



INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DE VIBRAÇÃO LIVRE EM LAMINADOS COMPOSTOS

Júlio César Valente Ferreira

Laboratório de Mecânica dos Sólidos
Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/PEM
Cx. Postal 68503, CEP: 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
jcesar@mecsol.ufrj.br

Lavínia Alves Borges

Laboratório de Mecânica dos Sólidos
Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/PEM
Cx. Postal 68503, CEP: 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
lavinia@ufrj.br

***Resumo.** O presente trabalho tem como objetivo apresentar um modelo em elementos finitos para a determinação das frequências naturais e seus modos de vibração em laminados compostos. Todo o procedimento numérico para desenvolvimento do modelo é baseado em computação simbólica. O método é baseado na teoria clássica de placas, utilizando elementos triangulares com os graus de liberdade de membrana e de flexão interpolados, respectivamente, pelas funções de Lagrange e Hermite. O modelo consiste em determinar as matrizes de rigidez e de massa, sem a inclusão do termo de inércia de rotação. No intuito de validar o método proposto, foram considerados alguns problemas clássicos envolvendo laminados compostos. Os resultados obtidos mostram a eficiência do modelo proposto.*

***Palavras-Chaves:** materiais compostos, teoria clássica de placas, vibração livre, elementos finitos.*

1. INTRODUÇÃO

Os laminados compostos são fabricados a partir do empilhamento de diversas camadas; sendo cada uma constituída por composições de fibra e matriz. Cada camada pode ser feita a partir de diferentes composições, espessuras e orientação dos reforços.

No presente trabalho, utilizaremos a teoria clássica de placas para a determinação das matrizes de rigidez e de massa do laminado composto. Este é o modelo de placa mais simples, pois parte de hipóteses simplificadoras de análise de um meio contínuo, cuja espessura é muito menor que as demais dimensões. Desta forma, podemos representar seu comportamento apenas por variáveis associadas ao seu plano médio. A teoria clássica não contempla cisalhamentos transversais, simplificando consideravelmente o tratamento das equações que representam o comportamento da placa, porém representa com sucesso apenas o comportamento de placas finas.

Esta teoria apesar de seu caráter básico encontra sua utilidade. Por exemplo, Gibson (2000) utiliza códigos computacionais, baseados nesta teoria, para atualização de dados em modelos experimentais visando determinar modos de vibração de laminados compostos com o intuito de identificar parâmetros elásticos.

2. TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS

Para descrever a teoria clássica de placas, utilizaremos a abordagem promovida pelo princípio das potências virtuais. Isto se deve ao fato de que esta é a forma mais natural para descrever as leis que governam os meios contínuos. Além disto, esta abordagem permite a obtenção de soluções de fácil implementação computacional.

Para indicar matematicamente o princípio das potências virtuais, na hipótese de pequenas deformações, considera-se o corpo em equilíbrio em uma configuração indeformada. O corpo estará em equilíbrio se a soma das potências externa e interna for nula. O conceito de potência externa associa esforços compatíveis com a cinemática adotada. De forma análoga, a potência interna associa à deformação um conjunto de esforços internos. Além disto, estes esforços são compatíveis com a cinemática do problema, pois a deformação é obtida a partir da derivação da ação do movimento.

Conforme Borges (2001), a potência interna para uma placa é descrita conforme a Eq. (1).

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\mathbf{T}}, \nabla \tilde{\mathbf{v}} \rangle = & \overbrace{\int_{\Sigma_0} \int_z [\mathbf{T}_0 \cdot (\nabla \mathbf{v})_0] dz d\Sigma_0}^{\text{Potência no plano médio}} + \overbrace{\int_{\Sigma_0} \int_z [\mathbf{t}_{0\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial z} + \nabla v_z \right)] dz d\Sigma_0}^{\text{Potência dos esforços cisalhantes}} + \\
 & \overbrace{\int_{\Sigma_0} \int_z \left[\sigma_n \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] dz d\Sigma_0}^{\text{Potência das tensões normais}}
 \end{aligned} \quad (1)$$

onde \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_z representam, respectivamente, as componentes no plano médio e normal do vetor deslocamento. \mathbf{T}_0 é o tensor que contém as componentes de tensão no plano médio, σ_n a tensão normal ao plano médio e $\mathbf{t}_{0\mathbf{n}}$, e $\mathbf{t}_{\mathbf{n}0}$ os vetores que representam os esforços de cisalhamento.

