



## **A ESCALA DISSIPATIVA DE KOLMOGOROV: FLUIDO DE CARREAU-YASUDA**

### **Luíz Cláudio Fialho Andrade**

Departamento de Engenharia Mecânica, Centro Tecnológico, Universidade Federal do Pará – UFPA, Rua Augusto Corrêa, 01 CEP: 66075-110 – Caixa Postal 479

E-mail: [lccffaa@ig.com.br](mailto:lccffaa@ig.com.br)

### **Jamilson Araújo Petronílio**

Departamento de Engenharia Mecânica, Centro Tecnológico, Universidade Federal do Pará–UFPA, Rua Augusto Corrêa, 01 CEP: 66075-110 – Caixa Postal 479

E-mail: [jamilson@ufpa.br](mailto:jamilson@ufpa.br)

### **Daniel Onofre de Almeida Cruz**

Departamento de Engenharia Mecânica, Centro Tecnológico, Universidade Federal do Pará–UFPA, Rua Augusto Corrêa, 01 CEP: 66075-110 – Caixa Postal 479

E-mail: [doac@ufpa.br](mailto:doac@ufpa.br)

**RESUMO.** *A grande maioria dos escoamentos encontrados na natureza e em aplicações práticas e industriais é turbulenta; em muitas dessas situações temos os fluidos não-newtonianos. A solução rigorosa de quaisquer problemas que envolvam tais escoamentos é de difícil obtenção devido a necessidade de discretizações muito refinadas das equações de conservação para uma descrição adequada do escoamento. Para o caso newtoniano Kolmogorov, utilizando análise dimensional, conseguiu chegar ao comprimento das menores escalas de turbulência; no caso não-newtoniano contudo, este procedimento ainda é motivo de controvérsia. Este trabalho tem como objetivo propor um comprimento característico para as menores escalas de turbulência (menores turbilhões) para o caso não-newtoniano utilizando o modelo de Carreau-Yasuda, de forma a obter um parâmetro necessário para a discretização espacial e posterior aplicação em modelos de turbulência. Para encontrar a escala dissipativa utilizou-se um procedimento análogo ao de Kolmogorov, para fluidos newtonianos. O resultado obtido reduz-se ao caso newtoniano, em função somente do número de Reynolds, quando o índice de comportamento do escoamento  $n$  aproxima-se de 1.*

**Palavras-Chaves:** *Turbulência, Fluidos Não-newtonianos, Escala Dissipativa, Análise Dimensional.*

## **1. INTRODUÇÃO**

Existem diversas aplicações industriais onde o escoamento turbulento de fluidos não-newtonianos está presente, como no processamento de polpas de frutas e derivados do leite na indústria de alimentos e na produção da indústria química como tintas, colas, detergentes, plásticos e mais uma infinidade de outros produtos. Esta grande ocorrência, somada ao desenvolvimento de novos processos e produtos ainda em processo de implementação em escala industrial são fatores determinantes para que pesquisadores concentrem esforços em analisar problemas associados ao escoamento turbulento de fluidos não-newtonianos (Andrade, 2002).

Os escoamentos turbulentos são caracterizados fisicamente pela multiplicidade de escalas, ou pela presença de vórtices de várias dimensões que se misturam por toda a camada cisalhante, e pela ocorrência de flutuações tridimensionais de pressão, temperatura e velocidade (Silva Freire et

al., 1998). Desta forma, a solução *rigorosa* de quaisquer problemas que envolvam tais escoamentos, resolvendo-se as equações de Navier-Stokes, é de difícil obtenção devido a necessidade de discretizações muito refinadas das equações de conservação para uma descrição adequada do escoamento. No caso newtoniano, Kolmogorov (Landau e Lifshitz) utilizando argumentos de análise dimensional determinou a ordem de grandeza das menores escalas do escoamento turbulento, caracterizando assim as dimensões da malha a ser utilizada em uma solução numérica. Para fluidos Não-newtonianos esse procedimento ainda é motivo de controvérsias não existindo ainda uma análise definitiva do fenômeno.

