



MÉTODOS DE ENGENHARIA PARA ESTIMAR O FLUXO AEROTÉRMICO NUM PLANO DE SIMETRIA DE UM ESCOAMENTO SUPERSÔNICO SOBRE UMA SUPERFÍCIE ROMBUDA

Ulisses Côrtes Oliveira

Instituto de Aeronáutica e Espaço — ASE-E/IAE/CTA

12228-904 — São José dos Campos–SP, Brasil

E-mail: ulisses@iae.cta.br

Resumo. *O presente artigo constitui-se numa compilação de métodos aproximados para calcular o fluxo aerotérmico convectivo em linhas de simetria de escoamentos sobre corpos de alta velocidade. Alguns dos métodos apresentados somente se adequam a escoamentos onde se aplica o conceito de camada-limite; outros, porém, podem ser usados também em escoamentos com médios e baixos números de Reynolds. As bases desses métodos são a analogia axissimétrica tradicional, novas relações de similaridade, aproximações analíticas de soluções de camadas-limite e camadas de choque tridimensionais, etc. Apenas os métodos com mais amplas possibilidades de uso foram discutidos.*

Descritores: *Aerotermodinâmica, Aquecimento Aerodinâmico, Métodos Aproximados.*

1 INTRODUÇÃO

No movimento de um corpo na atmosfera da Terra, com velocidades menores ou da ordem da primeira velocidade cósmica, o fluxo térmico convectivo entre o gás e a superfície ao redor da qual o escoamento de alta entalpia ocorre é a principal componente do fluxo aerotermodinâmico global a que está sujeito este corpo. Por outro lado, um estudo do fluxo térmico na vizinhança das linhas de corrente divisórias de um escoamento tridimensional sobre corpo genérico ou sobre um corpo axissimétrico com ângulo de ataque é de particular interesse, dado que as taxas extremas do fluxo térmico ocorrem ao longo de tais linhas.

Existe uma grande variedade de técnicas aproximadas para estimar a taxa do fluxo térmico convectivo sobre uma linha de corrente de simetria do escoamento viscoso supersônico sobre uma superfície rombuda (Oliveira, 1990b, 1989a). A maioria foi deduzida dentro do escopo da teoria da camada-limite (DeJarnette e Davis, 1968; DeJarnette e Hamilton, 1973; Zoby, 1982; Brykina et al., 1980; Oliveira, 1989b), e apenas uns poucos se baseiam em soluções das equações da camada de choque viscosa (Gershbein e Yunitskii, 1984; Brykina et al., 1989).

Grosso modo, esses métodos aproximados divulgados na literatura técnica podem ser agrupados nas seguintes categorias: (1) os decorrentes da analogia axissimétrica tradicional; (2) os que empregam aproximações analíticas de soluções da camada-limite ou da camada de choque tridimensionais; (3) os que empregam novas analogias axissimétricas; (4) aqueles que, desprezando os efeitos da curvatura transversal, aproximam o corpo original pelo corpo de revolução formado pela rotação da linha de corrente divisória em torno do eixo que passa

pelo ponto de estagnação e é orientado segundo o escoamento incidente; (5) os métodos das seções meridianas e os métodos baseados na *regra das áreas* ou *regra da equivalência* ou, mais adequadamente, *regra das áreas equivalentes*; (6) os semi-empíricos resultantes de ajustes de resultados experimentais e/ou numéricos; (7) os métodos que usam a técnica do “cone tangente”, ou usam de artifícios semelhantes.

Este artigo é um extrato do estudo feito por este autor em [Oliveira \(1990a\)](#), onde se apresenta uma compilação das principais técnicas aproximadas de calcular esses fluxos, incluindo-se alguns métodos ainda não divulgados de modo ostensivo. Aqui, por restrições de espaço, apenas os métodos com mais amplas possibilidades de uso foram focalizados.

2 MÉTODOS COM A ANALOGIA AXISSIMÉTRICA TRADICIONAL

Uma substancial simplificação para o escoamento viscoso pode ser encontrada através do uso da *analogia axissimétrica*, a aproximação de pequeno escoamento transversal para camadas-limites tridimensionais ([Cooke, 1959](#)). Esta aproximação permite que o fluxo de calor seja calculado ao longo de uma linha de corrente superficial, resultante da solução do campo não-viscoso, por qualquer método aplicável a um corpo de revolução com incidência nula. A distância ao longo de uma linha de corrente é interpretada como a distância ao longo de um meridiano de um corpo axissimétrico equivalente, e o coeficiente métrico da coordenada normal à linha de corrente — o qual é uma medida da divergência da linha de corrente — é interpretado como o raio do corpo axissimétrico equivalente. Assim, cada linha de corrente não-viscosa corresponde a um diferente corpo de revolução equivalente, com incidência nula.

