



## UMA FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA A EQUAÇÃO DE REYNOLDS EM PROBLEMAS DE LUBRIFICAÇÃO HIDRODINÂMICA

**Carlos Roberto Ribeiro**

Faculdade de Engenharia Mecânica, UFU

Av. João Naves de Ávila, 2121, Uberlândia, MG , Brasil, CEP 38400-902

e-mail: cribeiro@mecanica.ufu.br

**Silvia Carolina Lebrón**

Faculdade de Engenharia Mecânica, UFU

e-mail: scllebron@mecanica.ufu.br

***Resumo:** O cálculo do campo de pressão nos problemas gerais de lubrificação hidrodinâmica é realizado integrando-se a equação clássica de Reynolds. Na maioria destes problemas, a viscosidade, a densidade e a altura da camada de fluido são dependentes da pressão, conduzindo a sistemas acoplados de equações diferenciais de caráter altamente não linear e conseqüente dificuldades de convergência numérica. Visando a estabilização do processo numérico, o presente trabalho apresenta um conjunto de transformações nas variáveis do problema clássico de lubrificação hidrodinâmica, e seus reflexos nos resultados numéricos, comparando a potencialidade das diversas formulações.*

***Palavras chave:** equação de Reynolds, lubrificação (elasto) hidrodinâmica, sistemas não lineares, métodos computacionais.*

### 1. INTRODUÇÃO

Dois corpos sólidos separados por uma fina camada de fluido lubrificante, com uma velocidade relativa entre eles diferente de zero e submetidos a uma carga que os induz a uma deformação elástica caracterizam a Lubrificação Elasto Hidro Dinâmica (LEH).

A análise da LEH requer a solução simultânea das equações da elasticidade e da hidrodinâmica (equações de Reynolds). O sistema acoplado de equações que compõem a solução dos problemas de LEH possui como características: na definição da espessura do filme leva-se em conta a deformação elástica do contato e tanto a viscosidade quanto a densidade dependem da pressão, resultando num problema altamente não linear.

A LEH possui uma característica altamente pontual, com grandes gradientes para a pressão, o que leva à necessidade de malhas extremamente finas na sua simulação numérica, gerando assim sistemas de ordem elevada que, associados à não linearidade numérica, tendem a produzirem soluções instáveis.

Na tentativa de estabilizar o processo de convergência dos problemas que envolvem a equação de Reynolds, neste trabalho é apresentada uma série de transformações nas variáveis do problema clássico.

### 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A pressão hidrodinâmica entre dois contatos é governada pela equação clássica de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho(u_a + u_b)h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\rho(v_a + v_b)h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (1)$$

Onde,  $p$  é o campo de pressão que surge entre os contatos lubrificados,  $h(x, y, p)$  é a separação entre as superfícies,  $\rho(p)$  a densidade,  $\eta(p)$  a viscosidade e  $u_a$  e  $u_b$ ,  $v_a$  e  $v_b$  são as velocidades das superfícies nas direções dos semi-eixos (Hamrock & Dowson, 1981).

Para pressões pequenas, a viscosidade e a densidade podem ser consideradas independentes da pressão, eliminando-se as não linearidades da Eq.(1). Isto porém não ocorre na maioria dos problemas de contatos lubrificados. Outro fator que acrescenta dificuldades à resolução destes problemas refere-se à deformação elástica dos corpos em contato (lubrificação elasto hidrodinâmica), conduzindo à necessidade de resolução simultânea de mais uma equação.

Dois sólidos com raios de curvatura  $(R_x, R_y)$ , quando submetidos a uma força  $F$ , expandem o ponto de contato em uma elipse de semi-eixos  $a$  e  $b$ . Esta elipse mostrada é definida como:

$$k = a / b \quad (2)$$

Segundo Hamrock e Dowson, 1981, as equações que compõem o sistema diferencial associado à lubrificação elasto hidrodinâmica (LEH), para contatos elípticos, em forma adimensional, são:

### 2.1. Equação de Reynolds:

Em regime permanente e sendo considerada somente a variação da velocidade na direção  $x$ , a Eq.(1) fica:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12U \left( \frac{b}{R_x} \right) \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial X} \quad (3)$$

### 2.2. Dependência da densidade com a pressão:

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{\gamma_1 P}{1 + \gamma_2 P} \quad (4)$$

Onde  $\rho_0$  é a densidade do lubrificante à pressão atmosférica, e as constantes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são inerentes ao lubrificante utilizado.

### 2.3. Separação entre as superfícies em contato:

$$H = \frac{h}{R_x} = H_0 + \left( \frac{b}{R_x} \right)^2 \frac{(x - x_0)^2}{2} + \left( \frac{b}{R_x} \right)^2 \frac{k^2 (y - y_0)^2}{\lambda} + \frac{\delta(x, y)}{R_x} \quad (5)$$

Onde  $\lambda$  é a relação entre os raios de curvatura  $R_x/R_y$ .