Neste trabalho busca-se descrever o escoamento turbulento através da proposição do comprimento característico para as menores escalas de turbulência (menores turbilhões) para o caso não-newtoniano utilizando o modelo reológico de Carreau-Yasuda. A análise dimensional se constitui em um método prático e viável de resolução de problemas na mecânica dos fluidos, que apesar de não demandar tantos recursos apresenta resultados satisfatórios. Para encontrar o comprimento das menores escalas, utilizou-se um procedimento análogo ao de Kolmogorov para o caso newtoniano, partindo-se das equações de Navier-Stokes e da continuidade.

## 2. A ESCALA DISSIPATIVA DE KOLMOGOROV: FLUIDO DE CARREAU-YASUDA

A viscosidade não-newtoniana  $\mu = \mu(\dot{\gamma})$ , quando os parâmetros reológicos são ajustados segundo o modelo de Carreau-Yasuda, é dada por:

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_o - \mu_{\infty}) \left[ 1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (1)$$

A energia suprida por unidade de massa, para as menores escalas de turbulência, pode ser descrita em função da energia cinética fornecida ao turbilhão pelo escoamento médio. A taxa desta energia é dada por:

$$\dot{\epsilon}_S = \frac{\dot{E}_{CIN}}{m} = \frac{u^2}{\ell/u} = \frac{u^3}{\ell} \quad (2)$$

onde  $\ell$  e  $u$  denotam a dimensão e a velocidade características dos menores turbilhões.

A taxa de energia dissipada pelas menores escalas, devido a ação da viscosidade, para o caso de Carreau-Yasuda é descrita pela expressão:

$$\dot{\epsilon}_D = \frac{\dot{\tau}_L}{\rho} = \frac{u/\ell}{\ell/u} \left[ v_{\infty} + (v_o - v_{\infty}) \left[ 1 + \left( \lambda \frac{u}{\ell} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \right] = \frac{u^2}{\ell^2} \theta \quad (3)$$

Segundo a hipótese de equilíbrio têm-se que  $\dot{\epsilon}_S = \dot{\epsilon}_D$  ou  $\dot{\epsilon}_S/\dot{\epsilon}_D = 1$ , ou ainda, como para escoamentos de camada limite as forças de inércia são da mesma ordem de grandeza das forças viscosas, pode-se escrever:

$$Re = \frac{\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}} = \frac{\dot{\epsilon}_S}{\dot{\epsilon}_D} = \frac{u \ell}{\theta} = 1 \quad (4)$$

A Eq. (4) pode ser arranjada como:

$$\dot{\epsilon}_D = \frac{u^2}{\ell^2} \left( \lambda \frac{u}{\ell} \right)^{n-1} \left[ v_\infty \left( \frac{\ell}{\lambda u} \right)^{n-1} + (v_o - v_\infty) \left[ \left( \frac{\ell}{\lambda u} \right)^a + 1 \right]^{\frac{n-1}{a}} \right] \quad (5)$$

Para grandes valores de  $\lambda \frac{u}{\ell}$ , ou seja quando  $\lambda \frac{u}{\ell} \gg 1$ , o que corresponde a grandes valores do gradiente de velocidade instantâneo, têm-se que  $\frac{\ell}{\lambda u} \ll 1 \Rightarrow \frac{\ell}{\lambda u} \cong 0$ , então a Eq. (5) pode ser aproximada pela seguinte equação explícita em u:

$$u \cong \ell \left[ \frac{\dot{\epsilon}_D}{(v_o - v_\infty) \lambda^{n-1}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (6)$$

Expandindo-se em série de Taylor o fator  $\Xi$

$$\Xi = \left[ \left( \frac{\ell}{\lambda u} \right)^a + 1 \right]^{\frac{n-1}{a}}$$

para  $\frac{\ell}{\lambda u} \cong 0$ , o que implica em  $\left( \frac{\ell}{\lambda u} \right)^a \cong 0$ , têm-se que:

$$\Xi = 1 + \frac{n-1}{a} \left( \frac{\ell}{\lambda u} \right)^a \quad (7)$$

Substituindo-se a Eq. (6) em (7), obtêm-se:

$$\Xi = 1 + \frac{n-1}{a} \left[ \frac{1}{\lambda} \left( \frac{(v_o - v_\infty) \lambda^{n-1}}{\dot{\epsilon}_D} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]^a = A_o \quad (8)$$