De acordo com essa analogia axissimétrica, a taxa do fluxo térmico convectivo laminar ao longo de uma linha de corrente genérica e, particularmente, ao longo de uma linha de corrente divisória, pode ser calculada usando-se a expressão ([Oliveira, 1990a](#))

$$\dot{q}(s) = \frac{1}{2} \frac{\text{Pr}_w^{-\frac{2}{3}} \rho_e \mu_e u_e h_\eta}{[2 \xi]^{\frac{1}{2}}} (h_r - h_w) , \quad (1)$$

onde $\xi(s) \equiv \int_0^s \rho_e \mu_e u_e h_\eta^2 ds$; s é a distância medida ao longo de uma linha de corrente superficial invíscida; h_η é o coeficiente métrico associado à direção η do escoamento transversal (o qual é determinado da conhecida geometria da linha de corrente invíscida); ρ_e , μ_e , e u_e são a massa-específica, o coeficiente de viscosidade dinâmica, e a velocidade do escoamento, respectivamente, avaliadas na fronteira externa da camada-limite; Pr_w é o número de Prandtl nas condições parietais; e h_w e h_r são as entalpias do escoamento nas condições parietal e de recuperação (parede adiabática), respectivamente.

Vários métodos ([Oliveira, 1992](#); [DeJarnette e Hamilton, 1973](#); [Vaglio-Laurin, 1959](#)) são disponíveis para a computação das linhas de corrente superficiais invíscidas e dos respectivos coeficientes métricos associados com o espalhamento dessas linhas de corrente. Dado que somente as linhas de corrente num plano de simetria do escoamento serão consideradas, resta calcular apenas o coeficiente métrico h_η da coordenada transversal à direção preferencial do escoamento, o qual representa o raio do corpo de revolução equivalente, a ser usado nas equações do fluxo térmico que expressam a analogia axissimétrica tradicional.

No caso de corpos esfericamente rombudos, é sabido que as linhas de corrente sobre a calota esférica emanam radialmente do ponto de estagnação, e descrevem curvas geodésicas que, coincidentemente, são caminhos de máxima declividade sobre a superfície esférica. Tais linhas de corrente podem ser descritas de modo exato, e suas formas correspondem às equações de círculos máximos com pólos no ponto de estagnação ([Oliveira, 1988](#)). O coeficiente métrico h_η pode ser calculado através de relações analíticas exatas, ao longo dessas linhas de corrente ([Oliveira, 1988](#)).

Para casos mais gerais não existem soluções exatas, e o coeficiente métrico precisa ser determinado numericamente. Algumas das técnicas que podem ser empregadas serão descritas a seguir.

2.1 Linha de Corrente Obtida do Campo de Velocidade

Segundo [DeJarnette e Hamilton \(1973\)](#), ao longo de uma linha de corrente genérica vale, de forma exata,

$$\frac{Dh_\eta}{Ds} = h_\eta \left(\frac{D\vartheta}{Dn} + \text{sen}\Gamma \frac{D\sigma}{Dn} \right). \quad (2)$$

Aqui, ϑ é o ângulo entre as direções de uma linha de corrente ($\eta = \text{cte.}$) e um meridiano ($\varphi = \text{cte.}$); Γ é o ângulo entre os versores \hat{e}_r (da direção radial) e \mathbf{N} (da normal externa à superfície); σ é um ângulo definido em [\(DeJarnette e Hamilton, 1973\)](#); n é a coordenada dimensional associada a η pela relação $dn = h_\eta d\eta$.

Num plano de simetria, em que $\eta = 0$ ou $\eta = \pi$, várias simplificações poder ser feitas [\(Oliveira, 1990a\)](#). Assim, denotando por V o módulo da velocidade total do escoamento, e por R_φ o raio de curvatura da superfície num plano transversal $z = \text{cte.}$, avaliado em $\varphi = 0$, ao longo da linha de corrente divisória, no lado exposto ao escoamento ($\varphi = 0, \eta = 0$), essas relações de simetria levam a equação do coeficiente métrico à seguinte forma:

$$\frac{1}{h_\eta} \frac{Dh_\eta}{Ds} \Big|_{\varphi=0} = \left[\frac{1}{rV} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V \text{sen}\vartheta) + \frac{1}{R_\varphi} \frac{Dr}{Ds} \right]_{\varphi=0}. \quad (3)$$

Esta equação pode ser integrada ao longo da linha de corrente $\varphi = 0$ apenas quando o termo do gradiente de velocidade é conhecido.

