

**HOME**

**FORMATO  
DA JORNADA**

**INFORMAÇÕES  
GERAIS**

**COMISSÃO  
ORGANIZADORA**

**PROGRAMA**

**PALESTRANTES**

**LIVRO**

**SAIR**

# **JEM** JORNADA DE ESCOAMENTOS 2010 MULTIFÁSICOS

**3 A 7 DE MAIO DE 2010  
USP - SÃO CARLOS**

**1ª EBEMs  
Escola Brasileira  
de escoamentos  
Multifásicos**



**5 a 7 de maio  
de 2010**

*Realização:*



*Promoção:*



*Apoio:*





**HOME**

**FORMATO  
DA JORNADA**

**INFORMAÇÕES  
GERAIS**

**COMISSÃO  
ORGANIZADORA**

**PROGRAMA**

**PALESTRANTES**

**LIVRO**

**SAIR**

## Formato da Jornada

A 1ª Jornada de escoamentos Multifásicos oferecerá palestras ministradas por pesquisadores brasileiros e estrangeiros. Mais especificamente, estima-se que a 1ª Escola Brasileira de escoamentos Multifásicos contará com 12 palestras ou aulas teóricas básicas ministradas por especialistas brasileiros (capítulos do livro a ser editado), enquanto que o 2º Encontro Brasileiro sobre Ebulição, Condensação e escoamentos Multifásicos com a apresentação de 40 trabalhos técnicos (artigos). A Jornada contará ainda com 5 palestrantes estrangeiros convidados.

O viés privilegiado pela jornada foi o de contemplar tópicos básicos e aplicados com expressivo interesse e utilidade para a comunidade. Em especial, definições e conceitos básicos, equações fundamentais, formulação e ferramentas matemáticas, o modelo de dois fluidos, modelos cinemáticos, modelagem e transferência de calor em escoamentos fluido-sólidos e fluido-fluido, mudança de fase, instrumentação e análise de sinais aplicadas ao escoamento bifásico, introdução à simulação numérica computacional de escoamentos multifásicos, formulação Euleriana-Euleriana de escoamentos bifásicos, geração de malhas adaptativas para escoamento a bolhas, ondas e instabilidades, tópicos industriais e aplicações.

Nas palestras nacionais, a intenção é apresentar os tópicos de forma acessível para alunos de graduação e pós-graduação. O objetivo é despertar neles o interesse pela área. A apresentação dos tópicos mais avançados ficará a cargo dos convidados estrangeiros e artigos técnicos, representando o estado da arte. Por fim, as seções técnicas representam também oportunidade para grupos de pesquisa brasileiros apresentarem seus trabalhos desenvolvidos no Brasil.



HOME

FORMATO  
DA JORNADA

INFORMAÇÕES  
GERAIS

COMISSÃO  
ORGANIZADORA

PROGRAMA

PALESTRANTES

LIVRO

SAIR

## INFORMAÇÕES GERAIS

A proposta da **1ª Jornada de Escoamentos Multifásicos** busca dar continuidade ao **1º EBECEM – Encontro Brasileiro sobre Ebulição, Condensação e Escoamento Multifásico**, evento que gozou de grande sucesso em 2008. Consecutivamente, a Jornada contará também com a realização da **1ª Escola Brasileira de Escoamentos Multifásicos – 1ª EBEMs**. A idéia de organizar estes dois eventos consecutivamente e em um único lugar tem o intuito de possibilitar que o público interessado participe somente de um ou de ambos os eventos. Embora com objetivos parcialmente distintos, os dois eventos podem ser considerados complementares. Espera-se que a **1ª Jornada de Escoamentos Multifásicos** contribua para a integração das pessoas envolvidas em temas das áreas de ebulição, condensação e escoamentos multifásicos, contando com a participação de professores, pesquisadores de universidades e de empresas, bem como alunos de doutorado, mestrado e iniciação científica. Este será o primeiro evento brasileiro inteiramente dedicado a essa área de conhecimento relativamente carente e cuja importância é estratégica e fundamental para o avanço científico e tecnológico do país. Além disso, como fruto da jornada, será publicado o primeiro livro em língua portuguesa sobre fundamentos de escoamentos multifásicos gás-sólido, gás-líquido e líquido-líquido, incluindo capítulos sobre transferência de calor com mudança de fase, métodos numéricos e técnicas experimentais.

A **1ª Jornada de Escoamentos Multifásicos** será realizada em São Carlos (SP), a organização é da USP São Carlos e Petróleo Brasileiro S.A. (PETROBRAS). Buscando repetir o sucesso alcançado pelo 1º EBECEM, buscar-se-á reunir pesquisadores e engenheiros brasileiros e estrangeiros de diferentes instituições e empresas atuando em diferentes domínios relacionados ao tema dos escoamentos multifásicos com ou sem transferência de calor.



**HOME**

**FORMATO  
DA JORNADA**

**INFORMAÇÕES  
GERAIS**

**COMISSÃO  
ORGANIZADORA**

**PROGRAMA**

**PALESTRANTES**

**LIVRO**

**SAIR**

## COMISSÃO ORGANIZADORA

Arlindo de Matos UN/BC - PETROBRAS

Fabício Simeoni de Sousa ICMC / USP

Fernando Eduardo Milioli EESC / USP

Gaianê Sabundjian - IPEN-CNEN/SP

Gherhardt Ribatski EESC / USP

Oscar M. Hernandez Rodriguez EESC / USP

Paulo Selegim Jr EESC / USP

## COMISSÃO EDITORIAL

Angela Nickele PUC / Rio

Antonio C. Bannwart FEM / UNICAMP

Rafael Mendes CENPES / PETROBRAS

Jader Riso Barbosa Jnior UFSC

Rigoberto E. M. Morales UTFPR

# JEM JORNADA DE ESCOAMENTOS 2010 MULTIFÁSICOS

3 A 7 DE MAIO DE 2010  
USP - SÃO CARLOS



HOME

FORMATO  
DA JORNADA

INFORMAÇÕES  
GERAIS

COMISSÃO  
ORGANIZADORA

PROGRAMA

PALESTRANTES

LIVRO

SAIR

quarta-feira	
8:30-10:00	Fundamentos do Escoamento Multifásico, A.C. Bannwart, UNICAMP
10:00-10:30	coffee-break
10:30-12:00	Processos de Média em Escoamentos Multifásicos e o Modelo de Dois Fluidos, Eugênio Spano Rosa, UNICAMP
12:00-13:30	ALMOCO
13:30-15:00	Modelos mecanicistas em escoamento bifásico líquido-gás em tubulações, Rigoberto E. M. Morales, UTFPR
15:00-16:30	Aspectos fenomenológicos e modelagem de escoamentos bifásicos gás-líquido, Jader R. Barbosa Jr., UFSC
16:30-16:50	coffee-break
16:50-18:20	<b>Keynote: Oil-water liquid flow rates determined from measured pressure drop and water hold-up in horizontal pipes, René Oliemans, Delft University, Holanda</b>
18:30-19:15	Visita ao Laboratório de Engenharia Térmica e Fluidos da EESC/USP
20:00-22:00	Coquetel de Inauguração da 1a EBEMs
quinta-feira	
8:30-10:00	Intensificação da Transferência de Calor com Mudança de Fase em Processos de Conversão de Energia: Desafios e Realidades, Júlio C. Passos, UFSC
10:00-10:30	coffee-break
10:30-12:00	Métodos Computacionais para Escoamento Multifásico, Angela O. Nieckele, PUC/Rio
12:00-13:30	ALMOCO
13:30-15:00	Modelagem de dois fluidos do escoamento gás-sólido em reatores de leito fluidizado circulante, Fernando E. Milioli e Christian C. Milioli, EESC/USP
15:00-16:30	Algumas considerações sobre a aplicação industrial de escoamentos gás-sólido, Josmar D. Pagliuso, EESC/USP
16:30-16:50	coffee-break
16:50-18:20	<b>Keynote: A DNS study of laminar bubbly flows in a vertical channel, Greta Triggvasson, Worcester Polytechnic Institute, EUA</b>

**JEM** JORNADA DE  
**ESCOAMENTOS**  
**2010 MULTIFÁSICOS** 3 A 7 DE MAIO DE 2010  
USP - SÃO CARLOS



HOME

FORMATO  
DA JORNADA

INFORMAÇÕES  
GERAIS

COMISSÃO  
ORGANIZADORA

PROGRAMA

PALESTRANTES

LIVRO

SAIR

	sexta-feira
8:30-10:00	Instrumentação e análise de sinais: uma visão sobre os padrões de escoamento multifásico, Paulo Seleglim Jr, EESC/USP
10:00-10:30	coffee-break
10:30-12:00	Métodos numéricos para escoamentos imiscíveis, Fabricio S. de Souza, ICMC/USP e Norberto Mangiavacchi, UERJ
12:00-13:30	ALMOCO
13:30-15:00	Ondas e estabilidade hidrodinâmica em escoamento bifásico paralelo, Oscar M. H. Rodriguez, EESC/USP
15:00-16:30	Alguns aspectos de produção de petróleo, Arlindo de Matos, PETROBRAS
16:30-16:50	coffee-break
16:50-18:20	<b>Keynote: Dispersed Multiphase Flows: An Overview, Luis M. Portela, Delft University, Holanda</b>



**HOME**

**FORMATO  
DA JORNADA**

**INFORMAÇÕES  
GERAIS**

**COMISSÃO  
ORGANIZADORA**

**PROGRAMA**

**PALESTRANTES**

**LIVRO**

**SAIR**

### PALESTRANTES NACIONAIS

Angela Ourívio Nieckele - PUC / Rio  
Antônio Carlos Bannwart - UNICAMP  
Arlindo de Matos - PETROBRAS  
Christian C. Milioli - EESC / USP  
Eugênio Spanó Rosa - UNICAMP  
Fabrício Simeoni de Souza - ICMC / USP  
Fernando Eduardo Milioli - EESC / USP  
Jader Riso Barbosa Jr. - UFSC  
Josmar D. Pagliuso – EESC / USP  
Júlio César Passos - UFSC  
Oscar Mauricio H. Rodriguez - EESC / USP  
Paulo Selegim Jr. - EESC / USP  
Rigoberto Eleazar M. Morales - UTFPR  
Norberto Mangiavacchi - UERJ

### PALESTRANTES INTERNACIONAIS

Akio Tomiyama  
Kobe University / Japão  
John R. Thome  
Polytechnique Fédérale de Lausanne / Suíça  
René V.A. Oliemans  
Delft University of Technology / Holanda  
Gretar Tryggvason  
Worcester Polytechnic Institute / EUA  
Luis M. Portela  
Delft University of Technology / Holanda



**HOME**

**FORMATO  
DA JORNADA**

**INFORMAÇÕES  
GERAIS**

**COMISSÃO  
ORGANIZADORA**

**PROGRAMA**

**PALESTRANTES**

**LIVRO**

**SAIR**

**CAPA**

**ÍNDICE GERAL**



Escola Brasileira de Escoamentos Multifásicos

# **ESCOAMENTO MULTIFÁSICO**

Volume 1

Editor

Oscar Mauricio Hernandez Rodriguez

ABCM

Rio de Janeiro

# Índice Geral

<b>Autores .....</b>	<b>ix</b>
<b>Prefácio.....</b>	<b>x</b>
<b>CAPÍTULO 1 - Foundations of Multiphase Flow.....</b>	<b>1-1</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>1-3</b>
<b>2. Flow Patterns .....</b>	<b>1-6</b>
<b>3. Mathematical Tools .....</b>	<b>1-9</b>
3.1. Displacement Speed of a Surface.....	1-9
3.2. Leibniz Rule.....	1-12
3.3. Gauss-Green Theorems.....	1-12
3.4. Transport Rates .....	1-13
3.4.1. Rate of Flow .....	1-13
3.4.2. Transport Theorems .....	1-14
<b>4. Single-Phase Flow .....</b>	<b>1-15</b>
4.1. Integral Instant Balance Equations .....	1-15
4.1.1. Global Mass Balance.....	1-15
4.1.2. Linear Momentum Balance .....	1-16
4.1.3. Angular Momentum Balance .....	1-17
4.1.4. Total Energy Balance .....	1-17
4.1.5. Entropy Balance .....	1-18
4.2. Local Instant Equations and Constitutive Relations .....	1-19
4.2.1. Mass .....	1-19
4.2.2. Linear Momentum.....	1-19
4.2.3. Angular Momentum .....	1-19
4.2.4. Total Energy .....	1-20
4.2.5. Entropy .....	1-20
4.2.6. Constitutive Relations: Fluid Behavior .....	1-20
<b>5. Two-Phase and Multiphase Flow .....</b>	<b>1-23</b>
5.1. Integral Instant Balance Equations .....	1-23
5.1.1. Mass Balance.....	1-23
5.1.2. Linear Momentum Balance .....	1-24
5.1.3. Angular Momentum Balance .....	1-24
5.1.4. Total Energy Balance .....	1-24

5.1.5. Entropy Balance .....	1-25
5.2. Local Instant Equations and Jump Conditions .....	1-25
5.2.1. Mass .....	1-26
5.2.2. Linear Momentum.....	1-26
5.2.3. Angular Momentum .....	1-26
5.2.4. Total Energy.....	1-27
5.2.5. Entropy.....	1-27
5.2.6. Constitutive Relations: Interface Behavior .....	1-27
5.2.7. Entropy Sources: .....	1-28
<b>6. Concluding Remarks.....</b>	<b>1-30</b>
<b>7. References .....</b>	<b>1-30</b>
<b>CAPÍTULO 2 - One-Dimensional Channel Flow Equations .....</b>	<b>2-1</b>
<b>2. An Illustrative Example: Open Channel Free Surface Flow .....</b>	<b>2-5</b>
<b>3. One-Dimensional Single Phase Channel Flow Equations .....</b>	<b>2-7</b>
3.1. Average Properties and Differential Control Volume .....	2-7
3.2. Mass Balance.....	2-8
3.3. Linear Momentum Balance .....	2-9
3.4. Angular Momentum Balance.....	2-11
3.5. Total Energy .....	2-12
3.6. Entropy Balance and Source Term .....	2-13
3.7. Constitutive Relations in One-Dimensional Single-Phase Flow.....	2-14
3.7.1. Equations of State.....	2-15
3.7.2. Shear Stress .....	2-15
3.7.3. Heat Flux.....	2-16
3.7.4. Mass Flux.....	2-16
<b>4. One-Dimensional Multiphase Channel Flow Equations .....</b>	<b>2-17</b>
4.1. Basic Variables of One Dimensional Multiphase Flow in Channels.....	2-17
4.1.2. Volumetric Fluxes or Superficial Velocities .....	2-18
4.1.3. Qualities .....	2-19
4.2. Phase Equations .....	2-19
4.2.1. Phase Mass Balance .....	2-19
4.2.2. Phase Linear Momentum Balance.....	2-19
4.2.3. Phase Angular Momentum Balance .....	2-20
4.2.4. Phase Total Energy Balance.....	2-20
4.2.5. Phase Entropy Balance.....	2-20
4.3. Mixture Equations .....	2-21
4.3.1. Mixture Mass Balance.....	2-21

4.3.2. Mixture Linear Momentum Balance .....	2-22
4.3.3. Mixture Angular Momentum Balance.....	2-23
4.3.4. Mixture Total Energy Balance .....	2-23
4.3.5. Mixture Entropy Balance .....	2-24
<b>5. Introduction to Multiphase Flow Modeling .....</b>	<b>2-24</b>
<b>6. Concluding Remarks.....</b>	<b>2-26</b>
<b>7. References .....</b>	<b>2-27</b>
<b>CAPÍTULO 3 - Modelos Mecanicistas em escoamento Bifásico Líquido-Gás em Tubulações .....</b>	<b>3-1</b>
<b>1. Introdução.....</b>	<b>3-3</b>
<b>2. O Modelo Homogêneo.....</b>	<b>3-8</b>
<b>3. O Modelo de Fases Separadas .....</b>	<b>3-14</b>
<b>4. O Modelo de Lockhart e Martinelli .....</b>	<b>3-17</b>
<b>5. Referências.....</b>	<b>3-26</b>
<b>CAPÍTULO 4 - Aspectos fenomenológicos e modelagem de escoamentos bifásicos gás-líquido .....</b>	<b>4-1</b>
<b>1. Introdução.....</b>	<b>4-4</b>
<b>2. Classificação dos padrões de escoamento .....</b>	<b>4-5</b>
2.1. Definições .....	4-5
2.2. Transições entre padrões de fluxo.....	4-9
2.2.1. Transição entre os regimes em bolhas e <i>slug</i> . .....	4-9
2.2.2. Transição entre os regimes <i>slug</i> e <i>churn</i> . .....	4-10
2.2.3. Transição entre os regimes <i>churn</i> e anular. ....	4-15
2.2.4. Transição entre os regimes anular e <i>wispy-annular</i> . .....	4-17
<b>3. Escoamento no padrão anular.....</b>	<b>4-17</b>
3.1. O filme líquido no escoamento anular .....	4-18
3.2. Gotículas no escoamento anular .....	4-19
3.3. Modelagem do escoamento no padrão anular.....	4-28
3.4. Transferência de calor.....	4-35

<b>4. Escoamento no padrão agitado (<i>churn flow</i>).....</b>	<b>4-46</b>
4.1. Características do padrão de escoamento.....	4-46
4.2. Modelagem do escoamento no padrão churn.....	4-59
<b>5. Escoamento no padrão <i>slug</i> (aspectos da modelagem).....</b>	<b>4-61</b>
5.1. Transferência de calor.....	4-67
<b>6. Referências bibliográficas.....</b>	<b>4-69</b>

## **CAPÍTULO 5 - Instrumentação e Análise de Sinais: Uma Visão sobre os Padrões de Escoamento Multifásico .....5-1**

<b>1. Introdução.....</b>	<b>5-2</b>
<b>2. Análise tempo-freqüência .....</b>	<b>5-5</b>
2.1. Transformada de Gabor .....	5-6
2.2. Transformada wavelet.....	5-7
<b>3. Redes neurais (mapas) auto-organizativas.....</b>	<b>5-17</b>
<b>4. Conclusões – uma análise unificada.....</b>	<b>5-22</b>
<b>5. Bibliografia .....</b>	<b>5-23</b>

## **CAPÍTULO 6 - Métodos Computacionais para Escoamento Multifásico.....6-1**

<b>1. Introdução.....</b>	<b>6-3</b>
<b>2. Equações de Conservação e Condições de Contorno .....</b>	<b>6-4</b>
2.1. Condições de Contorno.....	6-6
<b>3. Métodos Baseados na Solução Direta das Equações de Navier-Stokes.....</b>	<b>6-7</b>
3.1. Modelo de “Um Fluido” .....	6-8
3.2. Tratamento das Propriedades .....	6-10
3.3. Topologia das Interfaces .....	6-11
3.4. Métodos de Captura de Interface .....	6-12
3.5. Método VOF (Volume of Fluid).....	6-16
3.5.1. Reconstrução .....	6-18
3.5.2. Propagação .....	6-20
3.5.3. Discretização da Tensão Superficial .....	6-21
3.6. Método “Level-Set” .....	6-22
3.6.1. Acoplamento do Método “Level-Set” com o	

Modelo de “Um Fluido” .....	6-26
3.7. Resolução das Equações de Navier-Stokes .....	6-27
3.8. Aplicações .....	6-27
3.8.1. Movimento Inicial de uma Grande Bolha Esférica .....	6-28
3.8.2. Junção de bolhas .....	6-29
3.8.3. Formação de Golfada .....	6-31
<b>4. Métodos Baseados nas Equações Médias de Navier-Stokes.....</b>	<b>6-33</b>
4.1. Equações Médias de Navier-Stokes .....	6-33
4.2. Modelo de Deslizamento .....	6-37
4.2.1. Modelo de Deslizamento Unidimensional .....	6-38
4.3. Homogêneo .....	6-40
4.3.1. Modelo Homogêneo Unidimensional.....	6-41
4.4. Modelo de Dois Fluidos Unidimensional .....	6-42
4.5. Método das Características .....	6-44
4.6. Solução Numérica do Modelo de Deslizamento .....	6-46
4.6.1. Variáveis $u_m$ , $p_m$ , $\alpha_g$ .....	6-46
4.6.2. Variáveis $\alpha_g \rho_g$ , $\alpha_t \rho_t$ , $\rho_m u_m$ .....	6-52
4.7. Solução Numérica do Modelo de Dois Fluidos .....	6-55
4.8. Solução do Sistema Algébrico .....	6-59
4.9. Aplicações.....	6-59
4.9.1. Transição de Escoamento Bifásico para Monofásico Líquido .....	6-59
4.9.2. Golfada severa.....	6-61
4.9.3. Formação de Golfada em Duto Horizontal e Quase-horizontal.....	6-63
4.9.4. Obtenção de Estatísticas do Padrão de Golfada .....	6-67
<b>5. Referências .....</b>	<b>6-70</b>

## **CAPÍTULO 7 - Modelagem de Dois Fluidos do Escoamento Gás-Sólido em Reatores de Leito Fluidizado Circulante.....7-1**

<b>1. Introdução.....</b>	<b>7-3</b>
1.1. Contexto.....	7-3
1.2. Linhas de modelagem matemática .....	7-5
1.3. Descrição hidrodinâmica de reatores de leito fluidizado .....	7-8
1.4. Breve descrição de estado da arte em modelagem de dois fluidos de escoamentos gás-sólido em leitos fluidizados circulantes .....	7-14
<b>2. Formulação básica do modelo de dois fluidos para escoamentos gás-sólido.....</b>	<b>7-21</b>
<b>3. Simulações de grandes escalas (SGE) e sub-malha (SSM).....</b>	<b>7-32</b>

3.1. Formulação para simulação de grandes escalas (SGE).....	7-33
3.1.1. Relações de fechamento convencionais .....	7-34
3.1.2. Condições de contorno .....	7-38
3.2. Formulação para simulação sub-malha (SSM) .....	7-39
3.2.1. Relações de fechamento .....	7-41
3.2.2. Condições de contorno .....	7-45
3.3. Fechamento para fase sólida em SGE obtido via SSM.....	7-45
<b>4. Referências.....</b>	<b>7-49</b>
<b>CAPÍTULO 8 - Ondas e Estabilidade Hidrodinâmica em Escoamento Bifásico Líquido-Líquido Paralelo .....</b>	<b>8-1</b>
<b>1. Introdução.....</b>	<b>8-3</b>
<b>2. Escoamento bifásico líquido-líquido .....</b>	<b>8-5</b>
2.1. Considerações iniciais.....	8-5
2.2. Escoamento bifásico líquido-líquido em tubulação .....	8-9
2.2.1. Escoamento bifásico líquido-líquido em tubulação vertical ascendente .....	8-9
2.2.2. Escoamento bifásico líquido-líquido em tubulação horizontal.....	8-10
<b>3. Aspectos fundamentais da modelagem de escoamento bifásico: modelo de dois fluidos unidimensional .....</b>	<b>8-15</b>
3.1. Equações locais instantâneas do escoamento bifásico e condições de salto .....	8-15
3.1.1 Relações Matemáticas Importantes .....	8-15
3.1.2 Balanços Globais Instantâneos para Escoamento Bifásico .....	8-17
3.1.3 Equações Locais Instantâneas para Escoamento Bifásico.....	8-19
3.2. Equações de escoamento bifásico médias na seção transversal; modelagem unidimensional .....	8-21
3.2.1. Conservação da massa - equação instantânea média numa seção ..	8-22
3.2.2. Quantidade de movimento - equação instantânea média numa seção.....	8-23
3.3. Exemplo: dedução da equação da quantidade de movimento unidimensional média na seção para escoamento estratificado líquido-líquido em regime permanente.....	8-24
<b>4. Ondas unidimensionais e ocorrência em escoamento bifásico paralelo...8-29</b>	
4.1. Considerações iniciais.....	8-29
4.2. Fração volumétrica e teoria da onda cinemática .....	8-30
<b>5. Conceitos fundamentais da estabilidade hidrodinâmica em escoamento bifásico paralelo.....</b>	<b>8-36</b>

5.1. Considerações iniciais.....	8-36
5.2. Conceitos básicos da estabilidade hidrodinâmica em escoamento bifásico paralelo .....	8-38
5.3. Classificação das instabilidades em escoamento bifásico paralelo .....	8-40
5.3.1. Formulação do problema de estabilidade .....	8-40
5.3.2. Balanço de energia .....	8-41
5.3.3. Classificação das instabilidades em escoamento bifásico .....	8-43
<b>6. Aplicações.....</b>	<b>8-45</b>
6.1. Análise da estabilidade do escoamento líquido-líquido anular .....	8-45
6.1.1. Formulação do problema de estabilidade para escoamento anular .....	8-45
6.1.2. Critério Invíscido de Kelvin-Helmholtz (Eq. 6.21) .....	8-51
6.1.3. Critério Geral (Eq. 6.22).....	8-53
6.2. Análise da estabilidade do escoamento líquido-líquido estratificado ....	8-55
6.2.1. Formulação do problema de estabilidade para escoamento estratificado .....	8-56
6.2.2. Aplicação do critério geral de estabilidade.....	8-62
<b>7. Conclusões.....</b>	<b>8-64</b>
<b>8. Agradecimentos .....</b>	<b>8-64</b>
<b>9. Referências.....</b>	<b>8-64</b>
<b>CAPÍTULO 9 - Alguns Aspectos de Produção de Petróleo .....</b>	<b>9-1</b>
<b>1. Introdução.....</b>	<b>9-2</b>
<b>2. Etapas do Escoamento do Petróleo .....</b>	<b>9-3</b>
<b>3. Mecanismos de Produção.....</b>	<b>9-5</b>
3.1. Gás em Solução .....	9-5
3.2. Capa de Gás .....	9-6
3.3. Influxo de Água .....	9-7
<b>4. Modelos de Fluido Utilizados.....</b>	<b>9-8</b>
4.1. Black-oil .....	9-8
4.2. Modelo composicional.....	9-9
<b>5. Modelagem para Perda de carga em Escoamento Multifásico.....</b>	<b>9-9</b>
5.1. Correlações do Tipo I .....	9-10
5.2. Correlações do Tipo II .....	9-10



5.3. Correlações do Tipo III.....	9-10
5.4. Limitações das correlações Black-oil .....	9-11
<b>6 . Escoamento Multifásico nos Métodos de Elevação de Petróleo.....</b>	<b>9-11</b>
6.1. Elevação Natural.....	9-11
6.1.1. Fatores que Influenciam na Produção por Surgência .....	9-12
6.2. Necessidade da Elevação Artificial .....	9-12
6.3. Gás Lift .....	9-14
6.3.1. CONCEITO.....	9-14
6.3.2. Tipos de “Gas-Lift” .....	9-15
6.4. Gás Lift Intermitente.....	9-17
6.4.1. Ciclo de Intermitência .....	9-17
6.4.2. Escorregamento de Líquido e penetração do gás na golfada.....	9-18
6.5. BCS - Bombeio Centrífugo Submerso.....	9-19
6.5.1. Bomba Centrífuga .....	9-19
6.5.2. Histórico de BCS.....	9-19
6.5.3. Características do método .....	9-20
<b>7. Transferência de Calor em Linhas .....</b>	<b>9-21</b>
7.1. Transferência de Calor em Tubulação de Seção Circular.....	9-21
7.1.1. Transferência de Calor Unidimensional por condução, em Regime Permanente.....	9-21
7.1.2. Condução e Convecção em Tubos Cilíndricos Concêntricos (fluxo de calor radial e permanente).....	9-22
7.1.3. Procedimento De Acoplamento para Cálculo Simultâneo dos Gradientes de Pressão e Temperatura em Regime Permanente.....	9-24
7.1.4. Gradiente de Temperatura em poços de Produção .....	9-25
7.1.5. Equação de Balanço de Energia – SIMPLIFICADA .....	9-25
7.1.6. Efeito Joule-Thompson .....	9-26
7.2. Cálculo de Perfis de Pressão e Temperatura.....	9-27
7.2.1. Gradiente de Pressão .....	9-27
<b>8. Anexo.....</b>	<b>9-28</b>
8.1. Calor Específico.....	9-28
8.2. Condutividade Térmica.....	9-29
<b>9. Referência Bibliográfica .....</b>	<b>9-29</b>

## **Autores**

Angela O. Nieckele, Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/Rio, R. Marques de São Vicente 225 – Gávea, 22453-900 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Antonio C. Bannwart, Departamento de Engenharia de Petróleo – DEP, Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Arlindo de Matos, PETROBRAS

Carlos Magno Bezerra de Medeiros Nascimento, PETROBRAS

Christian C. Milioli, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos – EESC, Universidade de São Paulo – USP, Av. Trabalhador Sancarlene, 400, 13566-590, São Carlos, SP

Cristiane Cozin, Laboratório de Ciências Térmicas – LACIT, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Fernando A. França, Departamento de Engenharia de Petróleo – DEP, Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

Fernando E. Milioli, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos – EESC, Universidade de São Paulo – USP, Av. Trabalhador Sancarlene, 400, 13566-590, São Carlos, SP

Jader R. Barbosa Jr., Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 88040-900

Oscar M. H. Rodriguez, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos – EESC, Universidade de São Paulo – USP, Av. Trabalhador Sancarlene, 400, 13566-590, São Carlos, SP

Paulo Selegim Júnior, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos – EESC, Universidade de São Paulo – USP, Av. Trabalhador Sancarlene, 400, 13566-590, São Carlos, SP

Rigoberto E. M. Morales, Laboratório de Ciências Térmicas – LACIT, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM, Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

## Prefácio

O escoamento de dois ou mais fluidos imiscíveis talvez seja o tipo de escoamento mais comumente observado na natureza. De fato, escoamentos bifásicos são observados em numerosos processos naturais e industriais. Neblina, água fervente, fumaça, ovos mexidos, chuva, molho para salada, nuvens, creme batido, areia movediça, sangue e tempestades de areia são alguns exemplos de escoamentos bi ou multifásicos. Na indústria, os escoamentos bifásicos são encontrados na forma de misturas:

(i) gás ou líquido-sólidos (alguns exemplos: leitos fluidizados borbulhantes ou circulantes, biorreatores e transporte pneumático), com aplicações comuns na indústria farmacêutica, metalúrgica e petroquímica (reações de síntese, craqueamento catalítico, reações de oxidação e redução de minérios, processos de combustão e gaseificação, transporte de material particulado e recuperação de calor);

(ii) gás-líquido (colunas de bolhas, torres de resfriamento, escoamentos condensado-vapor, óleo-gás e água-gás em tubulações), com aplicações comuns na indústria petroquímica, nuclear, de refrigeração e de petróleo (microbiologia, caldeiras, refrigeração e ventilação industrial, reatores nucleares, produção e transporte de petróleo e gás natural); e

(iii) líquido-líquido (escoamento de óleo leve ou pesado e água em tubulações, escoamento de emulsões), com aplicações comuns na indústria de alimentos e de petróleo (transporte de emulsões na indústria de alimentos, produção e transporte de petróleo). Apenas para citar alguns exemplos.

Este volume é a primeira tentativa de unificar as diferentes abordagens aos escoamentos multifásicos observadas na academia e indústria brasileiras e desenvolvidas em várias disciplinas tradicionais da engenharia mecânica, química, nuclear e de petróleo. Nos capítulos, gentilmente oferecidos por professores, pesquisadores e engenheiros de cinco universidades e ainda um representante da indústria, analisa-se a problemática dos escoamentos multifásicos sob diferentes óticas e cobrem-se desde conceitos básicos e ferramental matemático até instrumentação multifásica, simulação computacional e aspectos industriais. Os textos foram preferencialmente escritos em português, o que não apenas representa o preenchimento de uma lacuna editorial, mas também o amadurecimento da área de escoamento multifásico no âmbito nacional.

Este texto será útil a engenheiros para projeto e operação de equipamentos e processos, como reatores químicos, trocadores de calor, leitos fluidizados, plantas de potência e reatores nucleares, poços de petróleo, oleodutos e gasodutos,

tubulações em refinarias e plantas de processamento e sistemas de refrigeração. Também será útil para graduandos e pós-graduandos em engenharia, que possam ou não ter em mente uma especialização em escoamentos multifásicos, pois o conhecimento fundamental na área é essencial, e para professores universitários que poderão adotar o material em um ou mais cursos relacionados ao tema.

Por se tratar de uma primeira experiência e por conter a visão de vários autores, algumas repetições de tópicos e diferenças em graus de rigor e detalhamento são esperadas. É altamente desejado que sugestões, críticas e comentários sejam enviados pelos leitores, o que, sem a menor sombra de dúvida, contribuirá para o aprimoramento de futuras edições.

Gostaria de agradecer especialmente aos autores pelo esforço despendido, pelo trabalho duro na preparação de suas relevantes contribuições, e a todos os indivíduos e organizações que ajudaram. Em particular à Petróleo Brasileiro S.A. – PETROBRAS pelo apoio financeiro e a Marcelo Souza de Castro, Luis Enrique Ortiz Vidal, Fernando Augusto Alves Mendes, Hugo Fernando Velasco Peña e Iara Hernandez Rodriguez pelo auxílio na edição dos capítulos.

# CAPÍTULO 1 - Foundations of Multiphase Flow

Antonio C. Bannwart

Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

## Nomenclature

### Latin Letters

$\vec{a}$	local acceleration of a fluid particle ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$\mathcal{A}$	generic surface
$\vec{B}$	generic vector
$C$	generic curve on the interface
$e$	total specific energy per unit mass ( $\text{J.kg}^{-1}$ )
$f_A$	generic mathematical function defining surface $\mathcal{A}$
$\vec{F}$	generic force vector (N)
$\vec{g}, g$	gravity acceleration vector, intensity of this vector ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$\hat{g}$	specific Gibbs free energy per unit mass ( $\text{J.kg}^{-1}$ )
$h$	specific enthalpy per unit mass ( $\text{J.kg}^{-1}$ )
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}$	unit vectors (–)
$\mathbf{I}$	unit tensor (–)
$\vec{j}_j$	diffusion mass flux vector of a chemical species ( $\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$ )
$k$	permeability ( $\text{m}^2$ )
$k_T$	thermal conductivity ( $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$\dot{m}$	mass flux ( $\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$ )
$M$	mass flow rate ( $\text{kg.s}^{-1}$ )
$\vec{M}$	moment vector (N.m)
$\vec{n}$	unit vector normal to a surface (–)
$\vec{N}$	surface unity vector normal to a curve (–)
$p$	pressure (Pa)
$\vec{q}$	heat flux vector ( $\text{W.m}^{-2}$ )
$\dot{q}$	intensity of heat flux over a boundary ( $\text{W.m}^{-2}$ )
$Q$	volume flow rate ( $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$ )
$\vec{r}$	position vector (m)
$R_g$	gas constant ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$s$	specific entropy per unit mass ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )

$s_i''$	specific entropy per unit area ( $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ )
$t$	time instant (s)
$T$	temperature (K)
$\mathbf{T}$	stress tensor
$u$	specific internal energy per unit mass ( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ )
$u_i''$	specific internal energy per unit area ( $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ )
$\vec{v}$	local velocity vector of the fluid measured in the $xyz$ coordinate system ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )
$\dot{W}$	power, rate of work (W)
$\mathcal{V}$	generic volume
$x, y, z$	rectangular coordinates of the $xyz$ frame attached to $\mathcal{V}(t)$ (m)
$X, Y, Z$	rectangular coordinates of the $XYZ$ inertial system (m)
$Z$	vertical upward coordinate in the $XYZ$ inertial frame (m)

### Greek Letters

$\Delta$	entropy source per unit volume ( $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ )
$\Delta''$	entropy source per unit area ( $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ )
$\varphi$	generic property per unit mass
$\psi$	generic property per unit area
$\kappa$	von Karman's constant in turbulent shear stress (–)
$\vartheta$	generic scalar
$\mu$	absolute viscosity (Pa.s)
$\rho$	specific mass ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )
$\sigma$	interface tension ( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ or $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ )
$\tau$	viscous stress tensor (Pa)
$\tau$	shear stress (Pa)
$\vec{\omega}, \omega$	vector angular velocity, intensity of angular velocity ( $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ )
$\xi, \zeta$	surface coordinates

### Subscripts

A	relative to surface $\mathcal{A}$
C	curve on the interface
ext	external
i	interface
$k$	property of the $k^{\text{th}}$ - phase
ni	non-inertial
other	other types (of work, force, etc.)
tr	translational
$x, y, z$	$x, y, z$ -components of a vector
$\xi, \zeta$	surface components of a vector

*Superscripts*

t	component of a vector tangent to a surface
T	transpose of a matrix
~	short term time average (i.e., to smooth out small fluctuations)

**1. Introduction**

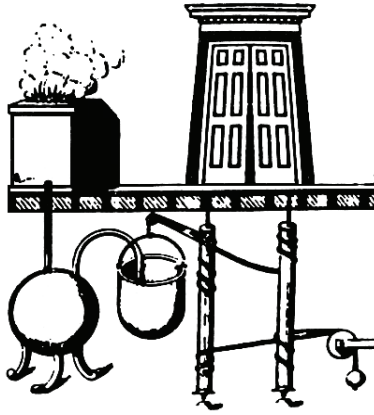
Several situations of everyday life involve the flow a heterogeneous medium characterized by two or more coexisting phases. A domestic example is the electrical coffee-maker, where an electrical resistance creates a two-phase water-steam flow. Such a flow is termed *multiphase* and is present in many natural phenomena and human-made devices.

A *phase* is understood as a state of matter aggregation, typically solid, liquid or gas. At least one the phases present in a multiphase flow must have the behavior of fluid. A *fluid* is defined as a material unable to withstand shear. The simultaneous flow of two gaseous phases does not form a multiphase medium and solid phases alone do not flow. However, if a significant amount of fluid (liquid or gas) is added to surround the solid, they may flow together in a channel, such as in the river transportation of wood (a liquid-solid flow). Similarly, one may have gas-liquid, gas-solid and liquid-liquid two-phase flows, as well as more complex three-phase and four-phase flows.

Naturally occurring multiphase phenomena include:

- Sedimentation, soil erosion, wind/water transportation
- Dune formation, landslides, avalanches
- Cloud formation and motion, rain/snow precipitation
- Ice formation and melting
- Iceberg motion
- Ocean waves in storms, tsunamis
- Water evaporation
- Hurricanes, tornadoes
- Volcanic eruptions
- Biological systems: blood coagulation, arteriosclerosis, transpiration.

Human-made devices using multiphase flow are known since the Antiquity. Hero of Alexandria (10-70 AD), a Greek mathematician and engineer who lived in ancient Egypt, describes fire-powered devices such an automatic opening of temple doors (Fig. 1.1): the priests lightened a furnace and steam forced water to fill a cylinder that went down under its weight and, by means of ropes, made the doors open. Although this device was already known by the time of Hero, he is given credit for the invention of the first steam engine named *aeolipile* (Fig. 1.2).



**Fig. 1.1** Steam-powered device for opening/closing temple doors

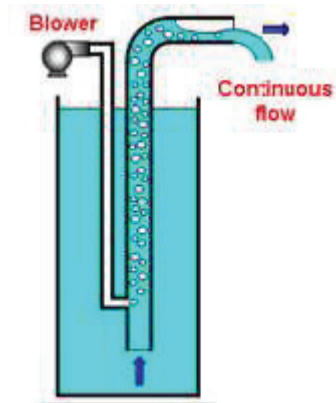
Apparently, no practical uses for steam power were found until the XVII century [1] when a series of attempts culminated in the invention of the steam engine by Newcomen and Watt in the next century.



**Fig. 1.2** Aeolipile by Hero of Alexandria

The invention of the first air-lift pump (Fig. 1.3), a precursor of the modern gas-lift systems, is commonly attributed to Loescher, a German engineer, in 1797 [2].





**Fig. 1.3** –Air-lift pump principle

Nowadays, devices using multiphase flow are present in most industrial activities. The following are important examples:

- *Power industry*: boilers, condensers, combustors, nuclear reactors, geothermal plant gathering pipelines, all of them requiring prediction methods for pressure drop, volumetric concentration, heat and mass transfer rates, for their appropriate design.
- *Petroleum industry*: well drilling operations (gas influx, gravel transportation), as well as production, transportation and separation of oil and gas. The design of wells and flowlines that carry the oil-gas mixture to surface facilities demands pressure drop and liquid holdup prediction.
- *Process, food and agricultural industry*: chemical reactors, distillation units, extraction and absorption units, emulsifiers, dryers, cyclonic separators, atomizers, washers, compressed-air or liquid transportation systems, etc. where the prediction of heat-mass transfer rates, pressure drop and concentrations are the main needs.
- *Automotive industry*: air-fuel feeding and combustion systems, as well as fuel cells, require understanding flow distribution, heat transfer and reaction rates for good efficiency and low emission level.
- *Heat and refrigeration industry*: refrigerators, air-conditioners, heat pumps and their components (evaporators, condensers, valves, compressors), cooling systems for electronic circuits, where again prediction of pressure drop, volumetric concentration and heat/mass transfer rates are necessary.

- *Metallurgical industry*: furnaces, kilns and flow devices dealing with melting materials require knowledge of two-phase flow with phase change for their design.
- *Aerospace industry*: besides power generation, compact energy storage systems and heat pipes require understanding multiphase flow with phase change under zero gravity.

As can be seen in the above applications, multiphase flow involves strong phase interactions by mass, momentum and energy exchanges, thus requiring a specific treatment which is *not* a simple extension of single phase flow. However, it is very important to follow for multiphase flow the same rigorous procedure used in the formulation of single phase flow equations. This chapter is aimed at the foundations of multiphase flow, including heat-mass transfer processes. The governing equations presented are the mass, momentum, energy and entropy balances, first in integral then differential form [3, 4].

In single-phase channel flows, the presence of discontinuities at walls and free interfaces is noticeable, and the boundary conditions to be applied there result from physical considerations [5]. In multiphase flows, phase discontinuities or interfaces lie also inside the flow domain and the conditions valid there have to be derived jointly. The classical continuum mechanics approach adopted here deals with interfaces by assuming that they are *discontinuity surfaces*, i.e. with neither thickness nor mass but with the capability to accumulate energy and entropy. For consistency, the equations governing single-phase flows are considered first. Then the approach is extended to two-phase and multiphase flows, where a rigorous derivation of the conditions to be satisfied at interfaces is presented.

## 2. Flow Patterns

Besides the number and nature of the coexisting phases and the possible presence of heat-mass transfer processes, multiphase flow is classified according to the geometrical configuration of the phases, termed *flow patterns*. These are determined visually, often with the help of photographs and movies of the flow. Although the pattern designation may vary largely from an investigator to another, flow patterns are commonly assembled in three categories (Fig. 1.4):

- *Dispersed Phase Flow Patterns*:

In these patterns one or more phases are dispersed into another (called the ‘continuous phase’). Examples are the gas-liquid ‘dispersed bubble’ and fluid-solid ‘dispersed particle’ flow patterns.

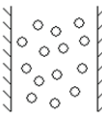
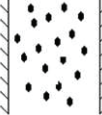
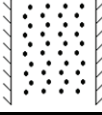
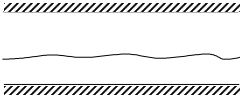
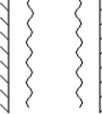
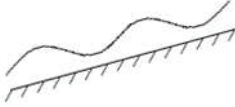
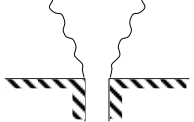
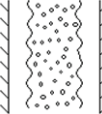
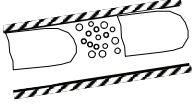
– *Separated Flow Patterns:*

In such patterns the phases flow through parallel ‘conduits’ separated by a continuous smooth or wavy interface. Examples of this category are gas-liquid ‘stratified smooth’ and liquid-liquid ‘core-annular’ flow patterns.

– *Combined Flow Patterns:*

This category combine features of the previous flow patterns and may be further classified into:

- *pseudo-separated flows:* these are separated flows where one or both phases contain dispersed particles of the other phase; a typical example is gas-liquid ‘annular mist’ flow (the gas phase contains droplets);
- *intermittent flows:* in these flows a region of separated flow alternates with a region of dispersed flow; examples are gas-liquid ‘slug’ and ‘elongated bubble’ flow patterns.

Category	Typical Flow Patterns	Pictorial View	Description
Dispersed Phase Flows	Bubbles		- Gas bubbles in a continuous liquid phase
	Droplets		- Liquid droplets in a continuous gas-phase; - Liquid-liquid emulsions or dispersions
	Particles		- Solid particles in a continuous gas or liquid phase
Separated Flows	Stratified		- Light fluid (e.g. gas) over a heavier fluid (e.g. liquid) due to gravity
	Annular		- Gas core surrounded by annular liquid layer - Liquid core surrounded by annular layer of other immiscible liquid
	Film		- Liquid film in contact with gas
	Jet		- Gas injected in a liquid or liquid injected in a liquid
Combined Flows	Annular Mist		- Gas core with droplets surrounded by a liquid annulus
	Slug		- Large gas bubbles intercalated with liquid slugs containing smaller bubbles

**Fig. 1.4** Typical flow pattern classification for two-phase flow (adapted from [6])

The formulation of the equations governing such flows is discussed in the following sections, preceded by a review on single phase flow.

### 3. Mathematical Tools

#### 3.1. Displacement Speed of a Surface

Let  $\mathcal{V}(t)$  be any mobile single-phase control volume limited by a closed surface  $\mathcal{A}(t)$ , Fig. 1.5.

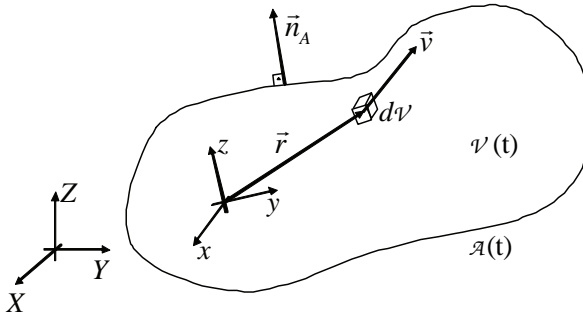


Fig. 1.5 Mobile single-phase control volume, its attached  $xyz$  frame and inertial  $XYZ$  frame

Let  $\mathcal{A}(t)$  be implicitly defined by the relation:

$$f_A(x, y, z, t) = 0 \quad (1.1)$$

where  $(x, y, z)$  are the coordinates of a generic point in the attached  $xyz$  coordinate system, which may be inertial or non-inertial. Let  $\vec{n}_A$  be the unit vector normal to  $\mathcal{A}(t)$  pointing to the outside of  $\mathcal{V}(t)$ ;  $\vec{n}_A$  is related to  $f_A(x, y, z, t)$  by:

$$\vec{n}_A = \frac{\underline{\text{grad}} f_A}{|\underline{\text{grad}} f_A|} \quad (1.2)$$

The velocity of an arbitrary point  $A(x_A, y_A, z_A)$  of  $\mathcal{A}(t)$  as measured in the  $xyz$  frame is given by:

$$\vec{v}_A = \frac{dx_A}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_A}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz_A}{dt} \mathbf{k} \quad (1.3)$$

The time derivative of Eq. (1.1) is:

$$\frac{df_A}{dt} = \frac{\partial f_A}{\partial t} + \vec{v}_A \cdot \text{grad } f_A = 0 \tag{1.4}$$

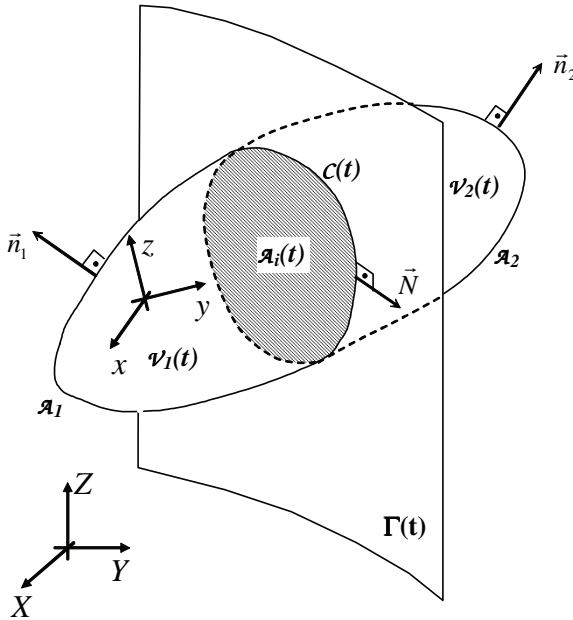
and from Eqs. (1.2) and (1.4) one can conclude:

$$\vec{v}_A \cdot \vec{n}_A = - \frac{1}{|\text{grad } f_A|} \frac{\partial f_A}{\partial t} \tag{1.5}$$

which is a scalar quantity known as the *displacement speed* of  $\mathcal{A}(t)$ . Note that this speed depends only on the relation describing the *shape* of the surface, whereas  $\vec{v}_A$  also depends on the existence of a tangential motion of point  $A$  along the surface, that is:

$$\vec{v}_A = (\vec{v}_A \cdot \vec{n}_A) \vec{n}_A + \vec{v}'_A \tag{1.6}$$

where  $\vec{v}'_A$  is the vector component of  $\vec{v}_A$  tangent to  $\mathcal{A}(t)$ . This result can be extended to a fixed two-phase control volume  $\nu_1(t) + \nu_2(t)$ , such as shown in Fig. 1.6.



**Fig. 1.6** A fixed two-phase control volume with mobile interface (adapted from [4])

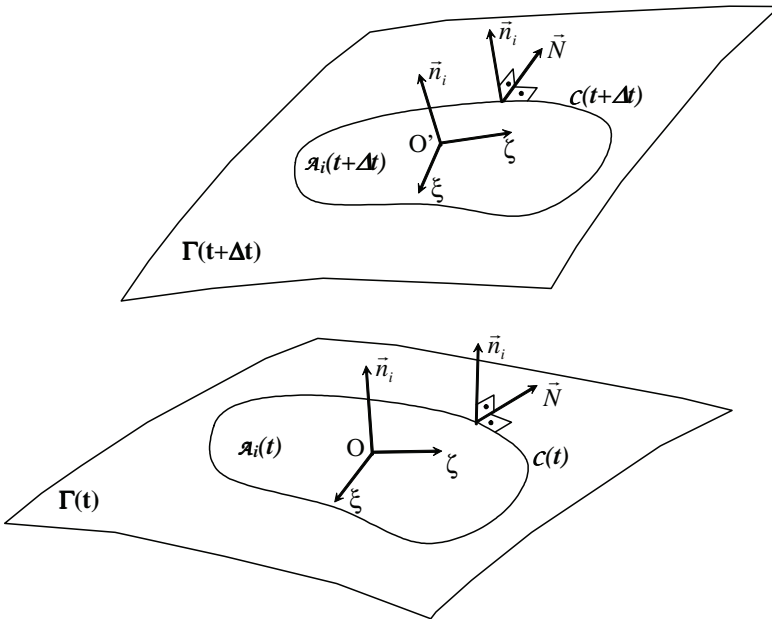
The phase volumes  $\nu_1(t)$  and  $\nu_2(t)$  are not individually fixed once they are separated by a mobile interfacial area  $\mathcal{A}_i(t)$ . However, the sum  $\nu_1(t) + \nu_2(t)$  is a fixed volume. Thus, the displacement speeds of  $\mathcal{A}_1(t)$  and  $\mathcal{A}_2(t)$  are zero but the displacement speed of  $\mathcal{A}_i(t)$  is not. As  $\mathcal{A}_i(t)$  moves, so does the closed curve  $C(t)$ . The velocity of arbitrary points of  $\mathcal{A}_i(t)$  and  $C(t)$  are:

$$\vec{v}_{A_i} = (\vec{v}_{A_i} \cdot \vec{n}_i) \vec{n}_i + \vec{v}'_{A_i} \quad (1.7)$$

$$\vec{v}_C = (\vec{v}_{A_i} \cdot \vec{n}_i) \vec{n}_i + (\vec{v}_C \cdot \vec{N}) \vec{N} \quad (1.8)$$

where  $\vec{v}'_{A_i}$  is the tangential vector component of  $\vec{v}_{A_i}$ ,  $\vec{n}_i$  is the unit vector normal to  $\mathcal{A}_i(t)$  (see Fig. 1.7),  $\vec{N}$  the surface unit vector normal to  $C(t)$ ,  $\vec{v}_{A_i} \cdot \vec{n}_i$  is the displacement speed of  $\mathcal{A}_i(t)$  and  $\vec{v}_C \cdot \vec{N}$  is the displacement speed of curve  $C(t)$  on the tangent surface  $\Gamma(t)$ ;  $\vec{v}_C \cdot \vec{N}$  is related to  $\vec{v}_{A_i} \cdot \vec{n}_i$  by:

$$\vec{v}_C \cdot \vec{N} = -(\vec{v}_{A_i} \cdot \vec{n}_i) \frac{\vec{n}_i \cdot \vec{n}_k}{\vec{N} \cdot \vec{n}_k} \quad k=1,2 \quad (1.9)$$



**Fig. 1.7** Surface coordinates unit vectors and displacement of the interface (adapted from [4])

### 3.2. Leibniz Rule

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \varphi(x,y,z,t) \rho(x,y,z,t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}(t)} \varphi \rho (\vec{v}_A \cdot \vec{n}_A) d\mathcal{A} \quad (1.10)$$

where  $\varphi(x,y,z,t)$  is any scalar or vector field such as a fluid property per unit mass,  $\rho(x,y,z,t)$  the specific mass of the fluid and  $(\vec{v}_A \cdot \vec{n}_A)$  is the displacement speed of  $\mathcal{A}(t)$ . The integral appearing in the left-hand side and the first integral in the right-hand side of Eq. (1.10) are volume integrals whereas the last one is a surface integral. The symbol  $\oint$  is used throughout this chapter to indicate the integral over a *closed* path (surface or line).

### 3.3. Gauss-Green Theorems

If  $\vec{B}$  is a space vector and  $\mathbf{T}$  a tensor then, for the control volume shown in Fig. 1.5:

$$\oint_{\mathcal{A}(t)} \vec{B} \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}(t)} \text{div } \vec{B} d\mathcal{V} \quad (1.11a)$$

$$\oint_{\mathcal{A}(t)} \vec{n}_A \cdot \mathbf{T} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}(t)} \text{div } \mathbf{T} d\mathcal{V} \quad (1.11b)$$

For two-phase control volumes and surfaces such as illustrated in Figs. 1.6 and 1.7, we further need a few surface theorems. If  $\vartheta$  is a scalar then (Fig. 1.7):

$$\oint_{\mathcal{C}(t)} \vartheta \vec{N} d\mathcal{C} = \int_{\mathcal{A}_i(t)} [\text{grad}_s \vartheta - (\text{div}_s \vec{n}_i) \vartheta \vec{n}_i] d\mathcal{A} \quad (1.12a)$$

$$\oint_{\mathcal{C}(t)} \vec{r} \times \vartheta \vec{N} d\mathcal{C} = \int_{\mathcal{A}_i(t)} \vec{r} \times [\text{grad}_s \vartheta - (\text{div}_s \vec{n}_i) \vartheta \vec{n}_i] d\mathcal{A} \quad (1.12b)$$



$$\oint_{c(t)} \vec{B} \cdot \vec{N} dC = \int_{\mathcal{A}_i(t)} \text{div}_s \vec{B}' d\mathcal{A} \quad (1.12c)$$

where:

$$\text{grad}_s \vartheta = \mathbf{i}_\xi \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \mathbf{i}_\zeta \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \quad \text{surface gradient} \quad (1.13a)$$

$$\text{div}_s \vec{B}' = \frac{\partial B'_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial B'_\zeta}{\partial \zeta} \quad \text{surface divergent} \quad (1.13b)$$

$$\text{div}_s \vec{n}_i = \frac{1}{R_\xi} + \frac{1}{R_\zeta} = \frac{2}{R} \quad \text{local curvature of } \mathcal{A}_i(t) \quad (1.13c)$$

### 3.4. Transport Rates

#### 3.4.1. Rate of Flow

The most distinctive feature of fluid mechanics in comparison with other branches of mechanics is the concept of flow rate. The (volume) flow rate  $Q$  is the volume per unit time of fluid passing *through* an (imaginary) curved surface  $\mathcal{A}(t)$ . Similarly, the mass flow rate is the mass per unit time of fluid crossing  $\mathcal{A}(t)$ . If  $\mathcal{A}(t)$  has a unit vector  $\vec{n}_A$  normal to each surface element  $d\mathcal{A}$ , then  $Q$  will depend only upon the component  $(\vec{v} - \vec{v}_A) \cdot \vec{n}_A$  of the *relative* fluid velocity across  $d\mathcal{A}$  i.e.,

$$Q = \int_{\mathcal{A}(t)} (\vec{v} - \vec{v}_A) \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A} = \text{volume flow rate} \quad (1.14)$$

where  $\vec{v}$  is the local fluid velocity measured in the  $xyz$  reference frame. Note that  $(\vec{v} - \vec{v}_A) \cdot \vec{n}_A$  represents the relative velocity normal to  $\mathcal{A}(t)$ . Similarly the mass flow rate  $M$  is defined by:

$$M = \int_{\mathcal{A}(t)} \rho (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_A) \cdot \bar{\mathbf{n}}_A d\mathcal{A} = \text{mass flow rate} \quad (1.15)$$

### 3.4.2. Transport Theorems

Several versions of the transport theorem are available. The following can be directly stated from the Leibniz rule (1.10) and Gauss theorem (1.11a) for the mobile control volume shown in Figure. 1:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \varphi(x,y,z,t) \rho(x,y,z,t) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left[ \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\varphi\bar{\mathbf{v}}) \right] d\mathcal{V} + \\ &- \oint_{\mathcal{A}(t)} \varphi \rho (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_A) \cdot \bar{\mathbf{n}}_A d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (1.16)$$

The last term on the right-hand side of Eq. (1.16) represents the rate of transport of  $\varphi$  through  $\mathcal{A}(t)$ ; if  $\mathcal{V}(t)$  is a material volume (that is, the volume of a closed system) then this term vanishes, once  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_A = \bar{\mathbf{v}}_A \cdot \bar{\mathbf{n}}_A$ . Thus, for a *fluid particle* of (constant) mass  $\rho d\mathcal{V}$  Eq. (1.16) for  $\varphi = 1$  gives:

$$\frac{dm_{\text{particle}}}{dt} = 0 = \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\bar{\mathbf{v}}) \right] d\mathcal{V} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}\bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (1.16a)$$

where the symbol  $\frac{d}{dt}$  used throughout this chapter represents the *material* or *particle* derivative (i.e., following the motion of the particle or any mobile volume  $\mathcal{V}(t)$  defined by:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad} \quad (1.16b)$$

For a surface in space such as the interface  $\mathcal{A}_1(t)$  separating two phases shown in Fig. 1.6, an extension of Eq. (1.16) using surface quantities applies:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}_1(t)} \psi(x,y,z,t) d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}_1(t)} \left[ \frac{\partial\psi}{\partial t} + \text{div}_s(\psi\bar{\mathbf{v}}_{A_1}) \right] d\mathcal{A} - \oint_{\mathcal{C}(t)} \psi (\bar{\mathbf{v}}_{A_1} - \bar{\mathbf{v}}_C) \cdot \bar{\mathbf{N}} d\mathcal{C} \quad (1.17)$$

where  $\psi(x,y,z,t)$  is any interface property per unit area,  $\bar{\mathbf{v}}_{A_1}$  is given by Eq. (1.7)

and  $\text{div}_s$  is the surface divergent defined by Eq. (1.13b).

## 4. Single-Phase Flow

### 4.1. Integral Instant Balance Equations

According to the classical continuum mechanics, fluid flow is governed by five axiomatic balance laws or integral instant balance equations, which are valid at any instant of time. These balances can be derived for different types of volume, according to the displacement speed of its surrounding surface:

- *closed system or material volume*:  $\vec{v} \cdot \vec{n}_A = \vec{v}_A \cdot \vec{n}_A$
- *fixed control volume*:  $\vec{v}_A \cdot \vec{n}_A = 0$
- *mobile deformable control volume*:  $\vec{v} \cdot \vec{n}_A \neq \vec{v}_A \cdot \vec{n}_A \neq 0$

In this chapter the integral instant balances are presented for the more general case of a mobile deformable control volume and its attached reference system  $xyz$ , Fig. 1.5. Several practical problems can be solved by direct application of the following balances.

#### 4.1.1. Global Mass Balance

The axiom of global mass balance states that the rate of time variation of the mass contained in a control volume equals the net mass flow rate crossing the control surface, thus:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho d\mathcal{V} = - \oint_{\mathcal{A}(t)} \rho (\vec{v} - \vec{v}_A) \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A} \quad (1.18)$$

If the fluid is a single-phase mixture of several chemical species subject to chemical reactions and molecular diffusion, then each species must satisfy a specific mass balance in the form:



$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho_j d\mathcal{V} = - \oint_{\mathcal{A}(t)} \rho_j (\vec{v} - \vec{v}_A) \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A} - \oint_{\mathcal{A}(t)} \vec{j}_j \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}(t)} r_j'' d\mathcal{V} \quad (1.18a)$$

where  $\rho_j$  is the specific mass of the  $j^{\text{th}}$ -species per unit volume of mixture,  $\vec{j}_j$  its mass flux vector due to diffusion and  $r_j^{\text{m}}$  its production/consumption rate per unit volume due to chemical reactions. Once  $\sum_j r_j^{\text{m}} = 0$  the sum of such equations over all species present in the mixture reproduces Eq. (1.18). In this chapter we are concerned with chemically homogeneous fluids; hence we neglect entirely concentration gradients and chemical reactions within the fluid.



#### 4.1.2. Linear Momentum Balance

The stress tensor on a fluid being usually expressed as  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ , this balance results from Newton's second law:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \vec{v} \rho \, d\mathcal{V} = & - \oint_{\mathcal{A}(t)} \vec{v} \rho (\vec{v} - \vec{v}_A) \cdot \vec{n}_A \, d\mathcal{A} + \\ & + \int_{\mathcal{V}(t)} (\vec{g} - \vec{a}_{ni}) \rho \, d\mathcal{V} - \oint_{\mathcal{A}(t)} p \vec{n}_A \, d\mathcal{A} + \oint_{\mathcal{A}(t)} \vec{n}_A \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (1.19)$$

where  $p$  is the thermodynamic pressure,  $\boldsymbol{\tau}$  the viscous stress tensor,  $\vec{g}$  the gravity acceleration and  $\vec{a}_{ni}$  expresses the non-inertial acceleration associated with the  reference system, thus  $\vec{a}_{ni} = 0$  if  is inertial. The general expression for  $\vec{a}_{ni}$  is:

$$\vec{a}_{ni} = \vec{a}_{XYZ} - \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{a}_{tr}}_{\text{rectilinear}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{centripetal}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{\text{tangential}} \quad (1.19a)$$

where  $\vec{a}_{tr}$  is the translational acceleration of the  frame relative to the inertial  $XYZ$  frame,  $\dot{\vec{\omega}}$  the angular acceleration of frame  and  $\vec{r}$  the position vector of a volume element (Fig. 1.5). Within the channels of a centrifugal pump impeller operating steadily,  $\vec{a}_{ni} = 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$ ; the Coriolis term deviates the fluid laterally to its trajectory whereas the centripetal acceleration is always radial. The force on any part of the flow boundary can be determined as

$$\vec{F}_{ext} = \int_{\mathcal{A}} p \vec{n}_A \, d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}} \vec{n}_A \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\mathcal{A} \cdot$$

### 4.1.3. Angular Momentum Balance

Assuming that all moments present in the flow domain are due to the forces appearing in Eq. (1.19) then:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho d\mathcal{V} = & - \oint_{\mathcal{A}(t)} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho (\vec{v} - \vec{v}_A) \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}(t)} \vec{r} \times (\vec{g} - \vec{a}_{mi}) \rho d\mathcal{V} \\ & - \oint_{\mathcal{A}(t)} \vec{r} \times p \vec{n}_A d\mathcal{A} + \oint_{\mathcal{A}(t)} \vec{r} \times (\vec{n}_A \cdot \boldsymbol{\tau}) d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (1.20)$$

The momentum or torque on any boundary can be expressed as

$$\vec{M}_{ext} = \int_{\mathcal{A}} \vec{r} \times p \vec{n}_A d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}} \vec{r} \times (\vec{n}_A \cdot \boldsymbol{\tau}) d\mathcal{A} \cdot$$

### 4.1.4. Total Energy Balance

This balance results from first law of Thermodynamics and reads:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \rho d\mathcal{V} = & - \oint_{\mathcal{A}(t)} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) \rho (\vec{v} - \vec{v}_A) \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}(t)} (\vec{g} - \vec{a}_{mi}) \cdot \vec{v} \rho d\mathcal{V} \\ & - \oint_{\mathcal{A}(t)} p \vec{v}_A \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A} + \oint_{\mathcal{A}(t)} (\vec{n}_A \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \vec{v} d\mathcal{A} - \oint_{\mathcal{A}(t)} \vec{q} \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A} - \dot{W}_{other} \end{aligned} \quad (1.21)$$

where  $u$  is the specific internal energy of the fluid,  $h = u + \frac{P}{\rho}$  the specific en-

thalpy,  $\vec{q}$  the heat flux vector,  $\oint_{\mathcal{A}(t)} \vec{q} \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A}$  is the rate of heat transfer from  $\mathcal{V}(t)$

and  $\dot{W}_{other}$  stands for other forms of work done by  $\mathcal{V}(t)$  on the surroundings (e.g.

an electric field). Note that the so-called *flow work* defined by the integral

$$\oint_{\mathcal{A}(t)} p (\vec{v} - \vec{v}_A) \cdot \vec{n}_A d\mathcal{A}$$

Eq. (1.21). The mechanical work done on any flow boundary can be expressed as

$\dot{W}_{ext} = \int_{\mathcal{A}} p \bar{v}_A \cdot \bar{n}_A d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}} (\bar{n}_A \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \bar{v} d\mathcal{A}$  ; this work vanishes for a fixed solid boundary

but does not for the blades of a mixer.

Equation (1.21) is often written in terms of the potential energy per unit volume  $\rho gZ$  ( $Z$  being the vertical upward coordinate in the  $XYZ$  frame) instead of the work done by the gravity force.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} e \rho d\mathcal{V} = & - \oint_{\mathcal{A}(t)} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\bar{v} - \bar{v}_A) \cdot \bar{n}_A d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{V}(t)} \bar{a}_{hi} \cdot \bar{v} \rho d\mathcal{V} - \oint_{\mathcal{A}(t)} p \bar{v}_A \cdot \bar{n}_A d\mathcal{A} \\ & + \oint_{\mathcal{A}(t)} (\bar{n}_A \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \bar{v} d\mathcal{A} - \oint_{\mathcal{A}(t)} \bar{q} \cdot \bar{n}_A d\mathcal{A} - \dot{W}_{other} \end{aligned} \quad (1.21a)$$

where  $e = u + \frac{v^2}{2} + gZ$ . Equations (1.21) and (1.21a) are equivalent because, from the transport theorem Eq. (1.16) one may write:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho gZ d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}(t)} \rho gZ (\bar{v} - \bar{v}_A) \cdot \bar{n}_A d\mathcal{A} = \\ = \int_{\mathcal{V}(t)} \left[ \rho \frac{\partial(gZ)}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \text{grad}(gZ) \right] d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \bar{g} \cdot \bar{v} d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (1.21b)$$

#### 4.1.5. Entropy Balance

This balance results from the second law of Thermodynamics and reads:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} s \rho d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}(t)} s \rho (\bar{v} - \bar{v}_A) \cdot \bar{n}_A d\mathcal{A} + \oint_{\mathcal{A}(t)} \frac{\bar{q} \cdot \bar{n}_A}{T} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}(t)} \Delta d\mathcal{V} \geq 0 \quad (1.22)$$

where  $T$  is the absolute temperature and  $\Delta$  the entropy source per unit volume. Determination of  $\Delta$  in channel flow is important to determine the causes of irreversibility in channel flow and check the consistency of constitutive laws.

## 4.2. Local Instant Equations and Constitutive Relations

In the continuum mechanics approach of fluid flow, local instant equations play an essential role to describe the time-space distributions or *fields* of all relevant properties. Some important fields in fluid flows are the velocity field  $\vec{v}(x, y, z, t)$ , pressure field  $p(x, y, z, t)$  and temperature field  $T(x, y, z, t)$ . The specific mass field  $\rho(x, y, z, t)$  can be found in terms of the pressure and temperature fields.

The derivation of each local instant equation is done by applying the Leibniz rule Eq. (1.10) [or, alternatively, the transport theorem Eq. (1.16)] and Gauss theorems (1.11a, b) to the respective integral balance, in order to group all its terms of the into a single volume integral. A simple fluid with no other work forms than mechanical is considered here. Because  $\psi(t)$  is arbitrary and the equation must be valid anytime, the corresponding integrand must be zero and a differential equation results. The local instant equations thereby obtained are presented in the following.

### 4.2.1. Mass

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0 \quad (1.23)$$

a result anticipated by Eq. (1.16a). Note that the symbol  $\frac{d}{dt}$  is the *particle* derivative introduced in Eq. (1.16b). Equation (1.23) is known as the ‘continuity equation’, which means that no mass can be locally created or destroyed (a classical fluid mechanics view).

### 4.2.2. Linear Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) &= \rho(\vec{g} - \vec{a}_{ni}) - \text{grad } p + \text{div } \boldsymbol{\tau} \\ \text{or} \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \rho(\vec{g} - \vec{a}_{ni}) - \text{grad } p + \text{div } \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (1.24)$$

### 4.2.3. Angular Momentum

Once  $\operatorname{div}(\vec{r} \times \boldsymbol{\tau}) = \vec{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + (\tau_{yz} - \tau_{zy})\mathbf{i} + (\tau_{zx} - \tau_{xz})\mathbf{j} + (\tau_{xy} - \tau_{yx})\mathbf{k}$  this equation combined with Eq. (1.24) leads to:

$$\tau_{lm} = \tau_{ml} \quad l \neq m \quad (1.25)$$

which means that the viscous tensor is symmetric.

#### 4.2.4. Total Energy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho \vec{v} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) \right] &= \rho \vec{v} \cdot (\vec{g} - \vec{a}_{ni}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q} \\ \text{or } \rho \frac{d}{dt} \left( u + \frac{v^2}{2} \right) &= \rho \vec{v} \cdot (\vec{g} - \vec{a}_{ni}) - \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q} \end{aligned} \quad (1.26)$$

#### 4.2.5. Entropy

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} s) + \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) = \Delta \geq 0 \quad \text{or} \quad \rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) = \Delta \geq 0 \quad (1.27)$$

#### 4.2.6. Constitutive Relations: Fluid Behavior

*Constitutive relations* are supplementary equations that specify the thermo-fluid dynamic *behavior* of the fluid in the channel. They are necessary in order to close the set of equations into an equal number of variables. With such relations, the above stated local equations provide three partial differential equations, namely Eqs. (1.23, 1.24, 1.26), which can be solved for three variables, usually chosen as  $\vec{v}(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$  and  $T(x, y, z, t)$ . The requirements imposed by Eqs. (1.25, 1.27) must of course be satisfied by any fluid behavior, with Eq. (1.27) being used to determine the irreversibility of the flow.

The number of constitutive relations depends upon the complexity of the *model* adopted to describe the fluid behavior. Laminar isothermal pipe flow of a Newtonian fluid requires only two constitutive relations (that is, one equation of state and one stress-strain relation), whereas some turbulent flow models require sever-



al constitutive relations in differential form. Only simple examples of constitutive relations are presented in this chapter.

### Thermodynamic Behavior

In order to evaluate variables such as  $\rho$ ,  $u$  and  $s$ , equations of state are required. For a simple compressible fluid, the fundamental equation of state describing completely the thermodynamic behavior of the fluid can be written:

$$u = u(s, \rho) \Rightarrow du = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (1.28)$$

Alternatively, other equations of state can be written, such as the PVT relation  $\rho = \rho(p, T)$  and the caloric equation  $u = u(T, p)$ . For the simplest case of incompressible flow  $\rho = \text{const}$  and  $u = u(T)$ , whereas for a perfect gas  $\rho = \frac{p}{R_g T}$  and  $u = u(T)$ .

### Mechanical Behavior

For ideal (i.e., inviscid) flow  $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{0}$ , otherwise a constitutive equation expressing the relationship between the viscous tensor and the deformation rate is required in Eq. (1.24). One of the most important relations is the one for a Newtonian fluid in laminar flow under Stokes hypothesis:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\text{grad } \bar{\mathbf{v}} + \text{grad}^T \bar{\mathbf{v}}) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \text{div } \bar{\mathbf{v}} \quad (1.29)$$

where  $\mathbf{I}$  is unit tensor and  $\mu$  the absolute viscosity of the fluid. Equation (1.29) satisfies the symmetry requirement given by Eq. (1.25).

There is no general constitutive relation for turbulent flow only specific models for special situations. For example, in the classical mixing length model for fully developed flow in a straight channel the time-averaged shear stress is represented

by  $\bar{\tau}_{yx} = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2$  except very close to the wall, where laminar flow prevails.

Laminar flow through porous media can be approximately treated by neglecting inertial terms and setting the shear resistance as  $\text{div } \boldsymbol{\tau} = -\frac{\mu}{k} \bar{\mathbf{v}}$  in Eq. (1.24),

from which Darcy's law is obtained:

$$\bar{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p \quad (1.30)$$

where  $\bar{v}$  is the local *apparent* or *superficial* velocity of the fluid (its magnitude is the flow rate divided by the full cross-sectional area of the porous media, which is less than the actual velocity within the pores). The parameter  $k$  is the absolute permeability of the porous medium; it can be considered as a scalar quantity for homogeneous isotropic media, but it is a tensor for anisotropic porous media. Further resistance due to solid surfaces obstructing the flow (which is proportional to  $|\bar{v}|^2$ ) has been neglected in Eq. (1.30); this *inertial* resistance ('Forscheimer effect') becomes important when  $\rho|\bar{v}|k/\mu > 1$ .

### Thermo-Physical Behavior

The heat transfer flux through a fluid is most often described by Fourier's law:

$$\bar{q} = -k_T \text{grad } T \quad (1.31)$$

where  $k_T$  is the thermal conductivity of the fluid. Indeed this is the simplest case when radiation heat transfer is absent.

### Entropy Sources

Equation (1.24) multiplied scalarly by  $\bar{v}$  can be subtracted from Eq. (1.26) to give an equation for the specific internal energy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v} u) &= -p \text{div } \bar{v} + \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \text{grad } \bar{v}) - \text{div } \bar{q} \quad \text{or} \\ \rho \frac{du}{dt} &= -p \text{div } \bar{v} + \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \text{grad } \bar{v}) - \text{div } \bar{q} \end{aligned} \quad (1.32)$$

where  $\text{tr}$  is the trace of a tensor. Using Eq. (1.28) to replace  $u$  by  $s$  in Eq. (1.32) and comparing the resulting equation with Eq. (1.27) gives the entropy source term:

$$\Delta = \frac{1}{T} \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \text{grad } \bar{v}) + \bar{q} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{T} \right) \geq 0 \quad (1.33)$$

This gives the causes of local irreversibility within the flow domain, associated with friction and heat transfer. In order to satisfy the above requirement under general conditions the viscosity  $\mu$  in Eq. (1.29) and the coefficient of thermal conductivity  $k_T$  in Eq. (1.31) must both be positive.

## 5. Two-Phase and Multiphase Flow

It should be noted in the previous discussion on single-phase flow that nothing could be said on the conditions to be satisfied at the flow boundaries, since these do not appear explicitly as part of the problem. The most important difference between multiphase and single-phase flow equations is that the integral balance equations for multiphase flow naturally include the interfaces and corresponding behavior from their formulation.

Following a procedure similar to that adopted for single-phase flow, the five axiomatic balance laws for two-phase flow are first presented in the form of integral instant balances. The multiphase versions of these balances are simple extensions of the two-phase equations. In this chapter, the interface separating any two phases is considered to be a *surface of discontinuity*, with neither mass nor thickness, though able to resist to traction and accumulate energy.

### 5.1. Integral Instant Balance Equations

The integral instant balances are presented below for the fixed two-phase control volume shown in Fig. 1.6, in which the phases are separated by a mobile interface, thus each phase volume is deformable at the interface. As a general rule, any volume and surface integrals present in the single-phase integral instant equations Eqs. (1.18-22) should be split, for two-phase flow, into two integrals, just like integrating by parts. However, some new terms appear at the interfaces to account for interfacial phenomena, such as interface tension and energy. Since most variables are the same as in those equations, they will not be defined again.

#### 5.1.1. Mass Balance

The axiom of global mass balance for the two-phase control volume of Fig. 1.6 is an extension of Eq. (1.18) for two phases:

$$\frac{d}{dt} \int_{v_1(t)} \rho_1 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{v_2(t)} \rho_2 d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{A}_1(t)} \rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_2(t)} \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 d\mathcal{A} \quad (1.34)$$

Note that surfaces  $\mathcal{A}_1(t)$  and  $\mathcal{A}_2(t)$  are assumed to be fixed thus  $\vec{v}_{\mathcal{A}_1} \cdot \vec{n}_1 = 0 = \vec{v}_{\mathcal{A}_2} \cdot \vec{n}_2$ . Since those surfaces are not closed, the symbol  $\int_{\mathcal{A}_k(t)}$  is used in their integrals.

### 5.1.2. Linear Momentum Balance

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1(t)} \vec{v}_1 \rho_1 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2(t)} \vec{v}_2 \rho_2 d\mathcal{V} = & - \int_{\mathcal{A}_1(t)} \vec{v}_1 \rho_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_2(t)} \vec{v}_2 \rho_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) d\mathcal{A} + \\
 & + \int_{\mathcal{V}_1(t)} (\vec{g} - \vec{a}_{ni,1}) \rho_1 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_2(t)} (\vec{g} - \vec{a}_{ni,2}) \rho_2 d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{A}_1(t)} p_1 \vec{n}_1 d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_2(t)} p_2 \vec{n}_2 d\mathcal{A} + \\
 & + \int_{\mathcal{A}_1(t)} \vec{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}_2(t)} \vec{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 d\mathcal{A} + \oint_{\mathcal{C}(t)} \sigma \vec{N} d\mathcal{C}
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

where  $\sigma$  is the interface tension, which represents the only new force in comparison with Eq. (1.19).

### 5.1.3. Angular Momentum Balance

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1(t)} (\vec{r} \times \vec{v}_1) \rho_1 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2(t)} (\vec{r} \times \vec{v}_2) \rho_2 d\mathcal{V} = & - \int_{\mathcal{A}_1(t)} (\vec{r} \times \vec{v}_1) \rho_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) d\mathcal{A} + \\
 & - \int_{\mathcal{A}_2(t)} (\vec{r} \times \vec{v}_2) \rho_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}_1(t)} \vec{r} \times (\vec{g} - \vec{a}_{ni,1}) \rho_1 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_2(t)} \vec{r} \times (\vec{g} - \vec{a}_{ni,2}) \rho_2 d\mathcal{V} + \\
 & - \int_{\mathcal{A}_1(t)} \vec{r} \times p_1 \vec{n}_1 d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_2(t)} \vec{r} \times p_2 \vec{n}_2 d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}_1(t)} \vec{r} \times (\vec{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}_2(t)} \vec{r} \times (\vec{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) d\mathcal{A} + \oint_{\mathcal{C}(t)} \vec{r} \times \sigma \vec{N} d\mathcal{C}
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

which corresponds to the moment of every term of Eq. (1.35).

### 5.1.4. Total Energy Balance

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1(t)} \left( u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) \rho_1 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2(t)} \left( u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \rho_2 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}_1(t)} u_i'' d\mathcal{A} = \\
& = - \int_{\mathcal{A}_1(t)} \left( h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) \rho_1 (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1) d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_2(t)} \left( h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \rho_2 (\bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_2) d\mathcal{A} + \\
& - \oint_{C(t)} u_i'' (\bar{\mathbf{v}}_{A_i} - \bar{\mathbf{v}}_C) \cdot \bar{\mathbf{N}} dC + \int_{\mathcal{V}_1(t)} (\bar{\mathbf{g}} - \bar{\mathbf{a}}_{ni,1}) \rho_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_2(t)} (\bar{\mathbf{g}} - \bar{\mathbf{a}}_{ni,2}) \rho_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 d\mathcal{V} + \\
& + \int_{\mathcal{A}_1(t)} (\bar{\mathbf{n}}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}_2(t)} (\bar{\mathbf{n}}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 d\mathcal{A} + \oint_{C(t)} \sigma \bar{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{v}}_{A_i} dC - \int_{\mathcal{A}_1(t)} \bar{\mathbf{q}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_1(t)} \bar{\mathbf{q}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_2 d\mathcal{A} - \dot{W}_{\text{other}}
\end{aligned} \tag{1.37}$$

where  $u_i''$  is the interface internal energy per unit area.

### 5.1.5. Entropy Balance

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1(t)} s_1 \rho_1 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2(t)} s_2 \rho_2 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}_1(t)} s_i'' d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}_1(t)} s_1 \rho_1 (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1) d\mathcal{A} + \\
& + \int_{\mathcal{A}_2(t)} s_2 \rho_2 (\bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_2) d\mathcal{A} + \oint_{C(t)} s_i'' (\bar{\mathbf{v}}_{A_i} - \bar{\mathbf{v}}_C) \cdot \bar{\mathbf{N}} dC + \int_{\mathcal{A}_1(t)} \frac{\bar{\mathbf{q}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1}{T_1} d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}_1(t)} \frac{\bar{\mathbf{q}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_2}{T_2} d\mathcal{A} = \\
& = \int_{\mathcal{V}_1(t)} \Delta_1 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_2(t)} \Delta_2 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_1(t)} \Delta_i'' d\mathcal{A} \geq 0
\end{aligned} \tag{1.38}$$

where  $s_i''$  is the interface entropy per unit area and  $\Delta_i''$  the interface entropy source per unit area.

## 5.2. Local Instant Equations and Jump Conditions

The derivation of the local instant equations for two-phase flow follows the same procedure as for single-phase flow. Starting with the application of the transport theorem as given by Eqs. (1.16-17) and the Gauss-Green theorems of Eqs. (1.11-13) to each integral instant equation above [Eqs. (1.34-38)], the terms are then grouped into two volume integrals (one for each phase) and one surface integral for the interface. Again, simple fluids with no other work forms than mechanical are considered. For arbitrary  $\mathcal{V}_1(t)$ ,  $\mathcal{V}_2(t)$  and  $\mathcal{A}_1(t)$ , the corresponding integrands must be zero, leading to the desired equations valid in those domains. As a result, the local equations for each phase are the same obtained for single-phase flow. The new feature is the derivation of specific equations to be respected at the interface, known as ‘jump conditions’, which express the conservation laws at  $\mathcal{A}_1(t)$ .

### 5.2.1. Mass

In  $\mathcal{V}_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \vec{v}_k) = 0 \quad (1.39)$$

In  $\mathcal{A}_i(t)$ :

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0 \quad (1.40)$$

where  $\dot{m}_k = \rho_k (\vec{v}_k - \vec{v}_{A_i}) \cdot \vec{n}_k$  is the mass flux leaving  $\mathcal{V}_k(t)$  through the interface,  $k = 1, 2$ . Equation (1.40) means that, if present, mass flux leaving one phase must enter the other phase.

### 5.2.2. Linear Momentum

In  $\mathcal{V}_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ :

$$\frac{\partial(\rho_k \vec{v}_k)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \vec{v}_k \vec{v}_k) = \rho_k (\vec{g}_k - \vec{a}_{ni,k}) - \operatorname{grad} p_k + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_k \quad (1.41)$$

In  $\mathcal{A}_i(t)$ :

$$\dot{m}_1 \vec{v}_1 + \dot{m}_2 \vec{v}_2 + p_1 \vec{n}_1 + p_2 \vec{n}_2 - \vec{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 - \vec{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = (\operatorname{div}_s \vec{n}_i) \boldsymbol{\sigma} \vec{n}_i - \operatorname{grad}_s \sigma \quad (1.42)$$

Since, at the interface  $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$  and  $\vec{n}_i$  can be chosen as either  $\vec{n}_1$  or  $\vec{n}_2$ , Eq. (1.42) can be recognized as Newton's third law in the presence of mass transfer and interface tension. The Young-Laplace law of pressure jump with curvature (i.e.,  $p_1 - p_2 = \sigma \operatorname{div}_s \vec{n}_i$ ) can also be retrieved as a particular result when mass transfer is absent.

### 5.2.3. Angular Momentum

The only new requirement beside Eqs. (1.41, 42) is the symmetry of the viscous tensor for each phase:

$$\tau_{k,lm} = \tau_{k,ml} \quad l \neq m \quad (1.43)$$

#### 5.2.4. Total Energy

In  $\mathcal{V}_k(t)$ ,  $k=1,2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_k \left( u_k + \frac{v_k^2}{2} \right) \right] + \text{div} \left[ \rho_k \vec{v}_k \left( h_k + \frac{v_k^2}{2} \right) \right] &= \\ = \rho_k (\vec{g} - \vec{a}_{mi,k}) \cdot \vec{v}_k + \text{div}(\boldsymbol{\tau}_k \cdot \vec{v}_k) - \text{div} \vec{q}_k \end{aligned} \quad (1.44)$$

In  $\mathcal{A}_1(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 \left( h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \dot{m}_2 \left( h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) + \vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2 + p_1 \vec{v}_{A_1} \cdot \vec{n}_1 + \\ + p_2 \vec{v}_{A_1} \cdot \vec{n}_2 - (\vec{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \cdot \vec{v}_1 - (\vec{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \vec{v}_2 = \frac{\partial u_i''}{\partial t} + \text{div}_s (u_i'' \vec{v}_{A_i}) - \text{div}_s (\boldsymbol{\sigma} \vec{v}'_{A_i}) \end{aligned} \quad (1.45)$$

If surface properties are irrelevant and the flow is incompressible then the above equation reduces to the interfacial heat-mass transfer rate:  $\dot{m}_1(h_1 - h_2) + \dot{q}_1 = \dot{q}_2$ .

#### 5.2.5. Entropy

In  $\mathcal{V}_k(t)$ ,  $k=1,2$ :

$$\frac{\partial(\rho_k s_k)}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \vec{v}_k s_k) + \text{div} \left( \frac{\vec{q}_k}{T_k} \right) = \Delta_k \geq 0 \quad (1.46)$$

In  $\mathcal{A}_1(t)$ :

$$\frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1}{T_1} + \frac{\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2}{T_2} + \dot{m}_1 s_1 + \dot{m}_2 s_2 + \Delta_i'' = \frac{\partial s_i''}{\partial t} + \text{div}_s (s_i'' \vec{v}_{A_i}) \quad (1.47)$$

#### 5.2.6. Constitutive Relations: Interface Behavior

The behavior of each fluid phase is described by the constitutive relations presented in Section 4.2.6. The thermodynamic behavior of the interface also requires description to be used in the jump conditions. This is because the interface, albeit assumed to have no mass, accumulates energy and has a definite temperature. The appropriate relations between interface properties are [7]:

$$du_i'' = T_i ds_i'' \quad (1.48)$$

and

$$u_i'' = \sigma + T_i s_i'' = \sigma - T_i \frac{d\sigma}{dT_i} \quad (1.49)$$

Hence an equation of state in the form  $\sigma = \sigma(T_i)$  is enough to determine  $u_i''$  and  $s_i''$ .

### 5.2.7. Entropy Sources:

Analogously to single-phase flow, Eq. (1.41) is multiplied by  $\vec{v}_k$  and subtracted from Eq. (1.44) to give an internal energy equation:

$$\frac{\partial(\rho_k u_k)}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \vec{v}_k u_k) = -p_k \text{div} \vec{v}_k + \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_k \cdot \text{grad} \vec{v}_k) - \text{div} \vec{q}_k \quad (1.50)$$

Using Eqs. (1.28) and (1.39) to eliminate  $u_k$  from Eq. (1.50) and comparing the resulting equation with Eq. (1.46) gives the entropy source term within each phase:

$$\Delta_k = \frac{1}{T_k} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_k \cdot \text{grad} \vec{v}_k) + \vec{q}_k \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{T_k} \right) \geq 0 \quad (1.51)$$

In a similar way the scalar product of Eq. (1.42) by  $\vec{v}_{A_i}$  subtracted from Eq. (1.45) gives:



$$\begin{aligned}
& \dot{m}_1 \left[ h_1 + \frac{v_1^2}{2} - \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_{A_1} - \frac{(\bar{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \cdot \bar{n}_1}{\rho_1} \right] + \dot{m}_2 \left[ h_2 + \frac{v_2^2}{2} - \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_{A_1} - \frac{(\bar{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \bar{n}_2}{\rho_2} \right] + \\
& + \bar{q}_1 \cdot \bar{n}_1 + \bar{q}_2 \cdot \bar{n}_2 - (\bar{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \cdot (\bar{v}'_1 - \bar{v}'_{A_1}) - (\bar{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \cdot (\bar{v}'_2 - \bar{v}'_{A_1}) = \\
& = \frac{\partial u_i''}{\partial t} + \bar{v}_{A_1} \cdot \text{grad}_s u_i'' + (u_i'' - \sigma) \text{div}_s \bar{v}_{A_1}
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Using Eqs. (1.48, 49) to replace  $u_i''$  by  $s_i''$  in Eq. (1.52) and comparing the resulting equation with Eq. (1.47) gives the interfacial entropy source in the form:

$$\begin{aligned}
T_i \Delta_i'' &= \frac{\bar{q}_1 \cdot \bar{n}_1}{T_1} (T_1 - T_i) + \frac{\bar{q}_2 \cdot \bar{n}_2}{T_2} (T_2 - T_i) - (\bar{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \cdot (\bar{v}'_1 - \bar{v}'_{A_1}) - (\bar{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \cdot (\bar{v}'_2 - \bar{v}'_{A_1}) + \\
\dot{m}_1 & \left\{ \left[ \hat{g}_1 + (T_1 - T_i) s_1 + \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_{A_1})^2}{2} - \frac{(\bar{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \cdot \bar{n}_1}{\rho_1} \right] - \left[ \hat{g}_2 + (T_2 - T_i) s_2 + \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_{A_1})^2}{2} - \frac{(\bar{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \bar{n}_2}{\rho_2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{1.53}$$

where  $\hat{g}_k = h_k - T_k s_k$  is the specific Gibbs free energy. Equation (1.53) is the same expression obtained earlier from different approaches [3, 4, 6]. It has the form of a sum of fluxes multiplied by the corresponding driving forces. However, no driving force can be expected to exist across a surface of no thickness; thus  $\Delta_i'' = 0$ . If this requirement is to be satisfied for non-zero arbitrary fluxes  $\bar{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k$ ,  $\bar{q}_k \cdot \bar{n}_k$  and  $\dot{m}_k$  then the following conditions hold at every interface:

$$\bar{v}'_1 = \bar{v}'_{A_1} = \bar{v}'_2 \quad \text{no slip condition} \tag{1.54}$$

$$T_1 = T_i = T_2 \quad \text{thermal equilibrium condition} \tag{1.55}$$

$$\hat{g}_1 + \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_{A_1})^2}{2} - \frac{(\bar{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \cdot \bar{n}_1}{\rho_1} = \hat{g}_2 + \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_{A_1})^2}{2} - \frac{(\bar{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \bar{n}_2}{\rho_2} \tag{1.56}$$

*chemical equilibrium condition*

The later equation reduces to the traditional chemical equilibrium condition  $\hat{g}_{i,1} = \hat{g}_{i,2}$  for no mass transfer and static phases. Equations (1.54-56) provide the *boundary conditions* commonly applied to any *interface*.

## 6. Concluding Remarks

Multiphase flow occurs in many applications in natural phenomena and in industry. Devices using multiphase flow are known since the Antiquity. Thus it is essential to understand its foundations on a rigorous basis.

This chapter was aimed at the *formulation* of multiphase flow equations from the starting point of the five classical axioms of continuum mechanics. With the help of few classical theorems such as the transport and Gauss-Green theorems, local description of the flow was achieved. Interface properties were accounted for by treating the interface as a discontinuity surface of insignificant mass and thickness.

The result consists of a set of local instant equations valid within each phase - which are analogous to single-phase flow - plus a set of jump conditions to be satisfied at each interface. Further interface conditions were derived by assuming that the interfacial entropy source is zero.

It is out of the scope of this chapter to discuss aspects of the solution of such equations. The presence of a complex and variable interface to be determined as part of the problem and how it interacts with turbulence are some of the major obstacles that limit the possibility of direct solution of a problem by means of local instant equations and associated jump conditions to a relatively small number of situations. However, the following must be emphasized:

- integral instant balances often provide direct answers to many practical problems, where knowledge on values inside the control volume is not required;
- one-dimensional or two-dimensional equations for channel flows can be directly derived from integral instant balances;
- the solution of somewhat idealized problems by means of the local instant equations, such as the two-phase pipe flow of perfectly separated phases with a smooth interface, provides useful information on phase concentrations, mixture properties, and pressure drop;
- jump conditions provide precious description of the heat, mass and momentum transfers that occur at any interface.

## 7. References

<http://campus.udayton.edu/~hume/Steam/steam.htm>

[http://en.wikipedia.org/wiki/Airlift\\_pump](http://en.wikipedia.org/wiki/Airlift_pump)

Delhaye J.M. (1974). Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation. *International Journal of Multiphase Flow* 1, 395–409.

Delhaye, J. M. (1981). Basic equations for two-phase flow modeling. In *Two-Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries* (Eds. A. E. Bergles, J. G. Collier, J. M. Delhaye, G. F. Hewitt and F. Mayinger), 1981, Hemisphere Publishing, New York.

Bird R.B., Stuart W.E. & Lightfoot E.N. (2001). *Transport Phenomena*. Ed. John Wiley.

Ishii M. (1975). Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow. Ed. Eyrolles, Paris.  
Adamson A. A. (1990). Physical Chemistry of Surfaces. John Wiley.

# CAPÍTULO 2 - One-Dimensional Channel Flow Equations

**Antonio C. Bannwart**

Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

## Nomenclature

### *Latin Letters*

$\vec{a}$	local acceleration of a fluid particle ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$A$	cross-sectional area of the channel ( $\text{m}^2$ )
$\mathcal{A}$	generic surface
$c$	chord measured perpendicularly to the $\ell$ and $x$ directions (m)
$c_p, c_v$	specific heats at constant pressure and constant volume ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$C_D$	drag coefficient (–)
$C_o$	distribution parameter (–)
$d$	diameter of bubble/droplet or solid particle
$D, D_h$	pipe diameter, hydraulic diameter of a channel (m)
$e$	roughness of the channel inner wall (m)
$e$	total specific energy per unit mass ( $\text{J.kg}^{-1}$ )
$f$	Fanning friction factor (–)
$e$	total specific energy per unit mass ( $\text{J.kg}^{-1}$ )
$\vec{g}, g$	gravity acceleration vector, intensity of this vector ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$\hat{g}$	specific Gibbs free energy per unit mass ( $\text{J.kg}^{-1}$ )
$h$	specific enthalpy per unit mass ( $\text{J.kg}^{-1}$ )
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}$	unit vectors (–)
$\mathbf{I}$	unit tensor (–)
$k$	permeability of porous ( $\text{m}^2$ )
$K$	shape factor (–)
$\ell$	coordinate normal to axial direction and pointing to the curvature(m)
$\dot{m}$	mass flux ( $\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$ )
$M$	mass flow rate ( $\text{kg.s}^{-1}$ )
$\vec{M}$	moment vector (N.m)
$n$	number of phases in multiphase flow
$\vec{n}$	unity vector normal to a surface (–)
$\vec{N}$	surface unity vector normal to a curve (–)
$p$	pressure (Pa)

$P$	average pressure in channel cross section (Pa)
$\vec{q}$	heat flux vector ( $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ )
$\dot{q}$	intensity of heat flux over a boundary ( $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ )
$Q$	volume flow rate ( $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ )
$\vec{r}$	position vector (m)
$r$	radial coordinate in the $xyz$ frame (m)
$R$	radius of curvature (m)
$Re$	Reynolds number (–)
$R_g$	gas constant ( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )
$s$	specific entropy per unit mass ( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )
$s_i''$	specific entropy per unit area ( $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ )
$S$	wet perimeter (m)
$t$	time instant (s)
$T$	temperature (K)
$\mathbf{T}$	stress tensor
$u$	specific internal energy per unit mass ( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ )
$U$	convective heat transfer coefficient ( $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{°C}^{-1}$ )
$u_i''$	specific internal energy per unit area ( $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ )
$\vec{v}$	local velocity vector of the fluid measured in the $xyz$ coordinate system ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )
$V$	average velocity in the axial direction of channel in the $xyz$ coordinate system ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )
$\dot{W}$	power, rate of work (W)
$\mathcal{V}$	generic volume
$x, y, z$	rectangular coordinates of the $xyz$ frame attached to $\mathcal{V}(t)$ (m)
$X, Y, Z$	rectangular coordinates of the $XYZ$ inertial system (m)
$Z$	vertical upward coordinate in the $XYZ$ inertial frame (m)

### Greek Letters

$\alpha$	volume fraction (–)
$\beta$	angle between impeller blade tip with the tangential direction
$\chi$	mass quality (–)
$\delta$	wall thickness (m)
$\Delta$	entropy source per unit volume ( $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ )
$\Delta''$	entropy source per unit area ( $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ )
$\varepsilon$	area fraction (–)
$\varphi$	generic property per unit mass
$\gamma$	specific heat ratio (–)
$\psi$	generic property per unit area
$\kappa$	von Karman's constant in turbulent shear stress (–)
$\vartheta$	generic scalar
$\mu$	absolute viscosity (Pa.s)

$\rho$	specific mass ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )
$\sigma$	interface tension ( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ or $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ )
$\boldsymbol{\tau}$	viscous stress tensor (Pa)
$\tau$	shear stress (Pa)
$\bar{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\omega}$	vector angular velocity, intensity of angular velocity ( $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ )
$\xi, \zeta$	surface coordinates

### Subscripts

$av$	weighted average introduced in Eq. (93a)
$A$	relative to surface $\mathcal{A}$
$b$	average value over the boundary of a channel cross-section
$C$	curve on the interface
$c$	continuous phase
$d$	dispersed phase
ext	external
$E$	energy
$H$	average based on the volume flow rate
$i$	interface
$k$	property of the $k^{\text{th}}$ - phase
$kJ$	property of the $k^{\text{th}}$ -phase relative to the volumetric center of the mixture
$l$	component in the lateral coordinate $\ell$
$m$	average over the channel cross section, i.e. $\psi_m = \frac{1}{A} \int_A \psi dA$
$M$	momentum
ni	non-inertial
other	other types (of work, force, etc.)
$t$	tangent to a plane of rotation normal to $y$ -axis, i.e. $r_m V_t = (\vec{r}_m \times V\mathbf{i}) \cdot \mathbf{j}$
tr	translational
$w$	wall
$x, y, z$	$x, y, z$ -components of a vector
$\xi, \zeta$	surface components of a vector

### Superscripts

t	component of a vector tangent to a surface
T	transpose of a matrix
—	bulk average, i.e. $\bar{\psi} = \frac{1}{\rho_m AV} \int_A \rho v_x \psi dA$
~	short term time average (i.e., to smooth out small fluctuations)

## 1. Introduction

Channel flows are frequently analyzed by means of one-dimensional balance equations. This is true for both single-phase and multiphase flow. The reason behind the success of the one-dimensional approach is three-fold:

- the one-dimensional equations deal with *average* values of directly measurable quantities such as fluid velocity, temperature and pressure in a channel cross section;
- two-dimensional effects describing the relationship between the momentum or kinetic energy fluxes and the average flow velocity can be accounted for by means of shape factors, if necessary;
- in channel flows one is most often interested in *boundary* quantities such as pressure drop, wall friction, wall heat-mass transfer, etc. which appear immediately in the one-dimensional equations and can also be directly measured.

These features make the one-dimensional approach perhaps the best trade-off between theory and engineering applications. The resulting equations can be used either as the basis of rigorous *two-fluid models* or to construct simple *kinematic models*.

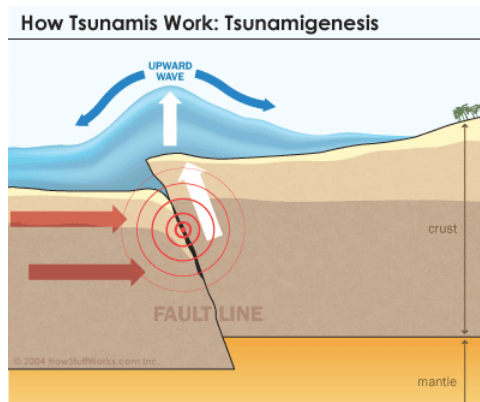
This chapter is aimed at the derivation of the one-dimensional equations for a generic channel. In literature one usually finds two derivation methods for those equations: 1) starting from the local instant equations for phase- $k$ , then taking their averages over its cross sectional area [1]; 2) applying basic principles directly to a deformable control volume involving phase- $k$  [2, 3, 4]. Both methods lead, of course, to the same set of equations. The local instant equations are derived from the integral instant balances as presented in the Chapter 1. Method 1 goes deep into mathematical details and requires few additional theorems to be respected in the averaging procedure, thus making the derivation somewhat more cumbersome. Method 2 is more direct but seems to require a more systematic and rigorous treatment.

In this chapter, the derivation procedure for the one-dimensional equations is based on the direct application the *integral instant balance equations* introduced in Chapter 1. A second choice was made on extending the treatment to include curved and/or rotating channels, which introduce phase segregation phenomena with important applications in pipe flow and turbo-machinery.

Besides the derivation of one-dimensional balance equations for mass, momentum and energy, this chapter also includes the entropy balance and emphasizes the derivation of the entropy source term as a ‘consistency tool’ to help on the formulation of interaction laws involving phase- $k$  and/or check the viability of a pro-

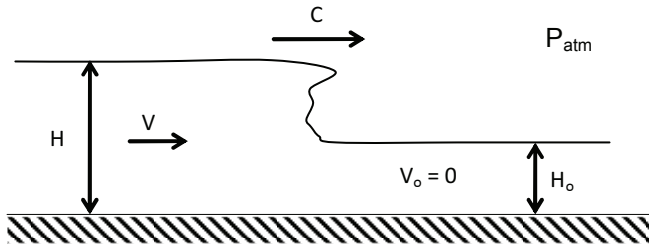
posed solution. A complete yet simplified example of one dimensional flow analysis is presented below.

## 2. An Illustrative Example: Open Channel Free Surface Flow



**Fig. 2.1** *Tsunami* formation (from [5])

Figure 2.1 illustrates the formation of a large wave and its propagation. Figure 2.2 can be used for the purpose of building a one-dimensional model of a moving hydraulic shock (step-wave).



**Fig. 2.2** Moving hydraulic shock (step-wave) schematics

Taking a control volume around the shock and moving at the same speed ( $C$ ) the mass balance reads:

$$C H_o = (C - V) H \quad (2.1)$$



If the effect of wind on wave motion is negligible (this is indeed the case for most tsunamis), the momentum balance under the assumption of hydrostatic pressure distribution and negligible wall friction simplifies to:

$$\frac{g}{2}(H^2 - H_o^2) = CVH_o \quad (2.2)$$

Equations (2.1, 2) can be solved for  $C$  and  $V$ :

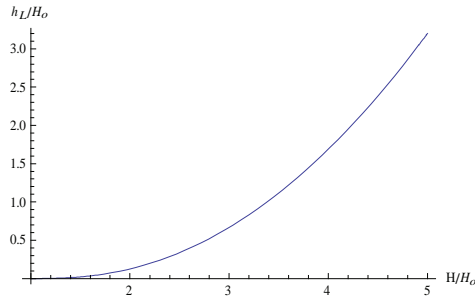
$$C = \sqrt{\frac{gH}{2} \left(1 + \frac{H}{H_o}\right)} \quad (2.3)$$

$$V = C \left(1 - \frac{H_o}{H}\right)$$

To check the feasibility of such solution, the energy equation combined with the entropy balance for incompressible adiabatic flow leads to:

$$-(H - H_o) + \frac{C^2 - (C - V)^2}{2g} = h_L \quad (2.4)$$

where  $h_L$  is the entropy source term ('head loss') of the flow relative to the wave. Replacing Eq. (2.3) into (2.4) one obtains:



**Fig. 2.3** Entropy source term for a step-wave

$$h_L = \frac{H}{4} \left( \frac{H}{H_o} - 3 \right) + \frac{H_o}{4} \left( 3 - \frac{H_o}{H} \right) \quad (2.5)$$

The behavior of  $h_L/H_o$  is shown in Fig. 2.3 as a function of  $H/H_o$ . It can be seen that  $h_L/H_o$  is always positive for any  $H/H_o > 1$ , satisfying the second law of

Thermodynamics. Furthermore, at the limit when  $H/H_o \rightarrow 1$ ,  $h_L/H_o \rightarrow 0$  and the wave speed approaches the well known result for reversible gravity waves [2]:

$$C = \sqrt{gH} \quad (2.6)$$

This is enough to justify the importance of deriving the entropy source term in flow analysis.

### 3. One-Dimensional Single Phase Channel Flow Equations

#### 3.1. Average Properties and Differential Control Volume

In channel flows one is often interested in describing the time evolution along the channel of the averages of the flow velocity, pressure and temperature over the channel cross-section. Considering just one phase and selecting  $x$  as the coordinate along the channel, the cross-sectional averages of velocity  $V(x,t)$  and pressure  $P(x,t)$  are defined by:

$$V(x,t) = \frac{1}{A} \int_A v_x(x, y, z, t) dA = \frac{Q}{A} \quad (2.7)$$

$$P(x,t) = \frac{1}{A} \int_A p(x, y, z, t) dA = p_m(x,t) \quad (2.8)$$

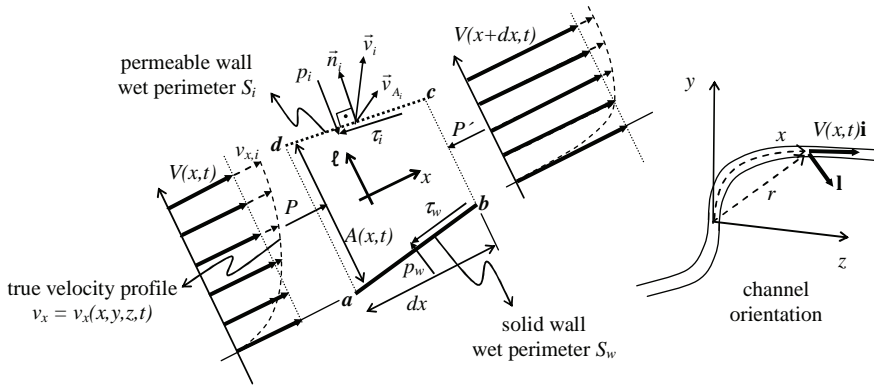
where  $Q$  is the flow rate. The average temperature  $\bar{T}(x,t)$  is usually referred as the bulk or ‘mixing cup’ temperature:

$$\bar{T}(x,t) = \frac{\int_A \rho v_x T dA}{\int_A \rho v_x dA} = \frac{1}{\bar{\rho} Q} \int_A \rho v_x T dA \quad (2.9)$$

where  $\bar{\rho} = M/Q$  and  $M$  is the mass flow rate. It is commonly assumed that

$$\bar{\rho} = \rho_m = \frac{1}{A} \int_A \rho d\mathcal{A}$$

Let us apply the integral instant balance equations presented in Chapter 1 – Eqs. (1.18-22) – to the generic differential control volume  $dV(t) = Adx$  shown in Fig. 2.4. Note preliminarily that boundaries **b-c** and **d-a** are internal and fixed in the  $xyz$  frame, whereas external boundary **a-b** is a fixed solid diabatic wall. Boundary **c-d** is left to be permeable, diabatic and mobile, i.e.,  $A = A(x,t)$  so that it may represent the interface with a neighbor phase, if desired. Side faces of the control volume provide additional wet perimeters, which can be included either in boundary **a-b** or **c-d**.



**Fig. 2.4** Differential control volume for one-dimensional analysis of a single-phase motion with a mobile boundary (*c-d*)

Application of Eqs. (1.18-22) leads to the following one-dimensional equations.

### 3.2. Mass Balance

$$\frac{\partial(\bar{\rho}A)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}AV)}{\partial x} = -\dot{m}_i S_i \tag{2.10}$$

where  $\dot{m}_i = \frac{\rho_i(\bar{v}_i - \bar{v}_{A_i}) \cdot \bar{n}_i}{\bar{n}_i \cdot \mathbf{1}}$  represents the mass flux leaving  $\nu'(t)$  through boundary  $\mathbf{c-d}$  whose perimeter is  $S_i$ . The unit vector  $\mathbf{1}$  points in the  $\ell$ -direction indicated in Fig. 2.4. For steady flow Eq. (2.10) can be integrated between the inlet and outlet of the channel to give:

$$(\bar{\rho}AV)_{\text{inlet}} - (\bar{\rho}AV)_{\text{outlet}} = \int_{\text{inlet}}^{\text{outlet}} \dot{m}_i S_i dx \quad (2.10a)$$

Thus if there is no boundary mass flux, the mass flow rate  $M = \bar{\rho}AV$  along the channel does not change.

### 3.3. Linear Momentum Balance

This equation is written in vector form since the forces acting on the fluid are not co-linear. Neglecting the usually small contribution of viscous shear in the normal stresses and assuming that no abrupt change in channel orientation occurs, the following equation is obtained (see Fig. 2.4 for notation):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}AV\mathbf{i})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}AK_M V^2\mathbf{i})}{\partial x} = & -\dot{m}_i S_i \bar{v}_i + \bar{\rho}A(\bar{g} - \bar{a}_{ni}) - \frac{\partial(PA\mathbf{i})}{\partial x} \\ & + \left( p_b \frac{\partial A}{\partial x} - \tau_i S_i - \tau_w S_w \right) \mathbf{i} + c(p_w - p_i) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

where  $S_w, S_i, \tau_w$  and  $\tau_i$  are the wetted perimeters and shear stresses on boundaries  $\mathbf{a-b}$  and  $\mathbf{c-d}$ , respectively,  $c$  is the chord of area  $A$  measured perpendicularly to the  $\ell$  and  $x$  directions,  $p_b$  is the average boundary pressure defined by

$$p_b = \frac{1}{S} \int_S p dS = \frac{p_i S_i + p_w S_w}{S_i + S_w} \quad (2.11a)$$

and  $K_M$  the shape factor associated with the momentum flux through the cross section [6], defined by

$$K_M = \frac{1}{\bar{\rho}AV^2} \int_A \rho v_x^2 dA \quad (2.11b)$$

Values of  $K_M$  range from 4/3 in fully developed laminar pipe flow to nearly 1.02 in turbulent pipe flow. Equation (2.11) can be resolved into the  $x$  and  $\ell$  components to give, respectively:

*x-direction:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}AV)}{\partial t} + \bar{\rho}AV \frac{\partial(K_M V)}{\partial x} &= \dot{m}_i S_i (K_M V - v_{i,x}) \\ + \bar{\rho}A(g_x - a_{ni,x}) - A \frac{\partial P}{\partial x} - (P - p_b) \frac{\partial A}{\partial x} - \tau_i S_i - \tau_w S_w \end{aligned} \quad (2.11c)$$

*$\ell$ -direction:*

$$\frac{(P + \bar{\rho}K_M V^2)A}{R_m} = -\dot{m}_i S_i v_{i,\ell} + \bar{\rho}A(g_\ell - a_{ni,\ell}) + c(p_w - p_i) \quad (2.11d)$$

Common use of Eq. (2.11c) is for evaluation of the pressure distribution along the channel, whereas Eq. (2.11d) provides the possible causes for the pressure difference  $p_w - p_i$  in the cross section (note that  $R_m$  is the mean radius of curvature of the channel centerline path).

Let us consider steady flow in a channel which is allowed to rotate (together with its attached  $xyz$  frame) at constant angular speed around the  $y$ -axis (Fig. 2.4). In this case,  $\bar{\omega} = \omega \mathbf{j}$  thus the non-inertial acceleration term becomes

$a_{ni,x} = -\omega^2 r_m \frac{\partial r_m}{\partial x}$ , where  $r_m$  is the radial distance from the center of the channel element to the  $y$ -axis. Taking  $g_x = -g \frac{\partial Z_m}{\partial x}$  and assuming  $K_M = const$  along the

channel, Eq. (2.11c) can be integrated with the help of the previous mass balance to give:

$$\begin{aligned} \left( \frac{P}{\bar{\rho}} + \frac{K_M V^2}{2} + gZ_m - \frac{\omega^2 r_m^2}{2} \right)_{inlet} - \left( \frac{P}{\bar{\rho}} + \frac{K_M V^2}{2} + gZ_m - \frac{\omega^2 r_m^2}{2} \right)_{outlet} &= \\ = \int_{inlet}^{outlet} \left[ \frac{P}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} - \frac{\dot{m}_i S_i}{\bar{\rho}A} (K_M V - v_{x,i}) \right] dx + \int_{inlet}^{outlet} \frac{\tau_i S_i + \tau_w S_w}{\bar{\rho}A} dx + \\ + \int_{inlet}^{outlet} \frac{(P - p_b)}{\bar{\rho}A} \frac{\partial A}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (2.11e)$$

which is the *Bernoulli equation in rotating coordinates*, extended to include specific mass variation, boundary mass flux and friction. Since each term has the dimension of specific energy per unit mass, Eq. (2.11e) expresses a mechanical energy equation. Setting  $\omega = 0$  corresponds to usual pipe flow applications. The

last term on the right-hand side represents a local energy loss related with pressure non-uniformities in a channel having a variable cross section.

### 3.4. Angular Momentum Balance

This equation is derived by taking the moments of all terms of Eq. (2.11) with respect to an axis of rotation. It plays an essential role when the channel under study is curved and/or may rotate. Two common usages are the evaluation of force reactions on the supports of a pipeline and the torque on a rotating shaft (e.g. in turbo-machines). Suppose that the channel makes a curved path around the  $y$ -axis as shown in Fig. 2.4. The angular momentum equation projected in this direction may be written:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}A r_m V_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}AVK_M r_m V_t)}{\partial x} = \\ = -\dot{m}_i S_i r_i v_{i,t} + \bar{\rho}A[\bar{r}_m \times (\bar{g} - \bar{a}_{ni})] \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial(\bar{r}_m \times PA\mathbf{i})}{\partial x} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial M_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.12)$$

where:

$$\begin{aligned} r_m V_t &= (\bar{r}_m \times V\mathbf{i}) \cdot \mathbf{j} \\ r_i v_{i,t} &= (\bar{r}_i \times \bar{v}_i) \cdot \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.12a)$$

and

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = \bar{r}_m \times \left[ \left( p_b \frac{\partial A}{\partial x} - \tau_i S_i - \tau_w S_w \right) \mathbf{i} + c(p_w - p_i) \mathbf{i} \right] \cdot \mathbf{j} \quad (2.12b)$$

which is the moment per unit length resulting from boundary reactions on the fluid, due to pressure and shear, in the channel element  $dx$ . This moment can be integrated over the channel length and related to the moments of forces holding the channel.

For steady-state turbo-machines the channel rotates at constant angular speed  $\bar{\omega} = \omega \mathbf{j}$  around the  $y$ -axis (as in the case of pumps and turbines) one is interested in the torque on the rotating shaft. In this case, the Coriolis acceleration becomes relevant and Eq. (2.12) can be integrated to give the shaft torque and power due to the angular momentum change of the fluid

$$M_y = \bar{\rho}Q \left\{ [K_M r_m (\omega r_m - V \cos \beta)]_{outlet} - [K_M r_m (\omega r_m - V \cos \beta)]_{inlet} \right\} \quad (2.12c)$$

$$\begin{aligned}\dot{W}_{shaft} &= -M_y \omega = \\ &= \bar{\rho} Q \left\{ [K_M \omega r_m (\omega r_m - V \cos \beta)]_{inlet} - [K_M \omega r_m (\omega r_m - V \cos \beta)]_{outlet} \right\}\end{aligned}\quad (2.12d)$$

where  $\beta$  is the angle between the blade tip with the tangential direction of its motion (usually  $\beta < 90^\circ$ ). Equations (2.12c,d) are the *Euler turbo-machine equations*. The forces causing  $M_y$  become apparent from Eq. (2.12b).

### 3.5. Total Energy

The one-dimensional form of the energy equation is:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho} A \left( \bar{u} + \frac{K_M V^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \bar{\rho} A V \left( \bar{h} + \frac{K_E V^2}{2} \right) \right] = \\ = -\dot{m}_i S_i \left( h_i + \frac{v_i^2}{2} \right) + \bar{\rho} A V (g_x - a_{ni,x}) - p_b \frac{\partial A}{\partial t} - \tau_i S_i v_{x,i} - \dot{q}_i S_i - \dot{q}_w S_w\end{aligned}\quad (2.13)$$

where  $\bar{h}$  is the bulk specific enthalpy defined as:

$$\bar{h} = \bar{u} + \frac{P}{\bar{\rho}}\quad (2.13a)$$

and  $K_E$  is the shape factor for the kinetic energy flux through the cross section, defined by

$$K_E = \frac{1}{\bar{\rho} A V^3} \int_A \rho v_x^3 dA\quad (2.13b)$$

Values for  $K_E$  range from 2.0 in fully developed laminar pipe flow to nearly 1.05 in turbulent pipe flow. Thus, differences between  $K_E$  and  $K_M$  are significant in laminar flow but can be neglected in turbulent flow.

Let us again consider the steady flow in a channel which is allowed to rotate at constant angular speed around the  $y$ -axis, thus  $\bar{\omega} = \omega \mathbf{j}$  and  $a_{ni,x} = -\omega^2 r_m \frac{\partial r_m}{\partial x}$ .

Taking  $g_x = -g \frac{\partial Z_m}{\partial x}$ , Eq. (2.13) can be integrated with the help of the mass balance Eq. (2.10) to give:

$$\begin{aligned}
& \left( \bar{h} + \frac{K_E V^2}{2} + gZ_m - \frac{\omega^2 r_m^2}{2} \right)_{inlet} - \left( \bar{h} + \frac{K_E V^2}{2} + gZ_m - \frac{\omega^2 r_m^2}{2} \right)_{outlet} = \\
& - \int_{inlet}^{outlet} \frac{\dot{m}_i S_i}{\bar{\rho} AV} \left[ \left( \bar{h} + \frac{K_E V^2}{2} \right) - \left( h_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \right] dx + \\
& + \int_{inlet}^{outlet} \frac{\tau_i S_i v_{x,i}}{\bar{\rho} AV} dx + \int_{inlet}^{outlet} \frac{\dot{q}_i S_i + \dot{q}_w S_w}{\bar{\rho} AV} dx
\end{aligned} \tag{2.13c}$$

where the term  $\int_{inlet}^{outlet} \frac{\tau_i S_i v_{x,i}}{\bar{\rho} AV} dx$  represents the work done by shear on the fluid at

boundary *c-d*. Note that the selected control volume in Fig. 2.4 contains a simple fluid only; for this reason no other work forms appear in Eq. (2.13c).