Com a substituição da Eq. (8) em (6), para  $\lambda \frac{u}{\ell} \gg 1$ , tem-se a seguinte equação explícita em u:

$$u = \ell \left[ \frac{\dot{\epsilon}_D}{\lambda^{n-1} (v_o - v_\infty) A_o} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (9)$$

O fator  $\theta$  contido na Eq. (3) pode ser escrito como:

$$\theta = v_\infty + (v_o - v_\infty) \left( \lambda \frac{u}{\ell} \right)^{n-1} \Xi \quad (10)$$

A substituição da Eq. (8) em (10), com a expansão em série de Taylor do fator  $\Xi$ , fornece como resultado:

$$\theta = v_{\infty} + (v_o - v_{\infty}) \left( \lambda \frac{u}{\ell} \right)^{n-1} A_o = v_o \left[ \frac{v_{\infty}}{v_o} + \left( 1 - \frac{v_{\infty}}{v_o} \right) \left( \lambda \frac{u}{\ell} \right)^{n-1} A_o \right] \quad (11)$$

Substituindo-se a Eq. (11) em (4), obtêm-se:

$$\text{Re}^{-1} = \frac{v_o}{u\ell} \left[ \frac{v_{\infty}}{v_o} + \left( 1 - \frac{v_{\infty}}{v_o} \right) \left( \lambda \frac{u}{\ell} \right)^{n-1} A_o \right] = 1 \quad (12)$$

Adicionando-se a Eq.(9) à (12), tem-se:

$$\ell^2 = \left[ \frac{v_o^{n+1} \lambda^{n-1} (v_o - v_{\infty}) A_o}{\dot{\epsilon}_D} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left[ \frac{v_{\infty}}{v_o} + \left( 1 - \frac{v_{\infty}}{v_o} \right) \left[ \frac{\lambda^2 \dot{\epsilon}_D}{(v_o - v_{\infty}) A_o} \right]^{\frac{n-1}{n+1}} A_o \right] \quad (13)$$

Para as grandes escalas a taxa de energia suprida é dada por:

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{U^3}{L} \quad (14)$$

onde as grandezas L e U estão associadas a dimensão e a velocidade características dos maiores turbilhões.

Pela hipótese de equilíbrio, a energia fornecida pelas grandes escalas é dissipada integralmente pela viscosidade que atua sobre as menores escalas. Desta forma, substituindo-se a Eq. (14) em (8) obtêm-se:

$$A_1 = 1 + \frac{n-1}{a} \left[ \frac{\lambda^2 U^3}{L(v_o - v_{\infty})} \right]^{\frac{-a}{n+1}} = 1 + \frac{n-1}{a} \Gamma^{\frac{-a}{n+1}} \quad (15)$$

A substituição das Eqs. (14) e (15) em (13) resulta em:

$$\ell = \left[ v_o^{n+1} \lambda^{n-1} L (v_o - v_{\infty}) A_1 U^{-3} \right]^{\frac{1}{2(n+1)}} \left[ \frac{v_{\infty}}{v_o} + \left( 1 - \frac{v_{\infty}}{v_o} \right) \Gamma^{\frac{n-1}{n+1}} (A_1)^{\frac{2}{n+1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Com a decomposição dos expoentes de L e U, sendo  $\overline{\text{Re}}_{\Lambda} = L^n U^{2-n} / v_o \lambda^{n-1}$  tem-se que

$$\frac{\ell}{L} = \left[ \overline{\text{Re}}_{\Lambda} \right]^{\frac{-1}{2(n+1)}} A_2 A_3 \quad (17)$$

$$\Gamma = \frac{\lambda^2 U^3}{L(v_o - v_{\infty})} \quad (18)$$

$$A_1 = 1 + \frac{n-1}{a} \Gamma^{\frac{-a}{n+1}} \quad (19)$$

$$A_2 = \left[ \frac{L^{n+1} U^{n+1}}{v_o^n (v_o - v_\infty) A_1} \right]^{\frac{-1}{2(n+1)}} \quad (20)$$

$$A_3 = \left[ \frac{v_\infty}{v_o} + \left( 1 - \frac{v_\infty}{v_o} \right) \Gamma^{\frac{n-1}{n+1}} (A_1)^{\frac{2}{n+1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