Como hipótese básica, a teoria clássica de placas propõe como nulas a potência das tensões normais e a potência dos esforços cisalhantes. Desta forma, temos por consequência o fato de somente a potência no plano médio (Σ_0) não ser nula (Eq. 2), o deslocamento normal v_z independer de z (Eq. 3) e as seções transversais permanecerem planas e normais ao plano médio (Eq. 4).

$$\langle \tilde{\mathbf{T}}, \nabla \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\Sigma_0} \int_z [\mathbf{T}_0 \cdot (\nabla \mathbf{v})_0] dz d\Sigma_0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad v_z = v_z(\Sigma_0) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial z} + \nabla v_z = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0 - z \nabla v_z \quad \rightarrow \quad \nabla \mathbf{v}_0 = \nabla \mathbf{u}_0 - z \nabla (\nabla v_z) \quad (4)$$

onde \mathbf{v}_0 e \mathbf{u}_0 representam, respectivamente, o deslocamento normal e transversal ao plano médio da placa. Aplicando a Eq. (4) na Eq. (1), a potência interna da placa estará em função dos componentes vetoriais e tensoriais aplicáveis em seu plano médio (Eq. 5).

$$\langle \tilde{\mathbf{T}}, \nabla \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\Sigma_0} \int_z [\mathbf{T}_0 \cdot (\nabla \mathbf{u}_0 - z \nabla (\nabla v_z))] dz d\Sigma_0 \quad (5)$$

O tensor de tensão relaciona-se com o tensor de elasticidade (Q) conforme mostra a Eq. (6).

$$\mathbf{T}_0 = Q[\nabla^s \mathbf{u}_0 - z \nabla(\nabla v_z)] \quad (6)$$

Aplicando a Eq. (6) e o teorema da divergência na Eq. (5), obtemos a formulação cinemática para a teoria clássica de placas, conforme mostra a Eq. (7).

$$\int_{\Sigma_0} [\mathbf{D}_m \nabla^s \mathbf{u}_0 - \mathbf{D}_{mf} \nabla^s(\nabla v_z)] \cdot \nabla^s \mathbf{u}_0^* d\Sigma_0 - \int_{\Sigma_0} [\mathbf{D}_{mf} \nabla^s \mathbf{u}_0 - \mathbf{D}_f \nabla^s(\nabla v_z)] \cdot \nabla^s(\nabla v_z^*) d\Sigma_0 \quad (7)$$

O vetor \mathbf{u}_0^* representa o deslocamento virtual transversal ao plano médio e \mathbf{v}_z^* o componente vetorial virtual normal ao plano médio. Os tensores \mathbf{D}_m , \mathbf{D}_{mf} e \mathbf{D}_f representam, respectivamente, a rigidez extensional ou de membrana, rigidez de acoplamento entre flexão e extensão e rigidez de flexão, sendo definidos por:

$$[\mathbf{D}_m, \mathbf{D}_{mf}, \mathbf{D}_f] = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathbf{Q}^{(k)}[1, z, z^2] dz \quad (8)$$

Da mesma forma, a parcela relativa à potência externa é dada pela Eq. (9).