### 3.6. Entropy Balance and Source Term

As shown in section 2, the importance of the entropy balance lies on the possibility of determining the entropy sources, which are directly associated with the irreversibility generated within the flow. The one-dimensional entropy equation for channel flow may be written:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} A \bar{s})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} AV \bar{s})}{\partial x} + \dot{m}_i S_i s_i + \frac{\dot{q}_i S_i}{T_i} + \frac{\dot{q}_w S_w}{T_w} = A \Delta_m \geq 0 \tag{2.14}$$

It must be emphasized that all boundary quantities such as  $\dot{m}_i, v_{x,i}, \tau_i, \tau_w, h_i, Z_i, \dot{q}_i, \dot{q}_w, s_i$  appearing in Eqs. (2.10-14) are understood as averages over their correspondent perimeters ( $S_i$  or  $S_w$ ) just like  $p_b$  defined in Eq. (2.11a).

In order to assess the entropy sources, a similar procedure to that described in Chapter 1 is used. Thus, Eq. (2.11c) multiplied by  $V$  is subtracted from Eq. (2.13) to obtain the internal energy equation. For steady flow, neglecting differences in kinetic energy terms, the following result is reached:

$$\begin{aligned}
& \bar{\rho} AV \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{P}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right) = \dot{m}_i S_i (\bar{h} - h_i) + (P - p_b) V \frac{\partial A}{\partial x} + \\
& + \tau_i S_i (V - v_{x,i}) + \tau_w S_w V - \dot{q}_i S_i - \dot{q}_w S_w
\end{aligned} \tag{2.15}$$

The fundamental equation for the fluid bulk is sought in the form:



$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{s}, \bar{\rho}) \Rightarrow \bar{T} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{P}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \quad (2.16)$$

Using Eq. (2.16) to replace  $\bar{u}$  by  $\bar{s}$  in Eq. (2.15) and comparing the resulting equation with Eq. (2.14) gives the entropy source term:

$$\begin{aligned} \bar{T}A\Delta_m = & \underbrace{\tau_i S_i (V - v_{x,i}) + \tau_w S_w V + \frac{\partial A}{\partial x} V (P - p_b)}_{\text{mechanical irreversibility}} + \\ & + \underbrace{\frac{\dot{q}_i S_i}{T_i} (\bar{T} - T_i) + \frac{\dot{q}_w S_w}{T_w} (\bar{T} - T_w)}_{\text{thermal irreversibility}} + \underbrace{\frac{\dot{m}_i S_i}{\bar{\rho}} (P - p_i)}_{\text{mass transfer irreversibility}} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Equation (2.17) has the form of products of fluxes by their corresponding driving forces, representing energy losses within the flow. Besides its implications on irreversibility, Eq. (2.17) provides a clear indication on what should be the appropriate driving forces to be used in the specification of the constitutive laws for the boundary fluxes  $\tau_i, \tau_w, \dot{q}_i, \dot{q}_w, \dot{m}_i$ . The underlying idea is to ensure that each term of Eq. (2.17) be *non-negative*, so that the inequality condition is automatically satisfied. The term  $(P - p_b)V \frac{\partial A}{\partial x}$  stands for additional dissipation caused by variations in cross-sectional area, which may cause non-uniformities in pressure and *flow separation* phenomena; explicit formulations for the term  $\int_{inlet}^{outlet} \frac{(P - p_b)}{\bar{\rho}A} \frac{\partial A}{\partial x} dx$  in Eq. (2.11e) are available in the form of *local losses* such as abrupt expansions, contractions, orifices, valves, elbows and flow devices where a *vena contracta* appears.

### 3.7. Constitutive Relations in One-Dimensional Single-Phase Flow

One-dimensional single-phase flow problems typically require solution of mass, linear/angular momentum and energy balances. Thus, besides the one-dimensional balances in Eqs. (2.10-14), a set of constitutive relations is also necessary in order to express all boundary fluxes and thermo-physical properties in terms of the unknowns  $V(x,t)$ ,  $P(x,t)$  and  $\bar{T}(x,t)$ . This constitutes the mathematical *model* for a specific problem. Some of the most common types of constitutive relations used for one-dimensional flow are presented in the following.

### 3.7.1. Equations of State

- *PVT relationship*:  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(P, \bar{T})$

e.g. for a perfect gas in adiabatic flow:

$$\frac{P}{\bar{\rho}^\gamma} = \text{const} \quad \text{and} \quad \bar{T} = \frac{P}{R_g \bar{\rho}} \quad (2.18)$$

- *Thermal equation of state*:  $\bar{h} = \bar{h}(P, \bar{T})$

e.g. for a perfect gas:

$$d\bar{h} = c_p(\bar{T})d\bar{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = c_p(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \quad (2.19)$$

whereas for an incompressible fluid:

$$d\bar{h} = c_v(\bar{T})d\bar{T} + \frac{dP}{\bar{\rho}} = \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = c_v(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.20)$$

### 3.7.2. Shear Stress

For Poiseuille flow in a straight channel of constant cross-section, shear stresses balance the pressure gradient imposed to the fluid. For such situation, correlations for pressure gradient are quite well established. Shear stresses can then be determined from correlations for the Fanning friction factor  $f$  introduced as follows [in agreement with the mechanical irreversibility terms of Eq. (2.17)]:

$$\tau_i = f_i \frac{\bar{\rho} |V - v_{x,i}| (V - v_{x,i})}{2} \quad ; \quad \tau_w = f_w \frac{\bar{\rho} V^2}{2} \quad (2.21)$$

The above defined friction factors correspond to 1/4 of the Darcy friction factor commonly used in pressure drop calculations. A typical value of  $f$  for turbulent flow on a smooth solid surface is 0.005, but for wavy fluid interfaces it reaches 0.014 [4]. For a circular pipe, commonly used correlations for  $f_i$  and  $f_w$  are:

$$\begin{aligned}
 Re_{(i,w)} < 2300: f_{\text{laminar}} &= \frac{16}{Re_{(i,w)}} \\
 Re_{(i,w)} > 2300: f_{\text{turbulent}} &\cong \frac{1}{4} \left\{ -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{Re_{(i,w)}} + \left( \frac{e_{(i,w)}/D}{3,7} \right)^{1,11} \right] \right\}^{-2}
 \end{aligned} \tag{2.21a}$$

where  $e_{(i,w)}$  is the wall roughness and  $Re_{(i,w)}$  the Reynolds number defined for each boundary:

$$Re_i = \frac{\bar{\rho} |V - v_{x,i}| D}{\mu_m} \quad ; \quad Re_w = \frac{\bar{\rho} V D}{\mu_m} \tag{2.21b}$$

and  $\mu_m = \mu_m(\bar{T}, P)$  is the absolute fluid viscosity. If the channel cross section is not circular the diameter  $D$  in the above equations should be replaced with the hydraulic diameter  $D_h$  defined by:

$$D_h = \frac{4A}{S_i + S_w} \tag{2.21c}$$

### 3.7.3. Heat Flux

In channel flow, boundary heat fluxes are determined from the convective heat transfer coefficient  $U$ , introduced as follows:

$$\dot{q}_i = U_i (\bar{T} - T_i) \quad ; \quad \dot{q}_w = U_w (\bar{T} - T_w) \tag{2.22}$$

where  $U_i$  and  $U_w$  can generally be evaluated from analogies between heat transfer and shear, such as Reynolds analogy:

$$\frac{U_i}{\bar{\rho} \bar{c}_p (V - v_{x,i})} \left( \frac{\mu_m \bar{c}_p}{k_{T,m}} \right)^{2/3} = \frac{f_i}{2} \quad ; \quad \frac{U_w}{\bar{\rho} \bar{c}_p V} \left( \frac{\mu_m \bar{c}_p}{k_{T,m}} \right)^{2/3} = \frac{f_w}{2} \tag{2.22a}$$

### 3.7.4. Mass Flux

For a perforated pipe wall, mass fluxes are often expressed in terms of a dimensionless discharge coefficient  $C_d$  introduced as follows:

$$\frac{\dot{m}_i}{\bar{\rho}} = C_d \sqrt{\frac{2(P - p_i)}{\bar{\rho}}} \quad (2.23a)$$

where  $C_d$  depends on the geometry, relative size of perforations and Reynolds number. For a porous wall of thickness  $\delta$ , a simple formula results from Darcy law Eq. (1.30):

$$\frac{\dot{m}_i}{\bar{\rho}} = \frac{k(P - p_{ext})}{\mu_m \delta} \quad (2.23b)$$

## 4. One-Dimensional Multiphase Channel Flow Equations

### 4.1. Basic Variables of One Dimensional Multiphase Flow in Channels

#### 4.1.1. Volume and Area Fractions

The volume fraction of phase  $k$  in a channel is defined as the ratio between the volumes  $\mathcal{V}_k$  and  $\mathcal{V}$  of phase  $k$  and channel, respectively:

$$\alpha_k = \frac{\mathcal{V}_k}{\mathcal{V}} \quad \therefore \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \quad (2.24)$$

Similarly, the area fraction of phase  $k$  in a channel of cross section area  $A$  is defined by

$$\varepsilon_k = \frac{A_k}{A} \quad \therefore \sum_{k=1}^n \varepsilon_k = 1 \quad (2.25)$$

As  $\varepsilon_k$  may vary along the channel, i.e.  $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x)$ , then  $\alpha_k$  corresponds to the average of  $\varepsilon_k$  in a channel volume  $\mathcal{V}$ . If phase  $k$  is distributed (or dispersed) throughout a continuous phase, its area can be expressed in the form

$$A_k = \int_A \varepsilon_{k,r}(r) dA \quad (2.25a)$$

where  $\varepsilon_{k,r}(r)$  corresponds to the local area fraction of phase  $k$ :

$$\varepsilon_{k,r}(r) = \frac{\partial A_k}{\partial A} \quad (2.25b)$$

Measurement of  $\varepsilon_{k,r}(r)$  can be done by inserting a small phase-indicating probe in the flow and determining the local time-fraction of phase  $k$ , thus:  $\varepsilon_{k,r}(r) = \frac{\Sigma \Delta t_k}{\Delta t_{total}}$ . Power-laws are often assumed to represent the  $\varepsilon_{k,r}(r)$  profile.

#### 4.1.2. Volumetric Fluxes or Superficial Velocities

The volumetric flux or *superficial velocity* of phase  $k$  through a cross section of area  $A$  is defined by

$$J_k = \frac{Q_k}{A} \quad (2.26)$$

In one-dimensional approach, the *in situ* (or true) velocity of phase  $k$  is defined by

$$V_k = \frac{Q_k}{A_k} = \frac{J_k}{\varepsilon_k} \quad (2.27)$$

The total or mixture superficial velocity is the velocity of the volumetric center of the mixture i.e.

$$J = \sum_{k=1}^n J_k = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k V_k \quad (2.28)$$

Thus the total superficial velocity of a mixture corresponds to the weighted average of the *in situ* phase velocities.

### 4.1.3. Qualities

The quality of the mixture regarding phase  $k$  is defined from the mass flow rates at a channel cross section:

$$\chi_k = \frac{M_k}{M} = \frac{\bar{\rho}_k Q_k}{\sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k Q_k} \quad \therefore \sum_{k=1}^n \chi_k = 1 \quad (2.29)$$

whereas the volumetric quality is defined using the volume flow rates

$$\lambda_k = \frac{Q_k}{Q} \quad \therefore \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad (2.30)$$

Note that, in general  $\varepsilon_k \neq \lambda_k$  due to the existence of relative motion ('slip-page') between the phases. Determining the relationship between  $\varepsilon_k$  and either  $\lambda_k$  or  $\chi_k$  is a major target of multiphase modeling.

## 4.2. Phase Equations

The above derived Eqs. (2.10-14) apply directly to a phase  $k$  in a multiphase mixture flowing within a channel of cross-sectional area  $A$ . The resulting equations are understood the contribution of phase  $k$  to the global changes of the mixture properties.

### 4.2.1. Phase Mass Balance

$$\frac{\partial(\bar{\rho}_k \varepsilon_k A)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}_k J_k A)}{\partial x} = -\dot{m}_{i,k} S_{i,k} \quad (2.31)$$

### 4.2.2. Phase Linear Momentum Balance

*x-direction:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}_k J_k A)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}_k J_k A K_{M,k} V_k)}{\partial x} = & -\dot{m}_{i,k} S_{i,k} v_{i,x,k} + \bar{\rho}_k \varepsilon_k A (g_x - a_{ni,x,k}) - \frac{\partial(P_k \varepsilon_k A)}{\partial x} \\ & + p_{b,k} \frac{\partial(\varepsilon_k A)}{\partial x} - \tau_{i,k} S_{i,k} - \tau_{w,k} S_{w,k} \end{aligned} \quad (2.32a)$$

$\ell$ -direction:

$$\frac{(P_k \varepsilon_k + \bar{\rho}_k J_k K_{M,k} V_k) A}{R_m} = -\dot{m}_{i,k} S_{i,k} v_{i,l,k} + \bar{\rho}_k \varepsilon_k A (g_l - a_{ni,l,k}) + c_k \Delta p_{l,k} \quad (2.32b)$$

### 4.2.3. Phase Angular Momentum Balance

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}_k A r_{m,k} J_{t,k})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}_k J_k A K_{M,k} r_{m,k} V_{t,k})}{\partial x} = & -\dot{m}_{i,k} S_{i,k} r_{i,t,k} v_{i,t,k} + \\ & + \bar{\rho}_k \varepsilon_k A [\bar{r}_{m,k} \times (\bar{g} - \bar{a}_{ni,k})] \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial(\bar{r}_{m,k} \times P_k \varepsilon_k A \mathbf{i})}{\partial x} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial M_{y,k}}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.33)$$

where:

$$\frac{\partial M_{y,k}}{\partial x} = \left\{ \bar{r}_{m,k} \times \left[ \left( p_{b,k} \frac{\partial(\varepsilon_k A)}{\partial x} - \tau_{i,k} S_{i,k} - \tau_{w,k} S_{w,k} \right) \mathbf{i} + c_k \Delta p_{l,k} \mathbf{l} \right] \right\} \cdot \mathbf{j} \quad (2.33a)$$

### 4.2.4. Phase Total Energy Balance

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho}_k \varepsilon_k A \left( \bar{u}_k + \frac{K_{M,k} V_k^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \bar{\rho}_k J_k A \left( \bar{h}_k + \frac{K_{E,k} V_k^2}{2} \right) \right] = \\ = -\dot{m}_{i,k} S_{i,k} \left( h_{i,k} + \frac{v_{i,k}^2}{2} \right) + \bar{\rho}_k A J_k (g_x - a_{ni,x,k}) - p_{b,k} \frac{\partial(\varepsilon_k A)}{\partial t} + \\ - \tau_{i,k} S_{i,k} v_{x,i,k} - \dot{q}_{i,k} S_{i,k} - \dot{q}_{w,k} S_{w,k} \end{aligned} \quad (2.34)$$

### 4.2.5. Phase Entropy Balance

$$\frac{\partial(\bar{\rho}_k \varepsilon_k A \bar{s}_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}_k J_k A \bar{s}_k)}{\partial x} + \dot{m}_{i,k} S_{i,k} S_{i,k} + \frac{\dot{q}_{i,k} S_{i,k}}{T_{i,k}} + \frac{\dot{q}_{w,k} S_{w,k}}{T_{w,k}} = \varepsilon_k A \Delta_{m,k} \geq 0 \quad (2.35)$$

### 4.3. Mixture Equations

The treatment of the interfacial terms in the above phase equations may become quite complex for some spatial configurations of the interfaces. A usual option in such cases is to add up Eqs. (2.31-35) over the phases to obtain balance equations for the mixture. In each mixture equation, the sum of the interfacial terms disappears if simplified versions of the jump and boundary conditions derived in Chapter 1 are assumed *for each interface*, e.g.:

$$\dot{m}_{i,1} + \dot{m}_{i,2} = 0 \quad ; \quad v_{x,i,1} = v_{x,i,2} \quad ; \quad T_{i,1} = T_{i,2} \quad (2.36)$$

$$p_{i,1} - p_{i,2} \cong 0 \quad ; \quad \tau_{i,1} + \tau_{i,2} \cong 0 \quad (2.37)$$

$$\dot{m}_{i,1} \left( h_{i,1} + \frac{v_{i,1}^2}{2} \right) + \dot{m}_{i,2} \left( h_{i,2} + \frac{v_{i,2}^2}{2} \right) + \dot{q}_{i,1} + \dot{q}_{i,2} \cong 0 \quad (2.38)$$

$$\hat{g}_{i,1} \cong \hat{g}_{i,2} \quad (2.39)$$

Except for Eq. (2.36), which is exact, the other are only approximate if mass transfer is present and interface tension effects play a significant role. Using Eqs. (2.36-39) and assuming for simplicity that the channel has impermeable walls, the following mixture equations are obtained, which form the basis of the *kinematic models*.

#### 4.3.1. Mixture Mass Balance

$$\frac{\partial(\bar{\rho}A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_H J A)}{\partial x} = 0 \quad (2.40)$$

where:



$$\bar{\rho} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \bar{\rho}_k \quad (2.40a)$$

$$\rho_H = \sum_{k=1}^n \lambda_k \bar{\rho}_k \quad (2.40b)$$

Note that these quantities are not equal, unless  $\varepsilon_k = \lambda_k$ .

### 4.3.2. Mixture Linear Momentum Balance

*x-direction:*

$$\frac{\partial(\rho_H J A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_M J^2 A)}{\partial x} = \bar{\rho} A (g_x - a_{ni,x}) - \frac{\partial(P_m A)}{\partial x} + p_w \frac{\partial A}{\partial x} - \tau_w S_w \quad (2.41a)$$

*ℓ-direction:*

$$\frac{(P_m + \rho_M J^2) A}{R_m} = \bar{\rho} A (g_l - a_{ni,l}) + c \Delta p_l \quad (2.41b)$$

where:

$$\rho_M = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^2 K_{m,k} \bar{\rho}_k}{\varepsilon_k} = \rho_H \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k \chi_k K_{m,k}}{\varepsilon_k} \quad (2.41c)$$

$$P_m = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k P_k \quad (2.41d)$$

$$\tau_w = \sum_{k=1}^n \frac{S_{w,k}}{S_w} \tau_{w,k} \quad (2.41e)$$

$$p_w = \sum_{k=1}^n \frac{S_{w,k}}{S_w} p_{w,k} \quad (2.41f)$$

and  $\Delta p_l$  expresses the pressure difference between both sides of the wall around chord  $c$ . It becomes clear from Eq. (2.41b) that for a vertical straight pipe of circular cross section ( $c = D$ ) such pressure difference vanishes for symmetry requirement. Note also that due to the possibility of separation phenomena if  $\frac{\partial A}{\partial x} > 0$ , the usual assumption  $p_w = P_m$  does not seem appropriate (see Eq. (2.17)).

### 4.3.3. Mixture Angular Momentum Balance

For simplicity the position vector of the mixture mass center is approximated with the mean position vector  $\vec{r}_m$  of the channel:

$$\frac{\partial(\rho_H J_r A r_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_M J_r^2 A r_m)}{\partial x} = \bar{\rho} A [\vec{r}_m \times (\vec{g} - \vec{a}_{ni,k})] \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial(\vec{r}_m \times P_m \mathbf{A} \mathbf{i})}{\partial x} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial M_y}{\partial x} \quad (2.42)$$

### 4.3.4. Mixture Total Energy Balance

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho} A \left( u_{av} + \frac{V_{av}^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_H J A \left( \bar{h} + \frac{\bar{V}^2}{2} \right) \right] = \rho_H A J (g_x - \bar{a}_{ni,x}) - p_w \frac{\partial A}{\partial t} - \dot{q}_w S_w \quad (2.43)$$

where:

$$u_{av} = \frac{1}{\bar{\rho}} \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \varepsilon_k \bar{u}_k \quad (2.43a)$$

$$\frac{V_{av}^2}{2} = \frac{1}{\bar{\rho}} \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \varepsilon_k \frac{K_{M,k} V_k^2}{2} = \frac{\rho_M}{\bar{\rho}} \frac{J^2}{2} \quad (2.43b)$$

$$\bar{h} = \frac{1}{\rho_H} \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \lambda_k \bar{h}_k = \sum_{k=1}^n \chi_k \bar{h}_k \quad (2.43c)$$

$$\frac{\overline{V^2}}{2} = \frac{J^2}{2\rho_H} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{\rho}_k \lambda_k^3 K_{E,k}}{\varepsilon_k^2} = \frac{J^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\chi_k \lambda_k^2 K_{E,k}}{\varepsilon_k^2} \quad (2.43d)$$

$$\dot{q}_w = \sum_{k=1}^n \frac{S_{w,k}}{S_w} \dot{q}_{w,k} \quad (2.43e)$$

### 4.3.5. Mixture Entropy Balance

$$\frac{\partial(\overline{\rho} A s_{av})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_H J A \bar{s})}{\partial x} + \frac{\dot{q}_w S_w}{T_w} = A \Delta_m \geq 0 \quad (2.44)$$

where:

$$s_{av} = \frac{1}{\overline{\rho}} \sum_{k=1}^n \overline{\rho}_k \varepsilon_k s_{m,k} \quad (2.44a)$$

$$\bar{s} = \frac{1}{\rho_H} \sum_{k=1}^n \overline{\rho}_k \lambda_k \bar{s}_k = \sum_{k=1}^n \chi_k \bar{s}_k \quad (2.44b)$$

$$\Delta_m = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \Delta_{m,k} \quad (2.44c)$$

The derivation of the entropy source term is not presented here because it brings no new information relatively to Eq. (2.17).

## 5. Introduction to Multiphase Flow Modeling

One-dimensional single-phase flow modeling was briefly introduced in Section 3.7. The purpose of modeling is always to match the system of equations with an equal number of unknowns. For that purpose, a mathematical flow model uses a

*pictorial view* of the flow, from which the investigator tries to represent all the important fluid-fluid and fluid-solid interactions involved. Multiphase flow modeling is, of course, a rather more complex task than single-phase because the spatial configuration of the flow, i.e., the *flow pattern* has also to be specified as part of the model formulation. Flow pattern identification can be done either visually (if possible, with the help of movie recording) or by processing signals from probes inserted nearby the flow. Basic two-phase flow patterns were briefly discussed in Chapter 1, and can be classified into: dispersed phase(s), separated phases and combined patterns (pseudo separated and intermittent patterns).

Following the general features of these flow patterns, the models mostly used in multiphase flow can be classified into three categories:

a) *Kinematic Models:*

In these models balance equations such as Eqs. (2.40-44) are written for the mixture. Instead of dynamic interaction laws to express interfacial shear/heat/mass transfer between the phases (which no more appear in the mixture equations) these models prescribe directly the relative motion between the phases, the temperature difference etc. They are often used for the analysis of dispersed flows, but can also be adopted whenever interfacial terms are either unknown or difficult to assess. The most important kinematic models commonly used are:

- *homogenous model:* the velocities, pressures and temperatures are assumed to be the same for all phases in any cross section of the channel; the homogenous velocity model usually works well for finely dispersed flows (e.g. liquid-liquid emulsions) and is therefore defined by:

$$V_k = J \Rightarrow \varepsilon_k = \frac{J_k}{J} = \lambda_k \quad (2.45a)$$

- *drift-flux model:* in dispersed flows, the area fraction of the dispersed phase is distributed along the channel cross section; Zuber & Findlay [1, 2] derived the following result:

$$V_d = C_0 J + V_{dj} \Rightarrow \varepsilon_d = \frac{\lambda_d}{C_0 + V_{dj}/J} \quad (2.45b)$$

The coefficients  $C_0$  and  $V_{dj}$  are available for several flow patterns. Clearly, taking  $C_0 = 0$  and  $V_{dj} = 0$  in Eq. (2.45b) gives the homogeneous velocity model back.

- *velocity or holdup ratio model:* integration of phase velocity profiles for separated flow patterns such as annular two-phase leads to velocity ratios  $H$  in the

form:

$$V_1 = H_{12}V_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{H_{12} - (H_{12} - 1)\lambda_1} = 1 - \varepsilon_2 \quad (2.45c)$$

Knowledge of  $\varepsilon_k$  allows evaluation of mixture properties in Eqs. (2.40-44) as well as mixture viscosity, thermal conductivity, etc.

*b) Two-fluid Models:*

In these models balance equations such as Eqs. (2.31-35) are written for each phase in order to describe the full thermo-fluid dynamics of each phase. This approach requires constitutive interaction laws similar to Eqs. (2.21-23) to be specified at the interfaces. For gas-liquid systems with phase change the interfacial mass flux  $\dot{m}_i$  can be approximately evaluated by assuming that the phases are in global equilibrium (i.e., not only at the interface); knowledge of an equilibrium curve providing the solubility of the phases or, in diabatic flow, the mixture enthalpy in the form  $\bar{h} = \bar{h}(\bar{T}, P)$ , provides the mass fractions in each phase thus  $\dot{m}_i$  can be evaluated by difference at two given conditions. Two-fluid models are commonly used for problems involving separated flow patterns.

*c) Combined models:*

These models join features of the two-fluid and kinematic models and are used for analysis of combined flow patterns. As an example, gas-liquid horizontal slug flow can be modeled by splitting a typical bubble-slug unit cell into regions of separated flow where the two-fluid model can be applied (e.g. the film region), and a dispersed flow region where a kinematic model is suitable (e.g. the aerated slug and bubble nose regions).

## 6. Concluding Remarks

This chapter was aimed at the formulation of one-dimensional multiphase flow balance equations for channel flow. The derivation procedure was based directly on the direct application of the integral instant balance equations, presented in Chapter 1, to a phase control volume, due to its simplicity and physical appeal.

To innovative features were included, namely: a) the treatment of curved and/or rotating channels; b) the derivation of the entropy source term for a generic phase.

Derivation of the entropy sources is presented because they help to understand dissipation phenomena in fluid flow, and provide the driving forces to be used in constitutive relations. Some classical constitutive relations and a brief discussion on modeling are presented in order to illustrate the type of procedure required to mathematically close a particular problem in terms of an equal number of equations and variables.

## 7. References

- [1] Delhaye, J. M. (1981). Basic equations for two-phase flow modeling. In *Two-Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries* (Eds. A. E. Bergles, J. G. Collier, J. M. Delhaye, G. F. Hewitt and F. Mayinger), 1981, Ed. Hemisphere Publishing, New York.
- [2] Wallis, G. B. (1969). *One-Dimensional Two-Phase Flow*. Ed. McGraw-Hill Inc.
- [3] Collier, J.G. (1981). *Convective boiling and condensation*, Ed McGraw-Hill Inc.
- [4] Shoham, O. (2006). *Mechanistic Modeling of Gas-Liquid Two-Phase Flow in Pipes*, Society of Petroleum Engineers.
- [5] <http://preparela.org/tsunami>
- [6] White F.M. (2003). *Fluid Mechanics*. Ed. McGraw-Hill Inc.

# CAPÍTULO 3 - Modelos Mecanicistas em Escoamento Bifásico Líquido-Gás em Tubulações

**Cristiane Cozin, Rigoberto E. M. Morales**

Laboratório de Ciências Térmicas - LACIT

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

**Fernando A. França**

Departamento de Engenharia de Petróleo – DEP

Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

## Lista de Símbolos

$\alpha$	Fração de Vazio
$v$	Volume específico
$v_L$	Volume específico do líquido
$v_G$	Volume específico do gás
$v_{LG}$	Diferença do volume específico do gás em relação ao do líquido
$A$	Área da seção transversal
$A_G$	Área do gás
$A_L$	Área do líquido
$F_G$	Coefficiente de atrito relativo ao escoamento de gás
$f_L$	Coefficiente de atrito relativo ao escoamento de líquido
$C_0$	Coefficiente de distribuição
$k$	Constante do gás
$R$	Constante do gás
$\rho$	Densidade da mistura
$D$	Diâmetro da tubulação
$D_G$	Diâmetro hidráulico do gás
$D_L$	Diâmetro hidráulico do líquido

$dz$	Diferencial de comprimento
$dp$	Diferencial de pressão
$h_{LG}$	Entalpia de vaporização
$f_{TP}$	Fator de atrito bifásico
$\delta$	Fator de correção para a área do gás
$\gamma$	Fator de correção para a área do líquido
$\phi$	Fluxo de calor uniforme
$dW_G$	Fluxo de massa de gás resultante dos processos de transferência de massa na interface
$dW_L$	Fluxo de massa de líquido resultante dos processos de transferência de massa na interface
$\dot{W}_G$	Fluxo de massa do gás
$\dot{W}_L$	Fluxo de massa do líquido
$\dot{G}_G$	Fluxo mássico específico de gas
$\dot{G}_L$	Fluxo mássico específico de líquido
$\dot{G}$	Fluxo mássico específico total
$\dot{W}$	Fluxo mássico total
$\alpha'$	Fração de vazio local
$\alpha_c$	Fração de Vazio na linha de centro de uma tubulação de área de seção transversal circular
$N_K(x_0, t)$	Função densidade de fase k
$g$	Gravidade
$R_L$	Hold-up de líquido
$\theta$	Inclinação da interface em relação à horizontal
$\rho_G$	Massa específica do gás
$\rho_L$	Massa específica do líquido
$\phi_{LO}^2$	Multiplicador bifásico do modelo homogêneo de cálculo de perda de carga
$M$	Número de Mach
$Re$	Número de Reynolds
$X^2$	Parâmetro de Lockhart-Martinelli
$\xi_i$	Perímetro da interface
$P_G$	Perímetro molhado do gás
$P_L$	Perímetro molhado do líquido
$x_0$	Ponto no espaço
$S$	Razão de deslizamento
$\lambda$	Razão volumétrica
$T$	Temperatura absoluta



$\tau_G$	Tensão cisalhante exercida pelo gás em escoamento na parede da tubulação
$\tau_L$	Tensão cisalhante exercida pelo líquido em escoamento na parede da tubulação
$\bar{\tau}$	Tensão cisalhante média
$\tau_i$	Tensão interfacial, criada pelo movimento relativo entre as fases
$\sigma$	Tensão superficial na interface líquido-gás
$x$	Título
$\Delta h_G$	Varição de entalpia do gás
$\Delta h_L$	Varição de entalpia do líquido
$\Delta t$	Varição do tempo
$v$	Velocidade da Mistura
$\bar{V}_{Gj}$	Velocidade de deslizamento média
$C_{TP}$	Velocidade de propagação de uma onda sonora na mistura
$C_G$	Velocidade de propagação de uma onda sonora no gás
$C_L$	Velocidade de propagação de uma onda sonora no líquido
$V_G$	Velocidade do gás
$v_G$	Velocidade do gás
$V_L$	Velocidade do líquido
$v_L$	Velocidade do líquido
$V'_k$	Velocidade local da fase k
$V_c$	Velocidade local na linha de centro de uma tubulação de área de seção transversal circular
$V_r$	Velocidade relativa
$j$	Velocidade Superficial da Mistura
$j_G$	Velocidade Superficial do Gas
$V_\infty$	Velocidade terminal de uma partícula em um meio fluido infinito
$\mu$	Viscosidade da mistura
$\mu_G$	Viscosidade do gás
$\mu_L$	Viscosidade do líquido

## 1. Introdução

Antes de apresentar os modelos mecanicistas aplicados ao escoamento, são apresentadas as equações de conservação da massa e do balanço da quantidade de

movimento para um escoamento bifásico. Estas equações serão utilizadas para a determinação da perda de carga utilizando os modelos homogêneo e de fases separadas.

Para o desenvolvimento do modelo matemático, são consideradas as seguintes hipóteses:

- Escoamento unidimensional e estacionário;
- A tubulação com área de seção transversal constante;
- O líquido e o gás escoam separadamente, de forma que a área ocupada pelo gás é  $(\alpha A)$  e a área ocupada pelo líquido é  $[(1-\alpha)A]$ ;
- A distribuição das velocidades das fases é uniforme na seção transversal;
- A massa específica de cada uma das fases também é uniforme na seção transversal ocupada pela fase;
- As forças exercidas pelas fases na interface são iguais e opostas, isto é, as pressões das fases são iguais na interface, o que implica em não considerar qualquer efeito resultante da ação da tensão superficial.

Na Fig.1, apresenta-se um esquema gráfico para o balanço de forças, apresentado a seguir.

#### Conservação da Massa:

$$\dot{W} = \dot{W}_L + \dot{W}_G \quad (1)$$

e

$$dW_L = -dW_G \quad (2)$$

Sendo  $dW_L$  e  $dW_G$  os fluxos de massa resultantes dos processos de transferência de massa na interface (evaporação e condensação, por exemplo). Pode-se notar ainda que são válidas as seguintes identidades:

$$\dot{W}_L = \dot{W}(1-x), \quad \dot{W}_G = \dot{W}x, \quad (3)$$

Além disso, temos para o líquido e para o gás, respectivamente.

$$\frac{dW_L}{dz} = W \frac{d(1-x)}{dz} = -W \frac{dx}{dz} \quad (4)$$

$$\frac{dW_G}{dz} = W \frac{dx}{dz} \quad (5)$$

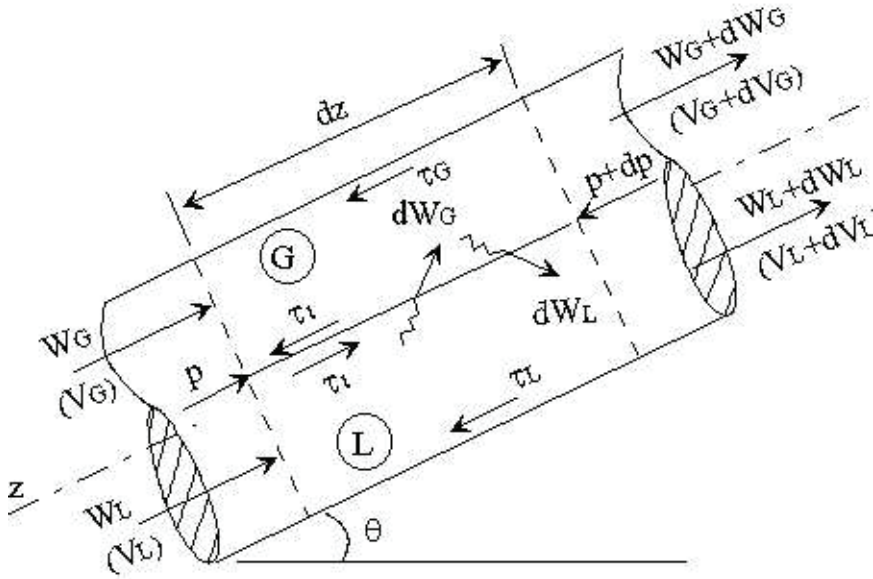


Fig. 1 Balanço de forças no elemento infinitesimal no qual escoo uma mistura bifásica

#### Conservação da Quantidade de Movimento Linear

A conservação da quantidade de movimento linear para o líquido e para o gás são apresentadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} -A_L dp - \tau_L P_L dz + \tau_i \xi_i dz - A_L \rho_L g \text{sen} \theta dz = \\ = \left[ (\dot{W}_L + d\dot{W}_L)(V_L + dV_L) \right] - \dot{W}_L V_L + d\dot{W}_L V_L \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} -A_G dp - \tau_G P_G dz - \tau_i \xi_i dz - A_G \rho_G g \text{sen} \theta dz = \\ \left[ (\dot{W}_G + d\dot{W}_G)(V_G + dV_G) \right] - \dot{W}_G V_G + d\dot{W}_G V_L \end{aligned} \quad (7)$$

Nas equações (1.6) e (1.7), observam-se variáveis novas, que são definidas a seguir:

- $\tau_L$  é a tensão cisalhante exercida pelo líquido em escoamento na parede da tubulação;
- $\tau_G$  é a tensão cisalhante exercida pelo gás em escoamento na parede da tubulação;
- $\tau_i$  é a tensão interfacial, criada pelo movimento relativo entre as fases;
- $\xi_i$  é o perímetro da interface;
- $\theta$  é a inclinação da interface em relação à horizontal;
- $g$  é a aceleração da gravidade.

Notar que a pressão  $p$  é a mesma para o gás e o líquido junto à interface, isto é, não há distinção entre a pressão exercida sobre o gás junto à interface e a pressão exercida pelo líquido também junto à interface (isto não significa que a pressão no gás ou no líquido não varie com a posição vertical, efeito hidrostático). A implicação é que não há qualquer efeito resultante da ação da tensão superficial: de acordo com a Equação de Laplace, se a interface tem curvatura e a ação de  $\sigma$ , a tensão superficial, fosse considerada, haveria diferença de pressão entre as fases junto à interface.

Desenvolvendo cada uma das equações e somando-as termo a termo obtêm-se a seguinte relação:

$$-\frac{dp}{dz} = (\tau_L P_L + \tau_G P_G) \frac{1}{A} + (A_G P_G + A_L P_L) \frac{1}{A} g \sin \theta + \frac{1}{A} \frac{d}{dz} (\dot{W}_L V_L + \dot{W}_G V_G) \quad (8)$$

onde surgem explicitamente os três termos que constituem a perda de carga total: atrito, gravidade e aceleração, respectivamente.

Seja então o fluxo mássico específico total,  $\dot{G}$ , e os fluxos mássicos de gás e líquido,  $\dot{G}_G$  e  $\dot{G}_L$  definidos por:

$$\dot{G}_G = x \dot{G} \quad \dot{G}_L = (1-x) \dot{G} \quad (9)$$

de onde obtém-se:

$$V_G = \frac{j_G}{\alpha} = \frac{\dot{G}_G}{\alpha \rho_G} = \frac{x \dot{G}}{\alpha \rho_G} \quad V_L = \frac{(1-x) \dot{G}}{(1-\alpha) \rho_L} \quad (10)$$

Então,

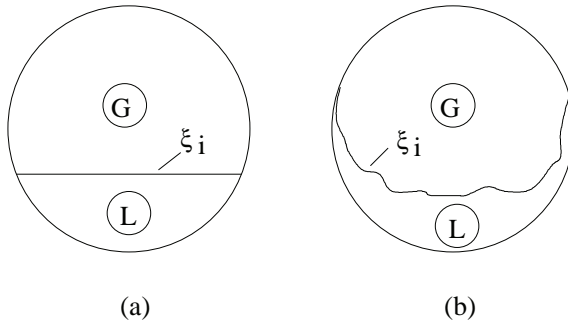
$$\frac{d}{dz} (\dot{G}_L V_L + \dot{G}_G V_G) = G^2 \frac{d}{dz} \left[ \frac{x^2}{\alpha \rho_G} + \frac{(1-x)^2}{(1-\alpha) \rho_L} \right] \quad (11)$$

e a perda de carga total é então escrita como:

$$-\frac{dp}{dz} = \bar{\tau} \frac{P}{A} + (\alpha \rho_G + (1-\alpha) \rho_L) g \sin \theta + G^2 \frac{d}{dz} \left[ \frac{x^2}{\alpha \rho_G} + \frac{(1-x)^2}{(1-\alpha) \rho_L} \right] \quad (12)$$

sendo  $\bar{\tau}$  a tensão cisalhante média exercida pela mistura bifásica.

Pode-se notar que mesmo esta simples equação nos traz problemas para resolvê-la. Um deles é: como calcular a tensão cisalhante média  $\bar{\tau}$ ? Observa-se que ela já é uma ponderação das tensões cisalhantes médias do gás e do líquido. E como calcular cada uma destas duas? Nota-se que o escoamento não é como o de cada uma das fases escoando isoladamente na tubulação, para o qual conhecemos como calcular com segurança o fator de atrito, sabemos como distinguir o regime de escoamento, se laminar ou turbulento, etc. Mesmo se as fases escoassem “separadamente”, isto é, sem interpenetração de uma em outra, não seria nada trivial calcular as tensões cisalhantes ou o “perímetro molhado” de cada uma das fases,  $P_L$  e  $P_G$ . Neste caso, o perímetro molhado de cada uma das fases seria como mostra o corte transversal da tubulação na Fig. 2(a) ou na Fig. 2(b)?



**Fig. 2** Possibilidades de configuração de interface e respectivo perímetro

Podemos simplificar a equação e então calcular a tensão cisalhante média com

$$\bar{\tau} = f_{TP} \left( \rho \frac{V^2}{2} \right) \quad (13)$$

sendo  $\rho$  e  $V$  a densidade e a velocidade da mistura, respectivamente, e obter o fator de atrito bifásico,  $f_{TP}$ , de uma correlação como a de Blasius ( $f_{TP} = 0,079Re^{-0,25}$ ), calculando o número de Reynolds,  $Re$ , como se fosse um número de Reynolds da mistura bifásica,  $Re = \rho Vd/\mu$  ( $\rho$  = densidade da mistura e  $\mu$  = viscosidade da mistura). É desta forma que se procede quando se calcula o gradiente de pressão por atrito de acordo com o Modelo Homogêneo, veremos a seguir.

O outro problema que temos é o cálculo da parcela de aceleração da perda de carga total. Note que para se integrar o termo aceleracional em  $z$ , é necessário o conhecimento *a priori* da relação funcional existente entre a fração de vazio,  $\alpha$ , e o título,  $x$ . Vários pesquisadores trabalharam nesta linha, desde a década de 50 (por exemplo, Levy, 1952) e outros na década de 60 (os modelos cinemáticos de Bankoff (1964), Wallis (1964) e Zuber e Findlay (1965)).

Estes dois problemas tiveram uma primeira proposta de solução com o que se convencionou chamar de Modelo Homogêneo. A seguir, detalha-se o cálculo da perda de carga total em um escoamento de uma mistura bifásica gás-líquido de acordo com o modelo mais simples que se pode assumir, o **Modelo Homogêneo**.

## 2. O Modelo Homogêneo

A premissa básica do Modelo Homogêneo é a de que as fases estão tão intimamente misturadas, de tal forma que se pode admitir que a mistura é homogênea, ou seja, a distribuição espacial das fases em cada região do campo do escoamento encontra um fluido que é a mistura composta proporcionalmente por cada uma das fases.

Note então que quando um líquido e um gás escoam em uma tubulação horizontal, com o gás se alojando prioritariamente na parte superior da tubulação, e o líquido na porção inferior, podemos dizer que estamos “longe” de um escoamento bifásico homogêneo. Por outro lado, se no escoamento vertical ascendente o gás está disperso no meio líquido na forma de inúmeras pequenas bolhas (é o chamado escoamento em bolhas, ou escoamento disperso em bolhas, ou ainda *bubbly flow*), pode-se dizer que o escoamento “tende” ao de uma mistura homogênea. Mas tem mais premissas:

- as duas fases em escoamento devem estar em equilíbrio termodinâmico (as exigências para o equilíbrio termodinâmico são a superposição do equilíbrio mecânico, com o equilíbrio térmico, com o equilíbrio de fases e com o equilíbrio químico). Em síntese, os dois subsistemas formados pelo gás e pelo líquido, considerados isoladamente, não podem efetuar trabalho um sobre o outro por qualquer interação concebível: não pode haver movimento relativo entre gás e líquido, não pode haver gradiente térmico, não pode haver diferença de pressão, se o gás e o líquido são uma substância única as funções de Gibbs de cada fase são iguais (não pode, por exemplo, haver transferência líquida de massa na interface) e

finalmente, se gás e líquido são substâncias diferentes, o requisito é o de que a função de Gibbs molar parcial de cada substância seja a mesma em cada fase. Notar então que o equilíbrio termodinâmico impõe a igualdade das velocidades de cada uma das fases no escoamento.

- há uma tensão cisalhante média  $\bar{\tau}$  que representa a resistência oferecida ao escoamento da mistura e que resulta da viscosidade inerente aos fluidos.

Assim, pode-se escrever:

$$v_G = v_L = v = j \quad (14)$$

$$\frac{(1-x)}{x} = \frac{\rho_L}{\rho_G} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \quad (15)$$

$$\rho = \rho_L(1-\alpha) + \rho_G\alpha \quad (16)$$

$$v = v_L(1-x) + v_Gx \quad (17)$$

O gradiente de pressão total é definido por:

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_h = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{atrito-h}} + \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{acel-h}} + \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{grav-h}} \quad (18)$$

Onde a parcela do gradiente de pressão relativa à aceleração é definida por:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{acel-h}} = \frac{d}{dz}(\dot{G}_G v_G + \dot{G}_L v_L) = \dot{G} \frac{dv}{dz} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{acel-h}} &= \frac{d}{dz}(\dot{G}_G v_G + \dot{G}_L v_L) = \dot{G} \frac{d\left(\frac{v}{\rho}\right)}{dz} = \\ &= \dot{G}^2 \frac{d}{dz}[v_L(1-x) + v_Gx] \end{aligned} \quad (20)$$

Ainda, se  $v_{LG} = v_G - v_L$ ,

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{acel-h}} = \dot{G}^2 \frac{d}{dz} [v_L + x(v_G - v_L)] = \dot{G}^2 \left[ \frac{dv_L}{dz} + x \frac{dv_{LG}}{dz} + v_{LG} \frac{dx}{dz} \right] \quad (21)$$

e, por fim,

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{acel-h}} = \dot{G}^2 v_{LG} \frac{dx}{dz} + \dot{G}^2 \left[ \frac{dv_L}{dp} + x \frac{dv_G}{dp} - x \frac{dv_L}{dp} \right] \frac{dp}{dz} \quad (22)$$

O termo gravitacional é escrito:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{grav-h}} = \rho g \sin\theta = g \sin\theta \left( \frac{1}{v_L + xv_{LG}} \right) \quad (23)$$

E o termo de atrito,

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{atrito-h}} = \bar{\tau} \frac{P}{A} \quad (24)$$

sendo  $\mathbf{P}$  o perímetro hidráulico da tubulação,  $\mathbf{A}$  a área de seção transversal e  $\bar{\tau}$  a tensão cisalhante média, isto é, o valor médio da tensão cisalhante que resulta da ação do escoamento simultâneo das duas fases na parede da tubulação. Em um tubo de seção circular, se  $\mathbf{D}$  é o diâmetro,  $(\mathbf{P}/\mathbf{A}) = (4/\mathbf{D})$  e o termo de atrito simplifica-se para

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{atrito-h}} = 4 \frac{\bar{\tau}}{D} \quad (25)$$

Onde:

$$\bar{\tau} = f_{TP} \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \quad (26)$$

sendo que  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{V}$  referem-se à mistura homogênea. Então,



$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{atrito-h} = 2f_{TP} \frac{1}{D} \left(\frac{1}{2} \rho V^2\right) = 2f_{TP} \frac{1}{D} \frac{G^2}{\rho} \quad (27)$$

ou ainda,

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{atrito-h} = 2f_{TP} \frac{1}{D} G^2 v_L \left(1 + x \frac{v_{LG}}{v_L}\right) \quad (28)$$

Substituindo as relações obtidas na equação para o gradiente de pressão total de pressão e reagrupando pode ser escrito como:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right) = \frac{2f_{TP} \frac{1}{D} G^2 v_L \left(1 + x \frac{v_{LG}}{v_L}\right) + \dot{G}^2 v_{LG} \frac{dx}{dz} + g \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1}{v_L + x v_{LG}}\right)}{1 + \dot{G}^2 \left[\frac{dv_L}{dp} + x \frac{dv_G}{dp} - x \frac{dv_L}{dp}\right]} \quad (29)$$

Esta é a expressão para cálculo do gradiente total de pressão em um escoamento bifásico gás-líquido ocorrendo em uma tubulação de área de seção transversal constante ( $dA/dz = 0$ ). Se o líquido é considerado como incompressível ( $d\mathbf{v}_l/dz = 0$ , a grande maioria das aplicações práticas na engenharia), a expressão se simplifica para:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right) = \frac{2f_{TP} \frac{1}{D} G^2 v_L \left(1 + x \frac{v_{LG}}{v_L}\right) + \dot{G}^2 v_{LG} \frac{dx}{dz} + g \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1}{v_L + x v_{LG}}\right)}{1 + \dot{G}^2 x \frac{dv_G}{dp}} \quad (30)$$

Quando a tubulação tem área de seção transversal variável ( $dA/dz \neq 0$ ), há um acréscimo no termo de aceleração, isto é:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{acel-h} = \dot{G} \frac{dV}{dz} = \dot{G} \frac{d\left(\frac{\dot{W}}{\rho A}\right)}{dz} = \dot{G} \dot{W} \frac{d\left(\frac{1}{\rho A}\right)}{dz} \quad (31)$$

Reagrupando e substituindo variáveis definidas anteriormente, mostra-se que:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{acel-h}} = \dot{G}^2 v_{LG} \frac{dx}{dz} + \dot{G}^2 \left[ \frac{dv_L}{dz} + x \frac{dv_G}{dz} - x \frac{dv_L}{dz} \right] \frac{dp}{dz} - (xv_{LG} + v_L) \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} \quad (32)$$

Então o gradiente total de pressão, para o caso de escoamentos com mudança de área transversal, é dada por:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right) = \frac{2f_{TP} \frac{1}{D} G^2 v_L \left(1 + x \frac{v_{LG}}{v_L}\right) + \dot{G}^2 v_{LG} \frac{dx}{dz} - \dot{G}^2 (xv_{LG} + v_L) \frac{1}{A} \frac{dA}{dz}}{1 + \dot{G}^2 x \frac{dv_G}{dp}} + \frac{g \sin \theta \left(\frac{1}{v_L + xv_{LG}}\right)}{1 + \dot{G}^2 x \frac{dv_G}{dp}} \quad (33)$$

Assim, o termo adicional, se considerarmos uma tubulação de área transversal variável, é o terceiro no numerador da fração à direita do sinal de igualdade. Notar ainda que esta equação é válida para escoamento de líquidos incompressíveis.

Os casos especiais são, para a simplificação da Equação 38, são:

- **A = Const.** → duto de área constante →  $dA/dz = 0$
- **x = Const.** → não há transferência de massa na interface →  $dx/dz = 0$
- **v<sub>G</sub> = Const.** → gás no escoamento é incompressível →  $dv_G/dz = 0$

Caso os três se apliquem se apliquem, o gradiente de pressão total, isto é, a perda de carga total, fica restrito aos termos gravitacional e de atrito.

### Nota sobre o fator de atrito $f_{TP}$ e o multiplicador bifásico $\phi_{LO}^2$

De acordo com o modelo homogêneo, o fator de atrito  $f_{TP}$  é calculado com a correlação de Blasius,

$$f_{TP} = C \text{Re}^{-m} \quad (34)$$

sendo  $C = 0,079$  e  $m = 0,25$ . Estes valores aplicam-se ao escoamento turbulento e o número de Reynolds,  $\text{Re}$ , é obtido de

$$\text{Re} = \frac{\dot{G}D}{\mu} \quad (35)$$

Onde a viscosidade da mistura pode ser calculada de três formas diferentes:

$$\mu = \begin{cases} \frac{1}{\frac{x}{\mu_G} + \frac{(1-x)}{\mu_L}} \\ x\mu_G + (1-x)\mu_L \\ \lambda\mu_G + (1-\lambda)\mu_L \end{cases} \quad (36)$$

Onde a razão volumétrica de entrada “input hold-up” é igual  $\lambda = \frac{\dot{Q}_G}{\dot{Q}_G + \dot{Q}_L}$ . Observe que nas três expressões quando:

$$\begin{aligned} x = 1 &\rightarrow \mu = \mu_G \\ x = 0 &\rightarrow \mu = \mu_L \end{aligned} \quad (37)$$

Assim, se a o fator de atrito é calculado a partir da correlação de Blasius, mostra-se que a parcela de perda de carga por atrito é pode ser determinada pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{dp}{dz} \right)_{\text{atrito-h}} &= 2f_{TP} \frac{1}{D} G^2 v_L \left( 1 + x \frac{v_{LG}}{v_L} \right) = \\ &= 2.0,079 \left( \frac{\dot{G}D}{\mu_L} \right)^{-0,25} \left( \frac{\dot{G}^2}{D\rho_L} \right) \left( \frac{\mu_L}{\mu} \right)^{-0,25} \left( 1 + x \frac{v_{LG}}{v_L} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Observe que o produto  $2 * 0,079 \left( \frac{\dot{G}D}{\mu_L} \right)^{-0,25} \left( \frac{\dot{G}^2}{D\rho_L} \right)$  que aparece na equação acima é a perda de carga por atrito que ocorre em um escoamento do líquido de densidade  $\rho_L$  e viscosidade  $\mu_L$  acontecendo na mesma tubulação de diâmetro  $D$

(isto é, seria a perda de carga por atrito se a mistura escoasse como líquido). Assim, é usual escrever a relação anterior como:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{\text{atrito-h}} = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{LO} \phi_{LO}^2 \quad (39)$$

onde:

$$\phi_{LO}^2 = \left(\frac{\mu_L}{\mu}\right)^{-0,25} \left(1 + x \frac{v_{LG}}{v_L}\right) \quad (40)$$

Conseqüentemente, a perda de carga por atrito no escoamento bifásico pode ser calculada como um múltiplo da perda de carga por atrito de um escoamento monofásico de líquido de mesmas densidade e viscosidade ocorrendo na mesma tubulação de diâmetro  $D$ ,  $\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{LO}$ . O subscrito  $LO$  significa “*liquid only*” e foi pre-

servado para manter coerência com os textos da área.

Observe que  $\phi_{LO}^2$ , o chamado multiplicador bifásico do modelo homogêneo de cálculo de perda de carga, é uma função das propriedades do fluido. Observe também que há um valor de  $\phi_{LO}^2$ , associado ao modelo de viscosidade adotado no cálculo. Existem diferentes modelos na literatura para calcular o multiplicador, para a mesma mistura bifásica (Shoham, 2005).

### 3. O Modelo de Fases Separadas

A premissa básica do Modelo de Fases Separadas é que as fases mantêm sua identidade no escoamento. Por exemplo, é típico deste modelo considerar, quando um líquido e um gás escoam em uma tubulação horizontal, que o gás se aloja prioritariamente na parte superior da tubulação, e o líquido na porção inferior (isto é, uma interpretação muito próxima da realidade). As outras premissas são:

- as velocidades das fases são diferentes na mesma seção transversal do escoamento;
- a pressão também é uniforme na seção transversal (isto é, não se considera a ação de  $\sigma$ , a tensão superficial);
- há uma tensão cisalhante média  $\bar{\tau}$  que representa a resistência oferecida ao escoamento da mistura e que resulta da viscosidade inerente aos fluidos (isso mesmo, ainda não iremos distinguir a resistência individual ao escoamento de cada fase).

Como foi definido anteriormente, o gradiente total de pressão (a perda de carga) é, a superposição das parcelas de atrito, aceleração e gravidade:

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_{sp} = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{atrito-sp} + \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{acel-sp} + \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{grav-sp} \quad (41)$$

O termo de atrito é calculado a partir da tensão cisalhante média,  $\bar{\tau}$ , agindo sobre o perímetro molhado pela mistura,  $\mathbf{P}$ , na tubulação de área de seção transversal  $\mathbf{A}$ :

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{atrito-sp} = \bar{\tau} \frac{P}{A} \quad (42)$$

Diferentes procedimentos existem para o cálculo da tensão cisalhante média, o que será apresentado mais adiante.

O termo gravitacional calcula-se da mesma forma que foi determinado para o modelo homogêneo,

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{grav-sp} = \rho g \sin\theta = [\alpha\rho_G + (1-\alpha)\rho_L] g \sin\theta \quad (43)$$

Vale lembrar que a fração de vazio deve ser obtida da relação geral para o escoamento bifásico considerando o deslizamento entre as fases (dado o fluxo mássico de cada fase e suas densidades locais, para calcular a fração de vazio é ainda necessário conhecer a razão de deslizamento  $\mathbf{S}$ ):

$$\frac{(1-x)}{x} = \frac{\rho_L}{\rho_G} \frac{1}{S} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \quad (44)$$

O termo de aceleração para o modelo de fases separadas é definido por:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{acel-sp} = \frac{d}{dz} (\dot{G}_L V_L + \dot{G}_G V_G) = \dot{G}^2 \frac{d}{dz} \left[ \frac{x^2}{\alpha\rho_G} + \frac{(1-x)^2}{(1-\alpha)\rho_L} \right] \quad (45)$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{accel-sp} &= \dot{G}^2 \left\{ \left[ \frac{2xv_G}{\alpha} - \frac{2(1-x)v_L}{1-\alpha} \right] + \frac{d\alpha}{dx} \left[ \frac{(1-x)^2 v_L}{(1-\alpha)^2} - \frac{x^2 v_G}{\alpha^2} \right] \right\} \frac{dx}{dz} + \\ &+ \dot{G}^2 \left\{ \frac{x^2}{\alpha} \frac{dv_G}{dp} + \frac{d\alpha}{dp} \left[ \frac{(1-x)^2 v_L}{(1-\alpha)^2} - \frac{x^2 v_G}{\alpha^2} \right] \right\} \frac{dp}{dz} \end{aligned} \quad (46)$$

Assim, o gradiente total de pressão (a perda de carga) será definido por:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dp}{dz}\right)_{sp} &= \\ \frac{\bar{\tau} \frac{P}{A} + \dot{G}^2 \left\{ \left[ \frac{2xv_G}{\alpha} - \frac{2(1-x)v_L}{1-\alpha} \right] + \frac{d\alpha}{dx} \left[ \frac{(1-x)^2 v_L}{(1-\alpha)^2} - \frac{x^2 v_G}{\alpha^2} \right] \right\} \frac{dx}{dz}}{\dot{G}^2 \left\{ \frac{x^2}{\alpha} \frac{dv_G}{dp} + \frac{d\alpha}{dp} \left[ \frac{(1-x)^2 v_L}{(1-\alpha)^2} - \frac{x^2 v_G}{\alpha^2} \right] \right\}} + \quad (47) \\ &\frac{+[\alpha\rho_G+(1-\alpha)\rho_L]g\sin\theta}{\dot{G}^2 \left\{ \frac{x^2}{\alpha} \frac{dv_G}{dp} + \frac{d\alpha}{dp} \left[ \frac{(1-x)^2 v_L}{(1-\alpha)^2} - \frac{x^2 v_G}{\alpha^2} \right] \right\}} \end{aligned}$$

Observe que a expressão para o cálculo da perda de carga de acordo com o modelo de fases separadas é razoavelmente mais complicada que aquela obtida com o modelo homogêneo.

Para calcular o termo de atrito é necessário a obtenção da tensão cisalhante média, que resulta da ponderação da ação das fases no perímetro molhado **P**. Há várias formas de calculá-la: o modelo de Lockhart e Martinelli ((1949), mostrado na seqüência, é um deles.

O termo gravitacional, para ser calculado, deve ser precedido do cálculo da fração de vazio. Para tanto, é necessário obter a relação básica do escoamento bifásico para o escoamento da mistura em questão: dadas as vazões mássicas de gás e líquido, as densidades do gás e do líquido, e a razão de deslizamento, **S**, a fração de vazio pode ser calculada. Esta mesma relação entre o título e a fração de vazio é necessária para que o termo aceleracional possa ser integrado.

O modelo de Lockhart & Martinelli (1949), que será apresentado na seqüência, é um procedimento para o cálculo da tensão de cisalhamento média, além de fornecer uma correlação entre a fração de vazio,  **$\alpha$** , e o título,  **$x$** , para calcular os termos gravitacional e aceleracional do gradiente total de pressão ( **$dp/dz$** )<sub>TP</sub>.

#### 4. O Modelo de Lockhart e Martinelli

O modelo de Lockhart e Martinelli (1949) baseia-se em duas premissas fundamentais:

- A pressão é uniforme na seção transversal do escoamento, e o gradiente de pressão do líquido é igual ao gradiente de pressão do gás e, conseqüentemente, o mesmo se aplica à mistura bifásica. Assim,

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{TP} = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_L = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_G \quad (48)$$

- O volume ocupado pelo líquido mais o volume ocupado pelo gás, em qualquer instante, é igual ao volume total da tubulação. Assim, na seção transversal ao escoamento,

$$A_L + A_G = A \quad (49)$$

No desenvolvimento do modelo os autores não fazem menção ao padrão de escoamento (e, portanto, este é um “black-box model”), mas distinguirão as fases em escoamento, com suas velocidades, perímetros molhados, etc, o que é, portanto, um modelo de fases separadas.

A perda de carga da mistura bifásica será obtida desenvolvendo-se a equação definida pela primeira premissa, recorrendo-se a dados experimentais para correlacionar variáveis independentes. Pode-se então escrever:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{TP} = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_L = 2f_L \frac{1}{D} \frac{\rho_L}{g} V_L^2 \quad (50)$$

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{TP} = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_G = 2f_G \frac{1}{D_G} \frac{\rho_G}{g} V_G^2 \quad (51)$$

No desenvolvimento do modelo, Lockhart e Martinelli (1949), que formularam o método para o sistema Inglês de unidades, por isso aparece a aceleração da gravidade,  $g$ , no denominador. A expressão da perda de carga no líquido e no gás é válida para a mistura escoando em tubo circular (resulta do desenvolvimento de

$\left(-\frac{dp}{dz}\right) = \bar{\tau} \frac{P}{A}$ ). Na equação  $f_L$  e  $f_G$  são os coeficientes de atrito relativos aos

escoamentos de líquido e gás, respectivamente, e podem ser escritos como (Blasius):

$$f_L = \mathcal{C}_L \text{Re}_L^{-m} \quad (52)$$

$$f_G = \mathcal{C}_G \text{Re}_G^{-m} \quad (53)$$

As velocidades dos fluidos são  $\mathbf{V}_L$  e  $\mathbf{V}_G$ , respectivamente, e  $\mathbf{D}_L$  e  $\mathbf{D}_G$  representam os diâmetros hidráulicos das seções de escoamento do líquido e do gás. Em outras palavras, este é um modelo claramente de fases separadas, que admite o líquido escoando com velocidade própria,  $\mathbf{V}_L$ , na fração de área da tubulação  $\mathbf{A}_L$ , e o gás escoando com velocidade  $\mathbf{V}_G$  na área  $\mathbf{A}_G$ .

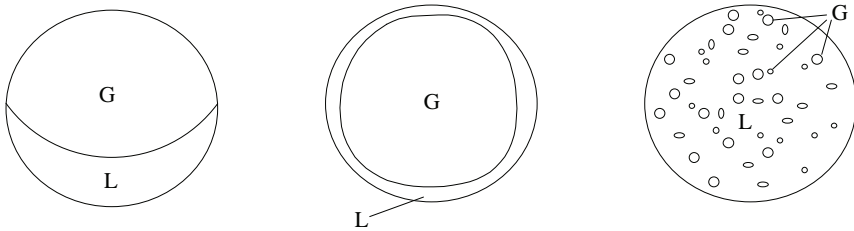
Notar que, se a área é circular, e  $\mathbf{D}_h$  é o diâmetro hidráulico,

$$A = \frac{\pi}{4} D_h^2 \quad (54)$$

Mas gás e líquido nunca escoam como uma mistura, juntos, em seções circulares, eles podem apresentar configurações como as mostradas na Fig 3. Podendo o escoamento ser estratificado (horizontal), o escoamento anular (vertical ou horizontal) e o escoamento em bolhas (vertical ou horizontal).

O que torna necessário um “fator de correção” para expressar as áreas ocupadas por líquido e gás em termos dos diâmetros hidráulicos de áreas circulares, ou seja:

$$A_L = \gamma \left( \frac{\pi}{4} D_L^2 \right), \quad A_G = \delta \left( \frac{\pi}{4} D_G^2 \right) \quad (55)$$



**Fig. 3** Configurações em Seções Circulares.



onde  $\gamma$  e  $\delta$ , são os fatores de correção das áreas, respectivamente, a razão entre as áreas reais de escoamento do líquido e do gás e as áreas de circunferências de diâmetros  $D_L$  e  $D_G$ . Isto posto, pode-se escrever:

$$V_L = \frac{\dot{W}_L}{\rho_L A_L} = \frac{\dot{W}_L}{\rho_L \gamma \left( \frac{\pi}{4} D_L^2 \right)} \quad (56)$$

$$V_G = \frac{\dot{W}_G}{\rho_G A_G} = \frac{\dot{W}_G}{\rho_G \delta \left( \frac{\pi}{4} D_G^2 \right)} \quad (57)$$

Agora podemos escrever as expressões para os coeficientes de atrito do líquido e do gás:

$$f_L = C_L \text{Re}_L^{-m} = \frac{C_L}{\left( \frac{4}{\pi} \frac{\dot{W}_L}{\gamma D_L \mu_L} \right)^{-m}} \quad (58)$$

$$f_G = C_G \text{Re}_G^{-m} = \frac{C_G}{\left( \frac{4}{\pi} \frac{\dot{W}_G}{\delta D_G \mu_G} \right)^{-m}} \quad (59)$$

Substituindo as expressões para os fatores de atrito e as das velocidades nas expressões da perda de carga da mistura, teremos:

$$\left( -\frac{dp}{dz} \right)_{TP} = 2f_L \frac{1}{D} \frac{\rho_L}{g} V_L^2 = 2 \frac{C_L}{\left( \frac{4}{\pi} \frac{\dot{W}_L}{\gamma D_L \mu_L} \right)^n} \frac{1}{D_L} \frac{\rho_L}{g} \left[ \frac{\dot{W}_L}{\rho_L \gamma \left( \frac{\pi}{4} D_L^2 \right)} \right]^2 \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{TP} &= 2f_G \frac{1}{D_G} \frac{\rho_L}{s} V_G^2 = \\ &= 2 \frac{C_G}{\left(\frac{4}{\pi} \frac{\dot{W}_G}{\gamma D_G \mu_G}\right)^n} \frac{1}{D_G} \frac{\rho_G}{s} \left[ \frac{\dot{W}_G}{\rho_G \delta \left(\frac{\pi}{4} D_G^2\right)} \right]^2 \end{aligned} \quad (61)$$

As duas equações são iguais, evidentemente. Fazendo a igualdade resulta:

$$\frac{D_L^{5-n}}{D_G^{5-m}} = \frac{C_L}{C_G} \frac{\dot{W}_L^{2-n}}{\dot{W}_G^{2-m}} \frac{\mu_L^n}{\mu_G^m} \frac{\rho_G}{\rho_L} \frac{\delta^{2-m}}{\gamma^{2-n}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n-m} \quad (62)$$

ou ainda

$$\left(\frac{D}{D_L}\right)^{5-n} \left(\frac{D}{D_G}\right)^{5-m} \frac{\gamma^{2-n}}{\delta^{2-m}} = \frac{C_L}{C_G} \frac{\dot{W}_L^{2-n}}{\dot{W}_G^{2-m}} \frac{\mu_L^n}{\mu_G^m} \frac{\rho_G}{\rho_L} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n-m} \quad (63)$$

O termo à esquerda do sinal de igualdade foi denominado de parâmetro de Lockhart-Martinelli (representado por  $X^2$ ). O termo à direita do sinal de igualdade é a razão entre a perda de carga do líquido escoando sozinho, com o fluxo mássico  $\dot{W}_L$ , na tubulação de diâmetro  $D$ , e a perda de carga do gás escoando sozinho, com o fluxo mássico  $\dot{W}_G$ , na mesma tubulação:

$$X^2 = \left(\frac{D}{D_L}\right)^{5-n} \left(\frac{D}{D_G}\right)^{5-m} \frac{\gamma^{2-n}}{\delta^{2-m}} \quad (64)$$

$$\left[ \frac{\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{L^*}}{\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{G^*}} \right] = \frac{C_L}{C_G} \frac{\dot{W}_L^{2-n}}{\dot{W}_G^{2-m}} \frac{\mu_L^n}{\mu_G^m} \frac{\rho_G}{\rho_L} \left(\frac{\pi}{4D}\right)^{n-m} \quad (65)$$

É fácil mostrar que esta última expressão é a razão entre a perda de carga do líquido escoando sozinho na tubulação e a perda de carga do gás escoando também sozinho na tubulação de diâmetro  $D$ . Então:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{TP} = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_L = 2 \frac{C_L}{\left(\frac{4}{\pi} \frac{\dot{W}_L}{\gamma D_L \mu_L}\right)^n} \frac{1}{D_L} \frac{\rho_L}{g} \left[ \frac{\dot{W}_L}{\rho_L \delta \left(\frac{\pi}{4} D_L^2\right)} \right]^2 \quad (66)$$

que reagrupada fica:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{dp}{dz}\right)_L &= 2 \frac{C_L}{\left(\frac{4}{\pi} \frac{\dot{W}_L}{D \mu_L}\right)^n} \frac{1}{D} \frac{\rho_L}{g} \left[ \frac{\dot{W}_L}{\rho_L \gamma \left(\frac{\pi}{4} D^2\right)} \right]^2 \frac{D^{5-n}}{D_L^{5-n}} \gamma^{n-2} = \\ &= \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{L^*} \phi_L^2 \end{aligned} \quad (67)$$

Seguindo um procedimento similar, é obtido para o gás:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{dp}{dz}\right)_G &= 2 \frac{C_G}{\left(\frac{4}{\pi} \frac{\dot{W}_G}{D \mu_G}\right)^m} \frac{1}{D} \frac{\rho_G}{g} \left[ \frac{\dot{W}_G}{\rho_G \gamma \left(\frac{\pi}{4} D^2\right)} \right]^2 \frac{D^{5-m}}{D_G^{5-m}} \gamma^{m-2} = \\ &= \left(-\frac{dp}{dz}\right)_{G^*} \phi_G^2 \end{aligned} \quad (68)$$

Dividindo termo a termo as duas últimas expressões chega-se a:

$$\begin{aligned} X^2 = \frac{\phi_G^2}{\phi_L^2} &= \left(\frac{D}{D_L}\right)^{5-n} \left(\frac{D}{D_G}\right)^{5-m} \frac{\gamma^{2-n}}{\delta^{2-m}} = \\ &= \left[ \frac{\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{L^*}}{\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{G^*}} \right] = \frac{C_L}{C_G} \frac{\dot{W}_L^{2-n}}{\dot{W}_G^{2-m}} \frac{\mu_L^n}{\mu_G^m} \frac{\rho_G}{\rho_L} \left(\frac{\pi}{4D}\right)^{m-n} \end{aligned} \quad (69)$$

Isto é, o parâmetro de Lockhart e Martinelli é a razão entre as perdas de carga do gás e do líquido escoando sozinhos na tubulação de diâmetro **D** (com as respec-

tivas vazões mássicas  $\dot{W}_G$  e  $\dot{W}_L$ ) e é também representado em termos da razão de parâmetros geométricos que expressam o fato de que as seções transversais onde se alojam gás e líquido em uma mistura bifásica em escoamento não têm, necessariamente, a forma circular.

O que temos até agora? São 7 equações independentes, que apresentamos a sequência, e 11 variáveis dependentes:  $\phi_L$ ,  $\phi_G$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $D_G$ ,  $D_L$ ,  $X^2$ ,  $\alpha$ ,  $\left(-\frac{dp}{dz}\right)_L^*$ ,  $\left(-\frac{dp}{dz}\right)_G^*$  e  $\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{TP}$ . As equações:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_L = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_L^* \phi_L^2 \quad (70)$$

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_G = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_G^* \phi_G^2 \quad (71)$$

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_L^* = 2 \frac{C_L \rho_L}{\left(\frac{4 \dot{W}_L}{\pi D \mu_L}\right)^n} \frac{1}{Dg} \left[ \frac{\dot{W}_L}{\rho_L \gamma \left(\frac{\pi}{4} D^2\right)} \right]^2 \quad (72)$$

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_G^* = 2 \frac{C_G \rho_G}{\left(\frac{4 \dot{W}_G}{\pi D \mu_G}\right)^n} \frac{1}{Dg} \left[ \frac{\dot{W}_G}{\rho_G \gamma \left(\frac{\pi}{4} D^2\right)} \right]^2 \quad (73)$$

$$\phi_L^2 = \frac{D^{5-n}}{D_L^{5-n}} \gamma^{n-2} \quad (74)$$

$$\phi_G^2 = \frac{D^{5-m}}{D_G^{5-m}} \gamma^{m-2} \quad (75)$$

$$X^2 = \frac{\phi_G^2}{\phi_L^2} = \frac{C_L}{C_G} \frac{\dot{W}_L^{2-n} \mu_L^n \rho_G}{\dot{W}_G^{2-m} \mu_G^m \rho_L} \left( \frac{\pi}{4D} \right)^{m-n} \quad (76)$$

Da definição da fração de vazio,  $\alpha$ , obtém-se a oitava equação:

$$\alpha = \frac{A_G}{A} = \frac{\delta \left( \frac{\pi D_G^2}{4} \right)}{\frac{\pi D^2}{4}} = \delta \left( \frac{D_G}{D} \right)^2 = 1 - \gamma \left( \frac{D_L}{D} \right)^2 \quad (77)$$

E como Lockhart e Martinelli obtiveram as três equações faltantes? Eles postularam haver uma correlação entre  $X^2$  e cada uma das outras três,  $\phi_L^2$ ,  $\phi_G^2$  e  $\alpha$ :

$$X^2 = X^2(\phi_L^2) \quad (78)$$

$$X^2 = X^2(\phi_G^2) \quad (79)$$

$$X^2 = X^2(\alpha) \quad (80)$$

Assim, o problema do cálculo do gradiente de pressão total em um escoamento bifásico gás-líquido estaria resolvido se existirem essas correlações. E note também que a relação funcional entre  $X^2$  e a não é nada mais que a relação funcional entre o título e a fração de vazio. Assim, havendo a correlação, os termos aceleracional e gravitacional do gradiente de pressão do modelo de fases separadas estariam também resolvidos! Isto é, havendo

$$X^2 = X^2(\alpha) \quad (81)$$

existe também  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha)$ , pois

$$X^2 = \frac{C_L}{C_G} \frac{\dot{W}_L^{2-n} \mu_L^n \rho_G}{\dot{W}_G^{2-m} \mu_G^m \rho_L} \left( \frac{4}{\pi D} \right)^{m-n} \quad (82)$$

e

$$x = \frac{\dot{W}_G}{(\dot{W}_G + \dot{W}_L)} \quad (83)$$

Os gráficos abaixo mostram as correlações experimentais obtidas por Lockhart e Martinelli. Os dados se referem ao escoamento horizontal de uma mistura bifásica de dois componentes (ár/óleo, ár/querozene, ár/benzeno e ár/água) em tubulações de pequeno diâmetro (menor que  $1^{1/2}$ ”) em baixas pressões (máximo de 3 atm). O primeiro gráfico mostra a dependência de  $\mathbf{X}$  com  $\phi_L$  e  $\phi_G$ , para os quatro valores possíveis de  $\mathcal{C}_L$ ,  $\mathcal{C}_G$ ,  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$ , as constantes e potências da correlação de Blasius, as quais dependem do regime de escoamento, se laminar ou turbulento. A parte superior do gráfico mostra a dependência de  $\mathbf{X}$  com  $\alpha$  (e também com  $(1-\alpha)$  no eixo à esquerda). O segundo gráfico é similar, mas foi copiado do “paper” original de L&M. Nele aparecem os pontos experimentais correlacionados para a dependência de  $\mathbf{X}$  com  $\phi_{GH}$  (isto é, o valor de  $\phi_G$  quando as constantes  $\mathcal{C}_L$ ,  $\mathcal{C}_G$ ,  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  referirem-se ao escoamento turbulento de líquido e gás) e de  $\mathbf{X}$  com o “hold-up” de líquido,  $\mathbf{H}_L$ , que é a mesma coisa que  $(1-\alpha)$ .

Vale observar Lockhart e Martinelli não identificaram padrões de escoamentos na base de dados experimental utilizada para correlacionar as variáveis mas, após certo tempo, reprocessando os dados experimentais analisados pelos autores, concluiu-se que a maioria deles correspondia aos escoamentos hoje denominados de “slug flow” e anular. Esta é a razão dos resultados do modelo de L&M ainda hoje serem usados como referência de cálculo para escoamentos horizontais tipo “slug flow” e anular.

Comparação com resultados experimentais divulgados em anos mais recentes que 1949 indicam também que não se obtém valores satisfatórios para a perda de carga aceleracional se a correlação  $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^2(\alpha)$  é utilizada. Sugere-se, então, que o modelo de Lockhart e Martinelli seja aplicado somente para o cálculo do termo de atrito do gradiente de pressão total.

Há ainda que se comentar sobre o fato de que as equações estão dadas em termos genéricos para os valores que as constantes  $\mathcal{C}_L$  e  $\mathcal{C}_G$  podem assumir, assim como as potências  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$ , todos eles relativos à correlação de Blasius, que fornece os valores dos fatores de atrito do gás e do líquido. Estes valores dependem dos regimes de escoamento em que gás e líquido ocorrem na tubulação:

gás → laminar / líquido → laminar  
 gás → laminar / líquido → turbulento  
 gás → turbulento / líquido → laminar  
 gás → turbulento / líquido → turbulento

O critério de classificação assumido por L&M foi:

$Re_{L*} > 2000 \rightarrow$  esc. turbulento

$Re_{G^*} > 2000 \rightarrow$  esc. turbulento  
 $Re_{L^*} < 1000 \rightarrow$  esc. laminar  
 $Re_{G^*} < 1000 \rightarrow$  esc. laminar  
 $1000 < Re_{L^*,G^*} < 2000 \rightarrow$  esc. transição

[Nota: os números de Reynolds devem ser calculados para gás e líquidos escoando sozinhos na tubulação de diâmetro D, com as vazões  $\dot{W}_G$  e  $\dot{W}_L$ .]

Os valores para  $C_L$ ,  $C_G$ ,  $m$  e  $n$  são:

	Escoamento turbulento		Escoamento laminar
líquido	$C_L = 0,046$ $n = 0,2$	líquido	$C_L = 16$ $n = 1$
gás	$C_G = 0,046$ $m = 0,2$	gás	$C_G = 16$ $m = 1$

Há ainda ajustes de curvas propostos para os dados de L&M. Um deles é o de Chisholm (1967):

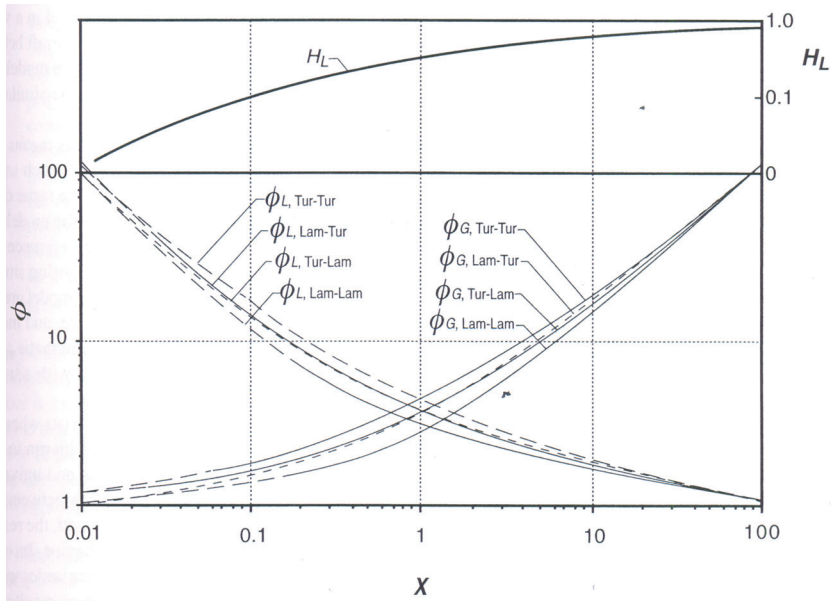
$$\phi_L = 1 + \frac{K}{X} + \frac{1}{X^2} \quad (84)$$

e

$$\alpha = \left(1 + X^{0,8}\right)^{-0,378} \quad (85)$$

Onde:

<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">líquido</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">gás</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">K</span>
<i>turbulento</i>	<i>turbulento</i>	20
<i>laminar</i>	<i>turbulento</i>	12
<i>turbulento</i>	<i>laminar</i>	10
<i>laminar</i>	<i>laminar</i>	5



**Fig. 4** Resultado do modelo de fases separadas (Lokhart e Martinelli, 1949).

## 5. Referências

- Bertola, V.; "Modelling and Experimentation in Two-Phase Flow, Springer-Verlag, New York, 2003;
- Brill, J. P. and Mukherjee, H; "Multiphase Flow in Wells", SPE Monograph Series, Vol. 17, 1999;
- Chisholm, D.; "A teorical Basis for the Lokhart-Martinelli Correlation for Two-Phase Flow", Int. Journal of Heat and Mass Transfer, pp. 1767-1778, 1967;
- Crowe, T. C; "Multiphase Flow Handbook", Taylor&Francis, 2006;
- Hetsoroni, G; "Hadbook of Multiphase Systems", Hemisphere Publishing Corp.; New York, 1982;
- Lockhart, R. W. and Martinelli, R. C.; "Proposed Correlation of Data for Isothermal Two-Phase Two Component Flow in Pipes", Chem. Eng. Progress, Vol. 45, Nro. 1, pp. 39, 1949;
- Shoham, O.; "Mechanistic Modeling of Gás-Liquid Two-Phase Flow in Pipes", SPE Books, 2005;
- Wallis, G. B.; "One-Dimensional Two-Phase Flow", McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, USA, 1969.



# CAPÍTULO 4 - Aspectos fenomenológicos e modelagem de escoamentos bifásicos gás-líquido

**Jader R. Barbosa Jr.**

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina,  
Florianópolis, SC, 88040-900

## Lista de Símbolos

$U_{bs}^*$	Velocidade superficial adimensional modificada para representar as vazões de gás na região da bolha de Taylor
$U_{fs}^*$	Velocidade superficial adimensional modificada para representar as vazões de líquido na região da bolha de Taylor
$U_{sl}$	Velocidade do pistão líquido
$L_{sl}$	Comprimento do pistão líquido
$U_{bs}$	Velocidade ascendente da bolha de Taylor
$K_G$	Número de Kutateladze crítico para o gás
$U_{LS}^*$	Velocidade devido ao fluxo de líquido
$U_{GS,LS}^*$	Velocidades superficiais adimensionais
$Re_{LFC}$	Número de Reynolds crítico para o filme
$On$	Número de Ohnhezoge
$We$	Número de Weber
$Re_G$	Número de Reynolds para o gás
$c_{LF}$	Concentração local do traçador no filme
$c_E$	Concentração média ( <i>bulk</i> )
$\dot{m}_{LFC}$	Fluxo de massa crítico para o filme líquido
$\dot{V}_G$	Vazão volumétrica de gás.
$r_I$	Raio da interface
$r_T$	Raio do tubo
$A_r$	Parâmetro de rugosidade de Nikuradse determinado experimentalmente.
$K_{tp}$	Constante de von Kármán
$\dot{M}_{LF}^+$	Vazão do filme líquido adimensional
$u_{LF}^+$	Velocidade adimensional do filme líquido

$u^*$	Velocidade de atrito
$u_{LF}^+$	Perfil universal de von Kármán
$T_I^+$	Temperatura interfacial adimensional
$q_w''$	Fluxo de calor imposto à parede do tubo
$\bar{T}_w$	Temperatura da parede interna do tubo
$\bar{T}_E$	Temperatura média de mistura
$\tilde{x}_I$	Concentração interfacial do componente mais leve
$\tilde{x}_b$	Concentração média ( <i>bulk</i> ),.
$U_{GS}^*$	Velocidade do gás adimensional,
$f_I$	Coefficiente de atrito interfacial
$Bo$	Número de Bond
$\beta$	Fração de intermitência
$\tilde{V}_G$	Velocidade do gás instantânea
$\tilde{V}_L$	Velocidade do líquido instantânea
$V_{GB}$	Velocidade da bolha de Taylor
$V_{LB}$	Velocidade do filme descendente
$V_0$	Velocidade ascendente de uma bolha de Taylor em um líquido estagnado
$Re_F$	Número de Reynolds do filme descendente
$f_M$	Fator de atrito
$U_M$	Velocidade de mistura
$-\left. \frac{dp}{dz} \right _{f,S}$	Gradiente de pressão devido ao atrito
$f_S$	Fator de atrito no pistão de líquido calculado por meio da relação de Blasius
$x_S$	Fração mássica de gás no pistão de líquido calculada assumindo escoamento homogêneo
$-\left. \frac{dp}{dz} \right _{f,B}$	Termo de atrito na bolha de Taylor
$-\left. \frac{dp}{dz} \right _f$	Termo de atrito médio
$\bar{T}_w$	Temperatura média da parede
$\bar{T}_{w,f}$	Temperatura média da parede nas regiões do filme descendente
$\bar{T}_{w,S}$	Temperatura média da parede nas regiões do pistão de líquido
- e	Fração entranhada

$C$	Concentração de gotículas no núcleo
$C_E$	Concentração de equilíbrio
$D$	Taxa de deposição de gotículas
$d_a$	Diâmetro externo
$DF$	Sub-índices que representa o transporte das gotas para o filme
$d_o$	Diâmetro interno
$-dp/dz$	Gradiente de pressão
$d_T$	Diâmetro interno do tubo
$E$	Taxa de entranhamento
$F_D$	Força de arraste por unidade de volume exercida pelo gás sobre as gotas
$FD$	Sub-índices que representa o transporte do filme para as gotas
$f_I$	Coefficiente de atrito interfacial
$f_M$	Fator de atrito
$f_{sc}$	Coefficiente de atrito para o escoamento monofásico em um tubo
$g$	Aceleração da gravidade
$k_D$	Coefficiente de deposição
$L_e$	Relação para o comprimento da região de entrada
$L_{sl}$	Comprimento do pistão de líquido
$L_{TB}$	Comprimento da bolha de Taylor
$L_u$	Comprimento da célula unitária.
$m$	Fator que leva em consideração o comprimento da bolha de Taylor
$P_I$	Perímetro interfacial
$P_w$	Perímetro da parede do tubo
$u$	Velocidade local
$U_C$	Velocidade do núcleo homogêneo
$U_M$	Velocidade de mistura ou a soma das velocidades superficiais das duas fases
$X$	Título
$y^+$	Coordenada $y = r_T - r$ dimensional
$z$	Distância da entrada do tubo

### Símbolos gregos

$\mathcal{E}$	Fração de vazio média global
$\mathcal{E}_{TB}$	Fração de vazio média na região da bolha de Taylor
$\frac{\eta_L}{\eta_G} \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L}}$	Função fraca do grupo
$\mathcal{E}_k$	Fração da seção transversal do tubo (de área A) ocupada por cada campo
$\xi_e$	Altura efetiva da rugosidade
$\overline{\alpha}$	Coefficiente de transferência de calor na mudança de fase de misturas
$\tau_{wL}$	Tensão de cisalhamento média (supõe-se que somente o líquido entra em contato com a parede)
$\tau_I$	Tensão de cisalhamento interfacial média

$\beta$	Fração de intermitência
$\tilde{\epsilon}$	Fração de vazio instantânea
$\epsilon_S$	Fração de vazio no pistão de líquido
$\mathcal{E}_S$	Fração de vazio no pistão de líquido
$\rho_S$	Densidade equivalente do pistão
$\eta_S$	Viscosidade equivalente
$\mathcal{E}$	Fração de vazio média
$\bar{\alpha}_{fc,f}$	Termo associados à convecção forçada e nas regiões do filme descendente
$\bar{\alpha}_{fc,S}$	Termo associados à convecção forçada nas regiões do pistão de líquido
$\bar{\alpha}_{nb,f}$	Termos de ebulição nucleada nas regiões do filme descendente
$\bar{\alpha}_{nb,S}$	Termos de ebulição nucleada nas regiões do pistão de líquido
$-\beta_k$	Fator de correção do perfil de velocidades e $\epsilon$ , onde os, respectivamente
$\delta$	Espessura do filme descendente
$\delta$	Espessura do filme líquido
$\delta^+$	Espessura do filme adimensional
$\Delta h_v$	Entalpia de vaporização
$\epsilon_{crit}$	Fração volumétrica de gás crítica
$\epsilon_L$	Fração volumétrica de líquido
$\epsilon_{max}$	Fração de empacotamento máxima
$\epsilon_{sl}$	Fração de vazio no pistão de líquido
$\zeta$	Rugosidade equivalente do filme líquido
$\rho_C$	Densidade do núcleo homogêneo.
$\rho_C$	Densidade do núcleo homogêneo
$\varphi$	Inclinação com a horizontal

## 1. Introdução

Escoamentos bifásicos fluido-fluido (gás-líquido, líquido-líquido) são amplamente encontrados em aplicações de engenharia e em fenômenos naturais. A pluralidade de escalas de tempo e comprimento encontrada em escoamentos multifásicos faz com que a correta interpretação e a capacidade de se prever os fenômenos envolvidos nessas escalas sejam desafios constantes aos físicos e engenheiros que se dedicam a esta importante área da Mecânica dos Meios Contínuos.

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos básicos sobre escoamentos bifásicos de dois fluidos. Devido à riqueza e extensão do tema, não seria possível cobrir todos os aspectos relevantes em um documento de tamanho razoável. Dessa forma, optou-se pelo enfoque em alguns tipos particulares destes escoamentos com aplicação prática amplamente reconhecida, a saber, escoamentos gás-líquido em canais verticais com altas frações volumétricas de gás. Tais

condições correspondem aos padrões de escoamento *slug*, *churn* e anular (Collier e Thome, 1994).

O capítulo é dividido em quatro seções. Na Seção 2, é apresentada a classificação dos padrões de escoamento, com uma abordagem fenomenológica tanto para a descrição dos principais padrões de altas frações de gás (*slug*, *churn* e anular) quanto para os critérios de transição entre eles. As Seções 3, 4 e 5 lidam individualmente com cada padrão de escoamento, em ordem decrescente do conteúdo relativo de gás, ou seja, a Seção 3 descreve o escoamento anular, a Seção 4 o padrão *churn* e a Seção 5 o padrão *slug*. Em cada uma delas, tanto a descrição fenomenológica quanto a modelagem matemática dos padrões em questão são abordadas, incluindo informações complementares sobre transferência de calor e de massa naqueles escoamentos.

## 2. Classificação dos padrões de escoamento

### 2.1. Definições

Entende-se por padrão de escoamento a configuração interfacial (topologia) das fases em um determinado escoamento multifásico. Padrões de escoamento são definidos por balanços de forças (de campo e de superfície) locais no interior de cada fase e nas interfaces entre elas. Para uma aceleração da gravidade especificada, tais forças dependem, em maior ou menor intensidade, de parâmetros associados à *geometria* (inclinação do canal, diâmetro, rugosidade da parede do canal), ao *escoamento* (velocidades das fases, frações mássicas) e ao *fluido* (propriedades termofísicas, como densidade, viscosidade e tensão superficial). Transições entre padrões de escoamento acontecem quando o regime existente se torna instável devido a uma mudança brusca ou gradual de um parâmetro geométrico e/ou de uma propriedade do escoamento, ou do próprio fluido (neste último caso, por exemplo, em decorrência de transferência de calor de ou para o escoamento). Mediante a transição de um padrão para outro, uma nova topologia das fases é estabelecida, na qual diferentes mecanismos ditam o equilíbrio de forças local.

A caracterização de padrões de escoamento é um tema central e clássico na ciência e na prática dos escoamentos multifásicos. Métodos de cálculo e até de projeto de sistemas multifásicos dependem fortemente de uma correta interpretação da fenomenologia do escoamento. Por exemplo, a aplicabilidade de uma determinada tecnologia de medição de vazão ou de bombeio multifásico na indústria do petróleo é diretamente condicionada à existência de um ou mais padrões de escoamento. O mesmo pode ser dito a respeito de trocadores de calor para a indústria de processos e refrigeração, e com relação a reatores químicos e biológi-

cos, os quais são projetados para trabalhar mediante a existência de um determinado padrão de escoamento para que se atinjam condições de melhor desempenho.

Problemas envolvendo escoamentos multifásicos em engenharia contemplam dois fenômenos complexos: a turbulência em cada uma das fases e a dinâmica das interfaces entre elas. A fim de melhor compreender os mecanismos físicos e fornecer soluções confiáveis e econômicas para tais problemas, vários métodos de classificação de escoamentos baseados tanto em estudos experimentais quanto teóricos foram desenvolvidos ao longo das últimas décadas.

Uma forma natural de lidar com problemas de escoamentos de duas fases é relacioná-los de alguma forma a um escoamento monofásico equivalente. Por exemplo, o *modelo homogêneo* trata a mistura de duas fases como um fluido monofásico com propriedades físicas médias. Outros exemplos são os modelos pioneiros de Martinelli e colaboradores (Martinelli e Nelson, 1948; Lockhart e Martinelli, 1949) que propuseram a correlação da queda de pressão devida ao atrito por meio de um multiplicador bifásico para a queda de pressão em um escoamento equivalente de uma única fase (seja ela baseada no fluxo de massa total ou de uma fase individualmente).

Em alguns casos, o nível de exatidão pretendido para a solução de um dado problema requer o conhecimento detalhado da configuração interfacial em função das propriedades do escoamento. A definição de um padrão de escoamento é uma forma de se classificar, com base em critérios subjetivos e objetivos, as várias configurações interfaciais existentes em escoamentos internos de misturas multifásicas. Técnicas experimentais adaptadas e/ou desenvolvidas especificamente para caracterizar os padrões de escoamento multifásico são apresentadas por Hewitt (1978) e Hammer et al. (2006).

Os padrões de escoamento bifásico gás-líquido vertical ascendente mais comuns são mostrados na Fig. 1. Em ordem crescente de título mássico — que é a fração mássica dinâmica da fase gás — os padrões são os seguintes: bolhas, pistonado (*plug* ou *slug*), agitado (*churn*), anular e anular de altos fluxos (*wispy-annular*). Uma descrição qualitativa dos padrões de escoamento é apresentada por Collier e Thome (1994)<sup>1</sup>, conforme a seguir:

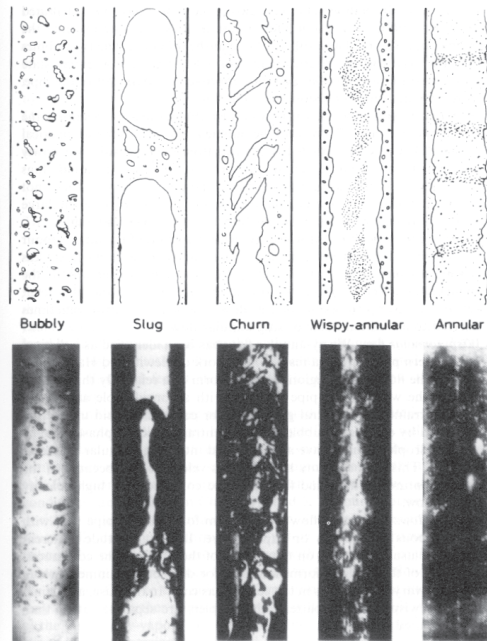
1. **Bolhas.** O gás ou vapor apresenta-se disperso sob a forma de bolhas na fase líquida contínua. Os espectros de tamanhos e formatos e a distribuição espacial das bolhas depende de fatores como o modo com que as mesmas foram introduzidas ou geradas na fase contínua e do regime de escoamento (laminar ou turbulento);
2. **Slug.** O gás escoava como bolhas alongadas (bolhas de Taylor) resultantes da coalescência de bolhas menores à medida que se aumenta a vazão de gás. Ao redor das bolhas de Taylor, o filme de líquido escoava na descendente. Separando bolhas de Taylor consecutivas, pistões de líquido (que

---

<sup>1</sup> Outros padrões de escoamento também podem ser identificados, como o padrão em névoa, onde o líquido apresenta-se disperso sob a forma de gotículas em um núcleo de gás ou vapor.

podem conter certa quantidade de gás na forma de bolhas dispersas) escoam na ascendente, sendo responsáveis pelo fluxo líquido dessa fase;

3. **Churn.** O gás escoo na ascendente e o líquido, deslocado para a parede do canal, escoo de forma caótica, ora na descendente ora na ascendente, uma vez que o fluxo de gás ainda não é suficientemente elevado para arrastar o líquido continuamente em direção ao topo do canal (daí a terminologia “agitado”). O transporte do líquido é realizado por meio de grandes ondas que se deslocam sobre um substrato de líquido. A Seção 4 apresenta uma análise dos trabalhos realizados no padrão de escoamento *churn*;



**Fig. 1** Padrões de escoamento gás-líquido em tubos verticais (Collier and Thome, 1994).

4. **Anular.** Este é o padrão de escoamento que ocorre com maior frequência em aplicações industriais, cobrindo uma faixa de valores de título mássico que vai de menos do que dez por cento até próximo de cem por cento. O líquido escoo como um filme fino que reveste a parede do tubo, e a fase gasosa escoo pelo núcleo central. A interface do filme é coberta por ondas capilares (pequeno comprimento de onda, pequena amplitude) e ondas de perturbação<sup>2</sup> (comprimento de onda de onda mais longo, maior amplitude). Ondas de perturbação se deslocam com velocidades superiores à do filme líquido e têm amplitude muitas vezes maior do que a espessura mé-

<sup>2</sup> Do inglês: disturbance waves.

dia do filme. Elas também são a principal fonte de entranhamento de líquido, um processo pelo qual pequenas gotas de líquido são formadas pelo cisalhamento do gás sobre as cristas das ondas. Após escoarem ao longo do canal arrastadas pelo gás, as gotículas podem se depositar novamente no filme líquido em uma posição a jusante daquela onde ocorreu o seu entranhamento. A este processo contínuo de transporte de massa de líquido entre o filme e o núcleo, dá-se o nome de entranhamento e deposição, sendo essa uma das características mais marcantes do padrão de escoamento anular. Uma descrição mais detalhada do regime anular é apresentada na Seção 3;

5. **Wispy-annular.** O escoamento nesta padrão assume a forma de filme líquido relativamente espesso adjacente às paredes do tubo, juntamente com uma quantidade considerável de líquido que é arrastado em um núcleo central de gás. Observa-se a presença de pequenas bolhas no filme de líquido e, devido à elevada vazão de líquido, o líquido entranhado toma a forma de grandes filamentos e aglomerados de gotículas (*wisps*).

Conforme visto em capítulos anteriores deste livro, os padrões de escoamento podem ser representados em um gráfico bidimensional denominado mapa de regimes (ou de fluxos, ou de padrões) bifásicos. Os padrões de fluxo ocupam regiões do mapa no qual as coordenadas são as velocidades superficiais (velocidade média que teria cada fase se sozinha escoasse no tubo) ou parâmetros mais gerais que comumente contêm essas velocidades. Um exemplo de um mapa de regimes para o escoamento vertical foi proposto por Hewitt e Roberts (1969) (ver Fig. 2) a partir de observações de escoamentos a baixa pressão de ar e água e a alta pressão de água e vapor d'água em tubos circulares com diâmetro interno variando entre 10 e 30 mm. Discussões mais aprofundadas sobre mapas de regime bifásico gás-líquido e líquido-líquido podem ser encontradas nas monografias de Brennen (2005), Shoham (2006) e Oliemans e Pots (2006), além dos textos clássicos de Collier e Thome (1994) e Wallis (1969).

Deve ficar claro, entretanto, que os mapas de regimes simplesmente se prestam a delinear limites aproximados para as transições. Devido à complexidade dos fenômenos envolvidos, as transições envolvidas em um determinado escoamento são regidas por uma série de parâmetros, de modo que uma abordagem mais refinada se faz necessária para tratar individualmente cada transição, com base em critérios fundamentados em aspectos fenomenológicos. Uma descrição dos critérios de transição entre os diversos regimes de escoamento bifásico vertical ascendente mais amplamente usados é efetuada na próxima seção.



## 2.2. Transições entre padrões de fluxo

Como visto anteriormente, a classificação de padrões de fluxo pode envolver aspectos subjetivos, como a inspeção visual, por exemplo. Uma forma mais científica e criteriosa de estabelecer limites entre os padrões de fluxo envolve a medição de propriedades do escoamento, tais como a fração volumétrica das fases e suas velocidades, visando eventuais aplicações em critérios objetivos que correlacionem uma determinada mudança de regime. Um apanhado das técnicas experimentais utilizadas para medir estes parâmetros pode ser encontrada nos textos de Hewitt (1978) e Hammer et al. (2006). O estudo da transição entre padrões de fluxo é tradicionalmente uma área de ativa pesquisa em escoamentos multifásicos. Ao longo dos anos, diversos estudos foram desenvolvidos a fim de descrever com precisão os fenômenos associados à transições de padrão gás-líquido. Um resumo dos casos de interesse para este texto é apresentado a seguir.

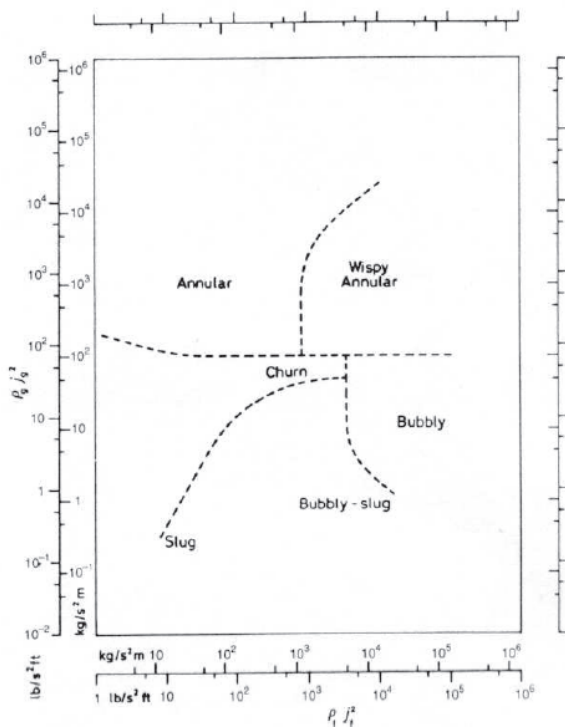


Fig. 2 O mapa de padrões de Hewitt e Roberts (1969).

### 2.2.1. Transição entre os regimes em bolhas e slug.

Possivelmente, o critério objetivo mais adequado para corroborar a transição entre os padrões em bolhas e *slug* é aquele baseado na fração volumétrica de gás crítica,  $\varepsilon_{crit}$ . Tal ideia foi proposta por Taitel et al. (1980) e por Mishima e Ishii (1984), que sugeriram  $\varepsilon_{crit} = 0,25$  e  $\varepsilon_{crit} = 0,30$ , respectivamente. Abordagens mais sofisticadas foram propostas por Pauchon e Banerjee (1986) e por Lu e Zhang (1994). Pauchon e Banerjee postularam que a transição está relacionada à formação de ‘ondas fração de vazio’<sup>3</sup> (ou seja, regiões de alta concentração de gás nas quais a coalescência é intensificada). Os autores usaram uma formulação de dois fluidos invíscidos para determinar a velocidade de propagação das perturbações por meio do método das características e previram que a transição bolhas/*slug* ocorre quando  $\varepsilon_{crit} = 0,26$ . Outros importantes trabalhos no assunto, seguindo esta mesma linha, foram apresentados por Biesheuvel e Gorissen (1990) e Bouré (1997). Lu e Zhang (1994) postularam que a transição acontece quando a densidade de área interfacial (ou seja, a área da superfície interfacial por unidade de volume) alcança um máximo. A análise se baseou numa combinação de equações de conservação da quantidade de movimento unidimensional para ambas as fases, onde foram consideradas as hipóteses de fluxo em regime-permanente, escoamento plenamente desenvolvido, além de relações de fechamento para o diâmetro da bolha, coeficiente de arrasto etc. O modelo de Lu e Zhang forneceu um valor de transição de  $\varepsilon_{crit} = 0,30$  para o escoamento de R-12 em condições adiabáticas. Mais recentemente, Zhang et al. (2003) propuseram um modelo para calcular a retenção de líquido<sup>4</sup> no escoamento no regime *slug* para toda a faixa de inclinação do tubo. O modelo se baseou em um balanço entre a energia cinética turbulenta da fase líquida e a energia livre de superfície de bolhas esféricas dispersas, e foi usado para correlacionar a transição entre os regimes de bolhas dispersas e *slug* para diversas inclinações. Uma revisão recente e abrangente da literatura sobre esta transição é apresentada por Azzopardi (2006).

### 2.2.2. Transição entre os regimes *slug* e *churn*.

Basicamente, existem quatro teorias principais para explicar esta transição em tubos verticais. Dukler e Taitel (1986), tratam o regime agitado (*churn flow*) como um fenômeno de entrada hidrodinâmica. Para eles, trata-se de um escoamento pistonado instável — com bolhas de Taylor e pistões de líquido (*slugs*) curtos — que irão evoluir para um regime pistonado estável à medida que se coalescem as bolhas de Taylor. Dukler e Taitel propuseram a seguinte relação para o comprimento da região de entrada,  $L_e$ , necessário para formar *slugs* estáveis,

---

<sup>3</sup> Do inglês: void waves.

<sup>4</sup> Do inglês: liquid hold-up.

$$L_e = 42,6d_T \left[ \frac{U_M}{(gd_T)^{0,5}} + 0,29 \right] \quad (1)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $U_M$  é a velocidade de mistura, ou seja, a soma das velocidades superficiais das duas fases e  $d_T$  é o diâmetro interno do tubo.

Este critério de transição parece basear-se fortemente em observações visuais do padrão de escoamento. Além disso, a avaliação da validade de tal modelo é complicada devido a um desacordo com relação à definição do regime de transição. Como será visto adiante, o tipo de padrão que Dukler e colaboradores reconheciam como *churn flow* certamente não é o mesmo que Hewitt e colaboradores definem pelo mesmo termo. Este problema semântico será esclarecido posteriormente.

A segunda linha de pensamento (Brauner e Barnea, 1986) atribui o colapso do padrão *slug* ao aeramento excessivo do pistão de líquido. Em outras palavras, à medida que se aumenta a velocidade superficial do gás, a fração de vazio média no pistão de líquido atinge um valor crítico que leva a um colapso do pistão devido à coalescência das bolhas. Admite-se neste modelo que a transição para o padrão *churn* acontece quando a fração de vazio no pistão de líquido,  $\varepsilon_{sl}$ , é maior que uma fração de empacotamento máxima, tomada como  $\varepsilon_{max} = 0,52$ . Brauner e Barnea fornecem a seguinte expressão para a fração de vazio no pistão de líquido,

$$\varepsilon_{sl} = 0,058 \left[ d_c \left( \frac{2f_M U_M^3}{d_T} \right)^{0,4} \left( \frac{\rho_L}{\sigma} \right)^{0,6} - 0,725 \right]^2 \quad (2)$$

onde,

$$d_c = \min[d_{c,disp}, d_{c,buoy}] \quad (3)$$

$$d_{c,disp} = 2 \left( \frac{0,4\sigma}{g\Delta\rho} \right)^{0,5} \quad (4)$$

$$d_{c,buoy} = \frac{3\rho_L f_M U_M^2}{8g\Delta\rho \cos\varphi} \quad (5)$$

onde  $\varphi$  é a inclinação com a horizontal e  $\Delta\rho = \rho_L - \rho_G$ . O fator de atrito  $f_M$  é dado por,

$$f_M = 0,046 \left( \frac{v_L}{U_M d_T} \right)^{0,2} \quad (6)$$

A terceira abordagem (Mishima e Ishii, 1984; Chen e Brill, 1997) atribui a transição para o regime *churn* ao colapso de pistões de líquido relativamente curtos e bastante aerados, o qual é causado por instabilidades nas esteiras das bolhas de Taylor. Segundo Mishima e Ishii (1984), a transição *slug/churn* ocorre quando,

$$\mathcal{E} > \mathcal{E}_{TB} \quad (7)$$

onde  $\mathcal{E}$  é a fração de vazio média global e  $\mathcal{E}_{TB}$  é a fração de vazio média na região da bolha de Taylor, a qual é dada por,

$$\mathcal{E}_{TB} = 1 - 0,813 \left[ \frac{(C_0 - 1)U_M + 0,35 \left( \frac{\Delta \rho g d_T}{\rho_L} \right)^{0,5}}{U_M + 0,75 \left( \frac{\Delta \rho g d_T}{\rho_L} \right)^{0,5} \left( \frac{\Delta \rho g d_T^3 \rho_L}{\eta_L^2} \right)^{\frac{1}{18}}} \right]^{0,75} \quad (8)$$

A fração de vazio média global é avaliada por meio de um modelo de deslizamento (*drift-flux*) pela seguinte expressão,

$$\mathcal{E} = \frac{U_{GS}}{\left[ C_0 U_M + 0,35 \left( \frac{g d_T \Delta \rho}{\rho_L} \right)^{0,5} \right]} \quad (9)$$

onde  $C_0 = 1,2 - 0,2 \left( \frac{\rho_G}{\rho_L} \right)^{0,5}$  para tubos circulares.

Chen e Brill (1997) propõem que a transição para o regime *churn* acontece quando,

$$\frac{L_{sl}}{L_u} < 0,15 \quad (10)$$

e,

$$\mathcal{E}_{sl} > 0,52 \quad (11)$$

onde  $L_{sl}$  é o comprimento do pistão de líquido e  $L_u$  é o comprimento da célula unitária (pistão e bolha de Taylor).  $\varepsilon_{sl}$  é a fração de vazio no pistão de líquido.

A quarta teoria (Nicklin e Davidson, 1962; McQuillan e Whalley, 1985; Jayanti e Hewitt, 1992) atribui a transição pistonado/agitado ao fenômeno de *flooding* na bolha de Taylor. Fisicamente, o fenômeno de *flooding* corresponde ao valor limite do fluxo ascendente de gás acima do qual não é possível o escoamento do filme na descendente. A conexão entre *flooding* e o escoamento no regime *churn* será apresentada posteriormente na Seção 4.

O modelo proposto por Jayanti e Hewitt (1992) para a transição *slug/churn* é apresentado abaixo. Trata-se de um aperfeiçoamento da metodologia apresentada por McQuillan e Whalley (1985), já que incorpora o efeito do comprimento da bolha de Taylor e leva em conta a turbulência no filme descendente ao redor da bolha de Taylor. De acordo com Jayanti e Hewitt (1992), a transição acontece quando,

$$\left(U_{bs}^*\right)^{0,5} + m\left(U_{fs}^*\right)^{0,5} > 1 \quad (12)$$

onde  $U_{bs}^*$  e  $U_{fs}^*$  são velocidades superficiais adimensionais modificadas para representar as vazões de gás e de líquido na região da bolha de Taylor.  $m$  é um fator que leva em consideração o comprimento da bolha de Taylor. As velocidades adimensionais são dadas por,

$$U_{bs}^* = U_{bs} \left[ \frac{\rho_G}{gd_T \Delta \rho} \right]^{0,5} \quad (13)$$

$$U_{fs}^* = U_{fs} \left[ \frac{\rho_L}{gd_T \Delta \rho} \right]^{0,5} \quad (14)$$

onde,

$$U_{bs} = \left[ 1 - \frac{4\delta}{d_T} \right] \left[ 1,2U_M + 0,35 \left( \frac{gd_T \Delta \rho}{\rho_L} \right)^{0,5} \right] \quad (15)$$

$$U_{fs} = U_{bs} - U_M \quad (16)$$

$$m = \begin{cases} 1 & ; \text{se } \frac{L_{TB}}{d_T} > 120 \\ 0,1928 + 0,01089 \frac{L_{TB}}{d_T} - 3,754 \times 10^{-5} \left( \frac{L_{TB}}{d_T} \right)^2 & ; \text{se } \frac{L_{TB}}{d_T} \leq 120 \end{cases} \quad (17)$$

$L_{TB}$  é o comprimento da bolha de Taylor calculado por meio de um balanço de massa na fase líquida,

$$U_{LS} = U_{sl} (1 - \varepsilon_{sl}) \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_{TB}} - U_{fs} \frac{L_{sl}}{L_{sl} + L_{TB}} \quad (18)$$

onde  $U_{sl}$  é a velocidade do pistão líquido,  $L_{sl}$  é o seu comprimento e  $\varepsilon_{sl}$  é a fração de vazio no pistão líquido. Jayanti e Hewitt (1992) sugerem que próximo da transição,  $U_{sl} = U_M$ ,  $L_{sl} = 12d_T$  e  $\varepsilon_{sl} = 0,5$ . Uma equação adicional relacionando a espessura do filme descendente  $\delta$  e a velocidade  $U_{fs}$  se faz necessária. Jayanti e Hewitt (1992) utilizaram a correlação de Brotz (1954),

$$U_{fs} = 39.66 \frac{\delta}{d_T} \left\{ g d_T \frac{\Delta\rho}{\rho_L} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{4\delta}{d_T} \right)^{0,5} \right] \right\}^{0,5} \quad (19)$$

Jayanti e Brauner (1994) avaliaram o desempenho dos métodos acima usando os dados experimentais obtidos por Owen (1986) para o escoamento bifásico de uma mistura de ar e água em um tubo vertical de 20 m de comprimento e diâmetro interno de 31,8 mm, sob condições adiabáticas. Jayanti e Brauner comentam que o modelo de Taitel e Dukler (1986) previu que o padrão *churn* desaparece após comprimentos entre 200 e 360 vezes o diâmetro do tubo. Owen, no entanto, observou o padrão *churn* em sua seção de testes posicionada 625 diâmetros a jusante do ponto de injeção. As previsões do modelo Brauner e Barnea (1986) concordam com os dados experimentais de Owen apenas para as mais altas vazões totais. Jayanti e Brauner (1994) atribuíram este fato a uma limitação do modelo de Brauner e Barnea em prever a fração volumétrica de gás em pistões curtos. Porém, isso não descarta a ideia do aeramento excessivo do pistão ser um mecanismo de transição *slug/churn*. O modelo de Jayanti e Hewitt (1992), por outro lado, apresenta uma concordância previsão muito melhor com os dados do que o modelo de McQuillan e Whalley (1985) para toda a gama de vazões de líquido, o que pode ser justificado pela inclusão parâmetro que leva em conta o efeito do comprimento da coluna definido pela Eq. (17).

Watson e Hewitt (1999) investigaram experimentalmente o efeito da pressão sobre a transição *slug/churn* e concluíram que a velocidade superficial do gás necessária para deflagar a transição decresce com a pressão. Eles compararam seus

dados experimentais com os critérios apresentados acima e demonstraram que o melhor comportamento foi o do modelo de Jayanti e Hewitt (1992).

Resultados experimentais obtidos em canais anulares verticais (Das et al., 1999a) reforçaram os indícios de que o fenômeno de *flooding* na bolha de Taylor é o principal mecanismo responsável pela transição *slug/churn*. Em canais anulares, a transição é caracterizada pelo colapso do chamado padrão *slug* assimétrico (em canais anulares, a seção transversal das bolhas de Taylor se apresenta na forma de anéis abertos) e pelo restabelecimento da simetria na distribuição das fases no canal. Os autores concluem, portanto, que a transição *slug/churn* se inicia na bolha de Taylor e que fenômenos associados ao pistão de líquido, como a coalescência de bolhas (Barnea e Brauner, 1986) e efeitos de esteira da bolha de Taylor (Mishima e Ishii, 1984; Chen e Brill, 1997) não justificam o mecanismo de transição. Observações diretas do escoamento ao longo da seção de testes realizadas por Das et al. (1999a) também descartaram a interpretação baseada no efeito de entrada (Taitel et al., 1980). Por outro lado, observações visuais do alongamento e do colapso das bolhas de Taylor em função do fluxo de gás favorecem a validade do modelo de Jayanti e Hewitt (1992). Uma boa concordância com os dados experimentais foi obtida com este modelo, o qual foi adaptado para a geometria do canal anular. As modificações realizadas por Das et al. (1999b) foram as seguintes: (i) O comprimento característico na definição da velocidade superficial adimensional no canal anular é  $(d_o + d_a)$ , onde  $d_o$  e  $d_a$  são os diâmetros interno e externo, respectivamente; (ii) A velocidade ascendente da bolha de Taylor é dada por,

$$U_{bs} = 1,2U_M + 0,323\sqrt{g(d_o + d_a)} \quad (20)$$

e (iii) a constante de *flooding* (Eq. 12) é admitida como 0,85.

Mais recentemente, Guedes de Carvalho et al. (2000) e Guedes de Carvalho (2006) confirmaram, por meio de experimentos de visualização do escoamento ascendente de bolhas de Taylor em tubos verticais, que o mecanismo de *flooding* na bolha alongada é o responsável pela transição para o padrão *churn*, visto que fica demonstrado pelas sequências de vídeos apresentadas que na região inferior das bolhas o filme líquido é arrastado pelo gás, o que leva a uma desestruturação do pistão de líquido logo abaixo.

### 2.2.3. Transição entre os regimes *churn* e anular.

Partindo de uma condição estabilizada do escoamento no regime *churn*, à medida que a velocidade superficial do gás aumenta, a tensão de cisalhamento interfacial torna-se significativa e as alternâncias no sentido do escoamento do filme líquido deixam de existir. O filme líquido se torna mais fino, o fluxo se torna unidirecional, a interface do filme se torna rugosa pelo passagem de ondas de perturbação e o gradiente de pressão passa a aumentar monotonicamente com o aumento da velocidade superficial do gás. Todos estes fenômenos caracterizam o padrão

anular e uma série de definições para a transição para este regime pode surgir destes processos, por exemplo: (i) o ponto de reversão total do escoamento, isto é, o ponto em que a vazão de gás é suficiente para carregar todo o líquido na ascendente; (ii) o ponto de mínima queda de pressão (a ser discutido mais adiante), que existe devido à tendência do gradiente de pressão em diminuir com a vazão de gás na região do padrão *churn* totalmente desenvolvido; (iii) a condição de tensão de cisalhamento na parede média igual a zero, já que esta é negativa para o padrão *churn* e positiva para o anular; e (iv) no ponto em que a tensão de cisalhamento na parede local se torna continuamente positiva, o que deve ocorrer quando o escoamento no filme líquido é inteiramente unidirecional.

De todos os critérios acima, a condição de reversão do escoamento é a mais comumente usada devido à sua fácil observação experimental e simplicidade das relações que a definem. As condições envolvendo a tensão de cisalhamento na parede são difíceis de se avaliar uma vez que exigem medições detalhadas próximo à parede. O critério do mínimo gradiente de pressão é um tanto duvidoso. Como será visto na Seção 3, para algumas condições, o ponto de mínima queda de pressão ocorre quando o escoamento anular se encontra totalmente desenvolvido, e observações visuais das transições entre os regimes observadas por Owen (1986) suportam este argumento. Além disso, o gradiente de pressão também inclui a componente gravitacional e, por isso, não inteiramente reflete o comportamento de fricção ou interfacial.

Taitel et al. (1980) reconhecem, da mesma forma que Turner et al. (1969), que a transição para o padrão anular é regida pelo comportamento das gotículas entranhadas. Logo, a velocidade limitante do gás, ou seja, a velocidade do gás na qual as gotículas arrastadas tornam-se suspensas, é dada pelo critério de Pushkina e Sorokin (1969) para o número de Kutateladze crítico para o gás dado por,

$$K_G = 3,2 \quad (21)$$

onde

$$K_G = U_{GS} \frac{\sqrt{\rho_G}}{[g\sigma(\rho_L - \rho_G)]^{1/4}} \quad (22)$$

Um critério mais utilizado é aquele proposto por Hewitt e Wallis (1963) (ver também Wallis, 1969), o qual usa a correlação para *flooding* dada por,

$$\left(U_{GS}^*\right)^{0,5} + \left(U_{LS}^*\right)^{0,5} \approx 1 \quad (23)$$

onde, na transição, o termo devido ao fluxo de líquido,  $U_{LS}^*$ , é igual a zero. As velocidades superficiais adimensionais na Eq. (23) são dadas por,



$$U_{GS,LS}^* = U_{GS,LS} \sqrt{\frac{\rho_{G,L}}{gd_T(\rho_L - \rho_G)}} \quad (24)$$

Whalley (1996) apresenta uma análise simplificada, porém ilustrativa, das correlações para a transição para o escoamento anular.