As primeiras parcelas da Eq.(5) referem-se à geometria da superfície de contato e a última representa a deformação nos sólidos provocada pela ação da carga de pressão que, segundo Timoshenco e Goodier, 1951, é dada por:

$$\delta(x, y) = \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{P(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (6)$$

Onde  $P$  é a pressão em cada ponto e a área  $\Omega$  abrangida pelas integrais corresponde à região inteira de geração de pressão.

## 2.4. Efeito da pressão na viscosidade:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} = \left( \frac{\eta_\infty}{\eta_0} \right)^{\left[ 1 - \left( 1 + \frac{p}{c} \right)^Z \right]} \quad (7)$$

Onde,  $\eta_0$  representa a viscosidade do lubrificante à pressão atmosférica,  $c = 1.96 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ ,  $\eta_\infty = 6.31 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$  e  $Z$  é uma constante adimensional de indexação da viscosidade com a pressão. Observe-se que pelo caráter exponencial do cálculo da viscosidade, esta é fortemente influenciada pela variação da pressão.

## 3. TRATAMENTO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS

Considere-se um operador diferencial  $A(\phi)$  definido por:

$$A(\phi; r) = \frac{\partial}{\partial X} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) \quad (8)$$

Note-se que o operador  $A$  é aplicado sobre a função  $\phi$  e que  $r$  é uma função paramétrica dada.

Existem duas abordagens ao defrontar-se com a discretização da Eq.(8), a primeira consiste em aplicar as fórmulas de diferenças finitas diretamente sobre a equação e a outra em proceder-se à diferenciação indicada antes da discretização.

### 3.1. Abordagem (1):

Aplicando-se as fórmulas de diferenças finitas diretamente sobre a Eq.(8), com  $r > 0$  temos:

$$A(\phi) = \phi_w a_w + \phi_e a_e - \phi_0 a_0 \quad (9)$$

onde,

$$a_w = \left( \frac{r_e + 3r_w}{4(\Delta X)^2} \right) > 0, \text{ (pois } r > 0) \quad a_e = \left( \frac{r_w + 3r_e}{4(\Delta X)^2} \right) > 0 \quad a_0 = a_e + a_w > 0 \quad (10)$$

### 3.2. Abordagem (2):

Procedendo-se à diferenciação indicada na Eq.(8) antes da discretização temos,

$$A(\phi) = r \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial r}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (11)$$

Aplicando-se as fórmulas de diferenças finitas sobre a Eq.(11) temos novamente a Eq.(9) mudando no entanto os valores dos seus coeficientes que ficam,

$$a_w = \frac{r_0}{(\Delta X)^2} - \frac{r_e - r_w}{4(\Delta X)^2} \quad a_e = \frac{r_0}{(\Delta X)^2} - \frac{r_e - r_w}{4(\Delta X)^2} \quad a_0 = \frac{2r_0}{(\Delta X)^2} > 0 \quad (12)$$

Tanto na primeira abordagem como na segunda tem-se  $a_0 = a_e + a_w > 0$ , porém na segunda não se garante mais que  $a_w > 0$  e que  $a_e > 0$ .

### 3.3. Discretização das equações:

Segundo Patankar, 1980, a discretização da primeira abordagem é intrinsecamente estável enquanto que não há garantias sobre a discretização fornecida pela segunda.

O mesmo procedimento pode ser aplicado a uma malha irregular, o que será feito considerando-se somente a abordagem (1) por ser mais estável. Neste caso tem-se,

$$A(\phi) = \frac{\partial}{\partial X} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) = C_{0w} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w + C_{00} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_0 + C_{0e} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e \quad (13)$$

desdobrando-se  $\frac{\partial \phi}{\partial X}$  por diferenças finitas resulta em,

$$A(\phi) = \phi_w a_w + \phi_e a_e + \phi_0 a_0 \quad (14)$$

onde,

$$a_w = C_{0w} r_w C_{ww} + C_{00} r_0 C_{0w} + C_{0e} r_e C_{ew} \quad (15 a)$$

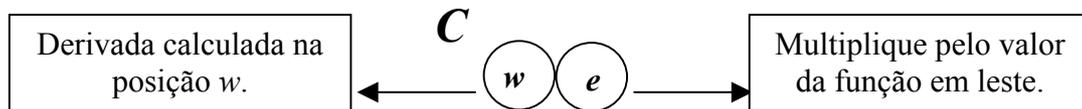
$$a_e = C_{0w} r_w C_{we} + C_{00} r_0 C_{0e} + C_{0e} r_e C_{ee} \quad (15 b)$$

$$a_0 = C_{0w} r_w C_{w0} + C_{00} r_0 C_{00} + C_{0e} r_e C_{e0} \quad (15 c)$$

onde,

$$C_{ww} = \frac{(x_w - x_0) + (x_w - x_e)}{(x_w - x_0)(x_w - x_e)}, \quad C_{w0} = \frac{(x_w - x_e)}{(x_0 - x_w)(x_0 - x_e)}, \quad \dots \quad C_{ee} = \frac{(x_e - x_w) + (x_e - x_0)}{(x_e - x_w)(x_e - x_0)} \quad (16)$$