2.2 Linha de Corrente Obtida da Repartição de Pressão

No caso em que apenas a pressão é conhecida, em vez das equações anteriores deve-se recorrer à equação [\(DeJarnette e Hamilton, 1973\)](#)

$$\frac{1}{h_\eta} \frac{D^2 h_\eta}{Ds^2} = \left(\frac{1}{\rho V^2} \frac{Dp}{Dn} \right)^2 (M^2 - 3) - \frac{1}{\rho V^2} \frac{D^2 p}{Dn^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \Gamma \cos \delta \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} \right], \quad (4)$$

onde ρ é a massa-específica e M é o número de Mach do escoamento, e $\delta = \sigma - \varphi$.

No plano de simetria, onde $Dp/Dn = 0$ e $\delta = 0$, usando relações de simetria e uma relação para R_φ , a equação precedente simplifica-se a [\(Oliveira, 1990a\)](#):

$$\frac{1}{h_\eta} \frac{D^2 h_\eta}{Ds^2} = \frac{1}{\rho V^2} \left[-\frac{Dp}{Ds} \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{Dh_\eta}{Ds} - \frac{1}{R_\varphi} \frac{Dr}{Ds} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{\cos \Gamma}{R_z R_\varphi}, \quad (5)$$

onde R_z é o raio de curvatura da superfície ao longo da linha de simetria $\varphi = 0$ [\(Oliveira, 1990a\)](#).

Introduzindo a variável $g \equiv h_\eta/r$ na Eq. (5), e admitindo que a derivada segunda da pressão com respeito ao ângulo de azimute seja calculada pelo método newtoniano ($\partial^2 p / \partial \varphi^2|_{\varphi=0} = 0$), então a referida equação pode expressar-se segundo

$$\frac{D^2 g}{Ds^2} + a \frac{Dg}{Ds} + (b\tau + c) g = 0, \quad (6)$$

onde as variáveis τ, a, b e c são definidas em [\(Oliveira, 1990a\)](#).

Nas proximidades do ponto de estagnação, a forma limite de (6) fornece (DeJarnette e Hamilton, 1973; Vaglio-Laurin, 1959; Chin, 1975):

$$g = \left(\frac{s}{s_\varepsilon} \right)^{K_2/K_1-1}, \quad \text{para } 0 \leq s \leq s_\varepsilon. \quad (7)$$

Aqui, K_1 e K_2 são as curvaturas principais da superfície. Note-se ainda que vale a relação $R_\varphi = \cos \Gamma / K_2$.

Os valores de g e Dg/Ds para $s = s_\varepsilon$ e $s_\varepsilon K_2 \ll 1$, obtidos de (7), são usados como condições iniciais para a integração numérica de (6).

2.3 Linha de Corrente de Máxima Declividade

Segundo o método da linha de corrente de máxima declividade (Leigh, 1958; DeJarnette e Davis, 1968), a direção de uma linha de corrente está no plano contendo a normal à superfície e a direção do escoamento livre. Assim, designando por ψ o ângulo entre as direções da normal externa à superfície do corpo e a direção do escoamento livre, incidente sobre o mesmo, o método da linha de corrente de máxima declividade fornece para o coeficiente métrico h_η , associado com uma linha de corrente arbitrária, a seguinte equação:

$$\frac{1}{h_\eta} \frac{Dh_\eta}{Ds} = \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \left[\sin \vartheta \frac{D\Gamma}{Dn} + \cos \vartheta \cos \Gamma \frac{D\sigma}{Dn} \right]. \quad (8)$$

No caso particular da linha de corrente divisória no plano $\varphi = 0$, as condições de simetria e o emprego de relações geométricas permitem simplificar a expressão precedente (Oliveira, 1990a):

$$\frac{h'_\eta(z)}{h_\eta(z)} = \operatorname{ctg} \psi \frac{1}{R_\varphi} = x'(z) \mathcal{K}_\varphi(z), \quad (9)$$

onde $h_\eta(z) = h_\eta|_{\varphi=0}$, $h'_\eta(z) = [\partial h_\eta / \partial z]_{\varphi=0}$, $x = x(z) = r(z, 0) = r(z, \varphi)|_{\varphi=0}$, $x'(z) = dx(z)/dz = [\partial r(z, \varphi) / \partial z]_{\varphi=0}$, e $\mathcal{K}_\varphi = 1/R_\varphi$ é a curvatura normal da superfície na secção transversal $z = \text{cte}$.