#### 2.2.4. Transição entre os regimes anular e *wispy-annular*.

Wallis (1969) sugere, baseado em medições com sensores elétricos dos aglomerados de líquido na região do núcleo de gás, que um critério para esta transição é,

$$U_{GS} = \left( 7 + 0,06 \frac{\rho_L}{\rho_G} \right) U_{LS} \quad (25)$$

para casos onde  $U_{LS}^* > 1,5$ . De acordo com Collier e Thome (1994), o regime anular de altos fluxos (*wispy-annular*) corresponde à região em que  $U_{GS}^*$  é maior do que a unidade e  $U_{LS}^*$  é maior do que 2,5 a 3.

### 3. Escoamento no padrão anular

O regime anular é, de todos os padrões, o mais importante devido à sua ampla aplicação prática. Na maioria dos casos de interesse, o escoamento é turbulento nas duas fases e uma grande quantidade de líquido é arrastada sob a forma de gotículas no núcleo do vapor. A compreensão do processo de geração de gotículas e seu comportamento enquanto se deslocam no núcleo são parâmetros-chave para o desenvolvimento de modelos hidrodinâmicos e de transferência de calor o padrão anular.

O “escoamento anular ideal”, ou seja, aquele em que as fases líquida e gasosa se encontram totalmente separadas (zero entranhamento) e a interface é *lisa*, raramente ocorre na prática. Isso ocorre porque na maioria dos casos as vazões de gás são suficientemente altas para acionar o aparecimento de ondas interfaciais e o entranhamento de gotículas no núcleo do gás. Os trabalhos pioneiros de Levy (1952), Calvert e Williams (1955), Anderson e Mantzouranis (1960) e Hewitt (1961) — este último uma extensão para o caso ascendente da análise de Dukler (1960) para filmes descendentes — apresentaram soluções analíticas para este caso. Apesar de sua aplicabilidade limitada, estes estudos foram valiosos pois introduziram conceitos básicos, como a relação triangular (Hewitt, 1961), que são utilizados em modelos fenomenológicos até esta data.

### 3.1. O filme líquido no escoamento anular

A estrutura do filme de líquido no escoamento anular é bastante complexa, já que são amplos os espectros de comprimento de onda e amplitude das ondulações presentes. As ondulações de pequeno comprimento de onda estão presentes em praticamente todas as combinações de vazões de gás e de líquido. Entretanto, acima de um valor crítico do número de Reynolds do filme líquido, ondas de grande comprimento de onda e amplitude começam a se formar. Como visto anteriormente, a essas ondas dá-se o nome de ondas de perturbação (*disturbance waves*), e várias das suas características únicas podem ser listadas a seguir (Levy, 1999):

1. A razão entre a amplitude das ondas e a espessura média do filme líquido é da ordem de 5;
2. A velocidade das ondas de perturbação é, de uma maneira geral, igual a dez por cento da velocidade superficial do gás;
3. A superfície das ondas é altamente rugosa;
4. comprimento de onda é muitas vezes maior do que a amplitude;
5. espaçamento entre as ondas não é uniforme, o que dá origem a uma distribuição de frequências com múltiplos picos. O espaçamento decresce à medida que as vazões de líquido e de gás aumentam;
6. A frequência das ondas é inicialmente alta (próximo ao injetor de líquido), porém diminui à medida que as ondas coalescem;
7. Uma onda nunca ultrapassa outra onda. A coalescência de ondas dá origem a uma onda maior e mais veloz, mas que se desacelera ao longo do tubo.

Acredita-se que as ondas de perturbação são criadas a partir do mesmo mecanismo que dá origem ao fenômeno conhecido como *turbulent bursts* em camadas limite turbulentas monofásicas. Martin e Azzopardi (1985) compararam as frequências iniciais das ondas observadas no escoamento anular vertical com aquela dos *turbulent bursts* no escoamento monofásico de água. A Tabela 1 resume o comportamento das ondas de perturbação em resposta a alterações nos parâmetros do escoamento (Wolf, 1995). Informações mais detalhadas acerca do comportamento das ondas de perturbação no escoamento anular podem ser encontradas na monografia de Azzopardi (2006).

Um estudo detalhado sobre a estrutura do filme líquido no escoamento anular verticais foi realizado por Wolf (1995), que fez uso de ferramentas experimentais e analíticas para coletar informações instantâneas, locais e médias sobre o comportamento do filme líquido. Dentre as muitas conclusões que confirmaram e quantificaram algumas das principais características das ondas de perturbação descritas acima, aquelas envolvendo a análise das tensões de cisalhamento na parede e o

comportamento da espessura do filme estão entre as mais interessantes. A correlação cruzada dos sinais apontados acima indicou uma aparente desfasagem entre o pico de tensão de cisalhamento o pico da espessura do filme, o que permitiu uma estimativa das vazões de líquido no substrato e nas ondas de perturbação.

**Tab. 1** Resposta das ondas de perturbação a variações de parâmetros do sistema.

<b>Ao se aumentar</b>	<b>Velocidade da onda</b>	<b>Frequência da onda</b>	<b>Coerência</b>
<b>Fluxo de massa do gás</b>	aumenta	Aumenta	aumenta
<b>Fluxo de massa do líquido</b>	não se altera	aumenta ligeiramente	não se altera
<b>Diâmetro do tubo</b>	não se altera	Diminui	diminui
<b>Densidade do gás</b>	diminui	Aumenta	não investigado
<b>Distância da entrada</b>	não se altera	Diminui	não investigado

Mais recentemente, Vassallo (1999) realizou um estudo detalhado sobre a estrutura turbulenta do filme líquido no escoamento anular. Medições foram realizadas com anemometria a filme quente e a conclusão foi que, em condições afastadas da região de reversão do escoamento do filme líquido, a distribuição de velocidade no filme líquido se aproxima do perfil de velocidade universal monofásico (lei logarítmica). Em condições de baixas velocidades superficiais do gás, onde o filme é mais espesso, Vassallo propôs uma lei logarítmica com uma constante de interseção modificada, o que sugere que a tensão de cisalhamento na parede é, nesse caso, influenciada pela estrutura do filme.

### **3.2. Gotículas no escoamento anular**

Gotículas são geradas pelo cisalhamento do gás sobre o filme líquido, fato este que pode ser verificado através de um experimento em que se mede a vazão do filme líquido em função da distância a partir do ponto de injeção de líquido (o filme líquido é cuidadosamente introduzido, por exemplo, usando uma seção de parede porosa). Pode-se observar que a vazão do filme líquido cai de forma monotônica com distância.

Uma investigação experimental do processo de surgimento das gotículas feita por Azzopardi e Whalley (1980) revelou que este fenômeno é fortemente correlacionado com o aparecimento das ondas de perturbação no filme líquido. Em um experimento onde o escoamento anular foi criado pela injeção de líquido em uma seção de tubo porosa (metal sinterizado), Azzopardi e Whalley notaram que, se a vazão do filme for estabelecida em um valor um pouco menor do que o mínimo necessário para o surgimento das ondas, e se um pequeno volume de líquido for

subitamente injetado no filme, um pequeno número de ondas é criado. O escoamento no topo do tubo foi observado por meio de filmagem a alta velocidade em conjunto com um dispositivo de visualização axial. Antes das ondas serem criadas, não havia gotículas. Após a criação, gotículas foram observadas em um número que aumentava à medida que as ondas se aproximavam da saída do tubo. Terminada a passagem das ondas, nenhuma gotícula voltou a ser observada.

Foi sugerido por Cousins et al. (1965) que a vazão do filme líquido abaixo da qual não há entranhamento de gotículas pode ser definida a partir de um número de Reynolds crítico para o filme,  $Re_{LFC} = \dot{m}_{LF} d_T / \eta_L$ . Quatro critérios para a correlação do aparecimento de ondas de perturbação e, conseqüentemente, do entranhamento de gotículas são resumidos abaixo.

1. **critério de Ishii e Grolmes (1975)**. Neste critério, os autores sugerem que o mecanismo que dá início ao entranhamento é a penetração da camada limite do gás. Foi proposto um número de Reynolds crítico dado por,

$$Re_{LFC} = \left[ \frac{y^+}{0,347} \left( \frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{1/2} \frac{\eta_G}{\eta_L} \right]^{3/2} \quad (26)$$

2. **critério de Asali et al. (1985)**. Estes autores realizaram uma análise de estabilidade das ondas de perturbação para determinar  $Re_{LFC}$ , e descobriram que o número de Reynolds crítico é uma função fraca do grupo  $\frac{\eta_L}{\eta_G} \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L}}$ . Uma correlação em forma de gráfico foi proposta, a qual foi ajustada posteriormente por Owen (1986) pela seguinte expressão,

$$Re_{LFC} = \exp \left[ 5,305 + 0,657 \left( \frac{\eta_G}{\eta_L} \right) \left( \frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{0,5} \right] \quad (27)$$

3. **critério de Owen (1986)**. Owen modificou a correlação de Asali et al. (1984) para levar em conta a evaporação no filme líquido. Os novos coeficientes são apresentados abaixo,

$$Re_{LFC} = \exp \left[ 5,8405 + 0,4249 \left( \frac{\eta_G}{\eta_L} \right) \left( \frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{0,5} \right] \quad (28)$$

4. **critério de Azzopardi (1997)**. Azzopardi reformulou um critério existente (Azzopardi et al., 1983) que, por meio de uma análise dimen-

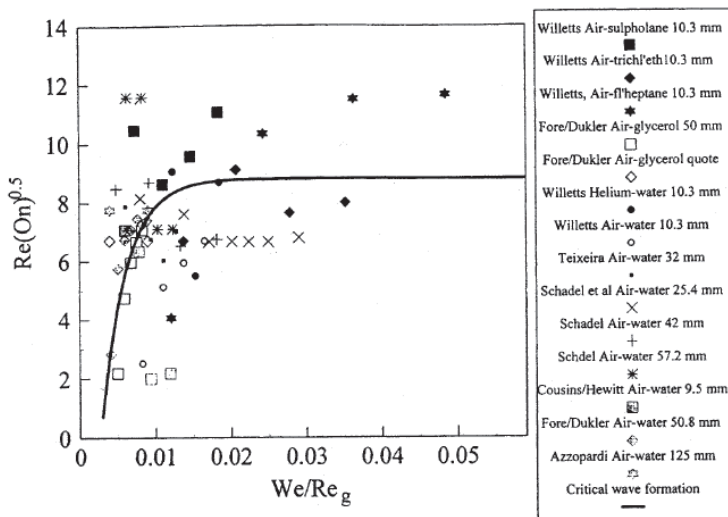
sional, sugere que os grupos adimensionais apropriados para correlacionar o número de Reynolds crítico são o número de Ohnhezoge, e a razão entre os números de Weber e o de Reynolds para o gás, dados por,

$$On = \frac{\eta_L}{\sqrt{\sigma \rho_L d_T}} \quad (29)$$

e

$$\frac{We}{Re_G} = \frac{\eta_G U_{GS}}{\sigma} \quad (30)$$

A Fig. 3 ilustra a correlação gráfica sugerida por Azzopardi (1997).



**Fig. 3** Correlação para o início do entranhamento (Azzopardi, 1997).

A maior parte dos dados utilizados nas correlações acima para desenvolver os critérios mencionados foram obtidos em condições adiabáticas. No entanto, foram usadas várias combinações de fluidos para investigar o efeito da tensão superficial e da viscosidade do líquido. Uma descrição dos mecanismos de atomização pelo qual são criadas gotículas é fornecida por Azzopardi (2006). Neste texto, é o bastante afirmar que são dois os principais mecanismos de formação de gotículas, a

ruptura de película<sup>5</sup> e a ruptura de ligamento<sup>6</sup> (Azzopardi, 1983). O primeiro é característico de fluxos de gás mais baixos, enquanto que o segundo é observado em fluxos mais elevados.

Um fato mais importante a ser observado neste momento é que a quantidade de líquido fluindo como gotículas entranhadas é extremamente sensível ao método de injeção de líquido. Esse comportamento é ilustrado na Fig. 4, onde dados obtidos na década de 1960 (Gill et al., 1963, 1964; Gill e Hewitt, 1966) são mostrados para casos extremos de injeção por uma seção porosa e por um jato central, respectivamente. Comparações entre resultados de um modelo matemático com estes dados também são apresentadas na Fig. 4, que mostra a vazão do filme líquido medida para o injetor central e para a seção porosa plotada em função da distância ao ponto de injeção para uma mesma pressão e vazão na entrada. Apesar das discrepâncias entre modelo e dados para cada conjunto de curvas, diferenças acentuadas entre o comportamento do filme para cada injetor são observadas, mesmo depois de 200 polegadas (aproximadamente 5 m) a jusante da entrada. Tais resultados podem levar à conclusão de que o problema do escoamento anular tem mais do que uma solução possível e, em um experimento no qual o padrão é criado artificialmente, o método de injeção da fase líquida é extremamente importante na determinação dos parâmetros dependentes.

Contudo, foi demonstrado (Hewitt e Hall-Taylor, 1970) que a distâncias muito grandes do injetor (várias centenas de diâmetros), escoamentos anulares adiabáticos tendem a uma condição de *equilíbrio hidrodinâmico*, isto é, um estado no qual a taxa de deposição de gotículas é aproximadamente igual à de entranhamento, e a fração entranhada (ou seja, a vazão mássica de líquido entranhado dividida pela vazão de líquido total) permanece aproximadamente constante. A rigor, as taxas não podem ser exatamente iguais, e o verdadeiro equilíbrio não pode ser obtido, porque a redução da densidade do gás ao longo do tubo altera a própria posição do equilíbrio. No entanto, tais *comprimentos de desenvolvimento hidrodinâmico* não são realistas do ponto de vista de equipamentos industriais que, sem dúvida, operam na *região de entrada*.

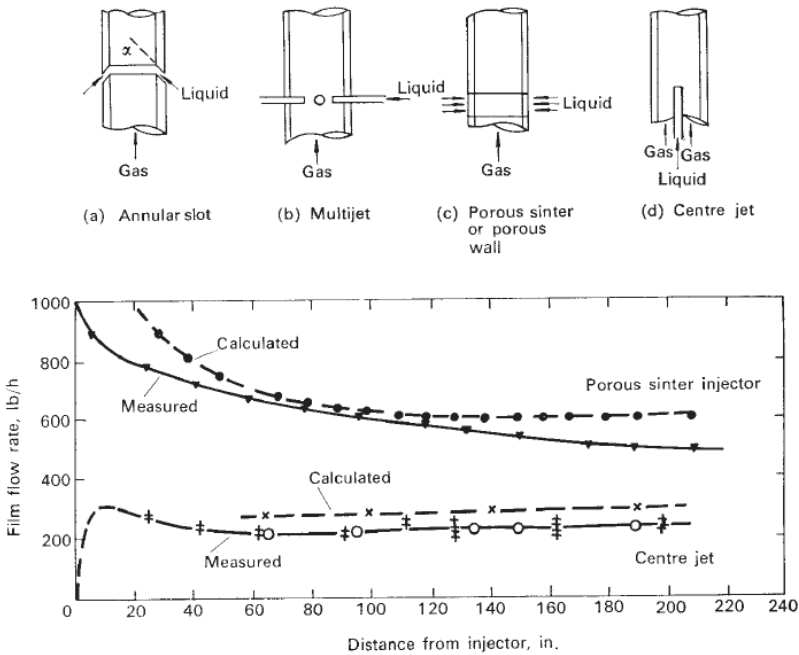
O desafio de se medir separadamente as taxas de entranhamento e de deposição se manteve concreto ao longo da década de 1970 e parte da de 1980. Uma das primeiras correlações para entranhamento e deposição foi proposta por Hutchinson e Whalley (1973). A correlação utiliza o conceito de equilíbrio hidrodinâmico e assume uma semelhança entre as relações para os dois processos. A correlação de entranhamento baseia-se numa concentração de equilíbrio,  $C_E$ , a qual é admitida ser proporcional ao seguinte grupo adimensional,

$$C_E \propto \left( \frac{\tau_I \delta}{\varepsilon} \right) \quad (31)$$

---

<sup>5</sup> Do inglês: bag break-up

<sup>6</sup> Do inglês: ligament break-up



**Fig. 4** Dados experimentais para a vazão do filme líquido obtidos por Gill e colaboradores para diferentes tipos de injetores. Fatores de conversão: 1 in = 25,4 mm; 1 lb h<sup>-1</sup> = 1,26 x 10<sup>-4</sup> kg s<sup>-1</sup>.

Hutchinson e Whalley (1973) alegaram que o parâmetro adimensional na expressão acima seria adequado para modelar o entranhamento, já que representa uma relação entre as tendências opostas de ruptura (cisalhamento interfacial) e coesão (tensão superficial) atuando sobre o filme líquido. A taxa de entranhamento,  $E$ , é medida em unidades de massa do fluido por unidade de área da parede do tubo por unidade de tempo.

A taxa de deposição de gotículas,  $D$ , pode ser descrita pela seguinte equação (Cousins e Hewitt, 1968),

$$D = k_D C E \quad (32)$$

onde  $D$  é a taxa de deposição (massa de gotículas por unidade de área da parede do tubo por unidade de tempo) e  $k_D$  é o coeficiente de deposição. Se a condição de equilíbrio tiver sido atingida, as taxas de deposição e entranhamento serão aproximadamente iguais e, assim,  $E$  pode ser calculada a partir da equação acima.

Trabalho realizados posteriormente trataram as taxas de entranhamento e deposição de uma forma diferente. Ueda (1979) mediu o gradiente axial da vazão do filme líquido e fez uso de dados sobre a taxa de deposição para derivar uma relação para a taxa de entranhamento. Ueda apresentou a seguinte relação na forma dimensional (unidades SI),

$$E = 3,54 \times 10^{-3} \left[ \frac{\tau_I}{\sigma} \left( \frac{U_{LS}}{\sigma} \right)^{0,60} \right]^{0,57} \quad (33)$$

a qual é válida para  $\frac{\tau_I}{\sigma} \left( \frac{U_{LS}}{\sigma} \right)^{0,60} > 120$ . Conforme salientado por Azzopardi (1997), a principal desvantagem de se usar essa abordagem é que ela envolve duas incógnitas, a saber, a taxa de entranhamento e a tensão de cisalhamento e somente uma equação.

Por meio da injeção de um traçador no filme líquido a uma dada concentração, é possível avaliar as taxas de entranhamento e deposição independentemente, por meio da medição do perfil de concentração no filme ao longo do tubo. Uma combinação das equações de balanço de massa para o filme de líquido e para a concentração do traçador no filme fornece (Azzopardi, 1997),

$$\frac{d}{dz} \ln \left( \frac{c_{LF}}{c_E} - 1 \right) = \frac{4D}{\dot{m}_L d_T} [e(1-e)]^{-1} \quad (34)$$

onde  $e$  é a fração entranhada,  $c_{LF}$  é a concentração local do traçador no filme e  $c_E$  é a concentração média (*bulk*) definida na seção de entrada do filme por  $c_E = c_{f,0}(1-e_0)$ .

A Eq. (34) pode ser combinada com o seguinte balanço de massa em um elemento de volume do filme líquido,

$$\frac{d}{dz} \dot{m}_{LF} = \frac{4}{d_T} (D - E) \quad (35)$$

para calcular localmente as taxas de entranhamento e deposição,  $D$  e  $E$ . Esta técnica foi inicialmente proposta por Quandt (1965) e usada por muitos pesquisadores desde então.

Um dos mais abrangentes conjuntos de correlações para o entranhamento e deposição de gotículas no escoamento anular é o proposto por Govan (1990) e Hewitt e Govan (1989). Foram correlacionados 2354 pontos experimentais (1366 para entranhamento e 988 para deposição) de 22 fontes, englobando 9 diferentes combinações de gás-líquido. As relações propostas por Govan são as seguintes,

$$E = \begin{cases} 0; & \text{se } \dot{m}_{LF} \leq \dot{m}_{LFC} \\ 5,75 \times 10^{-5} \dot{m}_{GC} \left[ \frac{\rho_L d_T}{\sigma \rho_G^2} (\dot{m}_{LF} - \dot{m}_{LFC})^2 \right]^{0,316} & \text{se } \dot{m}_{LF} > \dot{m}_{LFC} \end{cases} \quad (36)$$



onde  $\dot{m}_{LFC}$  é um fluxo de massa crítico para o filme líquido abaixo do qual não há entranhamento. Adotando a expressão proposta por Owen (1986), tem-se que,

$$\dot{m}_{LFC} = \frac{\eta_L}{d_T} \exp \left[ 5,8504 + 0,4249 \left( \frac{\eta_G}{\eta_L} \right) \left( \frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{0,5} \right] \quad (37)$$

A taxa de deposição é dada por,

$$D = k_D C \quad (38)$$

onde  $C$  é a concentração de gotículas no núcleo definida por,

$$C = \frac{\dot{m}_{LE}}{\frac{\dot{m}_{GC}}{\rho_G} + \frac{\dot{m}_{LE}}{\rho_{LE}}} \quad (39)$$

e o coeficiente de deposição,  $k_D$ , é calculado pela expressão abaixo,

$$k_D = \begin{cases} 0,18 \left( \frac{\sigma}{\rho_G d_T} \right)^{0,5} & \text{se } \frac{C}{\rho_G} \leq 0,3 \\ 0,083 \left( \frac{\rho_G}{C} \right)^{0,65} \left( \frac{\sigma}{\rho_G d_T} \right)^{0,5} & \text{se } \frac{C}{\rho_G} > 0,3 \end{cases} \quad (40)$$

Representações gráficas das correlações de entranhamento e deposição são mostradas nas Figs. 5 e 6, onde o espalhamento tipicamente encontrado em relações deste tipo para escoamentos bifásicos pode ser observado.

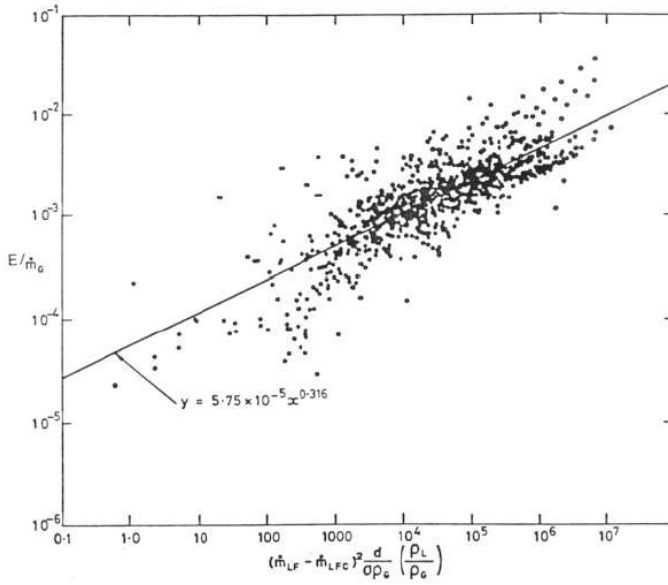


Fig. 5 A correlação para o entranhamento de Govan (1990).

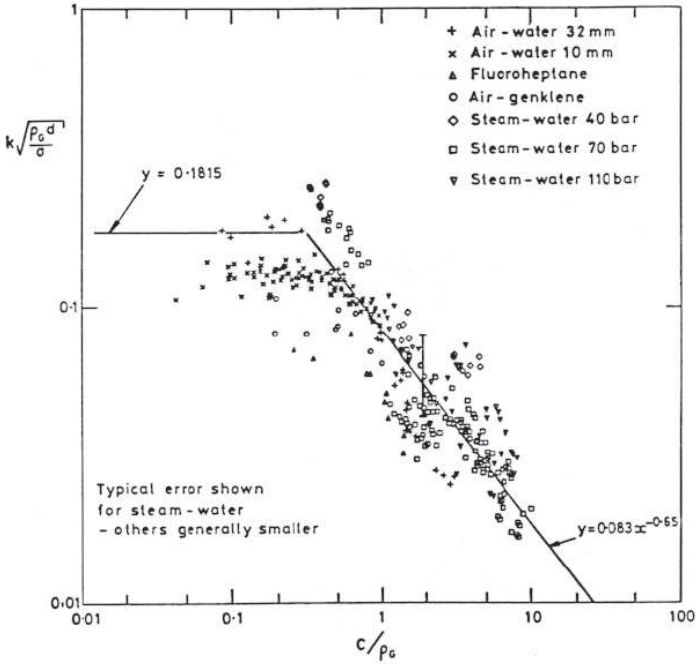


Fig. 6 A correlação para a deposição de gotulas de Govan (1990).

O conjunto de correlações para as taxas de entranhamento e deposição proposto por Schadel *et al.* (1990) é um outro exemplo de modelo de transporte de gotículas. As expressões são apresentadas abaixo.

$$\frac{E}{U_{GS} \sqrt{\rho_L \rho_G}} = \frac{k_a}{\pi d_T} (\dot{M}_{LF} - \dot{M}_{LFC}) \quad (41)$$

onde  $k_a$  é igual a 0,000497, 0,000436 e 0,000433 m s kg<sup>-1</sup> para  $d_T = 25,4, 42,0$  e 57,2 mm, respectivamente.

$$D = \begin{cases} \frac{0,034}{d_T^{0,6}} \frac{\dot{M}_{LE}}{\dot{V}_G} & \text{se } \frac{\dot{M}_{LE}}{\dot{V}_G} \leq \frac{0,078}{d_T^{0,6}} \\ \frac{0,021}{d_T^{0,6}} & \text{se } \frac{\dot{M}_{LE}}{\dot{V}_G} > \frac{0,078}{d_T^{0,6}} \end{cases} \quad (42)$$

onde  $\dot{V}_G$  é a vazão volumétrica de gás em m<sup>3</sup> s<sup>-1</sup>.

Estudos um pouco mais recentes foram apresentados por Azzopardi e Zaidi (2000) e Kataoka *et al.* (2000). Azzopardi e Zaidi (2000) aplicaram uma técnica de espalhamento de luz (Malvern) para obter dados adicionais sobre entranhamento no escoamento anular em um tubo de 38 mm de diâmetro interno. Kataoka *et al.* propuseram novas correlações para taxas de entranhamento e deposição. Estas foram, entretanto, baseadas em dados experimentais já utilizada em estudos anteriores (Govan *et al.*, 1988; Govan, 1990). Okawa *et al.* (2005) conduziram experimentos para se determinar as taxas de entranhamento e deposição no escoamento de ar e água em um tubo vertical de 5 mm de diâmetro. Seus dados foram incorporados a uma extensa base de dados e correlacionados por Okawa e Kataoka (2005) por meio de relações empíricas envolvendo a o fator de atrito interfacial (entranhamento) e a concentração de gotículas no núcleo gasoso (deposição). Mais recentemente, correlações para a fração de líquido entranhada foram propostas por Sawant *et al.* (2009) e por Conciolini e Thome (2010). A vantagem destas correlações sobre correlações separadas para as taxas de entranhamento e deposição é a simplicidade de sua utilização. Contudo, correlações para a fração entranhada não permitem a aferição da evolução do entranhamento no ao longo do canal, em situações distintas daquela do equilíbrio hidrodinâmico.

Embora notáveis progressos no sentido de uma melhor compreensão e previsão do entranhamento e da deposição de gotículas no escoamento anular tenham sido realizados, há ainda uma série de fenômenos a serem explorados neste tema. Como vai ser visto adiante, o efeito das propriedades físicas (principalmente de sistemas não-aquosos), o comportamento das gotículas na proximidade da transição para o padrão agitado e o efeito da imposição de um fluxo de calor sobre as características do escoamento são alguns dos desafios enfrentados por aqueles que tentam melhorar os métodos de cálculo.

### 3.3. Modelagem do escoamento no pradão anular

Balanços de massa e de quantidade de movimento em um elemento de comprimento do tubo (ver Fig. 7) podem ser escritos para os três campos do padrão anular (filme, gotas e núcleo de gás), conforme mostrado abaixo (Azzopardi, 2006).

Conservação da massa: filme líquido

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{m}_{LF}}{u_{LF}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \dot{m}_{LF} = \frac{P_I}{A} (D - E - \dot{m}_{I,LF}) \quad (43)$$

Conservação da massa: gotículas

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{m}_{LE}}{u_{LE}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \dot{m}_{LE} = \frac{P_I}{A} (E - D - \dot{m}_{I,LE}) \quad (44)$$

Conservação da massa: núcleo gasoso

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{m}_G}{u_G} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \dot{m}_G = \frac{P_I}{A} (\dot{m}_{I,LF} + \dot{m}_{I,LE}) \quad (45)$$

Conservação da quantidade de movimento: filme líquido

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \dot{m}_{LF} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\beta_{LF} \dot{m}_{LF}^2}{\varepsilon_{LF} \rho_L} \right) + \varepsilon_{LF} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{A} (P_w \tau_w - P_I \tau_I) + \\ \rho_L g \varepsilon_{LF} + \frac{P_I}{A} (E u_{FD} - D u_{DF}) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

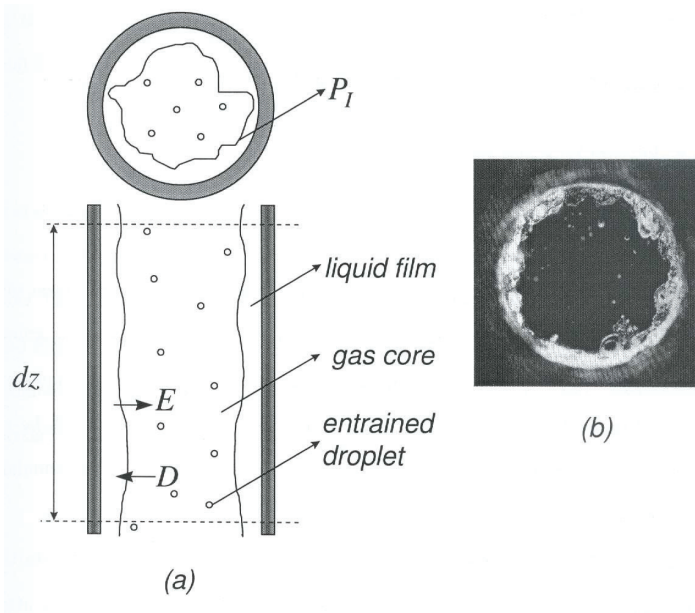
Conservação da quantidade de movimento: gotículas

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{m}_{LE} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\beta_{LE} \dot{m}_{LE}^2}{\varepsilon_{LE} \rho_L} \right) + \varepsilon_{LE} \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_L g \varepsilon_{LE} + \frac{P_I}{A} (Du_{DF} - Eu_{FD}) - F_D = 0 \quad (47)$$

Conservação da quantidade de movimento: núcleo gasoso

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{m}_G + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\beta_G \dot{m}_G^2}{\varepsilon_G \rho_G} \right) + \varepsilon_G \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{P_I}{A} \tau_I + \rho_G g \varepsilon_G + F_D = 0 \quad (48)$$

Nas equações acima,  $\varepsilon_k$  é a fração da seção transversal do tubo (de área  $A$ ) ocupada por cada campo.  $P_w$  é o perímetro da parede do tubo (a qual admite-se estar em contato apenas com o filme líquido),  $P_I$  é o perímetro interfacial.  $F_D$  é a força de arraste por unidade de volume exercida pelo gás sobre as gotas,  $\beta_k$  é o fator de correção do perfil de velocidades e  $u$  é a velocidade local, onde os sub-índices  $FD$  e  $DF$  representam o transporte do filme para as gotas e das gotas para o filme, respectivamente.



**Fig. 7** Elemento de comprimento de tubo com escoamento anular (Barbosa, 2001).

A Fig. 7(b) mostra uma fotografia axial (Hewitt e Hall-Taylor, 1970) que serve para ilustrar os campos de líquidos e de gás e a estrutura de interface. Uma hipótese bastante comum na modelagem de escoamentos anulares é a de as gotículas entranhadas e o gás se comportam como uma mistura homogênea. A equação de conservação da quantidade de movimento para o núcleo homogêneo, considerando regime-permanente, é dada por,

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{\dot{m}_C^2}{\rho_L (1 - \epsilon_{LF})} \right] + (1 - \epsilon_{LF}) \frac{dp}{dz} + \frac{P_I}{A} \tau_I + (1 - \epsilon_{LF}) \rho_C g = 0 \quad (49)$$

onde  $\rho_C$  é a densidade do núcleo homogêneo.

Resolver as Eqs. (43) a (48) não é uma tarefa simples, a qual se torna ainda mais difícil quando entram em cena processos de transferência de calor e de massa. Além disso, o conhecimento das condições de contorno para a conservação da massa de líquido (ou seja, a quantidade de líquido entranhado como gotículas no início ou na transição para o escoamento anular) nem sempre está disponível. Como será visto mais adiante, este é um parâmetro de crucial importância em alguns casos, como o escoamento de misturas multicomponentes, a determinação do ponto de secagem do filme (fluxo de calor crítico) e a transferência de calor a partir deste ponto (*post-dryout heat transfer*).

As Eqs. (43) a (49) (ou versões simplificadas das mesmas, como por exemplo para o regime-permanente) podem ser vistas com o ponto de partida para muitos modelos de escoamento anular propostos ao longo do último 30 ou 40 anos. Várias tentativas para simplificar essas equações introduzindo novas hipóteses e relações de fechamento foram propostas por muitos investigadores. Entre muitos desses modelos, pode-se citar os de Moeck e Stachiewicz (1972), Dobran (1983), Schadel et al. (1990), Govan (1990), Nigmatulin et al. (1996), Fu e Klausner (1997) e Alipchenkov et al. (2004).

O objetivo dessa seção não é analisar cada modelo, mas sim se concentrar nas questões relacionadas com o desenvolvimento do modelo explorado no presente estudo. Conforme apontado anteriormente, um recurso que simplifica consideravelmente as equações de quantidade de movimento é tratar o núcleo gasoso mais as gotículas como uma mistura homogênea. Ao fazê-lo, admite-se que o núcleo é um fluido hipotético com propriedades físicas médias mediante a proporção de cada fase na mistura. Além disso, relações de fechamento para, por exemplo, a tensão de cisalhamento interfacial pode ser concebida e correlacionada com base em tal hipótese. Geralmente, a influência do filme líquido sobre o escoamento do núcleo de gás é formulada através do coeficiente de atrito interfacial,  $f_I$ . A partir de uma analogia com o escoamento monofásico, tem-se,

$$f_I = \frac{2\tau_I}{\rho_C U_C^2} = f(\text{Re}_G, \xi) \quad (50)$$

onde  $\xi$  é a rugosidade equivalente do filme líquido, em m.

Na busca de uma expressão para  $f_I$  capaz de fornecer previsões confiáveis para o escoamento bifásico anular, muitos autores propuseram correlações empíricas entre a rugosidade interfacial e a espessura do filme líquido,  $\delta$  (Gill et al., 1963). Estas servem como um elo de ligação entre a tensão de cisalhamento interfacial e a espessura do filme e, em última análise, a própria queda de pressão. Exemplos de tais correlações são aquelas por Wallis (1969),

$$f_I = f_G \left( 1 + 360 \frac{\delta}{d_T} \right) \quad (51)$$

onde,

$$f_G = 0,079 \text{Re}_G^{-0,25} \quad (52)$$

e por Hewitt e Whalley (1978),

$$f_I = f_{sc} \left[ 1 + 24 \left( \frac{\rho_{LF}}{\rho_G} \right)^{1/3} \frac{\delta}{d_T} \right] \quad (53)$$

onde  $f_{sc}$  é o coeficiente de atrito para o escoamento monofásico em um tubo do mesmo diâmetro, com densidade do núcleo homogêneo  $\rho_C$ , velocidade do núcleo homogêneo  $U_C$  e viscosidade igual à da fase gás, calculada utilizando a relação do coeficiente de atrito devida a Blasius (Eq. 52). Uma relação mais refinada para foi posteriormente apresentada por Owen (1986), que revelou que o comprimento de mistura turbulento no núcleo gasoso é reduzido na presença de gotículas. A relação para  $f_I$  foi adaptada a partir da equação clássica de Nikuradse conforme a seguir,

$$\sqrt{\frac{2}{f_I}} = A_r + \frac{1}{K_{tp}} \left[ \ln \left( \frac{r_I}{\xi_e} \right) - 1,5 + \frac{2\delta}{r_T} \ln \left( \frac{r_T}{\delta} \right) \frac{\delta}{r_T} \right] \quad (54)$$

onde  $r_I$  e  $r_T$  são os raios da interface e do tubo, respectivamente.  $A_r$  é o parâmetro de rugosidade de Nikuradse determinado experimentalmente.  $\xi_e$  é a altura efetiva da rugosidade, a qual afeta o escoamento no núcleo de gás somente se  $\xi$  excede a camada laminar no núcleo de gás por meio da expressão,

$$\xi_e = \xi - \frac{5d_T}{\text{Re}_G} \sqrt{\frac{2}{f_G}} \quad (55)$$

A constante de von Kármán,  $K_{tp}$ , foi correlacionada como,

$$K_{tp} = \exp \left( -1,9786 + 0,9381 \frac{\rho_G U_{GS}^2}{\rho_C U_C^2} \right) \quad (56)$$

Outra hipótese simplificativa diz respeito à distribuição de velocidade no filme líquido. Em muitas aplicações, em analogia ao escoamento monofásico, o número de Reynolds do filme líquido é tal que o regime apresenta características turbulentas. Hewitt e Hall-Taylor (1970) revelaram que teorias para o escoamento monofásico fornecem previsões satisfatórias de parâmetros tais como a vazão do filme líquido e sua espessura. Na forma adimensional, a vazão do filme é dada por

$$\dot{M}_{LF}^+ = \frac{\dot{M}_{LF}}{\pi d_T \eta_L} = \int_0^{\delta^+} u_{LF}^+ dy^+ \quad (57)$$



onde  $y^+$  e  $\delta^+$  são a coordenada  $y = r_T - r$  e a espessura do filme na forma adimensional, as quais são dadas por,

$$y^+ = \frac{\rho_L u^* y}{\eta_L} \quad (58)$$

e,

$$\delta^+ = \frac{\rho_L u^* \delta}{\eta_L} \quad (59)$$

$u_{LF}^+$  é a velocidade adimensional do filme líquido dada por,

$$u_{LF}^+ = \frac{u_{LF}}{u^*} \quad (60)$$

onde  $u^*$  é a velocidade de atrito,

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_L}} \quad (61)$$

Tipicamente, o perfil universal de von Kármán pode ser utilizado, o qual é definido por,

$$u_{LF}^+ = \begin{cases} y^+ & \text{para } y^+ \leq 5 \\ -3,05 + 5 \ln y^+ & \text{para } 5 < y^+ \leq 30 \\ 5,46 + 2,5 \ln y^+ & \text{para } y^+ > 30 \end{cases} \quad (62)$$

A integração das equações acima fornece as seguintes relações para a vazão do filme líquido adimensional,

$$\dot{M}_{LF}^+ = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta^{+2} & \text{para } 0 < \delta^+ \leq 5 \\ 12,45 - 8,05\delta^+ + 5\delta^+ \ln(\delta^+) & \text{para } 5 < \delta^+ \leq 30 \\ -214 + 8\delta^+ + 2,5\delta^+ \ln(\delta^+) & \text{para } \delta^+ > 30 \end{cases} \quad (63)$$

O filme líquido no escoamento anular é geralmente muito fino, de sorte que o efeito de curvatura do tudo pode, na maioria das vezes, ser desprezado. Neste caso, um balanço de forças na película líquida resulta em (Hewitt e Hall-Taylor, 1970),

$$\tau(y) \approx \tau_I \approx \text{Constant} \quad (64)$$

e a Eq. (61) pode ser aproximada por,

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_I}{\rho_L}} \quad (65)$$

As Eqs. (63) a (65) fornecem uma relação triangular única (Hewitt, 1961) entre a vazão do filme líquido, sua espessura e a tensão de cisalhamento interfacial. Isso significa que em qualquer ponto do canal, se dois dos parâmetros são conhecidos, o terceiro pode ser calculado através das Eqs. (63) a (65). Em uma análise desse tipo, a tensão de cisalhamento frequentemente é substituída pelo gradiente de pressão, o qual é calculado através do seguinte balanço de forças,

$$\frac{dp}{dz} = \frac{4\tau_I}{d_T - 2\delta} \quad (66)$$

A referência clássica de Hewitt e Hall-Taylor (1970) apresenta uma extensa validação experimental da relação triangular.

Mais recentemente, Kishore e Jayanti (2004) aplicaram a relação triangular em um método que calcula o escoamento no núcleo gasoso por meio de um modelo do tipo CFD, que assume uma interface gás-líquido rugosa e uma distribuição de velocidades no filme de líquido dada pela lei logarítmica. O modelo de turbulência  $k-\varepsilon$  é utilizado para descrever tais efeitos na fase gás. Eles incluem as taxas de entranhamento e deposição como termo fonte e como condição de contorno em uma equação de transporte para fração entranhada, também resolvida por meio um modelo diferencial.

### 3.4. Transferência de calor

Alguns dos desenvolvimentos mais recentes na modelagem de escoamentos no padrão anular invocam o uso de ferramentas de CFD para melhor compreender o comportamento das ondas de perturbação e do filme líquido, o que faz deste um ponto importante, principalmente quando o interesse é a transferência de calor e o cálculo do fluxo de calor crítico (CHF<sup>7</sup>) no escoamento anular. Os estudos de Wolf (1995) e Jayanti e Hewitt (1997) confirmaram que as ondas de perturbação são zonas de recirculação e turbulência que se deslocam sobre um substrato laminar. Eles também quantificaram o papel do cisalhamento interfacial e de forças normais na interação entre as fases, descobrindo que estas últimas contribuem em cerca de apenas 10% da força resultante entre as fases.

Mais especificamente com respeito à transferência de calor, Jayanti e Hewitt (1997) mostraram que, ao considerar a transferência de calor nas regiões da onda e do substrato separadamente, uma melhor concordância entre o coeficiente de transferência de calor calculado e o experimental pode ser obtida. Análises unidimensionais que fazem uso do método do perfil logarítmico juntamente com a analogia de Reynolds muitas vezes superestimam a transferência de calor na evaporação de água em até 50% (Barbosa, 2001). Nestes casos, o coeficiente de transferência de calor por convecção é dado por,

$$\alpha = \frac{\rho_L C_{pL} u^*}{T_I^+} \quad (67)$$

onde  $T_I^+$  é a temperatura interfacial adimensional calculada por meio da integração do perfil de difusividade turbulenta (Hewitt e Hall-Taylor, 1970), dada por,

$$T_I^+ = \begin{cases} \delta^+ \text{Pr}_L & \text{para } 0 < \delta^+ \leq 5 \\ 5 \text{Pr}_L + 5 \ln \left[ 1 + \text{Pr}_L \left( \frac{\delta^+}{5} - 1 \right) \right] & \text{para } 5 < \delta^+ \leq 30 \\ 5 \text{Pr}_L + 5 \ln(1 + 5 \text{Pr}_L) + 2,5 \ln \left( \frac{\delta^+}{5} \right) & \text{para } \delta^+ > 30 \end{cases} \quad (68)$$

Diversas tentativas de se corrigir as estimativas exageradas do coeficiente de transferência de calor foram feitas ao longo dos anos. A mais comum é a sugestão de um fator de amortecimento para reduzir o nível da turbulência junto da interface (Mudawwar e El-Masri, 1986).

---

<sup>7</sup> Do inglês: Critical Heat Flux

Uma abordagem mais sofisticada foi apresentada por Dobran (1983), que desenvolveu uma expressão para a difusividade de quantidade de movimento de uma camada ondulada (sugerindo que o filme líquido é dividido em uma camada contínua e uma camada ondulada perturbada). Ele encontrou boa concordância com os dados experimentais ao ajustar para 0,5 o valor de um número de Prandtl efetivo, definido como a razão entre as difusividades de quantidade de movimento e térmica da camada ondulada. Claramente, tal como sugerido pelas previsões de Jayanti e Hewitt (1997) feitas a partir de simulações em CFD, o caminho para esclarecer a transferência de calor no filme parece ser uma descrição mais fenomenológica do escoamento no filme, ou seja, a partir de uma distinção entre o substrato e as ondas. Embora essa abordagem não seja ainda prática, provas de sua viabilidade foram apresentadas há mais de 30 anos por Brumfield e Theofanous (1976).

No escoamento anular, um dos aspectos mais importantes ligados à mudança de fase e, de certa forma, à transferência de calor é a previsão do fluxo de calor crítico (CHF). Os dois principais métodos de correlação são: (i) em termos do fluxo de calor em função do título, ou (ii) em termos do título no ponto de secagem do filme (*dryout*) em função do comprimento do trecho entre o ponto de início da ebulição e o ponto de secagem.

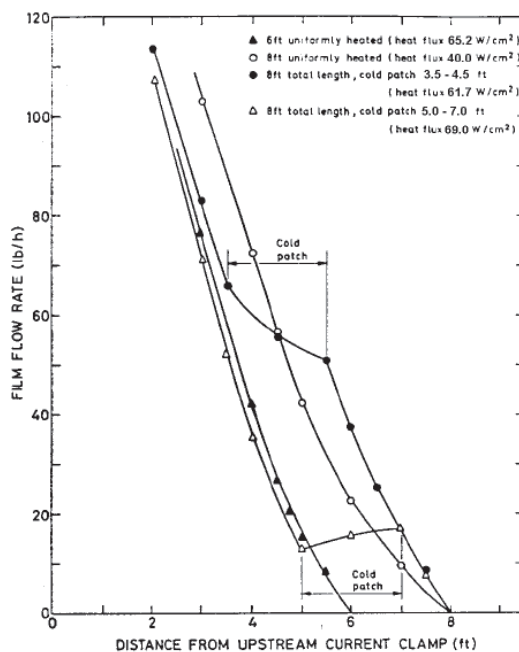
Conforme apontado por Hewitt (1996), nenhuma das duas abordagens de correlação possui justificativa de ordem fundamental; cada representação pode ser mais vantajosa em algumas situações do que em outras. Os dois parâmetros em questão se relacionam a partir da seguinte expressão,

$$CHF = \frac{\dot{m}_T d_T \Delta h_v}{4z} \left[ X_{cr} + \frac{c_{pL} (\Delta T_{sub})_{inlet}}{\Delta h_v} \right] \quad (69)$$

onde  $z$  é a distância da entrada do tubo,  $X$  é o título e  $\Delta h_v$  é a entalpia de vaporização. A correlação empírica mais usada para o CHF é a proposta por Katto e Ohno (1984).

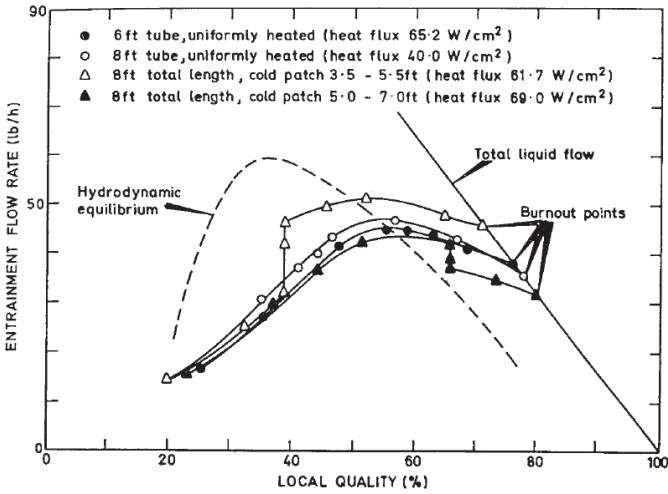
A inadequacidade das correlações empíricas foi demonstrada nos experimentos de Bennett et al. (1967a, 1967b), que determinaram o fluxo de calor de *dryout* para um tubo de 4,26 m de comprimento e 12,6 mm de diâmetro interno no qual uma seção não aquecida de 0,61 m de comprimento pode ser posicionada em diferentes distâncias da posição de entrada ao longo do tubo. Eles observaram uma variação sistemática no fluxo crítico de calor, dependendo da posição do trecho não aquecido, fato que pode ser apreciado nas Figs. 8 e 9. Na Fig. 8, são mostradas medidas de vazão do filme para tubos aquecidos de maneira uniforme, porém com trechos adiabáticos próximos da entrada e da saída. A Fig. 9 mostra os mesmos resultados, só que em termos da vazão de líquido entranhado em função do título local. O efeito do trecho adiabático é oferecer uma espécie de relaxamento do sistema de volta ao equilíbrio hidrodinâmico (ou seja, quando as taxas de entranha-

mento e deposição são idênticas). O *dryout* ocorre quando a vazão de líquido entranhado se iguala à vazão total.



**Fig. 8** Variação da vazão no filme com a distância em função do posicionamento da seção adiabática (Bennett et al., 1967b)

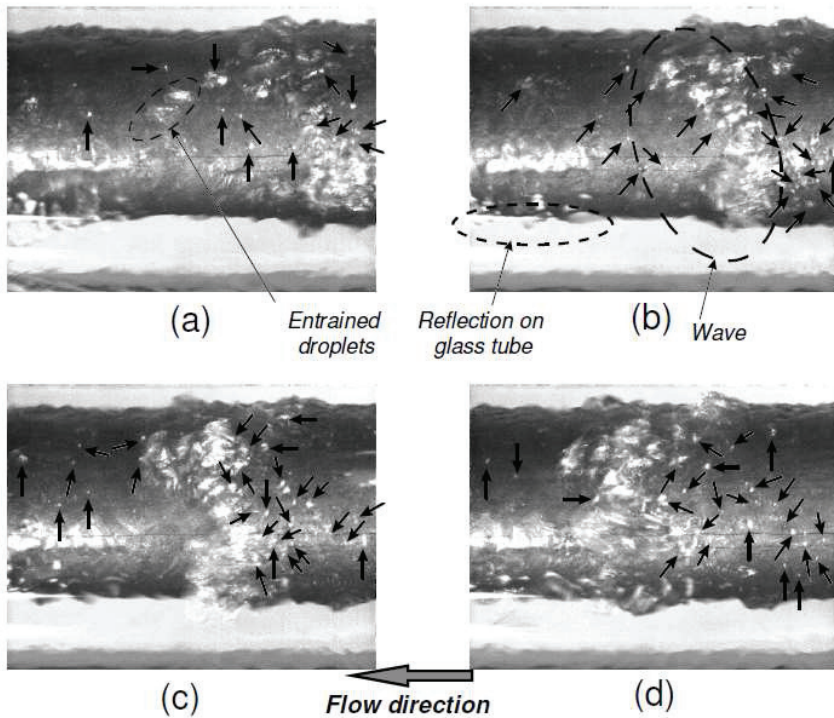
Fica claro a partir das informações acima que só uma abordagem fenomenológica forneceria previsões confiáveis do fenômeno de *dryout*. Tal abordagem é concretizada por meio da modelagem do escoamento anular e, naturalmente, envolveria o conhecimento das taxas de entranhamento de deposição de gotículas, fazendo com que a posição do *dryout* seja dada pela distância em que  $\dot{m}_{LF} = 0$  (Govan, 1990; Barbosa et al., 2000).



**Fig. 9** Variação da vazão de gotículas entranhadas em função do título local (Bennett et al., 1967b)

A interação entre a ativação de sítios de nucleação de bolhas e ondas de perturbação no escoamento anular foi observada por Hewitt et al. (1965). Suas filmagens em alta velocidade revelaram que, como a espessura do filme líquido variava com a presença de ondas de perturbação, isto afetava de alguma forma a intensidade dos sítios de nucleação. Em seus experimentos, as ondas pareciam *acionar*, em vez de *suprimir* a nucleação de bolhas. A quantidade de dados experimentais (número de sequências de imagens) era, entretanto, um tanto quanto limitada e, por isso, os autores não tentaram dar uma explicação para o fenômeno observado. Um fenômeno semelhante foi observado por Marsh e Mudawar (1989) em filmes descendentes com a presença de ondas em sua superfície.

Em um estudo subsequente, Barbosa et al. (2003a) investigaram a interação entre as ondas de perturbação e o início da ebulição nucleada no escoamento anular ascendente de uma mistura de água e vapor d'água em um canal anular especialmente construído para permitir a visualização direta da superfície interna do canal, aquecida por efeito Joule. Maiores detalhes a respeito do aparato experimental podem ser obtidos em Barbosa (2001) e Barbosa et al. (2002a, 2003a). A Fig. 10 mostra uma sequência de imagens indicando a existência de mais sítios de nucleação ativos (setas) a montante da onda (que se desloca da direita para a esquerda) do que à sua frente. Tal fato é uma indicação de que as ondas realmente *acionam* os sítios de nucleação.



**Fig. 10** Identificação da atividade de sítios de nucleação na região da onda de perturbação em um canal anular (Barbosa et al., 2003a).

Existem várias hipóteses que podem explicar a intensificação da nucleação de bolhas observada na região da onda:

1. **Redução do coeficiente de transferência de calor na região de onda.** Como o filme líquido pode ser normalmente de 5 a 6 vezes mais espesso do que a média na região de onda (Hewitt e Nicholls, 1969), se o escoamento for laminar nas ondas, isso implicaria em uma considerável diminuição de coeficiente de transferência de calor, um consequente aumento da temperatura de parede e uma maior propensão à nucleação. No entanto, a modelagem das ondas de perturbação usando técnicas de CFD (Jayanti e Hewitt, 1997) indica que, sob as ondas de perturbação, o coeficiente de transferência de calor por convecção é mais elevado do que no filme entre elas. Assim, foi sugerido por aqueles autores que as ondas de perturbação atuam como bolsões turbulentos se deslocando sobre um substrato laminar. Esta conclusão é

amparada por medições diretas de tensão de cisalhamento na parede sob as de perturbação realizadas por Martin e Whalley (1983), que descobriram que os picos de tensão de cisalhamento na parede ocorrem sob as ondas de perturbação, o que é, por sua vez, consistente com a hipótese de um escoamento altamente turbulento nas ondas. Em vista desta evidência experimental e computacional, parece provável que o coeficiente de transferência de calor aumentará na região de onda, embora não existam nenhuma medições diretas para confirmar esta conclusão.

2. **Redução da pressão na região da onda.** Porque o gás acelera ao escoar sobre a onda, isto acarreta uma redução da pressão nesta região. É possível portanto associar a isto uma redução na temperatura de saturação e uma maior propensão à nucleação. Cálculos aproximados sobre a variação de pressão na passagem da região do substrato para o pico de uma onda indicam uma queda da ordem de 500 Pa, o que corresponde a uma pequena fração de um grau na temperatura de saturação. Logo, é improvável que este seja o efeito responsável pelo aumento temporário na intensidade da nucleação observado experimentalmente.
3. **Entranhamento de pequenas bolhas na região das ondas.** O movimento altamente perturbado da interface líquido-vapor na região das ondas pode dar origem ao entranhamento de pequenas bolhas que podem penetrar à zona mais altamente superaquecida próximo da parede, fenômeno este que pode ser responsável pelo acionamento dos sítios de nucleação lá existentes. O papel do entranhamento de bolhas em filmes finos em regime de ebulição foi discutido, por exemplo, por Mesler (1977) e por Mesler e Mailen (1977). É possível imaginar que pequenas bolhas anexando-se aos sítios de nucleação poderiam crescer e se desprender, deixando outras pequenas bolhas no local, em um processo contínuo, mas que perderia intensidade com o passar do tempo.

Em retrospecto, a explicação mais provável para o efeito observado parece ser o entranhamento de pequenas bolhas, mas deve ser mencionado que nenhuma bolha entranhada (ou processo que a originasse) foi observada nos experimentos descritos em Barbosa et al. (2003a), embora as bolhas possam ter sido muito pequenas para ser vistas. Claramente, mais medições quantitativas são necessárias para elucidar ainda mais este interessante fenômeno.

Com relação à determinação do mecanismo de transferência de calor predominante no escoamento anular, a interpretação clássica (Collier e Thome, 1994) confirma que a convecção forçada é o principal mecanismo, uma vez que a resistência térmica do filme fino é muito pequena para garantir graus de superaquecimento de



parede suficientemente elevados para manter ativos sítios de nucleação. Esta interpretação é refletida em diversas correlações para a transferência de calor na ebulição convectiva, as quais trazem em suas formulações coeficientes de supressão da ebulição nucleada e de intensificação da parcela convectiva dependentes da fração dinâmica do vapor (Chen, 1966; Liu e Winterton, 1991; Steiner e Taborek, 1992).

A interpretação clássica foi contestada por alguns autores, principalmente pelos que acreditavam na ocorrência do fenômeno conhecido como nucleação secundária. De acordo com estes autores, as características da hidrodinâmica do escoamento anular podem levar a as condições nas quais nucleação pode ocorrer mesmo quando geração de bolhas é suprimida na parede aquecida. Mesler e Mailen (1977) observaram em uma fina película em escoamento descendente que a deposição de gotículas ejetadas da superfície do filme devido à ruptura de bolhas causava o entranhamento de bolhas de gás para o filme líquido (de forma análoga a um jato de água colidindo sobre uma superfície livre). Se o filme líquido for suficientemente fino, o gás (sob a forma de pequenas bolhas) pode ser capaz de alcançar a região de líquido superaquecido próximo à parede. Lá, as pequenas bolhas podem atuar como sítios de nucleação (mesmo sob menores graus de superaquecimento da parede), mantendo continuamente o processo de nucleação. Na verdade, Mesler e Mailen (1977) observaram que novas bolhas crescem a partir de perturbações no filme onde ocorreu a ruptura de uma bolha.

Tentativas para elucidar o papel da nucleação secundária<sup>8</sup> no escoamento anular em equilíbrio foram feitas por Chan (1990) e por Sun e Hewitt (2001). O objetivo dos dois trabalhos experimentais era obter valores do coeficiente de transferência de calor, em condições de equilíbrio hidrodinâmico idênticas, para escoamentos em evaporação e condensação. Foi postulado que, se a nucleação secundária fosse um mecanismo importante, logo, os coeficientes de transferência de calor por evaporação seriam superiores aos por condensação. Os dados obtidos por Chan indicaram que os efeitos de nucleação secundária eram relevantes, pois os coeficientes de transferência de calor na evaporação foram consideravelmente mais elevados do que os de condensação. No entanto, as melhorias na exatidão das medições experimentais conduzidas por Sun (1996), que modificou a seção de testes usada anteriormente por Chan (1990), levaram a uma nova série de experimentos e dados para evaporação e condensação, os quais indicaram praticamente nenhuma diferença entre os coeficientes de transferência de calor por evaporação e condensação.

Outro aspecto de extrema importância no contexto da transferência de calor no regime anular diz respeito à mudança de fase de misturas binárias e multicomponentes. Atualmente, existe um consenso na literatura de que, na região onde dominam os efeitos de ebulição nucleada, o coeficiente de transferência de calor para uma mistura é reduzido quando comparado com aquele de um componente único em condições semelhantes. Esta observação é apoiada pela ampla evidência expe-

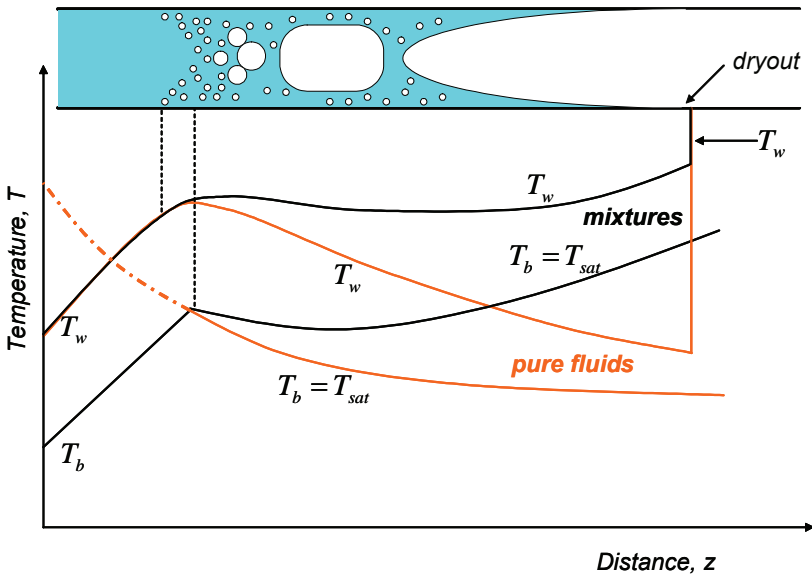
---

<sup>8</sup> Do inglês: secondary nucleation

rimental (Shock, 1982; Thome e Shock, 1984), e resulta de uma combinação de principalmente dois efeitos: (i) uma variação forte e geralmente não-linear das propriedades físicas em função da composição local da mistura, e (ii) uma alteração na taxa de crescimento de bolha devido à resistência de transferência de massa causada pela remoção dos compostos mais voláteis (evaporação preferencial) na camada adjacente à bolha.

Em altos títulos, onde, de acordo com a interpretação clássica predominam os efeitos de convecção forçada, o coeficiente de transferência de calor de misturas também é reduzido em comparação com aquele geralmente observado para substâncias puras.

Em sistemas multicomponentes em evaporação, a diferença de volatilidade entre os componentes dá origem a gradientes axiais de concentração (e, conseqüentemente, de temperatura de saturação) em ambas as fases (líquido e vapor) devido à evaporação preferencial dos componentes mais voláteis, mesmo sob uma condição de equilíbrio local. A Fig. 11, reproduzida de Thome e Shock (1984), ilustra as distribuições axiais da temperatura de saturação e da parede para uma mistura e para um fluido puro passando por uma mudança de fase ao longo de um tubo. À medida que o título aumenta, a fase líquida se torna mais rica no componente menos volátil e a temperatura de saturação do fluido aumenta (em muitos casos, superando a redução associada ao gradiente de pressão negativo na direção axial).



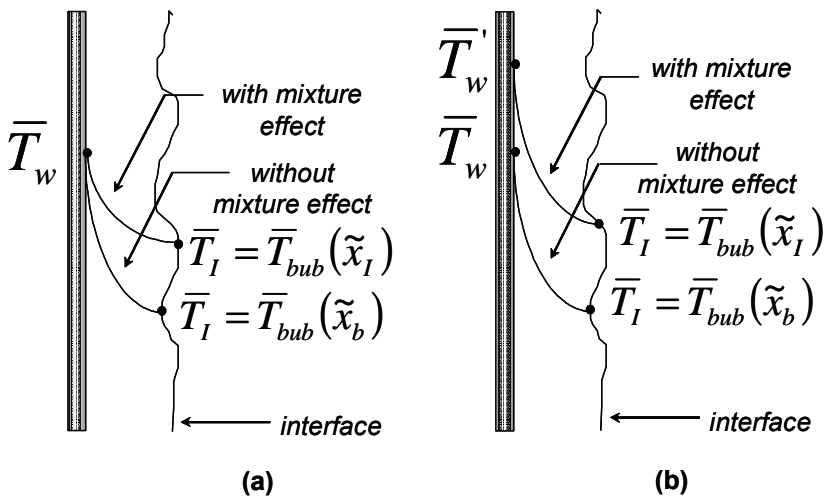
**Fig. 11** Perfis de temperature e regimes de escoamento na ebulição convectiva (Thome e Shock, 1984).

O coeficiente de transferência de calor na mudança de fase de misturas é normalmente definido a partir da seguinte equação,

$$\bar{\alpha} = \frac{q_w''}{(\bar{T}_w - \bar{T}_E)} \quad (70)$$

onde  $q_w''$  é o fluxo de calor imposto à parede do tubo,  $\bar{T}_w$  é a temperatura da parede interna do tubo e  $\bar{T}_E$  é temperatura média de mistura calculada, assumindo equilíbrio, a partir da entalpia da mistura e da pressão. Para o caso de ebulição ou evaporação,  $\bar{T}_E$  é a temperatura de ponto de bolha, e para a condensação, é a temperatura de ponto de orvalho.

No escoamento anular, na ausência de nucleação de bolhas na parede, a redução no coeficiente de transferência de calor associada aos *efeitos de mistura* ocorre de formas distintas, dependendo do tipo de condição de contorno imposta à superfície (Wadekar, 1990). No presente contexto, efeitos de mistura são definidos como a formação de gradientes de concentração adjacentes à interface vapor-líquido resultantes da evaporação preferencial dos componentes mais voláteis. Isso diminui a concentração interfacial do componente mais leve,  $\tilde{x}_I$ , para um valor menor do que a concentração média (*bulk*),  $\tilde{x}_b$ . Por simplicidade, um caso onde é desprezado o intercâmbio de líquido na forma de gotículas entre o filme e o núcleo é mostrado na Fig. 12. As figuras (a) e (b) apresentam perfis de temperatura no filme líquido para condições de contorno de temperatura de parede e de fluxo de calor prescritos, respectivamente. Em ambos os casos, são mostrados os perfis com e sem efeitos de mistura.



**Fig. 12** Perfis de temperatura no filme líquido; (a) temperatura de parede prescrita, (b) fluxo de calor na parede prescrito (Wadekar, 1990).  $\tilde{x}$  denota fração molar.

No caso de temperatura de parede prescrita (Fig. 10.a), a redução do coeficiente de transferência de calor calculado de acordo com a Eq. (70) é devido à redução da força motriz de temperatura de  $\bar{T}_w - \bar{T}_{bub}(\tilde{x}_b)$  para  $\bar{T}_w - \bar{T}_{bub}(\tilde{x}_I)$ . No caso de fluxo de calor prescrito, o aumento da temperatura de interface não muda a força motriz de temperatura. Pelo contrário, esse potencial deve permanecer inalterado para que o produto do coeficiente de transferência de calor local (no filme) e a diferença de temperatura seja igual ao fluxo de calor aplicado<sup>9</sup>.

*Então, o que causa a redução do coeficiente de transferência de calor tão sistematicamente observada na literatura para o caso de fluxo de calor constante? A resposta a esta pergunta está na praticidade com a qual é definido o coeficiente de transferência de calor. Para cálculos de projeto, é mais conveniente se definir  $\bar{\alpha}$  em termos de  $\bar{T}'_w - \bar{T}_{bub}(\tilde{x}_b)$  ao invés de  $\bar{T}'_w - \bar{T}_{bub}(\tilde{x}_I)$ , onde  $\bar{T}'_w$  é geralmente determinada experimentalmente. Como  $\bar{T}_{bub}(\tilde{x}_b)$  é menor que  $\bar{T}_{bub}(\tilde{x}_I)$ , a razão entre o fluxo de calor na parede e o superaquecimento de parede baseado na temperatura de equilíbrio calculada na concentração média também é menor. Espera-se, portanto, que métodos de previsão convencional que não levem esses efeitos em conta superestimem o coeficiente de transferência de calor experimental.*

Conforme mostrado em diversos trabalhos (Barbosa e Hewitt, 2001a; Barbosa e Hewitt, 2001b; Barbosa et al., 2002b; Barbosa et al., 2002c; Barbosa et al. 2003), para quantificar de modo apropriado  $\bar{T}'_w$  e  $\bar{T}_{bub}(\tilde{x}_b)$  no regime anular e, conseqüentemente, prever o coeficiente de transferência de calor na ebulição convectiva, dois mecanismos devem ser contabilizados, a saber, (i) a resistência de transferência de massa resultante da evaporação preferencial de componentes voláteis e a formação de gradientes de concentração adjacentes à interface de fase nas duas fases; e (ii) o não-equilíbrio hidrodinâmico resultante da diferença de concentração média entre o filme líquido e as gotículas no núcleo de gás.

O item (ii) acima é uma consequência direta dos processos de entranhamento e deposição. Entre outros efeitos, estes fenômenos são conhecidos por exercer uma grande influência sobre importantes parâmetros do escoamento, como queda de pressão (Hewitt e Hall-Taylor, 1970). No entanto, a importância do intercâmbio de gotículas no contexto da ebulição convectiva de misturas parece ter sido negligenciada em estudos anteriores e a previsão correta deste mecanismo pode ser a chave para compreender a deterioração do coeficiente de transferência de calor em altos títulos.

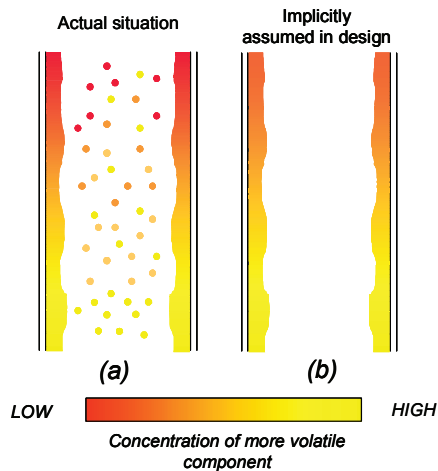
A Fig. 13 ilustra uma interpretação da física do problema de vaporização de uma mistura. Nos cálculos de projeto, o padrão de fluxo bifásico geralmente é ignorado e implicitamente supõe-se que todo o escoamento de líquido está disponível para evaporação (Fig. 13.b). Normalmente, um cálculo de *flash* é usado para determinar a quantidade de líquido que evapora para um dado fluxo de calor na parede e também a temperatura de saturação (ponto de bolha) da mistura. A eva-

---

<sup>9</sup> É assumido de forma implícita que a condutância térmica do filme é insensível a efeitos de mistura. A validade de tal hipótese foi discutida por Shock (1976).

poração preferencial do componente mais volátil dá origem a gradientes axiais de temperatura de saturação e de concentração média nas duas fases.

Em uma situação real, no entanto, onde o padrão anular é a configuração dominante, nem todo o líquido escoava como um filme na parede interna do tubo, já que, ao longo do canal, gotículas estão sendo trocadas entre o filme e o núcleo por entranhamento e deposição. No entanto, essa troca não é rápida o suficiente para manter a uniformidade de composição entre as gotículas e o filme. Tendo em mente que a evaporação das gotas pode ser insignificante quando comparada à do filme líquido (a força motriz de temperatura no filme líquido é muito maior), pode-se argumentar que, numa situação real nem toda a fase líquida estará disponível para evaporação em uma determinada distância ao longo do tubo. Este efeito hidrodinâmico decompõe a relação de equilíbrio termodinâmico existente entre o título e a temperatura de saturação da mistura. Uma consequência deste efeito é aumento da temperatura do filme, da parede e uma redução do coeficiente de transferência de calor. Uma comparação entre o método de cálculo de Barbosa e Hewitt (2001a,b), que leva em conta tais efeitos, e outros métodos disponíveis na literatura, é mostrado na Fig. 14.



**Fig. 13** Distribuição da fase líquida no escoamento anular de uma mistura binária.

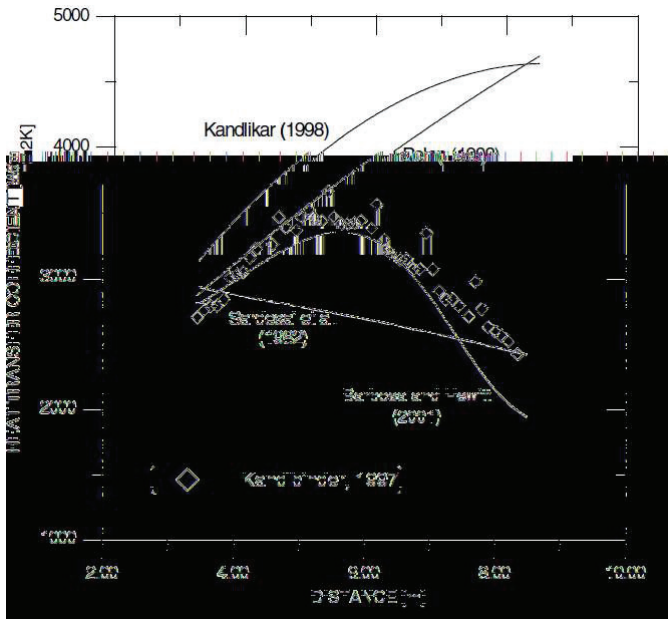


Fig. 14 Predições do coeficiente de transferência de calor na ebulição convectiva de uma mistura de n-pentano e iso-octano (Barbosa et al., 2003b).

## 4. Escoamento no padrão agitado (*churn flow*)

### 4.1. Características do padrão de escoamento

O padrão *churn* é provavelmente o mais complexo e menos compreendido de todos os regimes em canais verticais. Conforme pode ser observado na literatura, o desacordo entre autores diz respeito não só a questões relacionadas à física do escoamento ou os mecanismos de transição para este regime (Nicklin e Davidson, 1962; Mishima e Ishii, 1984; Dukler e Taitel, 1986) mas também a questões relacionadas à própria existência do padrão agitado como um regime com características únicas (Mao e Dukler, 1993; Hewitt e Jayanti, 1993; Jayanti et al., 1993; Barbosa et al., 2001a).

Aqui, o padrão *churn* é definido como um regime que ocorre após a desagregação do padrão *slug* com o aumento da velocidade e/ou da fração mássica do gás. Como visto anteriormente, no escoamento em padrão *churn*, as grandes bolhas alongadas características do regime pistonado desaparecem e, quando o escoamen-

to é visto de fora por meio de um tubo transparente, inversões no sentido da velocidade do escoamento são observadas. A este regime foi dado o nome de “*churn flow*” por muitas décadas (ver Hewitt e Hall-Taylor, 1970), mas suas características fundamentais não foram amplamente investigadas, apesar do regime ocorrer em um intervalo relativamente grande de condições de operação. Alguma confusão foi criada na literatura pelo fato do termo *churn* ter sido usado em pelo menos dois outros contextos,

1. regime de “borbulhamento agitado”<sup>10</sup>, conforme definido, por exemplo, por Zuber e Findlay (1965). Essencialmente, este regime foi cunhado para permitir que formas específicas do modelo *drift-flux* sejam usadas em determinados intervalos de velocidade do gás e do líquido;
2. regime agitado (*churn flow*) definido por Taitel et al. (1980), cuja interpretação foi a de um escoamento em padrão pistonado, ainda em desenvolvimento hidrodinâmico, ao invés de um fluxo desenvolvido, porém com características oscilatórias.

O presente autor considera adequado reter a designação mais antiga para o padrão agitado (*churn flow*), que o estabelece como um importante regime importante intermediário entre os padrões *slug* e anular.

Estudos de visualização realizados por Hewitt et al. (1985) revelaram a natureza do regime de agitado. Essencialmente, ele tem semelhanças com o padrão anular na medida em que existe um núcleo de gás contínuo no centro do canal e uma camada de líquido próxima da parede do canal. Nicklin e Davidson (1962) usaram a denominação alternativa “semi-anular”, a qual naturalmente reconhece a semelhança entre os dois padrões. No entanto, é importante fazer uma distinção entre eles, dado que suas características são tão diferentes. Dentre elas, é possível citar,

1. A desagregação do padrão pistonado é acompanhada por um aumento muito rápido no gradiente de pressão devido à intensificada ação das ondas interfaciais e do atrito. Tal fato é bem ilustrado pelos dados de gradiente de pressão obtidos por Owen (1986), como mostra a Fig. 15. Nesta figura, o gradiente de pressão na forma adimensional é plotado em função da velocidade do gás adimensional,  $U_{GS}^*$ , definida por,

$$U_{GS}^* = U_{GS} \left[ \frac{\rho_G}{gd_T(\rho_L - \rho_G)} \right]^{1/2} \quad (71)$$

---

<sup>10</sup> Do inglês “churn-turbulent”

2. Para  $U_{GS}^* \geq 0.4$ , à medida que se aumenta a vazão de gás, o gradiente de pressão *diminui* com a velocidade do gás (a vazão de líquido sendo constante) devido a um decréscimo na intensidade da interação gás-líquido. Somente em seguida, o gradiente de pressão começa a aumentar novamente com o ingresso no regime anular. Assim, este comportamento é característico do padrão agitado e muito diferente do observado no fluxo anular;

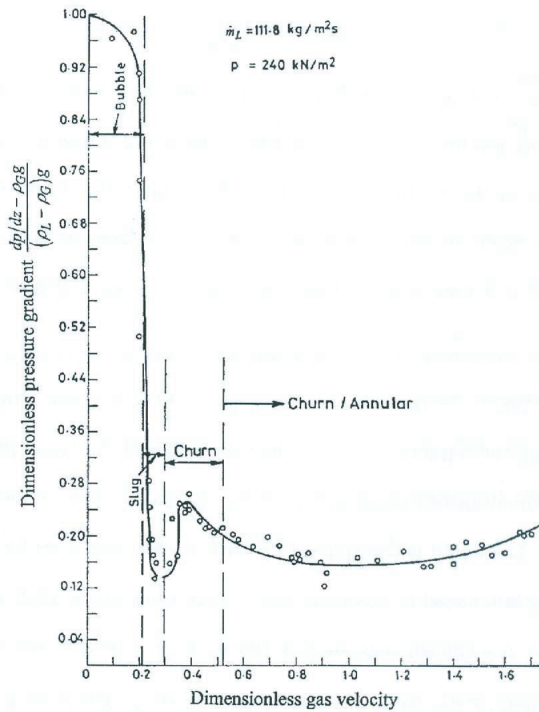
mecanismo do escoamento no padrão *churn* foi estabelecido pelos experimentos de visualização de Hewitt et al. (1985). Nesses ensaios, um corante fotocromático<sup>11</sup> foi utilizado em conjunto com um material para a parede do tubo com um índice de refração semelhante ao da água. Com isso, foi possível visualizar simultaneamente interface entre as fases e o perfil de velocidade instantâneo. O líquido é transportado para cima em grandes ondas que coletam líquido de um filme descendente à sua frente (acima) e descarregam o líquido por baixo formando um filme descendente. O mecanismo identificado por Hewitt et al. (1985) é ilustrado na Fig. 16.

A origem das grandes ondas é semelhante às aquelas que causam o fenômeno de *flooding* no escoamento em contracorrente de misturas gás-líquido. Para ilustrar a semelhança, é necessário rever as medições feitas por Govan et al. (1991), cujo aparato de testes é ilustrado na Fig. 17. Um tubo vertical de diâmetro interno de 31,8 mm foi usado nestes testes com o líquido sendo injetado por uma seção porosa (tubo sinterizado) e sendo removido por outra logo abaixo, conforme mostrado na Fig. 17. O gás entra pela parte inferior da seção de teste, estando totalmente desenvolvido antes de encontrar o líquido (este é um ponto importante; resultados bastante diferentes podem ser obtidos se o fluxo de gás não é desenvolvido).

---

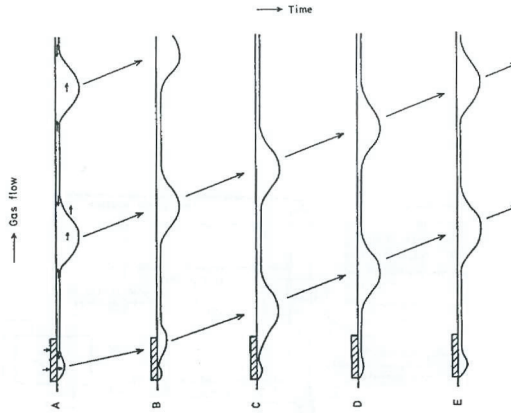
<sup>11</sup> Do inglês “photochromic dye tracing”





**Fig. 15** Gradiente de pressão no escoamento gás-líquido vertical (Owen, 1986).

O fenômeno de *flooding* ocorre nesta situação mediante a formação de uma única onda perto da seção porosa de saída, que então é transportada para cima pela fase gasosa e ultrapassa a seção porosa de entrada na parte superior do canal. Após este ponto, parte do líquido escoo para cima a partir do ponto de injeção e parte para baixo (ver a linha marcada como *downflow* na Fig. 18). Os resultados mostrados na Fig. 18 são para comprimentos de filme descendente (ou seja, a distância entre as seções de parede porosa de entrada e de saída)  $L = 0,3 \text{ m}$  e  $L = 1,0 \text{ m}$ , respectivamente.

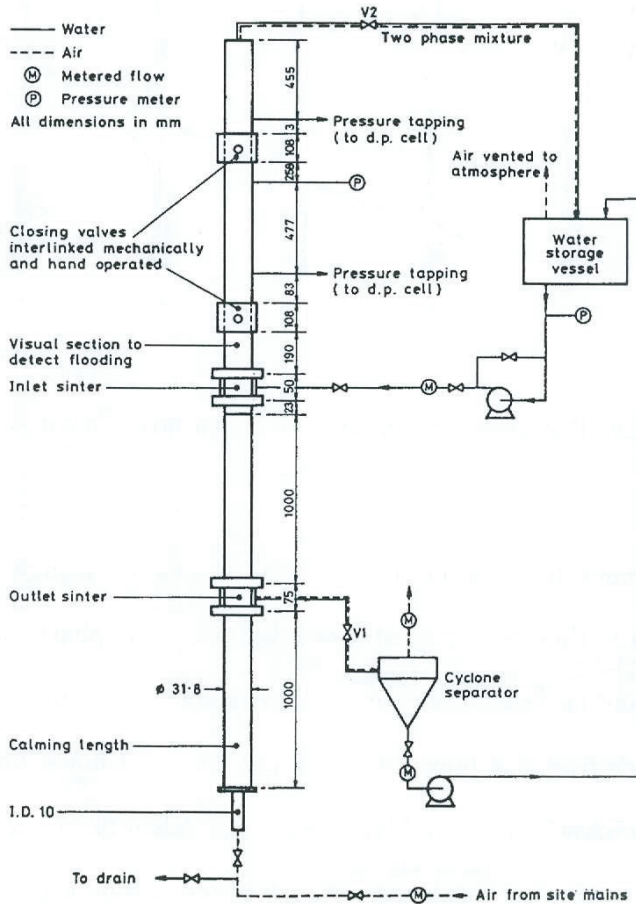


**Fig. 16** Mecanismo físico do escoamento no padrão *churn* (Hewitt et al., 1985)

A região acima do injetor está, na verdade, escoando no padrão *churn* e os mesmos resultados experimentais seriam obtidos nessa região na ausência de uma porção em escoamento na descendente *downflow*. Tal fato foi comprovado por Govan et al. (1991) comparando o gradiente de pressão e a fração de líquido na região acima do injetor com e sem o filme líquido descendente abaixo do injetor. Estes resultados são mostrados na Fig. 19, onde  $\varepsilon_L$  é a fração volumétrica de líquido e  $-dp/dz$  é o gradiente de pressão.

A vazão de líquido mostrada na figura é aquela do líquido *fluindo para cima* no caso onde houve um filme de líquido descendente abaixo do injetor, ou o *fluxo de líquido total* quando esse filme não existe. Logo, a transição para o padrão *churn* é caracterizada por uma capacidade de formar ondas típicas de *flooding*, havendo uma relação direta entre o fenômeno de *flooding* e a existência do padrão *churn*. Na verdade, o *flooding* dentro da bolha de Taylor no escoamento pistonado é, como visto anteriormente, a mais provável explicação para a transição *slug/churn* (Jayanti e Hewitt, 1992, Jayanti et al., 1993).

1. As grandes ondas de *flooding* se rompem à medida que atravessam o canal e uma fração significativa do líquido pode ser entranhada como gotículas. A Fig. 20 mostra resultados obtidos por Wallis (1962), que revelou que a fração entranhada *diminui* com a velocidade do gás em uma região que é claramente de regime *churn*, para só então voltar a *aumentar* com a velocidade do gás quando se adentra a região do padrão anular. No escoamento em correntes paralelas na descendente, ondas típicas de *flooding* não são formadas e a fração entranhada vai suavemente para zero à medida que a vazão de gás é diminuída.



**Fig. 17** Aparato experimental usado por Govan *et al.* (1991)

As características do padrão *churn* descritas acima são aquelas que tornam o regime muito distinto do padrão anular, justificando assim a necessidade de uma classificação separada.

Embora uma grande quantidade de trabalhos tenha sido realizada visando uma caracterização detalhada do escoamento anular, a literatura sobre o padrão *churn* é bem mais limitada. Além do trabalho de visualização realizado por Hewitt *et al.* (1985), Barbosa *et al.* (2001b) (ver também Govan, 1990) utilizaram métodos especiais de visualização (especificamente um injetor de líquido transparente) para observar a formação de ondas no padrão *churn* e sua translação ao longo do canal após a formação. O injetor consistia em um trecho de tubo plástico onde um grande número de pequenos orifícios foram feitos, propiciando uma entrada suave do líquido análoga àquela produzida por uma seção de parede porosa.

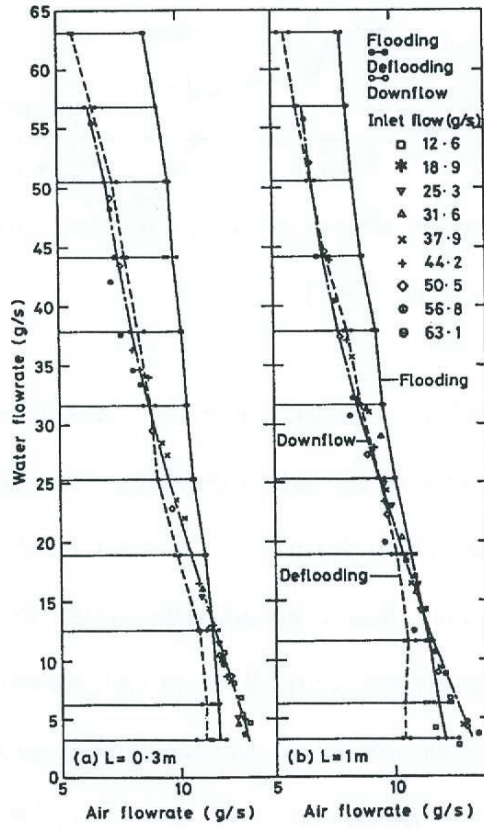
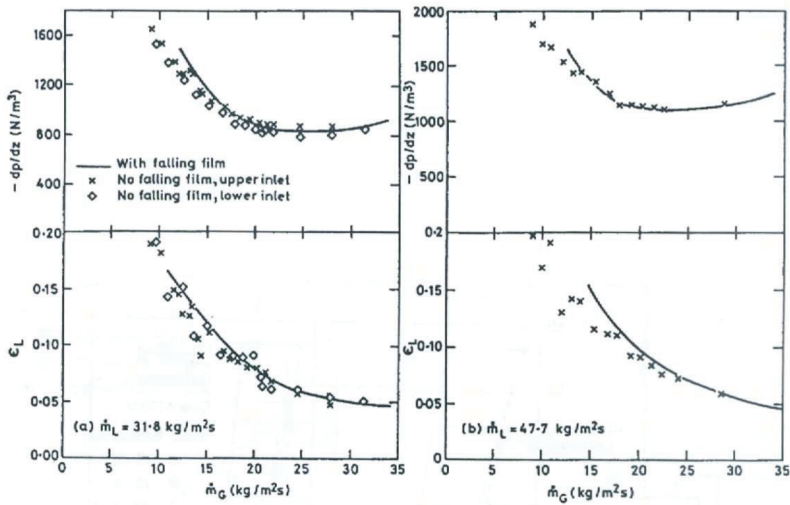
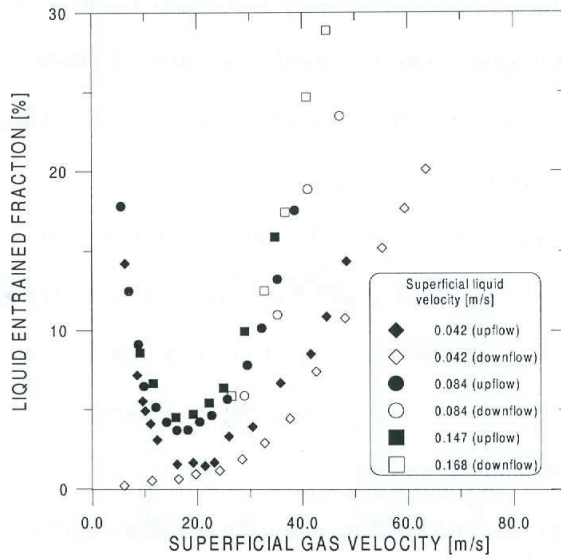


Fig. 18 Resultados experimentais para *flooding*, *deflooding* e *downflow* com injetor poroso (Govan *et al.*, 1991)



**Fig. 19** Comparação do gradiente de pressão e da retenção de líquido com e sem o filme descendente abaixo do injetor (Govan *et al.*, 1991)



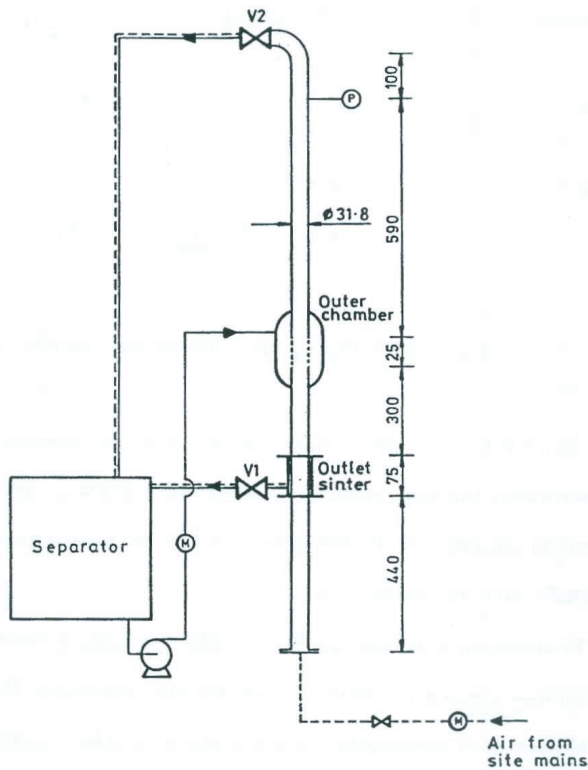
**Fig. 20** Variação da fração entranhada com a velocidade do gás (Wallis, 1962).

O arranjo experimental utilizado nesse estudo é mostrado na Fig. 21. Ar foi alimentado pela parte inferior da seção de testes e água é bombeada para um revestimento transparente em torno da seção de admissão. O líquido que adentra a seção de admissão pode deixá-la por meio de duas rotas distintas, (i) *para cima*, por meio do separador do aparato, (ii) ou *para baixo*, sendo removido por uma tomada de saída sinterizada.

A remoção do ar pela seção sinterizada de saída (cuja finalidade é remover o filme descendente) foi controlada e minimizada pela ação da válvula V1, e a pressão na seção de testes foi mantida a 1,33 bar usando a válvula V2. O procedimento experimental adotado foi o seguinte: o fluxo de ar é iniciado com o valor desejado e, em seguida, o líquido é injetado pelo dispositivo transparente com uma vazão baixa. Nestas circunstâncias, o líquido escoava para baixo como um filme descendente (em contra corrente com o fluxo de gás) e deixa o sistema pela seção de saída. Então, a vazão de gás é aumentada até que ocorra o *flooding*. Nesta condição, uma grande onda se forma junto da sinterização de saída, é transportada para cima pelo gás e inicia o escoamento no padrão *churn* na parte superior da seção. Ondas se formam repetidamente na região de admissão de líquido, podendo ser observadas claramente. Uma fração do líquido continua a escoar para baixo (correspondendo à curva de *downflow* na Fig. 18), o que gera, basicamente, duas regiões: uma acima do injetor que se encontra no padrão *churn* e outra abaixo dele em escoamento de filme líquido descendente com o gás em contracorrente. A vazão do líquido produzido no topo da coluna pode ser estimada a partir da diferença (no eixo das ordenadas) entre a vazão total injetada e a vazão de líquido na descendente obtida pela curva de *downflow* para uma dada vazão de gás.

Barbosa et al. (2001b) observaram o comportamento do escoamento no injetor de água com uma câmera de vídeo de alta velocidade. Eles mediram as frequências das ondas, e a velocidade e a posição de uma dada onda ao longo da seção em função do tempo. A partir da seqüência de imagens produzida, várias características das ondas foram avaliadas (tais como reversões de fluxo, entranhamento etc.), as quais demonstraram estar de acordo com os mecanismos propostos por Hewitt et al. (1985) e ilustrados na Fig. 16.

Conforme esperado, a frequência das ondas aumenta com a vazão de líquido, já que as ondas crescem mais rapidamente. Com a diminuição da velocidade do gás, é mais longo o período de crescimento e aceleração e a velocidade média de deslocamento da onda se torna inferior. De uma maneira geral, observou-se que a velocidade da onda é cerca de 20% da velocidade superficial de gás (que foram variadas de 2,8 a 6,5 m/s).



**Fig. 21** Aparato experimental usado nos estudos de visualização de Barbosa et al. (2001b) e Govan (1990).

Finalmente, foi proposto um modelo simplificado para o crescimento e transporte de uma onda adjacente à seção de injeção do líquido (ver Fig. 22) baseado em balanços de massa e de quantidade de movimento em ondas de perfil senoidal que crescem entre filmes de líquido que escoam na descendente (Barbosa et al., 2001b) mediante a ação de forças de pressão, gravitacionais e de cisalhamento na parede e interfacial. Apesar das inúmeras hipóteses envolvidas, foi obtida uma razoável concordância entre os resultados experimentais e numéricos para a distância percorrida pelas ondas na região do injetor, como mostra a Fig. 23.

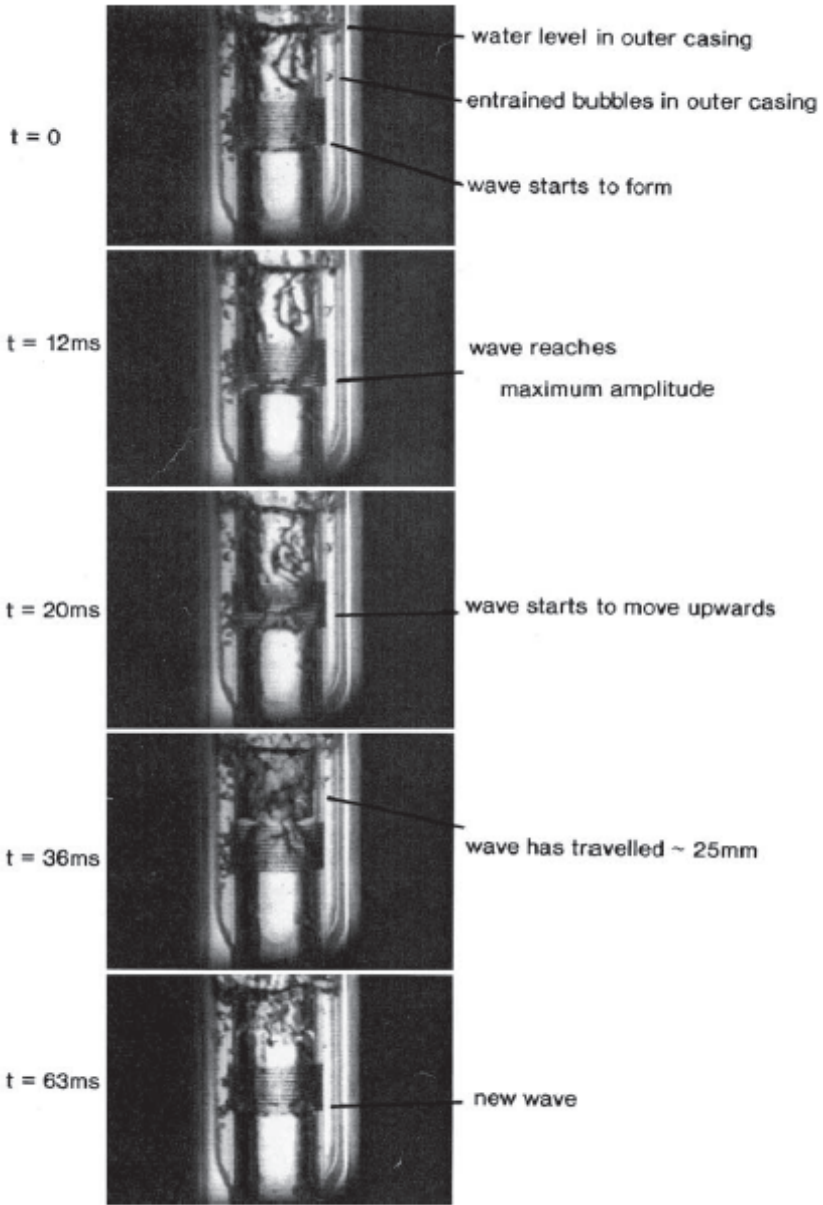
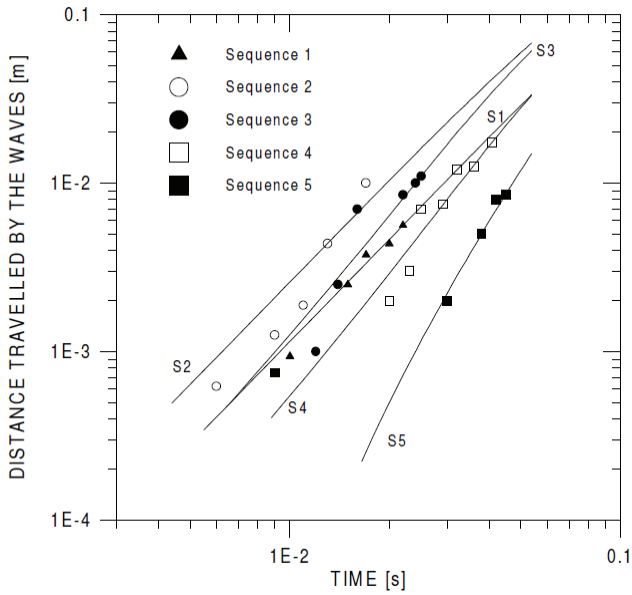


Fig. 22 Crescimento e transporte de uma onda (Barbosa et al., 2001b; Govan, 1990).





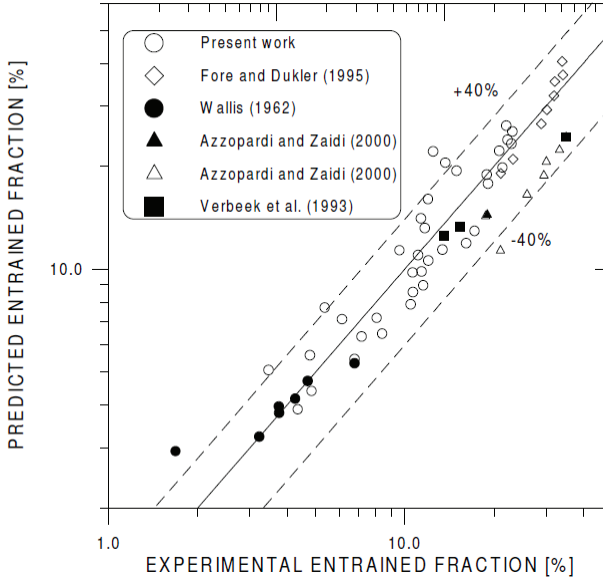
**Fig. 23** Resultados do modelo para a distância percorrida pelas ondas Barbosa et al. (2001b).

Mais recentemente, Da Riva e Del Col (2009) realizaram um estudo numérico do padrão *churn* em tubos verticais por meio da simulação do crescimento de uma onda junto a um injetor sob a ação do escoamento ascendente de gás. Eles utilizaram o modelo VOF disponível no pacote comercial Fluent e compararam algumas de suas simulações com os resultados experimentais de Barbosa et al. (2001b) para a frequência das ondas, obtendo razoável concordância.

Com relação ao fenômeno de entranhamento de líquido nas redondezas da transição entre o padrão *churn* e o anular, são os seguintes trabalhos em que dados experimentais foram coletados para a fração da vazão de líquido entranhada sob a forma de gotas: Wallis (1962), Verbeek et al. (1993), Fore e Dukler (1995), Azzopardi e Zaidi (2000) e Barbosa et al. (2002d). Todos esses pesquisadores observaram comportamento semelhante ao apresentado na Fig. 20, isto é, a presença de um mínimo em algum ponto no caminho da transição para o padrão anular. Azzopardi e Wren (2004) discutem as faixas de valores dos parâmetros avaliados pelos autores e as técnicas experimentais empregadas. A mais extensa base de dados foi gerada por Barbosa et al. (2002), que propuseram a seguinte correlação para a fração entranhada para a faixa de  $U_{GS}^*$  entre 0,9 e 1,3,

$$e_{fo} = 3,4255 D_t^2 \left( \frac{\rho_L \dot{m}_L}{\rho_G \dot{m}_G} \right)^2 + 0,0095 \quad (72)$$

A correlação (ver Fig. 24) é válida para valores de fluxo de massa de líquido entre 11 e 334 kg/m<sup>2</sup>.s, pressão entre 1,33 e 5,2 bar e diâmetro interno do tubo entre 12,7 e 50,8 mm.



**Fig. 24** Correlação para a fração entranhada na região de transição para o padrão anular.

Uma investigação mais aprofundada sobre a natureza do líquido entranhado na região de transição entre os padrões *churn* e anular foi feita recentemente por van't Westende et al. (2007). Eles realizaram medições simultâneas de tamanho e velocidade de gotículas entranhadas, em ambos os padrões, com o intuito de elucidar o real papel das gotículas na transição do regime de escoamento com filme de líquido unidirecional ascendente para aquele em que há alternâncias no sentido do fluxo do filme de líquido. Técnicas de anemometria baseada no Efeito Doppler foram usadas em conjunto com medições do gradiente de pressão, vazão de líquido descendente (*downflow*) e vazão de líquido entranhada. As principais conclusões deste trabalho são que (i) critérios de transição entre padrões unidirecionais (anular) e contracorrente (*churn*) baseados em balanços de força em gotículas suspensas (como o critério de Turner et al., 1969) não representam adequadamente a física do fenômeno de reversão do escoamento, já que não foram observadas durante os ensaios gotículas escoando em contracorrente com o gás; (ii) a presença de gotas entranhadas reduz o gradiente de pressão total e a tensão de cisalhamento. Isto faz com que o filme de líquido seja mais estável no escoamento unidirecional, já que o entranhamento reduz a espessura de líquido neste regime. No padrão *churn*, a espessura do filme não é tao afetada pelo entranhamento e a redução do cisalhamento interfacial faz aumentar o fluxo reverso (*downflow*).

## 4.2. Modelagem do escoamento no padrão churn

Há dois modelos simplificados para a previsão do gradiente de pressão e da fração de gás no padrão churn: o de Jayanti e Brauner (1994) e o de Sawai et al. (2004). Jayanti e Brauner (1994) propuseram um modelo exclusivo para o padrão churn baseado em balanços de força no núcleo de gás e no tubo, conforme descrito abaixo,

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{4}{d_T} \frac{\tau_I}{\sqrt{\varepsilon}} + \rho_G g \quad (73)$$

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{4}{d_T} \tau_{wL} + [\rho_L(1-\varepsilon) + \rho_G\varepsilon]g \quad (74)$$

onde  $\tau_{wL}$  é a tensão de cisalhamento média (supõe-se que somente o líquido entra em contato com a parede), a qual pode ser calculada com base na vazão de líquido somente, desprezando a sua dependência no tempo (caráter oscilatório). Logo,

$$\tau_{wL} = \frac{1}{2} \rho_L f_L \left( \frac{U_{LS}}{1-\varepsilon} \right)^2 \quad (75)$$

$f_L$  é estimado a partir de relações para escoamentos monofásicos. Assim, para  $Re_L < 2100$ ,

$$f_L = \frac{16}{Re_L} \quad (76)$$

e para  $Re_L > 2100$ ,

$$f_L = 0,079 Re_L^{-0,25} \quad (77)$$

De forma semelhante, a tensão de cisalhamento interfacial média pode ser escrita como,

$$\tau_I = \frac{1}{2} \rho_G f_I \left( \frac{U_{GS}}{\varepsilon} \right)^2 \quad (78)$$

onde  $f_I$  é o coeficiente de atrito interfacial. Jayanti e Brauner sugeriram, baseados em comparações com resultados experimentais de Govan et al. (1991), que  $f_I$  seria melhor avaliado por uma média aritmética das correlações de Bharathan (ver Bharathan e Wallis, 1983) (para o regime pós-*flooding* no escoamento em contracorrente) e de Wallis (1969) (para o padrão anular),

$$f_I = \frac{1}{2} (f_{I_{Bharathan}} + f_{I_{Wallis}}) \quad (79)$$

onde,

$$f_{I_{Bharathan}} = 0,005 + 14,4(1 - \varepsilon)^{2,04} \quad (80)$$

$$f_{I_{Wallis}} = 0,005 + 0,375(1 - \varepsilon) \quad (81)$$

Jayanti e Brauner (1994) compararam as previsões de gradiente de pressão usando o modelo acima com os resultados experimentais de Owen (1986), e observaram que quase todos os pontos experimentais (abrangendo uma faixa de fluxo de massa de líquido de 5 a 400 kg/m<sup>2</sup>s<sup>1</sup>) foram bem previstos e se encontraram dentro de uma zona de  $\pm 20\%$  do gradiente de pressão medido.

Várias tentativas foram feitas para desenvolver correlações separadas para o coeficiente de atrito interfacial no padrão *churn*. Em um relato mais completo do trabalho de Bharathan (Bharathan e Wallis, 1983), o coeficiente de atrito no regime pós-*flooding* foi correlacionado pela seguinte expressão (incluindo o diâmetro do tubo como um parâmetro),

$$f_I = 0,005 + 10 \left( \frac{-0,56 + \frac{9,07}{d_T^*}}{d_T^*} \right) \left[ \frac{d_T^* (1 - \varepsilon)}{4} \right] \left( \frac{1,63 + \frac{4,74}{d_T^*}}{d_T^*} \right) \quad (82)$$

onde,

$$d_T^* = d_T \sqrt{\frac{(\rho_L - \rho_G)g}{\sigma}} \quad (83)$$

Relações alternativas para  $f_I$  foram propostas por Abe *et al.* (1991) e Kelly e Freitas (1993).

Mais recentemente, Sawai et al. (2004) realizaram um estudo sobre o escoamento gás-líquido no padrão *churn* com o intuito de caracterizar a estrutura interfacial do filme líquido (amplitude e velocidade das ondas) e avaliar quantitativa-

mente o comportamento do gradiente de pressão em função da velocidade superficial do gás. Eles propuseram correlações para o gradiente de pressão e para a fração de vazio a partir de um multiplicador bifásico de Martinelli e de uma relação de deslizamento (*drift-flux*), respectivamente. Um resumo das equações de Sawai et al. (2004) é apresentado abaixo,

$$\varepsilon_G = \frac{U_{GS}}{a(U_{GS} + U_{LS}) + b} \quad (84)$$

$$\left. \frac{dp}{dz} \right|_f = \frac{2}{d_T} \Phi_L^2 f_w \rho_L U_{LS}^2 \quad (85)$$

$$\Phi_L^2 = \frac{0,06}{U_{GS}^{2,16} U_{LS}^{1,2}} \text{Re}_L^{0,75} (1 - \varepsilon_G)^{-1,75} \quad (86)$$

$$f_w = \begin{cases} 16/\text{Re}_L & \text{Se } \text{Re}_L < 3000 \\ 0,0791/\text{Re}_L^{0,25} & \text{Se } \text{Re}_L > 3000 \end{cases} \quad (87)$$

$$\text{Re}_L = \frac{\rho_L U_{LS} d_T}{\mu_L} \quad (88)$$

Até o presente momento, não há, de acordo com o conhecimento deste autor, modelo específico para a transferência de calor no regime *churn*.

## 5. Escoamento no padrão *slug* (aspectos da modelagem)

Há uma enormidade de métodos e modelos para descrever os escoamento no padrão *slug* em canais verticais. A maior parte deles é do tipo célula unitária, os quais se fazem valer da estrutura intermitente do escoamento para formular equações de conservação e relações de fechamento associadas às duas regiões principais, isto é, a bolha de Taylor e o pistão de líquido. Exemplos de modelos de célula unitária disponíveis na literature desde os anos 1980 são os de Fernandes et al. (1983), Orell e Rembrand (1986), Sylvester (1987) e De Cachard e Delhaye (1996). Tais modelos se baseiam em soluções de equações de conservação de

massa e quantidade de movimento médias no tempo e no espaço para as regiões da bolha e do pistão amparadas em relações de fechamento apropriadas.

Para o presente texto, foi selecionado o modelo de Cachard e Delhay (1996), que é simples e ainda assim abrangente, e captura alguns dos aspectos importantes do padrão slug, como os sentidos opostos do cisalhamento na parede nas regiões da bolha de Taylor e do pistão.

Neste modelo, o escoamento no padrão *slug* totalmente desenvolvido e em regime permanente é descrito como uma sucessão de células unitárias idênticas. Uma célula unitária consiste de uma bolha de Taylor cilíndrica rodeada por um filme de líquido descendente um pistão de líquido, conforme mostra a Fig. 25.

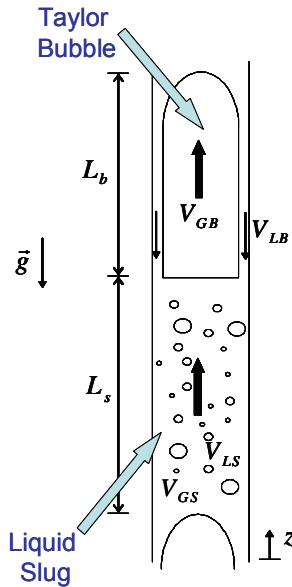


Fig. 25 Diagrama esquemático da célula unitária.

Uma faceta muito complexa do padrão *slug* é a compreensão e a previsão dos mecanismos pelos quais o gás é entranhado sob a forma de pequenas bolhas no pistão de líquido. Um critério para a existência de pistões não-aerados é escrito em termos de número de Bond do seguinte modo,

$$Bo \equiv \frac{(\rho_L - \rho_G)g d_T^2}{\sigma} < 140 \quad (89)$$

Na maioria dos casos, os valores do número de Bond são bastante superiores a este limite e o entranhamento de gás no pistão de líquido não pode ser desprezado. No artigo original de Cachard e Delhay (1996), o entranhamento de gás no

pistão foi desprezado uma vez que  $Bo \approx 140$  em seus estudos. No que segue, uma extensão do modelo de Cachard e Delhaye levando em conta o entramento de gás no pistão é apresentada.

A fração de intermitência é dada pela seguinte relação,

$$\beta \equiv \frac{L_{TB}}{L_{TB} + L_S} \quad (90)$$

As equações da continuidade instantâneas para o gás, para o líquido e para a mistura são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{\varepsilon} \tilde{V}_G) = 0 \quad (91)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - \tilde{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial z} [(1 - \tilde{\varepsilon}) \tilde{V}_L] = 0 \quad (92)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [\tilde{\varepsilon} \tilde{V}_G + (1 - \tilde{\varepsilon}) \tilde{V}_L] = 0 \quad (93)$$

onde  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\tilde{V}_G$  e  $\tilde{V}_L$  são a fração de vazio e as velocidades do gás e do líquido, todas instantâneas. A integração das equações acima na célula unitária, para as fases líquido e gás, fornece,

$$\beta \varepsilon_B V_{GB} + (1 - \beta) \varepsilon_S V_{GS} = U_{GS} \quad (94)$$

$$\beta (1 - \varepsilon_B) V_{LB} + (1 - \beta) (1 - \varepsilon_S) V_{LS} = U_{LS} \quad (95)$$

A integração da equação da mistura fornece,

$$\tilde{\varepsilon} \tilde{V}_G + (1 - \tilde{\varepsilon}) \tilde{V}_L = \text{constante} = U_M \quad (96)$$

onde  $U_M$  é a velocidade superficial da mistura. Especificando as variáveis do escoamento *slug*, primeiro para a região da bolha de Taylor e depois para o pistão de líquido, tem-se,

$$\varepsilon_B V_{GB} + (1 - \varepsilon_B) V_{LB} = U_M \quad (97)$$

$$\varepsilon_S V_{GS} + (1 - \varepsilon_S) V_{LS} = U_M \quad (98)$$

O modelo de célula unitária é complementado com relações de fechamento para a velocidade da bolha de Taylor,  $V_{GB}$ , para a velocidade do filme descendente,  $V_{LB}$ , e para a fração de vazio no pistão de líquido,  $\varepsilon_S$ . As seguintes hipóteses são adotadas: (i) o escoamento no filme de líquido é plenamente desenvolvido, (ii) o escoamento no pistão é plenamente desenvolvido e (iii) não há deslizamento entre o gás e o líquido no pistão, ou seja,  $V_{LS} = V_{GS}$ .

Para a velocidade da bolha de Taylor, a expressão de Nicklin et al. (1962) é utilizada,

$$V_{GB} = 1,2U_M + V_0 \quad (99)$$

O coeficiente 1,2 na equação acima representa a existência de um perfil de velocidade turbulento no pistão de líquido.  $V_0$  é a velocidade ascendente de uma bolha de Taylor em um líquido estagnado. De Cachard e Delhay (1996), dentre outros (Wallis, 1969), adotaram a correlação de White e Beardmore (1962):

$$V_0 = \gamma(g d_T)^{1/2} \quad (100)$$

onde,

$$\gamma = 0.345 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{0.01 N_f}{0.345}\right) \right] \left[ 1 - \exp\left(\frac{3.37 - Bo}{m}\right) \right] \quad (101)$$

$$N_f = \frac{[d_T^3 g (\rho_L - \rho_G) \rho_L]^{1/2}}{\eta_L} \quad (102)$$

e,

$$m = \begin{cases} 10 & \text{when } N_f > 250 \\ 69/N_f^{-0.35} & \text{when } 18 < N_f < 250 \\ 25 & \text{when } N_f < 18 \end{cases} \quad (103)$$

O filme líquido ao redor da bolha de Taylor é modelado como um filme fino, sem tensão de cisalhamento, no interior de um tubo vertical. Para o escoamento de uma película laminar, a espessura do filme,  $\delta$ , se relaciona à velocidade do filme por meio da relação de Nusselt,



$$\delta \left( \frac{g \rho_L^2}{\eta_L^2} \right)^{1/3} = (3 \text{Re}_F)^{1/3} \quad (104)$$

onde  $\text{Re}_F$  é o número de Reynolds do filme descendente dado por,

$$\text{Re}_F \equiv -V_{LB} \frac{\rho_L \delta}{\eta_L} \quad (V_{LB} < 0) \quad (106)$$

Para o escoamento turbulento, segundo Belkin et al. (1959) e Wallis (1969),

$$\delta \left( \frac{g \rho_L^2}{\eta_L^2} \right)^{1/3} = 0.159 \text{Re}_F^{2/3} \quad (107)$$

As duas relações acima se encontram em  $\text{Re}_F \cong 750$ . Fazendo uso da definição do número de Reynolds da película e da relação geométrica entre a espessura do filme e a fração de vazio na bolha de Taylor,

$$\delta = \frac{d_T}{2} (1 - \varepsilon_B^{1/2}) \quad (108)$$

obtém-se,

$$V_{LB} = \begin{cases} -0.333 \left( \frac{g d_T^2 \rho_L}{\eta_L} \right) (1 - \varepsilon_B^{1/2})^2, & \text{when } \text{Re}_F < 750 \\ -11.2 [g d_T (1 - \varepsilon_B^{1/2})]^{1/2}, & \text{when } \text{Re}_F > 750 \end{cases} \quad (109)$$

A fração de vazio no pistão de líquido é calculada pelo modelo de Barnea e Brauner (1985),

$$\varepsilon_S = 0.058 \left[ d_c \left( \frac{2 f_M U_M^3}{d_T} \right)^{0.4} \left( \frac{\rho_L}{\sigma} \right)^{0.6} - 0.725 \right]^2 \quad (110)$$

onde, para escoamentos verticais,

$$d_c = 2 \left[ \frac{0.4 \sigma}{g(\rho_L - \rho_G)} \right]^{1/2} \quad (111)$$

O fator de atrito,  $f_M$ , é avaliado com base na velocidade de mistura,

$$f_M = 0.046 \left( \frac{U_M d_T \rho_L}{\eta_L} \right)^{-0.2} \quad (112)$$

Por fim, para resumir, os parâmetros do escoamento *slug*  $\beta$ ,  $\varepsilon_B$ ,  $\varepsilon_S$ ,  $V_{GB}$ ,  $V_{LB}$ ,  $V_{GS}$ ,  $V_{LS}$  podem ser computados a partir das velocidades superficiais  $U_{GS}$ ,  $U_{LS}$  (or  $U_M = U_{GS} + U_{LS}$ ) com o seguinte conjunto de equações:

$$U_{GS} = \beta \varepsilon_B V_{GB} + (1 - \beta) \varepsilon_S V_{GS} \quad (113)$$

$$\varepsilon_B V_{GB} + (1 - \varepsilon_B) V_{LB} = U_M \quad (114)$$

$$\varepsilon_S V_{GS} + (1 - \varepsilon_S) V_{LS} = U_M \quad (115)$$

$$V_{GB} = 1.2 U_M + V_0 \quad (116)$$

$$V_{LB} = f(\varepsilon_B, g, d_T, \rho_L, \eta_L) \quad (117)$$

$$\varepsilon_S = f(U_M, g, d_T, \rho_L, \rho_G, \eta_L, \sigma) \quad (118)$$

Depois de se resolver o conjunto de equações acima por um procedimento iterativo, pode-se calcular o gradiente de pressão no padrão *slug*. Na região do pistão de líquido, o gradiente de pressão devido ao atrito é dado por,

$$-\left. \frac{dp}{dz} \right|_{f,S} = \frac{f_S \rho_S U_M^2}{2d_T} \quad (119)$$

onde  $f_S$  é o fator de atrito no pistão de líquido calculado por meio da relação de Blasius.  $\rho_S$  é a densidade equivalente do pistão e  $\eta_S$  sua viscosidade equivalente, as quais são calculadas por,

$$\frac{1}{\rho_S} = \frac{x_S}{\rho_G} + \frac{(1 - x_S)}{\rho_L} \quad (120)$$

$$\frac{1}{\eta_S} = \frac{x_S}{\eta_G} + \frac{(1-x_S)}{\eta_L} \quad (121)$$

onde  $x_S$  é a fração mássica de gás no pistão de líquido calculada assumindo escoamento homogêneo. Logo,

$$x_S = \frac{\rho_G \varepsilon_S}{[\rho_L(1-\varepsilon_S) + \rho_G \varepsilon_S]} \quad (122)$$

Na bolha de Taylor, uma vez que o film esteja totalmente desenvolvido, seu peso é totalmente equilibrado pelo atrito na parede. Assim, o termo de atrito é o oposto do termo gravitacional,

$$-\left. \frac{dp}{dz} \right|_{f,B} = -\rho_L g(1-\varepsilon_B) \quad (123)$$

O termo de atrito médio é dado por,

$$-\left. \frac{dp}{dz} \right|_f = -(1-\beta) \left. \frac{dp}{dz} \right|_{f,S} - \beta \left. \frac{dp}{dz} \right|_{f,B} \quad (124)$$

e o gravitacional, por sua vez,

$$-\left. \frac{dp}{dz} \right|_f = (1-\beta)g[\rho_L(1-\varepsilon_S) + \rho_G \varepsilon_S] + \beta g[\rho_L(1-\varepsilon_B) + \rho_G \varepsilon_B] \quad (125)$$

Segundo De Cachard e Delhaye (1996), a fração de vazio média é dada por,

$$\varepsilon = (1-\beta)\varepsilon_S + \beta\varepsilon_B \quad (126)$$

a qual apresenta boa concordância com a correlação de Zuber et al. (1967) (cf., Collier and Thome, 1994) para a fração de vazio no escoamento *slug*.