O primeiro índice dos coeficientes de  $C_{ij}$  da Eq.(15) indica o nó onde se está calculando a derivada e o segundo refere-se a qual valor nodal da função o coeficiente deve ser multiplicado. Por exemplo,



### 3.3. Mudanças de variáveis:

Considere-se agora a equação alvo, a Eq.(3). Antes da discretização, proceda-se à seguinte mudança de variável dependente (Lebrón, 2001):

$$\phi = h^\gamma P, \quad 0 \leq \gamma \leq 2 \quad (17)$$

A justificativa para adotar-se a transformação dada pela Eq.(17) é que, em problemas de contatos lubrificadas, a pressão atinge picos pronunciados justamente onde  $h$  é pequeno. Ao se multiplicar  $P$  por potências de  $h$ , há uma tendência de se obter um campo de  $\phi$  mais suave, portanto, mais tratável por diferenças finitas. Se  $\gamma = 0$  ter-se-á  $\phi = P$  e não haverá transformação alguma. Se  $\gamma$  é muito elevado, por exemplo  $\phi = h^3 P$ , haverá um efeito muito pronunciado onde  $h$  é pequeno e perder-se-á o efeito suavizador, daí a razão em limitar-se  $\gamma$  a valores inferiores a três. Estas idéias estão ilustradas na Fig.(1).

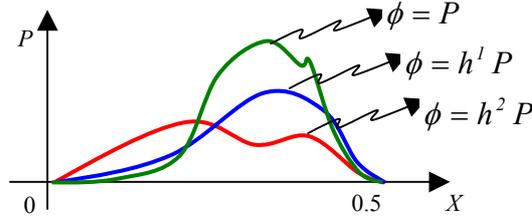


Figura (1): Efeito suavizador para o campo de pressão em função dos diferentes valores de  $\gamma$

Da Eq.(17) tem-se

$$P = \phi h^{-\gamma} \quad (18)$$

$$P_x = \frac{\partial P}{\partial X} = \phi_x h^{-\gamma} - \gamma h^{-\gamma-1} h_x \phi \Rightarrow h^3 P_x = \phi_x h^{3-\gamma} - \gamma h^{2-\gamma} h_x \phi \quad (19 a)$$

analogamente,

$$h^3 P_y = \phi_y h^{3-\gamma} - \gamma h^{2-\gamma} h_y \phi \quad (19 b)$$

Substituindo-se a Eq.(19) na Eq.(3) resulta,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\rho}{\eta} [\phi_x h^{3-\gamma} - \gamma h^{2-\gamma} h_x \phi] \right\} + \frac{I}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\rho}{\eta} [\phi_y h^{3-\gamma} - \gamma h^{2-\gamma} h_y \phi] \right\} = 12U \frac{b}{R_x} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \quad (20)$$

definindo-se

$$r = \rho / \eta \quad (21)$$

tem-se para a Eq.(20),

$$\frac{\partial}{\partial x} [r h^{3-\gamma} \phi_x] + \frac{I}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} [r h^{3-\gamma} \phi_y] - \gamma \frac{\partial}{\partial x} [r h^{2-\gamma} h_x \phi] - \frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} [r h^{2-\gamma} h_y \phi] = 12U \left( \frac{b}{R_x} \right) \quad (22)$$

Desenvolvendo a primeira parcela da Eq.(22) tem-se,

$$\frac{\partial}{\partial x} [r h^{3-\gamma} \phi_x] = h^{3-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (r \phi_x) + (r \phi_x) (3-\gamma) h^{2-\gamma} h_x \quad (23)$$

Desenvolvendo a terceira parcela da Eq.(22) resulta,

$$\frac{\partial}{\partial x} [r h^{2-\gamma} h_x \phi] = \phi \frac{\partial}{\partial X} [r h^{2-\gamma} h_x] + r h^{2-\gamma} h_x \phi_x = \phi \left[ (2-\gamma) h^{1-\gamma} r h_x^2 + h^{2-\gamma} \frac{\partial}{\partial X} (r h_x) \right] + h^{2-\gamma} r h_x \phi_x \quad (24)$$

Substituindo-se as Eq. (23) e (24) assim como as fórmulas análogas na direção  $y$ , na Eq.(22) resulta:

$$\begin{aligned} & h^{3-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (r \phi_x) + \frac{h^{3-\gamma}}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} (r \phi_y) + (r \phi_x) (3-\gamma) h^{2-\gamma} h_x + \frac{I}{k^2} (r \phi_y) (3-\gamma) h^{2-\gamma} h_y \\ & - \gamma \left\{ \phi \left[ (2-\gamma) h^{1-\gamma} r h_x^2 + h^{2-\gamma} \frac{\partial}{\partial X} (r h_x) \right] + h^{2-\gamma} r h_x \phi_x \right\} \\ & - \frac{\gamma}{k^2} \left\{ \phi \left[ (2-\gamma) h^{1-\gamma} r h_y^2 + h^{2-\gamma} \frac{\partial}{\partial Y} (r h_y) \right] + h^{2-\gamma} r h_y \phi_y \right\} = 12U \frac{b}{R_x} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \end{aligned} \quad (25)$$