A Eq. (9) pode ser integrada numérica ou analiticamente, desde que sejam conhecidas as funções $x(z)$ e $\mathcal{K}_\varphi(z)$. Observe-se ainda que ela também poderia ser obtida usando-se velocidades calculadas a partir da distribuição newtoniana de pressão.

Usando as fórmulas anteriores do método da máxima declividade para a superfície cônica de um cone circular rombudo, com ângulo de semi-vértice β_c , pode-se chegar à seguinte equação para o coeficiente métrico h_η no plano de simetria do escoamento

$$h_\eta = (ar)^b (1 - m \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi) \frac{\cos \alpha}{a}. \quad (10)$$

Aqui, $m = \operatorname{tg} \beta_c$, e $b = (m + \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi) / (m - m^2 \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi)$. Ademais, $\varphi = 0$ corresponde ao lado exposto ao escoamento, e $\varphi = \pi$, ao lado oposto (de sombra aerodinâmica). Note que a Eq. (10) pode também ser obtida do trabalho de DeJarnette e Davis (1968).

3 MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS NA CAMADA-LIMITE

Métodos numéricos e analíticos foram usados por Brykina et al. (1980) para investigar uma camada-limite tridimensional, laminar, próxima a planos de simetria de corpos rombudos em escoamentos supersônicos. Eles obtiveram, como primeira aproximação do método integral das aproximações sucessivas, uma solução analítica do problema, resumida numa fórmula que

permite calcular os fluxos térmicos convectivos num plano de simetria de um escoamento supersônico de ar dissociado ou ionizado, sobre superfícies rombudas perfeitamente catalíticas, com diferentes ângulos de ataque.

Considere um sistema de coordenadas curvilíneas não-ortogonais (ξ, η, ζ) ligado à superfície do corpo, de forma que ξ e η estejam sobre a superfície, e $\zeta = \text{cte.}$ sejam famílias de superfícies paralelas à superfície do corpo ($\zeta = 0$). Seja $z = f(x, y)$ a equação da superfície num sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) . Escolhendo a parametrização $x = \xi$, $y = \eta$ e $z = f(\xi, \eta)$, para a superfície, e tomando $\eta = 0$ como o plano de simetria do escoamento, então a fórmula proposta em (Brykina et al., 1980) para calcular a distribuição do fluxo térmico relativo \dot{q}/\dot{q}_o , ao longo de uma linha de simetria do escoamento sobre uma superfície impermeável, independe da aproximação de ordem-zero, podendo ser expressa como

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_o} = \frac{1}{2} (1 - a^*) F \left[\lambda_{M_o} E \int_o^s (1 - a^*) F ds \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

onde λ_{M_o} é o gradiente médio de velocidade no ponto de estagnação, $F = \rho_e u_e \mu_e E$, $ds = \sqrt{g_{11}} d\xi$, e

$$a^* = \frac{u_e^2 (1 - \text{Pr})}{2(H_e - H_w)}, \quad E = \exp \left[\int_o^s 2 \frac{w_e}{u_e} ds \right].$$

Aqui, u_e e w_e são as componentes de velocidade nas direções ξ e η , respectivamente, na fronteira externa da camada-limite, e $g_{11} = 1 + f_\xi^2$. Os demais símbolos seguem as designações usuais.

4 MÉTODO DA CAMADA DE CHOQUE VISCOSA

Para escoamentos de um gás uniforme na vizinhança de um plano de simetria do escoamento sobre corpos rombudos tem sido estabelecido que, para números de Reynolds moderados e altos, a distribuição do fluxo de calor ao longo da superfície, relativo a seu valor no pontos de estagnação, cessa de depender do número de Reynolds. Ela também depende apenas ligeiramente da razão de calores específicos, do número de Prandtl, do valor do expoente ω na relação $(\mu \times T^\omega)$, da temperatura superficial (para uma parede fria), e também da consideração dos efeitos de escorregamento e salto de temperatura sobre a superfície, e é basicamente definido pelas características geométricas do corpo.

Expressões analíticas resultantes da primeira aproximação da aplicação do método das *aproximações sucessivas* na solução das equações da camada de choque viscosa fina, no plano de simetria do escoamento de um gás viscoso uniforme sobre um corpo tridimensional, foram obtidas por Brykina e colaboradores (Brykina et al., 1989). Tratam-se de duas formas aproximadas: uma localmente auto-similar,