### 5.1. Transferência de calor

Com relação à transferência de calor no regime *slug*, o trabalho de referência (pelo menos no que diz respeito ao escoamento vertical) tem sido o de Barnea and Yacoub, 1983), que definem a temperatura média da parede por meio da seguinte equação (admitindo uma condição de contorno de fluxo de calor prescrito),

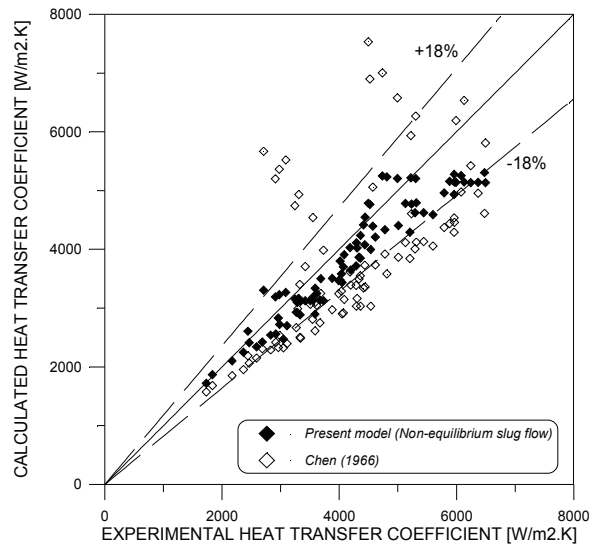
$$\begin{aligned}
\bar{T}_w &= \frac{1}{t_{sp}} \int_0^{t_{sp}} T_w dt = \frac{1}{t_{sp}} \left[ \int_0^{t_{sf}} T_w dt + \int_{t_{sf}}^{t_{sf}+t_{ss}} T_w dt \right] = \\
&= \frac{1}{t_{sp}} (t_{sf} \bar{T}_{w,f} + t_{ss} \bar{T}_{w,S}) = \\
&= \beta \bar{T}_{w,f} + (1 - \beta) \bar{T}_{w,S}
\end{aligned} \tag{127}$$

Barbosa e Hewitt (2005) e Barbosa et al. (2007), em seu modelo para a descrição de efeitos de não-equilíbrio e intensificação da transferência de calor a baixos títulos durante a ebulição convectiva de hidrocarbonetos e água a baixa pressão, fizeram uso do modelo de Chen (1966) para determinar as temperaturas de parede locais, média temporais. Estas são dadas por,

$$\bar{T}_{w,S} = \frac{q_w'' + \bar{\alpha}_{fc,S} \bar{T}_S + \bar{\alpha}_{nb,S} T_{sat}}{\bar{\alpha}_{fc,S} + \bar{\alpha}_{nb,S}} \tag{128}$$

$$\bar{T}_{w,f} = T_{sat} + \frac{q_w''}{\bar{\alpha}_{fc,f} + \bar{\alpha}_{nb,f}} \tag{129}$$

Os termos associados à convecção forçada e à ebulição nucleada nas regiões do filme descendente e do pistão de líquido,  $\bar{\alpha}_{fc,f}$  e  $\bar{\alpha}_{fc,S}$  foram calculados usando a correlação de Chun e Seban (1971) e a correlação de Chen (1966) modificada de acordo com Butterworth e Shock (1982) para lidar com efeitos de subresfriamento. Os termos de ebulição nucleada  $\bar{\alpha}_{nb,f}$  e  $\bar{\alpha}_{nb,S}$  foram calculados com o modelo de Chen (1966). Uma comparação deste modelo modificado com a correlação de Chen é mostrada na Fig. 26, para a previsão dos dados de Kandlbinder (1997).



**Fig. 26** Comparação entre o desempenho do modelo de transferência de calor no padrão *slug* e a correlação de Chen (1966) na previsão dos dados de Kandlbinder (1997) para a ebulição convectiva de pentano e iso-octano (Barbosa e Hewitt, 2005).

## 6. Referências bibliográficas

- Y. Abe, H. Akimoto, Y. Mura. Estimation of shear stress in countercurrent annular flow. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 28(3):208-217, 1991.
- V.M. Alipchenkov, R.I. Nigmatulin, S.L. Soloviev, O.G. Stonik, L.I. Zaichik, Y.A. Zeigarnik. A three-fluid model for two-phase dispersed annular flow, *International Journal of Multiphase Flow*, 47: 5323-5338, 2004.
- G. H. Anderson, G.B. Mantzouranis. Two-phase (gas-liquid) flow phenomena. 1: Pressure drop and hold-up for two-phase flow in vertical tubes. *Chemical Engineering Science*, 12:109-126, 1960.
- J.C. Asali, W. Leman, T.J. Hanratty. Entrainment measurements and their use in design equations. *Physico Chemical Hydrodynamics*, 6(1/2):207-221, 1985.
- B.J. Azzopardi. Mechanisms of entrainment in annular two-phase flow. Technical report, UKAEFA Report AERE R-11068, 1983.
- B.J. Azzopardi. Drops in annular two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 23, Suppl.: 1-53, 1997.
- B.J. Azzopardi. *Gas-Liquid Flow*. Begell House Inc., NY, 2006.
- B.J. Azzopardi, S. Taylor, D.B. Gibbons. Annular two-phase flow in large diameter pipes. In *Proceedings of the International Conference on Physical Modelling of Multiphase Flow*, pages 267-282, Coventry, UK, 1983.
- B.J. Azzopardi, P.B. Whalley. Artificial wave in annular two-phase flow. In *Basic Mechanisms in Two-Phase Flow and Heat Transfer*, pages 1-8. ASME, 1980.
- B.J. Azzopardi, E. Wren. What is entrainment in vertical two-phase churn flow? *International Journal of Multiphase Flow*, 30: 89-103, 2004.

- B.J. Azzopardi, S.H. Zaidi. Determination of entrained fraction in vertical annular gas-liquid flow. *Journal of Fluids Engineering, Transaction of the ASME*, 122:146-150, 2000.
- J. R. Barbosa, Jr. *Phase Change of Single Component Fluids and Mixtures in Annular Flow*. Ph.D. thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, UK, 2001.
- J. R. Barbosa, Jr., T. Kandlbinder, G.F. Hewitt. A study of dryout in annular flow of single component hydrocarbons and their mixtures. *Multiphase Science and Technology*, 12(3/4): 265-293, 2000.
- J. R. Barbosa, Jr., G.F. Hewitt. Forced convective boiling of binary mixtures in annular flow. Part I: liquid phase mass transport. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44: 1465-1474, 2001a.
- J. R. Barbosa, Jr., G.F. Hewitt. Forced convective boiling of binary mixtures in annular flow. Part II: heat and mass transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44: 1475-1484, 2001b.
- J. R. Barbosa, Jr., G.F. Hewitt, S.M. Richardson. Churn flow: Myth, mystery and magic. In: 39th European Two-Phase Flow Group Meeting, Aveiro, Portugal, 2001a.
- J. R. Barbosa, Jr., A.H. Govan, G.F. Hewitt. Visualisation and modelling studies of churn flow in a vertical pipe. *International Journal of Multiphase Flow*, 27(12):2105-2127, 2001b.
- J. R. Barbosa, Jr., G.F. Hewitt, S.M. Richardson. Forced convective boiling of steam-water in a vertical annulus at high qualities. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 26(1): 65-75, 2002a.
- J. R. Barbosa, Jr., T. Kandlbinder, G.F. Hewitt. Forced convective boiling of ternary mixtures at high qualities. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(13): 2655-2665, 2002b.
- J. R. Barbosa, Jr., G.F. Hewitt, S.M. Richardson. Improved annular flow modelling of pure fluids and multicomponent mixtures. *Chemical Engineering Research & Design*, 80(3): 262-266, 2002c.
- J. R. Barbosa, Jr., G.F. Hewitt, G. Konig, S.M. Richardson. Liquid entrainment, droplet concentration and pressure gradient at the onset of annular flow in a vertical pipe. *International Journal of Multiphase Flow*, 28(6): 943-961, 2002d.
- J. R. Barbosa, Jr., G.F. Hewitt, S.M. Richardson. High-speed visualisation of nucleate boiling in vertical annular flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(26):5153-5160, 2003a.
- J. R. Barbosa, Jr., G.F. Hewitt, S.M. Richardson. A note on the influence of droplet on evaporation and condensation of multicomponent mixtures in annular flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(13): 2505-2509, 2003b.
- J. R. Barbosa, Jr., G.F. Hewitt. A thermodynamic nonequilibrium slug flow model. *Journal of Heat Transfer*, 127(3): 323-331, 2005.
- J. R. Barbosa Jr., L. W. Cheah, G. F. Hewitt. Flow boiling of water in a vertical tube at sub-atmospheric pressures. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 29: 401-409, 2007.
- D. Barnea, N. Brauner, Holdup of the liquid slug in two phase intermittent flow, *International Journal of Multiphase Flow*, 11(1): 43-49, 1985.
- D. Barnea, N. Yacoub, Heat transfer in vertical upwards gas-liquid slug flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 26(9): 1365-1376, 1983.
- H.H. Belkin, A. A. Macleod, C. C. Monrad, R. R. Rothfus. Turbulent liquid flow down vertical walls. *AIChE Journal*, 5:245-248, 1959.
- A.W. Bennett, G.F. Hewitt, H.A. Kearsy, R.K.F. Keeys. Heat transfer to steam-water mixtures flowing in uniformly heated tubes in which the critical heat flux has been exceeded. In *Thermodynamics and Fluid Mechanics Convention*, Bristol, UK, Institution of Mechanical Engineers. Paper 27, 1967a.
- A.W. Bennett, G.F. Hewitt, H.A. Kearsy, R.K.F. Keeys, D.J. Pulling. Studies of burnout in boiling heat transfer. *Transaction of the Institution of Chemical Engineers*, 45:319-333, 1976b.
- D. Bharathan, G.B. Wallis. Air-water countercurrent annular flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 9(4):349-366, 1983.

- A. Biesheuvel, W.M.C. Gorissen. Void fraction disturbances in a uniform bubbly fluids. *International Journal of Multiphase Flow*, 16(2):211-231, 1990.
- J.A. Bouré. Wave phenomena and one-dimensional two-phase flow models. Parts I, II & III. *Multiphase Science and Technology*, 9(1): 1-107, 1997.
- N. Brauner, D. Barnea. Slug/churn transition in upward gas liquid flow. *Chemical Engineering Science*, 41(1):159-163, 1986.
- C. E. Brennen. *Fundamentals of Multiphase Flow*. Cambridge University Press, 2005.
- W. Brotz. Über die vorausberechnung der absorptionsgeschwindigkeit von gasen in stromenden flüssigkeitsschichten. *Chemie Ingenieur Technik*, 26:470, 1954.
- L.K. Brumfield, T.G. Theofanous. On the prediction of heat transfer across turbulent liquid films. *Journal of Heat Transfer, Transactions of the ASME*, August:496-502, 1976.
- D. Butterworth and R.A.W. Shock. Flow boiling. In U. Grigg, editor. *Proceedings of the Seventh International Heat Transfer Conference*, volume 1, pages 11-30, Munich, West Germany, September 1982. Hemisphere Publishing Co., New York, NY.
- S. Calvert, B. Williams. Upwards co-current annular flow of air and water in short tubes. *AIChE Journal*, 1:78-86, 1955.
- W.H.G.T. Chan. *Evaporation and condensation in annular vertical upward flow of water-steam*. PhD thesis, University of London, Imperial College, 1990.
- J.C. Chen. A correlation for boiling heat transfer to saturated fluids in convective flow. *Industrial and Engineering Chemistry*, 5:322-329, 1966.
- X.T. Chen, J.P. Brill. Slug to churn transition in upward vertical two-phase flow. *Chemical Engineering Science*, 52(23):4269-4272, 1997.
- K. R. Chun, R. A. Seban, Heat transfer to evaporating liquid films, *Journal of Heat Transfer*, 93: 391-396, 1971.
- A. Cioncolini, J.R. Thome. Prediction of the entrained liquid fraction in vertical annular gas-liquid two-phase flow, *International Journal of Multiphase Flow*, 36: 293-302, 2010.
- J.G. Collier and J.R. Thome. *Convective Boiling and Condensation*. Oxford University Press, Oxford, UK, third edition, 1994.
- L.B. Cousins, W.H. Denton, G.F. Hewitt. Liquid phase mass transfer in annular two-phase flow. Technical report, UKAEA Report AERE-R 4926, 1965.
- L.B. Cousins, G.F. Hewitt. Liquid phase mass transfer in annular two-phase flow: radial liquid mixing. Technical report, UKAEA Report AERE-R 5657, 1968.
- G. Das, P.K. Das, N.K. Purohit, A.K. Mitra. Flow pattern transition during gas liquid upflow through vertical concentric annuli. 1: Experimental investigations. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, 121:895-901, 1999a.
- G. Das, P.K. Das, N.K. Purohit, A.K. Mitra. Flow pattern transition during gas liquid upflow through vertical concentric annuli. 2: Mechanistic models. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, 121:902-907, 1999b.
- F. De Cachard, J.M. Delhaye. A slug-churn flow model for small-diameter airlift pumps, *International Journal of Multiphase Flow*, 22(4): 627-649, 1996.
- F. Dobran. Hydrodynamic and heat transfer analysis of two-phase annular flow with a new liquid film model of turbulence. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 26(8):1159-1171, 1983.
- A.E. Dukler. Fluid mechanics and heat transfer in falling film systems. *Chemical Engineering Progress Symposium Series*, 56(30):1-10, 1960.
- A.E. Dukler, Y. Taitel. Flow pattern transition in gas-liquid systems: measurement and modeling. In G.F. Hewitt, J.M. Delhaye, and N. Zuber, editors, *Multiphase Science and Technology*, volume 2, pages 1-94. Hemisphere Publishing Co., New York, 1986.
- R.C. Fernandes, R. Semiat, A.E. Dukler, Hydrodynamic model for gas-liquid slug flow in vertical tubes. *AIChE Journal*, 29(6): 981-989, 1983.
- L.B. Fore, A.E. Dukler. Droplet deposition and momentum transfer in annular flow. *AIChE Journal*, 41(9):2040-2046, 1995.

- F. Fu, J.F. Klausner. A separated flow model for predicting two-phase pressure drop and evaporative heat transfer for vertical annular flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 18(6):541-549, 1997.
- L.E. Gill, G.F. Hewitt. Sampling probe studies of the gas core in two-phase flow: Iii, distribution of velocity and droplet flowrate after injection through an axial jet. Technical report, UKAEA Report AERE-M 1202, 1966.
- L.E. Gill, G.F. Hewitt, J.W. Hitchon, P.M.C. Lacey. Sampling probe studies of the gas core in two-phase flow: I, the effect of length on phase velocity distribution. Technical report, UKAEA Report AERE-R 3954, 1963. (also: *Chemical Engineering Science*, 18, pp. 525-535).
- L.E. Gill, G.F. Hewitt, P.M.C. Lacey. Sampling probe studies of the gas core in two-phase flow: Ii, studies of the effect of phase flowrates on phase velocity distribution. Technical report, UKAEA Report AERE-R 3955, 1964. (also: *Chemical Engineering Science*, 19, pp. 665-682).
- A.H. Govan. *Modelling of vertical annular and dispersed two-phase flows*. PhD thesis, University of London, Imperial College, 1990.
- A.H. Govan, G.F. Hewitt, D.G. Owen, T.R. Bott. An improved chf modelling code. In *Proceedings of the Second UK National Heat Transfer Conference*, Glasgow, UK, Institution of Mechanical Engineers. Paper No. C175, 1988.
- A.H. Govan, G.F. Hewitt, H.J. Richter, A. Scott. Flooding and churn flow in vertical pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, 17:27-44, 1991.
- J.R.F. Guedes de Carvalho. Experimental study of the slug/churn flowtransition in a singleTaylor bubble. *Chemical Engineering Science*, 61:3632 – 3642, 2006.
- J.R.F. Guedes de Carvalho, M.A.R. Talaia, M.J.F. Ferreira. Flooding instability of high-density gas slugs rising in vertical tubes filled with water. *Chemical Engineering Science* 55: 3785–3802, 2000.
- E.A. Hammer, G.A. Johansen, T. Dyakowski, E.P.L. Roberts, J.C. Cullivan, R.A. Williams, Y.A. Hassan, C.S. Claiborn. *Advanced Experimental Techniques*. Em: Multiphase Flow Handbook, C. T. Crowe (Ed.), CRC - Taylor and Francis, 2006.
- G.F. Hewitt. Analysis of annular two-phase flow; application of dunkler analysis to vertical upward flow in a tube. Technical report, UKAEFA Report AERE-3680, 1961.
- G.F. Hewitt. *Measurement of two-phase flow parameters*. Academic Press, London, UK, 1978.
- G.F. Hewitt. Phenomenological issues in forced convective boiling. In J.C. Chen, editor, *Convective Boiling*. Taylor and Francis, Philadelphia, PA, 1996. Keynote Lecture 2.
- G.F. Hewitt, A.H. Govan. Phenomenological modelling of non-equilibrium flows with phase change. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 33(2): 229-242, 1990.
- G.F. Hewitt, N.S. Hall-Taylor. *Annular two-phase flow*. Pergamon Press, Oxford, UK, 1970.
- G.F. Hewitt, S. Jayanti. To churn or not to churn? *International Journal of Multiphase Flow*, 19:527-529, 1993.
- G.F. Hewitt, H.A. Kersey, P.M.C. Lacey, D.J. Pulling. Burnout and nucleation in climbing film flow. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 8:793-814, 1965.
- G.F. Hewitt, C.J. Martin, N.S. Wilkes. Experimental and modeling studies of annular flow in the region between flow reversal and pressure drop minimum. *Physico Chemical Hydrodynamics*, 69(1/2): 69-86, 1985.
- G.F. Hewitt, B. Nicholls. Film thickness measurement in annular two-phase flow using a fluorescence spectrometer technique. Part II: Studies of the shape of disturbance waves. UKAEA Report AERE-R 4506, 1969.
- G.F. Hewitt, D.N. Roberts. Studies of in two-phase flow patterns by simultaneous x-ray and flash photography. Technical report, UKAEA Report AERE-M 2159, 1969.
- G.F. Hewitt, G.B. Wallis. Flooding and associated phenomena in falling film in a vertical tube. In *Proceedings of Multi-Phase Flow Symposium*, pages 62-74, Philadelphia, PA, 1963.
- G.F. Hewitt and P.B. Whalley. The correlation of entrained fraction and entrainment rate in annular two-phase flow. Technical report, UKAEFA Report AERE-9187, 1978.



- P. Hutchinson, P.B. Whalley. A possible characterization of entrainment in annular flow. *Chemical Engineering Science*, 28:974-975, 1973.
- M. Ishii, M.A. Grolmes. Inception criteria for droplet entrainment in two-phase co-current film flow. *AIChE Journal*, 21: 308-318, 1975.
- S. Jayanti, N. Brauner. Churn flow. In G.F. Hewitt, J.M. Delhaye, N. Zuber, J.H. Kim, and R.T. Lahey, Jr., editors, *Multiphase Science and Technology - Two-phase flow fundamentals*, volume 8, pages 471-521. Begell-House, Inc., New York, 1994.
- S. Jayanti, G.F. Hewitt. Prediction of the slug to churn flow transition in vertical two-phase flow, 18:847-860, 1992.
- S. Jayanti, G.F. Hewitt. Hydrodynamics and heat transfer in wavy annular gas-liquid flow: a computational fluid dynamics study. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 40:2445-2460, 1997.
- S. Jayanti, G.F. Hewitt, D.E.F. Low, E. Hervieu. Observation of flooding in the Taylor bubble of co-current upwards slug flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 19:531-534, 1993.
- T. Kandlbinder. *Experimental investigation of forced convective boiling of hydrocarbons and hydrocarbon mixtures*. PhD thesis, University of London, Imperial College, 1997.
- S.G. Kandlikar. Boiling heat transfer with binary mixtures. 2: Flow boiling in plain tubes. *Journal of Heat Transfer*, 120:388-394, 1998.
- I. Kataoka, M. Ishii, A. Nakayama. Entrainment and deposition of droplets in annular two-phase flow. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 43:1573-1589, 2000.
- Y. Katto, H. Ohno. An improved version of the generalized correlation of critical heat flux for forced convective boiling in uniformly heated vertical tubes. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 27:1641-1648, 1984.
- J.M. Kelly, R.L. Freitas. Interfacial fiction in low flowrate vertical annular flow. In Proceedings of the Sixth International Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics, volume 1, pages 154-160, 1993.
- B.N. Kishore, S. Jayanti. A multidimensional model for annular gas-liquid flow. *Chemical Engineering Science*, 59: 3577-3589, 2004.
- S. Levy. Theory of pressure drop and heat transfer for annular steady-state two-phase two-component flow in pipes. In *Proceedings of the Second Midwestern Conference on Fluid Mechanics*, p. 337, 1952. (Also in: S. Levy, *Two-Phase Flow in Complex Systems*, Wiley, New York, 1999)
- S. Levy. *Two-Phase Flow in Complex Systems*. John Willey & Sons, New York, 1999.
- Z. Liu, R.H.S. Winterton. A general correlation for saturated and subcooled flow boiling in tubes and annuli, based on a nucleate pool boiling equation. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 34(11):2759-2766, 1991.
- R.W. Lockhart and R.C. Martinelli. Proposed correlation of data for isothermal two-phase two-component flow in pipes. *Chemical Engineering Progress*, 45:39, 1949.
- Z. Lu, X. Zhang. Identification of flow patterns of two-phase flow by mathematical modelling. *Nuclear Engineering and Design*, 149:111-116, 1994.
- Z.S. Mao, A.E. Dukler. The myth of churn flow? *International Journal of Multiphase Flow*, 19:377-383, 1993.
- W.J. Marsh, I. Mudawar. Predicting the onset of nucleate boiling in wavy free-falling turbulent liquid films. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 32(2):361-378, 1989.
- C.J. Martin, B.J. Azzopardi. Waves in vertical annular flow. *PhysicoChemical Hydrodynamics*, 6(1/2):257-265, 1985.
- C.J. Martin, P.B. Whalley. Wall shear stress measurements in annular two-phase flow, in: H. Stephens, C. Stapleton (Eds.), *Proceedings of the Conference on Physical Modelling of Multi-Phase Flow*, Coventry, pp. 283-300, 1983.
- R.C. Martinelli, D.B. Nelson. Prediction of pressure drop during forced circulation boiling of water. *Transactions of the ASME*, 70:695, 1948.
- K.W. McQuillan, P.B. Whalley. Flow patterns in vertical two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 11:161-175, 1985.

- R.B. Mesler. An alternate to the denger and addoms convection concept of forced convection boiling heat transfer. *AIChE Journal*, 23(4):448-453, 1977.
- R.B. Mesler, G. Mailen. Nucleate boiling in thin liquid films, *AIChE Journal* 23: 954-957, 1977.
- K. Mishima, M. Ishii. Flow regime transition criteria for two-phase flow in vertical tubes. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 27:723-734, 1984.
- E.O. Moeck, J.W. Stachiewicz. A droplet interchange model for annular-dispersed, two-phase flow. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 15:637-653, 1972.
- I.A. Mudawwar, M.A. El-Masri. Momentum and heat transfer across freely-falling turbulent liquid films. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(5):771-790, 1986.
- D.J. Nicklin, J.F. Davidson. The onset of instability in two-phase slug flow. In *Proceedings of the Symposium on Two-Phase Flow*, UK, Institution of Mechanical Engineers. 7 February, Paper No. 4, 1962.
- D.J. Nicklin, J.O. Wilkes, J.F. Davidson. Two-phase flow in vertical tubes. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 40: 61-68, 1962.
- R.I. Nigmatulin, B.I. Nigmatulin, Y.A. Khodzaev, and V.E. Kroshilin. Entrainment and deposition rates in a dispersed-film flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 22:19-30, 1996.
- T. Okawa, I. Kataoka. Correlations for the mass transfer rate of droplets in vertical upward annular flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48: 4766-4778, 2005.
- T. Okawa, A. Kotani, I. Kataoka. Experiments for liquid phase mass transfer rate in annular regime for a small vertical tube. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48: 585-598, 2005.
- R.V.A. Oliemans, B.F.M. Pots. *Gas-Liquid Transport in Ducts*. Em: Multiphase Flow Handbook, C. T. Crowe (Ed.), CRC - Taylor and Francis, 2006.
- A. Orell, R. Rembrand. A model for gas-liquid slug flow in a vertical tube. *Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals*, 25: 196-206, 1986.
- D.G. Owen. *An experimental and theoretical analysis of equilibrium annular flow*. PhD thesis, University of Birmingham, UK, 1986.
- J.W. Palen. Shell-and-tube reboilers: Thermal design. In G.F. Hewitt, editor, *Handbook of Heat Exchanger Design (HEDH)*, pages 3.6.2-1-3.6.2-12. Begell House, Inc., New York, 1992.
- C. Pauchon, S. Banerjee. Interphase momentum effects in the averaged multifield model. 1: Void propagation in bubble flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 12:559-573, 1986.
- O.L. Pushkina, Y.L. Sorokin. Breakdown of liquid film motion in vertical tubes. *Heat Transfer - Soviet Research*, 1(5):56-64, 1969.
- E.R. Quandt. Measurement of some basic parameters in two-phase annular flow. *AIChE Journal*, 11:311-318, 1965.
- R.G. Sardesai, R.A.W. Shock, D. Butterworth. Heat and mass transfer in multicomponent condensation and boiling. *Heat Transfer Engineering*, 3(3-4):104-104, 1982.
- T. Sawai, M. Kaji, T. Kasugai, H. Nakashima, T. Mori. Gas-liquid interfacial structure and pressure drop characteristics of churn flow, *Experimental Thermal and Fluid Science* 28:597-606, 2004.
- P. Sawant, M. Ishii, M. Mori, Prediction of amount of entrained droplets in vertical annular two-phase flow, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 30, 715-728, 2009.
- S.A. Schadel, G.W. Leman, J.L. Binder, T.J. Hanratty. Rates of atomisation and deposition in vertical annular flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 16:363-374, 1990.
- N.D. Sylvester, A mechanistic model for two-phase vertical slug flow in pipes. *Journal of Energy Resources Technology*, 109: 206-213, 1987.
- R.A.W. Shock. Evaporation of binary mixtures in upward annular flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 2:411-433, 1976.
- R.A.W. Shock. Boiling in multicomponent fluids. In G.F. Hewitt, J.M. Delhaye, and N. Zuber, editors, *Multiphase Science and Technology*, volume 1, pages 281-383. Hemisphere Publishing Corp., New York, 1982.
- O. Shoham. *Mechanistic Modeling of Gas-Liquid Two-Phase Flow in Pipes*. Society of Petroleum Engineers, 2006.

- D. Steiner, J. Taborek. Flow boiling heat transfer in vertical tubes correlated by an asymptotic model. *Heat Transfer Engineering*, 13(2):43-69, 1992.
- G. Sun. *Heat transfer in forced convective flow boiling*. PhD thesis, University of London, Imperial College, 1996.
- G. Sun, G. F. Hewitt. Evaporation and condensation of steam-water in a vertical tube, *Nuclear Engineering and Design*, 207(2): 137-145, 2001.
- Y. Taitel, D. Barnea, A.E. Dukler. Modeling of flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes. *AIChE Journal*, 26:345-354, 1980.
- J.R. Thome and R.A.W. Shock. Boiling of multicomponent liquid mixtures. *Advances in Heat Transfer*, 16:59-156, 1984.
- R.G. Turner, M.G. Hubbard, A.E. Dukler. Analysis and prediction of minimum flow rate for the continuous removal of liquid from gas wells. *Journal of Petroleum Technology*, 21(11): 1475-1482, 1969.
- T. Ueda. Entrainment rate and size of entrained droplets in annular two-phase flow. *Bulletin of the JSME*, 22:1258-1265, 1979.
- J.M.C. van't Westende, H.K. Kemp, R.J. Belt, L.M. Portela, R.F. Mudde, R.V.A. Oliemans. On the role of droplets in cocurrent annular and churn-annular pipe flow, *International Journal of Multiphase Flow* 33:595-615, 2007.
- P. Vassallo. Near wall structure in vertical air-water annular flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 25:459-476, 1999.
- P.H.J. Verbeek, R. Miesen, C.J. Schellenkens. Liquid entrainment in annular dispersed upflow. In *European Two-Phase Flow Group Meeting*, Hannover, Germany, 1993.
- V.V. Wadekar. Convective heat transfer to binary mixtures in annular two-phase flow. Technical report, UKAEA Report AERE-R 13815, 1990.
- G.B. Wallis. The onset of droplet entrainment in annular gas-liquid flow. Technical report, General Electric No. 62 GL127, 1962.
- G.B. Wallis. *One Dimensional Two-Phase Flow*. McGraw-Hill, New York, 1969.
- M.J. Watson, G.F. Hewitt. Pressure effects on the slug to churn transition. *International Journal of Multiphase Flow*, 25:1225-1241, 1999.
- P.B. Whalley. *Two-Phase Flow and Heat Transfer*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- E.T. White, R.H. Beardmore. The velocity of rise of single cylindrical air bubbles through liquids contained in vertical tubes, *Chemical Engineering Science*, 17: 351-361, 1962.
- A. Wolf. *Liquid film structure in annular two-phase flow*. PhD thesis, University of London, Imperial College, 1995.
- H.-Q. Zhang, Q. Wang, C. Sarica, J.P. Brill. A unified mechanistic model for slug liquid holdup and transition between slug and dispersed bubble flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 29: 97-107, 2003.
- N. Zuber, J.A. Findlay. Average volumetric concentration in two-phase flow systems. *Journal of Heat Transfer, Transactions of the ASME*, 87:453-468, 1965.

# CAPÍTULO 5 - Instrumentação e Análise de Sinais: Uma Visão sobre os Padrões de Escoamento Multifásico

**Paulo Seleghim Júnior**

Departamento de Engenharia Mecânica

Escola de Engenharia de São Carlos – EESC

Universidade de São Paulo – USP

Av. Trabalhador Sancarlense, 400, 13566-590, São Carlos, SP

## Lista de Símbolos

$\alpha$	taxa de aprendizado
$\epsilon$	critério de propagação
$\psi(s)$	wavelet associada a $\phi(s)$
$\phi(s)$	função de escala genérica
$\Delta_\omega$	duração freqüencial (banda)
$\Delta_\psi$	duração freqüencial da wavelet $\psi(s)$
$\Delta_\psi$	duração temporal da wavelet $\psi(s)$
$\Delta_{\omega t}$	duração tempo-freqüência
$\omega_g$	freqüência central da função geratriz
$\omega_m$	partição do eixo das freqüências
$\Delta_t$	duração temporal
$\text{Cov}_{P_x}(t)$	covariância tempo-freqüência
$d(x, y)$	distância entre os vetores $x$ e $y$
$G(s)$	filtro gerador de $\psi(s)$
$g(s)$	função geratriz
$g_{t,\omega}(s)$	sinal de análise genérico
$H(s)$	filtro gerador da função de $\phi(s)$
$m_i$	neurônios ou modelos nodais
$M_i$	vizinhança do neurônio $m_i$
$P_x(t, \omega)$	distribuição conjunta tempo-freqüência

$q_{t,\omega}(s)$	sinal de análise genérico
$t_{m,n}$	partição do eixo dos tempos
$x(s)$	sinal temporal genérico
$x_i$	vetor de dados de entrada
$\xi_i$	baricentro da vizinhança em torno de $m_i$

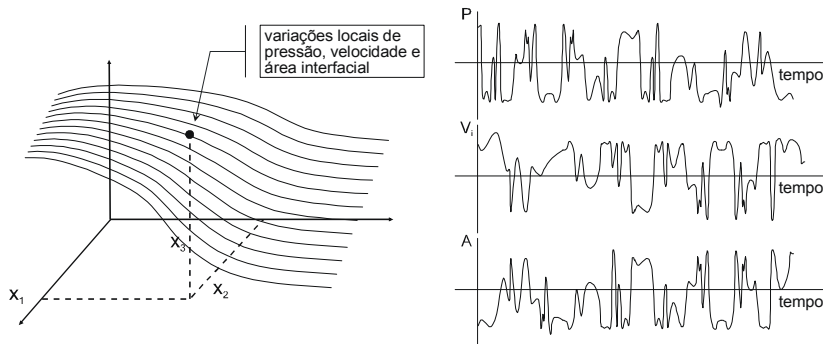
## 1. Introdução

A existência de padrões dinâmicos característicos ou regimes é, sem sombra de dúvida, uma das características mais importantes relacionada à engenharia dos escoamentos multifásicos. Isso justifica o número bastante expressivo de trabalhos técnicos e científicos produzidos na área, sejam eles focalizados sobre aspectos tecnológicos específicos como modelos de perda de carga para situações e regimes determinados sejam, igualmente, voltados a aspectos mais abrangentes como é o caso da construção de critérios objetivos e universais para a identificação de regimes de escoamento multifásico. Mas o que são regimes de escoamento? Na ausência de um entendimento maior sobre a questão, diferentes pesquisadores trabalham com diferentes definições e o resultado é uma profusão de termos derivados de conceitos muitas vezes conflitantes. Exemplo: um regime ou padrão de escoamento é “reconhecido”, “diagnosticado”, “identificado” ou “detectado”? Nosso objetivo em tocar nessa questão não é, obviamente, o de tentar impor nosso ponto de vista, mas simplesmente alinhar algumas idéias e métodos que possam contribuir para a formação de um senso comum sobre o assunto.

Sobre a primeira questão levantada, i.e. o que é um padrão de escoamento, podemos evocar conceitos da teoria dos sistemas dinâmicos para chegar a uma definição, mesmo que formal. Assim, admitindo que exista um conjunto de equações diferenciais que descreva o comportamento de um escoamento multifásico, um padrão de escoamento pode ser interpretado como uma trajetória característica no espaço de fase definido pelas variáveis de descrição do sistema de equações.

Para melhor ilustrar esse conceito, consideremos um ponto dado por coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  imerso num escoamento bifásico isotérmico, conforme ilustrado na figura seguinte à esquerda. Para sua descrição, além das equações de transporte de massa e quantidade de movimento, a interação entre as fases constituintes pode ser descrita com auxílio de uma equação de transporte de área interfacial (Hibiki *et al.*, 1998 e Morel *et al.*, 1999). Sendo assim, as variáveis canônicas correspondem aos campos de velocidade ( $\mathbf{V}$ ), pressão ( $P$ ) e área interfacial ( $A$ ), cuja evolução temporal define uma curva no respectivo espaço de fase, tendo o tempo como parametrização implícita. Nestas circunstâncias, se o escoamento for permanente e acontecer segundo um regime característico, a trajetória correspondente produzirá uma figura também característica (ciclo limite), de forma que estados semelhantes se sucedam de maneira aproximadamente regular. Caso o escoamento seja perma-

nente, mas não ocorra segundo nenhum regime característico, sua trajetória no espaço de fase não possuirá forma característica indicando que os estados dinâmicos se sucedem de maneira possivelmente aleatória.

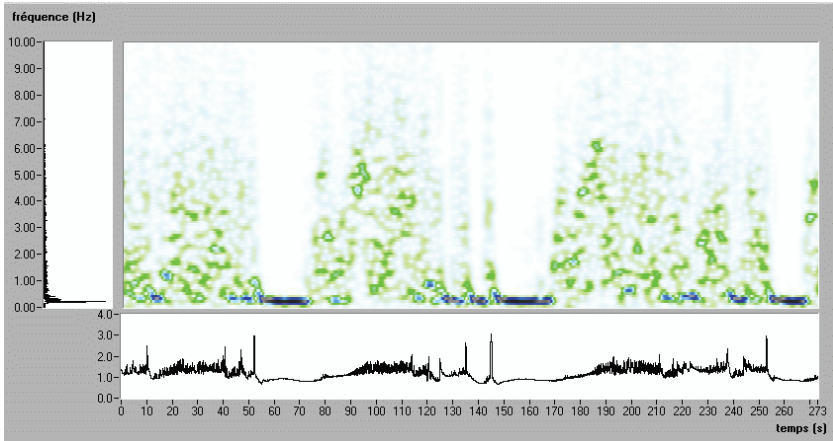


**Fig.1** Variáveis canônicas de descrição de um escoamento bifásico: P = pressão,  $V_i$  = componentes da velocidade, A = área interfacial.

Estes conceitos, embora constituam um contexto teórico extremamente rico e abrangente, têm desvantagens importantes ligadas à sua praticidade e interpretação de situações dinâmicas caóticas. O problema da impraticabilidade nos conduz às técnicas de análise de sinais, descritas em mais detalhes na seqüência. Já sobre o caos, é importante ressaltar que representa uma questão ainda em aberto, sobretudo no caso dos escoamentos multifásicos cuja dimensionalidade é normalmente elevada para os casos já amplamente estudados como, por exemplo, o problema de convecção livre estudado por Lorentz. Existem evidências de que alguns regimes e transições entre eles são na verdade situações de caos em que as variáveis de descrição parecem “hesitar” entre duas situações dinâmicas possíveis (atratores). É o caso do regime agitado em escoamento vertical gás-líquido (“churn flow”) que seria, conforme defendem alguns autores, uma zona de transição entre os escoamentos intermitente a anular. Outro exemplo interessante é o da transição entre os escoamentos horizontais gás-líquido intermitente e estratificado ondulado, cuja natureza histerética e catastrófica (no sentido matemático dos termos) pode produzir uma alternância entre estes regimes sem que nenhum deles se instale definitivamente. A figura seguinte ilustra esta situação através de sinal de fração de vazio e respectivas transformada de Fourier e de Gabor, esta última exibindo o conteúdo espectral instantâneo.

Voltando à segunda questão levantada, ou seja a diferença entre reconhecer, diagnosticar, identificar ou detectar um padrão de escoamento, este não é unicamente um problema de semântica, mas sim uma questão de se definir de forma objetiva em que condições e situação experimental o padrão deve ser analisado. Do ponto de vista das aplicações que normalmente desenvolvemos em engenharia, a análise pode ocorrer segundo duas situações típicas: 1) quando se tem conhecimento a priori sobre a existência ou não de padrões de escoamento e quais são e-

les, como são os casos de escoamentos horizontal e vertical em duto circular, e 2) quando não se sabe da existência de padrões característicos de escoamento e muito menos quais seriam eles, como é o caso de um tanque com formato atípico com várias entradas e saídas.



**Fig. 2** Exemplo de um estado dinâmico em que o regime de escoamento alterna entre estratificado liso, estratificado ondulado e intermitente.

Nestas circunstâncias as diferentes formas de analisar um padrão de escoamento têm significados diferentes:

- “Reconhecer” um padrão de escoamento pressupõe confrontar o que se observa com aquilo que se conhece e, portanto, requer conhecimento a priori sobre suas características. Exemplos típicos desse tipo de análise são aquelas baseadas na confrontação das chamadas “assinaturas” do padrão.
- “Diagnosticar” implica em reconhecer a partir de um conjunto de “sintomas” e não por comparação direta, requerendo igualmente conhecimento a priori. Nesse tipo de abordagem se enquadram trabalhos fundamentados na definição de um espaço de caracterização (“feature space”) com eixos correspondendo a quantificadores estatísticos. Desta forma, uma realização do escoamento é representada por um ponto no espaço de caracterização e, por sua vez, um regime de escoamento é caracterizado por um agregado (“cluster”) característico de pontos.
- “Identificar” um regime sugere um trabalho investigativo, de levantamento de indícios que confirmem a tese de que um determinado grupo de escoamentos é constituído por variantes de uma mesma trajetória característica no espaço de fase associado às equações que descrevem o fenômeno e, portanto, constituem um padrão de escoamento autêntico. Trabalhos que se enquadram nesse contexto normalmente fazem uso de metodologias de decisão, dentre as quais se des-

tacam a teoria bayesiana, quantização vetorial e os mapas ou redes auto-organizativas.

- “Detectar” um regime de escoamento se associa ao seu monitoramento em linha, num processo industrial por exemplo. Dependendo da relação entre atraso e precisão, pode ser implementado com base na assinatura do padrão (detecção da assinatura) ou com base em seu espaço de caracterização.

Tendo em vista estas idéias, antes de prosseguirmos, descreveremos a aplicação de algumas técnicas matemático-numéricas na análise de sinais provenientes de escoamentos multifásicos.

## 2. Análise tempo-freqüência

Do ponto de vista da engenharia dos sistemas multifásicos, a importância de se detectar autonomamente os respectivos padrões de escoamento decorre da construção de modelos físicos específicos para o cálculo de parâmetros de projeto, como velocidades, perdas de carga, área interfacial, etc. Tradicionalmente a detecção ou a identificação de um padrão de escoamento se faz por observação direta em sistemas laboratoriais ou industriais segundo procedimentos com certo grau de subjetividade, i.e. fortemente dependentes do observador. Ocorre porém que, a falta de um critério de identificação objetivo e universalmente aceito tem causado não somente discrepâncias na terminologia empregada, mas também uma profusão de modelos de validade restrita e, freqüentemente, sobrepondo-se em extensas faixas operacionais. Portanto, não é surpreendente que este problema tenha sido objeto de um grande número de estudos, dentre os quais o primeiro foi provavelmente o de Hubbard e Dukler (1966), no qual foi proposto um método de diagnóstico com base na análise espectral de sinais de pressão.

No âmbito específico da aplicação de métodos de análise conjunta (tempo-freqüência ou tempo-escala) a sinais provenientes de escoamentos bifásicos, um dos primeiros trabalhos foi o de Hervieu e Leduq (1991), no qual diversos regimes de escoamento vertical gás-líquido foram analisados usando-se a transformada wavelet contínua. Em seguida, Selegim e Hervieu (1994) propuseram um indicador para a transição bolhas-intermitente em escoamento vertical, baseado na medição da estacionaridade dos sinais através de seus sinais de freqüência instantânea. Este mesmo princípio de base foi empregado no desenvolvimento de um critério igualmente objetivo, porém de aplicação não restrita a uma única transição, tendo resultado num critério baseado no cálculo da covariância tempo-freqüência da transformada de Gabor dos sinais de fração de vazão (Hervieu e Selegim, 1998). O critério foi validado em escoamento horizontal gás-líquido e, não somente foram detectadas todas as transições normalmente conhecidas, mas também foi possível identificar um novo padrão de escoamento estratificado no qual a interface apresenta ondulações não regulares (Hervieu e Selegim, 1998). Após



esta seqüência de trabalhos, ficou demonstrado que a análise tempo-freqüência fornece um contexto ideal para a análise de regimes de escoamento e de suas transições, razão pela qual é feita uma descrição mais detalhada de seus princípios básicos. Uma análise conjunta tempo-freqüência ou tempo-escala tem por objetivo primário a identificação do conteúdo freqüencial instantâneo de um sinal qualquer: quais freqüências estão presentes a cada instante. Na seqüência veremos duas maneiras de se realizar isto.

## 2.1. Transformada de Gabor

Dentre as diversas abordagens para a realização de uma análise conjunta uma das mais difundidas, baseia-se no conceito de projeção ou ângulo entre dois sinais. Em termos mais exatos, uma distribuição conjunta  $P_x(t, \omega)$ , associada a um sinal genérico  $x(s)$ , pode ser construída por intermédio da projeção deste último sobre uma família de sinais de análise  $g_{t,\omega}(s)$  bem localizados no instante  $t$  e com freqüência característica dada por  $\omega$ . No espaço dos sinais de energia finita isso pode ser feito através do produto escalar

$$P_x(t, \omega) = \langle x(s), g_{t,\omega}(s) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) g_{t,\omega}^*(s) ds \quad (2.1)$$

Diferentes famílias de distribuição conjunta, cada qual com propriedades e limitações específicas, podem ser obtidas a partir de diferentes famílias de sinais de análise. Assim, a transformada de Gabor pode ser construída a partir de translações em tempo e modulações em freqüência de uma onda gaussiana  $g(s)$ , isto é

$$g_{t,\omega}(s) = g(s-t) \exp(i\omega s) = \exp\left[(s-t)^2 + i\omega s\right] \quad (2.2)$$

A transformada de Gabor constitui um caso especial da transformada de Fourier a curto termo, na qual  $g(s)$  é uma função janela genérica (Hamming, Hanning, Blackman, etc.), pertencente à chamada classe de Cohen definida como

$$P_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g^*(\tau-t) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.3)$$

As figuras seguintes mostram as transformadas de Gabor do sinal de fração de vazio obtido em ensaios nos quais o padrão de escoamento foi alterado progressivamente, juntamente com os sinais de covariância tempo-freqüência, definida como

$$\text{Cov}_{P_X}(\tau) \triangleq |\Delta_{\omega t}(\tau) - \Delta_{\omega}(\tau)\Delta_t(\tau)| \quad (2.4)$$

em que as durações essenciais  $\Delta_{\omega t}$ ,  $\Delta_{\omega}$  e  $\Delta_t$  são dadas por

$$\Delta_{\omega t}(\tau) \triangleq \iint \omega t P(t, \omega) dt d\omega \quad (2.5)$$

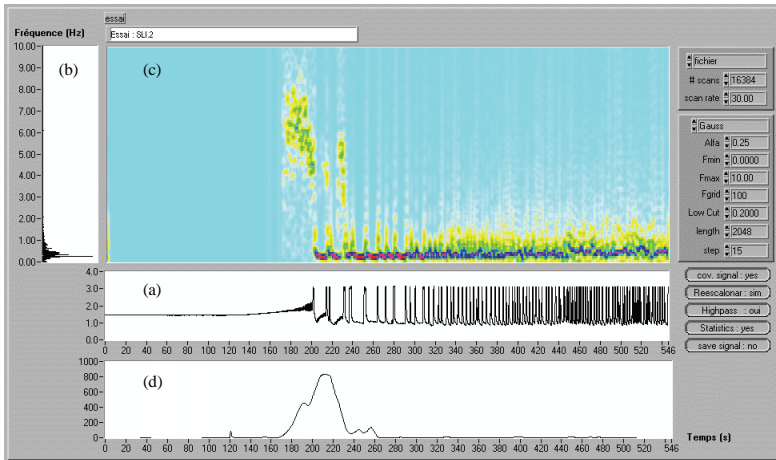
$$\Delta_{\omega}(\tau) \triangleq \iint \omega P(t, \omega) dt d\omega \quad (2.6)$$

$$\Delta_t(\tau) \triangleq \iint t P(t, \omega) dt d\omega \quad (2.7)$$

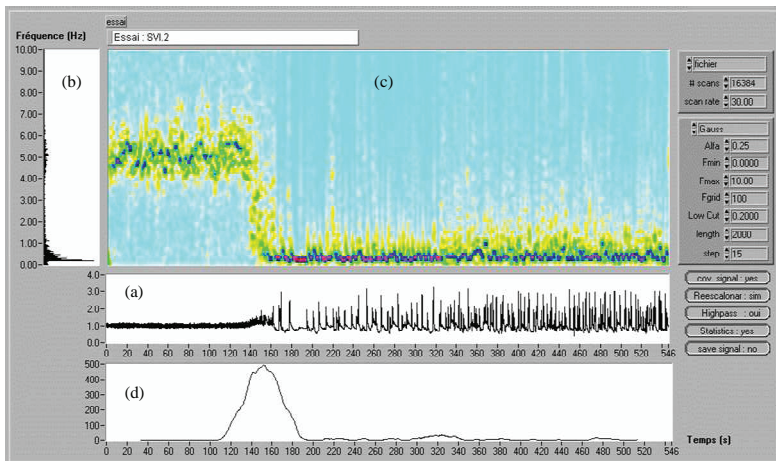
A covariância tempo-frequência quantifica o grau de estacionaridade do sinal e, portanto, seu máximo pode ser definido como um indicador da fronteira entre diferentes padrões de escoamento (Hervieu e Seleghim, 1998). Portanto, a transição entre padrões de escoamento pode ser definida como uma situação de máxima instacionaridade.

## 2.2. Transformada wavelet

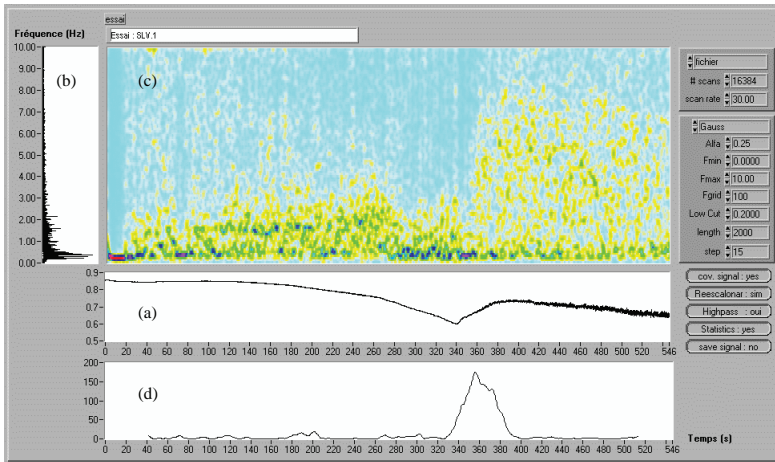
A transformada wavelet é obtida a partir de (2.1), porém a geração da família de sinais de análise é feita a partir de transformações afins aplicadas a uma função geratriz admissível  $g(s)$  de forma a variar sua localização temporal e frequência característica. Em termos matemáticos isso é feito como



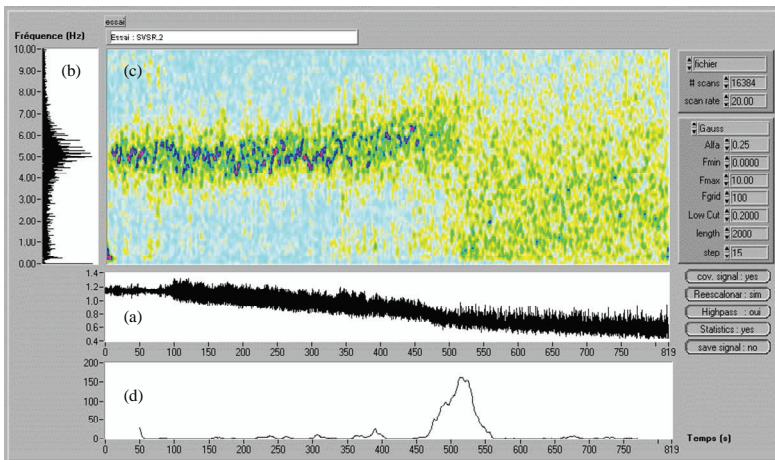
**Fig. 3** Transição estratificado liso – intermitente: (a) fração de vazio (Volts), (b) Transformada de Fourier, (c) Transformada de Gabor e (d) sinal de covariância tempo-freqüência.



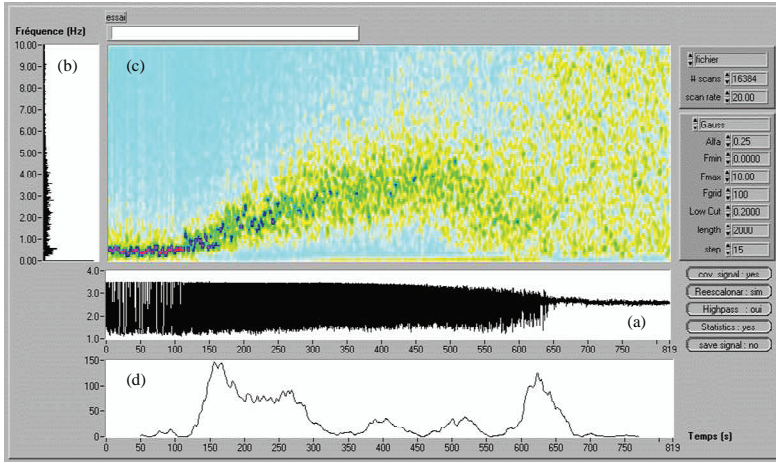
**Fig. 4** Transição estratificado ondulado – intermitente: (a) fração de vazio (Volts), (b) Transformada de Fourier, (c) Transformada de Gabor e (d) sinal de covariância tempo-freqüência.



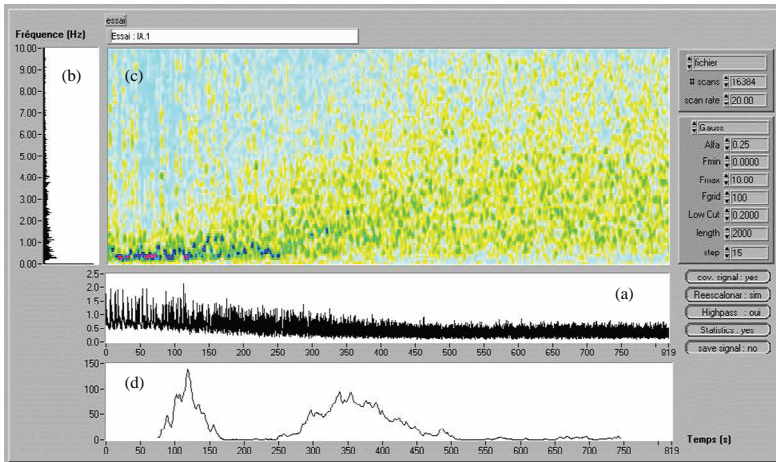
**Fig. 5** Transição estratificado liso – estratificado ondulado: (a) fração de vazio (Volts), (b) Transformada de Fourier, (c) Transformada de Gabor e (d) sinal de covariância tempo-freqüência.



**Fig. 6** Transição estratificado ondulado – estratificado rugoso: (a) fração de vazio (Volts), (b) Transformada de Fourier, (c) Transformada de Gabor e (d) sinal de covariância tempo-freqüência.



**Fig. 7** Transição intermitente – bolhas: (a) fração de vazio (Volts), (b) Transformada de Fourier, (c) Transformada de Gabor e (d) sinal de covariância tempo-freqüência.



**Fig. 8** Transição intermitente – anular: (a) fração de vazio (Volts), (b) Transformada de Fourier, (c) Transformada de Gabor e (d) sinal de covariância tempo-freqüência.

$$g_{t,\omega}(s) = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_g}} g\left(\omega \frac{s-t}{\omega_g}\right) \quad (2.8)$$

onde  $\omega_g$  corresponde à frequência central da função geratriz e o termo da raiz quadrada é necessário para que a norma seja unitária. Obtém-se assim a chamada classe afim, cuja definição exata é

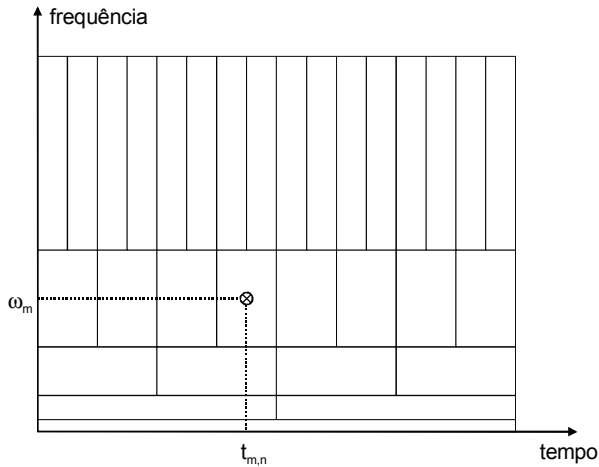
$$P_x(t, \omega) = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_g}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) g^* \left( \omega \frac{s-t}{\omega_g} \right) ds \quad (2.9)$$

É importante ressaltar que, a rigor, a transformada wavelet corresponde a uma análise tempo-escala uma vez que é baseada em transformações afins (translações e contrações/dilatações de escala). A expressão (2.9) pode ainda ser interpretada como uma análise contínua do plano tempo-frequência, caso  $t$  e  $\omega$  variem continuamente, ou ainda, como uma análise ou amostragem discreta, caso  $t$  e  $\omega$  assumam valores discretos. De fato, as análises discretas do plano tempo-frequência constituem um campo de pesquisas extremamente profícuo, não somente em termos de desenvolvimentos matemáticos, mas também para o engenheiro que procura novas metodologias para novos e mais desafiadores problemas aplicados. De uma maneira geral, os trabalhos nesta área podem ser agrupados em duas grandes categorias.

Na primeira delas,  $t$  e  $\omega$  assumem valores predeterminados, de forma a produzir uma segmentação diádica, resultando, assim, numa decomposição ortonormal do plano tempo-frequência, conforme indicado na figura abaixo. Mais especificamente, adotando os índices  $m$  e  $n$  para indexar a partição dos eixos dos tempos e das frequências, os pontos diádicos se calculam de acordo com a seguinte definição:

$$\omega_m = \frac{\omega_g}{a_0^m} \quad t_{m,n} = n \Delta t \frac{\omega_g}{\omega_m} \quad (2.10)$$

A grande vantagem em relação a uma partição regular, é que as funções associadas à partição diádica podem ser simultaneamente bem localizadas em tempo e frequência, contrariamente à decomposição atômica de Gabor baseada numa partição regular do plano tempo-frequência, cujas funções estão submetidas ao teorema de Balian-Low (Balian, 1981; Low, 1985).



**Fig. 9** Esquema de discretização diádica do plano tempo-frequência

A segunda forma de discretização do plano tempo-frequência baseia-se numa discretização mais densa que aquela definida pelas expressões (2.10), gerando, sob certas condições, uma decomposição em estruturas oblíquas (em inglês "frame decomposition"). A grande vantagem deste método consiste na possibilidade de se controlar o nível de redundância da decomposição, característica de importância capital em teoria da informação. Mais especificamente, o problema de se decompor um sinal para transmiti-lo por um canal de comunicação e, posteriormente, reconstruí-lo, tem uma solução bastante efetiva neste contexto, pois a perda de eficiência da transmissão devido à redundância é mais do que compensada pelo ganho em robustez do algoritmo de reconstrução. Experimentos numéricos mostram que é possível reconstruir sinais quase que perfeitamente a partir de coeficientes de decomposição oblíqua que se perderam ou corromperam em 40 ou 50 % por exemplo (Daubechies, 1992). Devido às suas características particulares, as decomposições oblíquas têm emprego natural em problemas da teoria da informação. Tendo em vista os objetivos deste texto, centramos nosso estudo nas decomposições ortonormais.

Voltemos então à discretização diádica do plano tempo-frequência, definida pelas expressões (2.10) e esquematizada na figura 9. A ortonormalidade da decomposição, associada ao fato das funções de base serem geradas por transformações afins, tem conseqüências práticas e teóricas comparáveis ao estabelecimento da teoria de Fourier. A partir de meados dos anos 80 quando Meyer e Mallat formalizaram a teoria matemática e, conseqüentemente, propiciaram uma base teórica de desenvolvimento, a análise de sinais tem vivido revolução poucas vezes vista na história das ciências. Basta dizer que o trabalho de Meyer e Mallat resultou no que se chama de Análise Multiresolução, reconhecida hoje como um novo ramo da matemática.

No que concerne à análise da informação associada aos sinais, e particularmente à identificação e à caracterização de padrões de escoamento, não há dúvidas que o contexto mais apropriado são as análises contínuas do plano tempo-frequência, definidas pela expressão (2.1) com  $t$  e  $\omega$  variando continuamente na reta real. Porém, esta metodologia padece da ausência de algoritmos rápidos de cálculo para sua implementação em tempo real. Por outro lado, as análises multiresolução são implementadas por via de algoritmos piramidais cujo número de operações de multiplicação é proporcional ao número de amostras do sinal analisado, proporcionalmente mais rápidos que as FFT's para grandes números de amostras.

O preço a pagar é a amostragem diádica, significativamente severa comparada à análise contínua<sup>1</sup>. Por exemplo, 1024 amostras de um sinal podem ser usadas para gerar  $1024 \times 512 = 524288$  pontos no plano tempo-frequência, ou seja a densidade máxima da expressão (2.1) quando calculada a partir de um sinal amostrado. Por outro lado, se (2.1) é calculada sobre uma amostragem diádica e segundo um esquema multiresolução, embora cada amplitude seja calculada muito mais rapidamente, pode gerar no máximo 1024 pontos do mesmo plano. A suficiência dos pontos diádicos para uma completa caracterização do sinal é assegurada pelo fato de representarem os coeficientes de uma decomposição em uma base ortonormal. Com efeito, as análises contínuas são entendidas como infinitamente redundantes, prestando-se excepcionalmente bem para inferências visuais uma vez que a informação contida em uma única dimensão (vetor) é distribuída de forma regular em duas dimensões (matriz).

Isso posto, uma estratégia para a etapa de detecção dos padrões de escoamento com base em suas imagens no plano tempo-frequência, dado que isto deve ser feito em tempo real, consiste em substituir a inferência visual por uma inferência automática executada por uma rede neural. Mais especificamente, as imagens de um dicionário tempo-frequência de padrões de escoamento podem ser associadas por uma rede neural às imagens diádicas, obtidas da análise multiresolução. Para que tal estratégia tenha sucesso, a base de decomposição deve ser cuidadosamente escolhida, de forma a otimizar o compromisso entre rapidez de cálculo e o máximo de proximidade entre as imagem diádicas e as respectivas imagens contínuas (dicionário).

Conforme mencionado anteriormente, uma análise multiresolução pode ser implementada segundo um algoritmo piramidal, a partir dos coeficientes da função escala  $\phi(\cdot)$  expressa como<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Obviamente o termo "contínua" deve ser entendido em sentido não estrito, uma vez que os sinais devem ser discretizados para o processamento em computadores digitais.

<sup>2</sup> Estamos adotando a seguinte definição para a transformada de Fourier:

$$\hat{x}(\omega) = \int x(t)e^{-i\omega t} dt$$



$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H(2^{-k}\omega) \quad (2.11)$$

onde a função  $H$  é  $2\pi$ -periódica e é definida em termos de seus coeficientes de Fourier :

$$H(\omega) = \sum_k h_k e^{-ik\omega} \quad (2.12)$$

Sendo assim, a wavelet  $\psi(\cdot)$  associada pode ser calculada por intermédio de

$$\hat{\psi}(\omega) = G(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) \quad (2.13)$$

onde  $G$  é dada por

$$G(\omega) = \sum_k g_k e^{-ik\omega} \quad (2.14)$$

com

$$g_k = (-1)^k h_{1-k}^* \quad (2.15)$$

Portanto o ponto de partida é o conjunto de coeficientes  $h_k$ , ou, em última análise, da função de escala. Em outros termos, diferentes conjunto de coeficientes  $h_k$  geram diferentes análises multiresolução, cada uma delas com atributos específicos derivados daqueles da função de escala. As características essenciais para a análise de padrões de escoamento são uma boa localização no plano tempo-frequência com um custo computacional pequeno. A primeira característica pode ser quantificada pelo produto entre as durações essenciais em tempo e frequência definidas como se segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\psi} = \frac{1}{\|\psi(t)\|} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\tilde{t})^2 |\psi(t)|^2 dt \right]^{1/2} \\ \Delta_{\hat{\psi}} = \frac{1}{\|\hat{\psi}(\omega)\|} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega-\tilde{\omega})^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

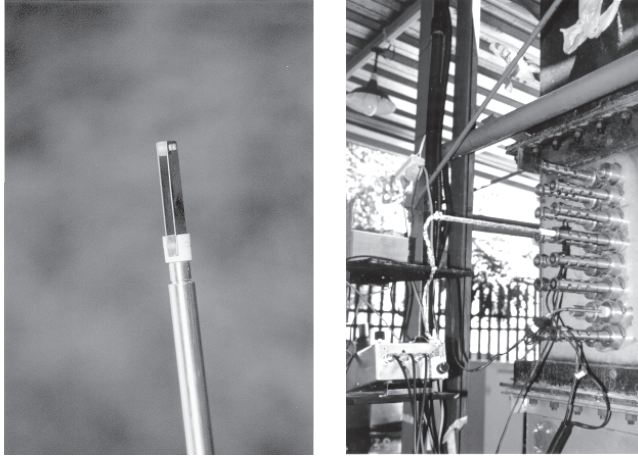
A avaliação da qualidade da localização tempo-freqüência pode ser feita com base no princípio de Heisenberg-Gabor que, expresso em função das definições (2.16) tem a forma

$$\Delta_{\psi} \Delta_{\nu} \geq \frac{1}{2} \quad (2.17)$$

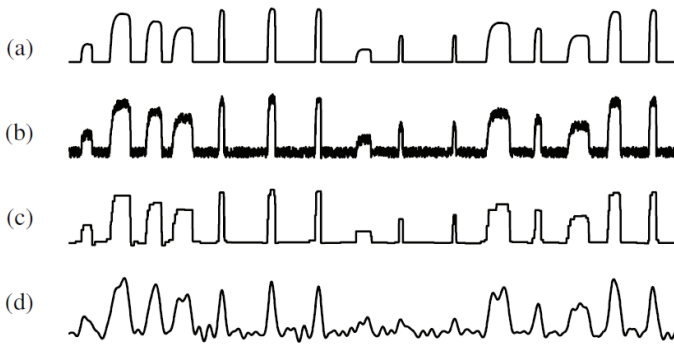
É importante ressaltar que a igualdade na inequação (2.17) se verifica unicamente para as funções gaussianas, cuja decomposição atomista carece de um algoritmo rápido, além de estar restrita ao teorema de Balian-Low.

Uma aplicação muito interessante desse tipo de abordagem ocorre no desenvolvimento de algoritmos especiais de depuração de sinais em que se deseja preservar certas características para seu posterior processamento. É o caso, por exemplo, da interpretação de sinais de presença de fase obtidos por sondas intrusivas. Ocorre que, em algumas aplicações industriais mais severas, estas sondas devem ser suficientemente robustas para suportar condições de operação severas, dentre as quais abrasão, altas temperaturas, reatividade química, etc. Nestas circunstâncias, o sinal de fase fornecido pela sonda normalmente é significativamente distorcido e atrasado, além de portar ruídos de amplitudes significativa. A figura abaixo mostra uma sonda capacitiva usada em um reator de leito fluidizado em que a vazão de ar foi aumentada progressivamente de forma a que o escoamento evoluísse entre os regimes homogêneo, borbulhante e caótico.

O uso da transformada wavelet associada a uma decomposição diádica, ao constituir uma decomposição ótima do plano tempo-freqüência, i.e. sem redundância, permite identificar de forma muito efetiva as estruturas coerentes do sinal e discriminá-las do ruído. Além disso, a escolha de uma wavelet geratriz pode ser feita com base nas características do sinal que se deseja preservar no processo de filtragem. No caso do uso do sinal de fase para a construção de histogramas de diâmetros de bolhas a função de Haar se mostra adequada (Selegim e Milioli, 2001). Para efeito de comparação, versões depuradas do sinal original são mostradas nas figuras seguintes, obtidas através do método clássico de truncamento de Fourier e truncagem wavelet respectivamente. Conforme esperado, a truncamento wavelet proporciona uma melhoria importante na relação sinal ruído sem “erosão” significativa das arestas dos pulsos. Essa característica positiva deriva basicamente estrutura descontínua da função Haar, o que explica também a geração de oscilações espúrias análogas ao efeito de Gibbs na vizinhança das discontinuidades do sinal.



**Fig. 10** Fotos da sonda de detecção local de fase e de seu sistema de fixação no reator fluidizado borbulhante do NETeF.



**Fig. 11** Exemplo do procedimento de depuração – (a) sinal puro, (b) sinal com ruído, (c) sinal recuperado através da wavelet de Haar e (d) sinal recuperado por truncamento de Fourier.

### 3. Redes neurais (mapas) auto-organizativas

Uma rede neural, ou mais exatamente um Mapa Auto-Organizativo (ou simplesmente SOM do termo em inglês “Self-Organizing Map”), pode ser interpretado formalmente como uma aplicação não linear, ordenada e suave de dados com alta dimensionalidade nos elementos de um espaço vetorial ordenado de dimensão pequena. Do ponto de vista da informação e de como ela é visualizada, o caráter ordenado implica que há uma conversão das relações estatísticas e métricas entre os dados de entrada em relações geométricas mais simples entre as respectivas imagens, normalmente uma malha regular e bidimensional de pontos nodais. Em outras palavras, na medida em que um SOM projeta sobre a malha bidimensional a informação contida nos dados primários sem alterar significativamente suas relações topológicas, ele pode ser entendido como uma ferramenta de abstração. Esses dois aspectos, i.e. de visualização e abstração, são extremamente importantes em aplicações complexas envolvendo análise informacional, como é o caso da identificação de regimes de escoamento multifásico e outros problemas relacionados à inteligência artificial.

Em termos matemáticos, um SOM pode ser implementado segundo uma lógica semelhante à de uma rede neural competitiva não supervisionada, porém diferindo quanto a sua capacidade de preservar relações topológicas nos dados de entrada. Seja então o conjunto de dados de entrada denotados por  $x \in \mathfrak{R}^n$ . Por sua vez, o SOM é definido a partir de modelos nodais ou neurônios,  $m_i \in \mathfrak{R}^n$ , com  $i = 1, 2, \dots, M$ , cada qual associado aos dados de entrada segundo um critério de menor distância  $d(x, m_c)$ , isto é

$$x \Leftrightarrow m_c \rightarrow c = \min_k \{ d(x, m_k) \} \quad (3.1)$$

O treinamento de uma rede SOM corresponde a ajustar seus neurônios de forma que o mapeamento de todos os possíveis dados  $x$  sobre o conjunto  $m_i$  seja ordenado e geometricamente representativo da informação contida nos dados primários. Isso pode ser feito, conforme proposto originalmente por Kohonen (1982a e 1982b), a partir de uma heurística em que cada neurônio compete pela captura de  $x$  e, conseqüentemente, pelo direito de ajustar sua parametrização interna. Os passos da heurística proposta são os seguintes:

1. Os neurônios  $m_i$  são estruturados segundo uma malha  $n$ -dimensional de projeção e inicializados com valores pré-determinados ou aleatórios, preferencialmente extraídos do conjunto de dados de entrada  $x_n$ , com  $n = 1, 2, \dots, N$ .
2. Cada entrada  $x_n$  é associada ao neurônio  $m_c$  que mais lhe é semelhante segundo o critério (3.1), para uma definição conveniente de  $d(\cdot, \cdot)$ . Uma lista é formada a partir destas associações.

3. Arbitrando-se uma vizinhança  $M_i$  em torno do neurônio  $m_i$  sobre a malha de projeção, uma lista integrada é definida a partir das listas de cada neurônio pertencente à vizinhança.
4. Aqueles dados  $x_n$  pertencentes à  $M_i$  são empregados na construção de um elemento  $\xi_i$ , baricentro da vizinhança em torno de  $m_i$ , calculado a partir de uma média genérica convenientemente arbitrada. No caso de vetores do  $\mathfrak{R}^n$  e distância euclidiana normalmente se adota  $\xi_i$  como sendo a média aritmética dos elementos da lista integrada.
5. O neurônio  $m_i$  é ajustado segundo uma taxa de aprendizado  $\alpha \in (0, 1]$ , isto é

$$m_i \leftarrow \alpha \xi_i + (1 - \alpha) m_i \quad (3.2)$$

6. e seus vizinhos segundo um critério de propagação  $\varepsilon$ , usualmente diminuindo de forma progressiva na medida em que os neurônios vizinhos estão mais distantes do neurônio central  $m_i$ , ou seja

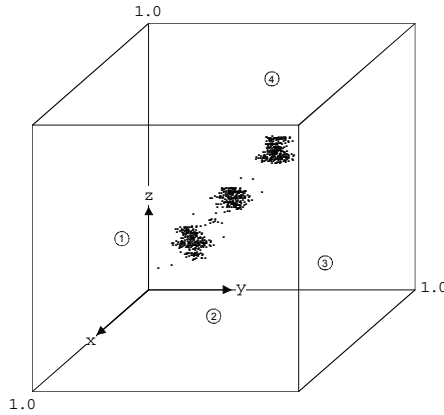
$$m_j \leftarrow \varepsilon \Big|_{d(m_i, m_j)} \xi_i + (1 - \varepsilon \Big|_{d(m_i, m_j)}) m_j \quad (3.3)$$

7. Os passos 4) e 5) são repetidos para cada neurônio da malha e suas respectivas vizinhanças.
8. O procedimento como um todo é iterado, ou mais especificamente os passos 2) a 6), até que  $m_i$  coincida com  $\xi_i$ , cujo conjunto é representativo da essência dos dados de entrada  $x_n$ .

A título de ilustração, consideremos um exemplo numérico em que dados do  $\mathfrak{R}^3$  devem ser abstraídos sobre uma rede SOM unidimensional circular com 4 neurônios<sup>3</sup>, conforme indicado na figura seguinte. A relação topológica entre os dados de entrada é evidente, indicando a presença dos 3 centróides definidos por (0.3, 0.3, 0.3), (0.5, 0.5, 0.5) e (0.8, 0.8, 0.8), em torno dos quais se distribuem uniformemente os dados de treinamento. Nesse caso, apenas uma inspeção visual direta do gráfico e das distribuições de probabilidade nos planos xy, xz e yz seria suficiente para inferir a relação entre os dados. Ocorre porém que, mesmo numa situação simples como a proposta, a análise direta se torna impraticável na medida em que a complexidade e/ou a dimensão dos dados aumenta, justificando o emprego de métodos matemático-numéricos de agrupamento (“clusterização”) de dados como as redes SOM e outros.

---

<sup>3</sup> A arquitetura circular implica que o neurônio 1 é vizinho do neurônio 4.



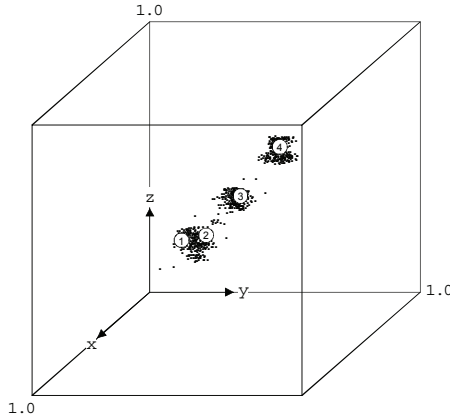
**Fig. 12** Exemplo de ajuste de uma SOM sobre pontos do  $\mathcal{R}^3$  concentrados sobre os centróides  $(0.3, 0.3, 0.3)$ ,  $(0.5, 0.5, 0.5)$  e  $(0.8, 0.8, 0.8)$  – valores iniciais aleatórios.

Seguindo a heurística descrita acima, o primeiro passo se dá com a inicialização dos neurônios e com a definição de suas vizinhanças. No caso, adotamos valores uniformemente distribuídos no cubo  $(0.0, 1.0) \times (0.0, 1.0) \times (0.0, 1.0)$ , indicado pelas marcas ①, ②, ③ e ④ na figura seguinte, e vizinhanças formadas pelos neurônios que distam 1 passo de malha do neurônio central<sup>4</sup>. É importante ressaltar que estas escolhas, embora não influenciem de forma significativa no caso estudado, podem aumentar ou diminuir substancialmente a convergência em problemas de maior dimensionalidade e, portanto, devem ser feitas de forma extremamente criteriosa.

O segundo passo consiste em calcular uma tabela de distâncias entre cada dado e cada neurônio da rede e formar uma lista de associações segundo o critério (3.1). Em seguida são formadas as listas integradas por vizinhanças e calculados os bari-centros  $\xi_i$ , adotando-se, no caso,  $\alpha = 1$  e  $\varepsilon = 0.25$  (constantes) para ajuste dos neurônios centrais e vizinhos segundo as fórmulas de aprendizado (3.2) e (3.3) respectivamente. Com isso, completam-se os passos 3, 4, 5 e 6, cujas iterações até um dado número de ciclos ou épocas correspondem ao passo 7. A nova configuração da rede, obtida após 100 épocas, é mostrada na figura seguinte, na qual se pode observar a tendência dos neurônios da SOM em se agrupar em torno dos centróides definidos inicialmente. É possível constatar também que os neurônios 1 e 2 são atraídos para o mesmo centróide e que competirão pela captura dos dados naquela região. O efeito disso durante o treinamento é o de eventualmente produzir um ciclo limite em que os valores se alternam entre estes neurônios e, conseqüentemente, o de limitar a convergência global. Procedimentos de fusão e extinção de neurônios, ativados em função do número de capturas e da convergência para um

<sup>4</sup> As vizinhanças são 4-1-2, 1-2-3, 2-3-4 e 3-4-1

mesmo ponto no espaço dos dados respectivamente, podem ser definidos para evitar esse e outros tipos de problemas.



**Fig. 13** Exemplo de ajuste de uma SOM sobre pontos do  $\mathfrak{R}^3$  concentrados sobre os centróides  $(0.3, 0.3, 0.3)$ ,  $(0.5, 0.5, 0.5)$  e  $(0.8, 0.8, 0.8)$  – valores finais após o treinamento.

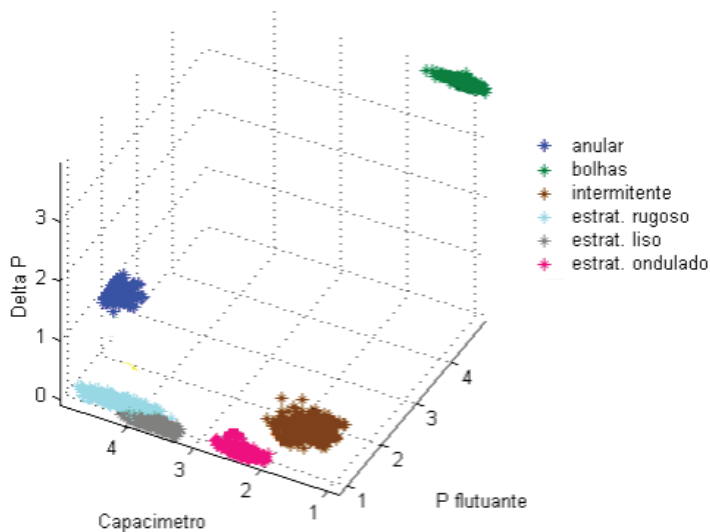
A questão que se coloca nesse ponto concerne à convergência desse procedimento. A análise matemática do algoritmo mostra-se extremamente complexa, de maneira que a questão em seus aspectos mais genéricos continua em aberto. Não obstante, resultados importantes foram obtidos em condições mais restritas que demonstraram a convergência no caso unidimensional, além dos trabalhos de Erwin et al. (1991), Erwin et al. (1992a), Erwin et al. (1992b), Horowitz e Alvarez (1996) e Flanagan (1997) que abordaram a questão em condições menos restritivas. Em situações como a que tratamos nesse trabalho não há, portanto, garantias sobre a convergência ou não do procedimento de treinamento do SOM, embora o conhecimento empírico sobre o assunto justifique plenamente seu emprego no problema de identificação de regimes de escoamento multifásico.

A partir da estrutura básica formulada por Kohonen um grande número de variantes foi desenvolvido por pesquisadores de diversas áreas. Algumas delas têm por objetivo otimizar aspectos mais específicos como a redução da complexidade computacional (Luttrell, 1988) e otimização do tempo de associação entre o dado de entrada e seu melhor modelo. Outras variantes visam aprimorar a preservação das características topológicas dos dados iniciais através do uso de estruturas flexíveis (Fritzke, 1994, Martinetz and Schulten, 1991, Martinetz and Schulten, 1994). Extrapolando a estrutura básica de um SOM, arquiteturas mais complexas têm sido desenvolvidas através da incorporação de conceitos novos, como é o caso das redes B-SOM (Bayesian Self-Organizing Maps) (Utsugi, 1997), ou a partir de abordagens independentes como no caso das redes ART (“Adaptive Resonance Theory”) desenvolvidas a partir das idéias de (Grossberg, 1976a e 1976b) e dos

métodos de quantização vetorial (Somervuo e Kohonen, 1999). Uma revisão extensiva sobre o assunto pode ser encontrada em Kohonen (2001).

O treinamento da rede SOM produz neurônios que são representativos dos centróides e da topologia dos dados, através dos quais se tem acesso ao número e à localização das classes características. Em outras palavras, não há necessidade de conhecimento prévio das classes em que se distribuem os dados, uma vez que elas resultarão do próprio procedimento de treinamento, de forma que uma rede SOM pode ser utilizada como uma heurística de identificação autônoma. Após seu treinamento, a rede pode ser empregada como uma lógica de detecção e/ou diagnóstico através da apresentação de um dado novo, i.e. não presente no conjunto inicial de treinamento, e classificado-o conforme o neurônio que o capturou.

Estas idéias foram testadas com sinais obtidos de escoamentos horizontais gás-líquido (oleoduto piloto) e gás-sólido (transportador pneumático) e publicadas nos artigos de Crivelaro *et al.* 2005. Nestes estudos os sinais da base eram constituídos de medidas instantâneas da perda de carga e gradiente local de pressão na região central da seção de testes, além da fração de fase determinada com auxílio de uma sonda capacitiva. No caso do escoamento gás-líquido horizontal, cujos principais regimes são amplamente conhecidos (estratificados liso, ondulado e rugoso, intermitente, a bolhas e anular), a estratégia foi capaz de caracterizar todos estes regimes de forma autônoma, conforme mostra a figura seguinte. Os agrupamentos representam os testes experimentais da base e, após os ciclos de ajuste, os objetos do mapa auto-organizativo convergiram exatamente para os centróides destes agrupamentos.



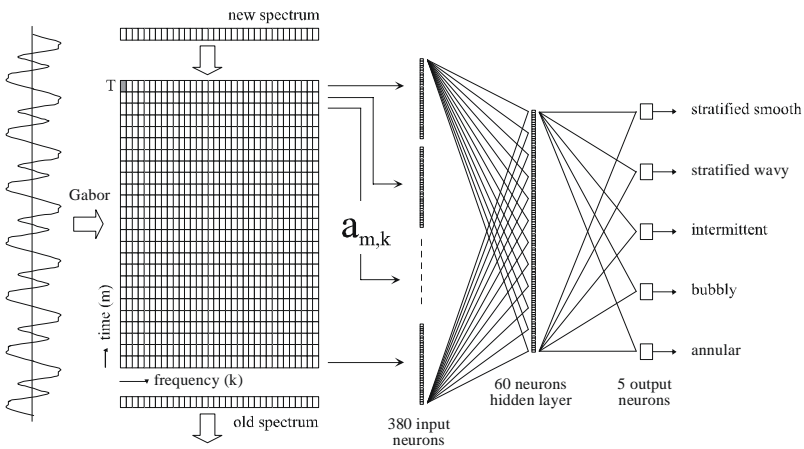
**Fig. 14** Espaço de caracterização dos regimes de escoamento gás-líquido horizontal



#### 4. Conclusões – uma análise unificada

Os métodos descritos anteriormente constituem um contexto teórico-numérico extremamente interessante e rico, permitindo a análise de padrões de escoamento multifásico sob uma ótica puramente “informativa” em que as equações mecânicas que governam o fenômeno não são necessárias a priori. Mais especificamente, as distribuições conjuntas tempo-frequência e tempo-escala constituem representações alternativas nas quais a informação buscada nos sinais pode ser melhor discriminada e, conseqüentemente, identificada e analisada. Já as redes auto-organizativas possibilitam a análise da informação em um espaço abstrato de dimensionalidade e grau de redundância e ordenação controláveis. Assim, a informação contida nos dados primários sobre os padrões de escoamento, normalmente associada a altas dimensionalidades, pode ser projetada em uma malha espacial simplificada (2D ou 3D) com a preservação das relações estatísticas e métricas originais e, portanto, sem alteração das relações topológicas.

A idéia de construir uma análise dos padrões de escoamento baseada na decomposição do sinal original em componentes tempo-frequência, que posteriormente são analisadas em uma rede neural para fins de detecção do padrão de escoamento, foi desenvolvida no trabalho de Selli e Seleglim (2007). A figura seguinte ilustra a estratégia abordada neste trabalho em que os principais padrões de escoamento gás-líquido horizontal puderem ser discriminados em tempo real com 100% de acerto a partir de sinais do gradiente local de pressão.



**Fig. 15** Estratégia de análise unificada combinando decomposição tempo-frequência e detecção através de uma rede neural.

## 5. Bibliografia

- Balian R., 1980, Physique Théorique.-Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 292, N°20, pp. 1357-1362.
- Crivelaro, K.C.O., Barbosa, P.R., Selegim Jr., P. Self-organizing neural networks for the identification of air-water horizontal two-phase flow regimes. In: 18th International Congress of Mechanical Engineering, 2005, Ouro Preto. 18th International Congress of Mechanical Engineering, 2005.
- Daubechies I. & Lagarias J., 1991, Two-scale difference equations I. Existence and global regularity of solutions. SIAM J. Math., Vol. 22, pp. 1388-1410.
- Daubechies I., 1993, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, II. Variations on a theme. SIAM J. Math. Anal., Vol. 24-2, pp. 499-519.
- Erwin E., 1992. Self-organizing maps - ordering, convergence properties and energy functions, Biological Cybernetics, Vol.68 (3), No.285-285
- Erwin E., Obermayer K., Schulten K., 1992, Self-organizing maps - stationary states, metastability and convergence rate, Biological Cybernetics, Vol. 67, No.1, pp. 35-45
- Erwin E., Obermayer K., Schulten K., 1992, Self-organizing maps - ordering, convergence properties and energy functions, Biological Cybernetics, Vol.67, No.1, pp.47-55
- Flanagan (1997)
- Fritzke B., 1994, Growing cell structures - a self-organizing network for unsupervised and supervised learning, Neural Networks, Vol.7, No.9, pp.1441-1460
- Grossberg, S., 1976a, Adaptive pattern classification and universal recoding: II feedback, expectation, olfaction, illusions. Biological Cybernetics, Vol. 23, pp.187-202.
- Grossberg, S., 1976b, Adaptive pattern recognition and universal recoding: parallel development and recoding of neural feature detectors. Biological Cybernetics, Vol. 24, pp.121-134.
- Hervieu e Selegim, 1998
- Hervieu E. & Leducq D., 1991, "The wavelet transform as a diagnostic tool in two-phase flows : characterisation of multiphase flows from wall measurements", European Two-Phase Flow Group Meeting, Rome
- Hervieu, E., Selegim Jr.P., Caractérisation Des Changements de Configuration Des Écoulements Diphasiques Gaz-Liquide Par Analyse de La Fréquence Instantanée.. COMPTES RENDUS DE L'ACADEMIE DE SCIENCES, PARIS - FRANCA, v. 319, n. II, p. 611-616, 1994.
- Hibiki T., S. Hogsett, M. Ishii Local measurement of interfacial area, interfacial velocity and liquid turbulence in two-phase flow Nuclear Engineering and Design 184 (1998) 287-304
- Horowitz e Alvarez (1996)
- Hubbard M.G. & Dukler A.E., 1966, The characterisation of flow regimes for horizontal two-phase flow. Proc. Heat Transfer and Fluid Mach. Institute. Stanford University Press - M.A. Saad & J.A. Moller eds.
- Kohonen, T., 2001, Self-organization and associative memory. Springer-Verlag, Berlin.
- Kohonen T, Analysis of a simple self-organizing process, Biological Cybernetics 44: (2) 135-140 1982a
- Kohonen T, Self-organized formation of topologically correct feature maps, Biological Cybernetics 43: (1) 59-69 1982b
- Low F., 1985, Complete sets of wave packets. A Passion for Physics - Essays in Honor of Geoffrey Chew. World Scientific, Singapore, pp. 17-22.
- Martinetz T., Schulten K., 1993, A neural-network for robot control - cooperation between neural units as a requirement for learning, Computer Electronics & Engineering, Vol.19, No.4, pp. 315-332
- Martinetz T.M., Berkovich S.G., Schulten K.J., 1993, Neural-gas network for vector quantization and its application to time-series prediction, IEEE Transactions on Neural Network, Vol.4, No.4, pp.558-569

- Morel C., Goreaud N. and Jean-Marc Delhaye The local volumetric interfacial area transport equation: derivation and physical significance International Journal of Multiphase Flow 25 (1999) pp.1099-1128
- Seleglim Jr. P., Milioli, F.E., Improving the determination of bubble size histograms by wavelet de-noising techniques. Powder Technology, v. 115, p. 114-123, 2001.
- Seleglim, Jr.P., Hervieu, E., An objective indicator for two-phase flow pattern transition. Nuclear Engineering and Design, v. 184, p. 421-435, 1998.
- Selli, M., Seleglim, Jr.P., On-line identification of horizontal two-phase flow regimes through Gabor transform and neural network processing. Heat Transfer Engineering, v. 28, p. 1-14, 2007.
- Somervuo P, Kohonen T, Self-organizing maps and learning vector quantization for feature sequences, NEURAL PROCESS LETT 10: (2) 151-159 1999
- Utsugi A, Hyperparameter selection for self-organizing maps, NEURAL COMPUT 9: (3) 623-635 APR 1 1997

# CAPÍTULO 6 - Métodos Computacionais para escoamento Multifásico

Angela O. Nieckele

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/Rio

R. Marques de São Vicente 225 – Gávea

22453-900 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

nieckele@puc-rio.br

## Lista de Símbolos

<b>A</b>	área
<b>u</b>	vetor velocidade [m/s]
<b>x, y, z</b>	coordenada espacial [m]
<b>T</b>	coordenada temporal [s]
<b>U</b>	velocidade do escoamento [m/s]
<b>C</b>	velocidade do som [m/s]
<b><math>\sigma</math></b>	tensor das tensões [-]
<b>f</b>	força de corpo externa [n]
<b>g</b>	aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]
<b>P</b>	pressão [pa]
<b><math>\tau</math></b>	tensor viscoso [-]
<b>I</b>	tensor identidade [-]
<b><math>\mu</math></b>	viscosidade dinâmica [pa.s]
<b>D</b>	tensor taxa de deformação [-]
<b><math>p^r</math></b>	pressão reduzida ou modificada
<b><math>\nu</math></b>	viscosidade cinemática [m <sup>2</sup> /s]
<b><math>\dot{m}</math></b>	fluxo de massa [kg/s]
<b>S</b>	fronteira, interface, contorno [-]
<b>n</b>	vetor unitário normal [-]
<b>w</b>	velocidade da interface [m/s]
<b>t</b>	salto na superfície das trações [-]
<b>H</b>	função degrau (Heaviside) [-]
<b>A</b>	área [m <sup>2</sup> ]
<b><math>n^*</math></b>	vetor normal unitário para fora da superfície [-]
<b>C</b>	função marcadora [-]
<b><math>\Delta x</math></b>	espaçamento [m]
<b>W, w</b>	volume de controle a oeste [-]
<b>E, e</b>	volume de controle a leste [-]
<b>N, n</b>	volume de controle norte [-]
<b>S, s</b>	volume de controle ao sul [-]
<b><math>\Delta t</math></b>	intervalo de tempo [s]
<b><math>i, j</math></b>	célula [-]

$d$	distância normal à interface no instante de tempo $t$ [-]
$h$	espaçamento da malha [-]
$M$	número de células [-]
$f$	função de Heaviside suavizada [-]
$\forall$	volume [ $m^3$ ]
$\mathbf{j}$	fluxo volumétrico [m/s]
$\mathbf{J}$	fluxo de deslizamento [m/s]
$f$	fator de atrito de Darcy [-]
$Dh$	diâmetro hidráulico [-]

### Símbolos Gregos

$\partial$	operador derivada parcial
$\gamma$	tensão superficial
$\kappa$	curvatura média local da superfície
$\delta$	função interface
$\alpha$	parâmetro da expressão de uma linha no plano
$\varphi$	fluxo de área
$\phi$	função "level-set"
$\tau$	tempo
$\alpha$	fração volumétrica
$\bar{\alpha}$	tensão cisalhante interfacial
$\Lambda$	direção característica
$\Phi$	vetor incógnita

### Sobrescrito

$T$	matriz transposta
$n$	índice de tempo
$*$	adimensionais
$-$	média
$0$	inicial (tempo 0)
$'$	variação
$*$	médio

### Subscritos

$1$	fase 1, função de Heaviside unitária
$2$	fase 2
$0$	inicial
$P$	volume de controle
$w, e, n, s$	faces do volume de controle ()
$k$	fase $k$
$i$	interface
$m$	mistura

$\ell$	líquido
$g$	gasosa
$w$	parietal
$r$	relativo
<i>drift</i>	deslizamento
$s$	superficial

### Operadores Matemáticos

$\nabla$	gradiente
$\nabla \cdot$	divergente
$\nabla \times$	rotacional
$\times$	produto vetorial
$\cdot$	produto escalar
$\nabla^2$	laplaciano
$\langle \rangle$	média espacial

### Adimensionais

$M$	número de Mach
$D^*$	diâmetro
$t^*$	adimensional de tempo
$Re$	número de Reynolds

## 1. Introdução

Escoamentos multifásicos podem ser definidos como escoamentos simultâneos de diferentes fluidos, com diferentes fases (gasosa ou líquida) ou mesmo escoamentos de fluidos e sólidos. As diferentes fases podem ser da mesma substância pura, como um líquido e seu vapor, ou de diferentes substâncias, como um líquido e um gás ou dois líquidos ou qualquer combinação de líquido, gás e sólido. Um número significativo de aplicações envolve escoamentos com mais de uma fase.

A ferramenta numérica tem se tornado essencial para investigar escoamentos multifásicos. Em um número limitado de casos, a simulação numérica pode ser utilizada para resolver um problema prático, através de simulação direta. Porém, frequentemente, a solução numérica é a única ferramenta disponível, para investigar algum aspecto crítico de uma situação de interesse, para a qual experimentação física não é possível. Adicionalmente, a complexidade de escoamentos multifásicos em geral requer uma descrição simplificada, por exemplo, através de equações médias, e as formulações de modelos reduzidos podem se beneficiar muito dos esclarecimentos que os resultados numéricos fornecem.

O presente capítulo visa apresentar algumas metodologias numéricas para abordar escoamentos multifásicos. Inicialmente, serão apresentados métodos que

envolvem a solução detalhada das equações de Navier-Stokes, e que serão denominados de modelos de “um fluido”. Para situações onde a solução direta das equações de Navier-Stokes envolve um excessivo esforço computacional, o uso de descrições reduzidas se torna necessário, e a base para essas descrições envolve algum processo de média. A segunda parte deste capítulo apresenta os modelos baseados nas equações médias de Navier-Stokes.

Visando facilitar a apresentação das diferentes metodologias, a seguir um pequeno resumo das equações de Navier-Stokes é apresentado, juntamente com uma discussão sobre condições de contorno.

## 2. Equações de Conservação e Condições de Contorno

A equação de conservação de massa pode ser escrita em função da massa específica  $\rho(x, t)$  e do vetor velocidade  $\mathbf{u}(x, t)$ , como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

onde  $x$  é a coordenada espacial, e  $t$  é um determinado instante de tempo.

Para uma classe importante de escoamentos, a massa específica de uma partícula material não é alterada durante o deslocamento da mesma com o escoamento. Isto normalmente é verdade quando a velocidade do escoamento  $U$  é menor do que a velocidade do som  $c$ , de tal forma que o número de Mach  $M = U/c$  é muito menor do que a unidade. Nestes casos, o escoamento é considerado incompressível e a equação de conservação de massa se simplifica para

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

indicando conservação volumétrica.

A equação de conservação de quantidade de movimento linear pode ser escrita na forma conservativa como

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad (3)$$

onde  $\mathbf{f}$  é uma força de corpo externa por unidade de massa agindo no fluido (em geral é a força gravitacional  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ , onde  $\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade) e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor das tensões, o qual pode ser decomposto na pressão  $p$  e na parte viscosa  $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (4)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade. Para fluidos Newtonianos, o tensor viscoso  $\boldsymbol{\tau}$  é

$$\boldsymbol{\tau} = \mu 2 \mathbf{D} \quad ; \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{1}{3} \nabla \bullet \mathbf{u} \mathbf{I} \right] \quad (5)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica,  $\mathbf{D}$  é o tensor taxa de deformação,  $T$  denota o transposto do gradiente. A equação (3) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p^r + \nabla \bullet (\mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]) \quad (6)$$

sendo  $p^r$  a pressão reduzida ou modificada,

$$p^r = p - \rho \mathbf{g} \bullet \mathbf{x} - \frac{1}{3} \mu \nabla \bullet \mathbf{u} \quad (7)$$

O caso particular de escoamento de fluidos incompressíveis (massa específica constante) com viscosidade constante é especialmente importante e grande ênfase será dedicada ao mesmo neste capítulo. Nestes casos, as equações a serem resolvidas são a Eq. (2) e a seguinte forma da equação de conservação de quantidade de movimento

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \bullet \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (8)$$

onde  $\nu = \mu / \rho$  é a viscosidade cinemática. Dependendo da conveniência, o termo não linear da equação acima pode ser expresso de diversas formas,

$$\mathbf{u} \bullet \nabla \mathbf{u} = \nabla \bullet (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (9)$$

A utilização das Eqs. (2) e (8) para a solução numérica do escoamento não é trivial. As velocidades podem ser obtidas da Eq. (8), mas não existe uma equação explícita para evolução da pressão. A Eq. (2) apresenta somente uma relação entre os componentes da velocidade. No entanto, isto pode ser resolvido, ao aplicarmos o divergente na equação de conservação de quantidade de movimento, e utilizarmos a condição de incompressibilidade para eliminarmos a derivada temporal, resultando na seguinte equação

$$\nabla^2 p = -\rho \nabla \bullet (\mathbf{u} \bullet \nabla \mathbf{u}) + \nabla \bullet \mathbf{f} \quad (10)$$

que substitui a Eq. (2). É importante notar o papel da pressão em um escoamento incompressível. Ao invés de ser uma função termodinâmica de massa específica e temperatura, a pressão só depende do campo de velocidade, devendo tomar os va-



lores necessários para impor divergência zero do campo de velocidade. Logo, é conveniente interpretar a pressão como projetando o campo de velocidade no espaço de funções incompressíveis.

## 2.1. Condições de Contorno

Suponha que existe um fluxo de massa  $\dot{m}$  através de uma fronteira  $S$ , a qual separa duas fases 1 e 2, devido a, por exemplo, mudança de fase numa interface líquido-vapor. Neste caso, a conservação de massa requer que

$$\dot{m} \equiv \rho_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = \rho_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \quad (11)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal e  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  é o componente normal da velocidade da interface. Considerando que a interface pode ser representada por

$$S(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (12)$$

e que o unitário normal é direcionado da região onde  $S < 0$  para a região onde  $S > 0$ , tem-se que

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \quad \text{então} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{|\nabla S|} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (13)$$

Se  $S = 0$  representa uma superfície impermeável, como por exemplo, uma parede sólida,  $\dot{m} = 0$ , logo  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}$ , obtendo-se a seguinte condição de contorno cinemática

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = 0 \quad \text{em} \quad S=0 \quad (14)$$

A condição de *não-deslizamento* é normalmente utilizada para fluidos viscosos sob superfícies sólidas, onde se impõe que o componente tangencial da velocidade do fluido deve se igualar ao da fronteira, isto é,  $\mathbf{n} \times (\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0$  em  $S=0$ . Logo, para paredes impermeáveis

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} \quad \text{em} \quad S=0 \quad (15)$$

Em superfícies livres, necessita-se de uma condição adicional para determinar o movimento da superfície. Um balanço de quantidade de movimento através da superfície estipula que o salto na superfície das trações ( $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ), combinado com

fluxos de quantidade de movimento, devem ser balanceados pela ação da tensão superficial, resultando em

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \bullet \mathbf{n} - \dot{m}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \bullet \mathbf{n} &= -\nabla \bullet [(\mathbf{I} - \mathbf{nn})\gamma] = \\ &= -(\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \bullet \nabla \gamma + \gamma \kappa \mathbf{n} \end{aligned} \quad (16)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de tensão superficial,  $\kappa = \nabla \bullet \mathbf{n}$ , é a curvatura média local da superfície;  $\mathbf{I} - \mathbf{nn}$  é o projetor no plano tangente à interface, sendo  $S > 0$  para o fluido 2 e  $S < 0$  para o fluido 1. Esta condição pode ser decomposta no componente normal e tangencial como

$$(-p_2 + p_1) + \mathbf{n} \bullet (\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1) \bullet \mathbf{n} - \dot{m}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \bullet \mathbf{n} = \gamma \kappa \quad (17)$$

$$\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1) \bullet \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \nabla \gamma \quad (18)$$

### 3. Métodos Baseados na Solução Direta das Equações de Navier-Stokes

O primeiro conjunto de modelos a ser apresentado nesta seção é baseado na solução direta das equações de Navier-Stokes. Estes modelos envolvem a solução de escoamentos complexos transientes, onde todas as escalas de comprimento e de tempo são totalmente resolvidas e além da hipótese do contínuo, nenhum modelo adicional é necessário.

O presente texto é introdutório, as seguintes referências podem complementar as informações apresentadas aqui: Floryan e Rasmussen (1989); Shyy et al. (1996); Sethian (1999); Rothman e Zaleski (1997), Prosperetti e Tryggvason (2009). A revisão apresentada por Mc Hyman (1984) é especialmente clara e útil para o novato no tema.

Escoamentos de dois ou mais fluidos podem ser determinados utilizando o enfoque de “um fluido”, onde um único conjunto de equações de conservação é resolvido em todo o domínio, e os diferentes fluidos são identificados por algum tipo de marcador, o qual é advectado pelo escoamento. A Figura 1 ilustra diferentes métodos para a identificação da interface.

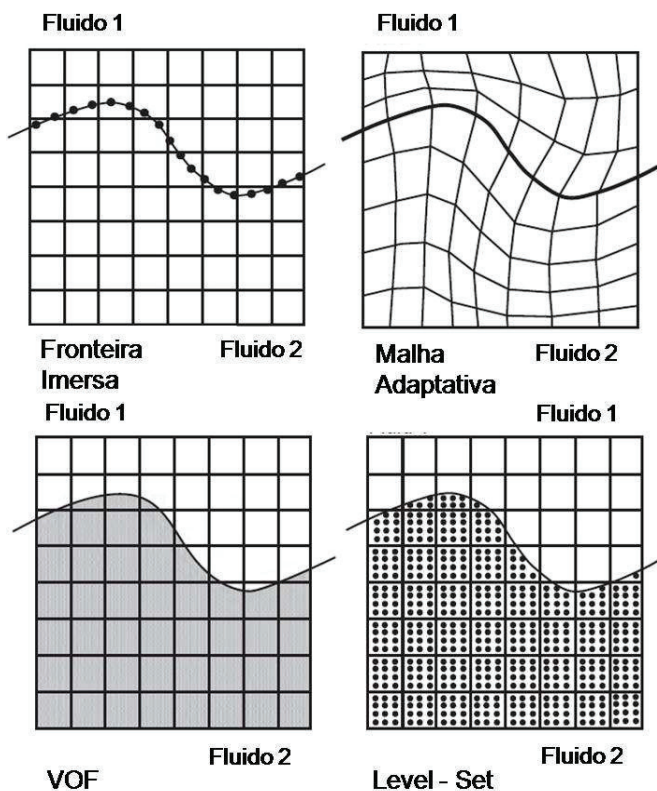
Métodos que utilizam funções marcadoras são normalmente denominados de métodos de captura de interface (“front-tracking”), e têm sido desenvolvidos por uma série de pesquisadores. Em geral estes métodos são baseados em uma malha fixa (estacionária) e utiliza uma função adicional marcadora para identificar a posição da interface. O método VOF e Level-Set são dois exemplos que merecem ser citados. O grande atrativo é a simplicidade e eficiência.

Métodos com malha adaptadas às fronteiras das fases (“body-fitted grids”) simplificam significativamente a especificação das interações entre as fases através das interfaces. Porém, estes métodos em geral são limitados a interfaces relativamente simples.

Para escoamento de sólido-líquido, a metodologia de fronteira imersa tem se mostrado altamente atrativa. Neste caso, o escoamento é resolvido numa malha fixa, a interface entre as fases é definida como uma superfície, a qual é advectada no tempo de forma precisa. A influência da interface nas fases adjacentes é imposta através de termos de fontes das equações de conservação.

### ***3.1. Modelo de “Um Fluido”***

Como já mencionado, os métodos nesta categoria se baseiam no conceito de “escoamento de um fluido”, isto é, um único conjunto de equações de conservação é utilizado para determinar o escoamento, considerando-se, no entanto variações das propriedades termofísicas de cada fluido e adicionando-se termos apropriados nas interfaces associados aos fenômenos interfaciais, como por exemplo, tensão superficial.



**Fig. 1** Diferentes métodos de representar o comportamento da interface entre dois fluidos

As equações de Navier-Stokes apresentadas na seção 2 são válidas para fluidos com variações arbitrárias de propriedades materiais. No entanto, a forma diferencial das equações não permite discontinuidades das propriedades. Porém, os métodos numéricos baseados na formulação de volumes finitos, trabalham com as equações governantes na forma integral e nenhuma hipótese de suavização é utilizada. A utilização das funções generalizadas permite o uso das equações de conservação em sua forma original. Contudo, as equações de conservação apresentadas na seção 4 não levam em consideração efeitos interfaciais como a tensão superficial. A tensão superficial só atua na interface, devendo ser adicionada como uma força extra nas equações de Navier-Stokes, como um termo de interface singular utilizando a função  $\delta$ . A Eq. (6) deve ser reescrita como

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p^f + \nabla \cdot (\mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]) + \gamma \kappa \delta(n) \mathbf{n} \quad (19)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de tensão superficial,  $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$ , é a curvatura média local da superfície e  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal orientado de forma apropriada na interface,  $n$  é a coordenada normal à interface, sendo igual a zero na mesma.

Com a inclusão do termo singular na Eq. (19), a equação passa a ser válida para todo o campo de escoamento, incluindo escoamentos com descontinuidades de massa específica e viscosidade.

A equação de conservação de massa é a mesma de um escoamento monofásico, Eq.(1).

Um grande número de situações de interesse prático pode ser analisado com a formulação apresentada. Existem, no entanto, situações onde complicações adicionais surgem como a presença de mudança de fase ou de contaminantes na interface, e que não serão tratados aqui.

Os métodos baseados na formulação de “um fluido” geralmente utilizam uma malha fixa, juntamente com o método de projeção para determinar o escoamento. Uma vez determinada a massa específica e a viscosidade, os vários métodos são muito semelhantes, apesar de apresentarem diferentes implementações e conseqüentemente diferentes técnicas de solução. A advecção da interface do fluido, ou – de forma equivalente – dos campos de massa específica e viscosidade, é o que diferencia os métodos.

O tratamento de escoamentos com descontinuidades de massa específica e viscosidade é apresentado a seguir.

### 3.2. Tratamento das Propriedades

A solução de um escoamento multifásico com um único conjunto de equações requer que seja levada em consideração as diferenças de propriedades dos diferentes fluidos, assim como deve-se adicionar termos nas interfaces devido aos fenômenos interfaciais. Como estes termos são concentrados nas fronteiras entre os diferentes fluidos, estes são representados por funções delta ( $\delta$ ), as quais devem ser aproximadas junto com o resto das equações durante o processo de discretização. De um modo geral, o escoamento é descontínuo através das interfaces, assim como as propriedades materiais, logo, todas as variáveis precisam ser interpretadas através de funções generalizadas.

Os diferentes fluidos podem ser identificados com a função degrau H (Heaviside), a qual é igual a 1 na região onde existe um determinado fluido e igual a zero fora da região. A interface é identificada pelo valor não nulo do gradiente da função degrau. Para identificar o gradiente é conveniente expressar a função H em função da integral de funções  $\delta$  multidimensionais. Para um campo bi-dimensional, a função H deve ser integrada sobre a área A, limitada pelo contorno S,

$$H(x, y) = \int_A \delta(x - x') \delta(y - y') da' \quad (20)$$

Para determinar o gradiente de  $H$  pode-se utilizar o teorema de divergência e transformar a integral de área (ou volume em 3 dimensões) em uma integral de linha (ou superfície), resultando em

$$\nabla H(x, y) = - \int_S \delta(x - x') \delta(y - y') \mathbf{n}' d s' \quad (21)$$

onde  $\mathbf{n}'$  é o vetor unitário normal para fora da interface. Introduzindo coordenadas locais, tangente ( $s$ ) e normal ( $n$ ) à frente, pode-se reescrever  $\nabla H$  como

$$\nabla H(x, y) = - \int_S \delta(s') \delta(n') \mathbf{n}' d s' = - \delta(n) \mathbf{n} \quad (22)$$

o que nos permite utilizar uma função  $\delta$  unidimensional, em vez de bi-dimensional na Eq. (21). O mesmo procedimento é válido para o espaço tri-dimensional.

Se a massa específica de cada fase é constante, a massa específica de cada ponto do domínio pode ser representada pelas massas específicas de cada fase e pela função Heaviside,

$$\rho(x, y) = \rho_1 H(x, y) + \rho_0 [1 - H(x, y)] \quad (23)$$

onde  $\rho_1$  é a massa específica do fluido onde  $H=1$  e  $\rho_0$  onde  $H=0$ .

O gradiente da massa específica é

$$\nabla \rho(x, y) = (\rho_1 - \rho_0) \nabla H(x, y) = (\rho_1 - \rho_0) \delta(n) \mathbf{n} \quad (24)$$

Equações análogas podem ser derivadas para outras propriedades materiais.

### 3.3. Topologia das Interfaces

Como as equações de conservação, juntamente com as condições na interface, da metodologia de “um fluido” são as mesmas do escoamento monofásico para cada fluido, a única complicação adicional para o escoamento multifásico é a presença de uma fronteira móvel com tensão superficial.

Apesar da evolução do sistema formado por dois fluidos, separados por uma interface bem definida, ser governada pela solução das equações de Navier-Stokes, a evolução da topologia da interface não se encontra incluída na descrição do contínuo. Mudanças topológicas como quebra ou coalescência de bolhas e gotas são muito comuns em escoamentos multifásicos. Infelizmente, os exatos mecanismos que causam a quebra de fios e ruptura de filmes ainda não são perfeitamente conhecidos e, intensa investigação vem sendo realizada. Acredita-se que fios podem se tornar infinitesimalmente finos e que sua quebra é governada pela equação de Navi-

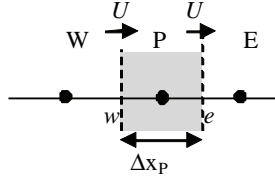
er-Stokes. Por outro lado, acredita-se que a ruptura de filmes ocorre devido a forças atrativas de pequeno alcance. Atualmente, a maioria das simulações numéricas trata o processo de forma “ad-hoc” e simplesmente une interfaces quando as mesmas encontram-se muito próximas ou permite que fios se quebrem quando os mesmos são suficientemente finos. Deve-se observar que “suficiente” em geral significa o tamanho do espaçamento da malha.

### 3.4. Métodos de Captura de Interface

Métodos de detecção de interface são baseados em uma função marcadora, também chamada de função cor. Quando a interface é capturada em uma malha fixa a função marcadora  $C$  é introduzida de tal forma que  $C = 1$  em um fluido e  $C = 0$  no outro fluido. A função marcadora ou função cor é uma variável escalar discreta correspondendo à função característica Heaviside  $H$  (Eq. 20). Porém, numericamente  $C$  pode apresentar variações suaves entre uma zona com valor unitário e a outra. A função cor  $C$  representa a porção da célula preenchida com a fase 1.

Para um domínio unidimensional, a função marcadora ou função cor para o volume de controle principal P, com espaçamento  $\Delta x_P$ , ilustrado na Fig. 2 é:

$$C_P \approx \frac{1}{\Delta x_P} \int_i H(x) dx \quad (25)$$



**Fig. 2** Volume de controle

A função marcadora se desloca com a velocidade do fluido, logo, em um referencial sobre a interface, a derivada material da função marcadora deve ser nula, isto é

$$\frac{DC}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = 0 \quad (26)$$

A integração da Eq. (26) através de dados descontínuos apresenta algumas dificuldades numéricas. Para simplificar a explicação, e ilustrar as dificuldades vamos considerar um escoamento unidimensional de fluidos incompressíveis, com velocidade constante  $U > 0$ .

A Equação (26) combinada com a equação de conservação de massa pode ser reescrita na seguinte forma conservativa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U C}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

Integrando esta equação no tempo e no espaço, no volume de controle P indicado na Fig. 2, da face oeste  $w$  (“west”) até a face leste  $e$  (“east”) do volume de controle P, obtém-se

$$\int_{\Delta x} C^{n+1} dx - \int_{\Delta x} C^n dx = \int_{\Delta t} U C)_e dt - \int_{\Delta t} U C)_w dt \quad (28)$$

onde os superescritos  $n$  e  $n+1$  indicam os instantes de tempo  $t$  e  $t + \Delta t$ , e os subscritos  $w$  e  $e$  indicam que a função marcadora deve ser avaliada nas faces do volume de controle P.

De acordo com a Eq. (25), a função marcadora armazenada no ponto nodal representa a média no volume de controle, logo

$$\int_{\Delta x} C^{n+1} dx - \int_{\Delta x} C^n dx = (C_P^{n+1} - C_P^n) \Delta x_P \quad (29)$$

e considerando-se a aproximação *upwind* (Patankar, 1980) para avaliar os fluxos convectivos nas faces, obtém-se

$$U C)_e = U C_P \quad ; \quad U C)_w = U C_W \quad (30)$$

onde  $C_P$  e  $C_W$  correspondem ao valor de  $C$  armazenado no centro dos volumes de controle P e W, respectivamente. Finalmente, utilizando uma integração temporal explícita de 1a. ordem, pode-se determinar  $C$  no volume P no instante de tempo  $n+1$ , como

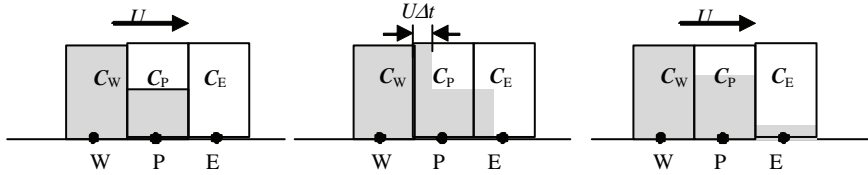
$$C_P^{n+1} = C_P^n - (C_P^n - C_W^n) \frac{U \Delta t}{\Delta x_P} \quad (31)$$

Este mesmo resultado pode ser obtido, sem nenhuma aproximação, se a função marcadora for advectada por considerações geométricas conforme ilustrado na Fig. 3. Considere a distribuição inicial  $C$  como indicado na Fig. 3 do lado esquerdo. A solução se move para a direita com velocidade  $U$ . A função marcadora  $C$  é deslocada de  $U \Delta t$ . A área cinza indicada na Fig. 3 central é a solução exata após um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Porém, somente valores médios são armazenados no centro do volume de controle, e a Fig. 3 do lado direito ilustra a distribuição média, a qual também é dada pela Eq. (31). Esta distribuição é então utilizada para o próximo passo de tempo. O problema é que ao utilizar no centro do volume de



controle o valor médio da função marcadora,  $C$  começa a escoar para fora da célula P, antes desta encontrar-se cheia, levando a uma rápida difusão numérica.

A razão do baixo desempenho da metodologia ilustrada está diretamente relacionada com a hipótese de que a função marcadora  $C$  é uniforme no volume de controle.



**Fig. 3** Advecção de um escalar com velocidade  $U$

Métodos mais sofisticados foram desenvolvidos considerando uma variação linear de  $C$  no volume de controle. No entanto, existem diversas possibilidades para se selecionar a inclinação de  $C$ . Um exemplo resulta no esquema de segunda ordem centrado de Lax-Wendroff (1960), no qual a função marcadora é obtida para o instante de tempo  $t + \Delta t$  para uma malha uniforme por

$$C_P^{n+1} = C_P^n - (C_E^n - C_W^n) \frac{U \Delta t}{2 \Delta x} + (C_E^n - 2C_P^n + C_W^n) \frac{U^2 \Delta t^2}{2 \Delta x^2} \quad (32)$$

Porém, enquanto o esquema de primeira ordem suaviza a solução devido a introdução de falsa difusão, o esquema de ordem mais elevada leva a oscilações irrealistas na distribuição de  $C$ .

Considere agora as duas situações ilustradas na Fig. 4. Em ambas as situações a célula doadora (da esquerda) possui a mesma quantidade do fluido 1 (cor cinza), porém a distribuição do fluido nas células não é a mesma. Após um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a quantidade de fluido a migrar entre as células encontra-se marcada de cinza escuro. Nota-se claramente, que a quantidade de fluido transmitido entre as células é completamente diferente, apesar das células doadoras possuírem a mesma quantidade de fluido 1, e da velocidade na interface ser igual. Este exemplo ilustra que no processo de advecção da função marcadora, a posição relativa da interface nas células deve ser levada em consideração.

Os exemplos descritos mostram que é preciso um cuidado especial para determinar a advecção da interface.

Considere agora, a situação ilustrada na Fig. 5. Na figura da esquerda, o volume de controle W à oeste da célula P encontra-se cheio  $C_W=1$ , enquanto que a célula do lado leste E encontra-se vazia,  $C_E=0$ . Com a informação de qual célula encontra-se cheia e qual célula encontra-se vazia, determina-se a exata posição da célula parcialmente cheia. A distribuição de  $C$  é então advectada a distância  $U \Delta t$  (figura central). Com a distribuição advectada, uma nova média é encontrada (figura da direita). Note que  $C$  não foi transmitida para a célula leste. Naturalmente

que se a célula P estiver quase cheia, parte do fluido deve escoar para a célula seguinte.

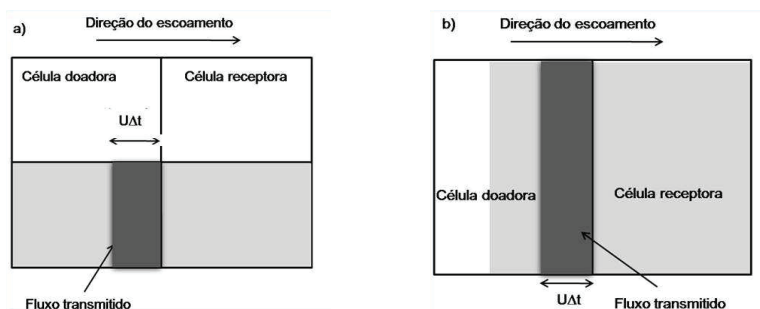


Fig. 4 Migração de fluido entre as fases

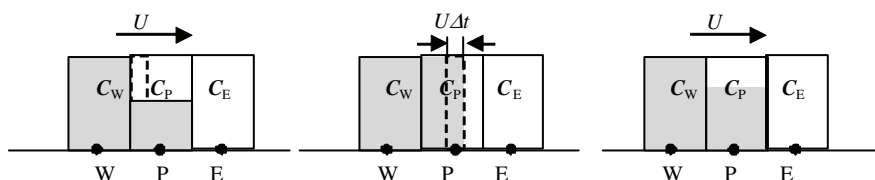


Fig. 5 Reconstrução por advecção de um escalar unidimensional

Para considerar adequadamente ambos os casos descritos acima, a integral temporal da Eq. (28) pode ser determinada como

$$\int_{\Delta t} U C)_e dt = \begin{cases} 0, & \Delta t \leq (1 - C_P^n) \Delta x / U \\ \Delta x - (C_P^n + U \Delta t), & \Delta t > (1 - C_P^n) \Delta x / U \end{cases} \quad (33)$$

A extensão da metodologia para situações bi- e tri-dimensionais é bem mais complexa e diversas metodologias têm sido desenvolvidas. Dentre as diversas possibilidades, os métodos VOF (“Volume of Fluid”) e Level-Set serão descritos com maiores detalhes nas seções a seguir.