Reagrupando os termos em  $r\phi_x$ ,  $r\phi_y$  e  $\phi$  e dividindo-se a Eq.(25) por  $h^{3-\gamma}$  resulta,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(r\phi_x) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y}(r\phi_y) + r(3-2\gamma) \left[ \phi_x \frac{h_x}{h} + \frac{\phi_y}{k^2} \frac{h_y}{h} \right] \\ & - \gamma \phi \left\{ (2-\gamma)r \left[ \left( \frac{h_x}{h} \right)^2 + \frac{1}{k^2} \left( \frac{h_y}{h} \right)^2 \right] + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial X}(rh_x) + \frac{1}{hk^2} \frac{\partial}{\partial Y}(rh_y) \right\} = \frac{12U}{h^{3-\gamma}} \left( \frac{b}{R_x} \right) \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \end{aligned} \quad (26)$$

A Eq.(26) é a equação básica que servirá à discretização. Note-se que quando  $\gamma = 3/2$  as parcelas em  $\phi_x$  e  $\phi_y$  se anulam e a Eq.(26) simplifica-se. Este valor é o utilizado por Dowson e Higginson, 1959, em seu trabalho.

Para discretizar a Eq.(26) considere uma célula de uma malha de diferenças finitas (regular ou não) ilustrada na Fig.(2). Aplicando-se a Eq.(14) às duas primeiras parcelas da Eq.(26), onde um superescrito indica o eixo coordenado, tem-se,

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\phi_x) = \phi_w a_w^x + \phi_e a_e^x + \phi_0 a_0^x \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial Y}(r\phi_y) = \phi_n a_n^y + \phi_s a_s^y + \phi_0 a_0^y \quad (27)$$

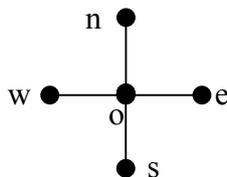


Figura (2): Célula de diferenças finitas básica

onde  $a_w^x$ ,  $a_e^x$  e  $a_0^x$  são dados pela Eq.(15) e  $a_n^y$ ,  $a_s^y$  e  $a_0^y$  também são calculados pela Eq.(15) porém substituindo as coordenadas  $x$  por  $y$  no cálculo dos coeficientes expressos na Eq.(16).

Aplicando-se diferenças finitas às parcelas  $\phi_x$  e  $\phi_y$  vem,

$$\phi_x = \phi_w C_{0w}^x + \phi_e C_{0e}^x + \phi_0 C_{00}^x \quad \text{e} \quad \phi_y = \phi_s C_{0s}^y + \phi_n C_{0n}^y + \phi_0 C_{00}^y \quad (28)$$

Substituindo-se as Eq. (27) e (28) na Eq.(26) resulta,

$$a_0 \phi_0 + a_n \phi_n + a_s \phi_s + a_w \phi_w + a_e \phi_e = f \quad (29)$$

onde,

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0^x + \frac{a_0^y}{k^2} + a C_{00}^x + \frac{b C_{00}^y}{k^2} - C & a_w &= a_w^x + a C_{0w}^x \\ a_e &= a_e^x + a C_{0e}^x & a_s &= \frac{a_s^y + b C_{0s}^y}{k^2} & a_n &= \frac{a_n^y + b C_{0n}^y}{k^2} \end{aligned}$$

### 3.5. Pressão reduzida:

Um dos complicadores na busca de uma solução numérica da Eq.(3) é o termo  $\rho/\eta$  dependente da pressão, o que torna o problema não linear. Uma das maneiras de se circunscrever este problema é utilizar a chamada pressão reduzida que consiste em uma mudança na variável dependente  $P$  para a variável  $q$  (pressão reduzida) segundo a seguinte transformação:

$$q(P) = \int_0^P \frac{\rho(\xi)}{\eta(\xi)} d\xi \quad (30)$$

Como  $\rho = \rho(P)$  e  $\eta = \eta(P)$  dependem do modelo reológico adotado e, em geral, são expressões analiticamente complicadas, o cálculo da integral da Eq.(30) deve ser realizado numericamente. O resultado desta integração pode ser visualizado na Fig.(3). onde se nota que  $q$  tende assintoticamente para um valor limite  $q_{max}$  quando  $p$  tende para o infinito.