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\rho} \ddot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}}^* \rangle = & \int_{\Sigma_0} [I_0 \ddot{\mathbf{u}}_0 - I_1 \nabla \ddot{v}_z] \cdot \mathbf{u}_0^* d\Sigma_0 + \int_{\Sigma_0} [I_0 \ddot{v}_z + I_1 \operatorname{div}(\ddot{\mathbf{u}}_0)] v_z^* d\Sigma_0 + \\ & \int_{\partial \Sigma_0} [-I_1 \ddot{\mathbf{u}}_0] v_z^* \cdot \mathbf{m} d\partial \Sigma_0 \end{aligned} \quad (9)$$

onde z_k e z_{k+1} são as coordenadas ao longo da espessura da parte inferior e superior da k -lâmina e I_0 e I_1 são constantes relativas à inércia do corpo descritas por:

$$I_0 = \sum_{k=1}^N \rho_k (z_{k+1} - z_k) \quad ; \quad I_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \rho_k (z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad (10)$$

3. MODELAGEM EM ELEMENTOS FINITOS

Conforme visto no capítulo anterior, a potência interna iguala-se à externa quando verifica-se a condição de equilíbrio. Ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_0} [\mathbf{D}_m \nabla^s \mathbf{u}_0 - \mathbf{D}_{mf} \nabla^s(\nabla v_z)] \cdot \nabla^s \mathbf{u}_0^* d\Sigma_0 - \int_{\Sigma_0} [\mathbf{D}_{mf} \nabla^s \mathbf{u}_0 - \mathbf{D}_f \nabla^s(\nabla v_z)] \cdot \nabla^s(\nabla v_z^*) d\Sigma_0 \\ & - \int_{\Sigma_0} [I_0 \ddot{\mathbf{u}}_0 - I_1 \nabla \ddot{v}_z] \cdot \mathbf{u}_0^* d\Sigma_0 - \int_{\Sigma_0} [I_0 \ddot{v}_z + I_1 \operatorname{div}(\ddot{\mathbf{u}}_0)] v_z^* d\Sigma_0 - \int_{\partial \Sigma_0} [-I_1 \ddot{\mathbf{u}}_0] v_z^* \cdot \mathbf{m} d\partial \Sigma_0 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Através do exame das relações cinemáticas resumidas na Eq. (11), verificamos que o cálculo das potências virtuais em placas envolve derivadas de primeira e segunda ordem dos deslocamentos. Com isto, devemos aproximar os campos de deslocamentos através de funções de

interpolação que satisfaçam esta condição de regularidade no elemento especificado. A discretização implementada é composta de elementos triangulares com três nós, localizados nos vértices, possuindo cada um cinco graus de liberdade, conforme descrito por Reddy (1997). A discretização é feita independentemente para a parcela de membrana e de flexão, utilizando uma função de interpolação para cada uma destas parcelas. A primeira parte da discretização refere-se aos deslocamentos no plano formado pelas direções x e y (dois graus de liberdade por nó), sendo utilizadas as funções de interpolação de Lagrange (Reddy, 1997). A segunda parte da discretização refere-se ao deslocamento na direção z e suas derivadas com respeito a x e y (três graus de liberdade por nó), sendo utilizadas as funções de interpolação de Hermite (Reddy, 1997).

Conforme apresentado por Borges (2001), a aplicação das funções de interpolação na Eq.(11) permite a definição das matrizes elementares de rigidez (K^e) e de massa (M^e) na forma:

$$[\mathbf{K}^e] = \left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{K}_{\mathbf{0}}^e]_{ij} & [\mathbf{K}_{\mathbf{0n}}^e]_{ij} \\ \hline [\mathbf{K}_{\mathbf{0n}}^{\mathbf{T}}]_{ij} & [\mathbf{K}_{\mathbf{n}}^e]_{ij} \end{array} \right] \quad i = 1, n_0 \quad j = 1, n_z \quad (12)$$

$$[\mathbf{M}^e] = \left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{M}_{\mathbf{0}}^e]_{ij} & [\mathbf{M}_{\mathbf{0p}}^e]_{ij} \\ \hline [\mathbf{M}_{\mathbf{0p}}^{\mathbf{T}}]_{ij} & [\mathbf{M}_{\mathbf{p}}^e]_{ij} \end{array} \right] \quad i = 1, n_0 \quad j = 1, n_z \quad (13)$$

onde n_0 representa o número de graus de liberdade de extensão por elemento e n_z o número de graus de liberdade de flexão por elemento. No presente trabalho $n_0 = 2$ e $n_z = 3$. Os termos da matriz de rigidez e massa relativos ao comportamento de membrana são K_0 e M_0 , ao acoplamento membrana-flexão são K_{0n} e M_{0p} e à flexão K_n e M_p .