### 3.5. Método VOF (Volume of Fluid)

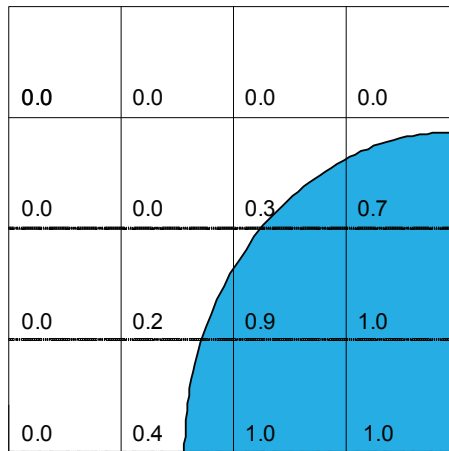
O método VOF consiste em um dos modelos desenvolvidos para generalizar a formulação descrita pela Eq. (33) para situações bi- ou tri-dimensionais.

Como mencionado, o campo escalar denominado função marcadora ou função cor  $C$ , é a variável discreta análoga a função característica Heaviside  $H$ . Esta variável é conhecida como fração volumétrica (na realidade para situações bi-dimensionais deveria ser fração de área, porém é prática comum ser denominada fração volumétrica). A função cor  $C_{ij}$  representa a porção da área da célula  $(i,j)$  preenchida com a fase 1. Para uma malha uniforme na direção  $x$  e  $y$  com espaçamento  $h$ :

$$C_{ij} \approx \frac{1}{h^2} \int \int_{i,j} H(x,y) dx dy \quad (34)$$

Nas células cortadas pela interface  $S$ , temos  $0 < C < 1$ , e  $C = 0$  ou  $1$  fora destas células. A Figura 6 ilustra a distribuição da função cor em um domínio bi-dimensional.

Para um escoamento incompressível, a conservação de massa é equivalente a conservação de volume e, portanto conservação da função característica  $H$ . Existe uma vasta literatura de métodos numéricos para tratar as equações de conservação, porém, como já mencionado, é preciso um cuidado especial para tratar a natureza especial do problema, o qual é inteiramente concentrado na interface  $S$ .



**Fig. 6** Distribuição da função cor em um domínio bi-dimensional

Os primeiros métodos VOF foram desenvolvidos há algumas décadas e têm passado por um processo de contínua melhora. Seu grande uso e eficiência são devido a diversas razões:

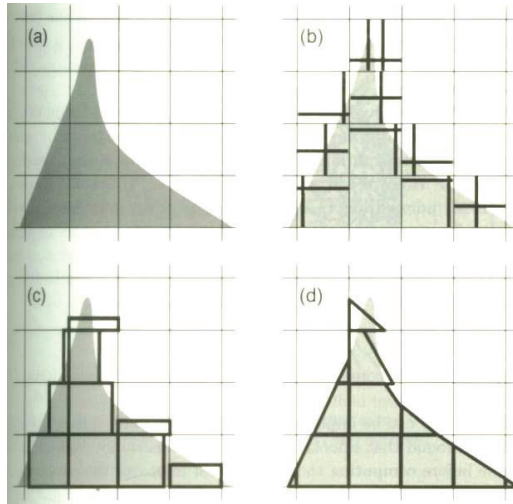
- Preservam massa naturalmente, como uma direta consequência do algoritmo de advecção baseado na representação discreta da equação de conservação  $DH/Dt = 0$ .
- Nenhum tratamento especial é necessário para obter junções e quebras de interfaces, isto é, alterações topológicas são implícitas nos algoritmos.
- Podem ser estendidos de forma relativamente simples para domínios bi- e tri-dimensionais
- O esquema é local no sentido de que somente valores de  $C$  nas células vizinhas são necessários para atualizar o valor de  $C$  na célula principal  $P$ . Por esta razão, é relativamente simples programar estes algoritmos em paralelo, em particular dentro do conceito da técnica de decomposição de domínio.

O modelo VOF mais simples foi introduzido por Noh e Woodward (1976) e consiste na aplicação do conceito unidimensional diretamente. Este método é denominado de SLIC (“Simple Line Interface Calculation”). A interface separando a região de fluido com  $C = 1$  da região onde  $C = 0$  é aproximada por uma linha reta paralela ao eixo  $y$  para advecção na direção  $x$  e paralela à  $x$  para advecção na direção  $y$  (para escoamento bi-dimensionais). Hirt e Nichols (1981) propuseram um método ligeiramente diferente, onde a interface também é aproximada por linhas retas paralelas aos eixos, mas a mesma orientação é utilizada para ambas as direções  $x$  e  $y$ . A orientação horizontal ou vertical da frente é obtida através da determinação da normal à interface, usando valores das células vizinhas e a orientação é determinada baseada em quão próxima da direção horizontal ou vertical a normal da superfície se encontra. Ambos os métodos são de primeira ordem,  $O(\Delta x)$ , na precisão de reconstrução da interface e ambos os métodos geram interfaces distorcidas, com muito “lixo”, com pedaços da interface quebrando de forma não fisicamente realista, mesmo na presença de campos de velocidade bem simples.

Técnicas VOF mais precisas visam ajustar a interface através de segmentos de reta linear. As técnicas PLIC (“Piecewise Linear Interface Construction”) se destacam entre as mais precisas. No método introduzido por Youngs (1982), a interface é aproximada por segmentos de linha-reta em cada célula, mas a linha pode ser orientada arbitrariamente com respeito aos eixos de coordenadas. A orientação da linha é determinada pela normal à interface, a qual é determinada considerando o valor da função cor na célula em consideração, assim como nas células vizinhas. Os resultados da advecção dependem da precisão da reconstrução da interface e da precisão da determinação da normal à interface.

A Figura 7 ilustra os resultados de reconstrução de uma interface, utilizando o método SPLIC, o método VOF de Hirt-Nichols e o método PLIC usando linhas retas com orientação ótima. A reconstrução linear captura muito bem variações sua-

ves da interface, mas não representa bem variações rápidas. Note que os segmentos de reta não são contínuos através das fronteiras das células.



**Fig. 7** Reconstrução VOF 2D. (a) interface original. (b) SPLIC (c) VOF de Hirt e Nichols (d) PLIC usando linhas retas com orientação “ótima”. Reprodução de Prosperetti e Tryggvason (2009)

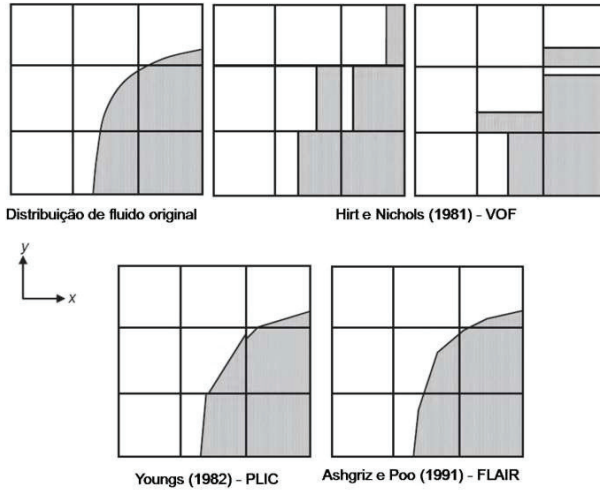
Diversos métodos foram desenvolvidos baseados na técnica PLIC. Ashgriz e Poo (1991) desenvolveram o método conhecido como FLAIR, fluxo de segmento de linha para advecção e reconstrução da interface, onde se realiza a reconstrução dos segmentos de linha sobre as faces das células ao invés dos segmentos de linha dentro das células, garantindo continuidade da interface. A Fig. 8 apresenta outro exemplo de desempenho das diversas técnicas

Uma das características simplificadoras crítica dos algoritmos VOF/PLIC é que as interfaces não são reconstruídas como uma seqüência de segmentos unidos, contínuos, mas com uma seqüência descontínua de segmentos, mas com descontinuidades que assintoticamente se tornam pequenas.

Um algoritmo VOF/PLIC é dividido em duas partes: um passo de reconstrução e um passo de propagação, os quais serão apresentados com mais detalhes a seguir.

### 3.5.1. Reconstrução

A determinação da orientação do segmento é o fator mais importante no passo de reconstrução. É equivalente a determinação do vetor unitário normal  $n$  ao segmento. A linha reta é determinada de forma única a partir do vetor normal  $n$  e da fração de volume  $C$ .



**Fig. 8** Comparação das técnicas de linhas para prever a distribuição do fluido.

Diversos algoritmos foram desenvolvidos para calcular o vetor normal (Puckett e Saltzman, 1992, Li, 1995). Aqui, somente o método desenvolvido por Li (1995) é apresentado. Li propôs estimar o vetor normal (não unitário)  $\mathbf{m}$  pela seguinte fórmula de diferença.

$$\mathbf{m}^h \approx \nabla^h C \quad (35)$$

O vetor  $\mathbf{m}$  é armazenado no centro da célula e é aproximado pela média dos valores de  $\mathbf{m}$  obtidos nas quinas do volume de controle

$$\mathbf{m}_{ij} = \frac{1}{4} \left( \mathbf{m}_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \mathbf{m}_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \mathbf{m}_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \mathbf{m}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right) \quad (36)$$

sendo os valores nas quinas obtidos a partir de médias do gradiente de  $C$  das faces, por exemplo

$$m_{x, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{C_{i+1, j+1} - C_{i, j+1}}{h} + \frac{C_{i+1, j} - C_{i, j}}{h} \right) \quad (37)$$

$$m_{y,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{C_{i+1,j+1} - C_{i+1,j}}{h} + \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{h} \right) \quad (38)$$

A segunda parte na etapa de reconstrução consiste em determinar a interface linear que divide a célula em duas partes contendo a área adequada de cada fluido.

De um modo geral, encontrar a área em cada lado de uma interface linear dentro de um quadrado é relativamente fácil. Porém, achar o problema inverso, ou seja, achar a linha reta, conhecida a área, é bem mais difícil. Ambas as expressões são necessárias na metodologia PLIC, o que pode ser obtido derivando uma equação explícita que relaciona a área do quadrado “cortada” pela linha reta com um parâmetro  $\alpha$  (Gueyffier et al, 1999).

No caso bi-dimensional, o problema pode ser resolvido, reconhecendo que a expressão mais geral para uma linha no plano  $(x, y)$  com normal  $m$  é

$$m_x x + m_y y = \alpha \quad (39)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro. A área contida na região abaixo dessa linha dentro do quadrado da célula  $(i, j)$  (ABCD da Fig. 9) é dado por

$$C_{ij} = \frac{\alpha^2}{2 m_x m_y} \left[ 1 - H(\alpha - m_x h) \left( \frac{\alpha - m_x h}{\alpha} \right)^2 - H(\alpha - m_y h) \left( \frac{\alpha - m_y h}{\alpha} \right)^2 \right] \quad (40)$$

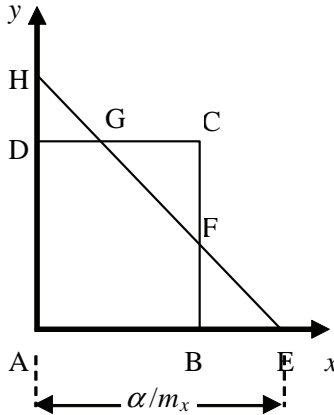
Nesta expressão o pré-fator indica a área do triângulo AEH. Porém, para obter a área desejada é necessário subtrair a área do triângulo BEF se  $\alpha > m_x h$  (segundo termo dentro do parênteses, onde a função degrau Heaviside aparece para garantir que esta subtração só ocorre se E estiver a direita de B. O último termo é análogo, indicando que o triângulo DGH deve ser subtraído se o ponto H estiver acima de G, isto é, quando  $\alpha > m_y h$ . Casos limites podem ser encontrados facilmente.

Para resolver o problema inverso a mesma expressão pode ser utilizada, e existem diversos métodos para resolver a equação. O mais simples é simplesmente utilizar algum método padrão de encontrar a raiz e determinar o valor de  $\alpha$  que satisfaz a Eq. (40).

### 3.5.2. Propagação

O segundo passo no algoritmo VOF é a propagação. Uma vez que a interface foi reconstruída, seu movimento devido ao escoamento do fluido deve ser modelado por um algoritmo de advecção.

O método a ser apresentado aqui é o passo fracionário ou o método de divisão do operador (Gueyffier et al, 1999), o qual atualiza o valor da fração volumétrica  $C$ , ao advectar a interface ao longo uma coordenada espacial a cada intervalo de tempo. Valores intermediários de  $C$  são calculados durante o processo, e o valor final de  $C$  é obtido somente após a realização da advecção da interface ao longo de todas as direções coordenadas.



**Fig. 9** Geometria básica para avaliar área da região do quadrado cortada por uma reta

Uma vez que o passo temporal é realizado separadamente para cada direção, somente a advecção ao longo de uma direção é ilustrada a seguir.

Para cada célula, três contribuições são calculadas: o fluxo de área  $\varphi^-$  e  $\varphi^+$  entrando na célula  $(i, j)$  das células  $(i-1, j)$  e  $(i+1, j)$  e a área  $\varphi^0$  do fluido existente no volume de controle no começo do passo, e que permanece lá. A fração volumétrica em cada célula é atualizada após o passo parcial ao longo da direção  $x$  por

$$C_{ij}^x = \left[ \varphi^- + \varphi^0 + \varphi^+ \right] \quad (41)$$

O procedimento completo do passo fracionário requer duas reconstruções da interface e um passo de advecção ao longo de cada direção coordenada. O método de advecção Lagrangeano permite que estiramento e compressão da interface sejam considerados durante cada passo fracionário. Para que o procedimento tenha segunda ordem de precisão é suficiente alternar as direções de advecção a cada passo de tempo.

### 3.5.3. Discretização da Tensão Superficial



Como o termo de tensão superficial que aparece nas equações de Navier-Stokes é singular, obviamente sua discretização traz dificuldades, as quais se manifestam através de instabilidade numéricas e/ou ruído, com baixa precisão na representação dos efeitos capilares.

Uma solução é suavizar as descontinuidades da força capilar. Considere a função característica  $H$ . Esta função pode ser suavizada através de uma convolução com um kernel

$$\tilde{H}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{V}} H(\mathbf{x}') H(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \varepsilon) d\mathbf{x}' \quad (42)$$

onde  $H(\mathbf{x}; \varepsilon)$  é o kernel de integração e  $H \rightarrow \delta_S$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Os cálculos são baseados na seguinte observação: para um dado valor  $c$ , seja  $S_c$  a superfície para qual a equação  $\tilde{H}(\mathbf{x}) = c$ ,  $\tilde{\kappa}(\mathbf{x})$  é a curvatura de  $S_c$  em  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{m} = \nabla \tilde{H}(\mathbf{x})$ , então

$$\tilde{\kappa}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{m}}{2\|\mathbf{m}\|} \right) \quad (43)$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\kappa} \rightarrow \kappa$  e a curva real é obtida. Este método é chamado de CSF (Continuous Surface Force) de acordo com Brackbill et al. (1992). Para implementar o método CSF, não é necessário introduzir muita suavização. A utilização direta de diferenças finitas de  $H$  sem introduzir suavização é possível. Uma discussão sobre as vantagens de utilização de kernels melhores pode ser encontrada em Puckett et al (1995).

Lafaurie et al. (1994) definiram o seguinte filtro finito

$$[\mathfrak{S}(C)]_{ij} = \frac{1}{2}C_{ij} + \frac{1}{8}[C_{ij-1} + C_{ij+1} + C_{i-1j} + C_{i+1j}] \quad (44)$$

A ação do filtro pode ser repetida  $n_f$  vezes para induzir um grau adicional de suavização  $\tilde{C} = \mathfrak{S}^{n_f}(C)$ . O gradiente  $\mathbf{m}$  é então computado por diferenças finitas. Em geral, uma ou duas iterações são suficientes.

### 3.6. Método “Level-Set”

O método “Level-Set” foi desenvolvido para a simulação de escoamentos multifásicos e é a principal alternativa com relação ao método VOF para solução direta da advecção de uma função marcadora. Foi desenvolvido por Osher e Sethian (1988) e posteriormente aprimorado por Sussman et al (1994). Diversos artigos

têm sido publicados com relação ao método “level-set”, incluindo discretizações mais precisas e eficientes (Osher e Fedkim, 2003, Sethian, 1999, Sussman e Fatemi, 1999).

Assim como o método VOF, os métodos “level-set” não introduzem nenhuma hipótese sobre a conectividade de uma interface, isto é, não é necessária a intervenção do usuário quando ocorre alguma transição topológica na interface que separa as fases líquida e gasosa, como por exemplo na quebra de uma bolha. Os métodos “level-set” além de robustos, permitem a representação precisa de quantidades interfaciais como a normal e curvatura de uma interface. Diferentemente dos métodos VOF, nos quais a transição de um fluido para outro ocorre dentro de uma célula da malha, as funções “level-set” apresentam transições suaves através das interfaces líquido-gás, conseqüentemente, estes métodos permitem a utilização de discretizações padrão da normal e curvatura da interface com a precisão desejada (2a. ordem ou superior).

A seguir as equações da função “level-set”, sua respectiva discretização para avaliar sua advecção e “reinicialização” são apresentados.

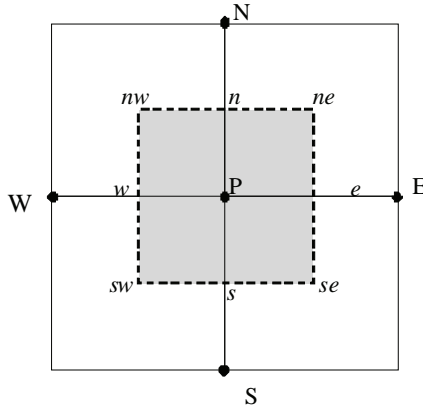
Neste método, a interface separando duas fases é representada pela função “level-set”  $\phi$ , a qual pode ser definida, por exemplo, como positiva para o líquido e negativa para o gás

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} +d, & \mathbf{x} \text{ no líquido} \\ -d, & \mathbf{x} \text{ no gás} \end{cases} \quad (45)$$

onde  $d$  representa a distância normal à interface no instante de tempo  $t$ .

A equação “level-set” é derivada assumindo que a função  $\phi$  é constante ao longo da trajetória das partículas, i.e.,

$$\frac{D\phi}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (46)$$



**Fig. 10** Volume de controle bi-dimensional

A função “level-set”  $\phi$  pode ser advectada com qualquer esquema para equações hiperbólicas. Aqui, um simples Runge-Kutta de 2a. ordem (Shu e Osher, 1989) é apresentado. Para facilitar a apresentação, a Eq. (46) será reescrita como  $\phi_t = L \phi$ . Considere ainda a nomenclatura indicada na Fig. 10, onde o volume de controle principal é P, o qual possui vizinhos leste, oeste, norte e sul (E, W, N e S, respectivamente). Variáveis avaliadas nas faces do volume de controle recebem os símbolos minúsculos  $e$ ,  $w$ ,  $n$  e  $s$ . Para facilitar a apresentação aqui, considere a malha uniforme nas direções  $x$  e  $y$ , com espaçamento  $h$ . As grandezas válidas no instante de tempo  $t$  recebem o supercrito  $n$  e para o instante de tempo  $t + \Delta t$ , o supercrito é  $n+1$ .

Para encontrar o valor de  $\phi$  no instante de tempo  $t + \Delta t$ , pode-se realizar um passo preditor, seguido de um passo corretor

$$\phi_P^* = \phi_P^n + \Delta t L \phi^n \quad (47)$$

$$\phi_P^{n+1} = \phi_P^n + \frac{\Delta t}{2} (L \phi^n + L \phi_P^*) \quad (48)$$

onde o operador  $L \phi$  é discretizado por

$$L \phi = -u_P \frac{\phi_e - \phi_w}{h} - v_P \frac{\phi_n - \phi_s}{h} \quad (49)$$

sendo os valores de  $\phi$  nas faces obtidos de

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P + \frac{1}{2}M[(\phi_E - \phi_P); (\phi_P - \phi_W)] & \text{se } u_e > 0 \\ \phi_E - \frac{1}{2}M[(\phi_{EE} - \phi_E); (\phi_E - \phi_P)] & \text{se } u_e < 0 \end{cases} \quad (50)$$

$$\phi_n = \begin{cases} \phi_P + \frac{1}{2}M[(\phi_N - \phi_P); (\phi_P - \phi_S)] & \text{se } v_n > 0 \\ \phi_N - \frac{1}{2}M[(\phi_{NN} - \phi_N); (\phi_N - \phi_P)] & \text{se } v_n < 0 \end{cases} \quad (51)$$

onde

$$M[a; b] = \begin{cases} a & \text{se } |a| < |b| \\ b & \text{se } |b| \leq |a| \end{cases} \quad (52)$$

O procedimento acima garante com precisão  $\phi = 0$  no contorno, mas em geral, a função “level-set” fora da interface deixa de ser uma função da distância. Uma vez que preservar a função  $\phi$  como uma função de distância (pelo menos nas vizinhanças da interface) é importante para o acoplamento com as equações do escoamento multifásico, é necessário reiniciar a função  $\phi$ . Sem a reinicialização, a magnitude do gradiente de  $\phi$ ,  $|\nabla\phi|$  pode ficar muito grande ou muito pequeno nas vizinhanças do zero de  $\phi$ , levando a perda de precisão na determinação da função “level-set”, assim como nas variáveis do problema como, por exemplo, a velocidade.

A reinicialização da nova função “level-set”  $\phi_d$  deve ser realizada a cada passo de tempo e deve ser tal que a nova função “level-set”  $\phi_d$  possua o mesmo zero que  $\phi$ , e deve satisfazer a condição  $|\nabla\phi_d| = 1$  para valores de  $(x, y)$  dentro de  $M$  células a partir da zero onde  $\phi_d = 0$ , isto é  $|\phi_d| < M h$ . Prosperetti e Tryggvason (2009) recomendam  $M = 3$ .

Sussman et al (1994) introduziram um procedimento iterativo para reinicializar  $\phi$ , o qual converge rapidamente se  $\phi$  já for quase uma função distância. O procedimento consiste em iniciar  $\phi_d = \phi$  e resolver algumas iterações da seguinte equação

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial \tau} = \text{sinal}(\phi) (1 - |\nabla\phi_d|) \quad \text{onde} \quad \text{sinal}(\phi) = \begin{cases} -1, \phi < 0 \\ 0, \phi = 0 \\ +1, \phi > 0 \end{cases} \quad (53)$$

onde  $\tau$  é um tempo artificial. Um número fixo de passos  $\Delta\tau$  é suficiente para obter a solução com precisão satisfatória. Por exemplo, se  $\Delta\tau = h/2$  e o espalhamento da interface é numa região  $2Mh$ , somente serão necessários  $2M$  passos. O mesmo Runge-Kutta de segunda ordem apresentado pode ser utilizado para a reinicialização, através da solução da Eq. (53).

### 3.6.1. Acoplamento do Método “Level-Set” com o Modelo de “Um Fluido”

Para resolver as equações de Navier-Stokes é preciso avaliar a massa específica e viscosidade. Uma equação análoga a Eq. (23) deve ser usada, porém, as propriedades de cada fluido são ponderadas por uma função Heaviside suavizada,  $f$ .

$$\rho(x, y) = \rho_1 f(\phi) + \rho_0 [1 - f(\phi)] \quad (54)$$

onde

$$f(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\phi| < -Mh \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\phi}{Mh} + \frac{1}{\pi} \text{sen} \left( \pi \frac{\phi}{Mh} \right) \right] & \text{se } |\phi| \leq Mh \\ 1 & \text{se } |\phi| > Mh \end{cases} \quad (55)$$

O termo de tensão superficial é dado por

$$\gamma \kappa \delta(n) \mathbf{n} = \gamma \kappa(\phi) \frac{d f(\phi)}{d \phi} \nabla \phi \quad \text{onde} \quad \kappa(\phi) = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (56)$$

Como a função  $\phi$  é suave, a discretização da curvatura  $\kappa$  pode ser obtida através do esquema padrão de diferenças centrais.

$$\begin{aligned} \kappa(\phi) = & \frac{1}{2h} \left[ \left( \frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} \right)_{ne} + \left( \frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} \right)_{se} \right] - \left[ \left( \frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} \right)_{nw} + \left( \frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} \right)_{sw} \right] + \\ & + \frac{1}{2h} \left[ \left( \frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right)_{ne} + \left( \frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right)_{se} \right] - \left[ \left( \frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right)_{nw} + \left( \frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right)_{sw} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

onde

$$\begin{aligned}\phi_{x,ne} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\phi_{NE} - \phi_N)}{h} + \frac{(\phi_E - \phi_P)}{h} \right] \\ \phi_{y,ne} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\phi_{NE} - \phi_E)}{h} + \frac{(\phi_N - \phi_P)}{h} \right]\end{aligned}\quad (58)$$

Um cuidado especial precisa ser tomado com a formulação “level-set” de forma a garantir conservação de massa. Herrmann (2008) propõe utilizar uma malha mais fina para determinar a função “level-set” do que a malha utilizada para resolver o escoamento.

### 3.7. Resolução das Equações de Navier-Stokes

As equações de conservação que governam o escoamento são resolvidas pelas mesmas técnicas de solução de escoamento monofásico (Patankar, 1980, Ferizer e Peric, 2002, Maliska, 2004, Versteeg e Malalasekera, 2007, Prosperetti e Tryggvason, 2009). Pode-se utilizar malhas deslocadas ou co-localizadas. Para discretização espacial dos fluxos convectivos e difusivos aproximações de diferentes ordens podem ser utilizadas, e os esquemas já consagrados como “Diferença Central”, “Power-law” e “QUICK”, entre outros podem ser empregados. O mesmo pode ser afirmado com relação à integração temporal das equações de conservação. Pode-se utilizar desde métodos explícitos de primeira ou segunda ordem (como o método de Adams-Bashforth) como métodos totalmente implícitos. Para resolver o acoplamento velocidade-pressão, o procedimento padrão consiste em utilizar o método de projeção (“projection method”) introduzido por Chorin (1968). Como não existe uma equação explícita para a pressão, nesta metodologia, estima-se inicialmente a velocidade sem considerar a pressão, resultando em um campo que não satisfaz a equação da conservação de massa. A pressão é então determinada de forma a corrigir a velocidade para que esta satisfaça a equação de continuidade. Novamente, diversas variantes deste procedimento podem ser utilizadas. Pode-se ainda utilizar métodos de solução segregados, como os algoritmos SIMPLE, SIMPLEC e PISO, nos quais as equações de conservação são resolvidas de forma segregada, ou métodos mais robustos (e mais caros) acoplados, nos quais as equações de conservação são resolvidas de forma acoplada, como os métodos da família AUSM (Advection Upwind Splitting Method).

### 3.8. Aplicações

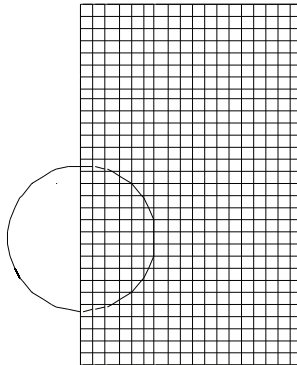
Nesta seção são apresentados testes para avaliar o desempenho do método VOF e algumas aplicações práticas. O primeiro exemplo consiste no deslocamento ini-

cial de uma grande bolha esférica de ar na água. O segundo exemplo ilustra a capacidade do método de prever junção de bolhas. Finalmente, o terceiro exemplo, ilustra a previsão de uma bolha do padrão de escoamento em golfadas, com excelente concordância do campo de velocidade com dados medidos experimentalmente com PIV.

### 3.8.1. Movimento Inicial de uma Grande Bolha Esférica

Este teste consiste em avaliar o movimento inicial de uma bolha esférica de ar na água (Melo e Nieckele, 1996). Este problema já foi estudado por diversos autores. Os resultados são comparados com os dados experimentais de Waters e Davidson (1963) e previsões numéricas de Bugg and Rowe (1991), utilizando o código SOLA-VOF.

O problema foi resolvido considerando-se coordenadas cilíndricas, com simetria angular. Testou-se três malhas diferentes iguais a  $30 \times 18$ ,  $40 \times 25$  e  $50 \times 30$  volumes de controle nas direções axial e radial. A malha mais grosseira encontra-se ilustrada na Fig. 11. Adotou-se um passo de tempo igual a  $\Delta t = 0,1$  ms em todos os casos.



**Fig. 11** Domínio computacional, malha 30 x 14

A cada passo de tempo, a velocidade média da bolha foi calculada. Este valor foi subtraído de todo o campo de velocidades, de forma a manter a posição da bolha fixa em relação a malha computacional.

A Figura 12a ilustra a variação do diâmetro na direção vertical normalizado pelo diâmetro inicial ( $D^* = D_y/D$ ) em função do tempo adimensional  $t^* = t(2g/D)^{0.5}$ . Pode-se observar uma excelente concordância tanto com os dados numéricos quanto experimentais. Nota-se ainda que a medida que a malha é refinada os resultados se aproximam dos dados experimentais. Os dados da malha intermediária coincidem com os resultados numéricos de Bugg e Rowe (1991) que não informou qual a malha utilizada.

A distância adimensional  $Y^* = (2H/D)^{0.5}$  percorrida pela bolha ao longo do tempo é ilustrada na Fig. 12b, onde  $H$  é a posição da bolha. Na mesma figura, o deslocamento teórico correspondendo a uma aceleração constante e igual a  $2g$  ( $g$  = aceleração da gravidade) é mostrado. Observa-se que o resultado obtido com todas as malhas coincide com a aceleração constante nos primeiros estágios do movimento. Nota-se ainda uma excelente concordância com os dados experimentais, com pequena dependência da malha na solução. Finalmente, pode-se afirmar que os resultados apresentados são ligeiramente superiores aos de Bugg e Rowe (1991).

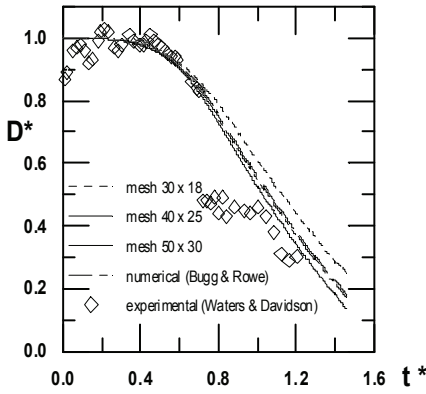
A Fig. 12c ilustra o formato da bolha em diferentes instantes de tempo. Inicialmente a forma da bolha é esférica, e gradualmente sua região posterior avança até encostar na parede frontal, quando se inicia a formação de uma bolha toroidal e de uma pequena bolha central, concordando com a previsão de Bugg e Rowe (1991). A medida que a bolha toroidal se afasta do eixo, sofre uma rotação e finalmente começa a se dividir em duas. Observa-se que a configuração da bolha toroidal é instável, pois com o passar do tempo ela continua a se deformar, havendo tendência de quebra em duas bolhas toroidais menores. O presente exemplo ilustra a capacidade do método VOF em prever quebra de bolhas.

### 3.8.2. Junção de bolhas

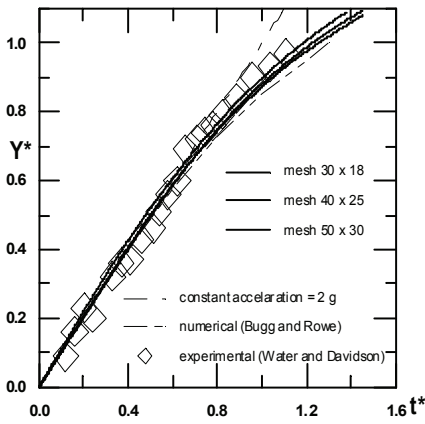
Este exemplo ilustra a capacidade do método VOF em prever aglutinação de interfaces (Melo, 1995). A configuração escolhida é a de duas bolhas de ar de tamanho igual, imersas em um fluido com alta viscosidade. Inicialmente as bolhas estão em repouso e próximas uma da outra e irão se deslocar devido a ação da força de empuxo.

A Figura 13 ilustra as configurações da interface em dois instantes de tempo. Desde o início do movimento, há uma aproximação entre as bolhas, pois a bolha de trás se encontra na esteira hidrodinâmica da bolha da frente. A medida que as bolhas se aproximam, começa a haver junção das interfaces. Inicialmente a região externa das bolhas se tocam, a interface desaparece e fica apenas uma pequena bolha achatada no meio. Com o avanço do tempo, as bolhas tendem a se unir e somente uma única bolha de maior tamanho passa a se deslocar.

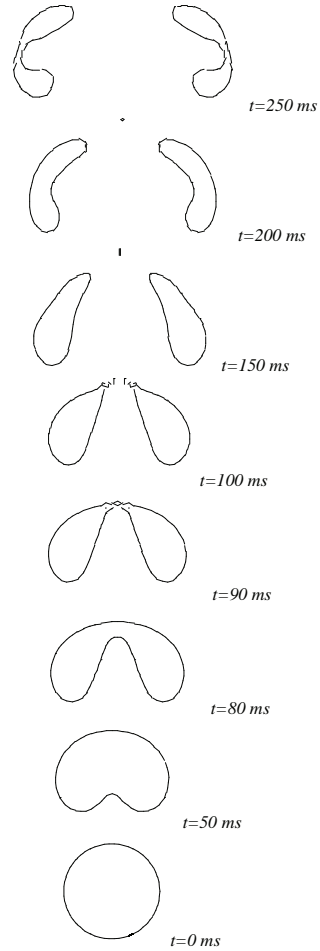




(a) Diâmetro na vertical com o temo



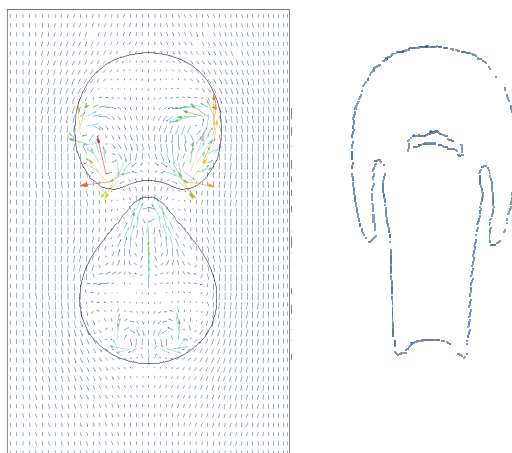
(b) Distância vertical percorrida em função do tempo



(c) Formato da bolha em função do tempo

**Fig. 12** Deslocamento de bolha de ar na água.

A Fig. 13a também ilustra o campo de velocidades para um observador que acompanha as bolhas. Pode-se observar a formação de dois vórtices em cada bolha. Os vórtices da bolha superior provocam o alargamento da mesma, enquanto na bolha inferior, os vórtices produzem um afinamento.

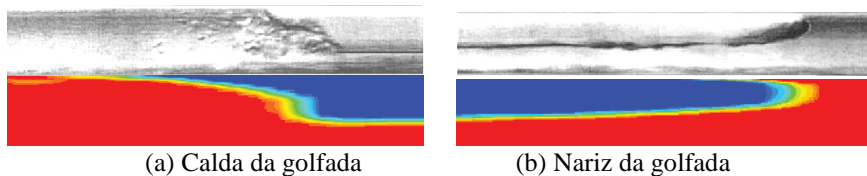


(a) Campo de velocidade e aproximação das bolhas (b) bolhas unidas

**Fig. 13** Junção de bolhas

### 3.8.3. Formação de Golfada

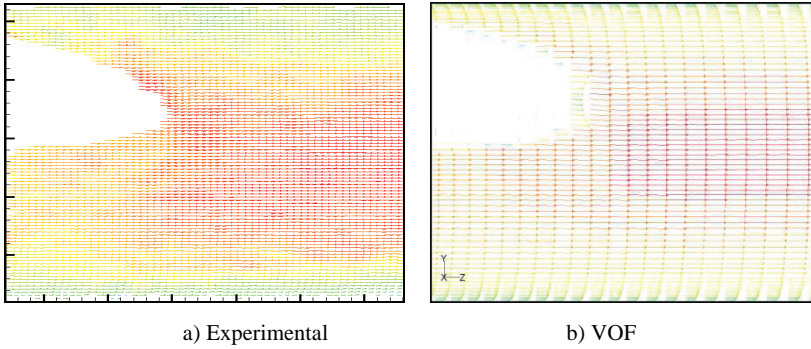
Inicialmente, apresenta-se uma comparação entre o formato do nariz e da calda de uma bolha presente em uma golfada obtida numericamente por Febres (2009) e a forma obtida a partir de visualização experimental por Fagundes Netto, (1999). A tubulação possui 2 in de diâmetro e a velocidade da mistura ar-água é de 1,8 m/s. Observa-se que o modelo VOF foi capaz de prever razoavelmente bem o formato da bolha.



**Fig. 14** Comparação solução numérica com VOF (Febres, 2009) e experimental (Fagundes Netto, 1999).

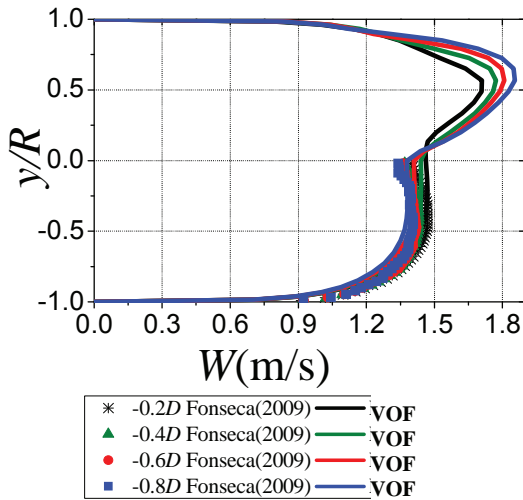
Um segundo teste foi realizado, novamente com uma mistura ar-água, com velocidade de mistura igual 1,30 m/s (velocidades superficiais do gás e da água iguais a 0,79 m/s e 0,52 m/s), em uma tubulação de 1 in de diâmetro. A Figura 15 apresenta a comparação do nariz da bolha e do campo de velocidade obtido numericamente com o método VOF (Febres, 2009) e medidas experimentais com PIV

(Fonseca, 2009). Pode-se observar que o modelo VOF conseguiu prever a região de velocidade máxima na frente do nariz, um pouco abaixo da mesma.



**Fig. 15** Nariz da bolha e campo de velocidade

A Figura 16 apresenta uma comparação entre os perfis numérico e experimental ao longo da linha vertical que passa pelo centro da tubulação, para diferentes posições axiais. Mais uma vez, observa-se claramente a excelente previsão do perfil de velocidade.



**Fig. 16** Perfil de velocidade numérico e experimental em diversas posições axiais ao longo da bolha.

## 4. Métodos Baseados nas Equações Médias de Navier-Stokes

Em muitas situações a solução direta das Equações de Navier-Stokes não é prática por requerer um alto esforço computacional e o uso de equações reduzidas torna-se necessário. Para apresentar os métodos que se enquadram nesta categoria, o primeiro passo consiste em escrever as equações médias de Navier-Stokes. Inicialmente as equações médias serão apresentadas, a seguir estas equações são particularizadas para alguns modelos e finalmente métodos para solução destas equações são discutidos.

### 4.1. Equações Médias de Navier-Stokes

Para apresentar as equações médias de conservação de massa e quantidade de movimento é preciso introduzir algumas definições.

Seja  $Z_k$  uma função relativa à fase  $k$ ; então o seu valor médio no volume é

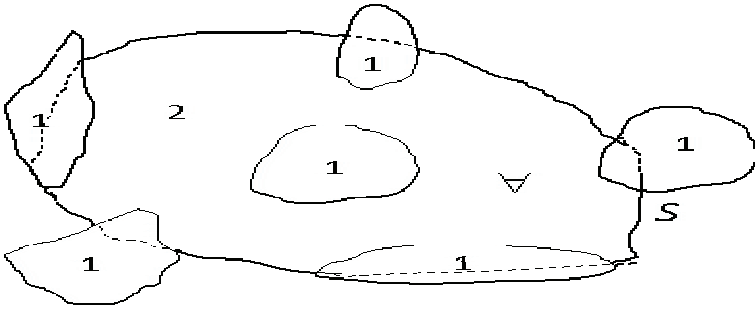
$$\langle Z_k \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{V}_k} \int_{\mathcal{V}_k} Z_k d\mathcal{V} \quad (59)$$

onde  $\mathcal{V}_k$  representa a volume ocupado pela fase  $k$ .

A fração volumétrica da fase  $k$  pode ser definida como

$$\alpha_k = \frac{\mathcal{V}_k}{\mathcal{V}} \quad (60)$$

sendo  $\mathcal{V}$  a soma dos volumes ocupados por todas as fases. Para ilustrar os volumes envolvidos nas médias, considere somente duas fases, conforme ilustrado na Fig. 17. O volume total é  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ , e a fronteira do volume  $\mathcal{V}$  é  $S = S_1 + S_2$  onde  $S_1$  (pontilhada) e  $S_2$  são as partes de  $\mathcal{V}$  que estão em contato com as fases 1 e 2. A soma das interfaces separando as duas fases dentro de  $\mathcal{V}$  é  $S_i$ .



**Fig. 17** Volume da média, áreas superficiais

Para uma mistura com  $N$  fases a seguinte relação é verdadeira

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1 \quad (61)$$

No caso particular de uma mistura com somente duas fases,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (62)$$

Avaliando-se a média volumétrica das equações de conservação de massa, levando-se em consideração as interações nas fronteiras dos volumes tem-se

$$\frac{\partial(\alpha_k \langle \rho_k \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle) = \Gamma_k \quad (63)$$

onde

$$\Gamma_k = -\frac{1}{V} \int_{S_i} \dot{m}_k dS_i \quad ; \quad \dot{m}_k = \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_k \quad (64)$$

onde  $\dot{m}_k$  é fluxo de massa da fase  $k$  através da interface  $S_i$  (definido pela Eq. 11) sendo

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_k = 0 \quad (65)$$

onde  $N$  é o número total de fases. O termo  $\Gamma_k$  é diferente de zero se existir mudança de fase, por exemplo, se só existem duas fases e ocorre mudança de líquido para vapor. Neste caso a restrição acima se reduz a

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = 1 \quad (66)$$

A Equação (63) envolve a média de um produto de duas grandezas locais instantâneas e independentes,  $\langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle$ . Para tratar este termo, pode-se introduzir a média de Favre

$$\bar{\mathbf{u}}_k = \frac{\langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle}{\langle \rho_k \rangle} \quad (67)$$

resultando na seguinte equação de conservação de massa para a fase  $k$

$$\frac{\partial(\alpha_k \langle \rho_k \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \langle \rho_k \rangle \bar{\mathbf{u}}_k) = \Gamma_k \quad (68)$$

Se uma fase é incompressível  $\langle \rho_k \rangle = \rho_k$  e  $\langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle = \rho_k \langle \mathbf{u}_k \rangle$ , então a Eq. (63), na ausência de mudança de fase, se reduz a

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \langle \mathbf{u}_k \rangle) = 0 \quad (69)$$

A quantidade

$$\mathbf{j}_k = \alpha_k \langle \mathbf{u}_k \rangle \quad (70)$$

significa fluxo volumétrico da fase  $k$  e é freqüentemente chamada de *velocidade superficial*. O fluxo volumétrico total é

$$\mathbf{j} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \langle \mathbf{u}_k \rangle \quad (71)$$

Realizando a média volumétrica na equação de conservação de quantidade de movimento, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_k \langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \langle \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k \rangle) &= \nabla \cdot (\alpha_k \langle \boldsymbol{\sigma}_k \rangle) + \\ &+ \alpha_k \langle \rho_k \rangle \mathbf{g} + \nabla \cdot (\alpha_k \langle \boldsymbol{\sigma}_c \rangle) - \frac{1}{V} \int_{S_i} (\dot{m}_k \mathbf{u}_k) d S_i + \frac{1}{V} \int_{S_i} (\mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_k) d S_i \end{aligned} \quad (72)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma}_k = -p_k \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_k \quad ; \quad \boldsymbol{\tau}_k = \mu_k \left[ \nabla \mathbf{u}_k + (\nabla \mathbf{u}_k)^T - \frac{1}{3} \nabla \bullet \mathbf{u}_k \mathbf{I} \right] \quad (73)$$

e  $\boldsymbol{\sigma}_c$  é a tensão devido a colisões que atua na interface de um sólido, como uma partícula em suspensão.

O termo convectivo (segundo termo do lado esquerdo) apresenta uma média de um produto de variáveis locais instantâneas. Este termo pode ser tratado com a média de Favre

$$\langle \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k \rangle = \langle \rho_k \rangle \overline{\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k} \quad (74)$$

e com a introdução de uma flutuação de velocidade (de forma análoga ao que é feita em turbulência), i. e.,  $\mathbf{u}'_k = \mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{u}}_k$ , isto é

$$\overline{\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k} = \overline{\mathbf{u}_k \bar{\mathbf{u}}_k} + \overline{\mathbf{u}'_k \mathbf{u}'_k} = \overline{\mathbf{u}_k \bar{\mathbf{u}}_k} - \overline{\boldsymbol{\tau}'_k} \quad ; \quad \overline{\boldsymbol{\tau}'_k} = -\overline{\mathbf{u}'_k \mathbf{u}'_k} \quad (75)$$

O segundo termo do lado direito referente as tensões superficiais pode ser escrito como

$$\nabla \bullet (\alpha_k \langle \boldsymbol{\sigma}_k \rangle) = \alpha_k \nabla \bullet \langle \boldsymbol{\sigma}_k \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_k \rangle \bullet \nabla \alpha_k \quad (76)$$

O gradiente da fração volumétrica é

$$\nabla \alpha_k = \frac{1}{\nabla} \int_{S_k} \mathbf{n}_k dS_k = -\frac{1}{\nabla} \int_{S_i} \mathbf{n}_k dS_i \quad (77)$$

Introduzindo-se a seguinte definição de tensão média de superfície

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_k \bullet \nabla \alpha_k = -\frac{1}{\nabla} \int_{S_i} \boldsymbol{\sigma}_k \bullet \mathbf{n}_k dS_i \quad (78)$$

A equação de conservação de quantidade de movimento pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\alpha_k \langle \rho_k \rangle \bar{\mathbf{u}}_k)}{\partial t} + \nabla \bullet (\alpha_k \langle \rho_k \rangle \bar{\mathbf{u}}_k \bar{\mathbf{u}}_k) = \alpha_k \langle \rho_k \rangle \mathbf{g} + \\ - \alpha_k \nabla \langle p_k \rangle + \alpha_k \nabla \bullet (\langle \boldsymbol{\tau}_k \rangle + \overline{\boldsymbol{\tau}'_k}) + \nabla \bullet (\alpha_k \langle \boldsymbol{\sigma}_c \rangle) + \mathbf{M}_k \end{aligned} \quad (79)$$

onde  $\mathbf{M}_k$  possui uma parcela associada ao fluxo de quantidade de movimento na interface devido a presença de fluxo de massa na interface (por mudança de fase) e outra parcela devido a tensões interfaciais

$$\mathbf{M}_k = -\frac{1}{\nabla} \int_{S_i} \dot{m}_k \mathbf{u}_k dS_i + \langle \boldsymbol{\sigma}_k \rangle - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_k \bullet \nabla \alpha_k \quad (80)$$

ou

$$\mathbf{M}_k = -\frac{1}{\nabla} \int_{S_i} \dot{m}_k \mathbf{u}_k dS_i + (-p_{ik} \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_{ik}) \bullet \nabla \alpha_k \quad (81)$$

onde  $p_{ik}$  corresponde à pressão local interfacial da fase  $k$  e  $\boldsymbol{\tau}_{ik}$  é o tensor cisalhante interfacial da fase  $k$ .  $\mathbf{M}_k$  deve respeitar a seguinte condição de salto

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{M}_k = 0 \quad (82)$$

As equações apresentadas correspondem às equações de conservação dos modelos de fases separadas (ou modelo multifluido). No caso de uma mistura com duas fases, tem-se o modelo de Dois Fluidos. A partir das equações médias, outros modelos podem ser derivados, com diferentes graus de complexidades, como o Modelo de Deslizamento (“Drift Flux Model”) ou Modelo Homogêneo, os quais são brevemente descritos a seguir.

## 4.2. Modelo de Deslizamento

O modelo de deslizamento consiste de uma equação de conservação de massa para cada fase (Eq. 68) e uma única equação de conservação de quantidade de movimento para a mistura.

As propriedades médias da mistura, como massa específica  $\rho_m$ , velocidade  $\mathbf{u}_m$ , pressão  $p_m$  e tensão viscosa  $\boldsymbol{\tau}_m$  são definidas de acordo com

$$\rho_m = \sum_{k=1}^N \alpha_k \langle \rho_k \rangle \quad ; \quad \rho_m \mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^N \alpha_k \langle \rho_k \rangle \bar{\mathbf{u}}_k \quad (83)$$

$$p_m = \sum_{k=1}^N \alpha_k \langle p_k \rangle \quad ; \quad \boldsymbol{\tau}_m = \sum_{k=1}^N \alpha_k \langle \boldsymbol{\tau}_k \rangle \quad (84)$$

A equação de conservação de quantidade de movimento linear para a mistura pode ser obtida somando as equações de conservação de quantidade de movimento linear referentes a cada uma das fases (Eq. 79). Para uma mistura com somente duas fases, tem-se



$$\frac{\partial(\rho_m \mathbf{u}_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m + \mathbf{J}) = \rho_m \mathbf{g} - \nabla p_m + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_m + \frac{1}{V} \int_{S_i} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \dot{m} dS_i \quad (85)$$

com

$$\rho_m = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 \quad ; \quad \rho_m \mathbf{u}_m = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 \quad (86)$$

$$p_m = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \quad ; \quad \boldsymbol{\tau}_m = \alpha_1 \boldsymbol{\tau}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{\tau}_2 \quad (87)$$

onde  $\mathbf{J}$  é o fluxo de deslizamento (“drift flux”) generalizado

$$\begin{aligned} \rho_m \mathbf{J} = & \alpha_1^2 (\langle \rho_1 \times \rho_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \rangle - \langle \rho_1 \mathbf{u}_1 \times \rho_1 \mathbf{u}_1 \rangle) \\ & + \alpha_2^2 (\langle \rho_2 \times \rho_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2 \rangle - \langle \rho_2 \mathbf{u}_2 \times \rho_2 \mathbf{u}_2 \rangle) \\ & + \alpha_1 \alpha_2 (\langle \rho_1 \times \rho_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2 \rangle + \langle \rho_2 \times \rho_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \rangle \\ & - 2 \langle \rho_1 \mathbf{u}_1 \times \rho_2 \mathbf{u}_2 \rangle) \end{aligned} \quad (88)$$

No modelo de deslizamento (Modelo de “Drift”), em geral os termos de correlação cruzada são desprezados, e para fluidos incompressíveis o fluxo de “drift” simplifica para

$$\rho_m \mathbf{J} = \alpha_1 \alpha_2 \rho_1 \rho_2 (\langle \mathbf{u}_2 \rangle - \langle \mathbf{u}_1 \rangle) (\langle \mathbf{u}_2 \rangle - \langle \mathbf{u}_1 \rangle) \quad (89)$$

O modelo de deslizamento necessita ainda de um modelo para determinar a velocidade de deslizamento  $\langle \mathbf{u}_2 \rangle - \langle \mathbf{u}_1 \rangle$ , a qual é em geral obtida através de correlações (Ishii, 1975, Hibiki e Ishii, 2002 e 2003).

Freqüentemente estes modelos são empregados utilizando-se sua formulação unidimensional, a qual introduz termos adicionais no lado direito da equação de conservação de quantidade de movimento, os quais são necessários para descrever o atrito com a parede. Estes termos normalmente são modelados utilizando-se correlações empíricas.

#### 4.2.1. Modelo de Deslizamento Unidimensional

O modelo de deslizamento uni-dimensional isotérmico, na ausência de mudança de fase e considerando somente duas fases (líquida e gasosa, subscritos  $\ell$  e  $g$ ) consiste nas seguintes equações de conservação

$$\frac{\partial(\alpha_\ell \rho_\ell)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_\ell \rho_\ell u_\ell)}{\partial z} = 0 \quad (90)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial z} = 0 \quad (91)$$

$$\frac{\partial(\rho_m u_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m u_m u_m)}{\partial z} = -\frac{\partial p_m}{\partial z} - \rho_m g \sin \beta - \frac{\tau_w S_w}{A} - \frac{\partial J}{\partial z} \quad (92)$$

onde  $z$  é a direção do escoamento,  $\beta$  é a inclinação com a horizontal,  $S_w$  e  $A$  são respectivamente, perímetro molhado da parede, e área transversal da seção transversal da tubulação.  $\tau_w$  é tensão cisalhante na parede, devendo ser definida através de correlações. O fluxo de “drift” é

$$J = \frac{\alpha_g \alpha_\ell \rho_g \rho_\ell (u_g - u_\ell)(u_g - u_l)}{\rho_m} \quad (93)$$

Para avaliar o fluxo de “drift”  $J$ , é comum introduzir a definição da velocidade de deslizamento ou escorregamento (“drift”).

Antes porém, vamos introduzir a definição de velocidade relativa entre as fases gasosa e líquida

$$u_r = (u_g - u_\ell) \quad (94)$$

e a velocidade  $V_{gj}$  relativa entre a fase gasosa e o fluxo volumétrico total  $j$  definido pela Eq. (71)

$$V_{gj} = u_g - j \quad \text{ou} \quad V_{gj} = \alpha_\ell (u_g - u_\ell) = \alpha_\ell u_r \quad (95)$$

e a velocidade  $V_{gm}$  relativa entre a fase gasosa e velocidade média da mistura  $u_m$  (Eq. 86)

$$V_{gm} = u_g - u_m = \alpha_\ell \frac{\rho_\ell}{\rho_m} u_r \quad (96)$$

De acordo com Zuber e Findlay (1965) e outros como Ishii (1975) e Hibiki e Ishii (2002 e 2003), a velocidade da fase gás pode ser relacionada com o fluxo volumétrico total por

$$u_g = C_o j + V_{drift} \quad (97)$$

onde  $C_o$  é um coeficiente de distribuição e  $V_{drift}$  é a velocidade de deslizamento. Estas grandezas dependem do regime de escoamento e geralmente são estimadas a partir de correlações empíricas. Combinando as Eqs. (95) e (97) tem-se

$$V_{gj} = V_{drift} + (C_o - 1) j \quad (98)$$

O fluxo de “drift” pode então ser rescrito como

$$J = \frac{\alpha_g}{\alpha_\ell} \frac{\rho_g}{\rho_m} \frac{\rho_\ell}{\rho_m} V_{gj}^2 \quad (99)$$

As velocidades das fases podem ser obtidas a partir da velocidade média da mistura com as seguintes expressões

$$u_g = u_m + \frac{\rho_\ell}{\rho_m} V_{gj} \quad ; \quad u_\ell = u_m - \frac{\alpha_g}{1 - \alpha_g} \frac{\rho_g}{\rho_m} V_{gj} \quad (100)$$

A tensão cisalhante na parede da tubulação é normalmente modelada de acordo com a equação de Darcy-Weisbach,

$$\frac{\tau_w S_w}{A} = \frac{f_m}{2 D_h} \rho_m u_m |u_m| \quad (101)$$

onde o fator de atrito de Darcy  $f_m$  é geralmente estimado assumindo um escoamento localmente hidrodinamicamente desenvolvido, em função do número de Reynolds e arranjo de fases (golfada, bolhas, estratificado, anular, etc), sendo baseado nas propriedades da mistura  $\rho_m$  e  $\mu_m$  e diâmetro hidráulico  $D_h = 4A/S_w$ .

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho_m |u_m| D_h}{\mu_m} \quad (102)$$

A viscosidade da mistura pode ser avaliada de forma análoga a massa específica, porém, também é comum, utilizar uma média harmônica com a fração volumétrica

$$\mu_m = \alpha_g \mu_g + \alpha_\ell \mu_\ell \quad \text{ou} \quad \mu_m = \frac{\mu_g \mu_\ell}{\alpha_g \mu_\ell + \alpha_\ell \mu_g} \quad (103)$$

### 4.3. Homogêneo

No modelo de escoamento homogêneo (Wallis, 1969; Ishii, 1975) considera-se que as duas fases escoam com a mesma velocidade, e as propriedades médias do escoamento são determinadas a partir das equações médias para a mistura.

A equação de conservação de massa para a mistura pode ser facilmente obtida, simplesmente somando as equações de continuidade da cada fase, Eq. (68), resultando em

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m) = 0 \quad (104)$$

No modelo de escoamento homogêneo, como as duas fases possuem a mesma velocidade, o fluxo de deslizamento  $\mathbf{J}$  (Eq. 88) é nulo e a equação de quantidade de movimento se reduz para

$$\frac{\partial (\rho_m \mathbf{u}_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m) = \rho_m \mathbf{g} - \nabla p_m + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_m \quad (105)$$

Além das equações de conservação de massa e quantidade de movimento da mistura (Eq. 104 e Eq. 105), o modelo homogêneo necessita de uma correlação para calcular fração volumétrica.

#### 4.3.1. Modelo Homogêneo Unidimensional

As equações de conservação de massa e quantidade de movimento do modelo homogêneo uni-dimensional são apresentadas a seguir

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m u_m)}{\partial z} = 0 \quad (106)$$

$$\frac{\partial (\rho_m u_m)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m u_m u_m)}{\partial z} = - \frac{\partial p_m}{\partial z} - \rho_m g \operatorname{sen} \beta - \frac{\tau_w S_w}{A} \quad (107)$$

A massa específica da mistura pode ser rescrita em função da pressão

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad ; \quad a^{-2} = \left. \frac{\partial \rho_m}{\partial p_m} \right|_T \quad (108)$$

e as equações de conservação podem ser rescritas como

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \bar{D} \quad (109)$$

onde

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_m \\ \rho_m \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} u_m & \frac{1}{\rho_m} \\ \rho_m a^2 & u_m \end{bmatrix} ; \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (110)$$

sendo

$$F = \left[ -\frac{\tau_w S_w}{(\rho_m A)} - g \operatorname{sen} \beta \right] \quad (111)$$

A Equação 109 é hiperbólica, e os autovalores da matriz  $\tilde{\mathbf{A}}$  são  $u_m - a$  e  $u_m + a$ . Esta equação pode ser escrita na forma característica como

$$\tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial z} = \tilde{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{D}} \quad (112)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \rho_m a & 1 \\ -\rho_m a & 1 \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{\Lambda}} = \begin{bmatrix} u_m + a & 0 \\ 0 & u_m - a \end{bmatrix} \quad (113)$$

Para resolver a Eq. (110) pode-se utilizar o método das características.

#### 4.4. Modelo de Dois Fluidos Unidimensional

O modelo de Dois Fluidos unidimensional isotérmico, na ausência de mudança de fase e considerando somente duas fases (líquida e gasosa) consiste na solução das equações de conservação de massa e quantidade de movimento para cada uma das fases

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial z} = 0 \quad (114)$$

$$\frac{\partial(\alpha_\ell \rho_\ell)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_\ell \rho_\ell u_\ell)}{\partial z} = 0 \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g^2)}{\partial z} = \\ = -\alpha_g \frac{\partial p_g}{\partial z} - \alpha_g \rho_g g \operatorname{sen} \beta - \frac{\tau_{wg} S_g}{A} - \frac{\tau_i S_i}{A} \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_\ell \rho_\ell u_\ell)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_\ell \rho_\ell u_\ell^2)}{\partial z} = \\ = -\alpha_\ell \frac{\partial p_\ell}{\partial z} - \alpha_\ell \rho_\ell g \operatorname{sen} \beta - \frac{\tau_{w\ell} S_\ell}{A} + \frac{\tau_i S_i}{A} \end{aligned} \quad (117)$$

Neste caso é necessário introduzir correlações para determinar as tensões cisalhantes entre o gás e a parede  $\tau_{wg}$ , entre o líquido e a parede  $\tau_{w\ell}$  e entre as fase (a tensão interfacial)  $\tau_i$ . Nas equações acima  $S_{wg}$ ,  $S_{w\ell}$  e  $S_i$ , correspondem às superfícies (perímetros) gás/parede, líquido/parede e interface entre fases.

As tensões cisalhantes na parede da tubulação em contato com o gás e líquido, e tensão interfacial podem ser modeladas em função do fator de atrito  $f$  de acordo com

$$\tau_{wg} = \frac{f_g}{2} \rho_g u_g |u_g| \quad ; \quad \tau_{w\ell} = \frac{f_\ell}{2} \rho_\ell u_\ell |u_\ell| \quad (118)$$

$$\tau_i = \frac{f_i}{2} \rho_g (u_g - u_\ell) |u_g - u_\ell| \quad (119)$$

O fator de atrito  $f$  é estimado em função do número de Reynolds. As correlações dependem do padrão e regime do escoamento e do número de Reynolds associado a cada fase.

É prática comum, assumir que a pressão média do gás é aproximadamente igual a pressão do gás na interface ( $p_g = p_{gi}$ ) devido ao baixo valor da massa específica dos gases e a variação da pressão hidrostática na seção transversal ser desprezível. Já com relação a pressão média do líquido, o gradiente de pressão médio pode ser avaliado em função do nível de líquido  $h_\ell$  na seção transversal como

$$-\alpha_\ell \frac{\partial p_\ell}{\partial z} = -\alpha_\ell \frac{\partial p_{li}}{\partial z} - \alpha_\ell \rho_\ell \frac{\partial h_\ell}{\partial z} g \cos \beta \quad (120)$$

As pressões interfaciais das fases podem ser relacionadas com a curvatura da interface por

$$(p_{ig} - p_{i\ell}) = \gamma \kappa \quad ; \quad (121)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de tensão superficial,  $\kappa$  é a curvatura média local da superfície, a qual pode ser estimada em função do nível do líquido por

$$\kappa = \frac{\partial^2 h_\ell}{\partial z^2} \quad (122)$$

#### 4.5. Método das Características

Os primeiros trabalhos utilizando o método das características foram gerados pela indústria nuclear, a qual apresenta transientes rápidos. Posteriormente, também foi muito aplicado para prever o escoamento bifásico na indústria do petróleo, em modelagens unidimensionais, uma vez que o comprimento das tubulações é muito maior que o diâmetro das mesmas.

O método das características foi usado muito no passado, pois é um método muito preciso para solução de equações hiperbólicas. Atualmente, ainda é utilizado, pois é um bom procedimento para ser utilizado em testes de validação.

Este método será ilustrado para resolver as equações de conservação de um escoamento homogêneo, as quais são repetidas aqui para facilitar a apresentação

$$\tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \tilde{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{D}}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \rho_m a & 1 \\ -\rho_m a & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} u_m + a & 0 \\ 0 & u_m - a \end{bmatrix} \quad (123)$$

A direção característica  $s$  é a direção percorrida por uma propagação, porém esta direção não é conhecida. No método das características tem-se por objetivo encontrar esta direção, pois utilizando esta direção, é possível transformar as equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias.

A variação da velocidade ao longo da direção característica  $s$  pode ser avaliada por

$$d\bar{U} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} dz \Rightarrow \frac{d\bar{U}}{ds} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{dz}{ds} \quad (124)$$

Comparando a Eq. (124) com a Eq. (123) observa-se que se

$$\frac{dz/ds}{dt/ds} = \frac{dz}{dt} = \tilde{\Lambda} \Rightarrow \frac{d\bar{U}}{ds} = \tilde{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{D}} \quad (125)$$

Logo, reescrevendo a Eq. (123) como equações diferenciais ordinárias (chamadas de equações de compatibilidades) ao longo das direções características, tem-se

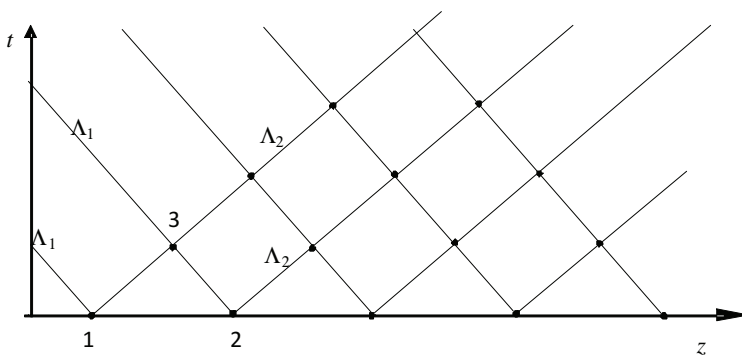
$$\text{ao longo de } \frac{dz}{dt} = \Lambda_1 = u_m + a \quad (126)$$

$$d p_m + (\rho_m a) d u_m = \rho_m a F d t \quad (127)$$

$$\text{ao longo de } \frac{d z}{d t} = \Lambda_2 = u_m - a \quad (128)$$

$$d p_m - (\rho_m a) d u_m = -\rho_m a F d t \quad (129)$$

Conhecendo-se os valores dos pontos para a condição inicial ( $t=0$ ), pode-se traçar a partir de cada ponto conhecido (pontos 1 e 2) duas direções características  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ . A intersecção das direções  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  de dois pontos distintos definirá um terceiro ponto (3) em um instante  $t$  diferente de zero, conforme ilustrado na Fig. 18.



**Fig. 18** Esquema das direções características

O ponto (3) é determinado através de aproximações de diferenças finitas das equações de características

$$\frac{z_3 - z_1}{t_3 - t_1} = u_{m_{1,3}} + a_{1,3} \quad (130)$$

$$\frac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2} = u_{m_{2,3}} - a_{2,3} \quad (131)$$

Nas equações acima utilizou-se a simbologia  $\phi_{i,j} = (\phi_i + \phi_j)/2$  para indicar valor médio das grandezas de interesse. Uma vez conhecido o ponto (3) e o tempo correspondente, a velocidade e pressão podem ser determinadas (com aproximação de diferenças finitas) a partir das equações de compatibilidade



$$p_{m3} - p_{m1} + (\rho_m a)_{1,3} (u_{m3} - u_{m1}) = (\rho_m a F)_{1,3} (t_3 - t_1); \quad (132)$$

$$p_{m3} - p_{m2} - (\rho_m a)_{2,3} (u_{m3} - u_{m2}) = -(\rho_m a F)_{2,3} (t_3 - t_2); \quad (133)$$

O sistema algébrico acima é resolvido de forma iterativa, iniciando-se com  $\phi_{i,j} = \phi_i$ . Repetindo este procedimento para toda a extensão  $z$  tem-se todos os valores do escoamento no novo intervalo de tempo.

A Figura 18 ilustra esquematicamente a solução obtida no espaço  $t, z$ . O inconveniente deste método é que a solução é obtida em pontos  $x$  e  $t$  randômicos, existindo a necessidade de se interpolar para conseguir a solução em determinados pontos fixos desejados.

#### 4.6. Solução Numérica do Modelo de Deslizamento

O Modelo de Deslizamento é governado pelas Eqs. (90), (91) e (92) ou qualquer combinação linear destas equações. Diferentes modelos numéricos utilizam diferentes combinações destas equações, juntamente com as fórmulas de velocidade de escorregamento, as quais relacionam as velocidades das fases com a velocidade de mistura.

##### 4.6.1. Variáveis $u_m, p_m, \alpha_g$

Hibiki e Ishii (2003), entre outros, selecionaram  $u_m, p_m$  e  $\alpha_g$ , como as variáveis a serem resolvidas. O conjunto de equações de conservação é composto pela equação de conservação de massa da mistura, equação de conservação de quantidade de movimento linear da mistura, pela equação de conservação de massa da fase gasosa, Eq. (91), rescrita em função da velocidade de mistura e  $V_{gm}$  (Eq. 96).

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m u_m)}{\partial z} = 0 \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho_m u_m)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m u_m u_m)}{\partial z} = & -\frac{\partial p_m}{\partial z} - \rho_m g \operatorname{sen} \beta - \\ & - \frac{f_m \rho_m |u_m|}{2 D_h} u_m - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\alpha_g}{\alpha_\ell} \frac{\rho_g}{\rho_m} V_{gj}^2 \right) \end{aligned} \quad (135)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_m)}{\partial z} = - \frac{\partial(\alpha_g \rho_g V_{gm})}{\partial z} \quad (136)$$

O sistema de equações formado pelas Eqs. (134) a (136) pode ser aproximado pelo método de volumes finitos, i.e., as equações de conservação são integradas nos volumes de controle e os fluxos nas faces dos volumes são aproximados. De acordo com Patankar (1980) recomenda-se a utilização de malha deslocada para a velocidade, de forma aumentar o acoplamento entre velocidade-pressão e evitar o problema de campo de pressão ou velocidade oscilatório irrealista (*checkerboard problem*). Para a integração temporal, recomenda-se a formulação totalmente implícita (Patankar, 1980), de forma a garantir estabilidade numérica.

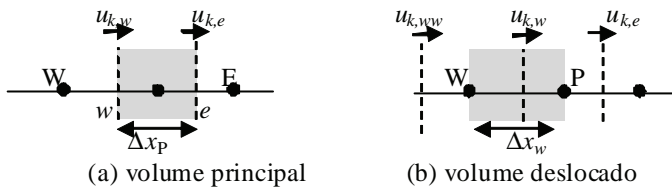
A equação de conservação de massa da fase gasosa é utilizada para determinar a fração volumétrica de gás  $\alpha_g$ . Esta equação discretizada no volume de controle principal P (Fig. 19), utilizando a aproximação *upwind* (Patankar, 1980) para a integração espacial dos termos convectivos é

$$a_P^\alpha \alpha_{gP} = a_W^\alpha \alpha_{gW} + a_E^\alpha \alpha_{gE} + b^\alpha \quad (137)$$

$$\begin{aligned} a_E^\alpha &= \max(-\rho_{g_e} u_{g_e} A, 0) & ; & & a_W^\alpha &= \max(\rho_{g_w} u_{g_w} A, 0) \\ a_P^{o,\alpha} &= \rho_{gP}^o A \Delta z_P / \Delta t & ; & & u_g &= u_m + V_{gm} \end{aligned} \quad (138)$$

$$b^\alpha = a_P^{o,\alpha} \alpha_{gP}^o & ; & a_P^\alpha &= a_E^\alpha + a_W^\alpha + a_P^{o,\alpha} + (\rho_{g_e} u_{g_e} A - \rho_{g_w} u_{g_w} A)$$

onde todas as variáveis são avaliadas no instante de tempo  $t + \Delta t$ , com exceção das variáveis com o superscrito  $o$ , o qual indica que a variável corresponde ao instante de tempo  $t$ .



**Fig. 19** Volume de controle principal e deslocado

A velocidade da mistura  $u_m$  é determinada pela solução da equação de conservação de quantidade de movimento no volume de controle deslocado  $w$  (Fig. 19b). Sua forma discretizada é

$$a_w^u u_{m_w} = a_{ww}^u u_{m_{ww}} + a_e^u u_{m_e} + b^u + A(p_{m_w} - p_{m_p}) \quad (139)$$

$$\begin{aligned} a_e^u &= \max(-\rho_{m_p} u_{m_p} A, 0) \quad ; \quad a_{ww}^u = \max(\rho_{m_w} u_{m_w} A, 0) \\ a_p^u &= a_e^u + a_{ww}^u + a_w^{o,u} + \frac{f_m \rho_{m_w} |u_{m_w}|}{2 D_h} \quad ; \quad a_w^{o,u} = \rho_{m_w}^o A \frac{\Delta z_w}{\Delta t} \\ b^u &= a_w^{o,u} u_{m_w}^o - \rho_{m_w} g \sin \beta + J_W A - J_P A \end{aligned} \quad (140)$$

onde  $J = (\alpha_g / \alpha_\ell)[(\rho_g \rho_\ell) / \rho_m] V_{gj}^2$  é o fluxo de “drift”.

A pressão da mistura deve ser obtida a partir da equação de conservação de massa da mistura. A equação de conservação de massa da mistura discretizada no volume de controle principal P é

$$\frac{(\rho_m - \rho_m^o)A}{\Delta t} + \rho_{m_e} u_{m_e} A - \rho_{m_w} u_{m_w} A = 0 \quad (141)$$

A seguir dois procedimentos serão descritos. O primeiro é baseado na metodologia SIMPLE (“Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation”) de Patankar (1980) e o segundo utiliza uma linearização da massa específica com relação à pressão (Stuckenbruk, 2009).

#### 4.6.1.1 SIMPLE

O algoritmo SIMPLE é baseado na idéia de que a velocidade de mistura  $u_m$  obtida através da solução da equação de conservação de quantidade de movimento (Eq. 139), em geral não satisfaz a conservação de massa da mistura, uma vez que a pressão não é conhecida. A idéia do método consiste em corrigir a pressão assim como a velocidade de forma a garantir conservação de massa. Considere

$$p_m = p_m^* + p'_m \quad u_m = u_m^* + u'_m \quad (142)$$

onde  $u_m^*$  é a solução da Eq. (139) quando a pressão é  $p_m^*$ . A correção da velocidade pode ser relacionada com a correção de pressão através da seguinte fórmula de correção, obtida a partir da diferença entre equação de conservação de quanti-

dade de movimento real ( $u_m$  e  $p_m$ ) e a baseada nos soluções estimadas ( $u_m^*$  e  $p_m^*$ ) como

$$u'_{m_w} = du_w(p'_P - p'_W) \quad ; \quad du_w = A/a'_w \quad (143)$$

Substituindo na equação de conservação de massa da mistura (Eq. 141) as Eqs. (142) e (143), obtém-se a seguinte equação de discretização para a correção de pressão

$$a^p_P p'_{m_P} = a^p_W p'_{m_W} + a^p_E p'_{m_E} + b^p \quad (144)$$

$$\begin{aligned} a^p_E &= \rho_{m_e} A du_e \quad ; \quad a^p_W = \rho_{m_w} A du_w \quad ; \quad a^p_P = a^p_E + a^p_W \\ b^p &= -[(\rho_{m_P} - \rho_{m_P}^o) A \frac{\Delta z_P}{\Delta t} + \rho_{m_e} u_{m_e}^* A - \rho_{m_w} u_{m_w}^* A] \end{aligned} \quad (145)$$

O procedimento consiste em resolver as equações de conservação de forma sequencial até atingir convergência para cada passo de tempo de acordo com os seguintes passos

- i) inicializar variáveis para o instante de tempo  $t + \Delta t$
- ii) calcular todas as variáveis auxiliares
- iii) estimar  $p^*$
- iv) resolver a equação de conservação de quantidade de movimento, obtendo  $u_m^*$  (Eq. 139)
- v) determinar  $p'$  pela solução da equação de conservação de massa da mistura, Eq. (144)
- vi) corrigir velocidade e pressão de mistura (Eqs. 142 e 143)
- vii) determinar a fração volumétrica de gás  $\alpha_g$  pela solução da equação de conservação de massa da fase gasosa (Eq. 137)
- viii) Verificar convergência, se obtida volta ao passo (i) para avançar no tempo, caso contrário voltar ao passo (ii) para realizar mais uma iteração

#### 4.6.1.2 Método Baseado na Equação de Estado

Este segundo enfoque é baseado na determinação da pressão utilizando o fato de que as equações de estado para a fase líquida e gasosa dependem da mesma

$$\rho_\ell = \rho_\ell(p_m) \quad ; \quad \rho_g = \rho_g(p_m) \quad ; \quad (146)$$

Estas equações podem ser, por exemplo, as seguintes equações de estado para a fase líquida e gasosa

$$\rho_\ell = \rho_{\ell,ref} + \frac{(p_m - p_{ref})}{a_\ell^2} \quad ; \quad \rho_g = \frac{p_m}{a_g^2} \quad (147)$$

onde  $\rho_{\ell,ref}$  é a massa específica de referência do líquido, avaliada na pressão de referência  $p_{\ell,ref}$ ,  $a_k$  é a velocidade do som

$$a_k^{-2} = \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial p_m} \right)_T \quad (148)$$

(no caso do gás  $a_g^2 = RT_{ref}$ ). Logo, sabendo que  $\alpha_g + \alpha_\ell = 1$ , é possível avaliar a variação da massa específica da mistura ( $\rho_m = \alpha_g \rho_g + \alpha_\ell \rho_\ell$ ) como

$$\delta(\rho_m) = \alpha_g \delta(\rho_g) + \alpha_\ell \delta(\rho_\ell) + (\rho_g - \rho_\ell) \delta(\alpha_g) \quad (149)$$

ou

$$\delta(\rho_m) = \left( \frac{\alpha_g}{a_g^2} + \frac{\alpha_\ell}{a_\ell^2} \right) \delta(p_m) + (\rho_g - \rho_\ell) \delta(\alpha_g) \quad (150)$$

No caso de fluxo de massa  $\rho_m u_m$ , o infinitesimal pode ser escrito como

$$\delta(\rho_m u_m) = \rho_m \delta(u_m) + \delta(\rho_m) u_m \quad (151)$$

A equação de conservação de massa da mistura pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha_g}{a_g^2} + \frac{\alpha_\ell}{a_\ell^2} \right) \frac{\partial p_m}{\partial t} + (\rho_g - \rho_\ell) \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \\ & + \rho_m \frac{\partial u_m}{\partial z} + \left( \frac{\alpha_g}{a_g^2} + \frac{\alpha_\ell}{a_\ell^2} \right) u_m \frac{\partial p_m}{\partial z} + (\rho_g - \rho_\ell) u_m \frac{\partial \alpha_g}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (152)$$

Definindo o vetor incógnita como

$$\Phi = \begin{bmatrix} u_m \\ p_m \\ \alpha_g \end{bmatrix} \quad (153)$$

pode-se escrever o sistema algébrico para o vetor  $\Phi$  como

$$\mathbf{A}_P \Phi_i = \mathbf{A}_E \Phi_{i+1} + \mathbf{A}_W \Phi_{i-1} + \mathbf{B}_i \quad (154)$$

sendo

$$\mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} a_{u_m P}^{u_m} & a_{p_m P}^{u_m} & a_{\alpha_g P}^{u_m} \\ a_{u_m P}^{p_m} & a_{p_m P}^{p_m} & a_{\alpha_g P}^{p_m} \\ a_{u_m P}^{\alpha_g} & a_{p_m P}^{\alpha_g} & a_{\alpha_g P}^{\alpha_g} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} a_{u_m E}^{u_m} & a_{p_m E}^{u_m} & a_{\alpha_g E}^{u_m} \\ a_{u_m E}^{p_m} & a_{p_m E}^{p_m} & a_{\alpha_g E}^{p_m} \\ a_{u_m E}^{\alpha_g} & a_{p_m E}^{\alpha_g} & a_{\alpha_g E}^{\alpha_g} \end{bmatrix} \quad (155)$$

$$\mathbf{A}_W = \begin{bmatrix} a_{u_m W}^{u_m} & a_{p_m W}^{u_m} & a_{\alpha_g W}^{u_m} \\ a_{u_m W}^{p_m} & a_{p_m W}^{p_m} & a_{\alpha_g W}^{p_m} \\ a_{u_m W}^{\alpha_g} & a_{p_m W}^{\alpha_g} & a_{\alpha_g W}^{\alpha_g} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} b^{u_m} \\ b^{p_m} \\ b^{\alpha_g} \end{bmatrix} \quad (156)$$

onde cada linha corresponde a uma equação de conservação (indicada pelo índice superior) e cada coluna corresponde ao coeficiente da variável da linha considerada que multiplica a incógnita  $\Phi_i$  (índice inferior).

O sistema algébrico resultante é não linear, e para tratar a não linearidade do sistema pode-se utilizar o método de Newton Raphson (Press, 2001), introduzindo-se a dependência das massas específicas com a pressão. A seguir o método é ilustrado. Seja

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{A}_P \Phi_i - [\mathbf{A}_E \Phi_{i+1} + \mathbf{A}_W \Phi_{i-1} + \mathbf{B}_i] \quad (157)$$

deseja-se obter  $G_i=0$ , através de um processo iterativo. O valor de  $G$  da iteração  $it+1$  pode ser relacionado com o valor da iteração corrente  $it$ , utilizando a expansão de Taylor,

$$\mathbf{G}(\Phi^{it} + \delta\Phi) = \mathbf{G}(\Phi^{it}) + \frac{\partial \mathbf{G}(\Phi)}{\partial \Phi} \delta\Phi \approx 0 \quad (158)$$

A solução de todos os nós do domínio é corrigida com o inverso da matriz Jacobiana  $\partial \mathbf{G} / \partial \Phi$ , de acordo com

$$\delta\Phi = - \left[ \frac{\partial \mathbf{G}(\Phi)}{\partial \Phi} \right]^{it}{}^{-1} \mathbf{G}(\Phi^{it}) \quad (159)$$

A matriz Jacobiana  $\partial \mathbf{G} / \partial \Phi$  é apresentada a seguir, onde cada linha corresponde a um ponto nodal do domínio, e cada ponto nodal possui uma matriz de coeficientes  $3 \times 3$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \Phi_1} & \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \Phi_2} & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial \Phi_1} & \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial \Phi_2} & \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial \Phi_3} & & \dots & & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial \Phi_2} & \frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial \Phi_3} & \frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial \Phi_4} & \dots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \Phi_{i-1}} & \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \Phi_i} & \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \Phi_{i+1}} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & & \frac{\partial \mathbf{G}_N}{\partial \Phi_{N-1}} & \frac{\partial \mathbf{G}_N}{\partial \Phi_N} \end{bmatrix} \quad (160)$$

O vetor  $\Phi$  é corrigido até que a correção  $d\Phi$  seja menor que uma tolerância pré-definida.

#### 4.6.2. Variáveis $\alpha_g \rho_g$ , $\alpha_l \rho_l$ , $\rho_m u_m$

Este modelo é baseado na formulação de Evje e Fjelde (2003), e utiliza as equações de conservação de massa para cada uma das fases, Eqs. (90) e (91), juntamente com a equação de conservação de quantidade de movimento escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g + \alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_l \rho_l u_l^2)}{\partial z} = \\ = -\frac{\partial p_m}{\partial z} - \rho_m g \text{sen} \beta - \frac{\tau_w S_w}{A} \end{aligned} \quad (161)$$

Na solução do sistema de equações de conservação, as variáveis dependentes são  $\rho_l \alpha_l$ ,  $\rho_g \alpha_g$  e  $\rho_m u_m = \rho_l \alpha_l u_l + \rho_g \alpha_g u_g$  e serão referenciadas daqui para frente respectivamente como  $w_g$ ,  $w_l$  e  $\dot{m}$  conforme apresentado abaixo:

$$w_l = \rho_l \alpha_l \quad (162)$$

$$w_g = \rho_g \alpha_g \quad (163)$$

$$\dot{m}'' = \rho_m u_m = \rho_\ell \alpha_\ell u_\ell + \rho_g \alpha_g u_g \quad (164)$$

Desta forma, as Eqs. (90), (91) e (161) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial w_\ell}{\partial t} + \frac{\partial (w_\ell u_\ell)}{\partial z} = 0 \quad (165)$$

$$\frac{\partial w_g}{\partial t} + \frac{\partial (w_g u_g)}{\partial z} = 0 \quad (166)$$

$$\frac{\partial \dot{m}''}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (w_\ell u_\ell^2 + w_g u_g^2) = -\frac{\partial p_m}{\partial z} - \frac{\tau_w S_w}{A} - (w_\ell + w_g) g \sin \theta \quad (167)$$

O sistema de equações formado pelas Eqs. (165) a (167) pode ser aproximado por volumes finitos, i.e., as equações de conservação são integradas nos volumes de controle e os fluxos nas faces dos volumes são aproximados. Devido a ausência de um termo difusivo nas equações de conservação, recomenda-se a utilização da aproximação *upwind* (Patanekar, 1980) para os termos convectivos, isto é, o fluxo na face leste (ver Fig. 19a) pode ser estimado por

$$w_{k_e} u_{k_e} = w_{k_P} \max(0, u_{k_e}) - w_{k_E} \max(0, -u_{k_e}) \quad (168)$$

A integração temporal pode ser obtida utilizando Runge-Kutta de segunda ou quarta ordem (Press, 2001) ou ainda uma aproximação de Euler implícita (Patanekar, 1980). As equações de conservação de massa discretizadas, baseadas na integração de Euler implícita são da forma

$$a_P^k w_{k_P} = a_W^k w_{k_W} + a_E^k w_{k_E} + b^k \quad (169)$$

$$\begin{aligned} a_E^k &= \max(-u_{k_e} A, 0) & ; & & a_W^k &= \max(u_{k_w} A, 0) \\ a_P^{o,k} &= A \Delta x_P / \Delta t & ; & & b^k &= a_P^{o,k} w_{k,P}^o \end{aligned} \quad (170)$$

$$a_P^k = a_P^{o,k} + a_E^k + a_W^k + (u_{k_e} A - u_{k_w} A) \quad (171)$$



onde todas as variáveis são avaliadas no instante de tempo  $t + \Delta t$ , com exceção das variáveis com o superscrito  $o$ , o qual indica que a variável corresponde ao instante de tempo  $t$ .

A equação de conservação de quantidade de movimento para a mistura é discretizada no volume deslocado (centrado na face  $w$ , Fig. 19b). A equação discretizada resultante, utilizando a integração temporal totalmente implícita e aproximação *upwind* para os termos convectivos é

$$a_w^m \dot{m}_w^m = \sum_k a_{kP}^m w_{kP} + \sum_k a_{kW}^m w_{kW} + b^m \quad (172)$$

$$a_{kP}^m = u_{kP}^2 A + g \operatorname{sen} \beta A \frac{\Delta x_w}{2} \quad ; \quad a_{kW}^m = u_{kW}^2 A + g \operatorname{sen} \beta A \frac{\Delta x_w}{2} \quad (173)$$

$$a_w^m = a_w^{o,m} \quad ; \quad a_w^{o,m} = A \Delta x_w / \Delta t$$

$$b^m = a_w^{o,m} \dot{m}_{m_w}^{o} + (p_{mW} - p_{mP}) A - \tau_w S_w \Delta x_w \quad (174)$$

Uma vez resolvido o sistema, a pressão é calculada em função de  $w_\ell$  e  $w_g$ , utilizando a fórmula de restrição  $\alpha_g + \alpha_\ell = 1$ , e as equações de estado para a fase líquida e gasosa (Eq. 147). A equação resultante é uma equação algébrica de segundo grau, do tipo

$$a p_m^2 + b p_m + c = 0 \quad (175)$$

onde

$$a = \frac{1}{a_\ell^2} \quad ; \quad b = \rho_{\ell,0} - \frac{p_{\ell,0}}{a_\ell^2} - w_\ell - \frac{w_g a_g^2}{a_\ell^2} \quad ; \quad c = -w_\ell a_g^2 \left( \rho_{\ell,0} - \frac{p_{\ell,0}}{a_\ell^2} \right) \quad (176)$$

A pressão pode então ser facilmente determinada extraindo a raiz positiva da Eq. (174), utilizando a fórmula de Báskara:

$$p_m = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} \quad (177)$$

A velocidade do líquido pode ser determinada, combinando a expressão que define a velocidade de deslizamento (Eq. 98), com a definição de fluxo volumétrico total (Eq. 70) na definição de  $\dot{m}^m$  (Eq. 164) resultando na seguinte expressão

$$u_{\ell} = \left[ \dot{m}'' - \frac{w_g V_{drift}}{1 - C_o \alpha_g} \right] / \left[ w_{\ell} + \frac{w_g C_o \alpha_l}{1 - C_o \alpha_g} \right] \quad (178)$$

A velocidade do gás é calculada a partir da equação que define  $\dot{m}''$  (Eq. 164):

$$u_g = (\dot{m}'' - w_{\ell} u_{\ell}) / w_g \quad (179)$$

Para evitar que o termo  $w_g = \rho_g \alpha_g$  presente no denominador não cause problemas relativos à divisão por zero, é preciso tomar cuidado para que  $\alpha_g$  nunca assumo o valor zero. Para isso, deve-se definir um valor mínimo para  $\alpha_g$  como  $10^{-6}$ .

#### 4.7. Solução Numérica do Modelo de Dois Fluidos

O Modelo de Dois Fluidos unidimensional é governado pelas Eqs. (114) a (117) ou qualquer combinação linear destas equações. Estas equações podem ser discretizadas utilizando as mesmas aproximações mencionadas anteriormente, isto é, integração temporal totalmente implícita e discretização espacial baseada na aproximação *upwind*. As equações de conservação de massa para cada fase  $k$  discretizadas no volume de controle principal (Fig. 19a) são

$$a_P^{\alpha k} \alpha_{kP} = a_W^{\alpha k} \alpha_{kW} + a_E^{\alpha k} \alpha_{kE} + b^{\alpha k} \quad (180)$$

$$\begin{aligned} a_E^{\alpha k} &= \max(-\rho_{k_e} u_{k_e} A, 0) \quad ; \quad a_W^{\alpha k} = \max(\rho_{k_w} u_{k_w} A, 0) \\ a_P^{o, \alpha k} &= A \Delta x_P / \Delta t \quad ; \quad b^{\alpha k} = a_P^{o, k} w_{kP}^o \\ a_P^{\alpha k} &= a_P^{o, \alpha k} + a_E^{\alpha k} + a_W^{\alpha k} + (\rho_{k_e} u_{k_e} A - \rho_{k_w} u_{k_w} A) \end{aligned} \quad (181)$$

Já as equações de conservação quantidade de movimento para cada fase devem ser integradas no volume de controle deslocado (Fig.19b), resultando na seguinte equação de discretização para cada fase  $k$

$$a_w^{u k} u_{k_w} = a_{ww}^{u k} u_{k_{ww}} + a_e^{u k} u_{k_e} + b^{u k} + A \alpha_{k_w} (p_{gW} - p_{gP}) \quad (182)$$

$$\begin{aligned} a_e^{u k} &= \max(-\rho_{kP} \alpha_{kP} u_{kP} A, 0) \quad ; \quad a_{ww}^{u k} = \max(\rho_{kW} \alpha_{kW} u_{kW} A, 0) \\ a_w^{o, u k} &= \rho_{k_w}^o \alpha_{k_w}^o A \Delta z_w / \Delta t \quad ; \quad b_{gr} = -\rho_{k_w} \alpha_{k_w} g A \sin \beta \end{aligned} \quad (183)$$

$$b_{wk} = \frac{1}{2} f_k \rho_{k_w} |u_{k_w}| S_k \Delta z_w \quad ; \quad b_i = \frac{1}{2} f_i \rho_{g_w} |u_{g_w} - u_{\ell_w}| S_i \Delta z_w$$

$$b_h = -\rho_{k_w} \alpha_{k_w} g A \cos \beta (h_{\ell_P} - h_{\ell_W}) \quad (184)$$

$$b_{salto} = -\alpha_{\ell_w} \sigma A (h_{\ell_E} + 3h_{\ell_W} - h_{\ell_{WW}} - 3h_{\ell_P}) / \Delta z_w$$

$$a_p^{uk} = a_e^{uk} + a_{ww}^{uk} + a_w^{o,uk} + b_{wk} + b_i \quad (185)$$

onde o termo de fonte constante para cada fase é

$$b^{ug} = a_w^{o,ug} u_{g_w}^o + b_{gr} + b_i u_{\ell} \quad (186)$$

$$b^{u\ell} = a_w^{o,u\ell} u_{\ell_w}^o + b_{gr} + b_h + b_i u_g + b_{salto} \quad (187)$$

Se não houver salto de pressão, isto é, se a pressão na fase gasosa for igual a pressão no líquido,  $b_{salto} = 0$ .

Os fatores de atrito entre cada fase e a parede ( $f_g$  e  $f_\ell$ ) e na interface ( $f_i$ ) devem ser calculados em função do número de Reynolds e do padrão do escoamento e são geralmente determinados através de correções empíricas. Os perímetros molhados  $S_g$ ,  $S_\ell$  e  $S_i$  também dependem do padrão de escoamento.

Neste modelo o acoplamento entre velocidades e pressão é mais complicado, pois as equações de continuidade de cada fase devem ser satisfeitas e não só as velocidades de cada fase devem ser ajustadas, mas as frações volumétricas também precisam ser corrigidas. Diversos métodos foram desenvolvidos visando ajustar as velocidades e frações volumétricas, e a maioria é baseada no algoritmo SIMPLE (Patankar, 1980). Entre os mais populares, pode-se mencionar o algoritmo IPSA ("Interphase-splip algorithm") de Spalding (1982). Este método usa as equações de conservação de quantidade de movimento para estimar as velocidades. A equação da pressão é baseada no desbalanceamento das frações volumétricas obtidas das equações de continuidade das fases. Porém, apesar do método buscar um acoplamento maior entre velocidades e frações volumétricas com a pressão, o acoplamento com a segunda fase é fraco, o que pode causar variações irrealistas da fração volumétrica do fluido mais leve.

O método apresentado a seguir é baseado da formulação proposta por Issa e Kempf (2003) e Ortega e Nieckele (2005), o qual é capaz de capturar automaticamente a geração e subsequente movimento de golfadas em escoamento ao longo de tubulações horizontais ou quase horizontais.

Assim como o método IPSA, as velocidades de cada fase são obtidas através da solução das equações discretizadas de quantidade de movimento (Eq. 182) para cada fase. A fração volumétrica do gás é obtida através da solução da equação de

conservação de massa da fase gasosa (Eq. 181), e a fração volumétrica do líquido é obtida utilizando a equação de restrição  $\alpha_g + \alpha_\ell = 1$ .

Para determinar a pressão utiliza-se a equação de conservação de massa da mistura, a qual é obtida somando as equações de continuidade de cada fase. Porém, como a massa específica da fase gasosa em geral é muito menor do que da fase líquida, estas equações são normalizadas, antes de somadas, resultando em na seguinte equação de conservação para a mistura, considerando o líquido como incompressível

$$\frac{\partial \alpha_\ell}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_\ell u_\ell)}{\partial z} + \frac{1}{\rho_{gref}} \left[ \frac{\partial \rho_g \alpha_g}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g \alpha_g u_g)}{\partial z} \right] = 0 \quad (188)$$

Esta equação pode ser integrada no volume de controle principal P (Fig. 19a), de forma análoga ao utilizado para as equações de continuidade das fases, resultando em

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial(\alpha_\ell u_\ell)}{\partial z} + \frac{A \Delta z_P}{\Delta t} \left[ \frac{(\rho_{gP} \alpha_{gP} - \rho_{gP}^o \alpha_{gP}^o)}{\rho_{gref}} + (\alpha_{\ell P} - \alpha_{\ell P}^o) \right] + \\ & \left[ \frac{(\rho_{ge} \alpha_{ge} U_{ge} - \rho_{gw} \alpha_{gw} U_{gw})}{\rho_{gref}} + (\alpha_{\ell e} U_{\ell e} - \alpha_{\ell w} U_{\ell w}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (189)$$

A dependência com a pressão é introduzida ao substituir expressões para as velocidades nas faces, derivadas das equações de quantidade de movimento discretizadas (Eq. 182), as quais podem ser reescritas da seguinte forma:

$$u_{k_w} = \hat{u}_{k_w} + du_{k_w} (p_{gW} - p_{gP}) \quad ; \quad du_{k_w} = \frac{\alpha_{k_w} A}{a_w^{u_k}} \quad (190)$$

onde  $\hat{u}_k$  é uma pseudo velocidade

$$\hat{u}_{k_w} = \frac{a_{ww}^{u_k} u_{k_{ww}} + a_e^{u_k} u_{k_e} + b^{u_k}}{a_w^{u_k}} \quad (191)$$

A massa específica do gás no ponto nodal depende da pressão através da equação de estado dos gases ideais:

$$\rho_{gP} = \frac{p_{gP}}{RT} = \frac{p_{gP}}{p_{ref}} \rho_g^{ref} \quad (192)$$

Substituindo as expressões para a velocidade e fração em massa em função da pressão na equação de conservação de massa da mistura, obtém-se a equação para determinar a pressão

$$a_P^p p_{gP} = a_W^p p_{gW} + a_E^p p_{gE} + b^p \quad (193)$$

onde

$$a_W^p = \frac{\rho_{g_w}}{\rho_{g_{ref}}} \alpha_{g_w} du_{g_w} A + \alpha_{\ell_w} du_{\ell_w} A \quad (194)$$

$$a_E^p = \frac{\rho_{g_e}}{\rho_{g_{ref}}} \alpha_{g_e} du_{g_e} A + \alpha_{\ell_e} du_{\ell_e} A \quad (195)$$

$$a_P^p = a_E^p + a_W^p + (\alpha_{gP} A) / (p_{ref} \Delta t) \quad (196)$$

$$b^p = \left[ \frac{p_{gP}^o}{p_{ref}} \alpha_{gP}^o - (\alpha_{\ell P} - \alpha_{gP}^o) \right] \frac{A \Delta z_P}{\Delta t} + \left( \frac{\rho_{g_w}}{\rho_{g_{ref}}} \alpha_{g_w} \hat{u}_{g_w} + \alpha_{\ell_w} \hat{u}_{\ell_w} \right) A - \left( \frac{\rho_{g_e}}{\rho_{g_{ref}}} \alpha_{g_e} \hat{u}_{g_e} + \alpha_{\ell_e} \hat{u}_{\ell_e} \right) A \quad (197)$$

Para resolver o sistema algébrico resultante, pode-se utilizar um procedimento seqüencial semelhante ao SIMPLE, descrito a seguir

- i) inicializar variáveis para o instante de tempo  $t + \Delta t$
- ii) calcular todas as variáveis auxiliares
- iii) resolver as equações de conservação de quantidade de movimento para cada fase, obtendo estimativa para  $u_g$  e  $u_\ell$  (Eq. 182)
- iv) calcular as pseudo velocidades,  $\hat{u}_g$  e  $\hat{u}_\ell$  (Eq. 191)
- v) determinar a pressão pela solução da Eq.(193)
- vi) corrigir as velocidades com a Eq. (190)
- vii) determinar a fração volumétrica de gás  $\alpha_g$  pela solução da equação de conservação de massa da fase gasosa (Eq. 180)
- viii) Verificar convergência, se obtida volta ao passo (i) para avançar no tempo, caso contrário voltar ao passo (ii) para realizar mais uma iteração

## 4.8. Solução do Sistema Algébrico

Como pode ser observado, para todos os casos apresentados, o sistema algébrico resultante apresenta uma matriz de coeficientes tridiagonal, isto é, a matriz só possui três diagonais diferentes de zero. Este sistema pode ser facilmente resolvido pelo algoritmo TDMA (Patankar, 1980), tanto no caso dos algoritmos seqüenciais como no caso dos algoritmos de bloco, onde cada coeficiente do algoritmo TDMA é uma matriz  $3 \times 3$ .

Métodos implícitos são teoricamente incondicionalmente estáveis. Entretanto, quando aplicados a problemas envolvendo escoamentos bifásicos, é preciso que o passo de tempo seja limitado para atender requisitos de precisão temporal da solução. Assim, o passo de tempo deve ser determinado de modo que uma partícula de fluido viaje no máximo um volume de controle por passo de tempo, o que pode ser expresso definido em função do número de Courant ( $C$ ). Assim, o passo de tempo fica limitado a:

$$\Delta t \leq C \frac{\Delta z}{\max(|u_k|)} \quad (198)$$

onde  $C$  deve ser previamente especificado. De acordo com Bonizzi (2003), a limitação do passo de tempo segundo a Eq. (198) permite que se capture todas as ondas que propagam a velocidades próximas às dos fluidos (Wallis, 1969), como é o caso daquelas que originam as golfadas. Issa e Kempf (2003) recomendam que o número de Courant seja especificado como 0,5. Para altas velocidades superficiais do gás (que normalmente limitam o passo de tempo), números de Courant ainda menores podem ser necessários.

## 4.9. Aplicações

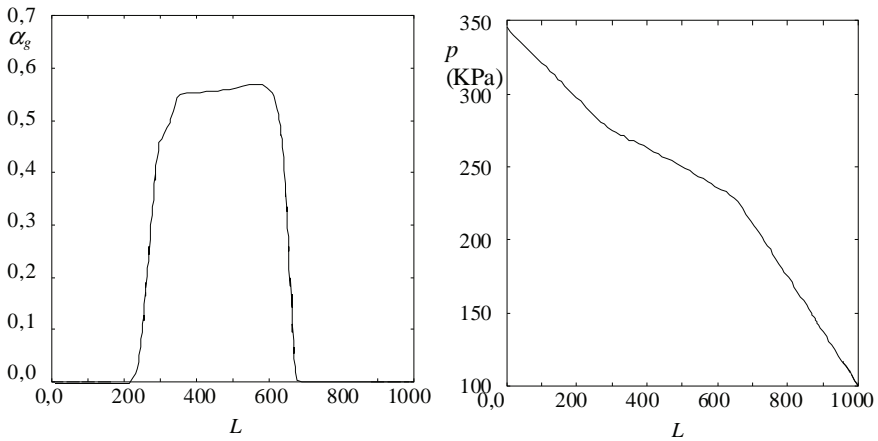
Nesta seção são apresentados exemplos de aplicação do modelo de deslizamento e do modelo de dois fluidos em situações unidimensionais.

### 4.9.1. Transição de Escoamento Bifásico para Monofásico Líquido

Este exemplo, proposto por Evje e Fjelde (2003), ilustra previsão da transição de um escoamento bifásico para um escoamento só de líquido, utilizando o modelo de deslizamento, com parâmetros bem simples para prever o escorregamento entre as fases. Especificou-se  $C_o = 1,2$  e  $V_{gj} = 0,5$  m/s. Como mencionado, quando a fração volumétrica do gás é zero, a Eq. (179) singular, e este teste ilustra a capacidade do método de tratar este problema.

O problema consiste de um escoamento de água/ar em uma tubulação de 1 km e 10 cm de diâmetro. Inicialmente o fluido encontra-se em repouso, as vazões de líquido e gás crescem de zero à 12,0 kg/s e 0,08 kg/s respectivamente, em 10 s. Porém, após 50 s a vazão mássica de gás decresce até zero em 20 s. A simulação termina com 175 s.

A Figura 20a, ilustra o perfil da fração volumétrica de gás ao longo do duto ao final da simulação. Observa-se que o modelo é capaz de lidar transição do escoamento bifásico para o escoamento com somente a fase líquida. O gás injetado no domínio é aprisionado entre bolsões de líquido e se desloca ao longo do duto. A Figura 20b ilustra o perfil de pressão ao longo do duto para o mesmo instante de tempo, onde pode-se observar a menor perda de carga na porção de gás e a maior perda de carga da parte líquida nas extremidades.

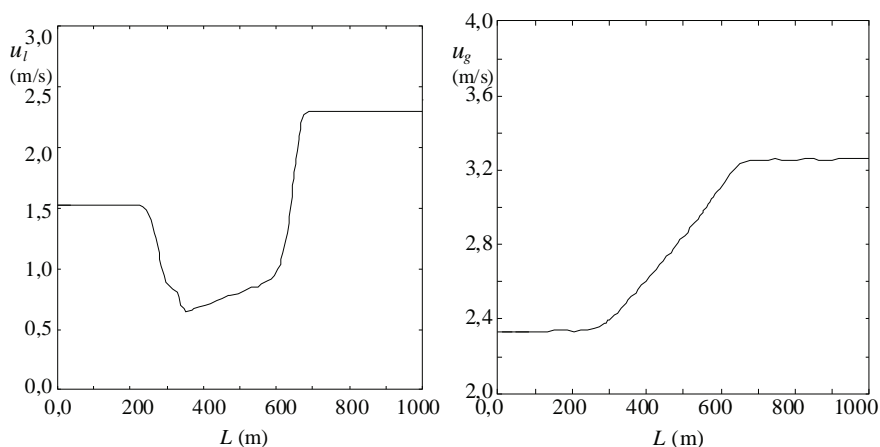


(a) perfil de fração volumétrica de gás

(b) perfil de pressão

**Fig. 20** Transição de escoamento bifásico para escoamento monofásico líquido. Perfis ao longo do duto após 175 s.

Os perfis de velocidade das fases líquida e gasosa ao longo da tubulação para o mesmo instante de tempo encontram-se ilustrados na Fig. 21. Nota-se a redução da velocidade do líquido na região do bolsão de gás, ao mesmo tempo que a velocidade do gás aumenta. Pode-se observar ainda que devido aos efeitos de compressibilidade do líquido, a velocidade do mesmo é menor na entrada do que na saída. Nota-se ainda que de acordo com o modelo de deslizamento, a velocidade do gás não é zero, quando a fração volumétrica de gás é nula (Eq. 100).



(a) perfil de velocidade do líquido

(b) perfil de velocidade do gás

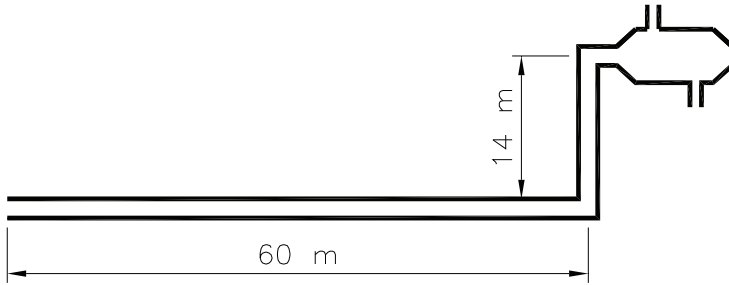
**Fig. 21** Transição de escoamento bifásico para escoamento monofásico líquido. Perfis ao longo do duto após 175 s.

#### 4.9.2. Golfada severa

Este exemplo ilustra a previsão de uma golfada severa utilizando o modelo de deslizamento (Andrianov et al, 2006 e Provenzano e Nieckele, 2007). A Figura 22 ilustra a tubulação em L considerada, a qual possui diâmetro igual a 5 cm. Os fluidos de trabalho são ar e querosene. Considerou-se as seguintes equações de fechamento de velocidade de escorregamento, onde  $\beta$  é o ângulo da tubulação com a horizontal

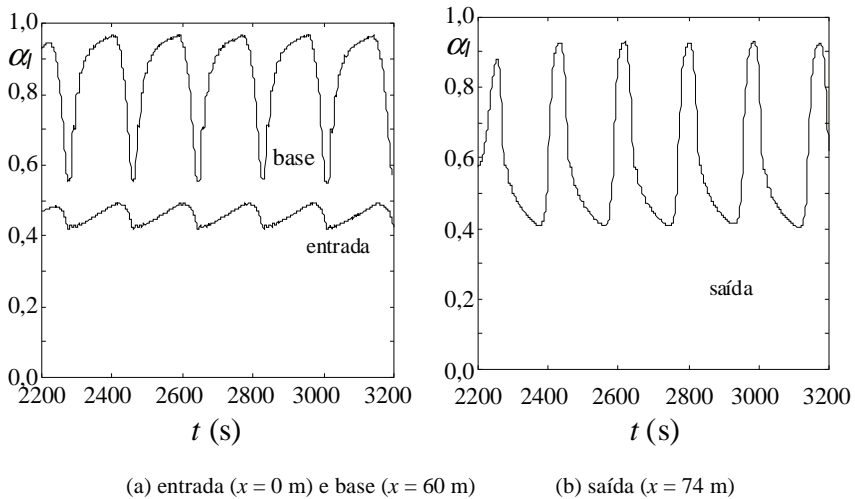
$$C_o = 1 + 0,2 \text{sen}^2(\beta) \quad ; \quad V_{gj} = 0,35 \alpha_g \sqrt{g D} \text{sen}(\beta) \quad (199)$$





**Fig. 22** Configuração da tubulação.

A variação temporal da fração volumétrica de líquido é apresentada na Fig. 23, em três posições ao longo do duto, após o regime de golfada intermitente ter se estabelecido de forma periódica: na entrada, na base do trecho vertical e na saída.



**Fig. 23** Variação temporal da fração volumétrica de líquido. Golfada Severa

Na entrada a fração de líquido oscila em torno de 0,45 (Fig. 23a). Pode-se observar a formação das golfadas na base do trecho vertical (Fig. 23a), e seu reflexo na saída da tubulação (Fig. 23b), com uma frequência quase igual, porém com valores mais baixos da fração de líquido que varia de 0,4 a 0,9.

A Figura 24 ilustra a variação da pressão com o tempo na entrada e na base do trecho vertical. Na saída a pressão é mantida constante. Observa-se que a pressão na base do trecho vertical oscila na mesma frequência que na entrada, pois durante o acúmulo de líquido no trecho vertical, a pressão sobe gradativamente até que seja o suficiente para expulsar o líquido em uma golfada.

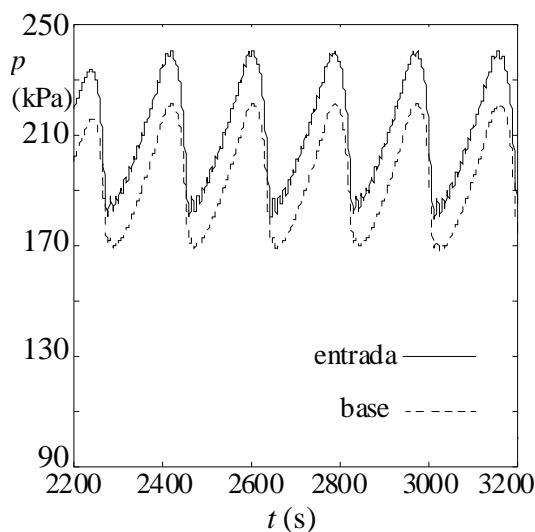


Fig. 24 Variação temporal da pressão. Golfada Severa.

#### 4.9.3. Formação de Golfada em Duto Horizontal e Quase-horizontal

A previsão de formação de golfadas é realizada com o modelo de dois fluidos, em um duto horizontal, em um duto inclinado e em um duto com seção em V, conforme ilustrado na Fig. 25, com uma mistura ar/óleo (Al Safran et al, 2005, Carneiro e Nieckele, 2007). As velocidades superficiais são conhecidas na entrada e a pressão é mantida constante na saída. A condição inicial é de escoamento estratificado, isto é, com nível de líquido constante ao longo do duto, com velocidades de cada fase constante.

Duas condições de velocidades superficiais na entrada das tubulações são consideradas. Caso 1:  $u_{s_\ell} = 0,6$  m/s e  $u_{s_g} = 0,64$  m/s; Caso 2:  $u_{s_\ell} = 1,22$  m/s e  $u_{s_g} = 1,30$  m/s. Estas velocidades foram selecionadas porque de acordo com o mapa de padrão de escoamento (ver Fig. 26), no primeiro caso, golfadas não devem ser esperadas no caso descendente, enquanto que no segundo caso, espera-se a formação de golfadas tanto para tubulações horizontais como descendentes.

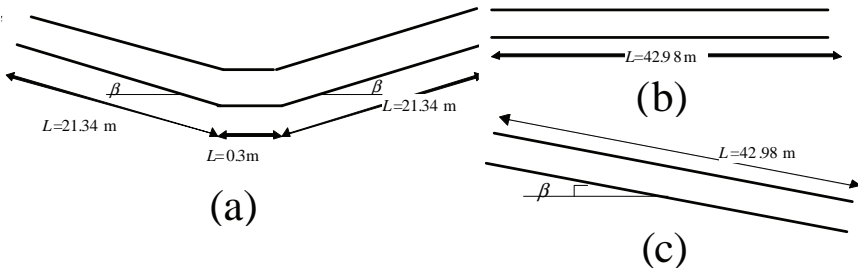
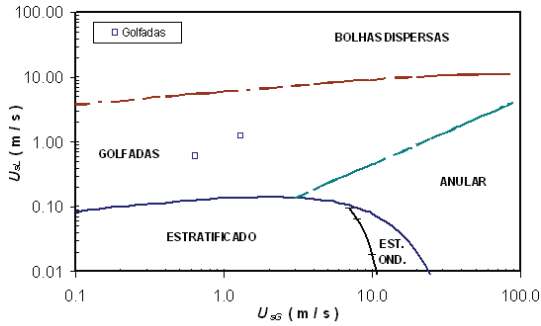
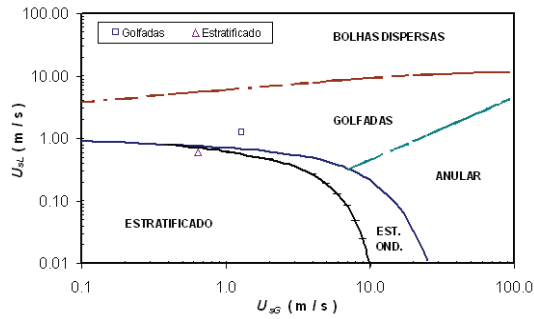


Fig. 25 Configurações consideradas. (a) seção em V (b) horizontal (c) inclinada descendente.



(a) tubulação horizontal

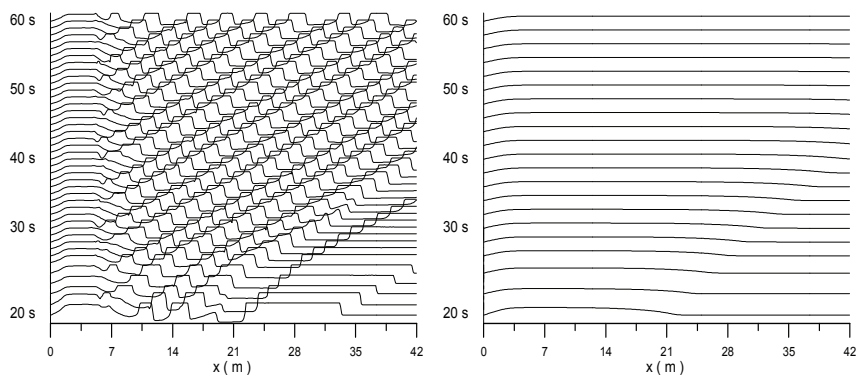


(b) tubulação descendente

Fig. 26 Mapa de padrão de escoamento.

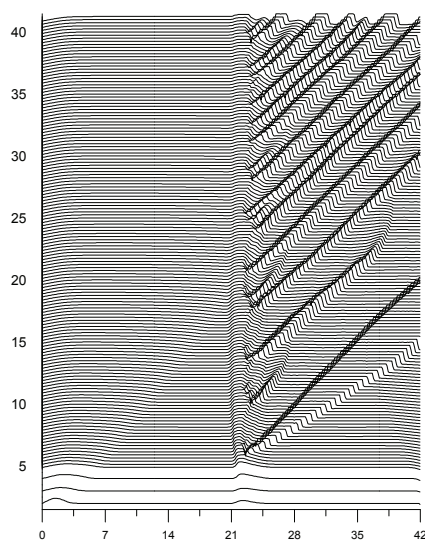
As evoluções temporais do *holdup* (fração volumétrica de líquido) ao longo das três configurações de tubulações, obtidas para os dois casos são ilustradas nas Figs. 27 e 28. Em cada figura o perfil de *holdup* ao longo do duto é apresentado para diferentes instantes de tempo, os quais encontram-se indicados na lateral das curvas.

Analisando os resultados obtidos para o Caso 1, observa-se que golfadas foram formadas na tubulação horizontal (Fig. 27a), mas não na tubulação inclinada (Fig. 27b), pois a gravidade apresenta um efeito estabilizador e não permite que pequenas perturbações cresçam dando origem às golfadas. Este resultado concorda com o esperado de acordo com o mapa de padrão de escoamento. No caso da tubulação em V (Fig. 27c), a gravidade também atua estabilizando as perturbações na seção descendente. No entanto, o líquido acumulado na base da tubulação, dá origem à formação de golfadas para a seção ascendente da tubulação.



(a) horizontal

(b) inclinada descendente

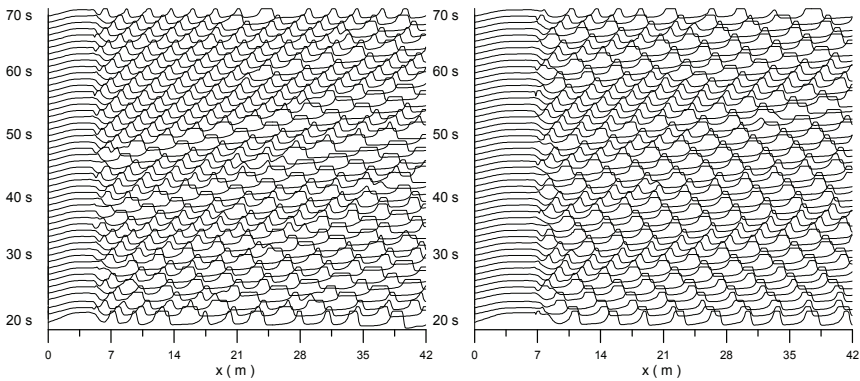


(c) seção em V

**Fig. 27** Evolução temporal do *holdup* ao longo das tubulações. Caso 1.

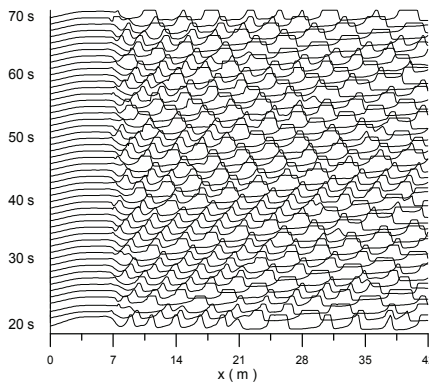
Analisando agora, os perfis de *holdup* ao longo das tubulações para o segundo caso, na Fig. 28, observa-se que as golfadas são formadas a aproximadamente 7 m da entrada para todos os casos. O efeito da gravidade é de apenas retardar um pouco o início da formação da golfadas. Nota-se ainda que devido a alta frequência das golfadas, não há tempo suficiente para ocorrer acúmulo de líquido na base da seção em V, induzindo um aumento no número de golfadas formadas na seção ascendente.

Os resultados obtidos concordaram com as observações experimentais de AlSafra et al (2005), mostrando que a metodologia é capaz de prever adequadamente o fenômeno da golfada. Adicionalmente, a análise mostrou que o efeito gravitacional possui um papel importante, pois dependendo da inclinação da tubulação, pode ter uma função estabilizadora impedindo a formação de golfadas.



(a) horizontal

(b) inclinada descendente



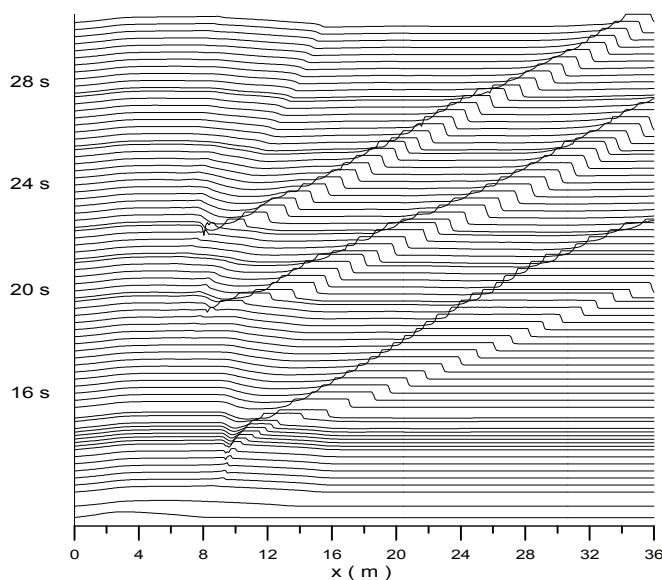
(c) seção em V

**Fig. 28** Evolução temporal do *holdup* ao longo das tubulações. Caso 2.

#### 4.9.4. Obtenção de Estatísticas do Padrão de Golfada

Devido ao menor esforço computacional, o enfoque baseado em grandezas médias permite facilmente determinar grandezas médias estatísticas, como por exemplo, velocidade de translação de uma golfada, sua frequência, comprimento médio, etc.

