Abstract. A model based on distributions of springs and masses is employed to simulate the propagation of Lamb waves in aluminum bonded plates. Through this approach, the imperfections of the adhesive layer was reproduced by changing the spring constants. Comparisons among the wave dispersion spectra for different conditions of the adhesive layer, show that ultrasonic guided waves may provide a description of the adhesive layer.*

**Keywords.** bonded plates, Lamb waves, health monitoring