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_o} = \left[\frac{\mathcal{K}_M \cos^3 \psi}{\mathcal{K}_{M,o} \lambda} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

e outra, mais precisa, não-localmente auto-similar,

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_o} = \frac{1}{2} I^{\frac{1}{2}} \cos^2 \psi \left[\mathcal{K}_{M,o} \lambda \int_o^s \frac{I \cos \psi}{\lambda \text{tg} \psi} ds \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Aqui o subscrito “o” denota quantidades avaliadas no ponto de estagnação, e s é o comprimento de arco medido ao longo da linha de simetria, desde este ponto. As variáveis λ e I são definidas por

$$\lambda \equiv 1 + \frac{4}{15} \frac{\mathcal{K}_\ell}{\mathcal{K}_M} \text{tg}^2 \psi, \quad I \equiv \exp \left[\int_o^s \frac{4 \mathcal{K}_M}{\text{tg} \psi} ds \right]. \quad (14)$$

5 MÉTODOS BASEADOS EM NOVAS RELAÇÕES DE SIMILARIDADE

Considere o escoamento tridimensional supersônico estacionário de um gás homogêneo sobre a superfície suave de um corpo rombudo. Associe-se a este corpo o sistema de coordenadas cilíndricas (r, φ, z) , onde o eixo z passa pelo ponto de estagnação do escoamento e é direcionado ao longo da direção da velocidade \mathbf{V}_∞ do escoamento-livre incidente. O sistema cartesiano dextrógiro (x, y, z) é associado ao sistema cilíndrico de tal forma que \mathbf{V}_∞ esteja no plano xz ; portanto, um plano de simetria do escoamento, se existir, será dado por $y = 0$ e, neste caso, a linha de corrente divisória do escoamento será dada por $\varphi = 0$ no lado exposto ao escoamento incidente, e por $\varphi = \pi$ no lado de sombra aerodinâmica.

Investigações das soluções da camada-limite laminar em escoamentos supersônicos homogêneos sobre corpos rombudos suaves mostraram que a taxa do fluxo de calor \dot{q} na superfície do corpo é determinada principalmente por dois parâmetros relacionados à geometria da superfície: pelo ângulo de ataque local ψ (ângulo entre o vetor normal \mathbf{N} à superfície e o vetor-velocidade \mathbf{V}_∞ do escoamento livre incidente), e por \mathcal{K}_M , a curvatura média — igual à semi-soma das curvaturas principais — da superfície no ponto dado (Oliveira, 1990a). Estas constatações permitiram concluir que o fluxo ao longo de um meridiano de um corpo pode ser calculado conhecendo-se como se distribui o fluxo ao longo de um meridiano qualquer deste ou de um outro corpo, em função do ângulo de ataque local (Oliveira, 1990a):

$$\left(\frac{\dot{q}/\dot{q}_o}{\sqrt{\mathcal{K}_M}} \right)_{\varphi_1, \psi, \text{corpo}-1} = \left(\frac{\dot{q}/\dot{q}_o}{\sqrt{\mathcal{K}_M}} \right)_{\varphi_2, \psi, \text{corpo}-2} . \quad (15)$$

Assim, particularmente, conhecendo-se o fluxo adimensional ao longo de uma linha de corrente divisória do escoamento sobre um parabolóide elíptico, é possível determinar-se as distribuições dos fluxos sobre meridianos de um elipsóide triaxial.

Uma investigação adicional, feita em (Oliveira, 1989b), e um simples ajuste de curvas revelaram que as analogias expressas pela Eq. (15) podem ser representadas de forma aproximada pela curva

$$\dot{q}/\dot{q}_o = \sqrt{\mathcal{K}_M/\mathcal{K}_{M,o}} [0,55 + 0,45 \cos(2\psi)] . \quad (16)$$

Se a relação (15) é válida ao longo de dois meridianos diferentes de um mesmo corpo ou de corpos diferentes, é razoável admitir que ela permaneça válida entre um meridiano de um corpo tridimensional e a geratriz de um corpo axissimétrico equivalente, construído de maneira que a variação do ângulo ψ seja idêntica em ambos os corpos. Assim, afixando o símbolo “•” aos parâmetros do corpo axissimétrico equivalente ao corpo dado, a ensejada analogia expressa-se operacionalmente por:

$$\left(\frac{\dot{q}/\dot{q}_o}{\sqrt{\mathcal{K}_M}} \right)_{\varphi, \psi} = \left(\frac{\dot{q}^\bullet/\dot{q}_o^\bullet}{\sqrt{\mathcal{K}_M^\bullet}} \right)_{\psi^\bullet=\psi} , \quad \text{ou} \quad \frac{\dot{q}}{\dot{q}^\bullet} = \sqrt{\frac{\mathcal{K}_M}{\mathcal{K}_M^\bullet}} . \quad (17)$$

Esta equação expressa que a distribuição do fluxo de calor sobre um corpo tridimensional suave pode ser determinada através do cálculo do fluxo em uma série de corpos axissimétricos equivalentes, construídos com base nos contornos de seções meridianas do corpo original.