Este exemplo consiste do escoamento água/ar ao longo de uma tubulação horizontal com 36 m de comprimento e diâmetro igual a 7,8 cm, mesma situação empregada por Issa e Kempf (2003), Bonizzi (2003), Ortega (2004) e Carneiro (2006). A pressão não saída da tubulação é mantida constante e as velocidades superficiais do líquido e gás na entrada foram definidas iguais a  $u_{s\ell} = 0,55$  m/s e  $u_{sg} = 2,18$  m/s. A evolução temporal do *holdup* ao longo da tubulação pode ser observado na Fig. 29. Observa-se a formação da primeira golfada, a qual se desloca praticamente sozinha ao longo do domínio. Após um transiente inicial, o regime estatisticamente permanente é estabelecido, com a repetição dos trens de golfada.

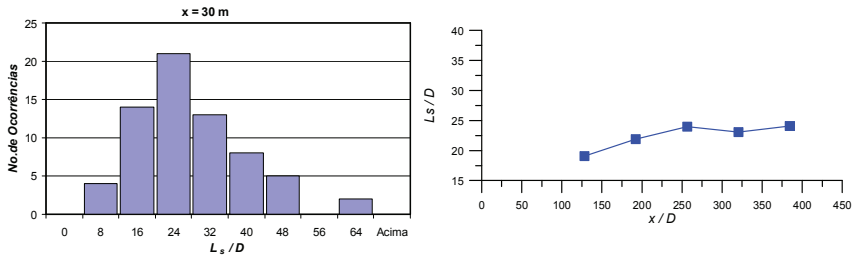


**Fig. 29** Evolução temporal do *holdup* ao longo da tubulação horizontal.  $u_{s\ell} = 0,55$  m/s e  $u_{sg} = 2,18$  m/s.

A Figura 30 apresenta um histograma do comprimento médio adimensional das golfadas ( $L_s/D$ ) próximo à saída e a evolução do comprimento médio das golfadas ao longo da tubulação. Estas grandezas foram obtidas somente após o regime estatisticamente permanente ter sido obtido. A velocidade média de translação das

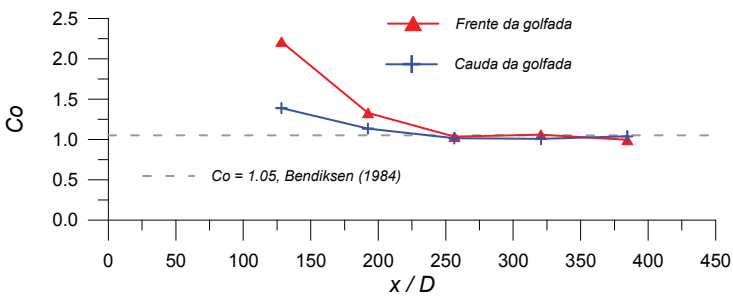
golfadas  $u_t$  é ilustrada na Fig. 31, através de variável  $C_o$  ( $C_o = u_t - u_d$ )/ $u_m$ , onde  $u_d$  depende do diâmetro e do número de Froude.

Pode-se notar em Fig. 30a que os comprimentos encontram-se dentro da faixa observada experimentalmente entre  $15D$  e  $40D$  (Bonizzi, 2003). Analisando a Fig. 30b observa-se um crescimento do comprimento das golfadas ao longo da região inicial da tubulação, devido a coalescência de pequenas golfadas com golfadas mais lentas a montante das mesmas (ver Fig. 31), atingindo um comprimento aproximadamente constante, após  $200D$ . A Fig. 31 ilustra que após a região de desenvolvimento das golfadas, a calda e frente das golfadas se deslocam com a mesma velocidade, conseqüentemente o comprimento médio das golfadas também é constante. A figura ilustra ainda que o valor previsto para a velocidade de translação da golfada concorda com o valor empírico disponível na literatura (Bendiksen, 1984).



(a) histograma de  $L_v/D$  próximo à saída (b) Evolução de  $L_v/D$  ao longo da tubulação.

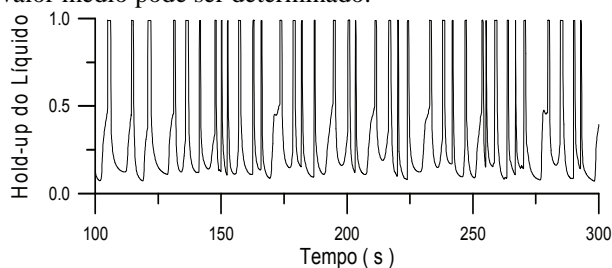
**Fig. 30** Comprimento médio.  $u_{S_\ell} = 0,55$  m/s e  $u_{S_g} = 2,18$  m/s.



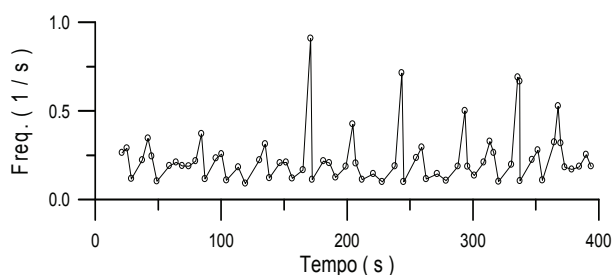
**Fig. 31** Velocidade média da frente e calda da golfada.  $u_{S_\ell} = 0,55$  m/s e  $u_{S_g} = 2,18$  m/s.

O valor do *hold-up* do líquido foi monitorado em uma posição próxima à saída da tubulação ( $x = 30$  m), como mostrado nas Fig. 32a. Do sinal obtido, calcula-se

as frequências das golfadas, e o resultado é mostrado na Fig. 32b, onde fica evidente que a frequência flutua randomicamente com o tempo, como é o caso do comprimento das golfadas. A partir da distribuição da frequência em cada posição da duto, um valor médio pode ser determinado.



(a) Variação do *holdup* com o tempo ( $x=30m$ ).



(b) Variação da frequência com o tempo ( $x=30m$ ).

**Fig. 32** Variação temporal do *holdup* e frequência próximo à saída ( $x=30m$ ).  $u_{S\ell} = 0,55$  m/s e  $u_{Sg} = 2,18$  m/s.

A frequência média foi calculada para  $u_{S\ell} = 0,55$  m/s e diversas velocidades superficiais do gás. Os resultados encontrados são apresentados na Fig. 33, juntamente com os valores dados pela correlação de Gregory e Scott (1969). Os erros absolutos médios calculados em relação à correlação foram de 9%, o que mostra uma concordância bastante razoável também para este parâmetro da golfada.



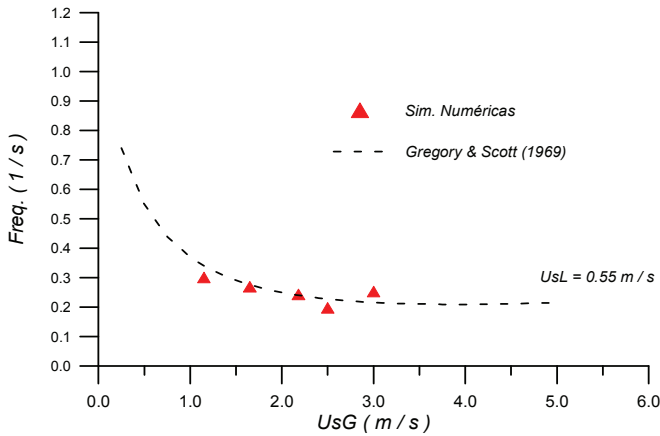


Fig. 33 Frequência média da golfada para  $u_{s\ell} = 0,55$  m/s.

## 5. Referências

- Al-Safran E, Sarica C, Zhang HQ, Brill J (2005) Investigation of slug flow characteristics in the valley of a hilly terrain pipeline. *Int. J. of Multiphase Flow*, 31: 337–357.
- Andrianov N, Coquel F, Postel M, Tran QH (2006) A relaxation multiresolution scheme for accelerating realistic two-phase flows calculations in pipelines. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 54(2):207-236.
- Ashgriz N, Poo JY (1991) FLAIR: Flux line-segment model for advection and interface reconstruction. *J. Comput. Phys.*, 93:449-468.
- Bendiken, K (1984) Experimental investigation of the motion of long bubbles in inclines tubes. *Int. J. Multiphase Flow*, 10:467-483.
- Bonizzi M (2003) Transient one-dimensional modelling of multi-phase slug flows. *Ph.D. Thesis*, Imperial College, University of London.
- Brackbill J, Kothe DB, Zemach C (1992) A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Phys.*, 100:335-354.
- Bugg JD, Rowe RD (1991) Modelling the initial motion of large cylindrical and spherical bubbles. *Inter. J. Num. Methods Fluids*, 13:109-129.
- Carneiro JNE (2006) Simulação numérica de escoamentos bifásicos no regime de golfadas em tubulações horizontais e levemente inclinadas. *Dissertação de Mestrado*, Dept. de Eng. Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Carneiro JNE, Nieckele, AO (2007) Investigation of slug flow characteristics in inclined pipelines. *Proceedings of 2007 Multiphase Flow*, 1:185-194.
- Chorin J (1968) Numerical solutions of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22:745–762.
- Evje S, Fjelde KK (2003) On a rough AUSM scheme for a one-dimensional two-phase model. *Comput. Fluids* 32:1497–1530.
- Floryan JM, Rasmussen H (1989) Numerical methods for viscous flow with moving boundaries. *Appl. Mech. Rev.*, 42:323–340.

- Fagundes Netto JR, Fabre J, Péresseon L (1999) Shape of long bubbles in horizontal slug flow. *International Journal of Multiphase Flow* 25:1129-1160.
- Febres M (2009) Modelagem tridimensional de golfada unitária em tubulação horizontal com modelo VOF (Volume of Fluid). *Dissertação de Mestrado* - Dept. de Eng. Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Fersiger JH, Peric EM (2002) Computational methods for fluid dynamics, Springer, 3ª ed.
- Fonseca Jr (2009). Medição do campo de velocidade e análise estatística das principais variáveis do padrão de escoamento intermitente. *Dissertação de Mestrado*. Dept. de Eng. Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Gregory GA; Scott DS (1969) Correlation of liquid slug velocity and frequency in horizontal co-current gas-liquid slug flow. *AIChE Journal* 15:933 – 935.
- Gueyffier D, Nadim A, Li J, Scardovelli R, Zaleski S (1999) Volume of fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three dimensional flows. *J. Comput. Phys.*, 152:423-456.
- Herrmann M (2008) A balanced force refined level set grid method for two-phase flows on unstructured flow solver grids. *J. Comput. Phys.* 227:2674-2706.
- Hibiki T, Ishii M (2002) Distribution parameter and drift velocity of drift-flux model in bubbly flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 45:707-721.
- Hibiki T, Ishii M (2003) One-dimensional drift flux model two-phase flow in a large diameter pipe. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 46:1773-1790.
- Hirt CW, Nichols BD (1981) Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 39:201-225.
- Issa, RI; Kempf, MHW (2003) Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model, *Int. J. Multiphase Flow* 29: 69-95.
- Ishii M (1975) Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow. Eyrolles.
- Lafaurie B, Nardone C, Scardovelli R, Zaleski S Zanetti, G (1994) Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER. *J. Comput. Phys.* 113:134-147.
- Lax PD, Wendroff B (1960) Systems of conservation laws, *Commun. Pure Appl Math.*, 13:217-237
- Li J (1995) Calcul d'interface affine par morceaux. C. R. Acad. Sci. Paris, série IIB, 320:391-396.
- Maliska, C (2004) Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. LTC, 2ª. ed.
- Mc Hyman J (1984) Numerical methods for tracking interfaces. *Physica D*, 12:396-407.
- Melo JRC (1995) Simulação Numérica de Escoamentos Bifásicos com Interfaces, *Dissertação de Mestrado*, Dept. de Eng. Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Melo JRC, Nieckele, AO (1996) An advection and interface reconstructing scheme for incompressible flow calculations. *Proceedings of ASME Fluid Engineering Division Summer Meeting, forum on Advances in Numerical Modeling of Free Surface and Interface Fluid Dynamics*, 3:384-389
- Noh WF, Woodward, P (1976) SLIC (simple line interface calculation). In van de Vooren A e Zandbergen P editors, *Proceedings 5th Inter. Conf. Fluid Dynamics*, Lecture Notes in Physics, 49:330-340.
- Patankar, SV (1980) Numerical heat transfer and fluid flow. (Series in computational methods in mechanics and thermal sciences), Hemisphere Publishing Corporation.
- Press, WH (2001) Numerical recipes: the art of scientific computing, Cambridge University Press
- Prosperetti A, Tryggvason G (2009) Computational methods for multiphase flow, Cambridge University Press.
- Provenzano, CEC; Nieckele AO (2007) Previsão de Golfada Severa Utilizando um Modelo de Escorregamento. *Proceedings of Rio Pipeline Conference & Exposition*.
- Puckett EG, Saltzman JS (1992) A 3D adaptative mesh refinement algorithm for interfacial gas dynamics. *Physica D*, 60:84-93.

- Puckett EG, Henderson LF, Colella P (1995) Computing surface tension with high-order kernels, in: Oshima K (Ed.), Proceedings of the 6th International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Lake Tahoe, CA, 1995, pp. 6-13.
- Ortega AJM (2004) Análise do Padrão Slug em Tubulações Horizontais Utilizando o Modelo de Dois Fluidos, *Dissertação de Mestrado*, Dept. de Eng. Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Ortega AJM, Nieckele, AO (2005) Simulation of horizontal two-phase slug flows using the two-fluid model with a conservative and non-conservative formulation, *Anais do COBEM*, MG, Brasil
- Osher S, Fedkin R (2003) *Level Set Methods and Dynamics Implicit Surfaces*. Springer Verlag.
- Osher S, Sethian JA (1988) Fronts propagation with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.* 79(1):12-49.
- Rothman DH, Zaleski, S (1997) *Lattice-gas cellular automata*. Cambridge University Press.
- Spalding, DB (1982) Developments in the IPSA procedure for numerical computation of multiphase flow phenomena with interphase slip, unequal temperatures, etc. *Numer. Proced. Methodol. Heat Transfer*, 421-432.
- Shu, CW, Osher S (1989) Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, II. *J. Comput. Phys.* 83:32-78.
- Shyy W, Udaykumar H, Rao MM, Smith RW (1996) *Computational fluid dynamics with moving boundaries*. Taylor and Francis.
- Sethian, JA (1999) *Level Set Methods*. Cambridge University Press, 2a. ed.
- Stuckenbruck S (2009) *Manual técnico do TRANSFLUX, Simulador para escoamento Transiente Bifásico em Dutos de Petróleo*
- Sussman M, Fatemi E (1999) An efficient, interface preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow. *SIAM J. Sci. Comput.* 20(4):1165-1191.
- Sussman M, Smereka O, Osher, S (1994) A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.* 114:146-159.
- Versteeg HK, Malalasekera, W (2007) *An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*. Pearson, Prentice Hall, 2ª ed.
- Wallis GQ (1969) *One-Dimensional Two-Phase Flow*. McGraw-Hill.
- Waters, JK, Davidson J F (1963) The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid, part 2: The three dimensional bubble and the toroidal bubble, *Journal of Fluid Mechanics*, 17:321-339.
- Younds DL (1982) Time dependent multimaterial flow with large fluid distortion. In Morton KM, Baines MJ, editors, *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Institute of Mathematics and its Applications, 27-39
- Zuber N, Findlay JA (1965) Average Volumetric Concentration in Two-Phase Flow Systems, *J. Heat Transfer, Trans. ASME*, 87:453-468.

# CAPÍTULO 7 - Modelagem de Dois Fluidos do Escoamento Gás-Sólido em Reatores de Leito Fluidizado Circulante

**Fernando E. Milioli**

**Christian C. Milioli**

Departamento de Engenharia Mecânica

Escola de Engenharia de São Carlos - EESC

Universidade de São Paulo - USP

Av. Trabalhador São-carlense, 400, 13566-590, São Carlos, SP.

## Lista de símbolos

$a$	coeficientes estequiométricos, $kmol$
$A$	área, $m^2$
$C$	concentração, $kmol/m^3$
$C_D$	coeficiente de arrasto gás-partícula, $adm$
$d_p$	diâmetro de partícula, $m$
$D$	coeficiente de difusão de massa de espécie química, $m^2/s$
$D, D_e, D_E$	fluxo difusivo de massa de espécie química de micro-escala, efetivo de meso-escala, e efetivo de macro-escala, respectivamente, $kg_i/(m_k^2 s)$
$D_{sgs}$	taxa de dissipação de energia cinética turbulenta sub-malha, $J/(m_k^3 s)$
$e$	coeficiente de restituição de fase sólida, $adm$
$g$	aceleração da gravidade, $m/s^2$
$g_0$	função de distribuição radial de partículas sólidas, $adm$
$G$	função filtro sub-malha, e.g. $1/\sqrt{m}^{-3}$
$I$	tensor unitário
$J$	fluxo difusivo
$n$	reagentes, ou direção normal
$\mathbf{n}$	vetor unitário normal à superfície
$k$	coeficiente de taxa de reação, $kmol^x m^y/s$
$k_{sgs}$	energia cinética turbulenta sub-malha, $m^2/s^2$

$M, \mathbf{M}$	termos de transferência na interface, escalar e vetorial
$P$	pressão, $Pa$
$\nabla P^*$	gradiente adicional de pressão, $Pa/m$
$Pr$	número de Prandtl, $adm$
$Q_{sgs}$	taxa de produção de energia cinética turbulenta sub-malha, $J/(m_k^3 s)$
$r, R$	taxas de reação química, $kg_i/(m^3 s)$ , $kg_i/(kg_k s)$
$Re$	número de Reynolds, $adm$
$Sc$	número de Schmidt, $adm$
$t$	tempo, $s$
$\mathbf{u}$	vetor velocidade de meso-escala ou sub-malha, $m/s$
$u, v, w$	componentes Cartesianas do vetor velocidade de meso-escala ou sub-malha, $m/s$
$\mathbf{U}$	vetor velocidade de macro-escala, $m/s$
$U, V, W$	componentes Cartesianas do vetor velocidade de macro-escala, $m/s$
$V$	volume, volume de célula numérica SGE, volume de domínio SSM, $m^3$
$W$	peso molecular, $kg/kmol$
$x, y, z$	coordenadas Cartesianas, $m$
$X$	função escalar indicadora de fase
$Y$	fração mássica, $kg_i/kg_k$

### Símbolos gregos

$\alpha$	fração volumétrica de fase, $m_k^3/m^3$
$\beta$	função de arrasto na interface gás-sólido, $kg/(m^3 s)$
$\Gamma$	taxa de transferência de energia cinética flutuante partícula-gás, $J/(m_k^3 s)$
$\Delta$	tamanho do filtro sub-malha, e.g. $\sqrt[3]{V}$ , $m$
$\varepsilon$	variável genérica
$\Theta$	temperatura granular, $m^2/s^2$
$\kappa$	coeficiente de condutibilidade térmica granular, $kg/(m s)$
$\lambda$	viscosidade volumétrica, $Pa s$
$\lambda_p$	distância média entre partículas, $m$
$\mu$	viscosidade dinâmica, $Pa s$
$\rho$	densidade, $kg/m^3$
$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}_e, \boldsymbol{\tau}_E$	tensor das tensões viscosas de micro-escala, efetivas de meso-escala, e efetivas de macro-escala, respectivamente, $Pa$
$\varphi$	esfericidade de partícula, $adm$
$\Phi$	geração de escalar transportado
$\Psi$	escalar transportado, ou fator <i>driving-force</i>
$\Psi$	taxa de dissipação de energia granular, $J/(m_k^3 s)$
$\Omega$	módulo de elasticidade partícula-partícula, $Pa$

## Subscritos

<i>dil</i>	diluído
<i>e</i>	efetivo de meso-escala ou sub-malha
<i>E</i>	efetivo de macro-escala
<i>g</i>	fase gás
<i>i</i>	espécie química
<i>I</i>	interface
<i>j</i>	reação química
<i>k</i>	fases gás ou sólido
<i>max</i>	máximo
<i>s</i>	fase sólida
<i>sgs</i>	sub-malha

## Superscritos

—	parte resolvida ou filtrada em SGE
''	flutuação sub-malha em SGE

## Outros

$\langle \dots \rangle$	operador de médias
-------------------------	--------------------

# 1. Introdução

## 1.1. Contexto

Reatores multifásicos são largamente utilizados nas indústrias química, de geração de energia e do petróleo. Dudukovic et al. (1999) dão uma clara idéia da sua significativa relevância econômica; estimam que o impacto das tecnologias de reatores multifásicos na economia dos *USA* gira em torno de 638 bilhões de dólares anuais (mais da metade do PIB do Brasil em 1999).

Os reatores de leito fluidizado destacam-se entre os multifásicos, sendo ostensivamente utilizados em processos como o craqueamento catalítico para produção de gasolina e derivados na indústria do petróleo, e a combustão/gaseificação de carvão para geração de energia termoelétrica. Em áreas como estas, até mesmo pequenos esforços visando melhorias de performance através de modificações de processo exigem investimentos de muitos milhões de dólares (Sundaresan, 1999). Atualmente, o projeto e escalonamento de reatores de leito fluidizado é quase completamente empírico, e baseia-se em testes preliminares em plantas piloto de escalas reduzidas. O escalonamento frequentemente exige a construção de duas ou

mais escalas de demonstração, a custos e tempos de implementação elevadíssimos (Sundaresan, 1999). Como exemplo, cita-se a planta de demonstração de combustão de carvão em leito fluidizado circulante *Nucla ACFB Demonstration Project* (Nucla, 1999). Trata-se de uma planta termoelétrica em escala 2:1 de uma instalação previamente demonstrada, com capacidade de 100 MWe. Entre os estágios de construção, operacionalização e demonstração da planta, foram despendidos 167 milhões de dólares, e os desenvolvimentos se estenderam por cerca de 4,5 anos.

O projeto *Nucla* foi um dos 40 integrantes do programa *Clean Coal Technologies (CCT)*, gerenciado pelo *Department of Energy (DOE)* do governo dos *USA* (McKee, 2000). O *CCT* foi sucedido pelo corrente *Clean Energy Plants for the 21<sup>st</sup> Century*, também denominado *Vision 21* (Vision 21, 2007). O objetivo maior do *Vision 21* é eliminar, a custos competitivos, todo o impacto ambiental causado pelo uso de combustíveis fósseis. Entre as suas estratégias está o desenvolvimento de ferramentas computacionais que viabilizem a busca de melhor compreensão e descrição de processos multifásicos. Como meta, espera-se que modelos baseados em *CFDs* (“Computational Fluid Dynamics”, i.e. dinâmica dos fluidos computacional) sejam habilitados como ferramentas efetivas de apoio ao projeto, provendo simulações fisicamente embasadas, que sejam capazes de predizer de forma realista todos os fenômenos relevantes.

Os altos custos e tempo característicos dos projetos de demonstração, e dos procedimentos de modificação e otimização, justificam amplamente o desenvolvimento de ferramentas de análise teórica. As pesquisas correntes nesta área concentram-se principalmente na superação das principais deficiências dos modelos matemáticos, notoriamente relacionadas com os fenômenos de turbulência e escoamentos multifásicos dispersos (Davidson, 2002). A despeito das atuais deficiências, o valor econômico industrial dos *CFDs* já está demonstrado. Por exemplo, Davidson (2002) cita a experiência de uma dada empresa de engenharia, onde o uso de *CFDs* propiciou retorno aproximado de 6 vezes o investimento inicial num período de 6 anos. Num outro exemplo de aplicação industrial, descrito por Barthod et al. (1999), e citado por Curtis e van Wachem (2004), uma companhia de petróleo foi bem sucedida em implementar um modelo para escoamento gás-sólido em uma unidade de craqueamento catalítico, melhorando com isso a distribuição de sólidos no reator, e obtendo maior conversão.

Duas grandes frentes devem ser atacadas para o desenvolvimento de ferramentas *CFD*: os modelos matemáticos propriamente ditos, e os procedimentos numéricos utilizados para sua solução computacional. Este capítulo concentra-se na física envolvida e na formulação de modelos matemáticos. Enfatiza-se, contudo, que os procedimentos numéricos de solução merecem igual atenção, posto que nenhum estudo de modelagem matemática complexa poderá ser realizado sem a utilização de procedimentos numéricos suficientemente precisos. Sobre procedimentos numéricos para solução de problemas de dinâmica de fluidos, há extensa literatura de grande relevância (e.g. Prosperetti e Tryggvason, 2007, Ferziger e Peric, 2002, Roache, 1972, entre muitos outros).

## 1.2. Linhas de modelagem matemática

No campo dos desenvolvimentos de modelos matemáticos para reatores de leito fluidizado, as simulações baseadas em *CFD* têm, basicamente, dois diferentes propósitos (van der Hoef et al., 2006): *i.* contribuir para a compreensão dos processos relevantes (elucidação de princípios físicos elementares que governam os escoamentos fluidizados, tais como arrasto, fricção e dissipação; teste de hipóteses e teorias elementares tais como a teoria cinética dos escoamentos granulares); *ii.* serem utilizadas como ferramentas de projeto (aqui o objetivo final é construir modelos capazes de corretamente prever os escoamentos gás-sólido em equipamentos de escala industrial). Deve-se notar que, para que o propósito (*ii*) possa ser efetivamente atacado, o propósito (*i*) deve ser previamente ou simultaneamente alcançado.

É evidente a grande importância do desenvolvimento de ferramentas teóricas computacionais. Há, contudo, grandes dificuldades a transpor relacionadas à complexidade dos fenômenos envolvidos. Os escoamentos granulares de interesse são altamente heterogêneos, com densidades de particulado indo desde zero ao máximo empacotamento, simultaneamente, em diferentes regiões. Nesta situação todos os tipos de interações gás-partícula, partícula-partícula e partícula-parede tornam-se relevantes, caracterizando os denominados acoplamentos de quatro vias (Elgobashi, 1991). Em termos gerais, o arrasto do gás causa o movimento das partículas, as partículas afetam a hidrodinâmica turbulenta do gás, e o movimento das partículas é afetado por colisões inelásticas entre partículas e das partículas com as paredes do reator.

As complexidades físicas do escoamento aliadas às grandes dimensões dos reatores industriais tornam claro que não é possível obter resultados realistas através de um único método de simulação; ao contrário, uma hierarquia de métodos se faz necessária para a solução dos fenômenos do escoamento em diferentes escalas de espaço e de tempo (van der Hoef et al., 2006).

A descrição do escoamento da fase gás é feita a partir de modelos de meio contínuo (formulações Eulerianas), em muitos casos incluindo modelos de turbulência (casos de particulados finos ou envolvendo processos reativos). As principais alternativas para a simulação computacional de escoamentos turbulentos são (James et al., 2006): formulações baseadas em equações de Navier-Stokes médias de Reynolds (*RANS*), simulação numérica direta (*SND*), simulação de grandes escalas (*SGE*), ou combinações destas. *SND* é computacionalmente inviável, pois exigiria malhas numéricas refinadas ao nível do livre caminho médio molecular. *SGE* produz melhores soluções que *RANS* (Pitsch et al., 2008), pois permite capturar grandes escalas com maior correção, contanto que modelos sub-malha adequados sejam aplicados.

Descrições do escoamento da fase particulada são obtidas de modelos do contínuo ou de modelos discretos. A hipótese de meio contínuo é válida em domínios cujas dimensões sejam, no mínimo, uma ordem de grandeza superiores à micro-



escala <sup>1</sup> do escoamento. Neste caso as equações de Navier-Stokes descrevem bem todas as escalas do escoamento de magnitude superior à micro-escala. Em domínios inferiores à micro-escala, a hipótese de meio contínuo não é válida, e teorias cinéticas de gases densos ou granulares discretas baseadas na equação de Boltzmann podem ser aplicadas. Destacam-se aqui as formulações dinâmicas moleculares ou granulares, a formulação Lattice-Boltzmann, e a teoria cinética dos escoamentos granulares (TCEG). Para materiais particulados aplica-se também a segunda lei de Newton para partículas individuais, em formulações denominadas Lagrangeanas.

Apenas os modelos do contínuo, ou Eulerianos, em simulações de grandes escalas (SGE), são aplicáveis nas escalas dos equipamentos industriais. Os modelos do contínuo em simulações numéricas diretas (SND) e os modelos discretos adequam-se mais como ferramentas para a formulação de teorias de fechamento para SGE via experimentação computacional. Supercomputadores com milhares de processadores podem resolver, em tempos de processamento aceitáveis, formulações Euler-Euler (i.e. Euler para ambas as fases) em malhas numéricas da ordem de dezenas ou centenas de milhões de células computacionais; contudo, para resolver todas as escalas de estruturas coerentes de partículas sólidas presentes em reatores reais (SND para fases sólidas), dezenas ou centenas de bilhões de células computacionais seriam necessárias (van der Hoef, 2006). Isso inviabiliza a aplicação de Euler-Euler com SND para fases sólidas em domínios industriais. Formulações Euler-Lagrange são capazes de lidar, em tempos de processamento computacional aceitáveis, com quantidades na ordem de  $10^5$  partículas; formulações Lattice-Boltzmann são capazes de lidar com quantidades na ordem de  $10^2$  partículas (van der Hoef, 2006). Em reatores reais (tipicamente com 1 a 5 m de diâmetro, 3 a 20 m de altura, frações médias de sólidos de 3 a 20 %, e particulados de 50 a 500  $\mu\text{m}$ ) tem-se na ordem de  $10^{10}$  a  $10^{14}$  partículas, de forma que Euler-Lagrange e Lattice-Boltzmann são ambas inviáveis para domínios industriais.

Evidencia-se que a solução de reatores reais ao nível das micro-escalas <sup>1</sup> do escoamento é inviável, e apenas simulações de grandes escalas podem ser praticadas. Nestas, descrições de micro-escala devem ser utilizadas para obtenção de descrições de meso-escala <sup>1</sup>, e estas, utilizadas para fechamento de simulações de macro-escala <sup>1</sup>. A Figura 1 exemplifica como diferentes procedimentos de modelagem comumente aplicados a escoamentos gás-sólido poderiam ser combinados para simulação de grandes escalas de reatores reais.

SGE requer fechamentos de meso-escala ou sub-malha. Então, a questão central passa a ser a obtenção de relações de fechamento de meso-escala ou sub-

---

<sup>1</sup> micro-escala é aquela inferior ao livre caminho médio entre moléculas ou partículas; meso-escala é a escala sub-malha, incluindo toda escala superior à micro-escala, e inferior à macro-escala; macro-escala é aquela que é resolvida em simulações de grandes escalas, indo desde uma ordem de magnitude superior ao tamanho da célula numérica praticada, até as máximas dimensões do domínio computacional.

malha para parâmetros como as viscosidades dinâmica e volumétrica de ambas as fases, a pressão da fase sólida, e o arrasto da fase gás sobre a fase sólida. O fechamento da fase sólida pode ser obtido empiricamente, via simulações com modelos dinâmicos particulados (analogias com modelos dinâmicos moleculares), via teoria cinética dos escoamentos granulares (TCEG, formulada em analogia com a teoria cinética dos gases densos), ou via simulações Lattice-Boltzmann, Euler-Lagrange ou Euler-Euler sub-malha (SSM, ou SND sólido/SGE gás). O fechamento da fase gás pode ser obtido empiricamente, via modelos de turbulência ou modelos sub-malha, via simulações com modelos dinâmicos moleculares, ou simulações Euler-Euler SND. As simulações Euler-Euler sub-malha (SSM, ou SND sólido/SGE gás), por sua vez, requerem fechamento de micro-escala para a fase sólida e de meso-escala para a fase gás, dispondo-se para tal das mesmas alternativas anteriores. Anote-se que adaptações da TCEG têm sido diretamente empregadas para descrições de meso-escala de fases sólidas, assim como dados de meso-escala têm sido aplicados para descrever o arrasto de micro-escala (e.g. Benyahia, 2009; Igci et al., 2008; Benyahia et al., 2007).

Há ricas literaturas em todas as modalidades de formulação. Para introduções às formulações Euler-Lagrange, dinâmicas moleculares e particuladas, e Lattice-Boltzmann ver, por exemplo, van der Hoef et al. (2006). O presente capítulo é dedicado às simulações Euler-Euler sub-malha (SSM, ou SND sólido/SGE gás) e SGE, aplicadas aos escoamentos gás-sólido em reatores de leito fluidizado circulante. A Figura 2 ilustra a composição destes procedimentos para a simulação de reatores reais, onde uma das células numéricas SGE constitui-se no domínio computacional SSM. Esta combinação de procedimentos representa o caminho mais fundamentado para a simulação de reatores reais, visto requerer fechamento para fase sólida apenas no nível da física mais fundamental, o da micro-escala dos escoamentos particulados.

Há, evidentemente, a necessidade do desenvolvimento ou validação de descrições de micro-escala realistas, ainda inexistentes, notoriamente para determinação do arrasto gás-sólido e para a definição de propriedades de meio contínuo para fases particuladas. Uma outra dificuldade a superar é a falta de separação de escalas característica dos escoamentos granulares (Tan e Goldhirsch, 1998). Ainda não está claro como efeitos de escalas superiores podem ser levados em conta em simulações sub-malha, já que escalas maiores que o domínio computacional interagem com todas as escalas sub-malha a serem resolvidas, e até mesmo com a micro-escala. O tratamento da falta de separação de escalas é ainda questão não resolvida na transposição dos resultados de simulação sub-malha para fechamento de simulações de grandes escalas.

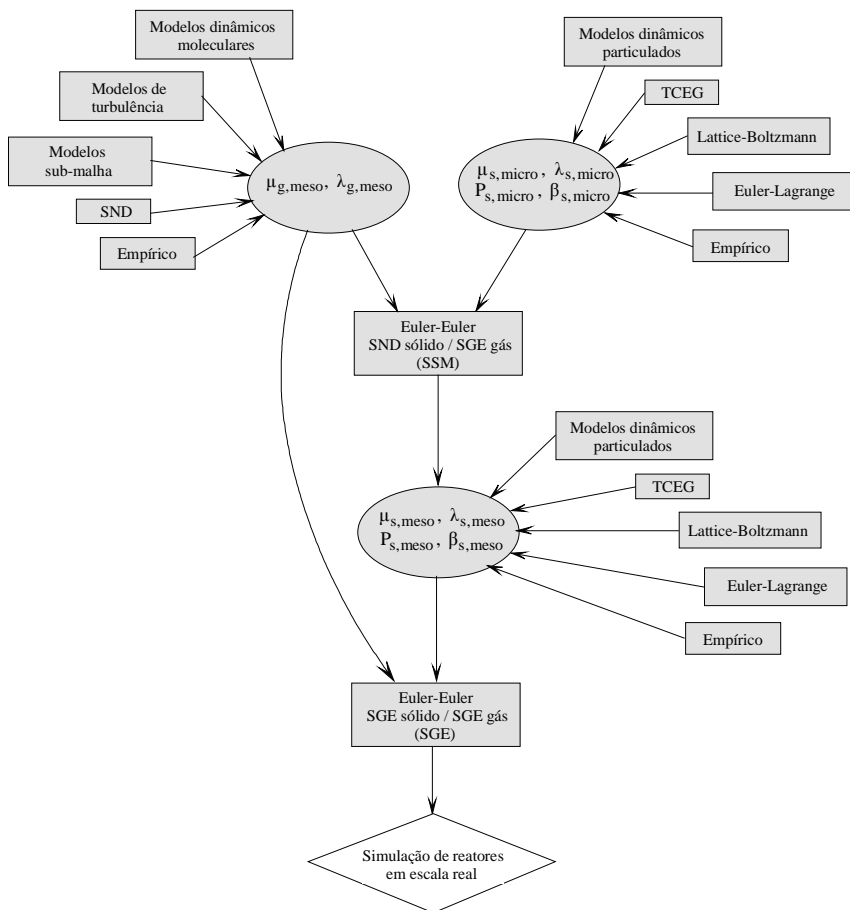
Antes de descrever formulações e modelos, apresenta-se a seguir uma breve descrição dos reatores de leito fluidizado, de sua hidrodinâmica complexa, e do estado da arte pertinente.

### ***1.3. Descrição hidrodinâmica de reatores de leito fluidizado***

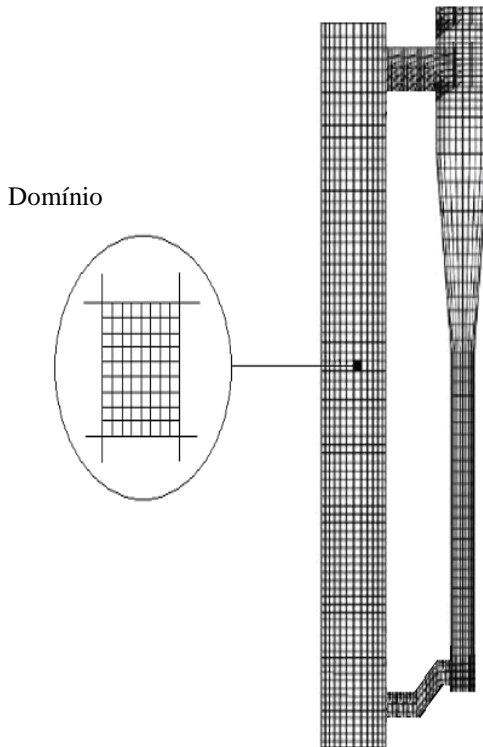
Os escoamentos nos reatores de leito fluidizado promovem misturas altamente eficientes, propiciando elevadas taxas de transferência de calor e massa, intensificando processos reativos. Há diferentes regimes hidrodinâmicos, caracterizados por diferentes padrões de escoamento.

Ishii (1975) propôs uma série de diferentes classificações de escoamentos bifásicos. Em geral, foram subdivididos em gás-sólido, gás-líquido, sólido-líquido ou de dois líquidos imiscíveis. Em relação à topologia, os escoamentos foram classificados em separados, misturados e dispersos. Neste capítulo são de interesse os escoamentos dispersos. Estes podem ser de bolhas de gás ou vapor em líquido, de gotas em gás, de partículas sólidas em líquidos, ou de partículas sólidas em gás. Aqui são de interesse os escoamentos de partículas sólidas em gás. Há vários possíveis regimes de escoamento de partículas sólidas em gás. Aqui é de maior interesse o regime de fluidização circulante.

Considere-se um leito de partículas sólidas confinado na base de um duto vertical, através do qual flui uma descarga de gás, percolando através dos espaços intersticiais entre partículas. Em baixas vazões de gás o arrasto sobre as partículas não é suficiente para vencer o efeito gravitacional, e as partículas permanecem estáticas. Essa situação é denominada leito fixo. Aumentando-se progressivamente a vazão do gás há um momento em que o crescente efeito de arrasto iguala o efeito gravitacional. Nessa situação o particulado passa a mover-se com as características de um fluido, e o leito torna-se fluidizado num estado denominado de mínima fluidização.



**Fig. 1** Níveis de modelagem *CFD* para escoamentos gás-sólido.



**Fig. 2** Domínios e malhas numéricas para SGE e SSM de uma coluna de leito fluidizado circulante.

Vazões crescentes do gás através do leito dão origem a diferentes configurações hidrodinâmicas. O gás tende a escoar de forma a minimizar perdas, i.e., atravessar a coluna particulada com o mínimo dispêndio de energia. Isso é da natureza dos escoamentos fluidos. Acréscimos de vazão de gás em relação ao estado de mínima fluidização causam pequena expansão do leito seguida do aparecimento de vazios ou bolhas de gás. Esse é o denominado regime de fluidização borbulhante. Aumentando-se ainda mais a vazão de gás as bolhas colapsam em vazios irregulares sem padrão definido, atingindo-se o denominado regime de fluidização turbulenta.

Em todas as situações anteriores, a velocidade vertical média do gás escoando em torno das partículas é inferior a sua velocidade terminal, e o particulado é retido no interior da coluna. Ao se praticar vazões de gás que imponham velocidades superiores à velocidade terminal das partículas, estas são arrastadas para fora da coluna. Esse regime de escoamento, freqüentemente caracterizado pelo surgimento de estruturas coerentes de particulado e pelo escoamento descendente de particulados nas paredes do container, é denominado fluidização rápida. Como o parti-

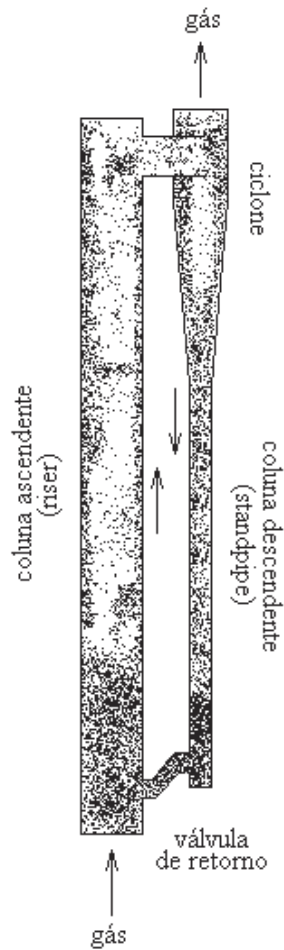
culado é expulso do container e, nas aplicações práticas, é continuamente devolvido na sua base, este regime de fluidização é também referido como de fluidização circulante. A Figura 3 ilustra a configuração de escoamento característica dos leitos fluidizados circulantes. A partir da condição de fluidização rápida, aumentos adicionais da vazão do gás conduzem aos regimes de transporte pneumático.

Os escoamentos gás-sólido em leitos fluidizados circulantes são de natureza instável e caracterizada por grande complexidade hidrodinâmica, influenciando profundamente os processos de transporte de massa e energia nos reatores. A distribuição espacial de sólido é altamente não uniforme, e há grandes velocidades de deslizamento entre gás e partículas. Diferentes fluxos de gás e partículas geram diferentes gradientes de pressão e retenção de sólido na coluna. Há grande recirculação de particulado, notadamente em estruturas coerentes e em escoamento descendente nas paredes da coluna. Os padrões de estruturas coerentes mudam consideravelmente com a escala do processo, alterando completamente as condições de transporte, e conseqüentemente a performance dos reatores.

A aplicação de leitos fluidizados a processos reativos gás-sólido requer a utilização de elevadas cargas de sólidos, elevada área de contato entre fases, mistura intensa de forma a maximizar transportes de massa e energia, e tempo de residência suficiente para que os processos reativos heterogêneos possam se desenvolver. As melhores condições de mistura, satisfazendo simultaneamente as exigências de carga, área de contato e tempo de residência em colunas de proporções viáveis, são obtidas em leitos fluidizados circulantes. Em vista disso, os reatores de leito fluidizado circulante são intensamente aplicados em processos como craqueamento catalítico de petróleo e combustão/gaseificação de combustíveis sólidos.

Como ilustrado no diagrama da Figura 3, um reator de leito fluidizado circulante é composto basicamente de uma coluna ascendente (*riser*), de um ciclone separador no topo desta coluna, de uma coluna de retorno de sólido (*standpipe*), e de uma válvula de retorno ligando a coluna de retorno à coluna ascendente. Como as reações químicas de interesse ocorrem na coluna ascendente, a maior parte dos estudos dos reatores de leito circulante concentra-se nos processos que se desenvolvem nesta parte do reator.

De acordo com as condições operacionais, os leitos fluidizados circulantes podem ser agrupados em leitos de baixa densidade e de alta densidade de particulado (na coluna ascendente). Os leitos de baixa densidade são em geral aplicados a processos envolvendo reações químicas gás-sólido (e.g. combustão, gaseificação, absorção), enquanto os leitos de alta densidade são geralmente aplicados a processos catalíticos (e.g. craqueamento) (Sun, 1996). Nos processos reativos gás-sólido, a cinética química relativamente lenta exige maiores tempos de residência do particulado sólido. Em conseqüência, aplica-se menores velocidades do gás (tipicamente 5 a 9 m/s) e/ou particulados mais grosseiros (tipicamente 200 a 1000  $\mu\text{m}$ ). Por outro lado, os processos catalíticos, caracterizados por cinéticas mais rápidas, permitem tempos de residência inferiores. Em conseqüência, aplica-se maiores velocidades do gás (tipicamente 6 a 28 m/s) e/ou particulados mais finos (tipicamente 40 a 100  $\mu\text{m}$ ).



**Fig. 3** Diagrama esquemático de um leito fluidizado circulante.

Tendo em vista as velocidades do gás e os tamanhos de particulado praticados, obtém-se taxas de circulação de sólidos tipicamente entre 10 e 100  $\text{kg/m}^2\text{s}$  para leitos de baixa densidade de sólidos, e entre 400 e 1200  $\text{kg/m}^2\text{s}$  para leitos de alta densidade (Sun, 1996). As concentrações médias de sólidos nos leitos de baixa densidade são tipicamente inferiores a 3%, enquanto nos leitos de alta densidade podem ser tão altas quanto 20% (Grace e Bi, 1997). A quantidade de produto que se deseja obter (e.g. gasolina e outros derivados no craqueamento de petróleo, calor na combustão de carvão, remoção de  $\text{SO}_2$  na absorção por calcário) pode ser estabelecida manipulando-se a seção transversal do reator. A altura da coluna está mais relacionada ao tempo de residência necessário.

Um grande desafio na busca de melhor compreensão dos processos em reatores de leito fluidizado tem sido melhorar a sua descrição hidrodinâmica. As dificulda-

des residem no caráter altamente heterogêneo e instável dos escoamentos, frequentemente caracterizados por intensas e contínuas formação, dissipação e composição de estruturas coerentes de particulados (*clusters*).

A abordagem mais simples para descrição hidrodinâmica de leitos fluidizados é a denominada fenomenológica ou mecanística, na qual padrões pré-estabelecidos de escoamento são assumidos com base em conhecimento empírico. Em leitos fluidizados borbulhantes é comum assumir-se duas fases, uma de bolhas de gás outra de emulsão gás-sólido; em leitos fluidizados circulantes pode-se definir fases com sólidos dispersos e em *clusters*, e/ou escoamentos do tipo *core-anular* (Davidson, 1961). Os modelos fenomenológicos são simplistas e capazes de considerar apenas aspectos globais dos processos. Além disso, sua grande dependência empírica torna-os específicos para cada instalação em particular.

Na tentativa de obter resultados mais detalhados e generalizados, descrições hidrodinâmicas mais elaboradas têm sido desenvolvidas onde os padrões de escoamento são preditos em vez de pré-estabelecidos. Estes procedimentos já foram brevemente descritos na Seção 1.2. Acrescenta-se, entretanto, que tradicionalmente duas das diferentes abordagens têm sido praticadas mais intensamente: Euler-Euler e Euler-Lagrange. Na abordagem Euler-Euler equações conservativas de meio contínuo são desenvolvidas tanto para fases macroscopicamente contínuas como para fases macroscopicamente dispersas ou misturas (Jackson, 1963; Murray, 1965; Pigford e Baron, 1965; Anderson e Jackson, 1967; Soo, 1967; Drew, 1971; Gidaspow, 1994). Esses modelos têm sido genericamente denominados modelos de dois fluidos. As maiores dificuldades nestas formulações relacionam-se ao estabelecimento de propriedades de meio contínuo para fases dispersas, e à descrição de fenômenos de interface entre fases.

Na abordagem Euler-Lagrange apenas fases macroscopicamente contínuas são equacionadas como meios contínuos, enquanto fases dispersas são equacionadas pela aplicação da segunda lei de Newton individualmente para cada partícula do escoamento (Crowe et al., 1977; Duckowicz, 1980; Aggarwal et al., 1983). Como na abordagem Euler-Euler, também na Euler-Lagrange há grande dificuldade de descrição de fenômenos de interface. Contudo, a maior restrição à abordagem Euler-Lagrange é que não há, na atualidade, recursos computacionais com velocidade de processamento e capacidade de armazenamento de dados suficientes que permitam simulações de leitos fluidizados reais, em vista do seu elevadíssimo número de partículas.

Sundaresan (2000) observa que os modelos Euler-Euler do contínuo, ou de dois fluidos, representam a alternativa mais prática para a simulação de escoamentos gás-sólido em leitos fluidizados. Esta é a linha de modelagem explorada neste capítulo, e cujo estado da arte é brevemente descrito a seguir.



#### ***1.4. Breve descrição de estado da arte em modelagem de dois fluidos de escoamentos gás-sólido em leitos fluidizados circulantes***

Há uma vasta literatura em modelagem de dois fluidos (Euler-Euler) aplicada aos escoamentos gás-sólido em leitos fluidizados circulantes. Revisões de estado da arte em todos os aspectos relevantes podem ser encontradas em Jackson (1963), Lun et al. (1984), Campbell (1990), Gidaspow (1994), Enwald et al. (1996), Sinclair (1997), Kuipers et al. (1997), Kadanoff (1999), Jackson (2000), Sundaresan (2000), Cabezas-Gómez (2003), Goldhirsch (2003), Curtis e van Wachem (2004), Goldhirsch et al. (2005), Georg (2005), Milioli (2006), Wang e Li (2007), van der Hoef et al. (2008), e Hrenya et al. (2008), entre muitos outros.

Há uma extensa linha de pesquisa dedicada ao estudo de escoamentos granulares independentemente de efeitos de fluidos intersticiais, caso em que o movimento do particulado deve-se unicamente a efeitos colisionais. Acredita-se que, da mesma forma que a termodinâmica molecular provê fechamento para mecânica dos fluidos convencional, uma “termodinâmica granular”, formulada em analogia, pode prover fechamento para a mecânica dos fluidos granulares. Define-se os denominados “gases granulares”, ou coleções macroscópicas de partículas sólidas que interagem por colisões inelásticas, caracterizadas por grande dissipação de energia. Nos “gases granulares” as partículas movem-se aleatoriamente e colidem entre si com grande frequência, gerando flutuações de velocidade. A energia cinética do movimento aleatório de partículas é análoga à energia cinética do movimento aleatório das moléculas de um gás. Enquanto esta última define o conceito termodinâmico de temperatura, a anterior define, em analogia, o conceito de “temperatura granular”. Também em analogia com conceitos termodinâmicos e hidrodinâmicos para gases, define-se uma “pressão granular” ou da fase sólida, e uma “viscosidade granular” ou da fase sólida que resiste ao seu cisalhamento. Seguindo a analogia, pressão e viscosidade da fase sólida podem ser relacionadas à “temperatura granular”. A “temperatura granular” pode ser determinada a partir de balanços conservativos de “energia granular” (ou energia pseudo-térmica, em analogia com energia térmica molecular). A consideração dos conceitos anteriores levou ao desenvolvimento da denominada teoria cinética dos escoamentos granulares (TCEG), formulada a partir de analogia com a teoria cinética dos gases densos (Jenkins e Savage, 1983; Lun et al., 1984). Uma descrição detalhada da teoria cinética dos escoamentos granulares pode ser encontrada em Gidaspow (1994), e excelentes revisões sobre “termodinâmica granular” podem ser encontradas em Campbell (1990), Goldhirsch (2003) e Goldhirsch et al. (2005).

Sundaresan et al. (2001) estudaram a origem e a hierarquia das instabilidades que levam à formação de meso estruturas em escoamentos gás-sólido. Observaram que em leitos fluidizados densos (borbulhantes) perturbações unidimensionais (*traveling waves*) emergem do estado de fluidização uniforme quando efeitos inerciais superam as tensões da fase sólida. As perturbações unidimensionais dão origem a perturbações bidimensionais, consideradas reminiscências de bolhas de gás.

Glasser et al. (1998) mostraram que estas perturbações também existem em leitos diluídos (circulantes). De acordo com Sundaresan et al. (2001), dois mecanismos dão origem às meso estruturas em escoamentos gás-sólido diluídos: um associado com colisões inelásticas entre partículas, e outro associado com o movimento relativo entre o gás e as partículas. Agrawal et al. (2001) observam que as estruturas coerentes surgem em consequência de instabilidades associadas ao movimento relativo entre as fases gás e sólido, e devido à dissipação da energia associada aos movimentos de flutuação das partículas causada por choques inelásticos e amortecimento viscoso. Sundaresan (2000) classifica as estruturas coerentes (*clusters*, *strands*, *streamers*) que se desenvolvem nos escoamentos gás-sólido em leitos fluidizados circulantes, de acordo com suas dimensões, em macro (ordem cm-m), meso (ordem mm-cm) e micro estruturas (ordem  $\mu\text{m}$ ). Observa que, embora as macro estruturas determinem as condições de transporte nos processos, está demonstrado que macro estruturas evoluem a partir de meso estruturas, e estas, possivelmente, evoluem de estruturas ainda menores, associadas aos padrões de escoamento ao nível de partículas individuais, evidentemente não resolvidos nas análises de dois fluidos.

Sinclair e Jackson (1989) observam que os vórtices turbulentos dispersam uniformemente as partículas mais finas que seguem o escoamento do gás, e dispersam de forma não uniforme as partículas mais grosseiras, cuja inércia torna-as capazes de irromper através destes vórtices. O efeito das partículas sobre a estrutura da turbulência do gás não é conhecida. As flutuações de velocidade do gás induzidas por flutuações de velocidade das partículas, e vice-versa, são de fato desconhecidas. Além desses efeitos, um modelo realista para escoamento gás-sólido turbulento deve considerar o arrasto entre fases em virtude da diferença entre suas velocidades médias, e os efeitos das flutuações de velocidade em cada fase, sobre o seu próprio movimento médio, caracterizando tensões aparentes. Sinclair e Jackson (1989) notam que pouco se conhece sobre o desenvolvimento de estruturas turbulentas em vista dos efeitos acima, fato que impõe considerável arbitrariedade aos modelos vigentes. Hrenya e Sinclair (1997) observam que as relações em uso para a descrição da turbulência da fase sólida são de natureza algo especulativas em vista da falta de informação a respeito desse efeito, e Hrenya et al. (2008) questionam a capacidade das equações de Navier-Stokes para descrever escoamentos granulares. A despeito deste cenário, Gidaspow (2001) observa que as equações de momentum acopladas para fases fluidas e particuladas dos modelos de dois fluidos parecem ser capazes de prever turbulência em escoamentos bifásicos.

Os escoamentos gás-sólido em leitos fluidizados podem ser caracterizados a partir do número de Stokes, definido como a razão entre os tempos de relaxação ou de resposta de partículas, e escalas de tempo da turbulência do gás. Particulados mais grosseiros e mais pesados terão maior número de Stokes; Stokes igual a zero significa que as partículas seguem o movimento do fluido, tal como traçadores; Stokes elevado significa que o movimento das partículas não é afetado pelos vórtices turbulentos do gás. Em geral, leitos fluidizados são caracterizados por

amplas distribuições granulométricas, abrangendo portanto amplas faixas de número de Stokes. Não obstante, predominam números de Stokes elevados, e a maior parte do particulado resulta pouco afetada pela turbulência do gás. O efeito contrário, contudo, é altamente significativo, e há grande efeito do movimento do particulado sobre a turbulência do gás. Este efeito tem sido estudado por diversos autores, tanto empiricamente quanto, mais recentemente, através de experimentação computacional (e.g. Chen e Wood, 1985; Kulick et al., 1994; Yamamoto et al., 2001; Fede e Simonin, 2006).

Sundaresan (2000) e Agrawal et al. (2001) observam que em escoamentos gás-sólido diluídos, as pequenas estruturas aparecem pela formação de instabilidades locais e são modificadas pelo cisalhamento de macro escala. Observam que, enquanto em escoamentos turbulentos monofásicos a viscosidade é proporcional à taxa de deformação de macro escala, nos escoamentos gás-sólido diluídos esta relação parece ser inversamente proporcional. Através de simulações de dois fluidos, com particulado de  $75 \mu\text{m}$  e  $1500 \text{ kg/m}^3$ , Agrawal et al. (2001) demonstraram que a turbulência da fase gás tem pouco efeito no escoamento gás-sólido médio. Como viscosidade efetiva do gás consideraram a sua viscosidade molecular, a viscosidade determinada através do modelo de Smagorinsky, e um valor uma ordem superior a esta. Não observaram variações significativas de resultados médios ao substituir a viscosidade molecular pela de Smagorinsky e, ao assumir viscosidade uma ordem superior a de Smagorinsky, observaram apenas pequenas variações.

Está suficientemente claro que a turbulência da fase gás não desempenha papel relevante na definição da topologia de escoamentos gás-sólido sob elevados números de Stokes. Contudo, modelagem rigorosa da turbulência da fase gás será necessária quando forem considerados processos reativos, em vista do efeito altamente significativo da turbulência sobre taxas de reação. Nestes casos, tanto a SGE quanto a SSM de escoamentos gás-sólido requerem fechamento para tensões viscosas sub-malha da fase gás. O procedimento mais comum é o uso de formulações aplicando o modelo algébrico de viscosidade turbulenta de Smagorinsky (Smagorinsky, 1963). Variações deste modelo, denominadas dinâmicas, também tem sido aplicadas (Germano et al., 1991; Piomelli e Liu, 1995; Ghosal et al., 1995; Meneveau et al., 1996; Porte-Agel et al., 2000), as quais propõem diferentes procedimentos para a determinação da constante de Smagorinsky. Uma outra classe de modelos para determinação de tensões viscosas sub-malha baseia-se no conceito de energia cinética turbulenta sub-malha (Kim e Menon, 1999). Como estes modelos incluem a resolução de uma equação de transporte sub-malha para a energia cinética turbulenta, argumenta-se que removem a restrição dos modelos algébricos de que a energia cinética turbulenta é localmente gerada e dissipada. Uma terceira classe de modelos para tensões viscosas sub-malha são os de similaridade de escala, onde as velocidades não-filtradas do tensor sub-malha são aproximadas pelas respectivas componentes filtradas (Bardina, 1983). Estes modelos, contudo, causam instabilidades nos procedimentos numéricos de solução devido à dissipação insuficiente (Liu et al., 1994). Uma quarta categoria de modelos sub-malha para tensões viscosas baseia-se na obtenção do campo de velocidades sub-

malha através de SND (Domaradski e Adams, 2002), ou pela aplicação de técnicas de deconvolução (Adams e Stolz, 2001). Sagaut (2001) e Meneveau e Katz (2000) apresentam revisões detalhadas relativas aos diferentes modelos para tratamento do tensor viscoso sub-malha de fases contínuas.

Ao contrário do comportamento sub-malha da fase gás, para o qual há diferentes alternativas de modelagem, o comportamento sub-malha de fases particuladas permanece desconhecido. Alguns pesquisadores têm concentrado esforços na busca de correlações sub-malha para fases particuladas através de simulação computacional com modelagem de dois fluidos (Agrawal et al., 2001, Zhang e VanderHeyden, 2001, Andrews IV et al., 2005, Igci et al., 2008, Milioli e Milioli, 2009). Correlações têm sido geradas e utilizadas em simulações SGE. Não obstante, cumpre mencionar uma grande dificuldade pendente dificultando imensamente a obtenção de correlações sub-malha realistas via simulações sub-malha. Esta refere-se à falta de separação de escalas que caracteriza os escoamentos granulares. A separação de escalas frequentemente assumida em escoamentos monofásicos turbulentos inexistente em escoamentos granulares. Nos escoamentos monofásicos turbulentos os vórtices de macro-escala são compostos por cascatas de vórtices progressivamente menores, descendo até à micro-escala de Kolmogorov. Nesta cadeia de vórtices, os maiores dissipam energia cinética para os menores, e estes para aqueles ainda menores, e assim por diante até a micro-escala de Kolmogorov, onde a energia cinética é finalmente transmitida para as moléculas manifestando-se assim como energia interna. Neste caso a hidrodinâmica média e as energias cinéticas sub-malha, devidamente recuperadas, permitem resolver corretamente as macro-escalas em SGE. No caso dos escoamentos granulares, todas as escalas espaciais do escoamento ocorrem separadamente e simultaneamente, e afetam-se mutuamente, e as escalas temporais são da mesma ordem de magnitude em todas as escalas espaciais (Tan e Goldhirsch, 1998). Aqui não há separação de escalas em cascatas progressivas. Como observado por van der Hoef et al. (2006), as maiores estruturas nos escoamentos granulares podem ser da ordem do metro, e ainda assim são diretamente influenciadas por interações partícula-partícula e gás-partícula, que ocorrem na escala do milímetro ou do micron. Da mesma forma que no caso monofásico turbulento, pode-se recuperar efeitos sub-malha, mas ainda não está claro como se poderia levar em consideração os efeitos da macro-escala sobre a estrutura sub-malha. Ocorre que a macro-escala afeta diretamente toda e qualquer escala resolvida na sub-malha, descendo até à micro-escala, enquanto nos escoamentos turbulentos pode-se assumir que apenas a maior das escalas sub-malha interaja com a macro-escala. Deve-se notar que a dificuldade relacionada à falta de separação de escalas é comum a qualquer linha de modelagem computacionalmente viável que se pratique na busca de informação sub-malha, seja esta dinâmica molecular ou granular, Euler-Euler, Euler-Lagrange, Lattice-Boltzmann, ou qualquer outro procedimento. Nesta questão necessita-se de novas idéias, seja qual for a linha de modelagem a ser praticada.

Apesar das dificuldades, Sundaresan (2000) enfatiza que modelos de dois fluidos de grandes escalas, incluindo correlações sub-malha realistas, acoplados a

descrições reativas adequadas, representam a mais promissora, próxima geração de modelos para reatores multifásicos. Um grande desafio à frente é, então, a obtenção de correlações sub-malha realistas para fases particuladas. A partir de seus resultados de simulação com modelo de dois fluidos em malha refinada, Agrawal et al. (2001) propuseram uma primeira aproximação de modelo sub-malha para arrasto que, no entanto, é reconhecida como específica, crua e apenas plausível. Suas simulações foram realizadas em domínios 2D reduzidos de 5x20 cm, sob condições de contorno periódicas, em malhas numéricas de até 1x1 mm. A partir dos resultados de simulação realizaram análises de viscosidade dinâmica e pressão de fase sólido, e arrasto de meso-escala, buscando formular relações de fechamento para simulações de grandes escalas. Milioli et al. (2007a,b) realizaram estudos hidrodinâmicos semelhantes aos de Agrawal et al. (2001), porém para particulados mais grosseiros e mais pesados, tendo obtido resultados semelhantes. Enquanto Agrawal et al. (2001) consideraram situação típica de reatores de craqueamento catalítico (particulado de 75  $\mu\text{m}$  e 1500  $\text{kg}/\text{m}^3$ ), Milioli et al. (2007a,b) consideraram situação típica de reatores para combustão/gaseificação de carvão (particulado de 520  $\mu\text{m}$  e 2620  $\text{kg}/\text{m}^3$ ).

Andrews IV et al. (2005) realizaram simulação em malha refinada semelhante à de Agrawal et al. (2001). Simularam em domínio de 2x8 cm, também sob condições de contorno periódicas, em malhas numéricas de até 0,625x0,625 mm. A partir de seus resultados propuseram relações de fechamento sub-malha para arrasto, viscosidade e pressão de fase sólido. Como a proposição de Agrawal et al. (2001), as relações de Andrews IV et al. (2005) são também específicas, válidas apenas para o caso considerado. Partindo dos desenvolvimentos sub-malha de Agrawal et al. (2001) e Andrews IV et al. (2005), e sob as mesmas hipóteses, Igci et al. (2008) realizaram novas simulações para verificar se o tamanho filtro sub-malha teria efeito sobre os resultados médios de meso-escala. Consideraram, para o mesmo domínio, malhas uniformes crescentemente refinadas de 10x10, 5x5, 2,5x2,5 e 1,25x1,25 mm, e observaram estruturas de *clusters* crescentemente refinadas. Aplicando diferentes tamanhos de filtro sub-malha sobre as soluções, mostraram que os resultados médios de meso-escala dependem do tamanho do filtro sub-malha. Isto significa que correlações sub-malha obtidas de simulações sub-malha devem ser geradas para cada tamanho de célula numérica presente em simulações de grandes escalas. Note-se que no trabalho de Igci et al. (2008) a malha mais refinada considerada, de 1,25x1,25 mm, situa-se na faixa de independência de malha estabelecida por Agrawal et al. (2001) (cujos resultados em malhas de 2x2 e 1x1 mm geraram estruturas de *clusters* igualmente refinadas).

Os estudos de Agrawal et al. (2001), Andrews IV et al. (2005) e Igci et al. (2008) buscam formular correlações sub-malha para parâmetros como pressão e viscosidade de fase sólido, e função de arrasto entre fases. Tais correlações são também referidas como de meso-escala, já que os domínios computacionais e os refinamentos de malha numérica considerados permitem a captura da meso-escala dos escoamentos gás-sólido. Agrawal et al. (2001) caracteriza a meso-escala do escoamento como aquela abrangendo estruturas coerentes com dimensões entre

cerca de 10 e 100 vezes o tamanho de partícula. Domínios com dimensões inferiores a esta faixa conteriam a micro-escala do escoamento livre de estruturas coerentes.

A determinação de parâmetros de meso-escala para fases particuladas via simulação numérica sustenta-se na idéia básica de gerar soluções em malhas suficientemente refinadas. Nestas, todas as estruturas coerentes do escoamento seriam capturadas com precisão, caracterizando simulações numéricas diretas. Considera-se domínios reduzidos, extraídos do escoamento livre no interior da coluna, e aplica-se condições de contorno periódicas, com objetivo de simular a sub-malha de um escoamento rápido, típico de *risers*. Ao se aplicar condições de contorno periódicas exclui-se condições de entrada, e o escoamento perde seu *driving-force*. Isso é corrigido, usualmente, pela imposição de gradientes extra de pressão na direção do escoamento. Agrawal et al. (2001), Andrews IV et al. (2005) e Igci et al. (2008) aplicam um gradiente vertical extra de pressão na fase gás escolhido para compensar exatamente a gravidade atuando na suspensão. Tal hipótese é trazida de estudos fundamentais de instabilidades em escoamentos granulares devido a colisões inelásticas entre partículas, que levam à formação de *clusters* (Goldhirsch et al., 1993, Tan e Goldhirsch, 1997). Embora estes estudos sejam válidos para regimes quase estáticos, onde o particulado arranja-se em suspensões de baixas velocidades, os autores sugerem que o mecanismo de formação de *clusters* que prevalece também seja relevante para escoamentos gás-sólido rápidos (Tan e Goldhirsch, 1997). Esta proposição, seguida por Agrawal et al. (2001), Andrews IV et al. (2005) e Igci et al. (2008), foi questionada por Milioli e Milioli (2009). Estes autores realizaram simulações sub-malha semelhantes às anteriores, em domínio 2x2x8 cm com malhas numéricas de 1x1x1 mm. Entretanto, diferentemente dos trabalhos prévios, aplicaram gradiente extra de pressão na fase gás em excesso em relação aquele necessário para compensar a gravidade sobre a suspensão. Obtiveram, em consequência, um escoamento acelerado, percorrendo toda a faixa de velocidades de gás típicas de *risers* de leitos fluidizados circulantes. Mostraram que os resultados médios de meso-escala variam significativamente com a crescente velocidade do gás, concluindo que suspensões a baixas velocidades não descrevem corretamente o comportamento sub-malha de escoamentos rápidos.

Agrawal et al. (2001) demonstram, como observado por van der Hoef et al. (2006), que refinamentos de malha na ordem de 10 vezes o tamanho do particulado aproximadamente garantem independência de malha para o caso considerado. Isto parece validar a aplicação do atual modelo de dois fluidos para geração de correlações sub-malha a serem utilizadas em SGE. van der Hoef et al. (2006) observam, contudo, que esta não é uma aproximação rigorosa em vista de possíveis efeitos causados pelas condições de contorno periódicas que são comumente empregadas. A despeito desta consideração, a literatura mostra que os efeitos das condições de contorno periódicas podem ser minimizados ou mesmo eliminados. Agrawal et al. (2001) mostram que contornos verticais com condições de contorno de livre deslizamento, deslizamento parcial ou periódicas, produzem a mesma topologia de escoamento.

A despeito das dificuldades, tais como a falta de separação de escalas, a literatura apresenta algumas formulações e simulações SGE aplicando fechamento de meso-escala obtido de simulações sub-malha com modelos de dois fluidos. Zhang e VanderHeyden (2001, 2002) produziram dados de meso-escala de arrasto e massa virtual a partir de resultados de simulação em *riser* de 0,2x0,2x2 m com malha numérica de 6,45x6,45x13,33 mm. Embora não tenham realizado SGE, apresentaram a formulação de grandes escalas incluindo suas relações de fechamento de meso-escala. Comparando-se os estudos de meso-escala de Zhang e VanderHyden (2001, 2002), com os de Agrawal et al. (2001), já mencionados, deve-se notar a maior representatividade dos dados sub-malha destes últimos, posto que foram obtidos em malhas numéricas bem mais refinadas, inclusive com indicação de independência de malha. Andrews VI et al. (2005) realizaram simulações sub-malha em domínio de 2x8 cm com malha numérica de 0,625x0,625 mm, e propuseram correlações para parâmetros de meso-escala em função da fração volumétrica média de sólido e da taxa de deformação de macro-escala da fase sólida (imposta nos contornos verticais). As correlações de meso-escala foram posteriormente utilizadas como relações de fechamento em simulação SGE de um *riser* 2D de 0,76x3 m, em malha numérica cujas células tinham o exato tamanho do domínio aplicado nas simulações sub-malha, i.e. 2x8 cm. Os resultados SGE de Andrews IV et al. (2005) foram tratados como primeira aproximação, inadequados para comparação com dados experimentais. Benyahia (2009) realizou simulação SGE de um *riser* com 0,2 m de diâmetro e 14,2 m de altura. Aplicou diferentes relações de fechamento para arrasto incluindo correlações geradas a partir dos dados de simulação sub-malha de Igci et al. (2008). Os resultados obtidos permitiram observar que as correlações originadas de simulações sub-malha são tão corretas quanto outras correlações convencionais, todas elas, no entanto, produzindo resultados bastante desviados dos dados experimentais.

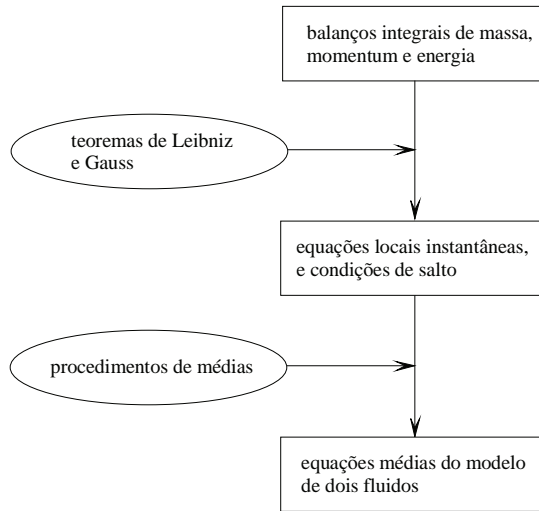
As simulações com modelagem de dois fluidos antes citadas, e outras tantas descritas na literatura, realizadas sob diversas condições de fechamento, de contorno, e numéricas, demonstram a viabilidade de SGE para simulações de reatores de leito fluidizado. Entretanto, quanto à acuracidade das simulações pouco se tem demonstrado. Grace e Taghipour (2004) observam que a validação de simulações de escoamentos em leitos fluidizados tem sido invariavelmente abordada de forma *ad-hoc* e principalmente qualitativa. Milioli e Milioli (2010) compararam resultados de diferentes simulações SGE de dois fluidos realizadas para a mesma situação experimental. Os resultados de Milioli e Milioli (2010), Tsuo e Gidaspow (1990), Cabezas-Gómez e Milioli (2003), e Georg (2005), são comparados entre si e com os dados empíricos de Luo (1987). Trata-se do escoamento num *riser* de 5,56 m de altura e 7,62 cm de diâmetro, com particulado de 520  $\mu\text{m}$  e taxa de circulação de sólidos de 24,9  $\text{kg/m}^2\text{s}$ . Grandes desvios foram observados entre as predições das várias simulações, e entre estas e os dados empíricos. Os autores sugerem que isto decorre da inadequação do modelo de dois fluidos utilizado, que precisa ser aperfeiçoado notoriamente em relação aos modelos e dados de fechamento.

Em vista das deficiências das correntes formulações hidrodinâmicas de dois fluidos, poucas tem sido as tentativas de acrescentá-la à simulação de processos reativos. A título de ilustração, cita-se as simulações de Therdthianwong (1994) e de Milioli (2006) em colunas de absorção de  $\text{SO}_2$  por calcário. Therdthianwong (1994) realizou simulação 2D em *riser* com 3 m de diâmetro e 15 m de altura, aplicando malha numérica de 300x536 mm; Milioli (2006) realizou simulação 3D em *riser* com 7,62 cm de diâmetro e 5,56 m de altura, aplicando malha numérica tetraédrica não-estruturada com células de aresta média de 9,4 mm. Em nenhum dos casos se utilizou modelagem para a turbulência da fase gás. Em ambos os casos, os autores obtiveram perfis temporais médios de concentração de  $\text{SO}_2$  qualitativamente corretos, porém não realizaram comparações com dados experimentais.

## **2. Formulação básica do modelo de dois fluidos para escoamentos gás-sólido**

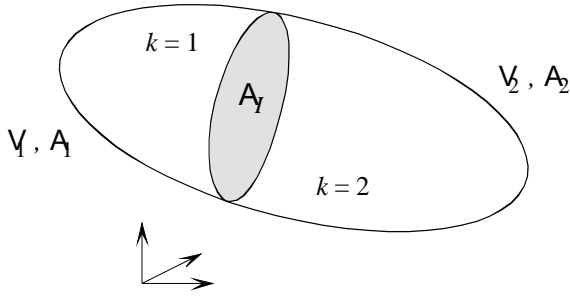
Os modelos Euler-Euler ou de dois fluidos para escoamentos multifásicos, incluindo escoamentos gás-sólido, baseiam-se em equações conservativas para as diferentes fases, que são todas tratadas como meios contínuos inter-penetrantes. Na sua obtenção aplica-se, inicialmente, balanços conservativos integrais sobre volumes de controle incluindo todas as fases. Os teoremas de Leibniz e Gauss são aplicados aos balanços integrais dando origem a equações conservativas locais instantâneas para as diferentes fases, e a condições de salto descrevendo interações de interface entre fases. Então, procedimentos de médias são aplicados para obtenção de equações médias. Este procedimento é ilustrado na Figura 4.





**Fig. 4** Procedimento para obtenção das equações conservativas médias do modelo de dois fluidos.

Apresenta-se a seguir o formalismo de dedução das equações médias de dois fluidos, seguindo as descrições de Delhayé (1974), Ishii (1975), Delhayé (1981), Bouré e Delhayé (1982), Drew (1983) e Enwald et al. (1996). Neste capítulo será dado enfoque ao equacionamento hidrodinâmico reativo, com formulações para conservação de massa, de espécie química e de momentum. Formulações mais abrangentes podem ser encontradas nas referências anteriores. Considere-se um volume de controle fixo em relação a um sistema de coordenadas, posicionado na interface entre duas fases imiscíveis  $k=1$  e  $k=2$ , através do qual fluem simultaneamente, como ilustrado na Figura 5, onde  $V_1, V_2$  e  $A_1, A_2$  são os volumes ocupados pelas fases e as áreas de interface entre estas e o meio, e  $A_I$  é a área da interface entre as fases. Seja  $\rho\psi$  uma grandeza escalar transportada no escoamento de um fluido de densidade  $\rho$ . O parâmetro  $\psi$  define o escalar transportado: massa para  $\psi=1$ , massa de espécie química para  $\psi=Y_i$  (fração mássica da espécie química  $i$ ), e momentum para  $\psi=u, v, w$  (os três componentes do vetor velocidade no sistema Cartesiano de coordenadas nas direções  $x, y, z$ , respectivamente, sendo  $y$  a direção gravitacional).



**Fig. 5** Volume de controle fixo em relação a um sistema de coordenadas, contendo duas fases imiscíveis com interface móvel.

Um balanço integral conservativo para  $\rho\psi$  no escoamento, sobre todo o volume de controle, resulta:

$$\sum_{k=1}^2 \left( \frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho_k \psi_k dV \right) = \sum_{k=1}^2 \left( \int_{V_k} \rho_k \Phi_k dV \right) + \sum_{k=1}^2 \left( \int_{A_k} \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{n}_k dA \right) - \sum_{k=1}^2 \left( \int_{A_k} \rho_k \psi_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k dA \right) \quad (1)$$

onde:

$\frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho_k \psi_k dV$  - Taxa de variação de  $\rho_k \psi_k$  no volume de controle, na fase  $k$ .

$\int_{V_k} \rho_k \Phi_k dV$  - Geração de  $\rho_k \psi_k$  no volume de controle, na fase  $k$ .  $\Phi_k = 0$  para  $\psi_k = 1$  e  $\psi_k = u_k, w_k$ ;  $\Phi_k = g$  para  $\psi_k = v_k$ ;  $\Phi_k = \sum_j R_{i,j,k}$  para  $\psi_k = Y_{i,k}$  ( $R_{i,j,k}$  é a taxa de produção/consumo da espécie química  $i$  através das reações químicas homogêneas  $j$  na fase  $k$ , no volume de controle).

$\int_{A_k} \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{n}_k dA$  - Troca de  $\rho_k \psi_k$  com o meio por difusão através das superfícies do volume de controle.  $\mathbf{n}_k$  é o vetor unitário normal à superfície do volume de controle ocupado pela fase  $k$ , apontando para fora do volume de controle.

$\mathbf{J}_k$  é o fluxo difusivo de  $\rho_k \psi_k$  através das superfícies de controle.  $\mathbf{J}_k = 0$  para  $\psi_k = 1$ ;  $\mathbf{J}_k = \mathbf{D}_{i,k}$  (lei de difusão mássica, e.g. lei de Fick) para  $\psi_k = Y_{i,k}$ ;  $\mathbf{J}_k = P_k \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_k$  (a pressão mais o tensor das tensões viscosas) para  $\psi_k = u_k, v_k, w_k$ .

$$\int_{A_k} \rho_k \psi_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k dA$$

Troca de  $\rho_k \psi_k$  com o meio por convecção através das superfícies do volume de controle.  $\mathbf{u}_k$  é a velocidade da fase  $k$ .

Observe-se que a equação de balanço não inclui termo devido à tensão superficial na interface, já que em escoamentos gás-sólido este efeito é desprezível; não inclui um termo de geração na interface, relevante apenas para balanços de entropia, já que o presente interesse refere-se apenas a conservações de massa, espécies químicas e momentum; não inclui também um termo de troca de  $\rho\psi$  através da interface, já que as quantidades transportadas de uma fase para a outra e vice-versa são iguais e opostas, e se cancelam.

Aplique-se agora o teorema ou regra de Leibniz ao lado esquerdo da equação (1), e o teorema de Gauss aos seus termos convectivo e difusivo. O teorema de Leibniz estabelece que a taxa de variação da integral volumétrica de uma quantidade expressa por uma função espaço-temporal  $f$  pode ser expressa como a soma da integral volumétrica da sua taxa de variação mais a integral superficial da sua remoção/inserção no volume devido ao movimento de fronteira, ou seja:

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_A f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2)$$

Notando-se que no volume de controle em questão (Figura 5) a interface move-se à velocidade  $\mathbf{u}_I$ , a aplicação do teorema de Leibniz ao lado esquerdo da equação (1), para cada uma das fases, resulta:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho_k \psi_k dV = \int_{V_k} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \psi_k) dV + \int_{A_k} \rho_k \psi_k \mathbf{u}_I \cdot \mathbf{n}_k dA \quad (3)$$

Aplique-se agora o teorema de Gauss aos termos convectivo e difusivo da equação (1). O teorema de Gauss para funções vetoriais estabelece que a integral volumétrica, sobre um volume de controle com fronteiras fixas ou móveis, da variação espacial de uma quantidade transportada descrita por uma função vetorial  $\mathbf{f}$ , é igual a integral superficial da sua remoção/inserção através das superfícies de controle, ou seja:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \int_A \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (4)$$

A aplicação do teorema de Gauss aos termos convectivo e difusivo da equação (1) resulta, respectivamente:

$$\int_{V_k} \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{u}_k) \, dV = \int_{A_k} \rho_k \psi_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \, dA + \int_{A_f} \rho_k \psi_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \, dA \quad (5)$$

$$\int_{V_k} \nabla \cdot \mathbf{J}_k \, dV = \int_{A_k} \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{n}_k \, dA + \int_{A_f} \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{n}_k \, dA \quad (6)$$

Substituindo as equações (3), (5) e (6) na equação (1), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left[ \int_{V_k} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \psi_k) + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot \mathbf{J}_k - \rho_k \Phi_k \right) dV \right] \\ & - \int_{A_f} \left[ \sum_{k=1}^2 (\rho_k \psi_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_I) \cdot \mathbf{n}_k + \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{n}_k) \right] dA = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

A equação (7) deve ser satisfeita para quaisquer  $V_k$  e  $A_f$ , sendo estes independentes entre si. A única forma de satisfazer a esta condição é fazendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \psi_k) + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot \mathbf{J}_k - \rho_k \Phi_k = 0 \quad (8)$$

e

$$\sum_{k=1}^2 (\rho_k \psi_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_I) \cdot \mathbf{n}_k + \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{n}_k) = 0 \quad (9)$$

A equação (8) é a equação conservativa local instantânea para a fase  $k$ , e a equação (9) é a condição de salto local instantânea.

A obtenção de equações conservativas em fluidos baseia-se nas hipóteses fundamentais de meio contínuo e equilíbrio termodinâmico. Em vista da hipótese de meio contínuo, equações conservativas como a equação (8) não podem reconhecer diferentes fases, e não há como levar em conta descontinuidades de interface. Evidentemente, efeitos de interface podem ser considerados através de condições de contorno. Ocorre que os contornos entre fases em escoamentos multifásicos dispersos como o gás-sólido são definidos em torno de elevadíssimos números de partículas, e são altamente dinâmicos e caóticos. Devido a isso, formulações locais instantâneas tornam-se inaplicáveis. Os procedimentos de médias são introduzidos para contornar esta dificuldade, provendo a necessária composição de equações locais instantâneas com condições de salto. Destes procedimentos resulta que os efeitos de muitas interfaces entre fases contínuas são tratados em média, como um efeito de campo descrevendo a ação de uma fase sobre outras.

Diferentes procedimentos de médias podem ser aplicados: médias volumétricas, médias temporais e médias estatísticas (*ensemble averaging*). Frequentemente assume-se equivalência entre os três procedimentos (hipótese da ergodicidade), e as equações médias finais independem do procedimento de médias aplicado. Seja qual for o procedimento de médias aplicado, são geradas equações conservativas médias que são matematicamente similares às equações locais instantâneas, exceto pela presença de termos de campo levando em conta interações entre fases.

Os operadores de médias volumétricas, temporais e estatísticas são, respectivamente:

$$\langle \dots \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V (\dots) dV \quad (10)$$

$$\langle \dots \rangle_t = \frac{1}{t} \int_t (\dots) dt \quad (11)$$

$$\langle \dots \rangle_e = \frac{1}{P} \int_{\varepsilon} (\dots) dP \quad (12)$$

Na equação (12)  $P$  representa a probabilidade de ocorrência de um dado evento, e  $\varepsilon$  representa todas as suas possibilidades. Seja qual for o procedimento de médias adotado, assume-se que satisfaça às seguintes condições:

$$\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle \quad (13.1)$$

$$\langle \langle f \rangle g \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle \quad (13.2)$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle \quad (13.3)$$

$$\langle \nabla f \rangle = \nabla \langle f \rangle \quad (13.4)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{f} \rangle \quad (13.5)$$

Como primeiro passo para a obtenção das equações médias define-se a função escalar indicadora de fase  $X_k(x, y, z, t)$ , dada por:

$$X_k(x, y, z, t) = \begin{cases} 1 & \text{para } (x, y, z) \text{ dentro da fase } k \\ 0 & \text{para } (x, y, z) \text{ fora da fase } k \end{cases} \quad (14)$$

Desta forma, o valor médio de  $X_k(x, y, z, t)$  corresponde à fração volumétrica da fase  $k$  no volume considerado, ou seja:

$$\alpha_k = \langle X_k \rangle \quad (15)$$

Note-se ainda que:

$$\sum_{k=1}^2 \alpha_k = 1 \quad (16)$$

Utilizando as equações (13.1, 13.2, 13.3, 13.4 e 13.5) e a regra da cadeia, pode-se mostrar que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle X_k f_k \rangle = \left\langle X_k \frac{\partial f_k}{\partial t} \right\rangle + \left\langle f_k \frac{\partial X_k}{\partial t} \right\rangle \quad (17.1)$$

$$\langle \nabla X_k f_k \rangle = \langle X_k \nabla f_k \rangle + \langle f_k \nabla X_k \rangle \quad (17.2)$$

$$\nabla \cdot \langle X_k \mathbf{f} \rangle = \langle X_k \nabla \cdot \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{f} \cdot \nabla X_k \rangle \quad (17.3)$$

Pode-se ainda mostrar que (Drew, 1983):

$$\frac{\partial}{\partial t} (X_k) + \mathbf{u}_I \cdot \nabla X_k = 0 \quad (18)$$

Deve-se também notar que:

$$\nabla X_k = \mathbf{n}_k \frac{\partial}{\partial n} (X_k) \quad (19)$$

O próximo passo na obtenção das equações médias consiste em multiplicar a equação local instantânea, equação (8), pela função indicadora de fase  $X_k$ , e aplicar um dos operadores de médias das equações (10) a (12). Então, com auxílio das equações (17.1, 17.2 e 17.3), (18) e (19), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle X_k \rho_k \psi_k \rangle + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k \psi_k \mathbf{u}_k \rangle + \nabla \cdot \langle X_k \mathbf{J}_k \rangle - \langle X_k \rho_k \Phi_k \rangle = \\ \left\langle (\rho_k \psi_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_I) \cdot \mathbf{n}_k + \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{n}_k) \frac{\partial}{\partial n} (X_k) \right\rangle \end{aligned} \quad (20)$$

O termo do lado direito desta equação representa transferências de  $\rho\psi$  na interface entre fases, e é geralmente modelado através de correlações empíricas. Este termo será aqui genericamente denominado  $M_{kl}$ . Notando-se também que  $\alpha_k = \langle X_k \rangle$ , obtém-se a equação média do modelo de dois fluidos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha_k \rho_k \psi_k \rangle + \nabla \cdot \langle \alpha_k \rho_k \psi_k \mathbf{u}_k \rangle = \\ - \nabla \cdot \langle \alpha_k \mathbf{J}_k \rangle + \langle \alpha_k \rho_k \Phi_k \rangle + \langle M_{kl} \rangle \end{aligned} \quad (21)$$

Uma equação média pode também ser obtida para a condição de salto, multiplicando a equação (9) por  $\frac{\partial}{\partial n}(X_k)$  e aplicando um dos operadores de média. Obtém-se:

$$\left\langle \sum_{k=1}^2 \left[ (\rho_k \psi_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_I) \cdot \mathbf{n}_k + \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{n}_k) \frac{\partial}{\partial n}(X_k) \right] \right\rangle = 0 \quad (22)$$

ou

$$\left\langle \sum_{k=1}^2 M_{kI} \right\rangle = 0 \quad (23)$$

Note-se que para  $\psi_k = 1$ ,  $M_{kI} = \sum_{i,j} r_{i,j,kI}$  (taxa de introdução/remoção de massa da espécie química  $i$  na interface da fase  $k$  devido a reações químicas heterogêneas  $j$ , no volume de controle); para  $\psi_k = Y_{i,k}$ ,  $M_{kI} = \sum_j r_{i,j,kI}$  (taxa de introdução/remoção de massa da espécies químicas  $i$  na interface da fase  $k$  devido a reações químicas heterogêneas  $j$ , no volume de controle); para  $\psi_k = u_k, v_k, w_k$ ,  $M_{kI}$  é a composição de forças (devidas a trocas de massa entre fases, arrasto, sustentação, massa virtual, etc.) atuando na interface entre gás e sólido, nas direções  $x, y, z$ , respectivamente.

Apresenta-se a seguir, de forma explícita, as equações do modelo de dois fluidos para conservação de massa, de espécie química e de momentum, para fases gás e sólido. Por questões de simplificação remove-se o símbolo  $\langle \dots \rangle$  dos parâmetros médios. Deve-se manter em mente, contudo, que todos os parâmetros nas equações são médios (volumétricos, temporais ou estatísticos). As equações conservativas resultam:

### Conservação de massa

$$(\psi = 1; \mathbf{J}_k = 0; \Phi_k = 0; M_{kI} = \sum_{i,j} r_{i,j,kI})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g) = \sum_{i,j} r_{i,j,gI} \quad (24)$$



$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s) = \sum_{i,j} r_{i,j,sI} \quad (25)$$

Conservação de massa da espécie química  $i$

$$(\psi_k = Y_{i,k}; \mathbf{J}_k = \mathbf{D}_{i,k}; \Phi_k = \sum_j R_{i,j,k}; M_{kI} = \sum_j r_{i,j,kI}; R_{i,j,k} = r_{i,j,k} / \alpha_k \rho_k)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g Y_{i,g}) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g Y_{i,g} \mathbf{u}_g) = \\ -\nabla \cdot (\alpha_g \mathbf{D}_{i,g}) + \sum_j (r_{i,j,g} + r_{i,j,gI}) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s Y_{i,s}) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s Y_{i,s} \mathbf{u}_s) = \\ -\nabla \cdot (\alpha_s \mathbf{D}_{i,s}) + \sum_j (r_{i,j,s} + r_{i,j,sI}) \end{aligned} \quad (27)$$

Conservação de momentum

$$(\psi_k = u_k, v_k, w_k; \Phi_k = 0 \text{ para } \psi_k = u_k, w_k; \Phi_k = g \text{ para } \psi_k = v_k; \mathbf{J}_k = P_k \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_k)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g) = \\ -\nabla \cdot (\alpha_g (P_g \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_g)) + \alpha_g \rho_g \mathbf{g} + \mathbf{M}_{gI} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s) = \\ -\nabla \cdot \alpha_s (P_s \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_s) + \alpha_s \rho_s \mathbf{g} + \mathbf{M}_{sI} \end{aligned} \quad (29)$$

As forças de interface nas equações de momentum são geralmente descritas como a composição de termos devidos a colisões entre partículas, arrasto entre fases e forças devidas a trocas de massa entre fases (forças de sustentação e massa virtual, entre outras, são geralmente desprezadas como de ordem inferior). A pressão de fase sólida é geralmente considerada igual à pressão do gás acrescida de termos devidos a colisões entre partículas e flutuações de velocidade das partículas, sendo este último desprezado como de ordem inferior. Com estas considerações, as equações de momentum tornam-se (Ishii, 1975):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g) = \\ -\alpha_g \nabla P_g + \nabla \cdot (\alpha_g \boldsymbol{\tau}_g) + \alpha_g \rho_g \mathbf{g} + \mathbf{M}_{gI} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s) = \\ -\alpha_s (\nabla P_g + \nabla P_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \boldsymbol{\tau}_s) + \alpha_s \rho_s \mathbf{g} + \mathbf{M}_{sI} \end{aligned} \quad (31)$$

onde  $\mathbf{M}_{sI}$  representa as forças de interface excluindo o componente colisional.

Para completar os modelos de dois fluidos, leis de fechamento são necessárias para lidar com parâmetros e coeficientes presentes nas equações conservativas médias. Além disso, deve-se especificar condições iniciais e de contorno. Estes aspectos são dependentes do tipo de simulação, e são tratados nas próximas seções, onde o modelo de dois fluidos é apresentado em formato apropriado para simulações sub-malha (SSM) e para simulações de grandes escalas (SGE).

### 3. Simulações de grandes escalas (SGE) e sub-malha (SSM)

A Figura 2 ilustra uma malha numérica grosseira aplicada em simulações de grandes escalas (SGE), e respectiva malha refinada aplicada em simulações sub-malha (SSM). SGE captura as macro-escalas dentro do domínio total, e requer fechamento de meso-escala. Para que todas as escalas filtradas pela malha SGE sejam capturadas, como desejado, a SSM deve ser também simulação numérica direta (SND). Para tal, o refinamento sub-malha deve ser suficiente de modo que todas as escalas do escoamento sejam capturadas. Esta aproximação é aplicada apenas à fase particulada dispersa, também referida como fase sólida, onde as menores escalas estão associadas a *clusters* de partículas. Neste caso o refinamento de malha necessário é computacionalmente viável. Uma aplicação semelhante também para a fase gás implicaria em malhas numéricas impraticáveis, já que neste caso as menores escalas descem à micro-escala de Kolmogorov. Assim, neste capítulo, a denominada formulação SSM refere-se à aplicação de SND para a fase sólida composta com SGE para a fase gás; a denominada formulação SGE refere-se à aplicação de SGE para ambas as fases.

Na formulação SGE utiliza-se simbologia em letras maiúsculas, enquanto na formulação SSM utiliza-se simbologia em letras minúsculas, como ilustrado na Figura 6. As velocidades  $U, V$ , do plano SGE, são referidas como velocidades de macro-escala, enquanto as velocidades  $u, v$ , do plano SSM, são referidas como velocidades de meso-escala ou sub-malha. Em geral, parâmetros no plano SGE são referidos como de macro-escala; no plano SSM são referidos como de meso-escala ou sub-malha. Em adição, a formulação SGE envolve parâmetros de micro-escala filtrados ( $\bar{\tau}, \bar{D}$ ) e efetivos de macro-escala ( $\tau_E, D_E$ ) para ambas as fases; a formulação SSM envolve parâmetros de micro-escala filtrados ( $\bar{\tau}, \bar{D}$ ) e efetivos de meso-escala ou sub-malha ( $\tau_e, D_e$ ) para a fase gás, e parâmetros de micro-escala para a fase sólida ( $\tau, D$ ).

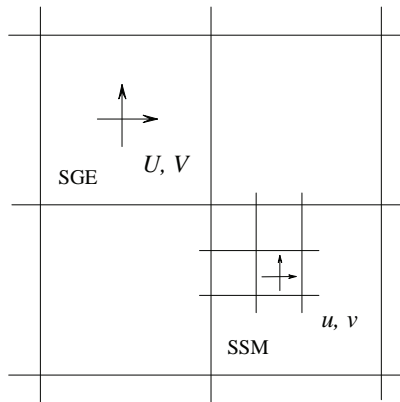


Fig. 6 Ilustração de simbologias para SGE e SSM.

### 3.1. Formulação para simulação de grandes escalas (SGE)

Em simulações de grandes escalas redefine-se variáveis em termos de uma parte filtrada ou resolvida de macro-escala, e uma flutuação sub-malha ou não resolvida de meso-escala. Esta última corresponde às flutuações locais dentro da célula SGE, que são filtradas pela malha numérica, e que somente podem ser capturadas em simulação sub-malha. Assim, define-se:

$$\varepsilon(x, y, z, t) = \bar{\varepsilon}(x, y, z, t) + \varepsilon''(x, y, z, t) \quad (32)$$

onde  $\bar{\varepsilon}$  é a parte filtrada, e  $\varepsilon''$  é a flutuação sub-malha. A parte filtrada é dada por:

$$\bar{\varepsilon}(x, y, z, t) = \int_{x,y,z} \varepsilon(x, y, z, t) G(x, y, z, t) d(x, y, z) \quad (33)$$

onde a função filtro  $G(x, y, z, t)$  representa um corte sub-malha espacial que limita o tamanho das menores escalas que são resolvidas. Quando, convenientemente, se aplica filtro sub-malha coincidente com o volume da célula numérica em SGE (i.e.  $G(x, y, z, t) = 1/V$  para  $x, y, z$  pertencente a  $V$ ), a filtragem coincide com aquela imposta pela discretização (Silveira Neto, 2002). Neste caso tem-se:

$$\bar{\varepsilon}(x, y, z, t) = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon(x, y, z, t) dV \quad (34)$$

Aplicando as definições anteriores às equações conservativas do modelo de dois fluidos, equações (24) a (31), obtém-se as equações para SGE (detalhes destes desenvolvimentos podem ser encontrados em Silveira Neto, 2002; Lesieur et al., 2005; Sagaut, 2001):

#### Fase gás

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \bar{\alpha}_g) + \nabla \cdot (\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{\mathbf{U}}_g) = \sum_{i,j} \bar{r}_{i,j,g} \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{Y}_{i,g}) + \nabla \cdot (\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{Y}_{i,g} \bar{\mathbf{U}}_g) =$$

$$-\nabla \cdot [\bar{\alpha}_g (\bar{\mathbf{D}}_{i,g} + \mathbf{D}_{E,i,g})] + \sum_j (\bar{r}_{i,j,g} + \bar{r}_{i,j,gI}) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{\mathbf{U}}_g) + \nabla \cdot (\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{\mathbf{U}}_g \bar{\mathbf{U}}_g) = \\ & -\bar{\alpha}_g \nabla \bar{P}_g + \nabla \cdot [\bar{\alpha}_g (\bar{\mathbf{r}}_g - \mathbf{r}_{E,g})] + \rho_g \bar{\alpha}_g \mathbf{g} + \bar{\mathbf{M}}_{gI} \end{aligned} \quad (37)$$

### Fase sólida

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \bar{\alpha}_s) + \nabla \cdot (\rho_s \bar{\alpha}_s \bar{\mathbf{U}}_s) = \sum_{i,j} \bar{r}_{i,j,sI} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \bar{\alpha}_s \bar{Y}_{i,s}) + \nabla \cdot (\rho_s \bar{\alpha}_s \bar{Y}_{i,s} \bar{\mathbf{U}}_s) = \\ & -\nabla \cdot [\bar{\alpha}_s (\bar{\mathbf{D}}_{i,s} + \mathbf{D}_{E,i,s})] + \sum_j (\bar{r}_{i,j,s} + \bar{r}_{i,j,sI}) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \bar{\alpha}_s \bar{\mathbf{U}}_s) + \nabla \cdot (\rho_s \bar{\alpha}_s \bar{\mathbf{U}}_s \bar{\mathbf{U}}_s) = \\ & -\bar{\alpha}_s (\nabla \bar{P}_g + \nabla \bar{P}_s) + \nabla \cdot [\bar{\alpha}_s (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_{E,s})] + \rho_s \bar{\alpha}_s \mathbf{g} + \bar{\mathbf{M}}_{sI} \end{aligned} \quad (40)$$

#### 3.1.1. Relações de fechamento convencionais

As leis de fechamento provêm correlações e dados para parâmetros como o tensor das tensões viscosas e viscosidades de ambas as fases, pressões de fases particuladas, transporte difusivo de massa, termos de transferência na interface en-

tre fases, e coeficientes de taxa de reação. Todas as fases são comumente tratadas como fluidos Newtonianos. Viscosidades de fases sólidas são obtidas empiricamente ou de correlações semi-empíricas. Na determinação da pressão de fases sólidas, os efeitos de colisões entre partículas são comumente modelados em termos de um módulo de elasticidade correlacionado empiricamente. Transportes difusivos de massa são geralmente descritos pela lei de Fick. As transferências de momentum entre fases gasosas e sólidas geralmente consideradas são as forças de arrasto estacionárias de interface, obtidas de correlações empíricas, além daquelas devidas a trocas de massa entre fases. Outras forças de interface, tais como sustentação e massa virtual, são geralmente desprezadas. Taxas de reação química são obtidas da teoria cinética-química, aplicando correlações e dados empíricos para coeficientes de taxa de reação.

A condição de continuidade volumétrica impõe que:

$$\bar{\alpha}_g + \bar{\alpha}_s = 1 \quad (41)$$

O tensor das tensões viscosas de micro-escala filtrado da fase sólida é dado por:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_s = \mu_s \left[ \nabla \bar{\boldsymbol{u}}_s + (\nabla \bar{\boldsymbol{u}}_s)^T \right] + \left( \lambda_s - \frac{2}{3} \mu_s \right) (\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_s) \boldsymbol{I} \quad (42)$$

$$\mu_s = \text{constante}$$

$$\lambda_s = 0$$

Uma hipótese comum consiste em assumir o tensor de tensões efetivo análogo ao tensor das tensões viscosas de micro-escala (Igci et al., 2008; Huilin e Gidaspow, 2003). Neste caso, o tensor das tensões efetivo de macro-escala é dado por:

$$\boldsymbol{\tau}_{E,s} = -\mu_{E,s} \left[ \nabla \bar{\boldsymbol{u}}_s + (\nabla \bar{\boldsymbol{u}}_s)^T \right] - \left( \lambda_{E,s} - \frac{2}{3} \mu_{E,s} \right) (\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_s) \boldsymbol{I} \quad (43)$$

$$\mu_{E,s} = \text{constante}$$

$$\lambda_{E,s} = 0$$

Há várias alternativas para descrição do tensor das tensões efetivo de macro-escala da fase gás. Ilustra-se a seguir o procedimento seguido por Kim e Menon (1999), onde a viscosidade efetiva é obtida da solução da equação de transporte de energia cinética turbulenta sub-malha, assumindo viscosidade volumétrica nula. Tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \bar{\alpha}_g k_{sgs}) + \nabla \cdot (\rho_g \bar{\alpha}_g k_{sgs} \bar{\boldsymbol{u}}_g) =$$

$$\bar{\alpha}_g (Q_{sgs} - D_{sgs}) + \nabla \cdot \left[ \frac{\bar{\alpha}_g \mu_{E,g}}{Pr_{E,g}} \nabla (k_{sgs}) \right] \quad (44)$$

A taxa de produção de energia cinética turbulenta sub-malha,  $Q_{sgs}$ , é dada por:

$$Q_{sgs} = -\rho_g \boldsymbol{\tau}_{E,g} : \nabla \bar{\mathbf{U}}_g \quad (45)$$

O tensor das tensões efetivas de macro-escala da fase gás é dado por:

$$\boldsymbol{\tau}_{E,g} = -\mu_{E,g} \left[ \nabla \bar{\mathbf{U}}_g + (\nabla \bar{\mathbf{U}}_g)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}}_g) \mathbf{I} \right] + \frac{2}{3} k_{sgs} \mathbf{I} \quad (46)$$

A viscosidade efetiva de macro-escala da fase gás é dada por:

$$\mu_{E,g} = C_{kgs} \Delta (k_{sgs})^{1/2} \quad (47)$$

onde  $\Delta$  é o tamanho do filtro sub-malha, frequentemente e convenientemente escolhido em coincidência com a malha numérica aplicada (daí a denominação filtro sub-malha). A taxa de dissipação de energia cinética turbulenta sub-malha da fase gás,  $D_{sgs}$ , é dada por:

$$D_{sgs} = \frac{C_\epsilon \rho_g}{\Delta} (k_{sgs})^{3/2} \quad (48)$$

Em sistemas granulares não há difusão de massa devido a gradientes de concentrações de diferentes espécies sólidas, de forma que  $\bar{\mathbf{D}}_{i,s} = \mathbf{D}_{E,i,s} = 0$ . Os fluxos difusivos de massa de uma espécie  $i$  na fase gás, de micro-escala e efetivo de macro-escala, são dados por:

$$\bar{\mathbf{D}}_{i,g} = -\rho_g D_{i,g} \nabla \bar{Y}_{i,g} \quad (49)$$

$$D_{i,g} = \frac{\mu_g}{\rho_g Sc_g} \quad (50)$$

$$\mathbf{D}_{E,i,g} = -\rho_g D_{E,i,g} \nabla \bar{Y}_{i,g} \quad (51)$$

$$D_{E,i,g} = \frac{\mu_{E,g}}{\rho_g Sc_{E,g}} \quad (52)$$

Os coeficientes de difusão molecular e de macro-escala,  $D_{i,g}$  e  $D_{E,i,g}$ , podem ser obtidos aplicando-se correlações empíricas convencionais para os respectivos números de Schmidt,  $Sc_g$  e  $Sc_{E,g}$ .

A pressão colisional de fases sólidas pode ser descrita, por exemplo, pela proposição de Gidaspow e Ettehadieh (1983), isto é:

$$\nabla \bar{P}_s = -\Omega \nabla \bar{\alpha}_s \quad (53)$$

$$\Omega = \exp[-c(\bar{\alpha}_g - 0,62)]$$

O transporte de momentum entre fases é dado por:

$$\bar{\mathbf{M}}_{gI} = \beta_E (\bar{\mathbf{U}}_s - \bar{\mathbf{U}}_g) + \bar{\mathbf{U}}_g \sum_{i,j} \bar{r}_{i,j,gI} \quad (54)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{sI} = -\beta_E (\bar{\mathbf{U}}_s - \bar{\mathbf{U}}_g) + \bar{\mathbf{U}}_s \sum_{i,j} \bar{r}_{i,j,sI} \quad (55)$$

Um procedimento comumente empregado para descrição do arrasto na interface na macro-escala é o de Gidaspow (1994), onde a função de arrasto na interface gás-sólido é dada por:

$$\beta_E = 150 \frac{\bar{\alpha}_s^2 \mu_g}{\bar{\alpha}_g (d_p \varphi_s)^2} + 1,75 \frac{\rho_g \bar{\alpha}_s |\bar{\mathbf{U}}_g - \bar{\mathbf{U}}_s|}{(d_p \varphi_s)} \quad \text{para } \alpha_s > 0,2 \text{ (Ergun, 1952)} \quad (56)$$

$$\beta_E = \frac{3}{4} C_{Ds} \frac{\rho_g \bar{\alpha}_s \bar{\alpha}_g |\bar{\mathbf{U}}_g - \bar{\mathbf{U}}_s|}{(d_p \varphi_s)} \bar{\alpha}_g^{-2,65} \quad \text{para } \alpha_s \leq 0,2 \text{ (Wen e Yu, 1966)} \quad (57)$$



$$C_{Ds} = \begin{cases} \frac{24}{Re_p} \left( 1 + 0,15 \cdot Re_p^{0,687} \right) & \text{para } Re_p < 1000 \\ 0,44 & \text{para } Re_p \geq 1000 \end{cases} \quad (\text{Rowe, 1961}) \quad (58)$$

$$Re_p = \frac{|\bar{U}_g - \bar{U}_s| d_p \rho_g \bar{\alpha}_g}{\mu_g} \quad (59)$$

A taxa de geração/consumo de uma espécie numa reação química é proporcional ao produto das concentrações dos reagentes elevadas aos respectivos coeficientes estequiométricos (e.g. Kuo, 1986). A taxa de geração/consumo de uma espécie química  $i$  numa reação química  $j$  a partir dos reagentes  $n$  é dada por:

$$\bar{r}_{i,j} = a_i \left( \bar{k}_j \prod C_n^{a_n} \right) W_i \quad (60)$$

Os coeficientes de taxa de reação  $\bar{k}_j$  são obtidos empiricamente, frequentemente aplicando cinética de Arrhenius em composição com coeficientes de equilíbrio termodinâmico para as reações químicas de interesse. A concentração de uma espécie  $n$ , definida na fase  $k$  a que pertence, pode ser expressa como:

$$C_{n,k} = \left[ \frac{\rho_k \bar{\alpha}_k \bar{Y}_{n,k}}{W_n} \right] \quad (61)$$

### 3.1.2. Condições de contorno

Em paredes aplica-se condição de contorno de não deslizamento para momento da fase gás, e condições de fluxo nulo para escalares conservados para todas as fases (frações de fase, concentrações de espécies, energia cinética turbulenta). Em regiões de entrada considera-se fluxos ou parâmetros prescritos, e em regiões de saída aplica-se condições de continuidade ou hipóteses de escoamento localmente parabólico, para todas as fases.

A condição de contorno de parede para fase sólida é controversa. Agrawal et al. (2001) observam que as condições de contorno de parede para velocidade axial, para simulações em malhas computacionais grosseiras, permanecem um desafio. Uma aproximação comum consiste em considerar que partículas finas colam às paredes, partículas grosseiras rolam ao longo destas, enquanto partículas interme-

diárias realizam deslizamento parcial (Soo, 1967; Tsuo e Gidaspow, 1990; Ding e Gidaspow, 1990). Ding e Gidaspow (1990) aplicaram:

$$U_{s,parede} = W_{s,parede} = 0$$

$$V_{s,parede} = -\lambda_p \frac{\partial}{\partial n} (V_{s,parede}) \quad (62)$$

Onde  $\lambda_p$  representa a distância média entre partículas, e é dado por:

$$\lambda_p = \frac{1}{(\bar{\alpha}_s)^{1/3}} d_p \quad (63)$$

Como condições iniciais especifica-se, em geral, escoamentos uniformes de gás ou gás-sólido homogêneos.

### 3.2. Formulação para simulação sub-malha (SSM)

Em SSM é comum a aplicação de condições de contorno periódicas de entrada/saída, que eliminam o *driven-force* do escoamento. Este é recuperado, usualmente, impondo-se um gradiente extra de pressão na fase gás em excesso àquele necessário para contrabalançar o efeito da gravidade sobre a suspensão. Em consequência o escoamento torna-se acelerado passando por toda a faixa operacional de velocidades de gás típicas dos *risers*.

Apresenta-se a seguir uma formulação do modelo de dois fluidos incluindo leis de fechamento baseadas na teoria cinética dos escoamentos granulares (Gidaspow, 1994; Syamlal et al., 1993; Agrawal et al., 2001), e incluindo compensação da gravidade para aplicação de condições de contorno periódicas. Como já mencionado, a formulação SSM refere-se à aplicação de SGE para a fase gás composta com SND para a fase sólida. Como se pratica SND para a fase sólida, não há necessidade de modelo de turbulência para esta fase. As equações conservativas para a fase gás são as mesmas definidas nas equações (35) a (37), substituindo-se apenas os parâmetros de macro-escala ( $\bar{\mathbf{U}}_g, \mathbf{D}_{E,i,g}, \mathbf{r}_{E,g}$ ) pelos de meso-escala ( $\bar{\mathbf{u}}_g, \mathbf{D}_{e,i,g}, \mathbf{r}_{e,g}$ ). As equações conservativas para a fase sólida são as mesmas definidas nas equações (25), (27) e (31). Note-se, nas equações de momentum de ambas as fases a seguir, a inclusão do gradiente extra de pressão na fase gás. Tem-se:

Fase gás

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \bar{\alpha}_g) + \nabla \cdot (\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{\mathbf{u}}_g) = \sum_{i,j} \bar{r}_{i,j,gI} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{Y}_{i,g}) + \nabla \cdot (\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{Y}_{i,g} \bar{\mathbf{u}}_g) = \\ & -\nabla \cdot [\bar{\alpha}_g (\bar{\mathbf{D}}_{i,g} + \mathbf{D}_{e,i,g})] + \sum_j (\bar{r}_{i,j,g} + \bar{r}_{i,j,gI}) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{\mathbf{u}}_g) + \nabla \cdot (\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{\mathbf{u}}_g \bar{\mathbf{u}}_g) = \\ & -\bar{\alpha}_g (\nabla \bar{P}_g + \psi \nabla P_g^*) + \nabla \cdot [\bar{\alpha}_g (\bar{\mathbf{r}}_g - \mathbf{r}_{e,g})] + \rho_g \bar{\alpha}_g \mathbf{g} + \bar{\mathbf{M}}_{gI} \end{aligned} \quad (66)$$

Fase sólida

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s) = \sum_{i,j} r_{i,j,sI} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s Y_{i,s}) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s Y_{i,s} \mathbf{u}_s) = \\ & -\nabla \cdot (\alpha_s \mathbf{D}_{i,s}) + \sum_j (r_{i,j,s} + r_{i,j,sI}) \end{aligned} \quad (68)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s) =$$

$$-\alpha_s (\nabla P_g + \psi \nabla P_g^* + \nabla P_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \mathbf{r}_s) + \alpha_s \rho_s \mathbf{g} + \mathbf{M}_{sI} \quad (69)$$

### 3.2.1. Relações de fechamento

A condição de continuidade volumétrica impõe que:

$$\bar{\alpha}_g + \alpha_s = 1 \quad (70)$$

As relações de fechamento para a fase gás estão definidas nas equações (44) a (52), substituindo-se apenas os parâmetros de macro-escala pelos de meso-escala, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \bar{\alpha}_g k_{sgs}) + \nabla \cdot (\rho_g \bar{\alpha}_g k_{sgs} \bar{\mathbf{u}}_g) =$$

$$\bar{\alpha}_g (\mathcal{Q}_{sgs} - D_{sgs}) + \nabla \cdot \left[ \frac{\bar{\alpha}_g \mu_{e,g}}{Pr_{e,g}} \nabla (k_{sgs}) \right] \quad (71)$$

$$\mathcal{Q}_{sgs} = -\rho_g \mathbf{r}_{e,g} : \nabla \bar{\mathbf{u}}_g \quad (72)$$

$$\mathbf{r}_{e,g} = -\mu_{e,g} \left[ \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + (\nabla \bar{\mathbf{u}}_g)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g) \mathbf{I} \right] + \frac{2}{3} k_{sgs} \mathbf{I} \quad (73)$$

$$\mu_{e,g} = C_{kgs} \Delta (k_{sgs})^{1/2} \quad (74)$$

$$D_{sgs} = \frac{C_\varepsilon \rho_g}{\Delta} (k_{sgs})^{3/2} \quad (75)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{i,g} = -\rho_g D_{i,g} \nabla \bar{Y}_{i,g} \quad (76)$$

$$D_{i,g} = \frac{\mu_g}{\rho_g Sc_g} \quad (77)$$

$$\mathbf{D}_{e,i,g} = -\rho_g D_{e,i,g} \nabla \bar{Y}_{i,g} \quad (78)$$

$$D_{e,i,g} = \frac{\mu_{e,g}}{\rho_g Sc_{e,g}} \quad (79)$$

Lembre-se que em sistemas granulares não há difusão de massa devido a gradientes de concentrações de diferentes espécies sólidas, então  $\bar{\mathbf{D}}_{i,s} = 0$ . O gradiente extra de pressão na fase gás para exata compensação da gravidade atuando na mistura gás-sólido é dado por:

$$\nabla P_g^* = (\rho_s \alpha_s + \rho_g \bar{\alpha}_g) \mathbf{g} \quad (80)$$

A pressão e a viscosidade da fase sólida são parâmetros críticos nas formulações sub-malha de dois fluidos. Estas conferem caráter realista ao modelo teórico conservativo, pois descrevem o comportamento físico da fase particulada tratada como meio contínuo. Para SSM (SND sólido/SGE gás) deve-se prover tais parâmetros definidos na micro-escala, de forma que toda a física do escoamento seja capturada, e se possa de fato realizar SND para a fase sólida. A pressão e viscosidade de micro-escala da fase sólida podem ser modeladas através de correlações geradas a partir da teoria cinética dos escoamentos granulares. Neste caso, a formulação SSM inclui a equação de conservação de energia granular, dada por (Gidaspow, 1994):

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \alpha_s \Theta) + \nabla \cdot (\rho_s \alpha_s \mathbf{u}_s \Theta) \right] = \\ & (-P_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_s) : \nabla \mathbf{u}_s + \nabla \cdot (\kappa_s \nabla \Theta) - \Psi + \Gamma \end{aligned} \quad (81)$$

onde  $\Theta$  é a temperatura granular. O tensor das tensões viscosas de micro-escala para a fase sólida é dado por:

$$\boldsymbol{\tau}_s = \mu_s \left[ \nabla \mathbf{u}_s + (\nabla \mathbf{u}_s)^T \right] + \left( \lambda_s - \frac{2}{3} \mu_s \right) (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) \mathbf{I} \quad (82)$$

$$\mu_s = \frac{2\mu_{s,dil}}{(1+e)g_0} \left[ 1 + \frac{4}{5}(1+e)g_0\alpha_s \right]^2 + \frac{4}{5}\alpha_s^2\rho_s d_p g_0 (1+e) \left( \frac{\Theta}{\pi} \right)^{1/2} \quad (83)$$

$$\lambda_s = \frac{4}{3}\alpha_s^2\rho_s d_p g_0 (1+e) \left( \frac{\Theta}{\pi} \right)^{1/2} \quad (84)$$

$$g_0 = \frac{3}{5} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_s}{\alpha_{s,max}} \right)^{1/3} \right]^{-1} \quad (85)$$

$$\mu_{s,dil} = \frac{5\sqrt{\pi}}{96} \rho_s d_p \Theta^{1/2} \quad (86)$$

A pressão de fase sólida é dada por:

$$P_s = \alpha_s \rho_s \Theta [1 + 2(1+e)g_0\alpha_s] \quad (87)$$

A condutividade térmica granular é obtida de:

$$\kappa_s = \frac{2}{(1+e)g_0} \left[ 1 + \frac{6}{5}(1+e)g_0\alpha_s \right]^2 \kappa_{s,dil} + 2\alpha_s^2\rho_s d_p g_0 (1+e) \left( \frac{\Theta}{\pi} \right)^{1/2} \quad (88)$$

$$\kappa_{s,dil} = \frac{75}{384} \rho_s d_p \sqrt{\pi\Theta} \quad (89)$$

A taxa de dissipação de energia granular devido a colisões inelásticas é dada por:

$$\Psi = 3(1-e^2)\alpha_s^2\rho_s g_0 \Theta \left[ \frac{4}{d_p} \sqrt{\frac{\Theta}{\pi}} - \nabla \cdot \mathbf{u}_s \right] \quad (90)$$

A taxa de transferência de energia cinética fluante de partículas para o gás é obtida de:

$$\Gamma = -3\beta\theta \quad (91)$$

O transporte de momentum entre fases é dado pelas mesmas equações (54) e (55), apenas substituindo-se as velocidades resolvidas na macro-escala pelas velocidades resolvidas na meso-escala, ou seja:

$$\bar{\mathbf{M}}_{gI} = \beta(\mathbf{u}_s - \bar{\mathbf{u}}_g) + \bar{\mathbf{u}}_g \sum_{i,j} r_{i,j,gI} \quad (92)$$

$$\mathbf{M}_{sI} = -\beta(\mathbf{u}_s - \bar{\mathbf{u}}_g) + \mathbf{u}_s \sum_{i,j} r_{i,j,sI} \quad (93)$$

Não há dados ou modelos na literatura para o arrasto na micro-escala da fase sólida; usualmente assume-se as mesmas correlações aplicadas na macro-escala, equações (56) a (59), substituindo-se os parâmetros filtrados de macro-escala pelos parâmetros de meso-escala, ou seja:

$$\beta = 150 \frac{\alpha_s^2 \mu_g}{\bar{\alpha}_g (d_p \varphi_s)^2} + 1,75 \frac{\rho_g \alpha_s |\bar{\mathbf{u}}_g - \mathbf{u}_s|}{(d_p \varphi_s)} \quad \text{para } \alpha_s > 0,2 \quad (\text{Ergun, 1952}) \quad (94)$$

$$\beta = \frac{3}{4} C_{Ds} \frac{\rho_g \alpha_s \bar{\alpha}_g |\bar{\mathbf{u}}_g - \mathbf{u}_s|}{(d_p \varphi_s) \bar{\alpha}_g^{-2,65}} \quad \text{para } \alpha_s \leq 0,2 \quad (\text{Wen e Yu, 1966}) \quad (95)$$

$$C_{Ds} = \begin{cases} \frac{24}{Re_p} \left( 1 + 0,15 \cdot Re_p^{0,687} \right) & \text{para } Re_p < 1000 \\ 0,44 & \text{para } Re_p \geq 1000 \end{cases} \quad (\text{Rowe, 1961}) \quad (96)$$

$$Re_p = \frac{|\bar{\mathbf{u}}_g - \mathbf{u}_s| d_p \rho_g \bar{\alpha}_g}{\mu_g} \quad (97)$$

Taxas de reação química são definidas pelas equações (60) e (61), ou seja:

$$r_{i,j} = a_i \left( k_j \prod C_n^{a_n} \right) W_i \quad (98)$$

$$C_{n,g} = \left[ \frac{\rho_g \bar{\alpha}_g \bar{Y}_{n,g}}{W_n} \right] \quad (99)$$

$$C_{n,s} = \left[ \frac{\rho_s \alpha_s Y_{n,s}}{W_n} \right] \quad (100)$$

### 3.2.2. Condições de contorno

Usualmente aplica-se condições de contorno periódicas. Isso significa que o escoamento que penetra em uma dada fronteira do domínio é exatamente o mesmo que o abandona na respectiva fronteira paralela oposta, e vice-versa. Assim, todas as variáveis do escoamento através de fronteiras paralelas opostas similares são localmente e instantaneamente idênticas. Não há necessidade de consideração de condições de contorno adicionais.