A Eq. (17) define a relação entre as menores e as maiores escalas (lineares) de turbulência. Para a relação entre as escalas de tempo, velocidade, vorticidade e energia cinética têm-se, respectivamente:

$$\frac{t}{T} = \left[ \left[ \overline{\text{Re}}_\Lambda \right]^{\frac{-1}{2(n+1)}} A_2 A_3 \right]^{\frac{2}{3}} \quad (22)$$

$$\frac{u}{U} = \left[ \left[ \overline{\text{Re}}_\Lambda \right]^{\frac{-1}{2(n+1)}} A_2 A_3 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (23)$$

$$\frac{\omega}{W} = \left[ \left[ \overline{\text{Re}}_\Lambda \right]^{\frac{-1}{2(n+1)}} A_2 A_3 \right]^{\frac{2}{3}} \quad (24)$$

e

$$\frac{e}{E} = \left[ \left[ \overline{\text{Re}}_\Lambda \right]^{\frac{-1}{2(n+1)}} A_2 A_3 \right]^{\frac{2}{3}} \quad (25)$$

onde  $e = \varepsilon_s = u^2$  e  $E = U^2$  denotam dimensionalmente a energia cinética das menores e maiores escalas de turbulência.

### 3. RESULTADOS E ANÁLISES

Para o solvente puro, isto é, para fluidos newtonianos,  $n = 1$ , então:

$$A_1 = 1 \quad (26)$$

$$\overline{\text{Re}}_\Lambda = \text{Re} = \frac{L U}{v_o} \quad (27)$$

o que conduz aos conhecidos resultados, em função (somente) do número de Reynolds:

$$\frac{\ell}{L} = \text{Re}^{\frac{-3}{4}} \quad (28)$$

$$\frac{t}{T} = \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \quad (29)$$

$$\frac{u}{U} = \text{Re}^{-\frac{1}{4}} \quad (30)$$

$$\frac{\omega}{W} = \text{Re}^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

$$\frac{e}{E} = \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \quad (32)$$

Os resultados obtidos com as Eqs. (28), (29) e (30) para as relações  $\ell/L$ ,  $t/T$  e  $u/U$  são mostrados nas Figs. 1, 2 e 3 respectivamente. Os dados experimentais de (Pinho e Pereira) para várias concentrações de Tylose foram utilizadas para caracterizar os parâmetros reológicos do fluido. Na Fig. 1 a relação  $\ell/L$  é mostrada, observa-se uma diminuição dessa relação quando a concentração do polímero é aumentada, exceto pra a concentração de 0,4%, devido provavelmente a sensibilidade das equações a pequenos erros experimentais. A diminuição da relação  $\ell/L$  com o aumento da concentração está fisicamente relacionada ao efeito “shear thinning”, o qual provoca uma diminuição dos efeitos viscosos em relação aos efeitos de inércia.

As Figs. 2 e 3 mostram uma tendência semelhante à da Fig. 1. Novamente a solução concentrada a 0,4% não apresenta a mesma tendência das demais curvas, reforçando o argumento de existir alguma discrepância experimental neste caso, conforme já mencionado.