A partir das matrizes elementares, calculam-se as matrizes globais de rigidez e de massa, permitindo o cálculo das frequências naturais e seus modos de vibração a partir de:

$$\det[[\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]] = 0 \quad (14)$$

4. AMBIENTE COMPUTACIONAL

O modelo proposto foi implementado utilizando-se a plataforma computacional do software *Mathematica*®. Esta escolha ocorreu pois desejava-se um ambiente com interface amigável ao usuário, possuindo também o ambiente matemático adequado ao objetivo proposto. Outro ponto interessante reside no fato deste software permitir gerar documentos denominados *notebooks*, que possibilitam detalhar e explanar os cálculos de tal forma que o usuário possa adaptá-lo conforme suas necessidades.

Procedimentos computacionais para o cálculo de máxima deflexão em placas de material isotrópico, através do uso de operações simbólicas, implementados a partir da teoria clássica de placas e o método dos elementos finitos são encontrados em Kwon and Bang (1997) para aplicações com o software *MATLAB*®. No modelo descrito neste trabalho, trabalha-se com o cálculo de frequências naturais em placas de material composto, o qual possui particularidades em sua modelagem.

O ambiente computacional é dividido em três blocos. No primeiro ocorre a inserção dos dados do problema. Os dados referem-se às coordenadas e propriedades mecânicas das camadas do laminado, bem como o número de graus de liberdade por nó, o número de nós por elemento, a incidência elementar e as condições de contorno dos nós da malha. Estes dados podem ser

incluídos através de arquivos criados em programas geradores de malha ou através de arquivos confeccionados pelo usuário, bem como também o mesmo pode fazer a inserção usando-se de comandos do *Mathematica*[®]. Na segunda parte ocorre o cálculo das matrizes elementares e globais de massa e de rigidez. No terceiro bloco calculam-se as frequências naturais e seus modos de vibração, apresentados em gráficos com animação com o intuito de facilitar a visualização e compreensão dos mesmos

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Como exemplos para o ambiente computacional proposto, realizamos simulações numéricas em laminados retangulares (Fig. 1) compostos simétricos e anti-simétricos. Em todos os casos, a análise foi feita sem o uso de planos de simetria, utilizando-se de malhas com 14, 28 e 52 elementos.

As frequências são apresentadas em forma adimensionalizada, sendo esta adimensionalização (ϖ) obtidas a partir da expressão:

$$\varpi = \omega(b/t) \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (15)$$

onde b é a menor dimensão lateral e t é a espessura da placa, ρ representa a massa específica e E_2 o módulo de elasticidade transversal de uma das camadas.

Para placas retangulares com dois bordos opostos simplesmente apoiados, utiliza-se a solução de Levy, que se baseia em uma solução em série simples de senos (Redy, 1997 e Luccioni and Dong, 1998). Os outros bordos podem possuir qualquer condição de contorno.

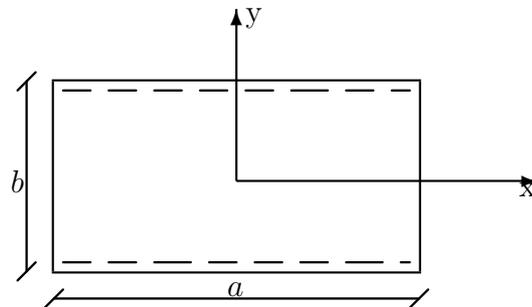


Figure 1: Placa com dois bordos opostos simplesmente apoiados

Adotando a nomenclatura adotada por Redy (1997), os bordos de coordenadas y igual a $-b/2$ e a $b/2$ são simplesmente apoiados e os bordos x igual a $-a/2$ e $a/2$ podem assumir qualquer condição. Os contornos utilizados neste trabalho são classificados como SS, SC e CC. Por exemplo, a notação SC significa que a placa em $-a/2$ é engastada (C) e em $a/2$ é simplesmente apoiada (S).