Como condições iniciais especifica-se, em geral, misturas gás-sólido uniformes em repouso. Devido à aplicação de condições de contorno periódicas, e à conservação de massa global, as frações de fase médias no domínio se mantêm constantes ao longo do escoamento.

### 3.3. Fechamento para fase sólida em SGE obtido via SSM

Considerando a formulação para domínio SGE (Silveira Neto, 2002; Lesieur et al., 2005; Sagaut, 2001), os componentes do tensor das tensões efetivas de macro-escala da fase sólida são dados por:

$$\tau_{E,s,xx} = \rho_s \left( \overline{U_s U_s} - \bar{U}_s \bar{U}_s \right)$$

$$\tau_{E,s,yy} = \rho_s \left( \overline{V_s V_s} - \bar{V}_s \bar{V}_s \right)$$



$$\begin{aligned}
\tau_{E,s,zz} &= \rho_s (\overline{W_s W_s} - \overline{W_s} \overline{W_s}) \\
\tau_{E,s,xy} &= \tau_{E,s,yx} = \rho_s (\overline{U_s V_s} - \overline{U_s} \overline{V_s}) \\
\tau_{E,s,xz} &= \tau_{E,s,zx} = \rho_s (\overline{U_s W_s} - \overline{U_s} \overline{W_s}) \\
\tau_{E,s,yz} &= \tau_{E,s,zy} = \rho_s (\overline{V_s W_s} - \overline{V_s} \overline{W_s})
\end{aligned} \tag{101}$$

Considere-se o filtro sub-malha praticado em SGE idêntico ao domínio computacional SSM, i.e. domínio SSM coincidente com a célula numérica SGE. Neste caso a parte filtrada ou resolvida em SGE iguala-se à média volumétrica das variáveis resolvidas em SSM (equação (34)). Tem-se assim:

$$\overline{U_s} = \frac{1}{V} \int_V u_s dV = \langle u_s \rangle$$

$$\overline{V_s} = \frac{1}{V} \int_V v_s dV = \langle v_s \rangle$$

$$\overline{W_s} = \frac{1}{V} \int_V w_s dV = \langle w_s \rangle$$

$$\overline{U_s U_s} = \frac{1}{V} \int_V u_s u_s dV = \langle u_s u_s \rangle$$

$$\overline{V_s V_s} = \frac{1}{V} \int_V v_s v_s dV = \langle v_s v_s \rangle$$

$$\overline{W_s W_s} = \frac{1}{V} \int_V w_s w_s dV = \langle w_s w_s \rangle$$

$$\begin{aligned}\overline{U_s V_s} &= \frac{1}{V} \int_V u_s v_s dV = \langle u_s v_s \rangle \\ \overline{U_s W_s} &= \frac{1}{V} \int_V u_s w_s dV = \langle u_s w_s \rangle \\ \overline{V_s W_s} &= \frac{1}{V} \int_V v_s w_s dV = \langle v_s w_s \rangle\end{aligned}\quad (102)$$

onde  $V$  representa o volume da célula numérica SGE e também o volume do domínio SSM. Desta forma, os componentes do tensor das tensões efetivas de macro-escala da fase sólida resultam:

$$\begin{aligned}\tau_{E,s,xx} &= \rho_s \left( \langle u_s u_s \rangle - \langle u_s \rangle \langle u_s \rangle \right) \\ \tau_{E,s,yy} &= \rho_s \left( \langle v_s v_s \rangle - \langle v_s \rangle \langle v_s \rangle \right) \\ \tau_{E,s,zz} &= \rho_s \left( \langle w_s w_s \rangle - \langle w_s \rangle \langle w_s \rangle \right) \\ \tau_{E,s,xy} &= \tau_{E,s,yx} = \rho_s \left( \langle u_s v_s \rangle - \langle u_s \rangle \langle v_s \rangle \right) \\ \tau_{E,s,xz} &= \tau_{E,s,zx} = \rho_s \left( \langle u_s w_s \rangle - \langle u_s \rangle \langle w_s \rangle \right) \\ \tau_{E,s,yz} &= \tau_{E,s,zy} = \rho_s \left( \langle v_s w_s \rangle - \langle v_s \rangle \langle w_s \rangle \right)\end{aligned}\quad (103)$$

O fechamento para a fase sólida em SGE inclui ainda:

$$\bar{P}_s = \frac{1}{V} \int_V P_s dV = \langle P_s \rangle \quad (104)$$

$$\beta_E = \frac{1}{V} \int_V \beta dV = \langle \beta \rangle \quad (105)$$

As equações (103) são as necessárias condições de fechamento para as tensões efetivas de macro-escala da fase sólida em SGE. Pode-se, em adição, obter viscosidades efetivas de macro-escala assumindo um modelo reológico apropriado. Uma hipótese comum consiste em assumir o tensor das tensões efetivas análogo ao tensor das tensões viscosas (Igci et al., 2008; Huilin e Gidaspow, 2003). Neste caso tem-se, por exemplo:

$$\tau_{E,s,xy} = \tau_{E,s,yx} = \rho_s \left( \langle u_s v_s \rangle - \langle u_s \rangle \langle v_s \rangle \right) = \mu_{E,s} \left[ \frac{\partial \langle u_s \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v_s \rangle}{\partial x} \right] \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \tau_{E,s,yy} &= \rho_s \left( \langle v_s v_s \rangle - \langle v_s \rangle \langle v_s \rangle \right) = \\ & 2\mu_{E,s} \frac{\partial \langle v_s \rangle}{\partial y} + \left( \lambda_{E,s} - \frac{2}{3} \mu_{E,s} \right) \left( \frac{\partial \langle u_s \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v_s \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w_s \rangle}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (107)$$

E, notando-se ainda que  $\langle \nabla f \rangle = \nabla \langle f \rangle$  (equações 13), obtém-se:

$$\mu_{E,s} = \frac{\rho_s \left( \langle u_s v_s \rangle - \langle u_s \rangle \langle v_s \rangle \right)}{\left\langle \frac{\partial u_s}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_s}{\partial x} \right\rangle} \quad (108)$$

$$\lambda_{E,s} = \frac{2}{3} \mu_{E,s} - \left( \frac{2\mu_{E,s} \left\langle \frac{\partial v_s}{\partial y} \right\rangle - \rho_s \left( \langle v_s v_s \rangle - \langle v_s \rangle \langle v_s \rangle \right)}{\left\langle \frac{\partial u_s}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_s}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial w_s}{\partial z} \right\rangle} \right) \quad (109)$$

Note-se que  $\bar{\mu}_{se}$  e  $\bar{\lambda}_{se}$  podem também ser obtidos dos demais componentes do tensor das tensões efetivas de macro-escala das equações (103). A equação (108) é semelhante àquela obtida por Igci et al. (2008). Entretanto, as equações (108) e (109) devem ser encaradas com precaução, já que o modelo reológico considerado na sua obtenção carece validação.

## 4. Referências

- Adams, N. A. e Stolz, S., 2001, "Deconvolution methods for subgrid-scale approximation in large-eddy simulation", *Modern Simulation Strategies for Turbulent Flow*, edited by B. Geurts, Edwards, Ann Arbor, MI, pp. 21-41.
- Aggarwal, S.K., Fix, G.J., Lee, D.N. e Sirignano, W.A., 1983, "Numerical optimization studies of axisymmetric unsteady sprays". *J. of Computational Physics*, Vol. 50, pp. 101-105.
- Agrawal, K., Loezos, P.N., Syamlal, M. e Sundaresan, S., 2001, "The role of meso-scale structures in rapid gas-solid flows", *J. Fluid Mech.*, Vol. 445, pp. 151-185.
- Anderson, T.B. e Jackson, R., 1967, "Fluid Mechanical Description of Fluidized Beds. Equations of Motion", *Indust. Engng. Chem. Fundam.*, Vol. 6, pp. 527-539.
- Andrews IV, A.T., Loezos, P.N. e Sundaresan, S., 2005, "Coarse-grid simulation of gas-particle flows in vertical risers", *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 44, No. 16, pp. 6022-6037.
- Bardina, J., 1983, "Improved turbulent models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows", Ph.D. Dissertation, Mechanical Engineering Rept. TF-19, Stanford Univ., Stanford, CA.
- Barthod, D., Pozo, M. e Mirgrain, C., 1999, "CFD aided design improves FCC performance", *Oil & Gas J.*, Vol. 5, pp. 66.
- Benyahia, S., 2009, "On the effect of subgrid drag closures", *Ind. Eng. Chem. Res.* web published in July 23, 2009.
- Benyahia, S., Syamlal, M. e O'Brien, T.J., 2007, "Study of the ability of multiphase continuum models to predict core-annulus flow", *AIChE Journal*, Vol. 53, No. 10, pp. 2549-2568.
- Bouré, J.A. e Delhay, J.M., 1982, In: *Handbook of multiphase systems*, ed: G. Hetsrone, McGraw-Hill, NY, Section 1.2, pp. 1.36-1.95.
- Cabezas-Gómez, L. e Milioli, F.E., 2003, "Numerical study on the influence of various physical parameters over the gas-solid two-phase flow in the 2D riser of a circulating fluidized bed", *Powder Technology*, Vol. 132, No. 2/3, pp. 216-225.
- Cabezas-Gómez, L., 2003, "Modelagem matemática e simulação numérica de escoamentos bifásicos gás-sólido em colunas de leito fluidizado circulante", Tese de Doutorado, EESC-USP, Brasil, 208p.
- Campbell, C.S., 1990, "Rapid granular flows", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 22, pp. 57-92.
- Chen, C.P. e Wood, P.E., 1985, "A turbulence closure model for dilute gas-particle flows", *The Canadian J. of Chem. Engng.*, Vol. 63, No. 3, pp. 349-360.
- Crowe, C.T., Sharma, M.P. e Stock, D.E., 1977, "The particle-source-in-cell (PSI-Cell) model for gas-droplet flows", *ASME J. Fluid Engng.*, Vol. 99, pp. 325-332.
- Curtis, J.S. e van Wachem, B., 2004, "Modeling particle-laden flows: a research outlook", *AIChE J.*, Vol. 50, No. 11, pp. 2638-2645.
- Davidson, D.L., 2002, "The role of computational fluid dynamics in process industries", *The Bridge*, Vol. 32, No. 4, pp. 9-14.
- Davidson, J.F., 1961, "Symposium on fluidization – discussion", *Trans. Inst. Chem. Eng.*, Vol. 39, pp. 230-232.

- Delhaye, J.M., 1974, "Jump conditions and entropy sources in two-phase systems - Local instant formulation", *Int. J. of Multiphase Flow*, Vol. 1, pp. 395-409.
- Delhaye, J.M., 1981, "Local instantaneous equations", in: *Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering*, eds: J.M. Delhaye, M. Giot & M.L. Riethmuller, Hemisphere & McGraw-Hill, Chap. 5, pp. 95-116.
- Ding, J. e Gidaspow, D., 1990, "A bubbling model using kinetic theory of granular flow", *AIChE Journal*, Vol. 36, No. 4, pp. 523-538.
- Domaradski, J. A. e Adams, N. A., 2002, "Direct modeling of subgrid scales of turbulence in large eddy simulation", *Journal of Turbulence*, Vol. 3, No. 24, pp. 1-19.
- Drew, D. A., 1983, "Mathematical modeling of two-phase flow", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 15, pp. 261-291.
- Drew, D.A., 1971, "Averaged field equations for two-phase media", *Studies in Applied Mathematics*, Vol. 50, pp. 133-166.
- Duckowicz, J.K., 1980, "A particle-fluid numerical model for liquid spray", *J. of Comput. Physics*, Vol. 35, pp. 229-253.
- Dudukovic, M.P., Larachi, F. e Mills, P.L., 1999, "Multiphase reactors – revisited", *Chemical Engineering Science*, Vol. 54, pp. 1975-1995.
- Elgobashi, S., 1991, "Particle-laden turbulent flows: direct simulation and closure models", Vol. 48, pp. 301-314.
- Enwald, H., Peirano, E. e Almstedt, A.-E., 1996, "Eulerian Two-Phase Flow Theory Applied to Fluidization", *Int. J. of Multiphase Flow*, Vol. 22, pp.21-66.
- Ergun, S., 1952, "Fluid Flow through Packed Columns", *Chem. Engng. Prog.*, Vol. 48, No. 2, pp. 89-94.
- Fede, P. e Simonin, O., 2006, "Numerical study of the subgrid fluid turbulence effects on the statistics of heavy colliding particles", *Physics of Fluids*, Vol. 18, 045103.
- Ferziger, J.H. e Peric, 2002, "Computational methods for fluid dynamics", Springer, Berlin, 423p.
- Georg, I. C., 2005, "Modelagem e simulação numérica tridimensional transiente do escoamento gás-sólido em um reator de craqueamento catalítico em leito fluidizado", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 292p.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. e Cabot, W. H., 1991, "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model", *Physics of Fluids A*, Vol. 3, No. 7, pp. 1760-1765.
- Ghosal, S., Lund, T. S., Moin, P. e Akselvoll, K., 1995, "A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 286, pp. 229-255.
- Gidaspow D., 2001, Current research in hydrodynamics of fluidization by Professor D. Gidaspow at IIT, [www.chee.iit.edu/faculty/gidaspow.htm](http://www.chee.iit.edu/faculty/gidaspow.htm).
- Gidaspow, D. e Etehadieh, B., 1983, "Fluidization in two-dimensional beds with a jet. Part II. Hydrodynamic modeling", *Indust. Engng. Chem. Fundam.*, Vol. 22, pp. 193-201.
- Gidaspow, D., 1994, "Multiphase Flow and Fluidization", Academic Press, San Diego, CA, 407p.
- Glasser, B.J., Sundaresan, S. e Kevrekidis, I.G., 1998, "From bubbles to clusters in fluidized beds", *Physical Review Letters*, Vol. 81, No. 9, pp. 1849-1852.
- Goldhirsch, I., Tan, M. -L. e Zanetti, G., 1993, "A molecular dynamical study of granular fluids I: the forced granular gas in two dimensions", *Journal of Scientific Computing*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-40.
- Goldhirsch, I., 2003, "Rapid granular flows", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 35, pp. 267-293.
- Goldhirsch, I., Noskovicz, S.H. e Bar-Lev, O., 2005, "Theory of granular gases: some recent results and some open problems", *J. of Physics: Condensed Matter*, Vol. 17, pp. S2591-S2608.
- Grace, J. R. e Taghipour, F., 2004, "Verification and validation of CFD models and dynamic similarity for fluidized beds", *Powder Technology*, Vol. 139, pp. 99-110.
- Grace, J.R. e Bi, H., 1997, "Introduction to Circulating Fluidized Beds", in *Circulating Fluidized Beds*, Ed. J.R. Grace, A.A. Avidan e T.M. Knowlton, Chapman & Hall, UK, 585p.

- Hrenya, C.M. e Sinclair, J.L., 1997, "Effects of particle-phase turbulence in gas-solid flows", *AIChE Journal*, Vol. 43, No. 4, pp. 853-869.
- Hrenya, C.M., Galvin, J.E. e Wildman, R.D., 2008, "Evidence of higher-order effects in thermally driven rapid granular flows", *J. Fluid Mech.*, Vol. 598, pp. 429-450.
- Huilin, L. e Gidaspow, D., 2003, "Hydrodynamic simulations of gas-solid flow in a riser", *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 42, pp. 2390-2398.
- Igci, Y., Andrews IV, A.T., Sundaresan, S., Pannala, S. e O'Brien, T., 2008, "Filtered two-fluid models for fluidized gas-particle suspensions", *AIChE Journal*, Vol. 54, No. 6, pp. 1431-1448.
- Ishii, M., 1975, "Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow", Eyrolles, Paris, 248p.
- Jackson, R., 1963, "The mechanics of fluidized beds", *Trans. Inst. Chem. Eng.*, Vol. 41, pp. 13-28.
- Jackson, R., 2000, "The Dynamics of Fluidized Particles", in *Cambridge Monographs on Mechanics*, Cambridge University Press, USA.
- Jenkins, J.T. e Savage, S.B., 1983, "A Theory for the Rapid Flow of Identical, Smooth, Nearly Elastic Spherical Particles", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 130, pp. 187-202.
- Kadanoff, L.P., 1999, "Built upon sand: theoretical ideas inspired by granular flows", *Reviews of Modern Physics*, Vol. 71, No. 1, pp. 435-444.
- Kim, W. W. e Menon, S., 1999, "An unsteady incompressible Navier–Stokes solver for large eddy simulation of turbulent flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 31, No. 6, pp. 983-1017.
- Kuipers, J.A.M. e Van Swaaij, W.P.M., 1997, "Application of computational fluid dynamics to chemical reaction engineering", *Reviews in Chemical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 1-118.
- Kulick, J.D., Fessler, J.R. e Eaton, J.K., 1994, "Particle response and turbulence modification in fully developed channel flow", *J. Fluid Mech.*, Vol. 277, pp. 109-134.
- Kuo, K. K., 1986, "Principles of Combustion", John Wiley & Sons, NY, 810p.
- Lesieur, M., Métais, O. e Comte, P., 2005, "Large-eddy simulations of turbulence", Cambridge University Press, NY, 219p.
- Liu, S. W., Meneveau, C. e Katz, J., 1994, "On the properties of similarity subgrid scale models as deduced from measurements in turbulent jets", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 275, p. 83.
- Lun, C.K.K., Savage, S.B., Jeffrey, D.J. e Chepurmiy, N., 1984, "Kinetic Theories for Granular Flows: Inelastic Particles in Couette Flow and Singly Inelastic Particles in a General Flow Field", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 140, pp.223-256.
- Luo, K. M., 1987, "Experimental Gás-sólido Vertical Transport", PhD thesis, Illinois Institute of Technology, Chicago, Illinois, 214p.
- McKee, B., 2000, "Dream of future worldwide, technology-driven clean coal-generated electricity", US-Brazil Power Project & Finance Workshop, Office of Fossil Energy, US Department of Energy (DOE).
- Meneveau, C. e Katz, J., 2000, "Scale-invariance and turbulence models for large eddy simulation", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 32, pp. 1-32.
- Meneveau, C., Lund, T. e Cabot, W., 1996, "A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 319, pp. 353-385.
- Milioli, C.C., 2006, "Simulação de escoamentos gás-sólido reativos em leitos fluidizados circulantes", Tese de Doutorado, EESC-USP, Brasil, 2006.
- Milioli, C.C., Rotava, E. e Milioli, F.E., 2007a, "On the sub-grid two-fluid simulation of gas-solid riser flows", XIX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 2007, Brasília-DP, Brasil.
- Milioli, C.C., Rotava, E. e Milioli, F.E., 2007b, "A sub-grid two-fluid simulation of a typical gas-solid riser flow", XIX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 2007, Brasília-DP, Brasil.

- Milioli, C.C. e Milioli, F.E., 2009, "On the sub-grid scale two-fluid simulation of riser flows", Proceedings of the 20th International Symposium on Transport Phenomena - ISTP 2009, Victoria-BC, Canada.
- Milioli, C.C. e Milioli, F.E., 2010, "On the accuracy of two-fluid model predictions for a particular gas solid riser flow", Applied Mathematical Modelling, Vol. 34, pp. 684-696.
- Murray, J.D., 1965, "On the mathematics of fluidization - part I: fundamental equations and wave propagation", J. Fluid Mech., Vol. 22, p. 57-80.
- Nucla, 1999, "Nucla ACFB demonstration project". In: Project performance summary, Clean coal technology demonstration program, report DOE/FE-0392, US Department of Energy (DOE).
- Pigford, R.L. e Barron, T., 1965, "Hydrodynamic stability of fluidized beds", Indust. Engng. Chem. Fundam., Vol. 4, pp. 81-87.
- Piomelli, U. e Liu, J., 1995, "Large-eddy simulation of rotating channel flows using a localized dynamic model", Physics of Fluids, Vol. 7, No. 4, pp. 839-848.
- Pitsch, H., Desjardins, O., Balarac, G. e Ihme, M., 2008, "Large-eddy simulation of turbulent reacting flows", Progress in Aerospace Sciences, Vol. 44, pp. 466-478.
- Porte-Agel, F., Meneveau, C. e Parlange, M. B., 2000, "A scale-dependent dynamic model for large-eddy simulation: Application to a neutral atmospheric boundary layer", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 415, pp. 261-284.
- Prosperetti, A. e Tryggvason, G., 2007, "Computational methods for multiphase flow", Cambridge University Press, UK, 470p.
- Roache, P.J., 1972, "Computational fluid dynamics", Hermosa Publishers, Albuquerque, 446p.
- Rowe, P.N., 1961, "Drag Forces in a Hydraulic Model of a Fluidized Bed. Part II", Trans. IChemE, Vol. 39, pp. 175-180.
- Sagaut, P., 2001, "Large eddy simulation for incompressible flows", Springer, Berlin, 556p.
- Silveira Neto, A., 2002. "Fundamentos da turbulência nos fluidos, e Simulação de grandes escalas de escoamentos turbulentos", em Turbulência, Ed. A.P.S. Freire, P.P.M. Menut e J. Su, ABCM, Rio de Janeiro, Caps. 1 e 4.
- Sinclair, J.L. e Jackson, R., 1989, "Gas-particle flow in a vertical pipe with particle-particle interactions", AIChE Journal, Vol. 35, No. 9, pp. 1473-1486.
- Sinclair, J.L., 1997, "Hydrodynamic Modeling", In Circulating Fluidized Beds, ed. J.R. Grace et al., Chapman & Hall. Cap. 5, p.149-180.
- Smagorinsky, J., 1963, "General circulation experiments with the primitive equations, Part I: The basic experiment", Monthly Weather Review, Vol. 91, No. 3, pp. 99-164.
- Soo, S.L., 1967, "Fluid dynamics of multiphase system", Waltham: Blaisdell Publ.
- Sun, B., 1996, "Simulation of Gas-liquid and Gas-solid Two Phase Flows", PhD thesis, Illinois Institute of Technology, Chicago, Illinois, 231p.
- Sundaresan, S., 1999, "Prof. Sundaresan's Wilhelm award lecture", 1999th AIChE Annual Meeting.
- Sundaresan, S., 2000, "Hydrodynamics of multiphase flow reactors: current status and challenges", AIChE Journal, Vol. 46, No. 6, pp. 1102-1105.
- Sundaresan, S., Agrawal, K., e Loezos, P., 2001, "Current research at the Multiphase Flow Group of Princeton University", [www.princeton.edu/~sundar/group.html](http://www.princeton.edu/~sundar/group.html).
- Syamlal, M., Rogers, W. e O'Brien, T. J., 1993, "Theory guide", MFIX documentation, Vol. 1, DOE/METEC-9411004 NTIS/DE9400087, National Technical Information Service, Springfield, VA.
- Tan, M. -L. e Goldhirsch, I., 1997, "Intercluster interactions in rapid granular shear flows", Physics of Fluids, Vol. 9, No. 4, pp. 856-869.
- Tan, M-L., e Goldhirsch, I., 1998, "Rapid granular flows as mesoscopic systems", Physical Review Letters, Vol. 81, No. 4, pp. 3022-3025.
- Therdthianwong, A., 1994, "Hydrodynamics and SO<sub>2</sub> sorption in a circulating fluidized bed", Ph.D. Thesis, Illinois Institute of Technology, Chicago, Illinois, 219p.

- Tsuo, Y.P. e Gidaspow, D., 1990, "Computation of flow patterns in circulating fluidized beds", *AIChE J.*, Vol. 36, No. 6, pp. 885-896.
- van der Hoef, M.A., van Sint Annaland, M., Deen, N.G. e Kuipers, J.A.M., 2008, "Numerical simulation of dese gas-solid fluidized beds: a multiscale modeling strategy", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 40, pp. 47-70.
- van der Hoef, M.A., Ye, M., van Sint Annaland, M., Andrews IV, A.T., Sundaresan, S. e Kuipers, J.A.M., 2006, "Multiscale modeling of gas-fluidized beds", *Advances in Chemical Engineering*, Vol. 31, pp. 65-149.
- Vision 21, 2007, "Clean energy plants for the 21st century - Vision 21", US Department of Energy (DOE), ([http://www.fe.doe.gov/coal\\_power/vision21/v21plan.pdf](http://www.fe.doe.gov/coal_power/vision21/v21plan.pdf)).
- Wang, W. e Li, J., 2007, "Simulation of gas-solid two-phase flow by a multi-scale CFD approach - Extension of the EMMS model to the sub-grid level", *Chem Eng. Science*, Vol. 62, pp. 208-231.
- Wen, C.Y. e Yu, Y.U., 1966, "Mechanics of fluidization", *Chem. Engng. Prog. Symp. Series*, Vol. 62, pp. 100-111.
- Yamamoto, Y., Potthoff, M., Tanaka, T., Kajishima, T e Tsuji, Y., 2001, "Large-eddy simulation of turbulent gas-particle flow in a vertical channel: effect of considering inter-particle collisions", *J. Fluid Mech.*, Vol. 42, pp. 303-334.
- Zhang, D.Z. e van der Heyden, W.B., 2001, "High-resolution three-dimensional numerical simulation of a circulating fluidized bed", *Powder Technology*, Vol. 116, pp. 133-141.
- Zhang, D.Z. e VanderHeyden, W.B., 2002, "The effects of mesoscale structures on the macroscopic momentum equations for two-phase flows", *Int. J. of Multiphase Flow*, Vol. 28, pp. 805-822.



# CAPÍTULO 8 - Ondas e Estabilidade Hidrodinâmica em Escoamento Bifásico Líquido-Líquido Paralelo

**Oscar M. H. Rodriguez**

Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos (EESC)

Universidade de São Paulo (USP)

Av. Trabalhador São-carlense, 400, 13566-970, São Carlos, SP – Brasil

*oscarahr@sc.usp.br*

## Lista de Símbolos

$A$	área [m <sup>2</sup> ]
$A'$	derivada da área <i>in situ</i> com a altura na seção transversal [m]
$C$	fração volumétrica [-]
$c_o$	velocidade de onda interfacial [m/s]
$D$	diâmetro [m]
$Eo$	número de Eötvös [-]
$F$	lado direito da Eq. 6.39
$f$	coeficiente de fricção [-]
$g$	aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]
$h_w$	altura da água na seção transversal [m]
$I$	tensor unitário [-]
$J$	velocidade da mistura [m/s]
$J_1$	velocidade superficial da fase 1 [m/s]
$J_2$	velocidade superficial da fase 2 [m/s]
$k$	fator de forma [-]
$L$	comprimento ou Eq. 6.43 [m]
$\dot{m}$	fluxo de massa [kg/s]
$\vec{n}$	vetor unitário normal à superfície [-]

$\vec{N}$	vetor unitário normal à interface [-]
$p$	pressão [Pa]
$Q$	vazão volumétrica [m <sup>3</sup> /s]
$r$	raio [m]
$Re$	número de Reynolds [-]
$s$	deslizamento entre as fases [-]
$S$	perímetro [m]
$t$	tempo [s]
$T$	tempo de amostragem [s]
$v$	volume [m <sup>3</sup> ]
$V$	velocidade <i>in situ</i> [m/s]
$\vec{V}_p$	velocidade da partícula [m/s]
$V_r$	velocidade relativa [m/s]
$w$	componente cartesiano do vetor velocidade na direção axial [m/s]
$We$	número de Weber [-]
$x,y,z$	coordenadas cartesianas [m]

#### Símbolos gregos

$\zeta$	contorno da superfície [-]
$\varepsilon$	fração volumétrica <i>in situ</i> [-]
$\rho$	densidade [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_i$	Densidade superficial [kg/m <sup>2</sup> ]
$\Pi$	tensor das tensões [-]
$\sigma$	tensão interfacial [N/m]
$\theta$	ângulo de inclinação da horizontal [-]
$\mu$	viscosidade dinâmica [Pa.s]
$\lambda$	comprimento de onda [m]
$\tau$	tensor viscoso [N/m]
$\tau_i$	tensão cisalhante interfacial [N/m]
$\tau_p$ ou $\tau_w$	tensão cisalhante parietal [N/m]
$V_s$	Divergente superficial

## Subscrito

$1$	fase 1, fase do núcleo
$2$	fase 2, fase anular
$a$ ou $w$	fase água
$i$	interface
$k$	indicador de fase
$o$	fase óleo
$p$	partícula ou parietal
$s$	superfície

## Superscrito

—	Condição de equilíbrio
$\langle \ \rangle$	Operador de média espacial
—	Operador de média temporal
$\rightarrow$	Operador vetorial

## 1. Introdução

Escoamentos bifásicos são observados em numerosos processos naturais e industriais, sendo compostos de duas fases imiscíveis arranjadas em diversas configurações geométricas ou padrões de escoamento. Há muitos exemplos comuns, por exemplo: neblina, água fervente, fumaça, ovos mexidos, chuva, molho para salada, nuvens, creme batido, areia movediça, tempestades de areia, etc. Quando cerveja é vertida de uma garrafa, a vazão é limitada pela velocidade das bolhas que sobem pelo gargalo num padrão de escoamento conhecido como golfadas; subseqüentemente, bolhas nucleadas por defeitos nas paredes do copo ascendem para formar a saborosa espuma na superfície. No âmbito industrial, eles são comumente encontrados na forma de misturas: (i) gás ou líquido-sólidos (alguns exemplos: leitos fluidizados borbulhantes ou circulantes, biorreatores e transporte pneumático), com aplicações comuns na indústria farmacêutica, metalúrgica e petroquímica (reações de síntese, craqueamento catalítico, reações de oxidação e redução de minérios, processos de combustão e gaseificação, transporte de material particulado e recuperação de calor); (ii) gás-líquido (colunas de bolhas, torres de resfriamento, escoamentos condensado-vapor, óleo-gás e água-gás em tubulações), com aplicações comuns na indústria petroquímica, nuclear e de refrigeração (microbiologia, caldeiras, refrigeração e ventilação industrial, reatores nucleares,

produção e transporte de petróleo e gás natural); e (iii) líquido-líquido (escoamento de óleo leve ou pesado e água em tubulações, escoamento de emulsões), com aplicações comuns na indústria de alimentos e de petróleo (transporte de emulsões na indústria de alimentos, produção e transporte de petróleo). Uma introdução aos escoamentos bifásicos é oferecida nos seguintes livros: Kunii e Levenspiel (1969), Wallis (1969), Govier e Aziz (1972), Ishii (1975), Butterworth e Hewitt (1977), Hewitt (1978), Collier (1981), Bergles et al. (1981), Delhaye et al. (1981), Hetsroni (1982), Botterill (1986), Howard (1989) e Hewitt et al. (2000).

A característica mais marcante dos escoamentos bifásicos é que a mistura de fluidos imiscíveis ou fases pode apresentar-se em várias configurações espaciais ou padrões de escoamento. Considerando apenas misturas gás-líquido e líquido-líquido, essas podem ser agrupadas em três categorias: escoamento disperso (dispersões e emulsões), escoamento de fases separadas (estratificado e anular) e escoamento intermitente (bolhas alongadas, golfadas ou pistonado). Cada padrão de escoamento tem sua própria relação de deslizamento entre as fases, isto é, sua forma particular para o cálculo da fração volumétrica *in situ* e da perda de carga bifásica. Escoamento de fases separadas compreende os padrões anular e estratificado. O primeiro tem sido sugerido como uma alternativa rentável para o transporte e elevação artificial de óleos altamente viscosos, além de ser o padrão com ocorrência mais comum em sistemas de refrigeração e na produção de gás natural. O segundo, como uma forma conveniente de evitar a formação de emulsões de água em óleo em oleodutos e também com uma ocorrência comum em poços de petróleo direcionais. Tais padrões de escoamento são comumente modelados como tendo fases paralelas, *i.e.*, um escoamento bifásico paralelo.

O movimento ondulatório é um tópico científico amplo. O comportamento de ondas do mar, em águas profundas ou rasas, a propagação da luz e som são exemplos familiares e cotidianos. Entretanto, eventos como tráfego pesado, engarrafamentos em ruas ou rodovias movimentadas, enchentes ou inundações, infelizmente não tão incomuns na época das chuvas em nosso país, também podem ser tratados ou modelados como movimentos ondulatórios. Parece não haver uma definição única e precisa do que exatamente é uma onda. Pode-se simplesmente dizer que uma onda seria qualquer sinal reconhecível que é transferido de uma parte do meio para outra com uma velocidade de propagação conhecida. O sinal poderia ser qualquer característica de uma perturbação, como uma mudança abrupta de alguma grandeza, como o nível de um rio numa frente de inundação ou densidade do meio no caso do som. Mudanças na magnitude e velocidade do sinal são possíveis, desde que ele ainda seja distinguível. A teoria das ondas unidimensionais encontra inúmeras aplicações e é uma técnica poderosa para a análise de escoamentos não-permanentes e fenômenos de resposta transitória. Ondas de choque, como o golpe de aríete da hidráulica, ou a inundação (“flooding”) de poços produtores de gás na indústria de petróleo podem ser explicadas por essa teoria. Em alguns casos, transições de padrão de escoamento bifásico paralelo podem ser atribuídas a instabilidades que resultam da amplificação de uma onda de perturbação unidimensional.

A teoria da estabilidade hidrodinâmica integra o escopo da mecânica dos fluidos clássica deste a primeira metade do século passado (Hermann Schlichting). Ela é capaz de levar em conta o efeito de um número de parâmetros (instabilidades) sobre a transição do regime laminar ao regime turbulento. Essa teoria tem encontrado inúmeras aplicações importantes, entre elas no projeto de aerofólios de baixo arrasto (aerofólios laminares). A partir da década de 1970 a teoria da estabilidade hidrodinâmica passou a ser aplicada com intensidade para a modelagem e previsão das fronteiras de transição de padrão de escoamento bifásico. Segundo Graham B. Wallis, em alguns casos, transições de padrão de escoamento podem ser atribuídas a instabilidades que resultam da amplificação temporal de uma onda de perturbação na interface das fases. Entretanto, a formidável complexidade dos escoamentos bifásicos não permite, na maioria das vezes, a solução analítica das equações governantes gerais. Métodos numéricos (*CFD*) têm sido capazes de descrever em detalhes a física dos escoamentos bifásicos em algumas circunstâncias, mas ainda com um custo computacional relativamente elevado. Nesse contexto, a pretensão deste documento é apresentar a abordagem unidimensional para o estudo da estabilidade hidrodinâmica dos escoamentos bifásicos paralelos. A modelagem unidimensional encontra aplicação óbvia no escoamento em tubulações e permite a aplicação de um modelo de dois fluidos rigoroso.

O texto está organizado da seguinte forma. Na seção 2 são delineadas considerações gerais a respeito do escoamento bifásico líquido-líquido, como ocorrência, padrões de escoamento e mapas de fluxo. Na seção 3, aspectos fundamentais da modelagem bifásica são demonstrados, incluindo a derivação das equações de transporte segundo o modelo de dois fluidos unidimensional. Na seção 4, trata-se da teoria da onda cinemática e aplicações em escoamento bifásico líquido-líquido paralelo. Conceitos básicos relativos à estabilidade hidrodinâmica em escoamento bifásico paralelo são apresentados na seção 5. A teoria da estabilidade linear é aplicada para casos típicos e exemplos são descritos em detalhe na seção 6: escoamento anular líquido-líquido e escoamento estratificado em tubulações. Finalmente, temos as conclusões na seção 7.

## **2. Escoamento bifásico líquido-líquido**

### ***2.1. Considerações iniciais***

Antes de dar início ao tema específico deste estudo, alguns dos termos básicos do escoamento bifásico serão definidos. Consideram-se duas fases escoando simultaneamente em uma tubulação com área de seção transversal  $A$ . As vazões volumétricas de injeção da fase 1 e fase 2 são  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente. As frações volumétricas de injeção das fases são, respectivamente:

$$C_1 = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}, C_2 = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \quad (2.1)$$

As velocidades superficiais da fase 1 e da fase 2 são baseadas nas vazões volumétricas de injeção e na área de seção transversal do tubo e são definidas, respectivamente, como:

$$J_1 = \frac{Q_1}{A}, J_2 = \frac{Q_2}{A} \quad (2.2)$$

Combinado as Equações 2.1 e 2.2 é obtida a relação entre as velocidades superficiais e as frações volumétricas de injeção:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (2.3)$$

Em escoamento bifásico, assume-se que cada fase ocupa diferentes partes da seção transversal do tubo. A velocidade média ou velocidade *in situ* é diferente da velocidade superficial, pois é calculada da vazão volumétrica sobre uma área menor do que a área transversal do tubo. Chamando  $A_1$  e  $A_2$  as áreas de seção transversal ocupadas pela fase 1 e fase 2, respectivamente, as velocidades *in situ* são dadas por:

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1}, V_2 = \frac{Q_2}{A_2} \quad (2.4)$$

Das Equações 2.2 e 2.4, segue-se que a velocidade *in situ* excede a velocidade superficial.

O *holdup* ou fração volumétrica *in situ* da fase  $\varepsilon$  (média no tempo e na seção transversal em certo trecho de tubo) é freqüentemente considerada como uma grandeza local, isto é, refere-se a um comprimento diferencial de tubo. Portanto, as frações volumétricas *in situ* da fase 1 e da fase 2 são definidas da seguinte forma:

$$\varepsilon_1 = \frac{A_1 \delta L}{A \delta L} = \frac{A_1}{A}, \varepsilon_2 = \frac{A_2}{A} \quad (2.5)$$

sendo  $\delta L$  um comprimento diferencial de tubo. A velocidade *in situ* e a velocidade superficial de cada fase estão relacionadas à fração volumétrica *in situ* da seguinte forma:

$$V_1 = \frac{J_1}{\varepsilon_1}, V_2 = \frac{J_2}{\varepsilon_2} \quad (2.6)$$

A velocidade da mistura é definida pela divisão da vazão volumétrica total pela seção transversal do tubo:

$$J = \frac{Q_1 + Q_2}{A} \quad (2.7)$$

que também é igual à soma das velocidades superficiais ( $J = J_1 + J_2$ ). Aqui, vale notar que  $J$  corresponde a uma velocidade média da mistura, ponderada pela fração volumétrica *in situ*, ou seja:

$$J = V_1\varepsilon_1 + V_2\varepsilon_2 \quad (2.8)$$

Quando dois fluidos escoam juntos em uma tubulação, a fração volumétrica *in situ* é geralmente diferente da fração volumétrica de injeção. Diferenças nas densidades e/ou viscosidades das fases causam uma importante característica dos escoamentos bifásicos: o deslizamento,  $s$ . O deslizamento (*holdup ratio*) pode ser definido como a razão das frações volumétricas *in situ* ( $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ ) pela razão das frações volumétricas de injeção ( $C_2/C_1$ ), o que é equivalente à razão das velocidades das fases *in situ*, ou seja:

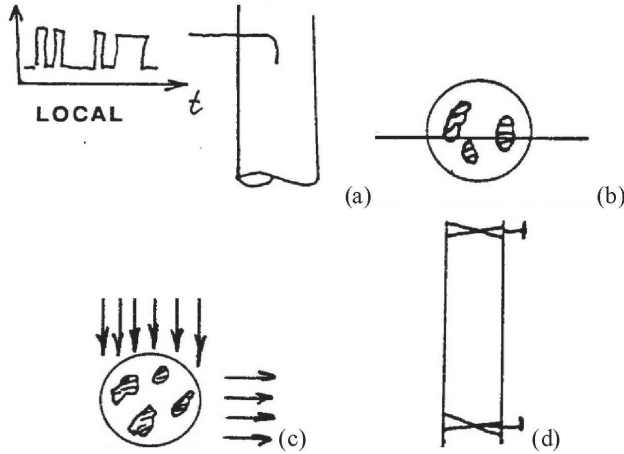
$$s = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{C_2}{C_1} \quad (2.9)$$

Quando o deslizamento é maior do que a unidade a fase 2 esta acumulando-se no tubo e a fase 1 esta escoando mais rapidamente. Inversamente, quando o deslizamento é menor do que a unidade a fase 1 esta acumulando-se no tubo e a fase 2 esta escoando mais rapidamente.

Poder-se-ia dizer que a variável primordial do escoamento bifásico é a fração volumétrica *in situ*. Por exemplo, o cálculo da queda de pressão bifásica e do coeficiente de transferência de calor por convecção em escoamentos em tubulações depende irremediavelmente do prévio conhecimento da fração volumétrica *in situ*. A fração volumétrica *in situ*,  $\varepsilon$ , comumente medida em laboratório, é resultante de médias temporais e espaciais da fração de fase. A fração de fase local ou cordal,  $\bar{\varepsilon}$ , é obtida através de médias temporais, conforme Fig. 2.1a e b, respectivamente, ou seja:

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{T} \int_t \varepsilon_k dt = \frac{T_k}{T} \quad (2.10)$$

onde  $T$  é o tempo de amostragem e o subscrito  $k$  indica fase.



**Fig. 2.1** (a) Fração de fase local e (b) fração de fase cordal, avaliadas no tempo,  $t$ . (c) Fração de fase instantânea média na seção transversal e (d) Fração de fase média volumétrica (válvulas de fechamento rápido).

A fração de fase instantânea média na seção transversal,  $\langle \varepsilon \rangle$ , é obtida através de média espacial (Fig. 1c), isto é:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{A} \int_A \varepsilon_k dA = \frac{A_k}{A} \quad (2.11)$$

onde  $A$  é área de seção transversal. Observa-se relação comutativa entre médias temporal e espacial, *i.e.*:

$$\langle \bar{\varepsilon}_k \rangle = \overline{\langle \varepsilon_k \rangle} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{A} \int_A \frac{T_k}{T} dA = \frac{1}{T} \int_t \frac{A_k}{A} dt \quad (2.12)$$

A Eq. (2.12) nos diz que a média espacial do valor médio local no tempo da fração de fase e que a média temporal do valor médio instantâneo na seção transversal da fração de fase representam a mesma grandeza: a fração volumétrica *in situ*,  $\varepsilon$ . Em variadas circunstância práticas, a fração volumétrica *in situ* pode ser considerada uma grandeza local, como definido pela Eq. (2.5). Assim sendo, ela



pode ser medida em laboratório através da técnica das válvulas de fechamento rápido (Fig. 2.1d).

## **2.2. Escoamento bifásico líquido-líquido em tubulação**

Na engenharia da área *upstream* da indústria de petróleo, mais especificamente elevação e escoamento, superdimensionamentos são comuns. Considerando o projeto de um sistema de transporte de fluidos, a maior dificuldade em escoamento bifásico é que a geometria da interface não é conhecida *a priori*, *i.e.*, nos não sabemos como as fases estão arranjadas geometricamente. A importância de conhecer o padrão de escoamento é clara: necessário para a modelagem, cálculo e previsão eficiente de transferência de calor, queda de pressão, corrosão, etc., ou seja, parâmetros imprescindíveis para o projeto e operação dos equipamentos e sistemas industriais. A necessidade de métodos de projeto confiáveis para escoamentos multifásicos tem sido a força motriz detrás do extensivo esforço de pesquisa na área registrado na literatura nos últimos 40 anos, especialmente sobre escoamentos gás-líquido. Recentemente, a indústria tem focado em direção ao escoamento trifásico gás-líquido-líquido. Entretanto, o caso especial onde apenas as fases líquidas estão presentes não tem recebido a mesma atenção. O escoamento simultâneo de dois líquidos imiscíveis em tubos é de ocorrência comum na indústria de petróleo. Não raro, uma quantidade significativa de água (aquífero) está presente na formação rochosa rica em petróleo, especialmente em reservatórios maduros. Além disso, a água injetada no reservatório para facilitar a drenagem de óleos viscosos pode encontrar o caminho para o poço de produção. A configuração geométrica do escoamento de misturas imiscíveis de líquidos em tubos é bastante diferente daquela das misturas gás-líquido. A diferença é explicada principalmente pela grande capacidade de transferência de quantidade de movimento entre os líquidos e efeito de empuxo menor. Adicionalmente, a menor energia livre interfacial permite a formação de ondas interfaciais mais curtas e gotas dispersas de tamanho menor. Portanto, sistemas bifásicos líquido-líquido têm comportamento diferente e apresentam padrões de escoamento diferentes em comparação com os sistemas gás-líquido.

### **2.2.1. Escoamento bifásico líquido-líquido em tubulação vertical ascendente**

Em linhas verticais e para misturas de óleo e água com alta razão de viscosidades ( $\mu_{\text{óleo}} \gg \mu_{\text{água}}$ ) os padrões de escoamento observados, tendo a água como fase dominante, são essencialmente os seguintes (Fig. 2.2).

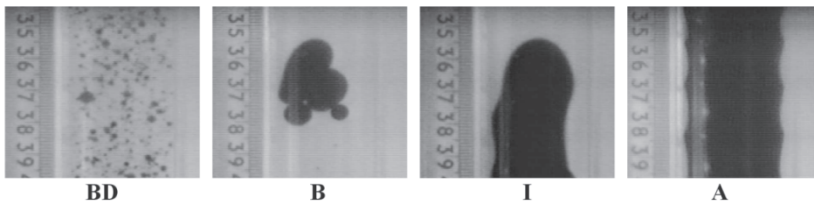
Gotículas dispersas (BD): este padrão ocorre a baixas vazões de óleo e altas vazões de água. Tal padrão poderia ser chamado também de dispersão de óleo em

água. As gotas de óleo, relativamente pequenas e praticamente esféricas, são arrastadas pela grande vazão de água e basicamente seguem a tendência do perfil de velocidades esperado para o escoamento monofásico de água em tubulações (maiores velocidades no centro do tubo e menores na região adjacente à parede). O padrão difere da emulsão, pois se notam nitidamente as fases.

**Gotas (B):** esse padrão ocorre para maiores vazões de óleo e menores vazões de água, em comparação com o padrão BD. As gotas possuem um diâmetro maior e apresentam-se nas seguintes formas: esférica, calota elíptica e calota esférica (*cap*). As gotas possuem um movimento independente do perfil parabólico da água, deslocando-se de maneira oscilatória em relação ao plano observado. Devido à menor turbulência da fase contínua e maior diâmetro das gotas, ocorre coalescência.

**Intermitente (I):** aumentando-se a vazão de óleo, a partir do padrão B, as gotas tendem a unir-se em grandes gotas alongadas, separadas por longos trechos de água. A dimensão radial da gota alongada aproxima-se do diâmetro do tubo e a forma do seu “nariz” lembra as bolhas de Taylor do escoamento gás-líquido. A fase contínua (água) pode apresentar gotículas dispersas.

**Anular (A):** no padrão anular o óleo escoo no núcleo do tubo circundado por um filme de água. Tal padrão ocorre para maiores vazões de óleo, em comparação com o padrão intermitente. A interface apresenta estrutura ondulatória que lembra um “bambu”. Dependendo da razão de injeção das fases, o filme de água pode apresentar gotículas dispersas e o núcleo oleoso pode apresentar distorções ou perturbações na interface de alta frequência.



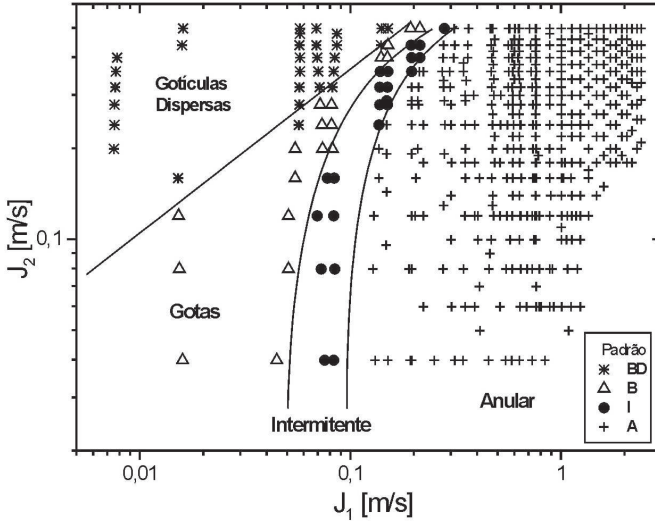
**Fig. 2.2** Padrões de escoamento líquido-líquido (água e óleo altamente viscoso) em tubulação vertical ascendente (Bannwart *et al.*, 2004). BD - Gotículas dispersas, B - Gotas, I - Intermitente e A - Anular.

Na figura 2.3 pode ser vista carta de fluxo para escoamento líquido-líquido vertical ascendente (vide também Fig. 2.2).

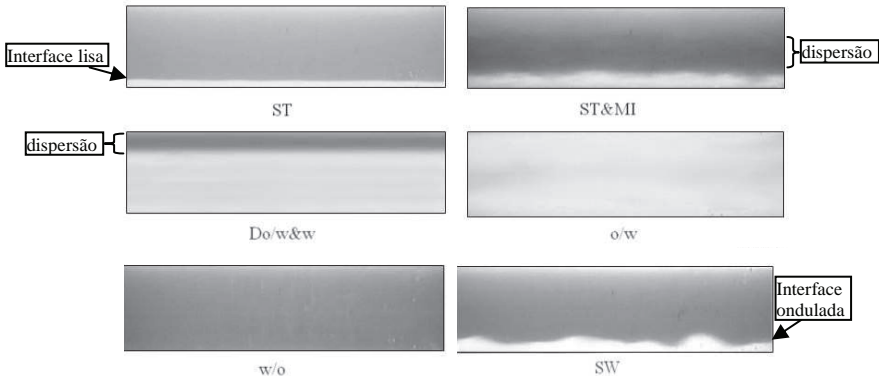
### 2.2.2. Escoamento bifásico líquido-líquido em tubulação horizontal

Em linhas horizontais e para misturas de óleo e água com moderada razão de viscosidades os padrões de escoamento observados de são basicamente os seguintes, (Fig. 2.4):

Estratificado (ST): para velocidades superficiais baixas o escoamento é dominado pela gravidade; as fases escoam separadamente e a interface é lisa. Apesar disso, as fases podem estar no regime de transição para a turbulência, especialmente a fase menos viscosa.



**Fig. 2.3** Carta de fluxo para escoamento vertical ascendente de mistura de água e óleo viscoso (viscosidade 500 mPa.s e densidade  $935 \text{ kg/m}^3$  a  $25^\circ \text{C}$ ), (Bannwart *et al.*, 2004). BD - Gotículas dispersas, B - Gotas, I - Intermitente e A - Anular.



**Fig. 2.4** Fotografias de Padrões de escoamento líquido-líquido (óleo pouco viscoso e água) em tubulação horizontal (Rodríguez e Oliemans, 2006). ST - Estratificado, ST & MI - Estratificado com mistura na interface, Do/w & w - Dispersão de óleo em água sobre camada de água, o/w - Dispersão homogênea de óleo em água, w/o - Dispersão homogênea de óleo em água e SW - Estratificado ondulado.

Estratificado com mistura na interface (ST & MI): o padrão ocorre para velocidades superficiais mais altas em comparação ao padrão ST. Na proximidade da interface podem ser observadas gotículas de óleo na camada de água e, eventualmente, gotículas de água na camada de óleo. Ondas interfaciais podem ser observadas, mas sua geometria é de difícil caracterização devido à intensa dispersão nas proximidades da interface. Forças dinâmicas e empuxo agem simultaneamente nas gotículas dispersas.

Estratificado ondulado (SW): o padrão ocorre para velocidades superficiais mais baixas em comparação com o padrão ST & MI e mais altas em comparação ao padrão ST. Surgem ondas interfaciais com comprimento da ordem do diâmetro do tubo. Não se observam concentrações significativas de gotículas de óleo ou água nas proximidades da onda interfacial.

Dispersão de óleo em água sobre camada de água (Do/w & w): ocorre a altas velocidades superficiais de água, *i.e.*, trata-se de um escoamento dominado pela água. Vórtices aquosos próximos à interface dispersam a fase oleosa. A força de empuxo prevalece e empurra as gotículas de óleo para cima, restando uma camada espessa de água na parte inferior do tubo. Devido a efeitos de molhabilidade, a água ainda pode permanecer na parte superior do tubo, como um filme lubrificando o óleo.

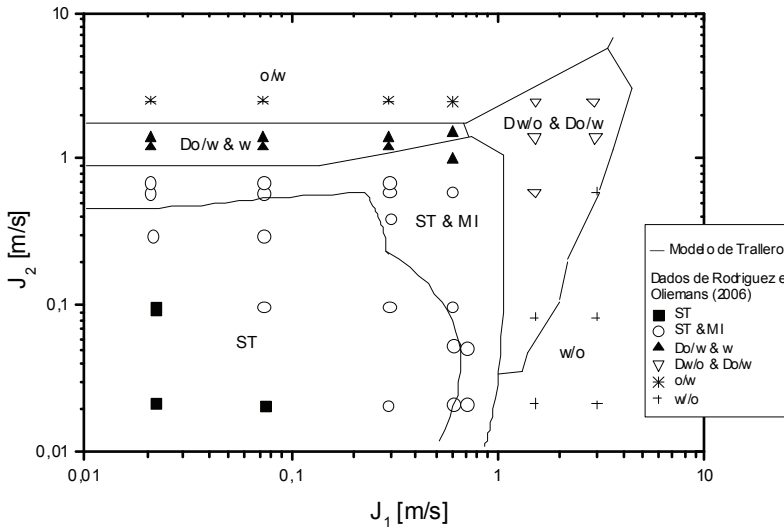
Dispersão homogênea de óleo em água (o/w): ocorre para velocidades superficiais de água extremamente altas. Trata-se de um escoamento dominado pela água; uma dispersão estável de óleo em água, sendo a estabilidade neste caso definida em termos do tempo de observação, ou seja, a emulsão pode ser estável apenas enquanto as forças relacionadas à turbulência do escoamento superam o empuxo.

Dispersão homogênea de água em óleo (w/o): ocorre para velocidades superficiais de óleo extremamente altas e é semelhante ao padrão (o/w), mas, neste caso, óleo é a fase contínua e água a fase dispersa.

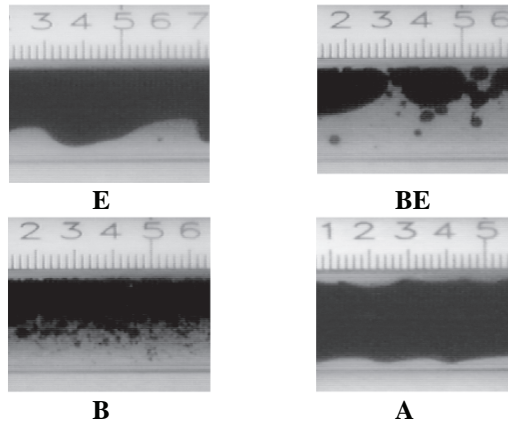
Dispersão de óleo em água e dispersão de água em óleo (Dw/o & Do/w): ocorre para altas velocidades superficiais de água e óleo. Partindo do padrão ST & MI, com o aumento das velocidades superficiais, a região de mistura próxima à interface cresce e os dois tipos de dispersão, o/w e w/o, podem coexistir. A dispersão dual ocupa a maior parte da área da seção transversal do tubo e não raro é confundida com o padrão w/o ou o/w.

Na figura 2.5 pode ser observada uma comparação entre a carta de fluxo experimental levantada por Rodriguez e Oliemans (2006) e as fronteiras de transição de padrão de escoamento previstas pelo modelo fenomenológico proposto por Trallero (1995) (vide também Fig. 2.4).

Quando as fases líquidas possuem alta razão de viscosidades, os padrões de escoamento são significativamente diferentes. Em linhas horizontais e para mistura de óleo e água com alta razão de viscosidades ( $\mu_{\text{óleo}} \gg \mu_{\text{água}}$ ) os padrões de escoamento dominados pela água são basicamente os seguintes, (Fig. 2.6):



**Fig. 2.5** Carta de fluxo para escoamento horizontal de mistura de água e óleo (viscosidade 7 mPa.s) em tubulação de aço de 8,28 cm DI, (Rodriguez e Oliemans, 2006). ST - Estratificado, ST & MI - Estratificado com mistura na interface, Do/w & w - Dispersão de óleo em água sobre camada de água, o/w - Dispersão homogênea de óleo em água, w/o - Dispersão homogênea de água em óleo e Dw/o & Do/w - Dispersão de óleo em água e dispersão de água em óleo.



**Fig. 2.6** Padrões de escoamento líquido-líquido (água e óleo altamente viscoso) em tubulação horizontal (Bannwart *et al.*, 2004). E - Estratificado, B - Gotas estratificadas, BE - Gotas dispersas, A - Anular.

**Estratificado (E):** padrão observado para médias e altas vazões de óleo e para baixas, médias e altas vazões de água. A água escoar na parte de baixo do tubo e a fase contínua de óleo escoar na parte superior da tubulação. Devido a efeitos de molhabilidade, água pode permanecer na parte superior do tubo como um filme

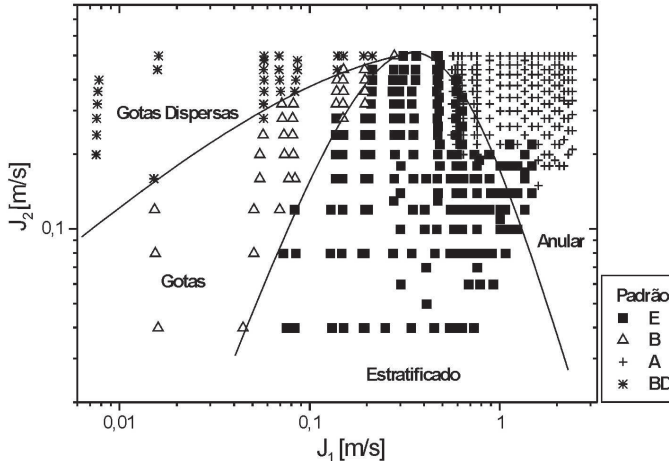
extremamente fino (sem ondas), lubrificando o óleo viscoso. O escoamento da água se dá normalmente a velocidades *in situ* significativamente mais altas em comparação com o óleo.

**Gotas estratificadas (B):** o escoamento do óleo apresenta-se sob a forma de gotas ligadas umas às outras, formando o que se poderia chamar de “trem de gotas”. As gotas de óleo concentram-se na parte superior do tubo, com água escoando na parte inferior, e possuem forma esférica, com ligeiro achatamento próximo à parede superior do tubo. As gotas são observadas para baixas e médias vazões de óleo e baixas, médias e altas vazões de água.

**Gotas dispersas (BD):** bastante semelhante ao padrão BD observado no escoamento vertical ascendente, mas pode ocorrer na forma semi-estratificada, com uma concentração de pequenas gotas esféricas na parte superior do tubo. Observa-se este padrão para baixas vazões de óleo e médias e altas vazões de água. Tal padrão poderia ser chamado também de dispersão de óleo em água. O padrão difere da emulsão, pois notam-se nitidamente as fases.

**Anular (A):** o padrão anular caracteriza-se por uma fase escoando no núcleo do tubo (óleo) circundada por uma segunda fase escoando junto à parede do tubo (água). Observam-se ondas interfaciais tanto na parte superior quanto na parte inferior do tubo, entretanto as últimas possuem comprimento de onda maior.

Na figura 2.7 pode ser vista a carta de fluxo para escoamento líquido-líquido horizontal (vide também Fig. 2.6).



**Fig. 2.7.** Carta de fluxo para escoamento horizontal de mistura de água e óleo viscoso (viscosidade 500 mPa.s e densidade 935 kg/m<sup>3</sup> a 25° C), (Bannwart *et al.*, 2004). E - Estratificado, B - Gotas estratificadas, BD - Gotas dispersas, A - Anular.

Cabe aqui destacar que o padrão de escoamento anular, A, em escoamento líquido-líquido com alta razão de viscosidades (Figs. 2.6 e 2.10) representa uma al-

ternativa para a elevação e o transporte de óleos ultra-viscosos (na faixa dos  $10^3$ - $10^5$  mPa.s). A técnica baseia-se na experiência acumulada no transporte de fluidos altamente viscosos por injeção de pequenas quantidades de água, de tal forma a criar uma adequada lubrificação do óleo e estabelecer o padrão de escoamento anular líquido-líquido, conhecido como *core flow* ou *core-annular flow*. A literatura reporta que linhas para o transporte de petróleo pesado de aproximadamente 50 km de extensão e 6 polegadas de diâmetro interno foram construídas e operaram com sucesso na Venezuela e nos Estados Unidos. Contudo, essa idéia parece não ter sido ainda testada para a elevação artificial de óleos ultra-viscosos.

### **3. Aspectos fundamentais da modelagem de escoamento bifásico: modelo de dois fluidos unidimensional**

O propósito desta seção é apresentar em detalhe o desenvolvimento das equações fundamentais unidimensionais da mecânica dos fluidos do escoamento bifásico e mostrar como elas podem ser aplicadas na solução de problemas práticos. A abordagem unidimensional tem importância indiscutível em uma grande variedade de disciplinas tradicionais da engenharia e em inúmeras circunstâncias é capaz de capturar o resultado preponderante de um fenômeno multidimensional. Por exemplo, o escoamento bidimensional em torno e internamente a uma bolha ascendendo em um líquido não é derivado ou discutido, mas a função resultante da velocidade com o diâmetro é observada. Neste texto, apenas escoamentos essencialmente unidimensionais são considerados, como aqueles que ocorrem em tubos e dutos. Fenômenos multidimensionais são considerados apenas quando necessários para colocar as hipóteses unidimensionais em perspectiva, para fornecer resultados requeridos para especificar o problema *a priori* ou quando se faz necessária a introdução de parâmetros de distribuição para correção da expressão unidimensional.

#### ***3.1. Equações locais instantâneas do escoamento bifásico e condições de salto***

A seguir, são derivadas as equações locais instantâneas do escoamento bifásico.

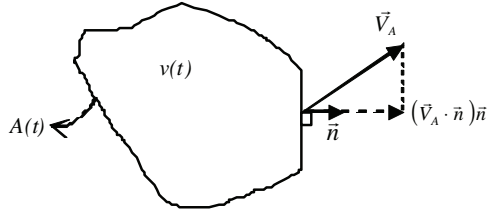
##### **3.1.1 Relações Matemáticas Importantes**

Regra de Leibniz

Trata-se de uma análise puramente geométrica (Fig. 3.1).

$$3D \quad \frac{d}{dt} \int_{v(t)} F(x, y, z, t) dv = \int_{v(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dv + \oint_{A(t)} F \vec{V}_A \cdot \vec{n} dA$$

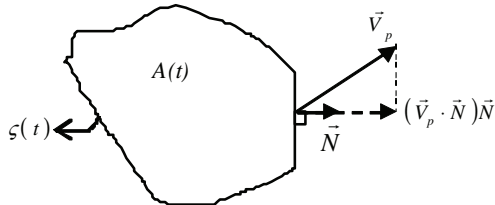
onde  $F$  representa uma grandeza tensorial qualquer.



**Fig. 3.1.** Esquema para regra de Leibniz 3-D.

$$2D \quad \frac{d}{dt} \int_{A(t)} F(x, y, z, t) dA = \int_{A(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dA + \oint_{\zeta(t)} F \vec{V}_p \cdot \vec{N} d\zeta$$

onde, tem-se a Fig. 3.2.



**Fig. 3.2.** Esquema para regra de Leibniz 2-D.

Teorema de Gauss (ou da divergência)

$$3D \quad \oint_{A(t)} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \int_{v(t)} \nabla \cdot \vec{F} dv$$

sendo  $\vec{F}$  um vetor ou tensor de segunda ordem.



$$2D \quad \oint_{\zeta(t)} \vec{F} \cdot \vec{N} d\zeta = \int_{A(t)} \nabla_s \cdot \vec{F} dA$$

onde:

$$\nabla_s \cdot = \textit{divergente superficial} = \hat{l}_{s_1} \cdot \frac{\partial}{\partial s_1} + \hat{l}_{s_2} \cdot \frac{\partial}{\partial s_2}$$

### 3.1.2 Balanços Globais Instantâneos para Escoamento Bifásico

Antes da apresentação das equações bifásicas instantâneas, serão apresentadas as equações da conservação da massa e quantidade de movimento para escoamento monofásico, as quais serão utilizadas nas seções subseqüentes. A derivação da equação da energia pode ser encontrada em Hetsroni (1982, Cap. 1.2).

#### Conservação da massa – balanço global

A equação da conservação da massa, para escoamento monofásico, pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho dv = - \oint_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (3.1)$$

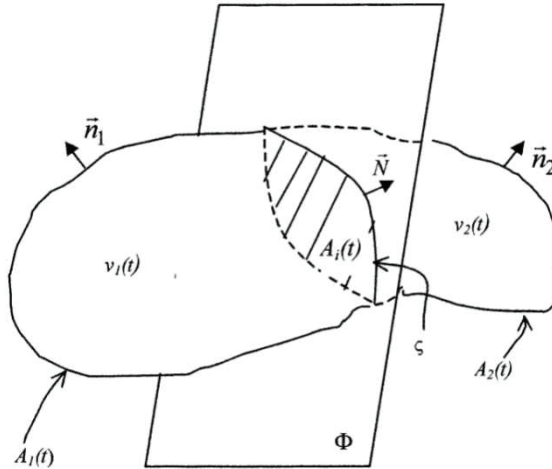
onde o termo do lado esquerdo representa a taxa de variação da massa no volume de controle fixo,  $v$ , e o termo da direita representa o fluxo líquido de matéria através da área superficial do volume de controle,  $A$ .

Para escoamento bifásico, onde ocorre a existência de uma interface de área definida  $A_i$  (Figura 3.3), a Equação (3.1) assume a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \int_{v_1(t)} \rho_1 dv + \frac{d}{dt} \int_{v_2(t)} \rho_2 dv + \frac{d}{dt} \int_{A_i(t)} \rho_i dA = - \int_{A_1(t)} \rho_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 dA - \int_{A_2(t)} \rho_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 dA - \int_{\zeta(t)} \rho_i \vec{V}_p \cdot \vec{N} d\zeta \quad (3.2)$$

onde  $A_1(t)$  e  $A_2(t)$  não são superfícies fechadas (só fecham com  $A_i(t)$ , que é a área da interface e que pode deslocar-se entre as fases),  $\vec{V}_p$  é igual à velocidade de uma partícula (ou das partículas) na interface,  $\rho_i$  é a densidade superficial (massa por

unidade de área da interface),  $\vec{n}$  é o vetor normal à superfície,  $\zeta(t)$  é o contorno da interface e  $\vec{N}$  é o vetor unitário normal à interface contido no plano  $\Phi$  (Fig. 3.3).



**Fig. 3.3** Localização das fases e variáveis nas equações do escoamento bifásico.

### Quantidade de movimento – balanço global

A equação da quantidade de movimento, para escoamento monofásico, pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{V} dv = \int_v \rho \vec{g} dv + \int_A \vec{n} \cdot \Pi dA - \oint_A \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.3)$$

onde o termo da esquerda representa a taxa de variação da quantidade de movimento, o primeiro termo do lado direito é relacionado às forças de campo atuando no volume de controle, o segundo termo do lado direito é relacionado às forças na superfície do volume de controle e o último termo do lado direito representa o fluxo de quantidade de movimento através da superfície do volume de controle. O tensor das tensões pode ser definido da seguinte forma:

$$\Pi = -PI + \tau \quad (3.4)$$

onde  $P$  representa as tensões normais e  $\tau$  as tensões viscosas.

Para escoamento bifásico a Equação (3.3) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{v_1(t)} \rho_1 \vec{V}_1 dv + \frac{d}{dt} \int_{v_2(t)} \rho_2 \vec{V}_2 dv + \frac{d}{dt} \int_{A_i(t)} \rho_i \vec{V}_p dA = \int_{v_1(t)} \rho_1 \vec{g} dv + \\
& + \int_{v_2(t)} \rho_2 \vec{g} dv + \int_{A_1(t)} \rho_i \vec{g} dA + \int_{A_1(t)} \vec{n}_1 \cdot \Pi_1 dA + \int_{A_2(t)} \vec{n}_2 \cdot \Pi_2 dA + \\
& \oint_{\zeta(t)} \sigma \vec{N} d\zeta - \int_{A_1(t)} \rho_1 \vec{V}_1 (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) dA - \int_{A_2(t)} \rho_2 \vec{V}_2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) dA + \\
& - \int_{\zeta(t)} \rho_i \vec{V}_p (\vec{V}_p \cdot \vec{N}) d\zeta
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde  $\sigma$  é a tensão interfacial (força por unidade de comprimento).

### 3.1.3 Equações Locais Instantâneas para Escoamento Bifásico

#### Conservação da massa – equação local instantânea

Aplicando a regra de Leibniz e o teorema de Gauss na Equação (3.2) e agrupando as integrais de volume e de área, chega-se à seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \int_{v_l} \left[ \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \vec{V}_l) \right] dv + \int_{v_2} \left[ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \vec{V}_2) \right] dv + \\
& + \int_{A_i} \left[ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_p) - \rho_l (\vec{V}_l - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_l + \right. \\
& \left. - \rho_2 (\vec{V}_2 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_2 + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_\zeta) \right] dA = 0, \\
& \forall v_l, v_2, A_i
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde  $\nabla_s$  é o divergente superficial. Portanto, a equação local instantânea da conservação da massa pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \vec{V}_k) = 0 \quad \text{em } v_k \quad (k = 1, 2) \quad \text{e} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_p) - \rho_1 (\vec{V}_1 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_1 + \\ - \rho_2 (\vec{V}_2 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_2 + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_\zeta) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

em  $A_i(t)$ . A Equação (3.8) é denominada “condição de salto” na interface. O último termo da Equação (3.8) é desprezado, pois,  $\vec{V}_\zeta \cdot \vec{N} = 0$  (velocidade de deslocamento da linha  $\zeta(t)$ ).

### Quantidade de movimento – equação local instantânea

Aplicando a regra de Leibniz, o teorema de Gauss e a forma especial do teorema de Green<sup>1</sup> na Equação (3.5) e agrupando as integrais de volume e de área, chega-se à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \int_{v_1} \left[ \frac{\partial(\rho_1 \vec{V}_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{V}_1 \vec{V}_1) - \rho_1 \vec{g} - \nabla \cdot \Pi_1 \right] dv + \\ + \int_{v_2} \left[ \frac{\partial(\rho_2 \vec{V}_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \vec{V}_2 \vec{V}_2) - \rho_2 \vec{g} - \nabla \cdot \Pi_2 \right] dv + \\ + \int_{A_i} \left[ \frac{\partial(\rho_i \vec{V}_p)}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_p \vec{V}_p) - \rho_i \vec{g} + \vec{n}_1 \Pi_1 + \vec{n}_2 \Pi_2 - \nabla_s \sigma + (\nabla_s \cdot \vec{n}) \vec{\sigma} + \right. \\ \left. - \rho_1 \vec{V}_1 (\vec{V}_1 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_1 - \rho_2 \vec{V}_2 (\vec{V}_2 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_2 \right] dA = 0, \quad \forall v_1, v_2, A_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

sendo que os últimos dois termos da Equação (3.9) são os termos de transferência de quantidade de movimento pela interface. Portanto, a equação local instantânea da quantidade de movimento pode ser apresentada da seguinte forma:

---

<sup>1</sup>Nota sobre o teorema de Green aplicado a superfícies.

$$\oint_{\zeta(t)} \vec{\sigma} \vec{N} d\zeta = \int_{A(t)} [\nabla_s \sigma - (\nabla_s \cdot \vec{n}) \vec{\sigma}] dA$$

O primeiro termo da integral é a força por unidade de área na direção tangencial à superfície, que advém de eventuais gradientes de tensão superficial. O segundo termo da integral é a componente normal à interface da força resultante da ação da tensão interfacial.

$$\frac{\partial(\rho_k \vec{V}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \vec{V}_k \vec{V}_k) - \rho_k \vec{g} - \nabla \cdot \Pi_k = 0 \quad (3.10)$$

em  $v_k$  ( $k = 1, 2$ ), e a “condição de salto” para a quantidade de movimento é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_i \vec{V}_p)}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_p \vec{V}_p) - \rho_i \vec{g} + \vec{n}_1 \cdot \Pi_1 + \vec{n}_2 \cdot \Pi_2 + \\ & - \nabla_s \sigma + (\nabla_s \cdot \vec{n}) \sigma \vec{n} - \rho_1 \vec{V}_1 (\vec{V}_1 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_1 + \\ & - \rho_2 \vec{V}_2 (\vec{V}_2 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.2. Equações de escoamento bifásico médias na seção transversal; modelagem unidimensional

A partir deste ponto serão desenvolvidas as equações bifásicas instantâneas médias numa seção ou equações governantes unidimensionais, segundo o modelo de dois fluidos desenvolvido por Delhay (1981).

Na Figura 3.4 podem ser observados os parâmetros geométricos necessários para o desenvolvimento da formulação.

Algumas considerações matemáticas devem ser feitas *a priori*. A regra de Leibniz pode ser apresentada na seguinte forma:

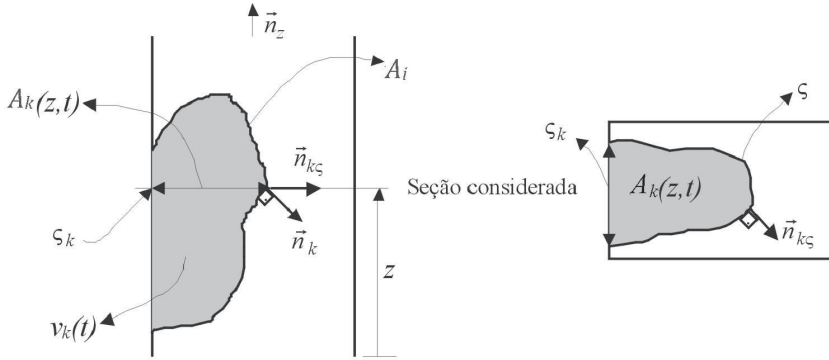
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_k(z,t)} f(x, y, z, t) dA = \int_{A_k(z,t)} \frac{\partial f}{\partial t} dA + \int_{\zeta(z,t)} f \frac{\vec{V}_i \cdot \vec{n}_k}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} d\zeta \quad (3.12)$$

Note que na segunda integral do lado direito da equação acima é excluído o contorno rente à parede, pois  $\vec{V}_i \cdot \vec{n}_k = 0$  em  $\zeta_k$  ( $\vec{V}_i = 0$ ).

O teorema de Gauss pode ser apresentado na forma:

$$\int_{A_k(z,t)} \nabla \cdot \vec{B} dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z,t)} B_z dA + \oint_{\zeta(z,t) + \zeta_k(z,t)} \vec{n}_k \cdot \vec{B} \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} \quad (3.13)$$

Se  $\vec{B} = \vec{n}_z$ , então,  $B_z = 1$  e tem-se finalmente o teorema de Gauss modificado:



**Fig. 3.4** Localização da interface e parâmetros geométricos.

$$\frac{\partial A_k(z, t)}{\partial z} = - \int_{\zeta(z, t)} \frac{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_z}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} d\zeta \quad (3.14)$$

Note que na integral do lado direito da equação acima é excluído o contorno rente à parede, pois  $\vec{n}_k \cdot \vec{n}_z = 0$  em  $\zeta_k$  (os vetores fazem um ângulo de  $90^\circ$ ).

Para campos tensoriais, tem-se que:

$$\int_{A_k(z, t)} \nabla \cdot M dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z, t)} \vec{n}_z M dA + \oint_{\zeta(z, t) + \zeta_k(z, t)} \vec{n}_k \cdot M \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} \quad (3.15)$$

### 3.2.1. Conservação da massa - equação instantânea média numa seção

Aplicando a regra de Liebnitz e o teorema de Gauss apropriados na Eq. (3.7) e agrupando os termos, chega-se finalmente na equação da conservação da massa instantânea média na seção:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho_k \rangle A_k] + \frac{\partial}{\partial z} [\langle \rho_k w_k \rangle A_k] = - \int_{\zeta(z, t)} \rho_k (\vec{V}_k - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_k \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} \quad (3.16)$$

onde o termo da direita representa a transferência de massa pela interface e

$$\frac{\int_{A_k} f_k dA}{A_k} = \langle f_k \rangle \quad (3.17)$$

### 3.2.2. Quantidade de movimento - equação instantânea média numa seção

Utilizando a Eq. (3.4), aplicando a regra de Liebnitz e o teorema de Gauss apropriados na Eq. (3.10) e agrupando os termos, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho_k \bar{V}_k \rangle A_k] + \frac{\partial}{\partial z} [\langle \rho_k w_k \bar{V}_k \rangle A_k] + \\ & - A_k \langle \rho_k \bar{g} \rangle + \frac{\partial}{\partial z} [\langle p_k \bar{n}_z \rangle A_k] - \frac{\partial}{\partial z} [\langle \bar{n}_z \cdot \tau_k \rangle A_k] = \\ & = - \int_{\zeta(z,t)} (\dot{m}_k \bar{V}_k - \bar{n}_k \cdot \Pi_k) \frac{d\zeta}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{k\zeta}} + \\ & + \int_{\zeta_k(z,t)} \bar{n}_k \cdot \Pi_k \frac{d\zeta}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{k\zeta}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde o termo que representa a transferência de massa pela interface é,

$$\dot{m}_k = \rho_k (\bar{V}_k - \bar{V}_i) \cdot \bar{n}_k \quad (3.19)$$

A componente  $z$  da Equação (3.18) é a equação da quantidade de movimento instantânea média na seção:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho_k w_k \rangle A_k] + \frac{\partial}{\partial z} [\langle \rho_k w_k^2 \rangle A_k] + \\ & - A_k \rho_k g_z + \frac{\partial}{\partial z} [\langle p_k \rangle A_k] - \frac{\partial}{\partial z} [\langle (\bar{n}_z \cdot \tau_k) \cdot \bar{n}_z \rangle A_k] = \\ & = - \int_{\zeta(z,t)} \bar{n}_z \cdot (\dot{m}_k \bar{V}_k - \bar{n}_k \cdot \Pi_k) \frac{d\zeta}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{k\zeta}} + \\ & + \int_{\zeta_k(z,t)} \bar{n}_z \cdot (\bar{n}_k \cdot \Pi_k) \frac{d\zeta}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{k\zeta}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Note que o quinto termo do lado esquerdo da Eq. (3.20) inclui a projeção do vetor resultante do produto escalar  $(\vec{n}_z \cdot \tau_k)$  na direção  $z$ .

De posse das equações instantâneas médias numa seção, há duas abordagens clássicas para a descrição dos escoamentos bifásicos: modelos cinemáticos e modelo de dois fluidos. A primeira abordagem, apesar de mais mecanicista e empírica, descreve adequadamente uma série de fenômenos bifásicos encontrados na prática. Por sua vez, o modelo de dois fluidos incorpora a dinâmica da interação entre as fases. Entretanto, o preço a pagar por uma maior generalidade é uma complexidade maior da formulação. O modelo de dois fluidos é uma abordagem rigorosa dos escoamentos multifásicos do ponto de vista físico e matemático. Ele foi desenvolvido em paralelo por M. Ishii (*Purdue University*, EUA) e J.M. Delhaye (*Commissariat à l'Énergie Atomique*, Grenoble). O modelo de dois fluidos (Ishii, 1975, e Delhaye, 1981) tem sido aplicado extensivamente nas últimas décadas na solução dos mais variados tipos de escoamentos multifásicos. Contudo, a solução do modelo de dois fluidos pressupõe a formulação de um conjunto de equações constitutivas ou de fechamento, estabelecidas em termos das variáveis dependentes e independentes do sistema. Apenas com a definição adequada das equações constitutivas permite-se o fechamento do modelo. A figura 3.5 sumariza esta seção.

É cabível destacar que apenas as equações bifásicas unidimensionais da conservação da massa e quantidade de movimento foram deduzidas nesta seção, pois apenas essas serão utilizadas nas seções subseqüentes relacionadas à estabilidade hidrodinâmica dos padrões de escoamento bifásico paralelos. Maiores detalhes e a derivação da equação da energia podem ser encontrados em Hetsroni (1982, Cap. 1.2).

### ***3.3. Exemplo: dedução da equação da quantidade de movimento unidimensional média na seção para escoamento estratificado líquido-líquido em regime permanente***

A componente axial da equação da quantidade de movimento instantânea média na seção, Eq. (3.20), será particularizada para o caso do escoamento estratificado liso em regime permanente (Fig. 3.6).

O último termo do lado esquerdo da Eq. (3.20) é desprezado, pois consideramos que a variação da tensão cisalhante na direção  $z$  é desprezível.

Não existe o termo relativo à transferência de massa através da interface, pois tratamos de fluidos totalmente imiscíveis:

$$\dot{m}_k \vec{V}_k = 0 \quad (3.21)$$



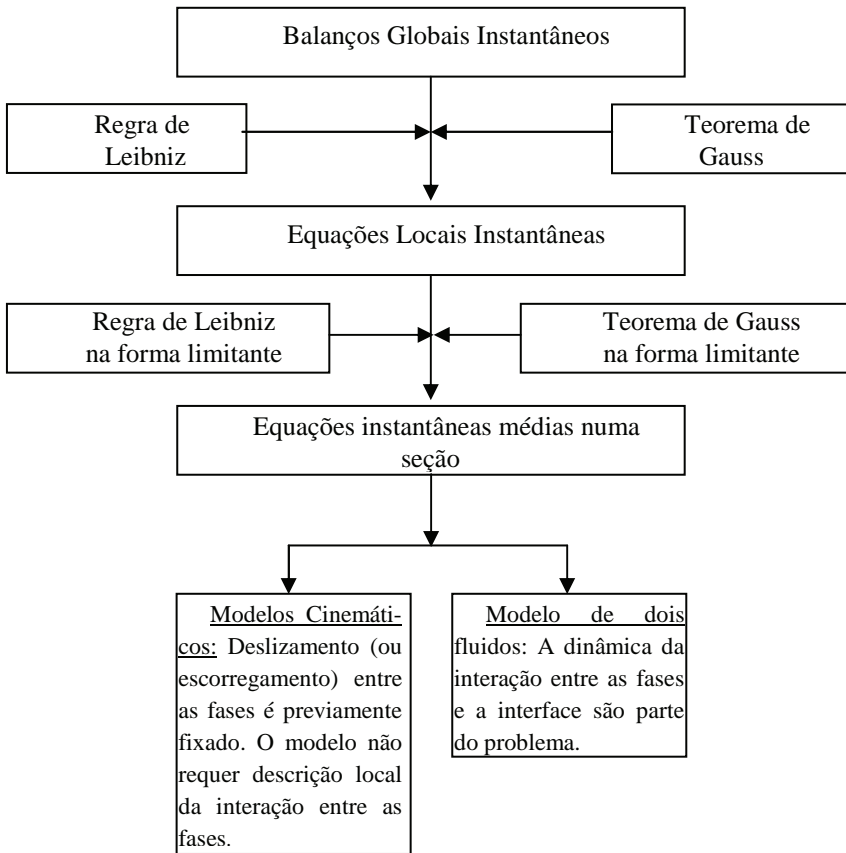


Fig. 3.5. Sumário da derivação das equações bifásicas instantâneas unidimensionais.

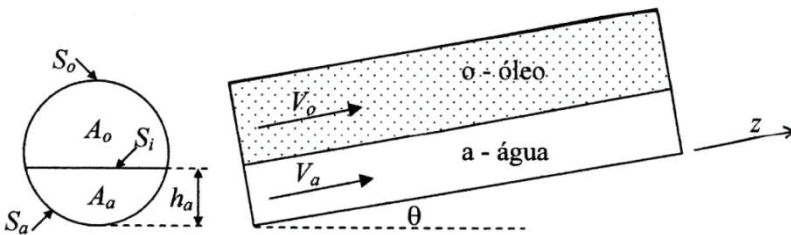


Fig. 3.6 Escoamento estratificado líquido-líquido em equilíbrio.

O termo relativo ao tensor das tensões pode ser dividido nos termos de pressão e de tensões viscosas:

$$\Pi_k = -p_k I + \tau_k \quad (3.22)$$

Análise dos termos interfaciais (1º termo do lado direito da Eq. 3.20)

-Termo de pressão:

$$\begin{aligned} & - \int_{\zeta(z,t)} \vec{n}_z \cdot \left[ -\vec{n}_k \cdot (-p_k I) \right] \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} = \\ & = p_{ki} \left( - \int_{\zeta(z,t)} \vec{n}_k \cdot \vec{n}_z \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} \right) = p_{ki} \frac{\partial A_k}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde foi utilizado o teorema de Gauss modificado (Eq. 3.14).

-Termo de tensões viscosas:

$$- \int_{\zeta(z,t)} \vec{n}_z \cdot \left[ -\vec{n}_k \cdot \tau_{ki} \right] \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} = \pm \tau_{ki} S_i \quad (3.24)$$

se  $V_o > V_a$  o cisalhamento interfacial é favorável ao escoamento de água, portanto:

$$t_{ai} > 0 \text{ e } t_{oi} < 0,$$

se  $V_a > V_o$  o cisalhamento interfacial é favorável ao escoamento de óleo, portanto:

$$t_{ai} < 0 \text{ e } t_{oi} > 0.$$

Análise dos termos de parede (2º termo do lado direito da Eq. 3.20)

-Termo de pressão na parede:

$$\int_{\zeta_k(z,t)} \vec{n}_z \cdot (\vec{n}_k \cdot -p_k I) \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} = 0 \quad (3.25)$$

A Eq. (3.25) representa a componente da tensão normal na interface e em contato com a parede na direção  $z$ , que no caso é nula.

-Termo de tensões viscosas na parede:

$$\int_{\zeta_k(z,t)} \vec{n}_z \cdot (\vec{n}_k \cdot \tau_{kp}) \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} = -\tau_{kp} S_k \quad (3.26)$$

Outra consideração relevante é quanto ao fator de correção  $k_k$ , que é dado por:

$$k_k = \frac{\langle w_k^2 \rangle}{\langle w_k \rangle^2},$$

ou seja:

$$\langle w_k^2 \rangle = \langle w_k \rangle^2 k_k = V_k^2 k_k \quad (3.27)$$

Substituindo (3.21)-(3.27) em (3.20), simplificando a notação, supondo escoamento incompressível e considerando a possibilidade de inclinação do tubo ( $\theta > 0$ , inclinação ascendente):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\rho_k V_k A_k] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_k V_k^2 k_k A_k] + A_k \rho_k g \sin \theta + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (p_k A_k) = p_{ki} \frac{\partial A_k}{\partial z} \pm \tau_{ki} S_i - \tau_{kp} S_k \end{aligned} \quad (3.28)$$

Considerando escoamento totalmente desenvolvido e regime permanente, chegamos à forma final da equação unidimensional da quantidade de movimento para escoamento estratificado:

$$A_k \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) - \tau_{kp} S_k \pm \tau_i S_i - A_k \rho_k g \sin \theta = 0 \quad (3.29)$$

Note que o gradiente de pressão passa a ser uma constante. A tensão cisalhante interfacial é a mesma para ambas as fases por uma questão de equilíbrio mecânico.

Aplicando a equação às fases água e óleo, temos:

$$A_o \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) - \tau_{op} S_o \pm \tau_i S_i - A_o \rho_o g \sin \theta = 0 \quad (3.30)$$

e

$$A_a \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) - \tau_{ap} S_a \pm \tau_i S_i - A_a \rho_a g \sin \theta = 0 \quad (3.31)$$

onde  $p$  é a pressão,  $z$  a coordenada axial,  $A_o$  e  $A_a$  a área de seção transversal ocupada pelo óleo e água;  $\tau_{op}$ ,  $\tau_{ap}$  e  $\tau_i$  as tensões cisalhantes da fase óleo, água e interfacial;  $S_o$ ,  $S_a$  e  $S_i$  os perímetros molhados do óleo, água e interfacial;  $\rho_o$  and  $\rho_a$  as densidades do óleo e da água, respectivamente;  $g$  a aceleração da gravidade e  $\theta$  o ângulo de inclinação da horizontal.

Eliminando o gradiente de pressão das equações acima, temos que:

$$-\frac{\tau_{ap} S_a}{A_a} + \frac{\tau_{op} S_o}{A_o} \pm \tau_i S_i \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_o} \right) - (\rho_a - \rho_o) g \sin \theta = 0 \quad (3.32)$$

onde o sinal superior, positivo, no termo de tensão interfacial, corresponde a  $V_o > V_a$ .

Para condições de operação específicas, *i.e.*, velocidades superficiais (ou vazões volumétricas), propriedades dos fluidos e geometria do tubo, os parâmetros *in situ* do escoamento, como velocidades médias e frações volumétricas (*holdup*), podem ser calculados através da solução da Eq. (3.32). A Eq. (3.32) é uma equação não-linear que pode ser resolvida numericamente; por exemplo, para o nível de água ( $h_a$ ) ou fração volumétrica *in situ* da água ( $\varepsilon_a = A_a/A$ ) se as tensões cisalhantes são expressas em termos de fatores de atrito conhecidos. Após a solução da Eq. (3.32), o gradiente de pressão bifásico é diretamente obtido pela inserção dos resultados na Eq. (3.30) ou (3.31). Relações adicionais são requeridas para o cálculo das variáveis geométricas ( $A_o$ ,  $A_a$ ,  $S_o$ ,  $S_a$  e  $S_i$  em função da fração volumétrica “*in situ*”) e equações constitutivas são necessárias para as tensões cisalhantes. Elas podem ser obtidas em Rodriguez e Oliemans (2006).

## 4. Ondas unidimensionais e ocorrência em escoamento bifásico paralelo

### 4.1. Considerações iniciais

O movimento ondulatório é um tópico científico amplo. O comportamento de ondas do mar, em águas profundas ou rasas, a propagação da luz e som são exemplos familiares e cotidianos. Entretanto, eventos como tráfego pesado e engarrafamentos em ruas ou rodovias movimentadas, enchentes ou inundações, infelizmente não tão incomuns na época das chuvas em nosso país, também podem ser tratados ou modelados como movimentos ondulatórios. Parece não haver uma definição única e precisa do que exatamente é uma onda. Pode-se simplesmente dizer que uma onda seria qualquer sinal reconhecível que é transferido de uma parte do meio para outra com uma velocidade de propagação conhecida. O sinal poderia ser qualquer característica de uma perturbação, uma mudança abrupta de alguma grandeza, como o nível de um rio numa frente de inundação ou densidade do meio no caso do som. Mudanças na magnitude e velocidade do sinal são possíveis, desde que ele ainda seja distinguível.

A teoria das ondas unidimensionais encontra inúmeras aplicações e é uma técnica poderosa para a análise de escoamentos não-permanentes e fenômenos de resposta transitória. Ondas de choque, como o golpe de aríete da hidráulica, ou a inundação (*flooding*) de poços produtores de gás na indústria de petróleo podem ser explicadas por essa teoria. Em alguns casos, transições de padrão de escoamento bifásico paralelo podem ser atribuídas a instabilidades que resultam da amplificação de uma onda de perturbação unidimensional.

O fenômeno ondulatório é importante em escoamento bifásico porque parâmetros do escoamento, como as vazões locais e pressões de cada fase, não raro oscilam e essas perturbações se propagam ao longo do escoamento. A interface também oscila e a combinação de todos esses distúrbios pode causar o crescimento exponencial das perturbações, o qual se traduz em instabilidade e eventualmente transição. Ondas podem tanto propagar mudanças contínuas em algumas variáveis como envolver uma mudança abrupta ou uma descontinuidade finita, sendo estas últimas ondas de choque. As duas classes de onda mais importantes são as ondas cinemáticas e dinâmicas. Se o escoamento é permanente e um equilíbrio de forças global pode ser assumido, as ondas são descritas através de um balanço de massa e são chamadas cinemáticas. A condição de ocorrência dessas ondas é a existência de uma relação entre a vazão de equilíbrio em regime permanente para um dado fluido e a área que ele ocupa na seção transversal do tubo, sendo que a vazão de equilíbrio é resultante direta do balanço de força. Assim, ondas cinemáticas são ondas hiperbólicas de primeira ordem que descrevem a propagação de perturbações de fluxo e concentração. Um exemplo são as ondas de inundação em rios, onde fluxo pode ser identificado como sendo a vazão do rio pela área de seção

transversal a montante e a concentração se refere à razão entre as áreas de seção transversal do canal a jusante e a montante, a qual varia no espaço e com o tempo enquanto o nível do rio sobe. Perturbações relacionadas a ondas dinâmicas ocorrem quando efeitos inerciais são relevantes, *i.e.*, em um escoamento transitório ou instável, como na transição entre dois padrões de escoamento. Elas são usualmente ondas hiperbólicas de segunda ordem e suas celeridades são chamadas de características. Ondas cinemáticas e dinâmicas podem estar presentes em um escoamento bifásico e a condição de que a velocidade onda cinemática deve estar entre a maior e menor característica é um critério de estabilidade amplamente aceito. Se essa condição não é obedecida e a onda cinemática move-se mais rápido do que a maior característica, ondas de instabilidade são vistas na interface.

## 4.2. Fração volumétrica e teoria da onda cinemática

Ondas cinemáticas ocorrem sempre que a vazão de equilíbrio em regime permanente de uma substância depende da quantidade presente dessa substância. Por exemplo, a vazão de água num rio depende da profundidade, a vazão de carros numa estrada depende da densidade do tráfego e a taxa na qual garçons atendem os clientes depende da fila de espera na porta do restaurante (desde que não estejamos na França). Mais especificamente, a vazão pela área de seção transversal de um fluido viscoso escoando em tubulação horizontal em regime laminar pode ser dada por

$$q = -\frac{r^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad (4.1)$$

onde  $q$  é o fluxo (não confundir com vazão) e  $r$ , raio do tubo, esta relacionado à quantidade presente de fluido. De forma genérica, supomos que a vazão é expressa por um fluxo adequado qualquer,  $J$ . Denote a quantidade da substância por uma variável geral  $\varepsilon$  a qual pode ser chamada de concentração. A variável  $\varepsilon$  pode ser expressa por “carros por quilômetro”, “moléculas por centímetro cúbico” ou fração volumétrica *in situ* em escoamento bifásico. É imprescindível que  $J$  seja uma função de  $\varepsilon$  e que

$$J = V\varepsilon \quad (4.2)$$

conforme definido na Eq. (2.6), sendo  $V$  a velocidade média *in situ*.

A derivação da velocidade da onda cinemática,  $c_o$ , baseia-se num balanço de massa realizado sobre um volume de controle movendo-se com a onda cujas superfícies de controle permeáveis são denotadas por 1 e 2 (Fig. 4.1).

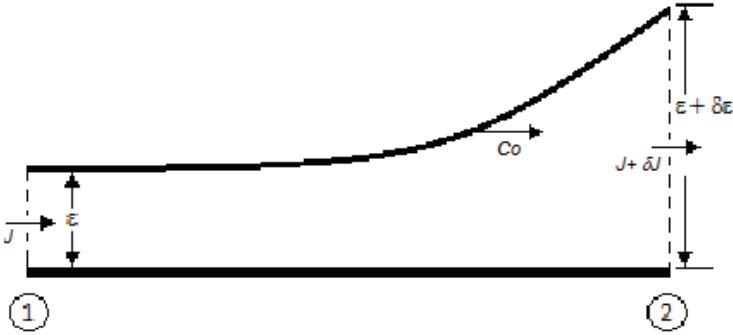


Fig 4.1 Volume de controle não inercial movendo-se com a onda cinemática com velocidade  $c_o$ .

Utiliza-se a forma integral da conservação da massa (Eq. 3.1) e adota-se um referencial não-inercial movendo-se com a onda, o que propicia uma análise em regime permanente. Assim, a Eq. (3.1) fica reduzida a

$$\oint_{A(t)} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (4.3)$$

Aplicando a Eq. (4.3) ao volume de controle descrito na Fig. 4.1 e adotando as simplificações pertinentes, tem-se

$$-V_{r,1} \varepsilon_1 + V_{r,2} \varepsilon_2 = 0 \quad (4.4)$$

onde  $V_r$  denota velocidade relativa. Utilizando a Eq. (4.2) e adotando as variáveis descritas na Fig. 4.1, tem-se

$$-\left(\frac{J}{\varepsilon} - c_o\right) \varepsilon + \left(\frac{J+\delta J}{\varepsilon+\delta\varepsilon} - c_o\right) (\varepsilon + \delta\varepsilon) = 0 \quad (4.5)$$

Rearranjando a Eq. (4.5),

$$J - c_o \varepsilon - (J + \delta J) + c_o (\varepsilon + \delta\varepsilon) = 0 \quad (4.6)$$

e portanto:

$$c_o = \left(\frac{\delta J}{\delta\varepsilon}\right)_0 \quad (4.7)$$

onde o subscrito 0 denota que o equilíbrio de forças é mantido e não há efeitos inerciais.

Em escoamento bifásico, a Eq. (4.7) pode ser reescrita para qualquer uma das fases, por exemplo:

$$c_o = \left( \frac{\delta J_1}{\delta \varepsilon_1} \right)_J \quad (4.8)$$

onde o subscrito  $J$  é a velocidade da mistura ou vazão de equilíbrio em regime permanente.

Como proposto originalmente por Bannwart (2001) e verificado experimentalmente por Rodriguez e Bannwart (2006), a teoria da onda cinemática oferece uma excelente representação das ondas interfaciais observadas no padrão anular líquido-líquido, onde a viscosidade da fase central é muito maior do que a viscosidade da fase parietal (vide Figs. 2.2 ou 2.6, padrão **A**). Um fato interessante é que é possível obter expressões analíticas relativamente simples para a previsão da fração volumétrica *in situ*.

Supõe-se que a Eq. (4.8) seja válida para o padrão de escoamento em questão. Uma relação do tipo  $f(\varepsilon_1, J_1, J) = 0$  pode ser derivada através da eliminação do gradiente de pressão da equação unidimensional da quantidade de movimento bifásica. Através de procedimento semelhante ao descrito na Seção 3.3, temos para o padrão de escoamento anular líquido-líquido:

$$-\frac{S_i \tau_i}{A} + \frac{S_p \tau_p}{A} \varepsilon_1 + \varepsilon_1 (1 - \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) g_z = 0 \quad (4.9)$$

onde  $\tau_i$  e  $\tau_p$  são as tensões cisalhantes interfacial e parietal,  $S_i$  ( $= \pi D \sqrt{\varepsilon}$ ) e  $S_p$  ( $= \pi D$ ) são os perímetros interfacial e parietal, respectivamente,  $A$  ( $= \pi D^2 / 4$ ) é a área de seção transversal do tubo e  $g_z$  é a componente da aceleração gravitacional na direção axial. Para transformar a Eq. (4.9) na forma  $f(\varepsilon_1, J_1, J) = 0$  equações de fechamento são necessárias para expressar  $\tau_i$  e  $\tau_p$ . Para fluidos Newtonianos

$$\tau_i = \frac{f_{i,1}}{2} \rho_1 |V_1 - V_i| (V_1 - V_i) \quad (4.10)$$

ou

$$\tau_i = \frac{f_{i,2}}{2} \rho_2 |V_i - V_2| (V_i - V_2) + \frac{1}{4} (\rho_1 - \rho_2) g_z D \sqrt{\varepsilon_1} \lambda(\varepsilon_1) \quad (4.11)$$

e

$$\tau_p = \frac{f_p}{2} \rho_2 |V_2| V_2 - \frac{1}{4} (\rho_1 - \rho_2) g_z D \varepsilon_1 \lambda(\varepsilon_1) \quad (4.12)$$

onde  $V_i$  é a velocidade na interface e os coeficientes de fricção são dados por

$$f_{i,1} = a_1 (Re_1)^{-n_1} \quad (4.13)$$



$$f_{i,2} = a_i(Re_i)^{-n_i} \quad (4.14)$$

$$f_p = a_2(Re_2)^{-n_2} \quad (4.15)$$

onde os números de Reynolds são baseados em diâmetros hidráulicos:

$$Re_1 = \frac{\rho_1 |V_1 - V_i| D \sqrt{\varepsilon_1}}{\mu_1} \quad (4.16)$$

$$Re_i = \frac{\rho_2 |V_i - V_2| D (1 - \varepsilon_1)}{\mu_2 \sqrt{\varepsilon}} \quad (4.17)$$

$$Re_2 = \frac{\rho_2 V_2 D (1 - \varepsilon_1)}{\mu_2} = \frac{\rho_2 J_2 D}{\mu_2} \quad (4.18)$$

e

para escoamento laminar ( $Re_k < 2000$ )

$$a_k = 16 \text{ e } n_k = 1 \quad (4.19)$$

para escoamento turbulento ( $Re_k > 2000$ )

$$a_k = 0,079 \text{ e } n_k = 0,25 \quad (4.20)$$

sendo  $k = 1, i, 2$ .

A função  $\lambda(\varepsilon_1)$  representa o efeito do empuxo no cisalhamento e aplica-se somente em escoamento inclinado ou vertical. Essa função pode ser derivada para escoamento laminar e interface lisa como

$$\lambda(\varepsilon_1) = \frac{(1 + \varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1 \ln \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1})}{1 - \varepsilon_1} \quad (4.21)$$

Funções aproximadas para  $\lambda(\varepsilon_1)$  para escoamento turbulento podem ser determinadas experimentalmente.

Com as Eqs. 4.8-4.19, a Eq. 4.9 permite a determinação da fração volumétrica  $\varepsilon_1$  em termos das propriedades dos fluidos e velocidades superficiais.

Como exemplo, vamos analisar o caso especial do escoamento vertical com núcleo infinitamente viscoso. Nesse caso, pela substituição das Eqs. 4.10 e 4.12 na Eq. 4.9 temos que

$$V_i = V_1 \quad (4.22)$$

Por outro lado, o uso das Eqs. 4.11 e 4.12 na Eq. 4.9 fornece o seguinte resultado

Escoamento laminar da fase anular:

$$J_1(1 - \varepsilon_1) - 2J_2\varepsilon_1 + V_{ref}(1 - \varepsilon_1) \left( 2 + \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \ln \varepsilon_1 \right) = 0 \quad (4.23)$$

Escoamento turbulento da fase anular:

$$J_1(1 - \varepsilon_1) - J_2\varepsilon_1 + V_{ref}\varepsilon_1^{\frac{9-5n_i}{4-2n_i}}(1 - \varepsilon_1)^{\frac{n_i}{2-n_i}} \left( \frac{3-\varepsilon_1}{2} + \frac{\ln \varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \right)^{\frac{1}{2-n_i}} = 0 \quad (4.24)$$

onde

$$V_{ref} = \frac{g_z(\rho_1 - \rho_2)}{|g_z(\rho_1 - \rho_2)|} a_i^{\frac{1}{n_i-2}} \sqrt{|g_z|D} \left( \frac{|\Delta\rho|}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{2-n_i}} \left( \frac{\rho_2 \sqrt{|g_z|DD}}{\mu_2} \right)^{\frac{n_i}{2-n_i}} \quad (4.25)$$

e  $a_i$  e  $n_i$  são dadas pelas Eqs. 4.19 e 4.20. As Eqs. 4.23 e 4.24 representam o deslizamento entre o núcleo e a fase anular devido ao empuxo. Reconhecendo que mesmo em escoamento laminar da fase anular a interface dificilmente é lisa, as Eqs. 4.23 e 4.24 podem ser condensadas e aproximadas convenientemente por

$$J_1(1 - \varepsilon_1) - s_o J_2 \varepsilon_1 - c V_{ref} \varepsilon_1^q (1 - \varepsilon_1)^m = 0 \quad (4.26)$$

onde  $q = \frac{7-3n_i}{4-2n_i}$  e as constantes  $s_o$ ,  $c$  e  $m$  podem ser ajustadas através de comparação com dados experimentais de velocidade de onda,  $c_o$ . A Eq. (4.26) é utilizada para operar a derivada parcial conforme definição da Eq. 4.8, o que fornece a equação da velocidade da onda cinemática

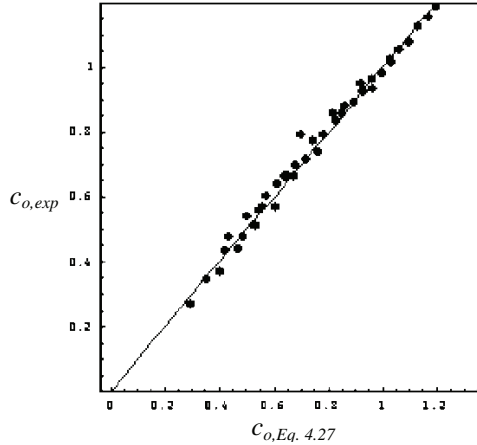
$$c_o = \left( \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_1} \right)_J = \frac{J_1 + s_o J_2 + c V_{ref} \varepsilon_1^{q-1} (1 - \varepsilon_1)^{m-1} [q - (m+q)\varepsilon_1]}{1 + (s_o - 1)\varepsilon_1} \quad (4.27)$$

A Eq. (4.27) pode ser reduzida para o caso particular de densidades iguais ou escoamento horizontal:

$$c_o = \frac{(J_1 + s_o J_2)^2}{s_o J} \quad (4.28)$$

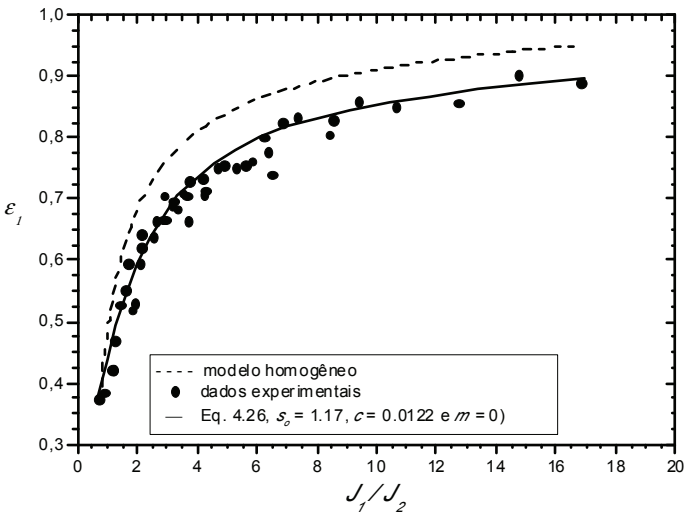
Os parâmetros  $s_o$ ,  $c$  e  $m$  foram ajustados através de dados de velocidade de onda coletados por Rodriguez e Bannwart (2006) para escoamento anular de óleo

viscoso (500 mPa.s) e água turbulento (fase anular), vertical e ascendente. O resultado foi  $s_o = 1,17$ ,  $c = 0,0122$  and  $m = 0$ . A Fig. 4.2 mostra uma comparação entre a velocidade de onda experimental e aquela calculada via Eq. 4.27.



**Fig. 4.2** Velocidade de onda interfacial obtida experimentalmente contra velocidade de onda interfacial prevista pela Eq. 4.27 ( $s_o = 1,17$ ,  $c = 0,0122$  e  $m = 0$ ).

Uma comparação entre a fração volumétrica *in situ* de óleo obtida experimentalmente e aquela determinada indiretamente através da Eq. 4.26 é mostrada na Fig. 4.3.



**Fig 4.3** Dados de fração volumétrica *in situ* de óleo em função da razão de injeção óleo-água; a linha tracejada é a previsão do modelo homogêneo (deslizamento nulo) e a linha cheia a previsão dada pela Eq. 4.26 ( $s_o = 1,17$ ,  $c = 0,0122$  e  $m = 0$ ).

A concordância entre dados e previsão (entre 5%) é uma clara indicação de que a teoria da onda cinemática oferece uma representação satisfatória da velocidade da onda interfacial em escoamento anular líquido-líquido.

Finalmente, substituindo as velocidades médias *in situ* na Eq. 4.26 e os parâmetros ajustados ( $s_o = 1,17$ ,  $c = 0,0122$  e  $m = 0$ ) e dividindo a equação resultante pela velocidade média *in situ* do fluido do anular ( $J_2$ ), obtém-se uma expressão para o deslizamento

$$s = 1,17 + \frac{0,05}{J_2} \epsilon_1^{0,8} \quad (4.29)$$

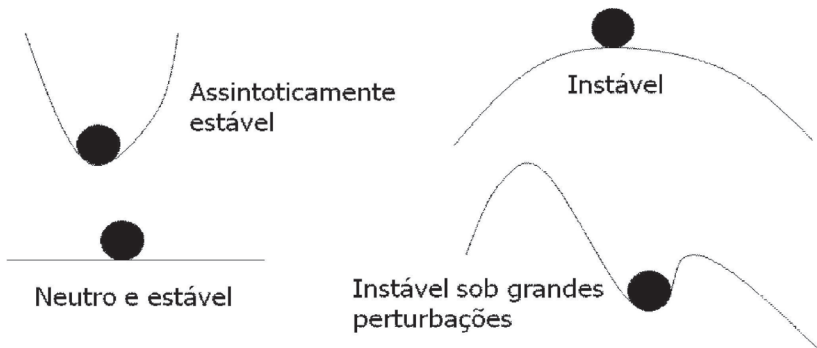
## 5. Conceitos fundamentais da estabilidade hidrodinâmica em escoamento bifásico paralelo

### 5.1. Considerações iniciais

“A teoria da estabilidade hidrodinâmica integra o escopo da mecânica dos fluidos clássica (...). Ela é capaz de levar em conta o efeito de um número de parâmetros (instabilidades) sobre a transição do regime laminar ao regime turbulento” (Hermann Schlichting). “Em alguns casos, transições de padrão de escoamento (em escoamento bifásico) podem ser atribuídas a instabilidades que resultam da amplificação temporal de uma onda de perturbação na interface entre as duas fases” (Graham B. Wallis). Na mecânica dos fluidos, a transição do regime laminar ao regime turbulento ou de um padrão de escoamento bifásico de fases separadas (paralelo) a um padrão disperso é um problema de longa data e tem sido foco de pesquisas por décadas devido à sua grande importância em uma variedade de aplicações de engenharia. Ao final do século 19, Osborne Reynolds e Lord Rayleigh conjecturaram a idéia teórica principal: a transição estaria relacionada à estabilidade do escoamento laminar. Vale destacar o experimento clássico com tinta (traçador) em escoamento em tubulação de Osborne Reynolds (1883), o qual levou à conclusão de que instabilidade resultaria em amplificação de perturbações ondulatórias e deterioração do regime laminar. Considera-se que Heisenberg (1924) foi o fundador da teoria da estabilidade hidrodinâmica linear e atribui-se ao grupo liderado por Prandtl a formulação da teoria da estabilidade na década de 1930. Tollmien (1929) e Schlichting (1932, 1933) apresentaram as primeiras soluções de estabilidade de camada limite e Taylor (1936) defendeu a teoria de que transição à turbulência inicia-se através de oscilações na corrente livre que induzem separações locais na proximidade da parede. Ceticismo rondou a estabilidade hidrodinâmica

nâmica durante a década de 1940 e somente com os experimentos de Schubauer e Skramstaf (1948) foi revelado o papel determinante das ondas de instabilidade na transição. Na década de 1950, Schlichting (1955) afirma que a estabilidade hidrodinâmica integra o escopo da mecânica dos fluidos clássica.

Mais tarde, Taitel e Dukler (1976) aplicam o critério de estabilidade invíscido de Kelvin-Helmholtz para a previsão da fronteira de transição do padrão de escoamento estratificado gás-líquido, obtendo boa concordância com dados experimentais próprios e da literatura. O trabalho prossegue durante as décadas de 1970 e 1980, quando são publicados os estudos teóricos e experimentais de Ooms (1972 e 1984), Oliemans (1986) e Joseph (1984) a respeito da estabilidade hidrodinâmica do padrão de escoamento líquido-líquido anular. Na década de 1990, as teorias da estabilidade linear e não-linear foram aplicadas com sucesso para a dedução de critérios de transição em escoamento estratificado gás-líquido (Barnea, 1991 e 1993) e líquido-líquido (Brauner, 1992, Trallero, 1995, Brill, 1997 e Crowley, 1992 e 1993). Nota-se um extensivo esforço de pesquisa sobre estabilidade de escoamentos bifásicos registrado na literatura nas últimas duas décadas. Hoje, é bem estabelecido que transição em escoamentos cisalhantes sujeitos a níveis de perturbação pequenos e moderados ocorre através do desenvolvimento de ondas de instabilidade no escoamento laminar inicial ou na interface entre as duas fases do padrão de escoamento bifásico inicial.



**Fig. 5.1** Exemplos mecânicos simples de estados de equilíbrio.

Quando se analisa a estabilidade de um escoamento bifásico adota-se uma analogia perfeita com o escoamento monofásico. Um sistema ou padrão bifásico básico é considerado estável se é imune a pequenas perturbações, de tal forma que a interface entre as duas fases pode tolerar essas perturbações e retornar ao estado original. A figura 5.1 ilustra essa propriedade geral através da estabilidade de sistemas mecânicos. Um padrão bifásico pode ser assintoticamente estável, como no caso de um escoamento descendente de água e ar em tubulação, onde se percebe que a água tende a escoar como um filme. Ele pode ser neutro e estável, como no caso de ar e água segregados em um recipiente, numa situação de não-escoamento.

Um padrão bifásico pode ser instável, como no escoamento estratificado ascendente de água e ar em tubulação, onde nota-se que a água, mais pesada, tende a “inundar” o tubo, ou instável apenas sob grandes perturbações, como, por exemplo, no escoamento estratificado óleo-água horizontal, onde a baixas vazões há estabilidade, enquanto que a moderadas vazões se percebe um crescimento intenso das ondas de instabilidade. Neste trabalho, será estudada e aplicada apenas a teoria linear da estabilidade hidrodinâmica, ou seja, não será considerada a situação de instabilidade sob grandes perturbações, ou instabilidade não-linear.

## ***5.2. Conceitos básicos da estabilidade hidrodinâmica em escoamento bifásico paralelo***

O estudo será restrito à estabilidade do escoamento bifásico paralelo. Será adotado o termo “escoamento bifásico paralelo” para os escoamentos onde há dois fluidos superpostos em uma geometria plana ou dois fluidos concêntricos em geometria tubular (padrões estratificado e anular, respectivamente). Apesar de restringido aos padrões de escoamento anular e estratificado, o presente estudo tem como motivação uma vasta gama de aplicações. Como exemplos: transporte de óleo e água em poços direcionais e oleodutos; uso de fluidos descongelantes para a redução da formação de gelo ou acumulação de neve nas asas de aviões; escoamento descendente de múltiplas camadas de fluidos em um plano inclinado, técnica usada na manufatura de filmes fotográficos; redução de corrosão por CO<sub>2</sub> em escoamento horizontal gás-líquido através da manutenção de um filme líquido no topo do tubo, o que protege o metal da fase gasosa corrosiva; produção de gás natural e condensado a altas velocidades superficiais; escoamento de filme líquido adjacente à parede de dutos para a promoção de deslizamento e redução do cisalhamento do fluido do núcleo, fenômeno conhecido como redução de atrito; transporte e elevação artificial de petróleo ultra-viscoso através da geração de um filme de água que previne o contato do óleo com a parede da tubulação. Em todos esses exemplos, o estabelecimento de ondas na interface originalmente lisa pode influenciar fortemente a eficiência global do equipamento ou processo.

Focando a atenção sobre o último exemplo do parágrafo anterior, temos o transporte “lubrificado” de óleo ultra-viscoso no padrão anular líquido-líquido. O óleo não entra em contato com a parede do tubo, o que significa que a queda de pressão é balanceada pela tensão cisalhante parietal na água. Conseqüentemente, a presença do anel de água reduz a queda de pressão na linha à mesma ordem de magnitude do escoamento monofásico de água. Em condições de operação, a configuração anular líquido-líquido é notavelmente robusta, *i.e.*, estável, mesmo ao passar por irregularidades como uniões, curvas e dobras. Do ponto de vista da estabilidade hidrodinâmica, a estabilidade do padrão de escoamento anular líquido-líquido (Figs. 2.2 e 2.6, padrão A) é surpreendente, especialmente no escoamento horizontal. Apesar de que o óleo é mais leve do que a água, o núcleo oleoso per-

manece mais ou menos na linha de centro do tubo, sem tocar a parede da tubulação. A hidrodinâmica do escoamento anular líquido-líquido ainda não é perfeitamente compreendida; entretanto, acredita-se que ondas na interface óleo-água jogam um papel crucial no balanço de forças agindo sobre o núcleo oleoso. As ondas observadas no escoamento anular líquido-líquido são assimétricas e conhecidas como ondas “bambu”. Outro exemplo de formação de ondas em escoamento bifásico paralelo é o escoamento anular gás-líquido em tubulações de sistemas de refrigeração ou poços de produção de gás natural. Dos experimentos, observa-se que o início do arrasto de gotículas (*entrainment*) ou formação do aerossol praticamente coincide com o estabelecimento das chamadas *roll waves* na interface gás-líquido. As *roll waves* são longas e lembram as ondas da arrebentação na beira da praia. Medições detalhadas mostram que as *roll waves* de alta amplitude são usualmente cobertas por ondas de pequena amplitude (*ripple waves*) com comprimento de onda da ordem da espessura do filme líquido. Uma explicação provável para o mecanismo de formação do aerossol é que as gotículas são geradas pelo “arrancamento” das *ripple waves* das cristas das *roll waves*.

O ponto de partida natural para o estudo da geração de ondas em escoamento bifásico paralelo é a teoria linear da estabilidade hidrodinâmica. Preservando a analogia com o escoamento monofásico, na teoria linear investiga-se como perturbações infinitesimais são amplificadas e como a evolução dessas perturbações está relacionada à transição de um padrão de escoamento bifásico a outro. Essa hipótese permite a linearização das equações em torno do padrão bifásico básico, por exemplo, o padrão estratificado liso ou o padrão anular perfeito (sem ondas). No âmbito desse arcabouço teórico, estamos interessados no sinal da taxa de crescimento de uma perturbação senoidal com certo comprimento de onda. Uma taxa de crescimento negativa significa extinção da perturbação, enquanto que uma taxa de crescimento positiva indica que a perturbação se amplificará e crescerá mais e mais, até a quebra do padrão básico original ou até que efeitos não-lineares saturarem o crescimento. O efeito de saturação do crescimento de uma perturbação conduz tipicamente à formação de ondas interfaciais curtas e de amplitude finita que podem ser vistas a olho nu.

Entretanto, a maior desvantagem da teoria linear é que ela considera apenas perturbações infinitesimais. Ela não leva em conta que instabilidade poderia ser causada por perturbações de amplitude finita, mesmo quando o padrão básico é estável sob perturbações infinitesimais, o que é conhecido como instabilidade sub-crítica. O exemplo clássico é a transição para turbulência em escoamento monofásico de Couette ou Poiseuille. Como instabilidade sub-crítica encontra origem na presença de perturbações de amplitude finita, ela só pode ser descrita por teorias que são essencialmente de natureza não linear. A teoria fracamente não-linear da estabilidade hidrodinâmica é a abordagem não-linear mais simples. Ela pode ser considerada como uma correção das aproximações feitas na teoria linear (Drazin e Reid, 1981).