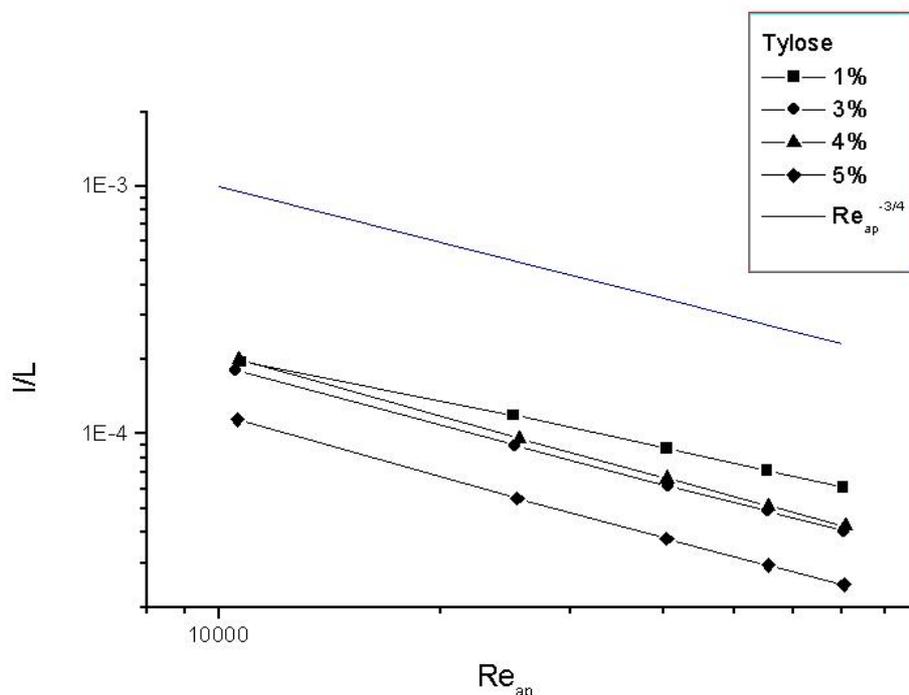


Figura 1 Curvas  $\text{Re } l/L$  obtidas com os resultados experimentais.

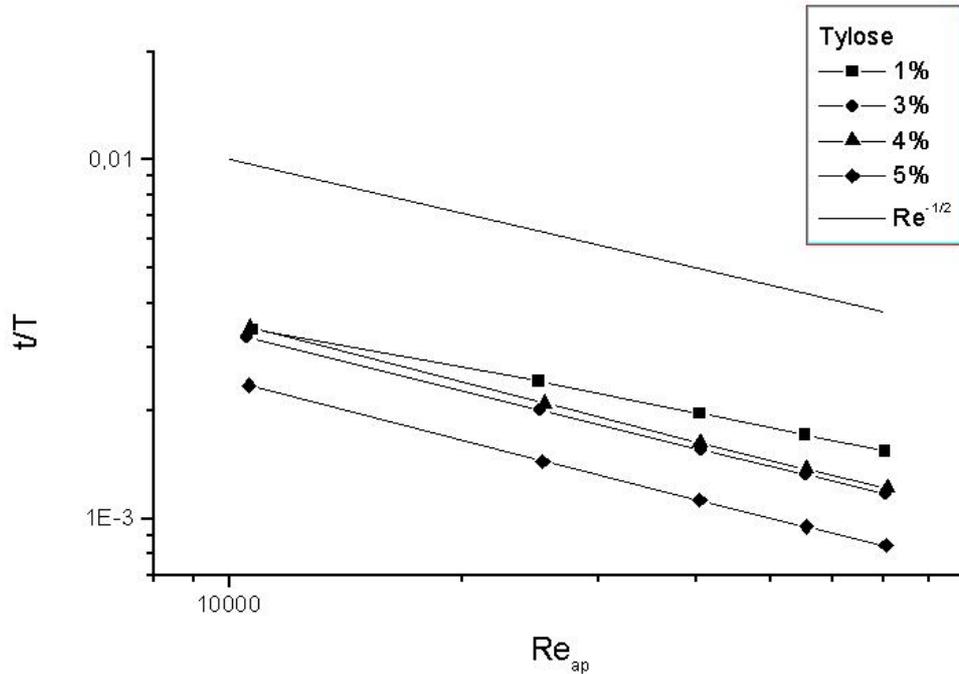


Figura 2 Curvas  $Re$   $t/T$  obtidas com os resultados experimentais.