Os resultados analíticos para este tipo de solução encontram-se referenciados em Reddy (1997), tanto para laminados compostos simétricos como para anti-simétricos, tendo ambos relação entre suas dimensões laterais (a/b) igual a 1.0. Além da variação nas condições de contorno, são obtidos resultados para diversas relações entre os valores E_1 e E_2 das camadas do laminado.

5.1. Laminado Composto Simétrico

As Tabelas 1, 2 e 3 mostram a frequência fundamental adimensionalizada para laminados compostos com três camadas, de propriedades idênticas, dispostas a $0^0 / 90^0 / 0^0$, com as condições de contorno SS, SC e CC, respectivamente, variando a relação entre os módulos de elasticidade das lâminas (E_1/E_2).

Table 1: Frequência fundamental adimensionalizada para laminado composto SS com lâminas dispostas a $0^0 / 90^0 / 0^0$ com variação na relação entre E_1/E_2

E_1/E_2	14 Elementos	28 Elementos	52 Elementos	Analítico
10	9.372	9.870	10.119	10.650
20	11.860	12.963	13.228	13.948
30	13.832	15.431	15.711	16.605

Table 2: Frequência fundamental adimensionalizada para laminado composto SC com lâminas dispostas a $0^0 / 90^0 / 0^0$ com variação na relação entre E_1/E_2

E_1/E_2	14 Elementos	28 Elementos	52 Elementos	Analítico
10	13.171	14.407	14.763	15.199
20	17.395	19.491	19.935	20.610
30	20.725	23.466	23.988	24.870

Table 3: Frequência fundamental adimensionalizada para laminado composto CC com lâminas dispostas a $0^0 / 90^0 / 0^0$ com variação na relação entre E_1/E_2

E_1/E_2	14 Elementos	28 Elementos	52 Elementos	Analítico
10	17.814	19.996	21.041	21.118
20	23.607	27.426	28.952	29.166
30	28.184	33.202	35.104	35.431

As Tabelas 4, 5 e 6 mostram as primeiras frequências naturais obtidas para laminados compostos com três camadas, de propriedades idênticas, dispostas a $0^0 / 90^0 / 0^0$, com as condições de contorno SS, SC e CC, respectivamente, sendo a relação E_1/E_2 igual a 40.

Table 4: Frequências naturais adimensionalizadas para laminado composto SS com lâminas dispostas a $0^0 / 90^0 / 0^0$ e $E_1/E_2=40$

ϖ_n	14 Elementos	28 Elementos	52 Elementos	Analítico
ϖ_1	15.523	17.548	17.842	18.891
ϖ_2	22.756	25.437	25.076	26.938
ϖ_3	46.671	51.169	47.824	46.208

Table 5: Frequências naturais adimensionalizadas para laminado composto SC com lâminas dispostas a $0^0 / 90^0 / 0^0$ e $E_1/E_2=40$

ϖ_n	14 Elementos	28 Elementos	52 Elementos	Analítico
ϖ_1	23.568	26.844	27.437	28.501
ϖ_2	30.784	32.507	32.824	34.533
ϖ_3	48.997	54.292	52.359	51.192

Table 6: Frequências naturais adimensionalizadas para laminado composto CC com lâminas dispostas a $0^0 / 90^0 / 0^0$ e $E_1/E_2=40$

ϖ_n	14 Elementos	28 Elementos	52 Elementos	Analítico
ϖ_1	32.097	39.098	40.317	40.743
ϖ_2	39.428	41.815	45.073	45.233
ϖ_3	54.491	60.692	59.327	59.023

5.2. Laminado Composto Anti-Simétrico

As Tabelas 7, 8 e 9 mostram a frequência fundamental adimensionalizada para laminados compostos com quatro camadas, de propriedades idênticas, dispostas a $45^0 / -45^0 / 45^0 / -45^0$, com as condições de contorno SS, SC e CC, respectivamente, variando a relação entre os módulos de elasticidade das lâminas (E_1/E_2).