Derivando-se a Eq.(30) em relação a  $x$ , utilizando-se a regra de Leibnitz de diferenciação de integrais, resulta:

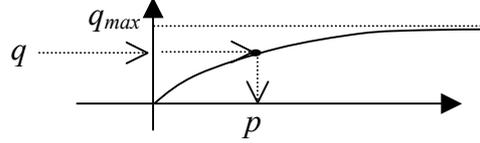


Figura (3): Comportamento da pressão reduzida

$$q_x = \left( \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) \quad (31)$$

que implica em,

$$h^3 q_x = \frac{\rho}{\eta} h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \quad (32)$$

de modo análogo,

$$h^3 q_y = \frac{\rho}{\eta} h^3 \frac{\partial P}{\partial y} \quad (33)$$

Substituindo-se as Eq. (32) e (33) na Eq.(3) resulta,

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( H^3 \frac{\partial q}{\partial X} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left( H^3 \frac{\partial q}{\partial y} \right) = 12U \left( \frac{b}{R_x} \right) \frac{\partial (\bar{\rho}H)}{\partial X} \quad (34)$$

A Eq.(34) é muito mais tratável do que a Eq.(3) pois é linear em  $q$ . Há, como esperado, um complicador nesta abordagem, pois assim que se calcula o campo  $q$ , há que se obter o campo  $P$  correspondente. Isto é feito entrando-se no gráfico da Fig.(3) no sentido indicado pelas flechas, porém na região assintótica do gráfico, pequenos desvios dos valores de  $q$  acarretam grandes desvios nos valores da pressão correspondente. Como esta região é de grande interesse prático na obtenção dos picos de pressão, deve-se resolver tanto a Eq.(34) como calcular o gráfico da Fig.(3) com grande precisão. O modelo de discretização da Eq.(34) segue exatamente os mesmos passos da Eq.(3) inclusive na transformação provida pela Eq.(17). Basta fazer  $r=1$  no desenvolvimento que resultou na Eq.(29).

### 3.6. Viscosidade fictícia:

Para contornar as dificuldades numéricas do modelo anterior, em vez de se utilizar a transformação da Eq.(30), ilustrada na Fig.(3), adotemos a seguinte transformação que é apresentada na Fig.(4).

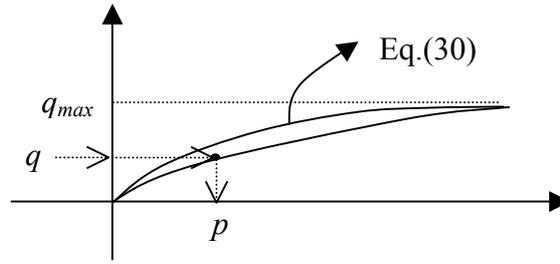


Figura (4): Comportamento da curva  $q(p)$  utilizando a viscosidade fictícia.

$$q(P) = \frac{(1 - e^{-cp})}{c} \Leftrightarrow p = -\frac{\ln(1 - qc)}{c} \quad (35)$$

Com isto elimina-se o inconveniente da transformação inversa do modelo anterior. Derivando-se Eq.(35) resulta:

$$q_x = e^{-cp} P_x \quad \text{ou} \quad P_x = q_x e^{cp} \quad (36)$$

$$\frac{\rho}{\eta} h^3 P_x = \frac{\rho}{\eta e^{-cp}} h^3 q_x = \frac{\rho}{\eta'} h^3 q_x \quad (37)$$

onde,

$$\eta' = \eta e^{-cp} \quad (38)$$

Note-se que temos o mesmo formato para a equação de Reynolds com a substituição de  $\eta$  por  $\eta'$  que pode ser denominada de viscosidade fictícia.

A vantagem é que o termo  $\eta'$  varia mais lentamente com a pressão  $P$ , o que contribui para a estabilidade da solução. Além disso a Eq.(35) é facilmente inversível.

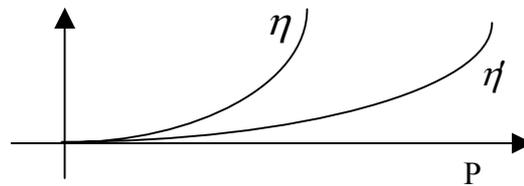


Figura (5): Curvas do crescimento da viscosidade e da viscosidade fictícia

$$p = -\frac{\log(1 - cq)}{c} \quad (39)$$

Resta determinar  $c$  para obter os efeitos desejados. Neste trabalho foi escolhido  $c$  de modo que quando  $p$  se aproxima de  $2 P_h$  onde  $P_h$  é a máxima pressão Hertziana, a relação entre  $\eta'$  e  $\eta$  é:

$$\eta' = 0.99 \eta \quad (40)$$

#### 4. RESULTADOS

Em resumo, neste trabalho foram abordados três modelos numéricos para o tratamento da equação de Reynolds dados por:

Tabela (1): Modelos de solução da equação de Reynolds testados neste trabalho.

Modelo 1	$\phi = h^\gamma q$	$q = P$
Modelo 2	$\phi = h^\gamma q$	$q = \int_0^p \frac{\rho}{\eta} d\xi$
Modelo 3	$\phi = h^\gamma q$	$q = 1 - e^{-cp} / c$

Com o objetivo de localizar um modelo e um valor adequado para  $\gamma$  que, ao mesmo tempo que fornecesse resultados satisfatórios, não fosse tão caro tanto em tempo de processamento quanto em capacidade de armazenamento, adotou-se como padrão de comparação os resultados obtidos por Hamrock e Dowson (1981), Jang e Tichy (1995) e Venner (1994).