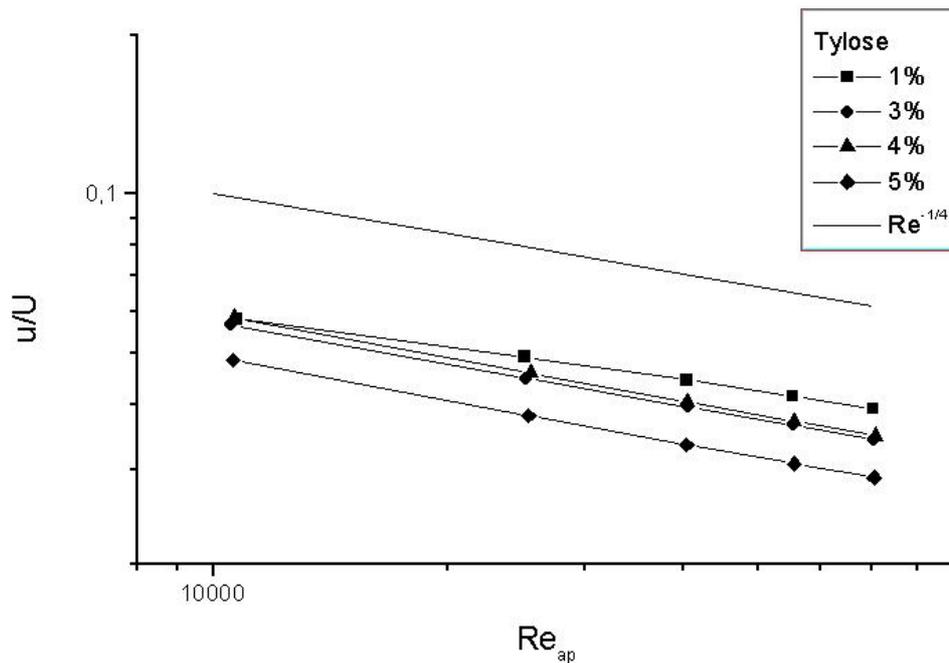


Figura 3 Curvas  $Re$   $u/U$  obtidas com os resultados experimentais.

#### 4. CONCLUSÃO

Neste trabalho o procedimento de Kolmogorov foi estendido para o caso não-newtoniano empregando o modelo de Carreau-Yasuda. Foram obtidas relações entre os parâmetros característicos da menor e da maior escala do escoamento. O emprego dessas relações em fluidos reais indica uma diminuição dessas relações com o aumento da concentração de certos polímeros devido ao efeito “shear thinning”. Os resultados aqui obtidos indicam que simulações numéricas

diretas de escoamentos turbulentos de fluidos não-newtonianos, que apresentem o efeito “shear thinning”, devem ser feitas com malhas mais refinadas quando comparadas com o caso de fluidos newtonianos.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade, L. C. F., 2002, “Desenvolvimento de uma Equação de Fricção Para o Escoamento Turbulento de Fluidos de Carreau-Yasuda em Tubos”, Dissertação de Mestrado, UFPA / CT /CMEM.
- Cruz, D. O. A. e Andrade, L. C. F., 2001, “A Skin Friction Equation for Turbulent Flow of Carreau Fluids”, 2<sup>a</sup> Escola de Transição e Turbulência, Uberlândia.
- Cruz, D. O. A.; Maneschy C. E., Macedo E. N. and Quaresma J. N. N., 2000, “A Turbulence Model For computing the flow of Power law Fluids within Circular Tubes”, Hybrid Methods in Engineering In Press.
- Dodge, D. W. and Metzner, A. B., 1959, “Turbulent Flow of Non-Newtonian Fluids”, AIChE Journal, v. 5, pp.189-204.
- Escudier M. P., Jones D. M. and Gouldson I., 1992, “Fully developed flow of shear thinning”, Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Symposium on Applied Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon paper 1.3.
- Hinch, E. J., 1977, “Mechanical Models of Dilute Polymer Solutions in Strong Flows” Phys. Fluids, 20 S22.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., 1987, “Course of Theoretical Physics – v. 6: Fluid Mechanics”, Pergamon Press, 2<sup>nd</sup> Edition.
- Pereira, A. S. and Pinho, F. T., 1994, “Turbulent Pipe Flow Characteristics of Low Molecular Weight Polymers”, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 55 321-344.
- Pereira, A. S. and Pinho, F. T., 1999, “Bulk Characteristics of Some Variable Viscosity Polymer Solutions in Turbulent Pipe Flow” 15<sup>o</sup> COBEM.
- Pinho, F. T. and Whitelaw, J. H., 1990, “Flow of Non-Newtonian Fluid in Pipe” J. Non-Newtonian Fluid Mech., 34 129.
- Silva Freire, A. P., P. P. M. Menut e J. Su (editores), 1998, “Transição e Turbulência”, I Escola de Transição e Turbulência, Rio de Janeiro.
- Tabor, M., Durning, C. J. and B. O’Shaughnessy, 1989, “The microscope Origin of Drag Reduction”, International Report of University of Columbia, Depts. of Appl. Chem. and Chem. Eng., New York, NY 10027.
- Toms, B. A., 1948, “Some Observations on the Flow of Linear Polymer Solution through Straight Tubes at Large Reynolds Number”, Proceedings of 1st Conference on Rheology, Vo. 12, North Holland Amsterdam, p. 135.
- Virk, P. S., Micklei, H. S. and Smith, K. A., 1970, “The ultimate Asymptote and the Mean Flow Structure in Toms Phenomena, J. App. Mech., 37 488.