Table 7: Frequência fundamental adimensionalizada para laminado composto SS com lâminas dispostas a $45^0 / -45^0 / 45^0 / -45^0$ com variação na relação entre E_1/E_2

E_1/E_2	14 Elementos	28 Elementos	52 Elementos	Analítico
10	10.365	10.575	10.711	12.540
20	13.742	13.976	14.217	17.020
30	16.419	16.672	16.990	20.530
40	18.710	18.891	19.360	23.530

Table 8: Frequência fundamental adimensionalizada para laminado composto SC com lâminas dispostas a $45^0 / -45^0 / 45^0 / -45^0$ com variação na relação entre E_1/E_2

E_1/E_2	14 Elementos	28 Elementos	52 Elementos	Analítico
10	12.312	12.532	12.570	14.430
20	16.141	16.318	16.549	19.430
30	19.197	19.341	19.706	23.370
40	21.821	21.938	22.410	26.730

Table 9: Frequência fundamental adimensionalizada para laminado composto CC com lâminas dispostas a $45^0 / -45^0 / 45^0 / -45^0$ com variação na relação entre E_1/E_2

E_1/E_2	14 Elementos	28 Elementos	52 Elementos	Analítico
10	14.861	14.918	17.210	16.900
20	18.942	19.234	22.654	22.530
30	22.253	22.721	27.000	27.000
40	25.199	25.734	30.731	30.830

6. CONCLUSÕES

Os exemplos mostram a convergência dos resultados numéricos com os analíticos. Desta forma, podemos validar o ambiente computacional criado. Este mesmo ambiente pode ser incrementado com a inclusão da contribuição dos termos de cisalhamento transversal e da inércia rotacional. Para uma análise mais elaborada sobre o critério de convergência e estabilidade do elemento adotado é fundamental incorporar ao modelo técnicas de malhas adaptadas.

7. REFERÊNCIAS

Borges, L.M.S.A., 2001, "Teoria de Placas", Relatório Interno, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Gibson, R. F., 2000, "Modal Vibration Response Measurements for Characterization of Composite Materials and Structures", Composites Science and Technology, Vol. 60, pp. 2769-2780.

Kwon, Y.W. and Bang, H., 1997, "The Finite Element Method Using MATLAB", CRC Press, Florida, U.S.A., 519 p.

Luccioni, L. X. and Dong, S.B., 1998, "Levy-Type Finite Element Analyses of Vibration and Stability of Thin and Thick Laminated Composite Rectangular Plates", Composites Part B, Vol. 29B, pp. 459-475.

Reddy, J.N., 1997, "Mechanical of Laminated Composite Plate: Theory and Praticce", CRC Press, Florida, U.S.A., 794 p.

NUMERICAL INVESTIGATION OF FREE VIBRATION OF LAMINATE COMPOSITE

Júlio César Valente Ferreira

Solid Mechanics Laboratory

Federal University of Rio de Janeiro, COPPE/PEM

P.O.Box 68503, Zip Code: 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

jcesar@mecsol.ufrj.br

Lavinia Alves Borges

Solid Mechanics Laboratory

Federal University of Rio de Janeiro, COPPE/PEM

P.O.Box 68503, Zip Code: 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

lavinia@ufrj.br

Abstract. *This paper presents a finite element model for to determinate the natural frequencies and normal modes of composite laminate. All the procedure is based on symbolic computation. The method is based on the classical theory of plates, using triangular elements with extension and bending degrees of freedom, interpolated by Lagrange and Hermite functions, respectively. The model consists in determining the stiffness and mass matrix, without including rotary inertia effects. In order to validate the proposed method it is considered some classical problems in composite laminate. Results obtained by numerical solutions show the efficiency of the proposed model.*

Keywords: *composite materials, classical theory of plates, free vibration, finite elements.*