Na busca do modelo e do valor de  $\gamma$  apropriados, diferentes combinações foram executadas. Para  $\gamma$  foram escolhidos os valores: 0, 1, 1.5 (valor adotado por Hamrock e Dowson em 1981) e 2.

O resultado obtido nestes diferentes casos pode ser analisado nas Fig.(6) a (17). onde, além dos perfis das pressões após 1000 iterações, pode ser observado o comportamento de cada caso com 10 e 100 iterações de modo a se visualizar o comportamento da solução em direção à convergência.

Tabela (5.1): Parâmetros utilizados para a escolha do modelo

Altura mínima inicial do lubrificante	Velocidade adimensional $U = \eta_o u / E' R_x$	Geometria do contato $k = a / b$	Carga adimensional $W = F / E' R_x^2$
$H_0 = 10^{-5}$	$U = 0.1683 \cdot 10^{-11}$	$K = 1.25$	$W = 0.1106 \cdot 10^{-6}$

#### 4.1. Modelo 1

$$\phi = h^\gamma P$$

$$0 \leq \gamma \leq 2$$

Nos gráficos representados nas Fig. (6) a (9) nota-se o surgimento de instabilidades, ultrapassando em muito a pressão Hertziana, com o que se conclui que este modelo não é apropriado para o problema específico adotado (LEH).

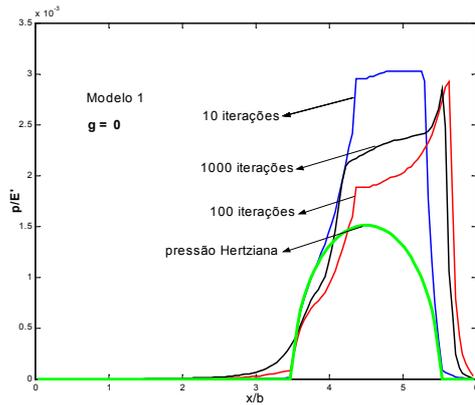


Figura (6):  $\phi = P$

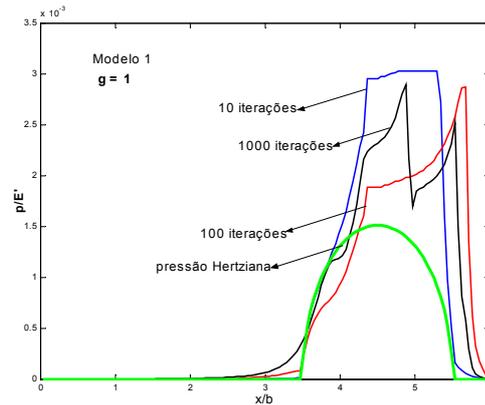


Figura (7):  $\phi = h P$

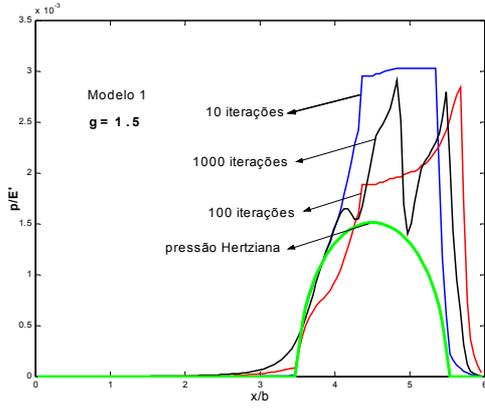


Figura (8):  $\phi = \sqrt{h^3} P$

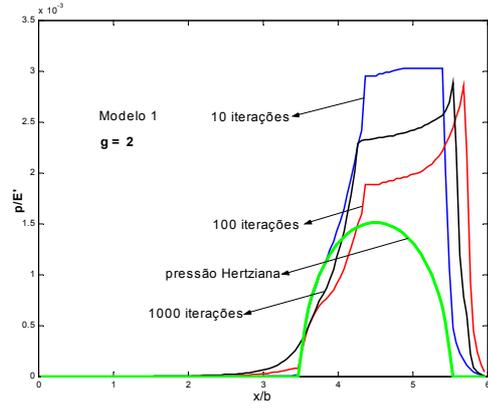


Figura (9):  $\phi = h^2 P$

#### 4.2. Modelo 2

$$\phi = h^\gamma q \quad 0 \leq \gamma \leq 2$$

$$q = \int_0^p \frac{\rho}{\eta} d\xi$$

Observando-se os gráficos fornecidos por este modelo, representados nas Fig. (10) a (13), pode-se concluir que o mesmo apresenta resultados mais precisos que o modelo 1 em relação ao campo de pressão. No entanto, este método apresenta oscilações no valor das pressões. Estas oscilações relacionam-se com a exigência do método em relação a um número maior de iterações e conseqüente aumento do tempo de processamento.