## THE KOLMOGOROV DISSIPATION SCALE FOR CARREAU YASUDA FLUIDS

### **Luíz Cláudio Fialho Andrade**

Mechanical Engineering Department, Universidade Federal do Pará – UFPA, Rua Augusto Corrêa, 01 CEP: 66075-110 – Caixa Postal 479

E-mail: [lccffaa@ig.com.br](mailto:lccffaa@ig.com.br)

### **Jamilson Araújo Petronílio**

Mechanical Engineering Department, Universidade Federal do Pará – UFPA, Rua Augusto Corrêa, 01 CEP: 66075-110 – Caixa Postal 479

E-mail: [jamilson@ufpa.br](mailto:jamilson@ufpa.br)

**Daniel Onofre de Almeida Cruz**

Mechanical Engineering Department, Universidade Federal do Pará – UFPA, Rua Augusto Corrêa,  
01 CEP: 66075-110 – Caixa Postal 479

**E-mail:** [doac@ufpa.br](mailto:doac@ufpa.br)

***Abstract.** In this work the dimensional analysis will be used to derive a relation for the dissipation scale of turbulent flow of a non-Newtonian fluid using the Carreau-Yasuda rheological model. The analysis is similar to the one used by Kolmogorov to obtain the dissipation length for the Newtonian case. It will be show that for non-Newtonian fluids, with shear Thinning behavior, the dissipation scale is smaller than the Newtonian case. This fact indicates that the direct numerical simulation of turbulent flows of non-Newtonian fluids, requires more refined meshes than the ones used to describe the Newtonian fluids.*

***Keywords:** Turbulence, Non-Newtonian Fluids, Dissipation scale, Dimensional Analysis*

## LISTA

### Caracteres Latinos

a - Parâmetro reológico da viscosidade de Carreau – Yasuda

k – Índice de consistência do fluido da viscosidade lei de potência

L – Comprimento entre tomadas de pressão no tubo

$\ell$  - Comprimento de escala dissipativa de Kolmogorov

n – Índice de comportamento do escoamento

$\bar{Re}$  - Adimensional definido por:  $\rho D^n U^{2-n}/k$

u – Velocidade dimensional na direção x, tangente a superfície sólida (ou na direção axial)

U – Velocidade dimensional média do escoamento (na seção do tubo)

### Caracteres Gregos

$\dot{\gamma}$  - Taxa de deformação:  $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$  (ou taxa de deformação média:  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ )

$\lambda$  - Parâmetro reológico das viscosidades de Carreau – Yasuda (tempo de relaxação)

$\mu$  – Viscosidade dinâmica

$\mu_\infty$  - Parâmetro reológico das viscosidades Careau e Carreau – Yasuda (viscosidade)

$\mu_o$  - Parâmetro reológico das viscosidades Careau e Carreau – Yasuda (viscosidade)

$\rho$  – Massa específica

$\nu_o$  - Parâmetro reológico das viscosidades Careau e Carreau – Yasuda (viscosidade cinemática)

$\nu_\infty$  - Parâmetro reológico das viscosidades Careau e Carreau – Yasuda (viscosidade cinemática)

$\tau_L$  – Tensões laminares de cisalhamento

$\Lambda$  – Equivalente de k para as viscosidades Carreau e carreau – Yasuda:  $\mu_o \lambda^{n-1}$