Conforme se relatou, se na superfície lateral de um corpo genérico, descrita pela equação $r = f(z, \varphi)$, é dada uma linha meridiana $\varphi = \varphi^*$ que passe pelo ponto de estagnação deste, o corpo axissimétrico equivalente é caracterizado pelo fato de que o ângulo ψ^\bullet entre a normal à sua geratriz e a direção do escoamento incidente varia de maneira idêntica ao ângulo ψ ao longo da linha lateral selecionada no corpo arbitrário inicial. Estabelecida esta regra, a forma $r^\bullet = r^\bullet(z)$ e, conseqüentemente, outras relações geométricas do corpo de revolução equivalente poderão

ser obtidas tomando-se as equações que definem os ângulos ψ e ψ^\bullet , e impondo-se a condição $\psi^\bullet = \psi$. O resultado, obtido após pequena manipulação, como mostrado em (Oliveira, 1989b), expressa-se por

$$r^{\bullet'} = r_z \left[1 + \left(\frac{r_\varphi}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

$$r^\bullet(z) = \int_0^z r_z \left[1 + \left(\frac{r_\varphi}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} dz. \quad (19)$$

Portanto, dada a seção meridional $\varphi = \varphi^*$ no corpo tridimensional, então a forma $r^\bullet(z)$ do corpo axissimétrico equivalente será definida pelas equações acima, nas quais r_z e r_φ denotam as respectivas derivadas parciais de $r = r(z, \varphi)$ com relação a z e φ , e $r^{\bullet'}$ é a derivada ordinária de $r^\bullet = r^\bullet(z)$ em relação a z .

6 MÉTODO BASEADO NA ROTAÇÃO DA LINHA DE SIMETRIA

Freqüentemente (Adams et al., 1975; Zoby, 1982) se estima o fluxo ao longo de uma linha de simetria do escoamento negando-se a tridimensionalidade do mesmo: o fluxo é calculado da mesma forma que num corpo de axissimétrico cuja geratriz é a própria linha de simetria, e o eixo de rotação é o eixo com origem no ponto de estagnação e orientado segundo o escoamento incidente (eixo z na nomenclatura aqui empregada), porém usando uma repartição tridimensional de pressão. Concluiu-se em (Oliveira, 1989b) que os resultados desta técnica podem conter erros intoleráveis. Portanto, o uso desta técnica deve, na medida do possível, ser evitado ou, pelo menos, feito com bastante cuidado.

7 RESULTADOS PARA UM ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

Apenas para ilustrar, e sem nenhuma pretensão de fazer uma comparação quantitativa, alguns resultados teóricos de $\dot{q}_w/\dot{q}_{w,o}$ são mostrados na Fig. (1). Tratam-se da aplicação de métodos baseados nas já discutidas teorias axissimétricas ao plano de simetria de um elipsóide de revolução com semi-eixos $a = 25$ cm e $c = 50$ cm, e equação:

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 - \left(1 - \frac{z}{c} \right)^2.$$

O ângulo de ataque é $\alpha = 30^\circ$. O ar foi considerado um gás caloricamente perfeito, e as condições simuladas são: $M_\infty = 6,7$, $p_\infty = 1999,48$ Pa, $T_\infty = 222,2$ K, $\gamma = 1,4$, e $T_w = 278,5$. linhas de corrente superficiais invíscidas e outros detalhes deste caso são apresentados em (Oliveira, 1996).

Na Fig. (1), a linha tracejada representa o presente resultado obtido com linhas de corrente calculadas com o método de máxima declividade (MMD), a linha contínua fina representa o resultado obtido com linhas de corrente calculadas segundo o método da pressão (MP), e a linha contínua grossa representa o resultado do emprego da nova “analogia axissimétrica” desenvolvida por Oliveira (1989b, 1990a). Nota-se uma boa concordância entre os mesmos. Constata-se também que os três métodos indicam que o fluxo máximo ocorre fora do ponto de estagnação e, de acordo com (Oliveira, 1990b), este é o máximo fluxo em toda a superfície, no regime laminar.