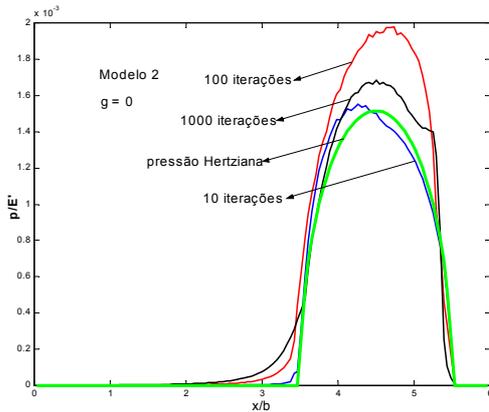


Figura (10):  $\phi = q$

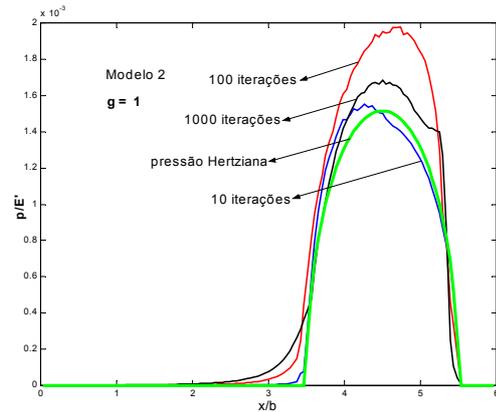


Figura (11):  $\phi = h q$

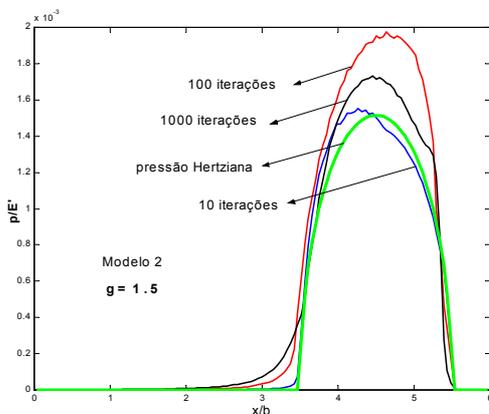


Figura (12):  $\phi = \sqrt{h^3} q$

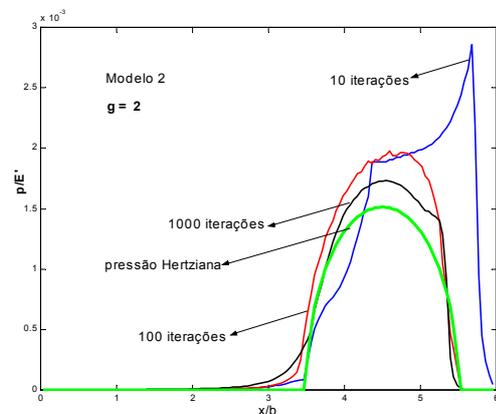


Figura (13):  $\phi = h^2 q$

### 4.3. Modelo 3

$$\phi = h^\gamma q \quad 0 \leq \gamma \leq 2$$

$$q = 1 - e^{-cp} / c$$

Este método, cujos resultados podem ser vistos nas Fig. (14) a (17), foi o que apresentou melhor convergência, além do que o perfil das pressões obtido com o mesmo, assemelha-se aos expostos na bibliografia. Para um estudo mais aprofundado dos problemas de LEH, recomenda-se este modelo com  $\gamma=0$  (Fig.(14)) por que este caso apresentou oscilações menores nos campos das pressões demonstrando ser mais econômico em tempo de CPU.