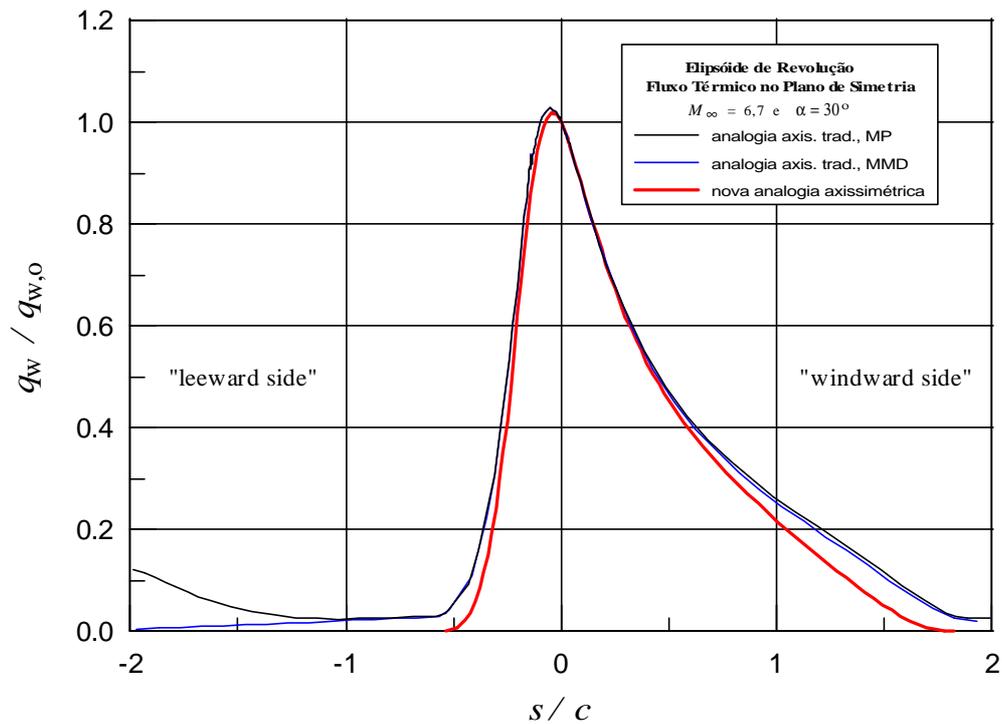


Figura 1: Fluxo térmico no plano de simetria do elipsóide de revolução ($\alpha = 30^\circ$, $M_\infty = 6,7$).

8 CONCLUSÃO

Várias técnicas aproximadas que podem ser usadas para calcular taxas do fluxo térmico ao longo da linha de simetria do lado exposto ao escoamento incidente de veículos tridimensionais foram revistas. Estes e outros métodos semelhantes são discutidos mais detalhadamente em (Oliveira, 1990a), onde comparações diversas são feitas.

As técnicas aqui apresentadas são úteis onde as taxas dos fluxos térmicos convectivos ao longo de linhas de simetria do escoamento sobre um corpo, que se desloca em alta velocidade numa atmosfera densa, são necessárias em toda sua trajetória de vôo. Elas permitem a solução, por exemplo, do problema variacional de escolher o contorno ótimo da linha de corrente divisória de um corpo tridimensional e a curvatura da superfície na vizinhança desta linha para escoamento supersônico ou hipersônico, laminar (e também turbulento, para algumas técnicas) de um gás ao redor de um corpo.

REFERÊNCIAS

- Adams, J. C. Jr.; Martindale, W. R.; Maynes, A. W. Jr., 1975, *Real Gas Scale Effects on Hypersonic Laminar Boundary-Layer Parameters Including Effects of Entropy-Layer Swallowing*. AEDC-TR-75-2. (Ver também *J. Spacecraft and Rockets*, **14**(5): 273–279, May 1977.)
- Brykina, I. G.; Gershbein, E. A.; Peigin, S. V., 1980, “Three-Dimensional Laminar Boundary Layer on a Permeable Surface in the Neighborhood of a Symmetry Plane”. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza*, No. 5, pag. 37–48. (Trad. *Fluid Dynamics*, pag. 664–673, 1981.)
- Brykina, I. G.; Rusakov, V. V.; Shcherbak, V. G., 1989, Approximate Formulas for Heat Flows Towards an Ideally Catalytic Surface Near a Plane of Symmetry. *PMM U.S.S.R.*, **53**(6): 756–761.
- Chin, J. H., 1975, “Shape Change and Conduction for Nose Tips at Angle of Attack”. *AIAA J.*, **13**(5): 599–604.

- Cooke, J. C., 1959, *An Axially Symmetric Analogue for General Three-Dimensional Boundary Layers*. ARC R & M No. 3200.
- DeJarnette, F. R.; Davis, R. M., 1968, *A Simplified Method for Calculating Heat Transfer over Bodies at an Angle of Attack*. NASA TN D-4720.
- DeJarnette, F. R.; Hamilton, H. H., 1973, "Inviscid Surface Streamlines on Shuttle-Type Configurations." *Journal of Spacecraft and Rockets*, **10**(5): 314–321.
- Gershbein, E. A.; Yunitskii, S. A., 1984, Theory of the three-dimensional hypersonic viscous shock layer in the neighborhood of a plane of symmetry. *Prikl. Mat. Mekh.*, **48**(5): 768–775. (Trad. *PMM U.S.S.R.*, **48**(5): 556–562, 1984).
- Leigh, D. C., 1958, *Notes on the Calculation of Three-Dimensional Compressible Laminar Boundary-Layers: Part 1*. Aero. Memo. No. 69, G-E MSVD.
- Oliveria, Ulisses C., 1988, *Solução Geométrica das Linhas de Corrente e Coeficientes Métricos Sobre um Hemisfério*. São José dos Campos. (Disponível no IAE como ASE-E/TE-000-272-RT.)
- Oliveira, Ulisses C., 1989a, *Análise das Analogias Axissimétricas Usadas para Calcular o Fluxo Aerotérmico sobre uma Superfície*. (Disponível no IAE ou com o autor.)
- Oliveira, Ulisses C., 1989b, *Dois Novos Métodos Aproximados para Cálculo do Fluxo Convectivo de Calor em Escoamentos Supersônicos Tridimensionais*. ASE-E/TE-000-288/TR, Instituto de Aeronáutica e Espaço, S. J. Campos-SP. (Ver também: Anais do Segundo Simpósio Brasileiro de Tecnologia Aeroespacial, São José dos Campos, outubro de 1994.)
- Oliveira, Ulisses C., 1990a, *Aplicação de Novas Relações de Similaridade ao Cálculo do Fluxo Convectivo de Calor em Escoamentos Tridimensionais*. ASE-E/TE-000-290/TR, Instituto de Aeronáutica e Espaço, S. J. Campos-SP. (Ver também: *Cálculo Aproximado do Fluxo Aerotérmico Convectivo em Escoamento Supersônico Sobre Superfícies Rombudas Suaves*. Anais do XV CILAMCE – Cong. Ibero Latino-Americano sobre Métodos Comp. para Engenharia, Vol. I, páginas 414–423, Belo Horizonte, 1994.)
- Oliveira, Ulisses C., 1990b, *Uma Revisão dos Métodos Aproximados de Calcular Fluxo Aerotérmico num Plano de Simetria de um Escoamento Supersônico sobre uma Superfície Rombuda*. (Disponível no IAE ou com o autor.) (Ver também: Anais do Segundo Simpósio Brasileiro de Tecnologia Aeroespacial, São José dos Campos, outubro de 1994.)
- Oliveira, Ulisses C., 1992, *Cálculo das Linhas de Corrente Superficiais Invíscidas sobre Corpos Tridimensionais a partir da Distribuição de Pressão Superficial*. São José dos Campos. (Disponível com o autor).
- Oliveira, Ulisses C., 1996, *Fluxo Aerodinâmico em Corpos de Revolução com Ângulo de Ataque em Escoamento Supersônico*. Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.
- Vaglio-Laurin, Roberto, 1959, "Laminar Heat Transfer on Three-Dimensional Blunt Nosed Bodies in Hypersonic Flow". *ARS Journal*, **29**(2): 123–129.
- Zoby, E. V., 1982, "Approximate Heating Analysis for the Windward Symmetry Plane of Shuttle-Like Bodies at Large Angles of Attack. Method with Angle-of-Attack Applications". in *AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics: Thermophysics of Atmospheric Entry*, Vol. 82, pag. 229–247, editado por T. E. Horton, AIAA, New York.

DIREITOS AUTORAIS

O autor é o único responsável pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

ENGINEERING METHODS FOR ESTIMATION THE AEROTHERMAL FLUX AT THE SIMMETRY PLANE OF A SUPERSONIC FLOW ON A BLUNT SURFACE

Ulisses Côrtes Oliveira

Institute of Aeronautics and Space — ASE-E/IAE/CTA

12228-904 — São José dos Campos—SP, Brazil

E-mail: ulisses@iae.cta.br

Abstract. *This article is a compilation of approximate methods for calculating the convective heat flux on a surface symmetry streamline of flows past bodies at high velocities. Some of the methods only apply where the boundary layer theory holds; others, however, can be also used at low and moderate Reynolds numbers flows. These methods are based on the traditional axisymmetric analogue, new similarity relations, analytic approximate solutions of three-dimensional boundary layers and viscous shock layers, etc. Only the methods with wide possibilities of use were discussed, for brevity.*

Keywords: *Aerothermodynamics, Aerodynamic Heating, Approximate methods.*