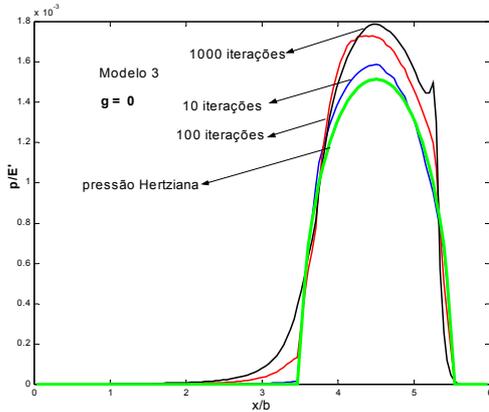


Figura (14):  $\phi = q$

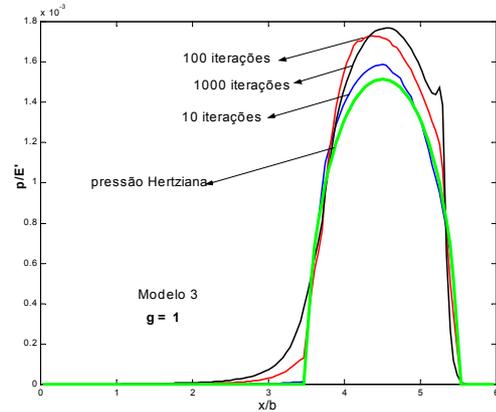


Figura (15):  $\phi = h q$

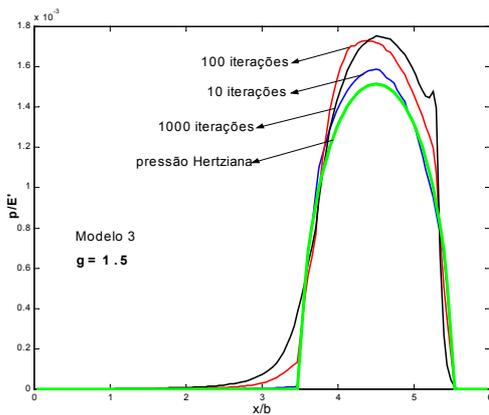


Figura (16):  $\phi = \sqrt{h^3} q$

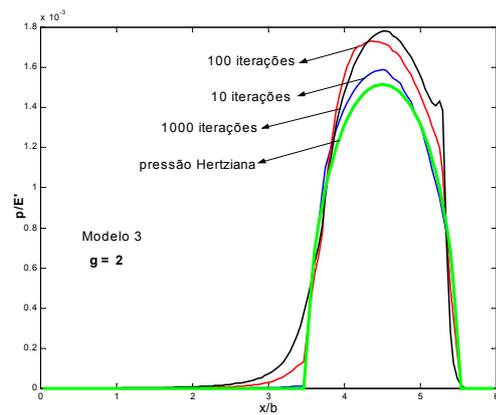


Figura (17):  $\phi = h^2 q$

## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se uma série de transformações numéricas na equação clássica de Reynolds, que calcula o campo de pressão em problemas gerais de lubrificação hidrodinâmica. Tais transformações visam a estabilização do processo de convergência numérica deste problema que há tempos desafia os procedimentos clássicos de abordagem.

Foram apresentados resultados do emprego de duas transformações sucessivas em série. A primeira substitui o campo de pressão por um outro campo chamado de pressão reduzida. A segunda é de caráter puramente numérico, procurando reduzir os picos pronunciados de pressão e desta forma tornar o problema mais tratável por diferenças finitas. As duas transformações foram realizadas de forma paramétrica de maneira que, ao variarem-se sistematicamente seus parâmetros, pode-se explorar uma gama ampla de possibilidades.

O trabalho apontou uma faixa de parâmetros que melhor respondeu ao algoritmo de solução adotado para um caso típico de lubrificação, entretanto para uma conclusão definitiva sobre os valores ideais de tal conjunto de parâmetros, é necessária uma exploração mais ampla de casos,

abrangendo diversas configurações geométricas de contato. A metodologia contudo pode ser aplicada a qualquer problema governado pela equação de Reynolds.

## 6. REFERÊNCIAS

- Hamrock, B. J. & Dowson, D., 1981, ‘Ball Bearing Lubrication – The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts’, John Wiley & Sons, Inc. United States of America.
- Jang, S. & Tichi, J., 1995, ‘Reological Models for Thin Film EHL Contacts’, Journal of Tribology, Vol. 117.
- Lebrón, S. C., 2001, ‘A Técnica de Multi Grelha na Solução de Problemas de Lubrificação Elasto Hidro Dinâmica’, Dissertação de Mestrado, UFU.
- Patankar, S.V., 1980 Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. 1<sup>st</sup> Ed. United States of America: Hemisphere Publishing Corporation.
- Timoshenko, S and Goodier, J. N., 1951, ‘ Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
- Venner, C. H., 1994, ‘Higher- Order Multilevel Solvers for the EHL Line and Point Contact Problem’, Journal of Tribology, Vol. 116/741.

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# A NUMERICAL FORMULATION FOR REYNOLDS’S EQUATION IN HYDRODYNAMICS LUBRICATION

### **Carlos Roberto Ribeiro**

School of Mechanical Engineering, Universidade Federal de Uberlândia – UFU  
Av. João Naves de Ávila, 2121, Uberlândia, MG , Brasil, CEP 38400-902  
e-mail: cribeiro@mecanica.ufu.br

### **Silvia Carolina Lebrón**

Faculdade de Engenharia Mecânica, UFU  
e-mail: sclebron@mecanica.ufu.br

**Summary:** *The calculation of the field of pressure in the general problems of hydrodynamics lubrication is carried through integrating the classic equation of Reynolds. In the majority of these problems, the viscosity, the density and the height of the fluid layer are dependents of the pressure, leading the coupled systems of differential equations to a highly non linear system and consequent difficulties of numerical convergence. Aiming at the stabilization of the numerical process, the present paper presents a collection of transformation for the variables of the classic problem of hydrodynamics lubrication, and its consequences in the numerical results, comparing the potentiality of the diverse formularizations.*

**Keywords:** *Reynolds’s equation, (elasto) hydrodynamics lubrication, non linear systems, computational methods.*