### 5.3. Classificação das instabilidades em escoamento bifásico paralelo

Instabilidades originadas de mecanismos físicos variados têm sido identificadas em escoamento bifásico paralelo gás-líquido e líquido-líquido. Uma classificação das instabilidades pode ser feita através da análise da equação que governa a taxa de variação da energia cinética da perturbação. Assim, é possível mostrar a existência de formas diferentes de transferência de energia entre o escoamento básico e o escoamento perturbado, as quais têm sua origem em efeitos cisalhantes, curvatura do perfil de velocidades, estratificação de densidade ou estratificação de viscosidade. Tal análise energética baseia-se no fato de que, por definição, instabilidade implica em aumento da energia cinética de uma perturbação, inicialmente pequena, no tempo. Em escoamento bifásico, mecanismos de diversa origem física são responsáveis pela produção dessa energia. A identificação do mecanismo dominante de produção de energia nos permite discriminar os diferentes tipos de ondas.

#### 5.3.1. Formulação do problema de estabilidade

Para a formulação de um problema de estabilidade em escoamento bifásico paralelo, assume-se que o escoamento básico é a solução das equações de Navier-Stokes independentes do tempo, o qual é impelido por um gradiente de pressão que é balanceado por tensão cisalhante e gravidade (Fig. 3.8). A estabilidade da configuração básica é investigada através da perturbação infinitesimal do escoamento básico. Portanto, os termos de velocidade e pressão são escritos como componentes independentes do tempo (escoamento básico) somados a uma perturbação dependente do tempo. Pressupondo que o escoamento é bidimensional (este sendo sempre mais instável que o tridimensional correspondente) e incompressível, a perturbação de velocidade pode ser representada em fluidos pela função corrente  $\psi_k(x, y, t)$ . Como o escoamento básico  $V_k(y)$  só depende da coordenada  $y$ , assume-se que a função corrente tem a seguinte forma:

$$\psi_k(x, y, t) = \psi_k(y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (5.1)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária e  $k$  indica a fase (1 ou 2). A análise considera o crescimento temporal da perturbação, tomando  $\alpha$  como um número de onda real e permitindo que a velocidade da onda  $c$  seja complexa. A parte real de  $c$  fornece a velocidade de fase da onda, enquanto que a parte imaginária de  $\alpha c$  é a taxa de crescimento (positiva se  $Im(\alpha c) > 0$ ).

A substituição da função corrente  $\psi_k(x, y, t)$  nas equações de Navier-Stokes linearizadas resulta na bem conhecida equação de Orr-Sommerfeld para as fun-



ções dependentes de  $y$ ,  $\psi_k(y)$ . Na forma adimensional, essas equações são dadas por:

$$\psi_1''' - 2\alpha^2\psi_1'' + \alpha^4\psi_1 = (i\alpha Rr/m)[(V_1 - c)(\psi_1'' - \alpha^2\psi_1) - V_1\psi_1] \quad (5.2)$$

para a fase superior ( $0 < y < n$ ), e

$$\psi_2''' - 2\alpha^2\psi_2'' + \alpha^4\psi_2 = i\alpha R[(V_2 - c)(\psi_2'' - \alpha^2\psi_2) - V_2\psi_2] \quad (5.3)$$

para a fase inferior ( $-1 < y < 0$ ). Primos são usados para indicar diferenciação com relação a  $y$ , o número de Reynolds é definido como  $R = \rho_2 V_k D_2 / \mu_2$  e as razões  $r$ ,  $m$ , e  $n$  são definidas como  $r = \rho_1 / \rho_2$ ,  $m = \mu_1 / \mu_2$  e  $n = D_1 / D_2$ .

As condições de contorno expressando não-deslizamento e paredes rígidas não-porosas são:

$$\psi_1 = \psi_1' = 0 \quad \text{para } y = n \quad (5.4)$$

$$\psi_2 = \psi_2' = 0 \quad \text{para } y = -1 \quad (5.5)$$

As condições na interface são a continuidade dos componentes da velocidade e o equilíbrio dos componentes de tensão.

As equações governantes do escoamento e as condições de contorno na parede e na interface constituem um problema de autovalores para a velocidade de onda complexa  $c$ . Para que a solução desse sistema diferencial homogêneo seja diferente de zero, a velocidade de onda  $c$  deve assumir valores específicos. Os recursos computacionais atuais permitem a solução numérica de praticamente qualquer perfil básico adotado  $V_j(y)$  e um grande número de parâmetros adimensionais. Maiores detalhes quanto à solução numérica podem ser vistos em (Boomkamp *et al.*, 1992, 1996 e 1997). Finalmente, os autovalores determinam as funções corrente  $\psi_k(x, y, t)$ , como definidas na Eq. (5.1), as quais contêm toda a informação sobre as perturbações de velocidade e pressão do problema de estabilidade linear.

### 5.3.2. Balanço de energia

Um escoamento instável implica que a energia cinética de uma perturbação inicialmente pequena cresce com o tempo. Embora seja evidente que energia está sempre sendo suprida pelo escoamento básico, em geral não é claro qual é o mecanismo através do qual isso ocorre. Em escoamento bifásico, por exemplo, é pos-

sível que uma instabilidade receba energia do escoamento que ocorre no seio de uma das fases, similarmente ao que ocorre em escoamento monofásico. Também é possível que instabilidade se origine na interface entre os dois fluidos, ou que a energia se origine de mais de uma fonte. Uma forma adequada da equação da energia da perturbação pode ser obtida pela multiplicação das equações de Navier-Stokes, as quais expressam conservação da massa e da quantidade de movimento, pela velocidade; portanto, opera-se o produto interno das perturbações de velocidade nessas equações. Subseqüentemente, opera-se a média no comprimento de onda  $\lambda = 2\pi/\alpha$  e integra-se sobre a espessura do fluido. Depois de feito isso para ambas as fases, somam-se os resultados e aplica-se o teorema da divergência de Gauss. Como solução, tem-se a seguinte equação

$$\sum_{k=1}^2 KIN_k = \sum_{k=1}^2 DIS_k + \sum_{k=1}^2 REY_k + INT... \quad (5.6)$$

onde:

$$INT = NOR + TAN \quad (5.7)$$

Na Eq. (5.6) temos a contribuição volumétrica de cada fluido para o balanço de energia. O termo  $KIN_k$  representa a taxa de variação média no espaço da energia cinética da perturbação. Para um escoamento transiente, a energia cinética de uma perturbação inicialmente pequena cresce com o tempo, *i.e.*, esse termo é sempre positivo. O termo  $DIS_k$  representa a taxa de dissipação viscosa do escoamento perturbado em cada fluido. Como esperado, dissipação viscosa opõe-se à instabilidade, ou seja, esse termo é negativo. O termo  $REY_k$  representa a taxa na qual o tensor de Reynolds está transferindo energia entre o escoamento básico e o escoamento perturbado. Esse termo pode ser tanto estabilizador (negativo) quanto desestabilizador (positivo).

A contribuição energética  $INT$  representa a taxa de trabalho produzida pela deformação da interface. Na Eq. (5.7),  $NOR$  representa a taxa de trabalho produzida por perturbações de velocidade e tensão na direção normal à interface.  $TAN$  representa a taxa na qual velocidade e tensões tangenciais, *i.e.*, na direção do escoamento básico, produzem trabalho na interface. Esses últimos dois termos ainda podem ser subdivididos em:

$$NOR = TEN + HYD \quad (5.8)$$

$$TAN = TAN_{\mu} + TAN_{\rho} \quad (5.9)$$

onde:  $TEN$  é a taxa de trabalho das perturbações relacionada à tensão superficial (ou interfacial) e  $HYD$  é a contribuição hidrostática. O termo  $TAN_{\mu}$  está relacionado à continuidade das tensões cisalhantes de perturbação na interface, *i.e.*, tem re-

lação com a condição de salto de viscosidade. Finalmente, para satisfazer a continuidade da tensão cisalhante total, a tensão cisalhante da perturbação deve se desenvolver em ambos os lados da interface deformada. Devido ao salto na curvatura, entretanto, essas tensões cisalhantes da perturbação são descontínuas através da interface. Para fluidos com viscosidades iguais, isso envolve uma transferência de energia resultante, denotada por  $TAN_\rho$ . Gravidade é responsável pela criação dessa descontinuidade na tensão cisalhante da perturbação, o que tem levado alguns autores a denominá-la “gravidade interfacial”. Em outras palavras,  $TAN_\rho$  tem relação com a condição de salto de densidade.

### 5.3.3. Classificação das instabilidades em escoamento bifásico

*Instabilidade de Rayleigh-Taylor.* Um sistema bifásico composto de um fluido mais pesado sobre um fluido mais leve desenvolverá instabilidade, pois para ondas suficientemente longas as forças gravitacionais desestabilizadoras são maiores do que as forças restauradoras resultantes da tensão interfacial. Esse tipo de instabilidade leva esse nome devido aos trabalhos pioneiros de Rayleigh (1883) e Taylor (1950). Portanto, a fonte de energia desestabilizadora é o trabalho feito pela componente normal da gravidade na interface,  $HYD$ , a qual supera os termos estabilizadores relacionados à tensão interfacial,  $TEN$ , e dissipação,  $DIS_k$ .

*Instabilidade de Miles.* Os artigos de Miles (1957 e 1959) tratam da geração de ondas superficiais por escoamentos cisalhantes. Ele propôs um mecanismo invíscido para a transferência de energia de ventos para ondas em águas profundas, assim fornecendo uma explicação para o chamado “*sheltering coefficient*” de Jeffreys (1925). Assumindo escoamento de ar invíscido, Miles mostrou que a curvatura negativa do perfil de velocidades induz uma tensão de Reynolds positiva e constante, a qual é conhecida por tensão de Reynolds induzida por onda (não confundir com a tensão de Reynolds da turbulência). Ela tem um efeito desestabilizador e transfere energia às ondas gravitacionais com comprimento de onda tipicamente de 10 cm. Portanto, a fonte de energia desestabilizadora relacionada ao tensor de Reynolds do ar,  $REY_l$ , supera todos os outros termos estabilizadores, especialmente dissipação no ar e na água,  $DIS_k$ .

*Instabilidade Induzida por Perturbações Tangenciais Interfaciais.* Esse tipo de instabilidade origina-se na interface e está relacionada à taxa na qual trabalho é feito pelas perturbações de velocidade e tensão na direção do escoamento básico. Ela pode ser dividida em:

- Instabilidade induzida pela viscosidade. Devido à deformação da interface, uma quantidade resultante de trabalho é feita pelo escoamento básico na interface, o que produz um aumento da energia  $TAN_\mu$  no escoamento pertur-

bado. Esse mecanismo é observado, por exemplo, no escoamento horizontal líquido-líquido anular ou em águas profundas sujeitas a ventos com velocidades superiores a 45 m/s. A fonte de energia desestabilizadora,  $TAN_\mu$ , de natureza viscosa, supera os termos estabilizadores relacionados à dissipação em ambas as fases,  $DIS_k$ .

- Instabilidade induzida pela gravidade. Trabalho é feito pela componente da gravidade na direção do escoamento, ou seja, ocorre em escoamento não-horizantal. A fonte de energia desestabilizadora interfacial,  $TAN_\rho$ , está relacionada à diferença de densidade entre os dois fluidos e supera os termos estabilizadores relacionados à dissipação em ambas as fases,  $DIS_k$ . Esse mecanismo é observado, por exemplo, no escoamento vertical líquido-líquido anular.
- Instabilidade induzida pela viscosidade e pela gravidade. Nesse caso, não é possível separar  $TAN$  nos termos  $TAG_\mu$  e  $TAN_\rho$ . A instabilidade é causada pela fusão dos dois mecanismos citados acima.

*Instabilidade Viscosa.* É bem sabido que escoamento monofásico de Poiseuille em canal torna-se instável quando a vazão de líquido excede certo valor crítico. Essa “instabilidade viscosa” é causada por uma combinação da condição de não deslizamento nas fronteiras e efeitos viscosos no seio da camada crítica, o que gera tensões de Reynolds desestabilizadoras (Drazin e Reid, 1981). As ondas de perturbação são conhecidas por ondas de Tollmien-Schlichting. Supondo um fluido viscoso sobre um fluido menos viscoso (escoamento óleo-água em tubo), o que caracteriza um escoamento de Couette, a fonte de energia desestabilizadora é a tensão de Reynolds no fluido menos viscoso,  $REY_2$  (vorticidade gerada nas fronteiras sólidas e na interface são fontes de instabilidade), a qual supera o termo estabilizador relacionados à dissipação na fase menos viscosa,  $DIS_2$ .

*Instabilidade Interna.* A fonte de instabilidade pode ser uma combinação de duas ou mais daquelas discutidas acima. Por exemplo, no caso de um filme líquido cisalhado por gás, as instabilidades dominantes são (i) interfacial induzida por viscosidade e (ii) viscosa, *i.e.*,  $TAN_\mu$  e  $REY_2$ , respectivamente. Elas superam os termos estabilizadores relacionados à dissipação,  $DIS_1$ , e viscosidade,  $REY_1$ , no ar.

## 6. Aplicações

### 6.1. Análise da estabilidade do escoamento líquido-líquido anular

Neste exemplo de aplicação, apresenta-se a dedução de um critério de transição geral para o padrão de escoamento líquido-líquido anular em tubulação horizontal, inclinada e vertical. Ele se baseia num modelo de dois fluidos unidimensional rigoroso do escoamento bifásico líquido-líquido e considera a existência de um número de onda interfacial crítico relacionado a um termo de tensão interfacial não-desprezível, para o qual a teoria linear da estabilidade hidrodinâmica ainda é válida. O problema viscoso laminar-laminar é totalmente resolvido e efeitos da turbulência sobre a estabilidade são analisados através de fatores de forma ajustados experimentalmente. O critério de transição geral proposto inclui em sua formulação o discriminador invíscido de Kelvin-Helmholtz. Se um comprimento de onda máximo teórico é considerado como condição necessária para a estabilidade, um critério de transição em termos do número de Eötvös é obtido. Efeitos de tensão interfacial, razão de viscosidades, diferença de densidades e fatores de forma sobre a estabilidade do padrão anular são levados em conta. A modelagem mais completa permite a análise do número de onda de estabilidade neutra e os resultados sugerem fortemente que a tensão interfacial tem um papel indispensável para a correta previsão da região estável do padrão anular líquido-líquido. A incorporação de um comprimento de onda mínimo teórico no modelo de transição produz resultados significativamente melhores em comparação com outros modelos da literatura.

#### 6.1.1. Formulação do problema de estabilidade para escoamento anular

Pode ser observada na Fig. 5.1 uma descrição esquemática do padrão de escoamento líquido-líquido anular (*core flow*). A análise baseia-se no modelo de dois fluidos, onde as equações diferenciais transientes unidimensionais médias na seção transversal da continuidade e quantidade de movimento são aplicadas para a fase central e a fase anular. As equações são acopladas através de relações constitutivas apropriadas. Os fluidos são considerados incompressíveis e o escoamento isotérmico e sem mudança de fase. O índice 1 indica a fase central (óleo) e o índice 2 indica a fase anular (água).

Partimos das seguintes equações de balanço:

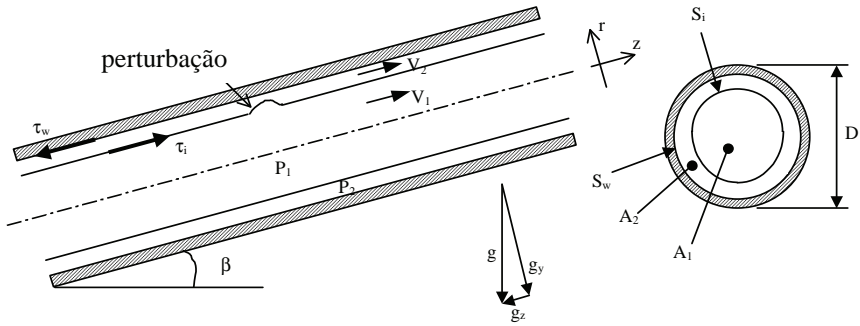


Fig. 5.1 Descrição esquemática do padrão de escoamento líquido-líquido anular

Continuidade:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} + V_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} = 0 \quad (6.1)$$

$$-\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + (1 - \varepsilon_1) \frac{\partial V_2}{\partial z} - V_2 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} = 0 \quad (6.2)$$

Quantidade de movimento:

$$\rho_1 \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_1 V_1) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_1 k_1 V_1^2) \right] + \varepsilon_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} = -\frac{S_i \tau_i}{A} + \varepsilon_1 \rho_1 g_z \quad (6.3)$$

e

$$\rho_2 \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_2 V_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_2 k_2 V_2^2) \right] + \varepsilon_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} = \frac{S_i \tau_i}{A} - \frac{4}{D} \tau_w + \varepsilon_2 \rho_2 g_z \quad (6.4)$$

onde  $V$  corresponde às velocidades axiais médias *in situ*,  $\rho$  corresponde às densidades,  $D$  é o diâmetro interno do tubo,  $g_z$  é a componente da gravidade na direção axial,  $\varepsilon_1$  é a fração volumétrica do óleo *in situ* ou *holdup*,  $\tau_i$  e  $\tau_w$  são, respectivamente, as tensões cisalhantes interfacial e parietal, e ainda:  $\varepsilon_2 = (1 - \varepsilon_1)$ ,  $S_i = \pi D (\varepsilon_1)^{0.5}$ ,  $A = \pi D^2 / 4$  e  $k = \langle V^2 \rangle / \langle V \rangle^2$ , tendo em mente que,  $\langle f_k \rangle = 1/A_k \int f_k dA$ , onde  $f$  corresponde a qualquer função de fase e o subscrito  $k$  é o índice de fase. Os

parâmetros de distribuição de energia cinética ou fatores de forma,  $k_k$ , são dados por:

$$k_1 = \frac{\langle w_1^2 \rangle}{V_1^2} = \frac{\frac{1}{\pi r^2} \int_0^{R_1} w_1^2 d(\pi r^2)}{\left[ \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{R_1} w_1 d(\pi r^2) \right]^2} \quad (6.5)$$

e

$$k_2 = \frac{\langle w_2^2 \rangle}{V_2^2} = \frac{\frac{1}{\pi r^2} \int_{R_1}^{D/2} w_2^2 d(\pi r^2)}{\left[ \frac{1}{\pi r^2} \int_{R_1}^{D/2} w_2 d(\pi r^2) \right]^2} \quad (6.6)$$

onde  $w_k$  corresponde aos perfis de velocidade e  $R_1 = D\sqrt{\varepsilon_1}/2$ .

Uma relação constitutiva é necessária para o fechamento do problema. A lei de Laplace-Young é escolhida para relacionar as pressões nas fases através da tensão interfacial. Propõe-se a seguinte relação:

$$P_1 - P_2 = \frac{\sigma}{R_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial R_1} \left[ R_1 \left( 1 + \left\{ \frac{\partial R_1}{\partial z} \right\}^2 \right)^{-1/2} \right] - \frac{0.166 \Delta \rho g_y \varepsilon_1 A}{\sigma} \right\} \quad (6.7)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação (6.7) corresponde ao efeito de variações na curvatura do núcleo (óleo) na direção axial (ondas interfaciais) e o segundo termo corresponde a distorções no contorno do núcleo devido à diferença de densidades, o que foi descrito por Bannwart (2001),  $\sigma$  é a tensão interfacial óleo-água, e  $g_y$  é a componente da gravidade na direção radial.

A equação da quantidade de movimento para a fase anular (Eq. 6.4) é subtraída da equação da quantidade de movimento para a fase central (Eq. 6.3) e, para a eliminação o termo de diferença de pressão, a Eq. (6.7) é substituída na equação resultante. Assim obtemos a equação da quantidade de movimento unidimensional média na seção transversal para o padrão anular líquido-líquido (Eq. 6.8). Juntamente com as Eqs. (6.1) e (6.2) tem-se um conjunto de 3 equações envolvendo 3 incógnitas,  $V_1$ ,  $V_2$  e  $\varepsilon_1$ :

$$\begin{aligned}
& (1-\varepsilon_1)\rho_1 \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_1 V_1) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_1 k_1 V_1^2) \right] + \\
& - \varepsilon_1 \rho_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [(1-\varepsilon_1) V_2] + \frac{\partial}{\partial z} [(1-\varepsilon_1) k_2 V_2^2] \right\} + \\
& + \varepsilon_1 (1-\varepsilon_1) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{2\sigma}{D\sqrt{\varepsilon_1}} + \frac{D\sigma}{16\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} \right)^2 - \frac{D\sigma}{4\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z^2} - 0.26\Delta\rho g_y D\sqrt{\varepsilon_1} \right] = \\
& = -(1-\varepsilon_1) \frac{Si}{A} \tau_i - \varepsilon_1 \frac{Si}{A} \tau_i + \varepsilon_1 \frac{4}{D} \tau_w + \varepsilon_1 (1-\varepsilon_1) g_z (\rho_1 - \rho_2)
\end{aligned} \tag{6.8}$$

A análise da estabilidade hidrodinâmica compreende o estudo de um eventual crescimento de uma pequena perturbação na configuração de escoamento básica inicial, tal que.

$$V_1 = V_1^o + w_1; \quad V_2 = V_2^o + w_2 \quad \text{and} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^o + \eta \tag{6.9}$$

onde o sobrescrito “ $^o$ ” indica a condição de equilíbrio (sem perturbação) e  $w_1$ ,  $w_2$  e  $\eta$  representam as pequenas perturbações impostas na velocidade e fração volumétrica do núcleo, respectivamente. Além disso,  $V_1^o$ ,  $V_2^o$  e  $\varepsilon_1^o$  são constantes e  $w_1$ ,  $w_2$  e  $\eta = f(z, t)$ .

De acordo com a teoria linear da estabilidade e seguindo o método das pequenas perturbações,  $w_1$ ,  $w_2$  e  $\eta$  são consideradas infinitesimais e, conseqüentemente, termos de segunda ordem ou superiores podem ser desprezados. Tal simplificação parece bastante razoável para o escoamento de óleo ultra-viscoso e água no padrão anular, pois as ondas interfaciais observadas experimentalmente são relativamente curtas, de amplitude finita e não apresentam um comportamento não-linear. Substituindo Eq. (6.9) nas Eqs. (6.1), (6.2) e (6.8) e desprezando todos os termos de ordens superiores, obtêm-se as seguintes equações da continuidade e quantidade de movimento, respectivamente:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon_1^o \frac{\partial w_1}{\partial z} + V_1^o \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \tag{6.10}$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + (1-\varepsilon_1^o) \frac{\partial w_2}{\partial z} - V_2^o \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad \text{..e} \tag{6.11}$$



$$\begin{aligned}
& \varepsilon_1^o (1 - \varepsilon_1^o) \left( \rho_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) + \\
& + \left[ \rho_1 V_1^o (1 - \varepsilon_1^o) (1 - 2k_1^o) + \rho_2 V_2^o \varepsilon_1^o (1 - 2k_2^o) \right] \frac{\partial \eta}{\partial t} + \\
& - \left\{ \rho_1 V_1^{o^2} (1 - \varepsilon_1^o) \left( k_1^o - \varepsilon_1^o \frac{dk_1}{d\varepsilon_1} \Big|_o \right) + \rho_2 V_2^{o^2} \varepsilon_1^o \left[ k_2^o - (1 - \varepsilon_1^o) \frac{dk_2}{d\varepsilon_1} \Big|_o \right] + \right. \quad (6.12) \\
& \left. + \frac{(1 - \varepsilon_1^o) \sigma}{D \sqrt{\varepsilon_1^o}} + 0.13 \Delta \rho g_y D \sqrt{\varepsilon_1^o} (1 - \varepsilon_1^o) \right\} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \\
& - \frac{(1 - \varepsilon_1^o) \sqrt{\varepsilon_1^o} D \sigma}{4} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = \frac{\partial fe}{\partial V_1} \Big|_o w_1 + \frac{\partial fe}{\partial V_2} \Big|_o w_2 + \frac{\partial fe}{\partial \varepsilon_1} \Big|_o \eta
\end{aligned}$$

onde os termos do lado direito da Eq. (6.8) foram linearizados através de expansão em série de Taylor até a primeira ordem, e:

$$fe = f(V_1, V_2, \varepsilon_1) = -\frac{Si\tau_i}{A} + \varepsilon_1 (1 - \varepsilon_1) g_z (\rho_1 - \rho_2) + \frac{4\varepsilon_1 \tau_w}{D} \quad (6.13)$$

Para a eliminação dos termos de perturbação de velocidade,  $w_1$  e  $w_2$ , são usadas as Eqs. (6.10) e (6.11) e a Eq. (6.12) é derivada em relação a  $z$ . Finalmente, é obtida a equação diferencial da perturbação ou equação da estabilidade para o padrão de escoamento líquido-líquido anular:

$$M \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2E \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial z} + F \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + G \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.14)$$

cujos coeficiente são:

$$M = \frac{\sigma D \sqrt{\varepsilon_1^o} (1 - \varepsilon_1^o)}{4} \quad ; \quad N = \rho_1 (1 - \varepsilon_1^o) + \rho_2 \varepsilon_1^o \quad ;$$

$$E = \rho_1 V_1^o (1 - \varepsilon_1^o) k_1^o + \rho_2 V_2^o \varepsilon_1^o k_2^o \quad ;$$

$$F = \rho_1 V_1^{o^2} (1 - \varepsilon_1^o) \left( k_1^o - \varepsilon_1^o \frac{dk_1}{d\varepsilon_1} \Big|_o \right) + \rho_2 V_2^{o^2} \varepsilon_1^o \left[ k_2^o + (1 - \varepsilon_1^o) \frac{dk_2}{d\varepsilon_1} \Big|_o \right] + \frac{(1 - \varepsilon_1^o) \sigma}{D \sqrt{\varepsilon_1^o}} + 0.13 \Delta \rho g_y D \sqrt{\varepsilon_1^o} (1 - \varepsilon_1^o)$$

$$G = -\frac{1}{\varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_1} \Big|_o + \frac{1}{1-\varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_2} \Big|_o ,$$

$$H = \frac{-\frac{V_1^o}{\varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_1} \Big|_o + \frac{V_2^o}{1-\varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_2} \Big|_o + \frac{\partial fe}{\partial \varepsilon_1} \Big|_o}{-\frac{1}{\varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_1} \Big|_o + \frac{1}{1-\varepsilon_1^o} \frac{\partial fe}{\partial V_2} \Big|_o} = c_o ,$$

onde  $c_o$  é velocidade de onda cinemática, segundo Wallis (1969).

A solução exata do problema linearizado é desenvolvida segundo a metodologia de solução de Whitham (1974). A Eq. (6.14) é normalizada para a avaliação de seu caráter ondulatório, tal que:

$$\eta(z, t) = \eta_{max} e^{i\alpha(z-ct)} \quad (6.15)$$

onde  $\alpha = 2\pi/\lambda$  é o número de onda,  $\lambda$  é o comprimento da onda interfacial e  $c$  e a celeridade da onda.

Substituindo a Eq. (6.15) na Eq. (6.14), obtêm-se a seguinte equação:

$$\alpha \frac{N}{G} \left( c^2 - 2 \frac{E}{N} c + \frac{F - M\alpha^2}{N} \right) + i(c - H) = 0 \quad (6.16)$$

Rearranjando a Eq. (6.16) e aplicando o teorema de Viète, temos:

$$\alpha \frac{N}{G} (c - c_1)(c - c_2) + i(c - c_o) = 0 \quad (6.17)$$

onde  $H$  foi substituída por  $c_o$ . Aproximando  $c = c_1$  e  $c = c_2$ , a Eq. (6.17) fornece, respectivamente:

$$\omega \cong \alpha c_1 - i \frac{G}{N} \frac{c_1 - c_o}{c_1 - c_2} \quad e \quad (6.18)$$

$$\omega \cong \alpha c_2 - i \frac{G}{N} \frac{c_2 - c_o}{c_2 - c_1} \quad (6.19)$$

Segundo a análise temporal de estabilidade, uma condição necessária para estabilidade é que a componente imaginária da frequência angular,  $\omega$ , (Eqs. 6.18 and 6.19) deve ser negativa. Rearranjando as Eqs. (6.18) e (6.19) e assumindo que  $c_1 > c_2$ , chega-se aos seguintes critérios:

$$\begin{cases} 1-G > 0 \\ 2-c_1 \text{ e } c_2 \text{ devem ser reais (análise de Kelvin-Helmholtz)} \\ 3-c_2 \leq c_o \leq c_1 \end{cases} \quad (6.20)$$

A condição de que  $c_1$  e  $c_2$  sejam reais corresponde ao critério de estabilidade invíscido de Kelvin-Helmholtz e pode ser expressa como:

$$V_o^2 + \frac{M\alpha^2 - F}{N} \geq 0 \quad (6.21)$$

onde  $V_o$  é a velocidade média ponderada, a qual corresponde a razão dos coeficiente  $E/N$ . A Eq. (6.21) é em geral satisfeita para comprimentos de onda relativamente curtos através da tensão interfacial.

Os critérios descritos pela Eq. (6.20) podem ser combinados em um único critério. Resolvendo a Eq. (6.16) para  $c$  (componente real) e aplicando os critérios, resulta o seguinte critério geral de estabilidade:

$$0 \leq \frac{\left(\frac{c_o}{V_o} - 1\right)^2}{I + \frac{M\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - F}{NV_o^2}} \leq 1 \quad (6.22)$$

Vale a penas destacar que o denominador da Eq. (6.22) é reconhecido como sendo o discriminador de Kelvin-Helmholtz (Eq. 6.21). Portanto, se o critério geral (Eq. 22) fornecer um valor negativo, isso significa que o critério invíscido de Kelvin-Helmholtz foi violado. Por outro lado, se ele fornecer um valor superior à unidade, isso significa que o terceiro critério da Eq. (20) não está sendo satisfeito.

### 6.1.2. Critério Invíscido de Kelvin-Helmholtz (Eq. 6.21)

Neste caso, o coeficiente  $G$  da equação da onda (Eq. 6.14) é desprezível, *i.e.*, os efeitos viscosos podem ser desprezados. A Eq. (6.14) torna-se:

$$M \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2E \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial z} + F \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0 \quad (6.23)$$

Substituindo Eq. (6.15) na Eq. (6.23), aplicando os requerimentos essenciais da análise invíscida à sua relação de dispersão e assumindo que os perfis de velocidade são uniformes ( $s_{f,1} = s_{f,2} = 1$ ), o seguinte critério de estabilidade é obtido para escoamento líquido-líquido anular:

$$Eo^* < 24 \left[ \frac{\varepsilon_1^o D^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\pi} - 2We_2 \left( \frac{s_o - 1}{1 - \varepsilon_1^o} \right)^2 \frac{\varepsilon_1^{o3/2} \rho_1}{\rho_1 (1 - \varepsilon_1^o) + \rho_2 \varepsilon_1^o} \right] \quad (6.24)$$

onde:

$$Eo^* = \frac{(\rho_1 - \rho_2) g_y \varepsilon_1^o A}{\sigma} \quad (6.25)$$

e

$$We_2 = \frac{\rho_2 J_2^2 D}{2\sigma} \quad (6.26)$$

são o número de Eötvös e o número de Weber da fase anular, e  $s_o = V_1^o / V_2^o$  é o deslizamento. Se se assume que não há deslizamento entre as fases, a Eq. (6.24) reduz-se a:

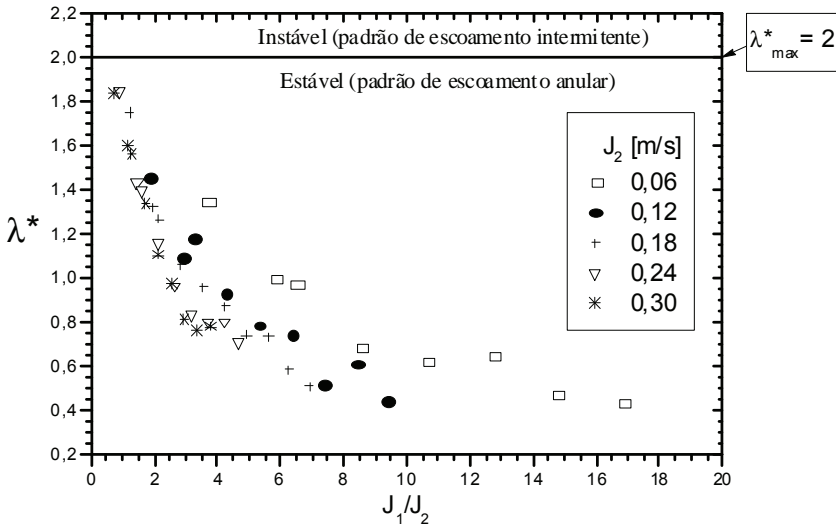
$$Eo^* < 60 \left( \frac{\varepsilon_1^o D^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad (6.27)$$

Se a existência de um comprimento de onda interfacial máximo crítico é considerado como uma condição necessária para a estabilidade, a Eq. (6.27) fornece um critério de estabilidade em termos do número de Eötvös. Para o caso mais simples de um escoamento anular vertical ascendente o critério pode ser simplificado ainda mais e a Eq. (27) torna-se:

$$\lambda^* < \pi \sqrt{\varepsilon_1} \quad (6.28)$$

onde  $\lambda^* = \lambda/D$ .

Na figura (6.2) pode ser vista uma comparação entre comprimentos de onda interfacial observados por Rodriguez e Bannwart (2006) e o comprimento de onda máximo previsto pela Eq. (6.28). Os dados experimentais (símbolos) correspondem a todas as situações para as quais o padrão de escoamento líquido-líquido anular foi observado. De acordo com a Eq. (6.28) e para o caso testado, o padrão anular é estável para  $\lambda^* \leq \lambda_{\max}^* = 2$ . O comprimento de onda adimensional máximo observado foi de  $\lambda^* = 1.86 < \lambda_{\max}^*$ , o que está em excelente concordância com os dados experimentais. Segundo Rodriguez e Bannwart (2006), comprimentos de onda maiores que  $\lambda^* = 1.86$  estão relacionados à transição do padrão anular ao padrão intermitente (vide também Fig. 2.2).



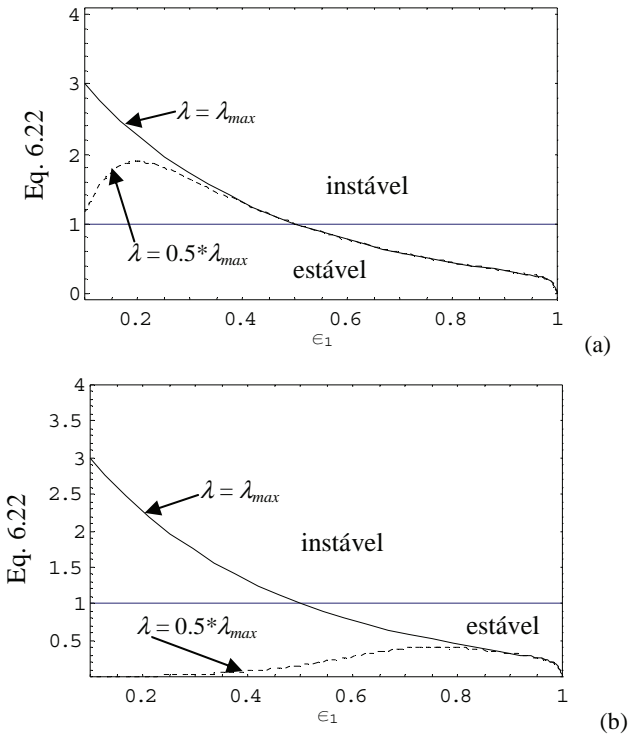
**Fig. 6.2** Comprimentos de onda obtidos experimentalmente para um escoamento líquido-líquido vertical ascendente no padrão anular em função da razão de injeção óleo-água (Rodriguez and Bannwart, 2006) e comprimento de onda máximo previsto pelo critério de Kelvin-Helmholtz (Eq. 6.28).

Para o caso do escoamento anular horizontal, o critério assume a seguinte forma:

$$\lambda^* < \frac{\pi \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{1 + 1.3 \frac{\Delta \rho D^2 \varepsilon_1}{\sigma}}} \quad (6.29)$$

### 6.1.3. Critério Geral (Eq. 6.22)

O efeito da tensão interfacial na estabilidade do padrão líquido-líquido anular depende do comprimento de onda: comprimentos de onda curtos tendem a estabilizar o escoamento, enquanto que comprimentos de onda longos tendem a desestabilizá-lo. Esse efeito foi originalmente determinado por Ooms (1972), entretanto a presente análise unidimensional indica a existência de um comprimento de onda mínimo crítico, para o qual ocorre o equilíbrio entre forças relacionadas à tensão interfacial e forças gravitacionais. Na figura (6.3) observa-se o efeito do comprimento de onda na estabilidade do escoamento anular laminar-laminar de densidades iguais, segundo o critério geral Eq. (6.22), através de dois números de Weber (Eq. 27) diferentes.



**Fig. 6.3** Efeito do comprimento de onda na estabilidade (Eq. 6.22) do escoamento anular líquido-líquido de densidades iguais; (a)  $We_2 = 500$  e (b)  $We_2 = 0.5$ .

Para o maior  $We_2$ , Fig. 6.3a, há apenas um pequeno ou praticamente nenhum efeito da tensão interfacial na região estável ( $\epsilon_l > 0.5$ ). Para o menor  $We_2$  e  $\lambda^* < \lambda_{max}^*$ , Fig. 6.3b, o escoamento tende a torna-se incondicionalmente estável, o que mostra a importância que a tensão interfacial adquire nesse caso.

Um comprimento de onda mínimo, da ordem da metade do diâmetro da tubulação, foi observado experimentalmente em escoamento líquido-líquido anular ver-

tical ascendente a altas frações volumétricas *in situ* por Rodriguez e Bannwart (2006). Aqueles autores propuseram um número de Eötvös baseado no comprimento de onda, dado por:

$$Eo_{\lambda} \cong \frac{\Delta\rho g \lambda D \sqrt{\varepsilon_1}}{4\sigma} \cong const \quad (6.30)$$

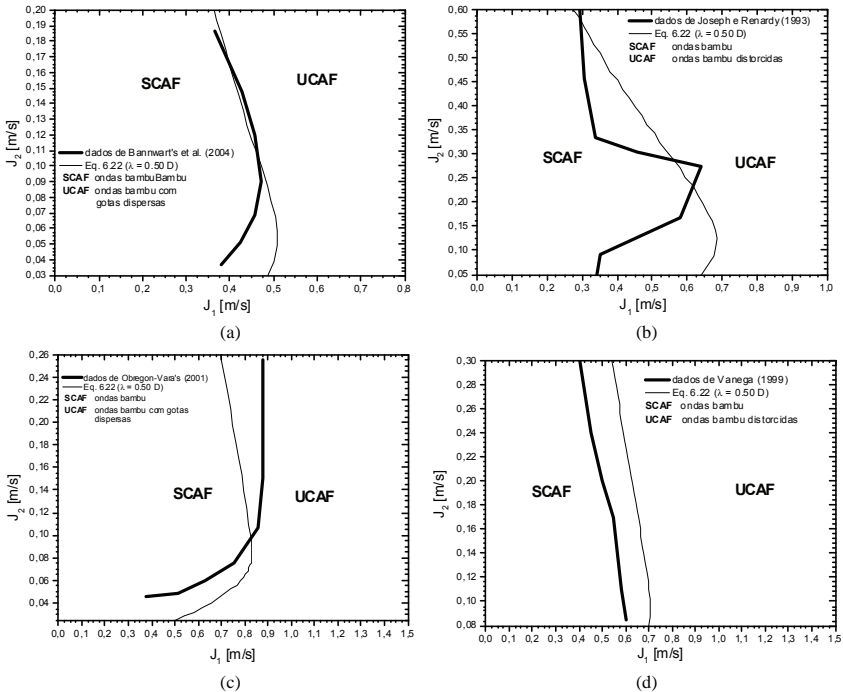
Eles observaram que o número de Eötvös (Eq. 6.30) é aproximadamente constante. Para uma fração volumétrica *in situ* de 0.90, associada à transição do padrão anular ao padrão disperso, o número de Eötvös é aproximadamente igual a 2. Portanto, a Eq. (6.30) prevê um comprimento de onda de meio diâmetro de tubo para as condições testadas por aqueles autores, o que está em perfeita concordância com suas observações experimentais. Assim, propõe-se que o critério de estabilidade geral (Eq. 6.22) seja aplicado com um comprimento de onda adimensional  $\lambda^* = 0.5$  para escoamento líquido-líquido anular.

Uma forma conveniente de avaliar o critério geral de transição proposto é através de comparação com dados experimentais sobre uma carta de fluxo das velocidades superficiais de água e óleo ( $J_1$  e  $J_2$ , respectivamente). Na Fig. 6.4, vemos essa comparação para quatro casos diferentes encontrados na literatura. A linha grossa representa a fronteira de transição experimental e linha fina a fronteira de transição prevista pela Eq. (6.22). Na Fig. 6.4, SCAF significa escoamento anular estável com ondas bambu (vide também Fig. 2.6, padrão A) e UCAF significa escoamento anular instável com gotículas dispersas no anel aquoso e núcleo altamente perturbado por ondas de alta frequência. O critério de transição (Eq. 6.22) foi testado para escoamento líquido-líquido anular (*core flow*) em tubulação vertical grande (Fig. 6.4a) e pequena (Fig. 6.4b) e em tubulação horizontal (Fig. 6.4c e d) para óleos com diferentes viscosidades. A concordância entre dados e previsões é mais do que encorajadora. Quantitativamente, a concordância entre previsões e dados é bastante boa; Entretanto, o resultado mais interessante é qualitativo. Nota-se que a modelagem unidimensional foi capaz, para todos os casos testados, de capturar a tendência de diminuição da área estável a baixas velocidades superficiais de água, o que demonstra claramente a validade da abordagem adotada. Maiores detalhes podem ser vistos em Rodriguez e Bannwart, 2008.

## 6.2. Análise da estabilidade do escoamento líquido-líquido estratificado

Um critério de transição geral é proposto para o padrão de escoamento líquido-líquido estratificado em tubulação horizontal e levemente inclinada. O critério proposto baseia-se no modelo de dois fluidos unidimensional do escoamento bifásico líquido-líquido. Ele considera a existência de um comprimento de onda inter-

facial crítico relacionado a um termo de tensão interfacial não-desprezível, para o qual a teoria da estabilidade linear ainda é válida. O comprimento de onda crítico observado pode ser explicitamente incorporado no modelo, *i.e.*, o número de onda de estabilidade neutra assume um valor diferente de zero. A aproximação de onda longa é descartada e um novo termo desestabilizador relacionado à curvatura da interface no plano transversal do tubo é derivado. O critério proposto produz resultados significativamente melhores em comparação com outros modelos da literatura, especialmente nas regiões da carta de fluxo de frações volumétricas extremas.



**Fig. 6.4** Fronteiras de transição prevista por Eq. (22) (linha fina,  $\lambda = 0.50D$ ) e experimental (linha grossa) observada por: (a) Bannwart *et al.* (2004a) (padrão líquido-líquido anular vertical ascendente,  $D = 0.0284$  m, tubo de vidro, água de torneira e óleo cru,  $\rho_l = 935$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu_l = 500$  mPa s,  $\sigma = 0.029$  N/m); (b) Joseph e Renardy (1993) (padrão líquido-líquido anular vertical ascendente,  $D = 0.009525$  m, tubo plástico, água de torneira e óleo mineral,  $\rho_l = 881$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu_l = 1300$  mPa s,  $\sigma = 0.020$  N/m); (c) Obregon-Vara (2001) (padrão líquido-líquido anular horizontal,  $D = 0.0284$  m, tubo de vidro, água de torneira e óleo cru,  $\rho_l = 945$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu_l = 1193$  mPa s,  $\sigma = 0.029$  N/m) e (d) Vanegas-Prada (1999) (padrão líquido-líquido anular horizontal,  $D = 0.0276$  m, tubo de aço galvanizado, água de torneira e óleo mineral,  $\rho_l = 960$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu_l = 15000$  mPa s,  $\sigma = 0.020$  N/m).

### 6.2.1. Formulação do problema de estabilidade para escoamento estratificado



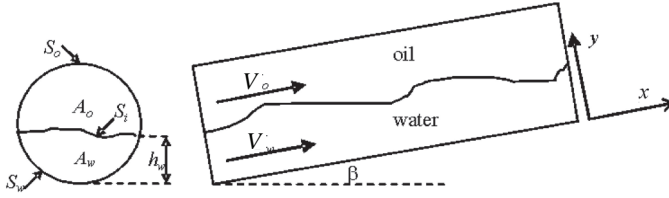


Fig. 6.5 Descrição esquemática da configuração estratificada.

A análise baseia-se no modelo de dois fluidos do escoamento estratificado (Fig. 6.5), onde as equações diferenciais transientes unidimensionais médias na seção transversal da continuidade e quantidade de movimento são aplicadas para ambas as fases. As equações são então acopladas através de relações constitutivas apropriadas. Os fluidos são considerados incompressíveis e o escoamento isotérmico e sem mudança de fase.

As seguintes equações de balanço são formuladas:

Continuidade:

$$\frac{\partial A_w}{\partial t} + A_w \frac{\partial V_w}{\partial x} + V_w \frac{\partial A_w}{\partial x} = 0 \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial A_o}{\partial t} + A_o \frac{\partial V_o}{\partial x} + V_o \frac{\partial A_o}{\partial x} = 0 \quad (6.32)$$

Quantidade de movimento:

$$\rho_w A_w \frac{\partial V_w}{\partial t} + \rho_w A_w V_w \frac{\partial (V_w k_w)}{\partial x} = -\tau_w S_w \pm \tau_i S_i + \quad (6.33)$$

$$- \rho_w A_w g \sin \beta - A_w \frac{\partial P_{iw}}{\partial x} + \rho_w A_w g \cos \beta \frac{\partial h_w}{\partial x}$$

$$\rho_o A_o \frac{\partial V_o}{\partial t} + \rho_o A_o V_o \frac{\partial (V_o k_o)}{\partial x} = -\tau_o S_o \pm \tau_i S_i + \quad (6.34)$$

$$- \rho_o A_o g \sin \beta - A_o \frac{\partial P_{io}}{\partial x} + \rho_o A_o g \cos \beta \frac{\partial h_w}{\partial x}$$

onde  $V$  corresponde às velocidades médias axiais *in situ*;  $\rho$  corresponde às densidades;  $D$  é o diâmetro interno do tubo;  $g$  é a aceleração da gravidade;  $A_o$  e  $A_w$  são

as áreas de seção transversal do óleo e da água, respectivamente;  $\tau_i$  e  $\tau_w$  são, respectivamente, as tensões cisalhantes interfacial e parietal;  $k = \langle V^2 \rangle / \langle V \rangle^2$ , tendo em mente que,  $\langle f_k \rangle = 1/A_k \int f_k dA$ , onde  $f$  corresponde a qualquer função de fase e  $k$  é o índice de fase. Os fatores de forma,  $k_k$ , são dados por:

$$k_w = \frac{\langle u_w^2 \rangle}{V_w^2} = \frac{1}{A_w V_w^2} \int_0^{A_w} u_w^2 dA_w \quad (6.35)$$

e

$$k_o = \frac{\langle u_o^2 \rangle}{V_o^2} = \frac{1}{A_o V_o^2} \int_0^{A_o} u_o^2 dA_o \quad (6.36)$$

onde  $u_w$  e  $u_o$  correspondem aos perfis de velocidades de água e óleo, respectivamente. Considerando  $A_w = A_w(h_w)$  e como  $A'_w = dA_w/dh_w$  são obtidas as seguintes equações:

Continuidade:

$$\frac{\partial h_w}{\partial t} + V_w \frac{\partial h_w}{\partial x} + \frac{A_w}{A'_w} \frac{\partial V_w}{\partial x} = 0 \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial h_w}{\partial t} + V_o \frac{\partial h_w}{\partial x} - \frac{A_o}{A'_w} \frac{\partial V_o}{\partial x} = 0 \quad (6.38)$$

Quantidade de Movimento:

$$\begin{aligned} & \rho_w \frac{\partial V_w}{\partial t} - \rho_o \frac{\partial V_o}{\partial t} + \rho_w V_w \left( k_w \frac{\partial V_w}{\partial x} + V_w \frac{dk_w}{dh_w} \frac{\partial h_w}{\partial x} \right) + \\ & - \rho_o V_o \left( k_o \frac{\partial V_o}{\partial x} + V_o \frac{dk_o}{dh_w} \frac{\partial h_w}{\partial x} \right) + (\rho_w - \rho_o) g \cos \beta \frac{\partial h_w}{\partial x} + \frac{\partial (P_{iw} - P_{io})}{\partial x} = F \end{aligned} \quad (6.39)$$

onde:

$$F = -\frac{\tau_w S_w}{A_w} + \frac{\tau_o S_o}{A_o} \pm \tau_i S_i \left( \frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_o} \right) - (\rho_w - \rho_o) g \sin \beta \quad (6.40)$$

Uma relação constitutiva é necessária para o fechamento do problema. A lei de Laplace-Young é escolhida para relacionar as pressões nas fases através da tensão interfacial. Propõe-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (P_{io} - P_{iw})}{\partial x} &= -\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 h_w}{\partial x^2} \left[ I + \left( \frac{\partial h_w}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} = \\
 &= \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\frac{\partial^2 h_w}{\partial x^2}}{\left[ I + \left( \frac{\partial h_w}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{I}{h_w \left[ I + \left( \frac{\partial h_w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}} \right\} = \\
 &= \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{I}{r_1(h_w)} + \frac{I}{r_2(h_w)} \right]
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

onde  $r_1(h_w)$  e  $r_2(h_w)$  são os principais raios de curvatura da interface  $\sigma$  é a tensão interfacial óleo-água.

Pela substituição da Eq. (6.41) na Eq. (6.39) e incluindo o termo relacionado à hipótese de *Sheltering*, obtêm-se a equação da quantidade de movimento unidimensional média na seção transversal para escoamento estratificado óleo-água, e juntamente com as Eqs. (6.37) e (6.38) temos um conjunto de 3 equações e 3 incógnitas,  $V_w$ ,  $V_o$  and  $h_w$ :

$$\begin{aligned}
 \rho_w \frac{\partial V_w}{\partial t} - \rho_o \frac{\partial V_o}{\partial t} + \rho_w V_w \left( k_w \frac{\partial V_w}{\partial x} + V_w \frac{dk_w}{dh_w} \frac{\partial h_w}{\partial x} \right) + \\
 - \rho_o V_o \left( k_o \frac{\partial V_o}{\partial x} + V_o \frac{dk_o}{dh_w} \frac{\partial h_w}{\partial x} \right) + L \frac{\partial h_w}{\partial x} - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r_1(h_w)} + \frac{1}{r_2(h_w)} \right] = F
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

onde:

$$L = (\rho_w - \rho_o)g \cos \beta - \rho_f (V_w - V_o)^2 C_s S_i \left( \frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_o} \right) \tag{6.43}$$

e  $F$  é redefinido como:

$$F = -\frac{\tau_w S_w}{A_w} + \frac{\tau_o S_o}{A_o} \pm \tau_i S_i \left( \frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_o} \right) - (\rho_w - \rho_o)g \sin \beta \tag{6.44}$$

onde o termo de tensão cisalhante interfacial,  $\tau_i$ , considera somente uma interface lisa e o sinal positivo sobre o termo de tensão interfacial corresponde ao óleo escoando mais rápido que a água.

Aplica-se a técnica das pequenas perturbações da teoria linear da estabilidade hidrodinâmica, tal que:

$$V_w = \bar{V}_w + \hat{V}_w; \quad V_o = \bar{V}_o + \hat{V}_o \quad \text{e} \quad h_w = \bar{h}_w + \hat{h}_w \quad (6.45)$$

onde o sobrescrito “-” indica a condição de equilíbrio (sem perturbação) e  $\hat{V}_w$ ,  $\hat{V}_o$  e  $\hat{h}_w$  representam as pequenas perturbações impostas na velocidade e no nível de água, respectivamente. Além disso,  $\bar{V}_w$ ,  $\bar{V}_o$  e  $\bar{h}_w$  são constantes e  $\hat{V}_w$ ,  $\hat{V}_o$  e  $\hat{h}_w = f(x,t)$ .

Aplicando os requerimentos essenciais da teoria da estabilidade linear, substituindo a Eq. (6.45) nas Eqs. (6.37), (6.38) e (6.42) e desprezando todos os termos de ordens mais altas, obtêm-se as seguintes equações da continuidade e da quantidade de movimento, respectivamente:

$$\frac{\partial \hat{h}_w}{\partial t} + \bar{V}_w \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} + \frac{\bar{A}_w}{A'_w} \frac{\partial \hat{V}_w}{\partial x} = 0 \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial \hat{h}_o}{\partial t} + \bar{V}_o \frac{\partial \hat{h}_o}{\partial x} - \frac{\bar{A}_o}{A'_w} \frac{\partial \hat{V}_o}{\partial x} = 0 \quad (6.47)$$

e

$$\begin{aligned} & \rho_w \frac{\partial \hat{V}_w}{\partial t} - \rho_o \frac{\partial \hat{V}_o}{\partial t} + \rho_w \bar{V}_w \left( k_w \frac{\partial \hat{V}_w}{\partial x} + \bar{V}_w \frac{dk_w}{dh_w} \Big|_{\bar{V}_w} \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} \right) + \\ & - \rho_o \bar{V}_o \left( k_o \frac{\partial \hat{V}_o}{\partial x} + \bar{V}_o \frac{dk_o}{dh_o} \Big|_{\bar{V}_o} \frac{\partial \hat{h}_o}{\partial x} \right) + \bar{L} \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} - \sigma \left[ \frac{\partial^3 \hat{h}_w}{\partial x^3} + \frac{1}{\bar{h}_w^2} \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} \right] = \partial \bar{F} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Para eliminar os termos de perturbação de velocidade,  $\hat{V}_w$  e  $\hat{V}_o$ , são aplicadas as Eqs. (6.46) e (6.47) na Eq. (6.48) e a equação resultante é derivada em  $x$ . Finalmente, obtêm-se a equação diferencial da perturbação ou equação da estabilidade para o escoamento estratificado óleo-água:

$$M \frac{\partial^4 \hat{h}_w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial t^2} + 2E \frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial t \partial x} + F \frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial x^2} + G \left( \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial t} + H \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} \right) = 0 \quad (6.49)$$

cujos coeficientes são:

$$M = \frac{A}{A'_w} \sigma$$

$$N = \left( \frac{\rho_w}{\bar{\varepsilon}_w} + \frac{\rho_o}{\bar{\varepsilon}_o} \right)$$

$$E = \frac{1}{2} \left[ \frac{\rho_w \bar{V}_w}{\bar{\varepsilon}_w} (1 + k_w) + \frac{\rho_o \bar{V}_o}{\bar{\varepsilon}_o} (1 + k_o) \right]$$

$$F = \frac{\rho_w \bar{V}_w^2}{\bar{\varepsilon}_w} \left( k_w - \frac{A \bar{\varepsilon}_w}{A'_w} \frac{dk_w}{dh_w} \Big|_{\bar{V}_w} \right) + \frac{\rho_o \bar{V}_o^2}{\bar{\varepsilon}_w} \left( \frac{\bar{\varepsilon}_w}{\bar{\varepsilon}_o} k_o + \frac{A \bar{\varepsilon}_w}{A'_w} \frac{dk_o}{dh_w} \Big|_{\bar{V}_o} \right) +$$

$$- \frac{A}{A'_w} \left[ (\rho_w - \rho_o) g \cos \beta - \rho_f (V_w - V_o)^2 C_s S_i \left( \frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_o} \right) - \frac{\sigma}{h_w^2} \right]$$

$$G = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_o} \frac{\partial F}{\partial \bar{V}_o} \Big|_{\bar{V}_w, \bar{h}_w} - \frac{1}{\bar{\varepsilon}_w} \frac{\partial F}{\partial \bar{V}_w} \Big|_{\bar{V}_o, \bar{h}_w}$$

e

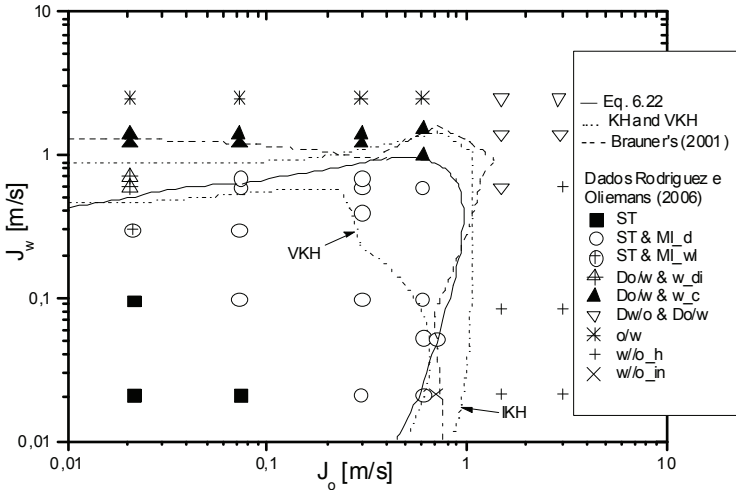
$$H = \frac{\frac{A}{A'_w} \frac{\partial F}{\partial \bar{h}_w} \Big|_{\bar{V}_w, \bar{V}_o} - \frac{\bar{V}_w}{\bar{\varepsilon}_w} \frac{\partial F}{\partial \bar{V}_w} \Big|_{\bar{V}_o, \bar{h}_w} + \frac{\bar{V}_o}{\bar{\varepsilon}_o} \frac{\partial F}{\partial \bar{V}_o} \Big|_{\bar{V}_w, \bar{h}_w}}{\frac{1}{\bar{\varepsilon}_o} \frac{\partial F}{\partial \bar{V}_o} \Big|_{\bar{V}_w, \bar{h}_w} - \frac{1}{\bar{\varepsilon}_w} \frac{\partial F}{\partial \bar{V}_w} \Big|_{\bar{V}_o, \bar{h}_w}} = c_o$$

onde  $c_o$  é a velocidade cinemática, como deduzido por Wallis (1969). Note que a inclusão das ondas de comprimento intermediário tem efeito desestabilizador (último termo do coeficiente  $F$ ).

A solução exata do problema linearizado baseia-se na metodologia de solução proposta por Whitham (1974). O procedimento é análogo ao apresentado no item 6.1.1 (Eqs. 6.15-6.22). O critério geral de estabilidade obtido para escoamento estratificado é idêntico à Eq. (6.22); porém, os coeficientes são aqueles que compõem a Eq. (6.49).

## 6.2.2. Aplicação do critério geral de estabilidade

A fronteira de transição do padrão estratificado para os padrões dispersos gera da através do critério representado pela Eq. (6.22) é comparada com os dados experimentais de Rodriguez e Oliemans (2006) (Fig. 6.6). Na carta de fluxo, os símbolos denominados pela letra S indicam padrões de escoamento estratificados e o restante dispersos ou semi-dispersos (Fig. 6.6, legenda).

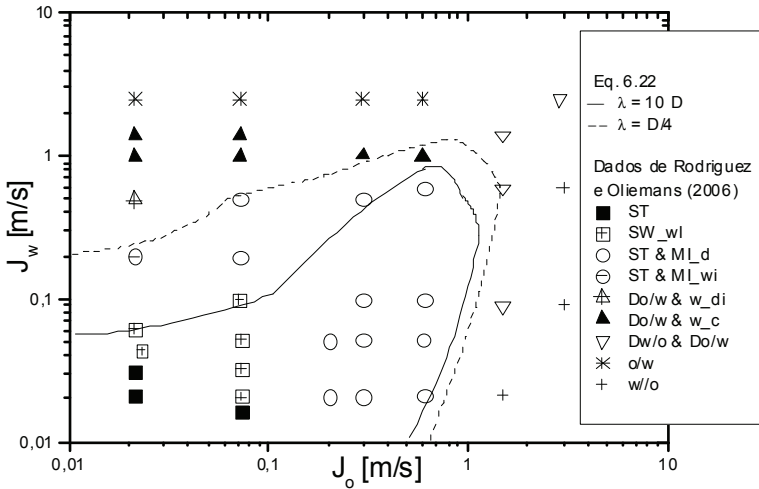


**Fig. 6.6** Fronteiras de transição: Eq. (6.22) (linha sólida), Trallero (1995) (VKH e IKH, linhas pontilhadas) e Brauner (2001) (linha tracejada) vs dados experimentais de Rodriguez e Oliemans (2006) (símbolos).

O critério proposto (Eq. 6.22) gera a fronteira que concorda melhor com os dados (linha cheia), em comparação com as duas fronteiras de Trallero (1995) e de Brauner (2001), especialmente nas regiões da carta relacionadas a frações volumétricas extremas. O critério viscoso VKH de Trallero (1995) apresenta resultados semelhantes nessas regiões, mas subestima fortemente os dados nas outras regiões da carta (região central da carta). O critério de Brauner (2001) e o critério invíscido IKH de Trallero (1995) tendem a superestimar os dados, especialmente na região de altas frações volumétricas de água (altas velocidades superficiais de água e baixas velocidades superficiais de óleo).

A figura 6.7 mostra a fronteira de transição prevista (Eq. 6.22) e a carta de fluxo experimental de Rodriguez e Oliemans (2006) para um escoamento estratificado descendente ( $-2^\circ$ ). Se um onda de instabilidade longa é introduzida no critério dado pela Eq. (6.22) tem-se a fronteira denotada por uma linha cheia na Fig. 6.7. Note que o modelo prevê uma diminuição significativa da região estratificada, especialmente na região de altas frações volumétricas de água, o que está em desa-

cordo com os dados experimentais. Entretanto, nessa região o padrão de escoamento ST&ML\_wi foi observado, *i.e.*, uma onda interfacial com comprimento da ordem do diâmetro do tubo foi visualizada. Se uma onda de comprimento menor (intermediário) é introduzida no modelo (Eq. 6.22) a nova fronteira gerada engloba todos os símbolos relativos ao padrão estratificado (Fig. 6.7, linha tracejada).



**Fig. 6.7** Critério de transição geral (Eq. 6.22) com  $\lambda = 10 D$  (linha sólida) e  $\lambda = D/4$  (linha tracejada), e dados de Rodriguez e Oliemans (2006) para escoamento estratificado óleo-água descendente ( $-2^\circ$ ).

Em escoamento estratificado descendente, espera-se que a fase mais densa acelere, enquanto que a fase mais leve acumule no tubo. Esse fenômeno é mais evidente na região de altas frações volumétricas de água, onde a fase mais leve e viscosa (óleo) tende a acumular devido a efeitos viscosos mesmo em escoamento horizontal. Rodriguez e Oliemans (2006) mostraram que nessa região a fração volumétrica *in situ* de água ( $\varepsilon_w$ ) pode alcançar valores até 10 vezes superiores em comparação à fração de injeção de água ( $C_w$ ). Um deslizamento ( $s = V_o / V_w$ ) muito baixo indica que provavelmente a velocidade relativa entre as fases é elevada. Percebe-se da análise da Fig. 6.7 que o critério de transição proposto é sensível a essa fonte de instabilidade (instabilidade de Miles); entretanto, os dados mostram que ainda há estratificação significativa nessa região. Através de analogia com o escoamento gás-líquido, espera-se que existam ondas de comprimento intermediário e amplitude finita relacionadas à transição do padrão estratificado ao disperso. Os dados de Rodriguez e Oliemans (2006) confirmam a existência dessas ondas, observação esta que sustenta o procedimento de inclusão de uma onda de comprimento intermediário no critério de transição descrito pela Eq. (6.22). Maiores detalhes podem ser vistos em Rodriguez *et al.* (2006).

## 7. Conclusões

Foi apresentada uma revisão geral do problema da estabilidade hidrodinâmica em escoamento bifásico de fases separadas. Como os escoamentos de fases separadas são comumente modelados como tendo fases paralelas, adotou-se neste texto a terminologia escoamento bifásico paralelo. Considerações gerais foram delineadas a respeito dos escoamentos bifásicos gás-líquido e líquido-líquido, incluindo ocorrência, padrões de escoamento e cartas de fluxo. Aspectos fundamentais da modelagem bifásica foram demonstrados, como a derivação das equações de transporte segundo o modelo de dois fluidos unidimensional. A teoria da onda cinemática unidimensional foi comentada e com base nela foram deduzidas relações para a fração volumétrica e deslizamento. Conceitos básicos relativos à estabilidade hidrodinâmica foram apresentados e as classes de instabilidades que ocorrem em escoamento bifásico paralelo foram catalogadas. Finalmente, a teoria da estabilidade linear foi aplicada para casos típicos enfrentados pela indústria e os seguintes exemplos foram descritos em detalhe: escoamento anular líquido-líquido (*core flow*) e escoamento estratificado líquido-líquido em tubulações.

É vasta a literatura a respeito dos escoamentos bifásicos, principalmente sobre escoamentos gás-líquido. Quanto aos escoamentos líquido-líquido, a literatura registra um esforço intenso de pesquisa nas últimas duas décadas. O volume de trabalho sobre estabilidade hidrodinâmica de escoamento bifásico paralelo é significativo; entretanto, estudos comparando resultados teóricos com dados experimentais são relativamente poucos. A modelagem carece de aprimoramento para lograr uma descrição mais fiel dos escoamentos de interesse da indústria. Sem dúvida, há ainda um longo e estupendo caminho a ser trilhado.

## 8. Agradecimentos

À Fundação de Amparo à pesquisa do estado de São Paulo (FAPESP) e à PETROBRAS pelo suporte financeiro. Sinceros agradecimentos a Antonio Carlos Bannwart, por ter despertado minha curiosidade a respeito do tema, e a René Oliemans, pela oportunidade e discussões enriquecedoras.

## 9. Referências

- Alkaya B., Jayawardena S.S. e Brill J.P., Oil water flow patterns in slightly inclined pipes, *Proceedings of ETCE/OMAE2000 Joint Conference*, New Orleans, fevereiro 14-17, 2000.
- Angeli P. e Hewitt G. F., Drop size distributions in horizontal oil-water dispersed flows, *Chemical Engineering Science*, 55, pp. 3233-3243, 2000.



- Angeli P. e Hewitt G. F., Pressure gradient in horizontal liquid-liquid flows, *International Journal of Multiphase Flow*, 24, pp. 1183-1203, 1998.
- Angeli, P., Liquid-liquid dispersed flows in horizontal pipes, Ph.D. Thesis. Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996.
- Arirachakaran,S., Oglesby, K.D., Malinowsky, M.S., Shoham, O. e Brill, J.P., An analysis of oil/water flow phenomena in horizontal pipes, *SPE Paper 18836, SPE Prof. Prod. Operating Symp.*, Oklahoma, 1989.
- Bai R, Joseph DD. Steady flow and interfacial shapes of a highly viscous dispersed phase. *International Journal of Multiphase Flow*. 2000;26:1469-1491.
- Bai R, Kelkar K, Joseph DD. Direct simulation of interfacial waves in a high-viscosity-ratio and axisymmetric core-annular flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1996;327:1-34.
- Bai R. Traveling waves in a high viscosity ratio and axisymmetric core annular flow. Ph.D. Thesis, University of Minnesota, 1995.
- Bai, R. e Joseph, D.D. Steady flow and interfacial shapes of a highly viscous dispersed phase, *International Journal of Multiphase Flow*, 26, pp. 1469-1491, 2000.
- Bai, R., Kelkar, K. e Joseph, D.D. Direct simulation of interfacial waves in a high-viscosity-ratio and axisymmetric core-annular flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 327, pp. 1-34, 1996.
- Bannwart AC, Vieira FF, Trevisan FE, Rodriguez OMH, de Carvalho CHM. Pressure drop in water-assisted three-phase flow of heavy oil and gas in a vertical pipe. In: 5th North American Conference on Multiphase Technology - Transferring Technology, BHR Group Limited, 421-433, 2006.
- Bannwart AC. Bubble analogy and stabilization of core-annular flow. *Journal of Energy Resources Technology*. 2001;123:127-132.
- Bannwart, A. C. , Rodriguez, O. M. H. , de Carvalho, C. H. M. , Wang I. S. e Obregon Vara, R. M., Flow Patterns in Heavy Crude Oil-water Flow, *Journal of Energy Resources Technology-Transactions of the ASME*, 126, pp. 184-189, 2004.
- Bannwart, A. C., Rodriguez, O. M. H., Trevisan, F. E., Vieira, F. F. e De Carvalho, C. H. M., Flow patterns and pressure gradient in horizontal, upward inclined and vertical heavy oil-water-gas flows: experimental investigation and full-scale experiments, *3<sup>rd</sup> International symposium on two-phase flow modelling and experimentation*, (artigo completo aceito para publicação) Pisa, G. P. Celata, P. Di Marco and R. K. Shah (Editors), 22-24 setembro, 2004.
- Barnea, D. e Taitel, Y., Kelvin-Helmholtz stability criteria for stratified flow: viscous versus non-viscous (inviscid) approaches, *International Journal of Multiphase Flow*, 19, n. 4, 639-649, 1993.
- Barnea, D. e Taitel, Y., Non-linear interfacial instability of separated flow, *Chemical Engineering Science*, 49, n. 14, pp. 2341-2349, 1994.
- Barnea, D., On the effect of the viscosity on stability of stratified gas-liquid flow – application to flow pattern transition at various pipe inclinations, *Chemical Engineering Science*, 46, n. 8, pp. 2123-2131, 1991.
- Bergles, A.E., Collier, J.G., Delhaye, J.M., Hewitt, G. F. e Mayinger, F., *Two-phase Flow and Heat Transfer in The Power and Process Industries*, Hemisphere;Mc Graw-Hill, 1981.
- Boomkamp, P.A.M. e Miesen, R.H.M., Nonaxisymmetric waves in core-annular flow with a small viscosity ratio, *Phys. Fluids A*, 4, pp. 1627-1636, 1992.
- Boomkamp, P.A.M. e Miesen, R.H.M., Physical characteristics of instabilities in parallel two-phase flow, in *advances in Multi-Fluid Flow, Proc. AMS-IMS-SIAM Conf. Analysis of multi-fluid flows and interfacial instabilities* (ed. Y. Renardy), SIAM, Philadelphia, 1996.
- Boomkamp, P.A.M., Boersma, B.J., Miesen, R.H.M. e Beijnon, G., A Chebyshev collocation method for solving two-phase flow stability problems, *J. Comput. Phys.*, 132, pp. 191-200, 1997.
- Botterill, J.S.M. Fluid Bed Heat Transfer. In *Gas Fluidization Technology*, Chichester, Jon Wiley, 1986.
- Brauner N., The prediction of dispersed flows boundaries in liquid-liquid and gas-liquid systems, *International Journal of Multiphase Flow*, 27, pp. 885-910, 2001.

- Brauner, N e Maron, D.M., Flow pattern transitions in two-phase liquid-liquid flow in horizontal tubes, *International Journal of Multiphase Flow*, 18, n. 1, p. 123, 1992b.
- Brauner, N. e Maron, D.M., Stability analysis of stratified liquid-liquid flow, *International Journal of Multiphase Flow*, 18, n. 1, p. 103, 1992a.
- Brauner, N. e Ullmann, A., Modeling of phase inversion phenomenon in two-phase pipe flows, *International Journal of Multiphase Flow*, 28, pp. 1177-1204, 2002.
- Brauner, N., e Moalem Maron, D., Classification of Liquid-Liquid Two-phase Flow Systems and the Prediction of Flow Pattern Maps, *2<sup>nd</sup> International Symposium on Two-Phase Flow Modeling and Experimentation - ISTEP'99*, 2, pp.747-754, Pisa, Italy, 1999.
- Brauner, N. The prediction of dispersed flow boundaries in liquid-liquid and gas-liquid systems, *International Journal of Multiphase Flow*, 27, pp. 885-910, 2001.
- Briggs PJ, Baron RP, Fulleylove RJ, Wright MS. Development of Heavy-Oil Reservoirs. SPE 15748. 1998;206-214.
- Butterworth, D. e Hewitt, G.F., *Two-phase Flow and Heat Transfer*, Oxford University Press, reprinted 1978, Eds. 1977.
- Charles, M. E., Govier, G. W. e Hodgson, G. W., The Horizontal Pipeline Flow of Equal Density Oil-water Mixtures, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 39, n. 1, pp. 27-36, 1961.
- Chen, K., Bai, R. e Joseph, D.D., Lubricated pipelines. Part 3. Stability of core annular flow in vertical pipes, *Journal of Fluid Mechanics*, 214, pp. 251-260, 1990.
- Collier, J.G., *Convective Boiling and Condensation*, Mac Graw-Hill, 1981.
- Crowley, C.J., Wallis, G.B. e Barry, J.J., Dimensionless form of a one-dimensional wave model for the stratified flow regime transition, *International Journal of Multiphase Flow*, 19, n. 2, pp. 369-376, 1993.
- Crowley, C.J., Wallis, G.B. e Barry, J.J., Validation of a one-dimensional wave model for the stratified-to-slug flow regime transition, with consequences for wave growth and slug frequency, *International Journal of Multiphase Flow*, 18, n. 2, pp. 249-271, 1992.
- Delhaye, J. M., Basic equations for two-phase flow modeling, in: *Two-Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries*, Editado por A. E. Bergles, Hemisphere Pub. Corp., 1981.
- Delhaye, J.M., Giot, M., Riethmuller, M.L., *Thermohydraulics of Two-phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering*, Hemisphere/Mc Graw-Hill, Eds. 1981.
- Drazin, P.G. e Reid, W.H., *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- Elseith, G., An experimental study of oil-water flow in horizontal pipes, Ph.D. Thesis. The Norwegian University of Science and Technology, 2001.
- Fairusov, Y.V., Arenas-Medina, P., Verdejo-Fierro, J. e Gonzales-Islas, R., Flow pattern transitions in horizontal pipelines carrying oil-water mixtures: full-scale experiments, *Journal of Energy Resources Technology*, 122, pp. 169-175, 2000.
- Fairuzov Y.V., Stability analysis of stratified oil/water flow in inclined pipelines, *SPE Production and Facilities*, 14-21, February, 2001.
- Feng J, Huang PY, Joseph DD. Dynamic simulation of the motion of capsules in pipelines. *Journal of Fluid Mechanics*. 1995;289:233-245.
- Flores, J.G., Chen, X.T., Sarica, C. e Brill, J.P., Characterization of Oil-water Flow Patterns in Vertical and Deviated Wells, *SPE 38810, SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, San Antonio, Texas, 5-8 outubro, 1997.
- Govier, G.W., e Aziz, K., *The Flow of Complex Mixtures in Pipes*, Van Nostrand-Reinhold, 1972.
- Guet, S., Rodriguez, O.M.H., Oliemans, R.V.A. e Brauner, N., Na inverse dispersed multiphase flow model for liquid production rate determination, *Int. J. Multiphase Flow*, 32, 553-567, 2006.
- Haaland, S.E., 1983. Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flows. *Fluids Eng.*, 89-90, March.

- Heisenberg, W., Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeits-stömmen, *Ann. Phys.*, 74, pp. 577-627, 1924 (Translated as NACA TM 1291, 1951).
- Hetsroni, G., *Handbook of Multiphase Systems*, Hemisphere/Mc Graw-Hill, Eds. 1982.
- Hewitt, G.F., *Measurement of Two-phase Flow Parameters*, Academic Press, 1978.
- Hinze, O.J., Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of splitting in dispersion processes, *A.I.Ch.E. Journal*, 1, n. 3, pp. 289-295, 1955.
- Howard H, Patankar N. Non-axisymmetric instability of core-annular flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1995;290:213-224.
- Howard, J. R. *Fluidized Bed Technology – Principles and Applications*, Adam Hilger, 1989.
- Huang, A. e Joseph, D.D., Stability of eccentric core-annular flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 228, pp. 233-245, 1995.
- Ishii M. Wave Phenomena and Two-Phase Flow Instabilities. In: Hetsroni G. *Handbook of Multiphase Systems*. Hemisphere, 1982:2/95-2/98.
- Ishii, M., *Thermo-fluid Dynamic Theory of Two-phase Flow*, Eyrolles, 1975.
- Jeffreys, H., On the formation of water waves by wind, *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, 107, pp. 189-206, 1925.
- Jeffreys, H., On the formation of water waves by wind, *Proceedings Royal Society*, A107, pp. 189-206, 1925.
- Joseph D.D e Renardy Y.Y., *Fundamentals of Two-Fluid Dynamics, Part II: Lubricated Transport, Drops and Miscible Liquids*, New York: Springer-Verlag, 1993.
- Joseph, D.D, Renardy, Y. e Renardy, M. Instability of the flow of immiscible liquids with different viscosities in a pipe, *Journal of Fluid Mechanics*, 141, pp. 309-317, 1985.
- Joseph, D.D., Bannwart, A.C., e Liu, Y.J., Stability of annular flow and slugging, *International Journal of Multiphase Flow*, 22, pp. 1247-1254, 1996.
- Joseph, D.D., Instability of the flow of two immiscible liquids with different viscosities in a pipe, *Journal of Fluid Mechanics*, 141, pp. 309-317, 1984.
- Kunii, D., e Levenspiel, O. *Fluidization Engineering*. Inc. USA, John Wiley & Sons, 1969.
- Li, J. e Renardy, Y. Direct simulation of unsteady axisymmetric core-annular flow with high viscosity ratio, *Journal of Fluid Mechanics*, 391, pp. 123-149, 1999.
- Lovick, J., Angeli, P., 2004. Experimental studies on the dual continuous flow pattern in oil-water flows. *International Journal of Multiphase Flow* 30, 139-157.
- Lovick, J., e Angeli, P., Two-phase Liquid Flows at the Partially Dispersed Flow Regime, *4<sup>th</sup> International Conference of Multiphase Flow*, New Orleans, maio 27-junho 1, 2001.
- Mandhane, J.M., Gregory, G.A. e Aziz, K., A flow pattern map for gas-liquid flow in horizontal pipes, *Int. J. Multiphase Flow*, 1, pp. 537-553, 1974.
- Miesen RHM, Beijnon G, Duijvestijn PEM, Oliemans RVA, Verheggen TMM. Interfacial waves in core-annular flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1992;238: 97-117.
- Miles, J.W., On the generation of surface waves by shear flows, *J. Fluid Mech.*, 3, pp. 185-204, 1957.
- Miles, J.W., On the generation of surface waves by shear flows, Part 2, *J. Fluid Mech.*, 6, pp. 568-582, 1959.
- Morris, C. W., Lenn, C.P. e Albertin, I.J., Water production logging in horizontal wells, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 22, pp. 217-227, 1999.
- Nadler M. e Mewes D., Flow induced emulsification in the flow of Two immiscible liquids in a Horizontal pipes, *International Journal of Multiphase Flow*, 23, n. 1, pp. 55-68, 1997.
- Nadler M. e Mewes D., Flow induced emulsification in the flow of Two immiscible liquids in a Horizontal pipes, *International Journal of Multiphase Flow*, 23, n. 1, pp. 55-68, 1997.
- Ng T.S., Lawrence C.J. e Hewitt G.F, Interface shapes for two-phase laminar stratified flow in a circular pipe, *International Journal of Multiphase Flow*, 27, pp. 1301-1311, 2001.
- Ng T.S., Lawrence C.J. e Hewitt G.F, Laminar stratified pipe flow, *International Journal of Multiphase Flow*, 28, pp. 963-996, 2001.
- Obregon-Vara RM. Hidrodinamics of the two-phase heavy oil-water flow in a horizontal pipe. M.Sc. Dissertation, The State University of Campinas - UNICAMP, 2001.

- Oddie G., Shi H., Durlafsky L.J., Aziz K., Pfeffer B. e Holmes J.A., Experimental study of two and three phase flows in large diameter inclined pipes, *International Journal of Multiphase Flow*, 29, pp. 527-558, 2003.
- Oliemans, R.V.A., Ooms, G., Wu, H.L. e Duijvestijn, A., Core annular oil-water flow: the turbulent lubricating film model and measurements in a 5 cm pipe loop, *International Journal of Multiphase Flow*, 13, n.1, pp. 23-31, 1987.
- Oliemans, R.V.A., The lubricating-film model for core-annular flow, Ph.D. Thesis, Technische Hogeschool Delft, Delft University of Technologic, 1986.
- Ooms, G., Segal, A., Van der Wees, A.J., Meerhoff, R. e Oliemans, R.V.A., A theoretical model for core-annular flow of a very viscous oil core and a water annulus through a horizontal pipe, *International Journal of Multiphase Flow*, 10, n.1, pp. 41-60, 1984.
- Ooms, G., The hydrodynamic stability of core-annular flow of two ideal liquids, *Applied Science Research*, 26, pp. 147-158, 1972.
- Paladino, E.E. e Maliska, C.R., Multi-phase flow modelling in differential pressure flow meters, *IX Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences – ENCIT2002*, Caxambu-MG, outubro 15-18, 2002.
- Pan, L., Jayanti, S. e Hewitt, G.F., Flow patterns, phase inversion and pressure gradients in air oil water flow in horizontal pipe, *paper FT2, Proc. of the ICMF 95*, Kyoto, Japan, 1995.
- Petalas N. e Aziz K., A mechanistic model for multiphase flow in pipes, *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 39, n. 6, pp. 43-55, 2000.
- Rayleigh, Lord, Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density, *Proc. London Math. Soc.*, 14, pp. 170-177, 1883. Also *Scientific Papers*, Vol. II, Cambridge University Press, pp. 200-207, 1900.
- Reynolds, O., An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, *Philos. Trans. Soc. Lond. A*, 174, pp. 935-982, 1883.
- Rodriguez OMH, Bannwart AC. Experimental study on interfacial waves in vertical core flow. *Journal of Petroleum Sciences and Engineering*, 54, pp.140-148, 2006.
- Rodriguez OMH, Bannwart, AC. Analytical model for interfacial waves in vertical core flow. *Journal of Petroleum Sciences and Engineering*, 54, pp. 173-182, 2006.
- Rodriguez, O. M. H. e Bannwart, A. C., Flow patterns in vertical and horizontal heavy crude oil-water two-phase flow and stability analysis of core-annular flow, *5th international conference on multiphase flow – ICMF-2004*, Yokohama, Japão, 30 maio-4 junho, 2004d.
- Rodriguez, O. M. H., Mudde, R. F. e Oliemans, R. V. A., Analysis of transitional boundaries, holdup and pressure gradient in inclined oil-water flows, *5th international conference on multiphase flow – ICMF-2004*, Yokohama, Japao, 30 maio-4 junho, 2004b.
- Rodriguez, O. M. H., Mudde, R. F. e Oliemans, R. V. A., Inversion of multiphase flow models for horizontal and inclined oil-water well logging, *4th North American Conference on Multiphase Technology*, BHR Group Limited, Bedfordshire (C. Rolf), Banff, Canada, 3-4 Junho, 2004a.
- Rodriguez, O.M.H. e Bannwart, A.C., Stability analysis of core-annular flow and neutral stability wave number, *AIChE J.*, 54 (1), pp. 20-31, 2008.
- Rodriguez, O.M.H. e Oliemans, R.V.A., Experimental study on oil-water flow in horizontal and slightly inclined pipes, *Int. J. Multiphase Flow*, 32, pp. 323-343, 2006.
- Rodriguez, O.M.H., Bannwart, A.C., 2004. Flow patterns in vertical and horizontal heavy crude oil-water two-phase flow and stability analysis of core-annular flow. Proceedings of 5<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow – ICMF'04, Yokohama, Japan, May 30-June 4.
- Rodriguez, O.M.H., Interface Shape and Pressure Gradient in Upward Core-annular Flow, Ph.D. thesis, The State University of Campinas, Campinas, Sao Paulo, 2002.
- Rodriguez, O.M.H., Inversion of multiphase flow models for multiphase well logging, *Shell International Exploration and Production B.V. Report*, Rijswijk, Holanda, agosto, 2003.

- Rosa, E. S. e Morales, R. E. M., Emprego de CFD para Desenvolvimento de um Medidor Venturi Operando com um Escoamento de Gás e Líquido, *IX Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas - ENCIT2002*, Caxambu-MG, outubro 15-18, 2002.
- Russel TWF, Charles ME. The effect of the less viscous liquid in the laminar flow of two-immiscible liquids. *Can J Chem Eng.* 1959;37:18-24.
- Schlichting H. *Boundary-Layer Theory*. New York: McGraw-Hill, 1979.
- Schlichting, H., Über die Stabilität der Couette-strömung. *Ann. D. Phys.*, 5 (14), pp. 905-936, 1932.
- Schlichting, H., Zur Entstehung der Turbulenz bei der Platten-strömung. In *Math. Phys. Klasse* (pp. 181-208). Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1933.
- Schubauer, G.B. e Akramstad, H.K., Laminar boundary layer oscillations and transition on a flat plate (*NACA TN 909*), 1948.
- Simmons M.J.H. e Azzopardi B.J., Drop size distributions in dispersed liquid-liquid pipe flow, *International Journal of Multiphase Flow*, 27, pp. 843-859, 2001.
- Song JH, Ishii M. On the stability of a one-dimensional two-fluid model. *Nuclear Engineering and Design*. 2001;204:101-115.
- Sotgia, G., e Tartarini, P., Experimental and Theoretical Investigation on Pressure Drop Reductions in Oil Water Flows, *4<sup>th</sup> International Conference of Multiphase Flow*, New Orleans, Louisiana, maio 27-junho 1, 2001.
- Taitel, Y. e Dukler, A. E., A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow. *A.I.Ch.E. Journal*, 22, pp. 47-55, 1976.
- Taitel, Y., Barnea, D. e Dukler, A. E., Modeling flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes, *A.I.Ch.E. Journal*, 26, pp. 345-354, 1980.
- Taylor, G.I., Statistical theory of turbulence. V. Effects of turbulence on boundary layer. Theoretical discussion of relationship between scale of turbulence and critical resistance of sphere. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 156, pp. 307-317, 1936.
- Taylor, G.I., The stability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I, *Proc. Roy. Soc.*, 201, pp. 192-196, 1950.
- Tollmien, W., Über die Entdtehung der Turbulenz. 1. Mitteilung. In *Math. Phys. Klasse* (pp. 21-44). Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1929 (Translated as NACA TM 609, 1931).
- Trallero, J. L., Oil-Water Flow Patterns in Horizontal Pipes, Ph.D. thesis, The University of Tulsa, Tulsa, Oklahoma, 1995.
- Trallero, J.L., Sarica, C., e Brill, J.P., A Study of Oil/water Flow Patterns in Horizontal Pipes, *SPE Production & Facilities*, *SPE 36609*, agosto, 1997.
- Valle, A. e Utvik, O.H., Pressure Drop, Flow Pattern and Slip for Two-phase Crude Oil/water Flow: Experiments and Model Predictions, *International Symposium on Liquid-Liquid Two Phase Flow and Transport Phenomena*, Antalya, Turkey, 1997.
- Vanegas-Prada JW. Experimental study of Core Annular Flow in the Ultraviscous Oil Lift. M.Sc. Dissertation, The State University of Campinas, 1999.
- Wallis, G.B. *One-dimensional Two-Phase Flow*, EUA, McGraw Hill, 1969.
- Whitham GB. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: John Wiley & Sons, 1974.

# CAPÍTULO 9 - Alguns Aspectos de Produção de Petróleo

Arlindo de Matos

Carlos Magno Bezerra de Medeiros Nascimento

PETROBRAS

## Lista de Símbolos

A	área [m <sup>2</sup> ], distância de relaxação [m]
c	calor específico do fluido [J/kg.K]
E	energia [J]
G	aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]
g <sub>G</sub>	gradiente geotérmico
H	coeficiente de convecção [W/m <sup>2</sup> .°C]
H	entalpia [J/kg]
K	condutibilidade térmica [W/m.°C]
L	comprimento da tubulação [m], profundidade do poço [m]
P	pressão [Pa]
q	intensidade de fluxo de calor [W/m <sup>2</sup> ]
Q	calor [J]
R	raio da tubulação [m]
R	resistência térmica do material [m <sup>2</sup> .°C/W]
T	temperatura [°C, K]
T	tempo [s]
TEC	Thermal Exchange Coefficient [W/(m.K)]
U	coeficiente de troca térmica global [W/m <sup>2</sup> .°C], Energia interna [J]
u	energia interna por unidade de massa [J/kg]
W	Trabalho [J]

## Símbolos Gregos

$\Pi$	constante Pi
$P$	Massa específica [kg/m <sup>3</sup> ]
$\mu_{JT}$	constante de Joule-Thompson

## Subscritos

$C$	convecção
$e$	externo
$i$	interno
$k$	condução
$o$	global, externo
$P$	pressão constante
$s$	sobre o fluido
$T$	temperatura constante
$to$	coluna de produção

## Operadores Matemáticos

$-$	média
-----	-------

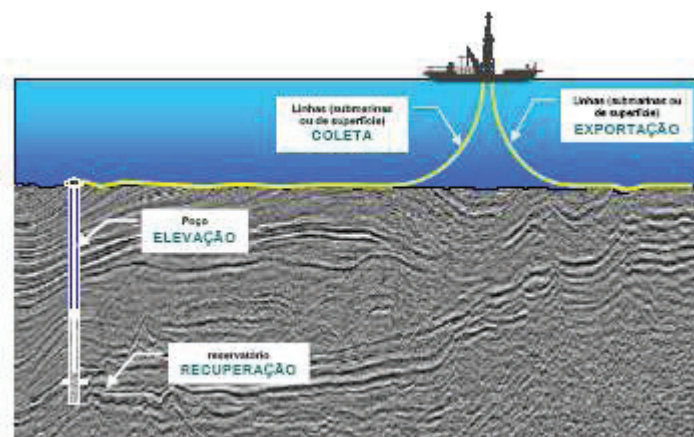
## 1. Introdução

A produção de Petróleo esta intimamente ligada a escoamentos multifasicos. Para facilitar o estudo da produção de petróleo, costuma-se separar o escoamento em etapas (próximo item deste capítulo). A primeira etapa estudada é o próprio reservatório que é subdividido em macro modelos denominados mecanismos de produção (item 3 deste capítulo). O próprio petróleo é um fluido heterogêneo e em cada reservatório apresenta características diferentes, desta forma foram criadas correlações para entender a variação das propriedades do mesmo com mudanças de pressão e temperatura (item 4 deste capítulo). Para que ocorra a produção é necessário uma movimentação do fluido (petróleo) desde o reservatório até os pontos de interesse, desta forma para projetar as colunas de produção e linhas é necessário conhecer as perdas de carga desde o reservatório até estes pontos, desta forma foram desenvolvidas correlações de perda de carga (item 5 deste capítulo). Ao realizar o calculo da perda de carga dimensiona-se com que vazão o poço de petróleo irá produzir e também calcula-se se é necessário adicionar mais energia no sistema através de um método de elevação artificial (item 6 deste capítulo). Para a produção off-shore é fundamental conhecer como ocorre a transferência de calor entre a linha e o mar, pois com a queda de temperatura a viscosidade do pe-

tróleo pode aumentar significativamente influenciando de maneira substancial a forma com que o fluido é transferido na linha de produção (item 7 deste capítulo).

## 2. Etapas do Escoamento do Petróleo

É comum dividir o escoamento do Petróleo em partes, sendo denominado **Recuperação** o escoamento no meio poroso, **Elevação** o escoamento na coluna de produção e **Coleta** o escoamento na superfície, (Fig. 1). O escoamento multifásico encontra-se presente nestas etapas, sendo que na Recuperação predomina-se o escoamento em meios porosos, nesta etapa normalmente o escoamento é de água conata e óleo em reservatórios com a pressão acima da pressão de saturação e água, óleo e gás para reservatórios abaixo da pressão de saturação.



**Fig. 1** Etapas de fluxo em um sistema de produção. (Oliveira G.P. 2005)

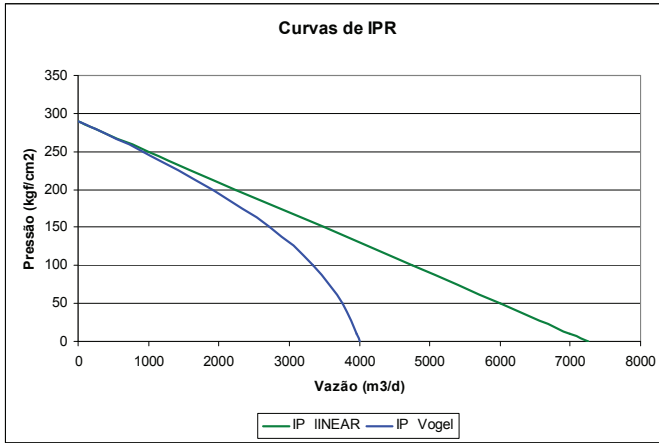
De acordo com a diferença de pressão entre o reservatório e um poço (nos canhoneados) haverá uma vazão no meio poroso (reservatório) a esta correlação dá-se o nome de curva de desempenho do reservatório também chamada na literatura internacional de “Inflow Performance Relationship (IPR)”. Esta relação é válida para um dado instante da vida produtiva do reservatório. A IPR representa o fluxo no meio poroso, correlacionando vazões com pressões de fluxo.

Uma curva de IPR pode ser usada para óleo ou gás, associado ou não com a produção de água. Combinando a IPR com análise nodal é possível determinar um esquema de produção ótima e simular sistemas de elevação artificial.

As curvas de IPR (Fig. 2) pode ser utilizada para escoamento monofásico, pressão acima da pressão de saturação, ou para escoamento multifásico, pressão abaixo da pressão de saturação. No caso da pressão estar acima da pressão de satu-

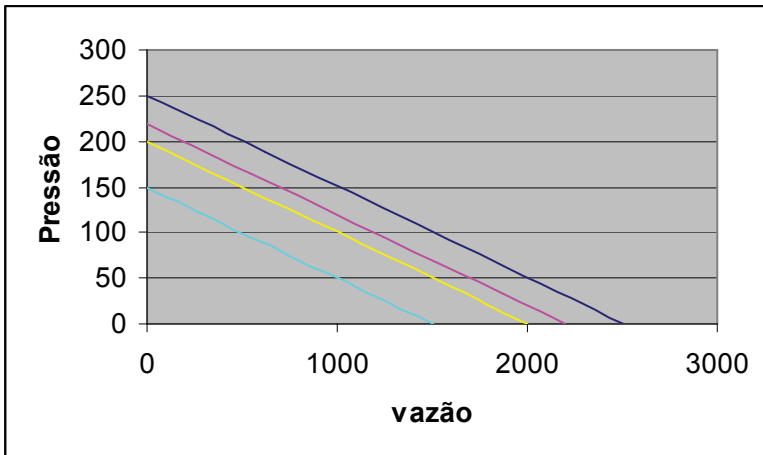


ração utiliza-se o modelo linear. Caso a pressão no reservatório esteja abaixo da pressão de saturação utiliza-se a equação de Vogel (Vogel, 1968).



**Fig. 2** Curvas de IPR.

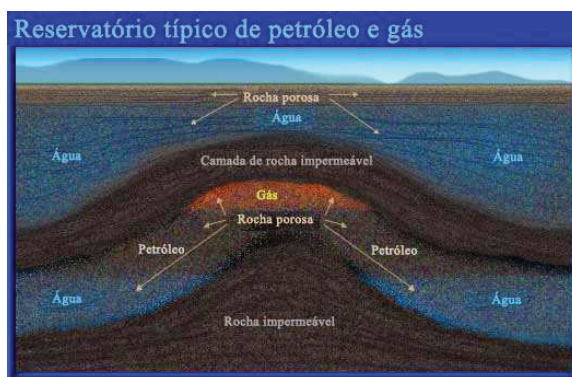
Ao produzir petróleo retira-se massa do reservatório um decréscimo na capacidade do mesmo em suprir com fluido o poço (**Fig. 3**). Para recuperar esta capacidade de produção torna-se necessário suprir energia através de mecanismos de recuperação secundários.



**Fig. 3** Declínio de produção.

### 3. Mecanismos de Produção

Os fluidos contidos no reservatório (**Fig. 4**) devem possuir certa quantidade de energia para serem produzidos. Esta energia é usada para conseguir vencer toda a resistência oferecida pelo meio poroso, pela coluna e linha de produção e se deslocar até o ponto de coleta, para isto é necessário que os fluidos estejam pressurizados.



**Fig. 4** Reservatório de Petróleo.

(<http://brasiloffshore.files.wordpress.com/2009/02/reservoir.jpg> pesquisado em 16/12/2009).

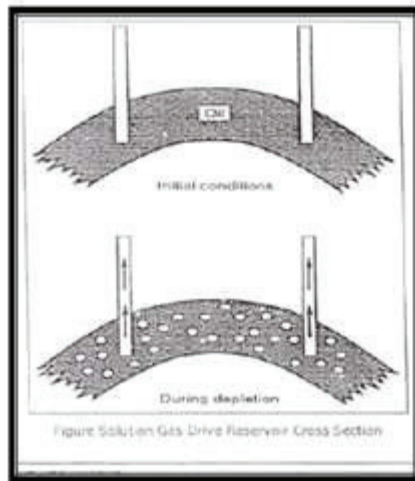
De modo geral, a produção ocorre devido a dois efeitos principais:

- 1) Descompressão, pois além de causar uma expansão dos fluidos contidos no reservatório também irá contrair o volume poroso devido a compressibilidade da rocha.
- 2) Deslocamento do fluido por outro fluido, feito através da injeção de água, gás natural, CO<sub>2</sub>, etc.

Ao conjunto de fatores que desencadeiam estes efeitos dá-se o nome de Mecanismo de Produção do Reservatório. A seguir mostra-se 3 mecanismos de produção descritos nas principais literaturas.

#### 3.1. Gás em Solução

No mecanismo gás em solução (**Fig. 5**), o reservatório tem as suas fronteiras isoladas desta forma não permitem fluxos em qualquer sentido, impedindo a penetração de fluidos. Toda a energia disponível para produção se encontra armazenada na própria zona de óleo. Um aspecto marcante desse mecanismo são as baixas recuperações, tipicamente inferiores a 20%.



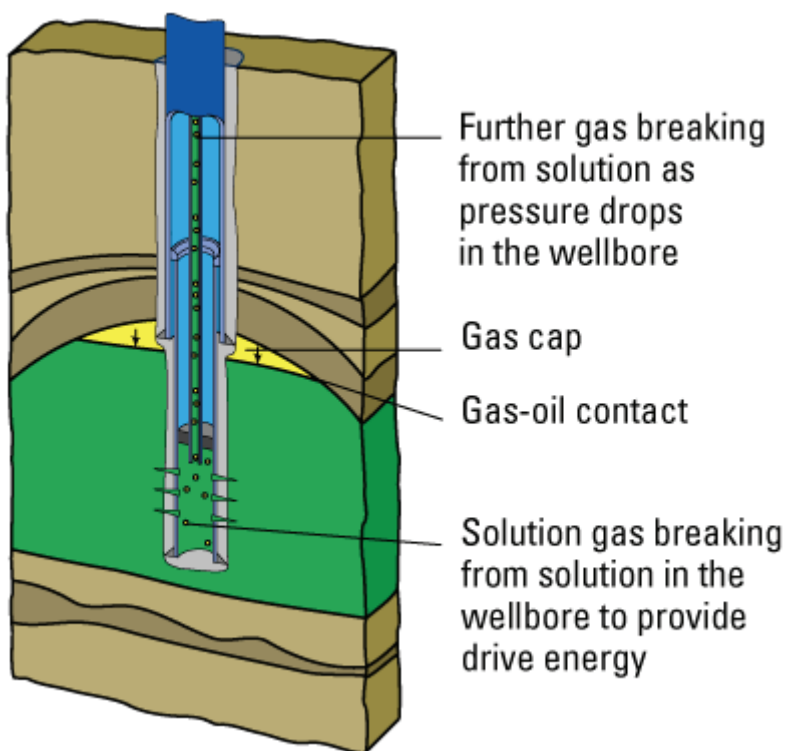
**Fig. 5** Mecanismo de produção Gás em solução.

(<http://nanangsugiarto.files.wordpress.com/2008/03/image70.png>) pesquisado em 22/02/2010.

Inicialmente, enquanto a pressão do reservatório e a pressão de fluxo no fundo do poço forem superiores à pressão de saturação, só existe a fase líquida no meio poroso (parte superior da **Fig. 5**), quando a pressão cai abaixo da pressão de saturação haverá uma formação de gás próximo do poço. É importante que a queda de pressão próxima ao poço não seja muito elevada, pois isto aumentaria demasiadamente a saturação de gás nesta região, reduzindo a permeabilidade relativa ao óleo, e com isso a produtividade nesta região.

### 3.2. *Capa de Gás*

No mecanismo Capa de Gás (**Fig. 6**) a depender das condições de pressão e temperatura, a mistura de hidrocarbonetos poderá apresentar com as fases líquidas e vapor em equilíbrio. A principal fonte de energia para a produção está no gás da capa.

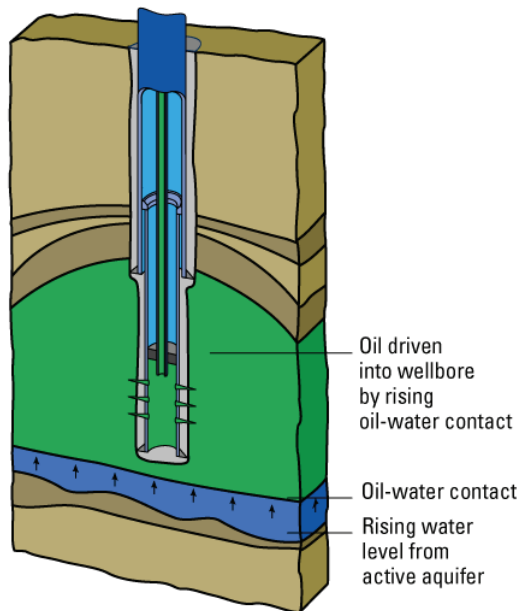


**Fig. 6** Mecanismo de produção capa de gás.

(<http://www.glossary.oilfield.slb.com/DisplayImage.cfm?ID=504>) pesquisado em 22/02/2010.

### 3.3. Influxo de Água

No mecanismo Influxo de água (**Fig. 7**), deve haver um grande volume de água conectado ao reservatório principal desta forma uma alteração nas condições do reservatório irá causar uma alteração no aquífero e vice-versa. Os aquíferos podem se encontrar subjacentes ou ligados lateralmente ao reservatório. O fator de recuperação deste tipo de reservatório é da ordem de 30 a 40%.



**Fig. 7** Mecanismo de produção influxo de água.  
<http://www.glossary.oilfield.slb.com/DisplayImage.cfm?ID=532> pesquisado em 07/02/2010.

## 4 Modelos de Fluido Utilizados

Para modelar as propriedades do petróleo são utilizadas duas abordagens diferentes:

### 4.1. *Black-oil*

O modelo *Black-oil* emprega 2 pseudocomponentes Óleo e Gás. Ambas as fases definidas nas condições de tanque. Este modelo separa as fases líquida e gasosa sem a necessidade de conhecer as composições molares. Os modelos *Black-oil* utilizam tabelas com as propriedades em diferentes condições de pressão e temperatura, determinadas empiricamente ou através de correlações.

As principais propriedades modeladas pelo modelo Black oil são: Massa Específica, densidade do óleo morto (todo gás já saiu de solução), Pressão de saturação, Razão de Solubilidade (Quantidade de gás que ainda está em solução), Fator

volume de formação do óleo/gás (razão entre o volume do óleo/gás a uma dada condição com relação ao volume em condição de tanque), viscosidade do óleo morto e óleo vivo.

#### **4.2. Modelo composicional**

Por mais que uma correlação represente a realidade de certo campo, as correlações sempre serão limitadas desta forma buscam-se modelagens mecanicistas que proporciona um grau maior de confiabilidade na sua aplicação generalizada e objetiva determinar os fenômenos que governam os escoamentos multifásicos.

Os modelos mecanicistas fazem uso de hipóteses simplificadoras e até mesmo utilizando relações consagradas, ainda que empíricas, no fechamento de modelos – sempre oriundos de enfoque fenomenológico. Do ponto de vista mecanicista, para um entendimento dos conceitos fundamentais envolvidos devem ser preditos e considerados, por exemplo, o arranjo de fases e a fração volumétrica de líquido reinante em determinada seção do escoamento.

### **5. Modelagem para Perda de carga em Escoamento Multifásico**

Devido aos altos custos envolvidos é necessário criar técnicas que permitam especificar e projetar sistemas de produção que sejam capazes de movimentar misturas multifásicas. Os escoamentos multifásicos ocorrem desde os reservatórios até as instalações de superfície. Mesmo nos campos que são de gás ocorre o aparecimento de líquido ou do condensado ou pela presença de água.

Tratar escoamento multifásico é muito mais complexo do que tratar escoamento monofásico devido dentre outros aspectos, à diversidade de arranjos espaciais que as fases líquida e gasosa podem apresentar e a alta compressibilidade da fase gasosa. Isto faz com que a determinação da perda de carga e a determinação dos coeficientes de transferência de calor e de massa sejam de difícil execução.

Para tanto é necessário o conhecimento da mecânica desses escoamentos. Para simplificar a resolução e o entendimento do problema foram desenvolvidas as correlações de escoamento multifásico.

O desenvolvimento de correlações é fortemente empírico, baseia-se na análise, com pouco ou nenhum embasamento físico ou fenomenológico, de dados experimentais e/ou de campo. O resultado de tal enfoque são aplicações restritas aos limites dos experimentos que as geraram.

Tal enfoque busca explicitar correlações que levem às determinações de parâmetros macroscópicos do escoamento, tais como quedas de pressão, frações volumétricas das fases, etc.

Não existe um método analítico para a escolha de uma correlação, ou seja, a escolha da correlação é um processo empírico em que os resultados são comparados com os valores medidos nos poços e linhas.

Oliveira, M.F.D., (2003), discute a aplicação do escoamento multifásico na produção de petróleo, no trabalho são discutidos os tipos de correlações (“*black oil*”) e um histórico deste desenvolvimento, um resumo deste desenvolvimento é mostrado nos tópicos abaixo.

### **5.1. Correlações do Tipo I**

Assume o escoamento como sendo homogêneo (desconsidera o escorregamento entre as fases e os mapas de padrões de escoamento) apresentam unicamente uma correlação para o cálculo do fator de atrito das fases. São abordagens simplificadas valendo para os campos onde foram levantadas. As correlações deste tipo encontradas na literatura são: Poetmann & Carpenter, Baxendell & Thomas e Fan-cher & Brown.

### **5.2. Correlações do Tipo II**

Tem um avanço com relação às correlações do tipo I, pois consideram o escorregamento entre as fases, mas ainda não utilizam mapas de padrão de escoamento ou arranjo de fases. Apresentam correlações para o cálculo do *holdup* e correlação para o fator de fricção das duas fases. As correlações deste tipo encontradas na literatura são: Hagedorn & Brown, Gray e Asheim.

### **5.3. Correlações do Tipo III**

Este tipo de correlação considera o escorregamento e o padrão de escoamento. Para cada tipo de arranjo de fases é utilizada uma correlação apropriada para o cálculo do *holdup* e para o cálculo do fator de fricção das duas fases. As correlações deste tipo encontradas na literatura são: Duns & Ros, Orkiszewski, Aziz, Grovier & Fogarasi, Chierici, Ciucci & Sclocchi, Beggs & Brill e Mukherjee & Brill

#### **5.4. Limitações das correlações *Black-oil***

As limitações das correlações de escoamento multifásico criaram espaços para o surgimento da modelagem mecanicista, que proporciona um grau maior de confiabilidade na sua aplicação generalizada e objetiva determinar os fenômenos que governam os escoamentos multifásicos. Assentada em bases fenomenológicas e princípios físicos, tal modelagem busca interpretar através de experimentos laboratoriais em escalas reduzidas os aspectos macro e microscópicos que caracterizam tais escoamentos. Por vezes tal enfoque faz uso de hipóteses simplificadoras nessa descrição e até mesmo utilizando relações consagradas, ainda que empíricas, no fechamento de modelos – sempre oriundos de enfoque fenomenológico. Nesse enfoque, os dados eventualmente utilizados são aplicados tão somente na verificação de consistência e robustez do modelo. Do ponto de vista mecanicista, para um entendimento dos conceitos fundamentais envolvidos devem ser preditos e considerados, por exemplo, o arranjo de fases e a fração volumétrica de líquido reinantes em determinada seção do escoamento.

### **6 . Escoamento Multifásico nos Métodos de Elevação de Petróleo**

O estudo do escoamento multifásico é fundamental no estudo da exploração dos reservatórios de petróleo. Através de um correto dimensionamento das colunas de produção, linhas de produção e Risers, é possível definir a quantidade de óleo, gás e água que estará chegando as plataformas de produção com o tempo, definido os sistemas que deverão atuar (separação e tratamento dos fluidos produzidos). Para este correto dimensionamento é necessário conhecer dentre outras coisas algumas características de produção (métodos de elevação de petróleo). Em cada um dos métodos de produção, tem-se particularidades específicas que podem alterar toda o cálculo da perda de carga.

Normalmente divide-se os métodos de elevação de petróleo em elevação Natural e Elevação artificial. No Brasil os métodos mais utilizados off-shore são: Gás Lift contínuo e Bombeio Centrífugo Submerso, isto é devido aos custos envolvidos e somente os métodos que apresentam maiores retornos são utilizados.

#### **6.1. Elevação Natural**

Na Elevação Natural de petróleo, os fluidos provenientes do reservatório (óleo, água e gás) chegam até as facilidades (separadores, tratadores, tanques) unicamente devido à energia do reservatório. Com o passar do tempo, a energia do reservatório diminui tornando a pressão disponível insuficiente para deslocar os fluidos



até a superfície. A partir deste ponto torna-se necessário à suplementação da energia do reservatório. A suplementação de energia para a produção pode ser feita de três formas:

- 1) acrescentando energia no próprio reservatório, a isto denomina-se recuperação secundária (ver modo de produção);
- 2) acrescentando energia entre os canhoneados e a árvore de natal, a isto denomina-se elevação artificial;
- 3) acrescentando energia no sistema de coleta (entre a árvore de natal e o vaso separador), a isto denomina-se de *boosting*.

O custo de produção por elevação natural é bem menor do que os custos da elevação artificial devido à simplicidade dos equipamentos de superfície e subsuperfície, resultando em um menor custo por barril de óleo produzido.

### **6.1.1. Fatores que Influenciam na Produção por Surgência**

Para que um poço permaneça produzindo por elevação natural é necessário que o mesmo tenha uma massa específica mais baixa, isto implica em altas quantidades de gás proporcionando uma Razão Gás Líquido (RGL) grande, baixos valores de BSW (pouca quantidade de água presente), uma vez que a água aumenta a massa específica média do sistema. Também influi muito a forma com que o poço foi construído e se foi aplicada alguma técnica de estimulação como fraturamento ou acidificação.

## ***6.2. Necessidade da Elevação Artificial***

Ao fazer uma análise nodal do escoamento calculam-se as vazões em funções da pressão em um determinado ponto do sistema, normalmente quando esta análise é feita nos canhoneados denomina-se estas curvas de IPR e TPR. A IPR (“*In-flow Performance Relationship*”) significa a vazão que o Reservatório estaria produzindo nos canhoneados para uma determinada pressão de fundo. Já a TPR (“*Tubing Performance Relationship*”) significa a vazão que estaria sendo produzida no vaso separador com a pressão nos canhoneados. Como o sistema é contínuo e está em equilíbrio a pressão calculada vindo do reservatório para os canhoneados é a mesma pressão calculada vindo do vaso separador para os canhoneados, desta forma o encontro das curvas IPR e TPR é a vazão de equilíbrio do sistema (**Fig. 8**). Quando não se utiliza nenhum método de elevação artificial e as curvas de IPR e TPR não se encontram o poço não é surgente e para se produzir necessita-se de elevação Artificial.

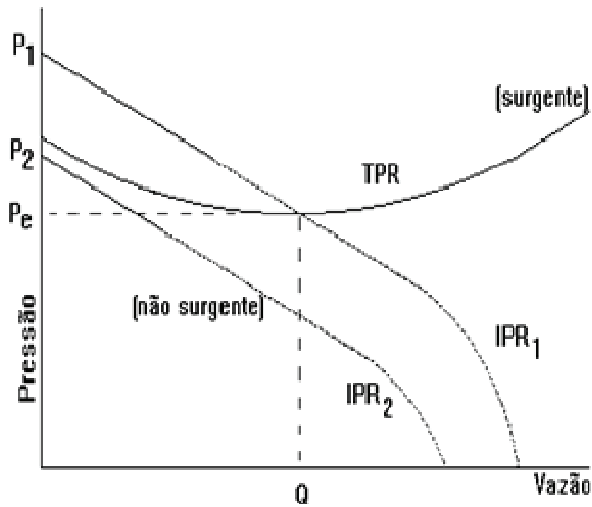


Fig. 8 Curva de equilíbrio. Oliveira P.S., 2007.

Dependendo do método de elevação tem-se uma curva de TPR diferente e desta forma a vazão de equilíbrio também será diferente (Fig. 9).

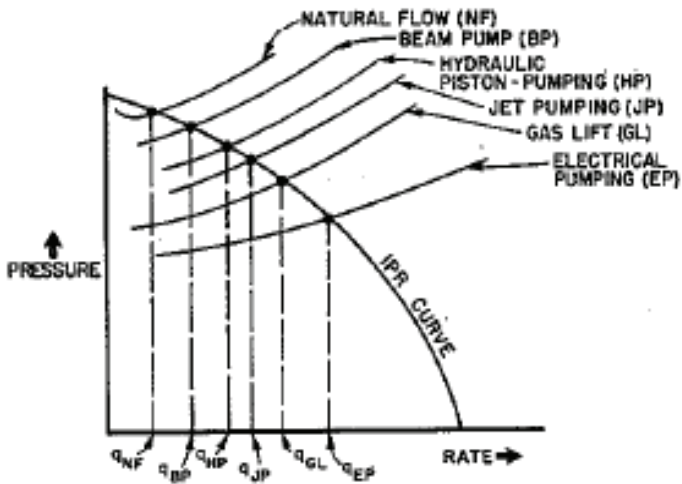
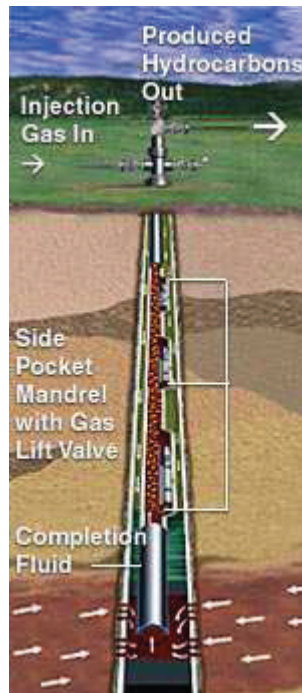


Fig. 9 Visualização do efeito do método de elevação utilizado. Brown, K.E., 1982.

### 6.3. Gás Lift

O gás lift (**Fig. 10**) é um método de elevação artificial muito utilizado no Brasil. Este método é muito utilizado devido a sua grande versatilidade já que pode ser aplicável para poços de qualquer profundidade, qualquer pressão de reservatório e para uma ampla faixa de vazões (desde pequenas até mais de 10 000 metros cúbicos por dia).

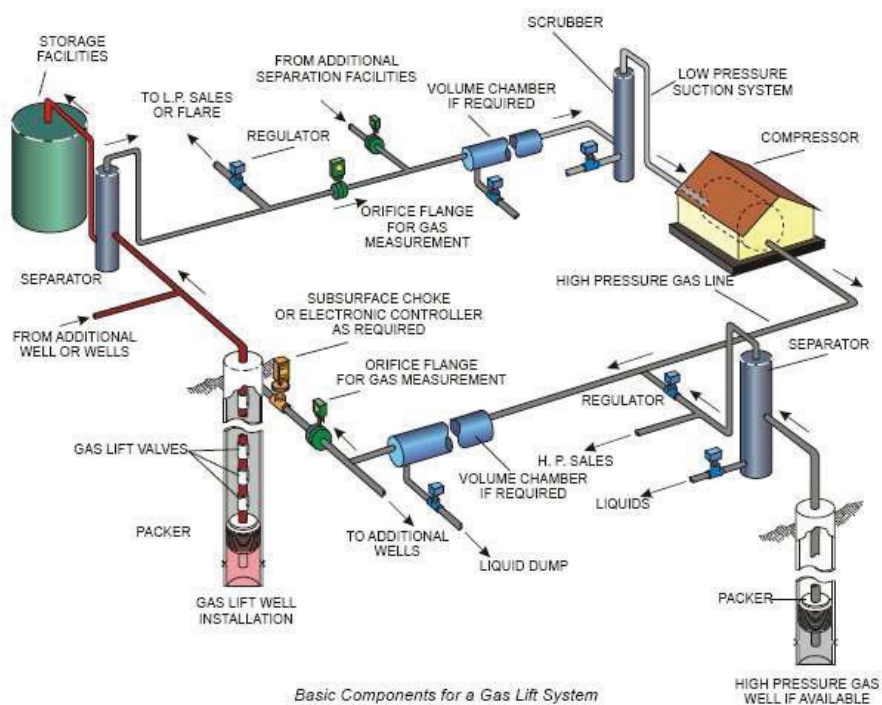


**Fig. 10** Gás lift.

([http://www.weatherford.com/weatherford/groups/public/documents/production/gl\\_advantages.hcsp](http://www.weatherford.com/weatherford/groups/public/documents/production/gl_advantages.hcsp)) pesquisado em 01/02/2010.

#### 6.3.1. CONCEITO

A energia para elevar os fluidos até as facilidades de produção vem da compressão do gás. Após comprimir o gás uma parte é reintroduzida no sistema para fazer a elevação, uma parte é consumida para geração de energia que suprirá as necessidades da plataforma e o restante é exportado (**Fig. 11**). A eficiência energética deste método é baixa, ou seja, apenas uma pequena parte da energia gasta para comprimir o gás realmente é utilizada para efetivamente elevar o petróleo.



**Fig. 11** Sistema de *gas lift*. [Americancompletiontools.com](http://Americancompletiontools.com) pesquisado em 13/01/2010.

O gás comprimido deve ser injetado na maior profundidade possível (Fig. 12). A partir do ponto onde o gás é injetado ocorre uma gaseificação dos fluidos na coluna de produção, desta forma diminui o gradiente dinâmico e, por conseguinte a pressão ( $P_{wf}$ ) nos canhoneados permitindo um aumento na produção ou a produção.

Aumentando-se a RGL (razão gás-líquido) no fluxo vertical, até certo limite, diminui-se o gradiente médio do fluido, diminuindo a pressão de fluxo no fundo e obtendo-se a vazão desejada de produção.

### 6.3.2. Tipos de “Gas-Lift”

Basicamente divide-se o “*gas-lift*” em dois tipos:

“Gas-lift” contínuo: Consiste na injeção contínua de gás a alta pressão na coluna de produção com o objetivo de diminuir a densidade desde o ponto de injeção até a superfície. O gás é injetado de forma controlada e contínua.

“Gas-lift” Intermitente: Consiste no deslocamento de golfadas de fluido para a superfície através da injeção cíclica de gás a alta pressão na base da golfada.

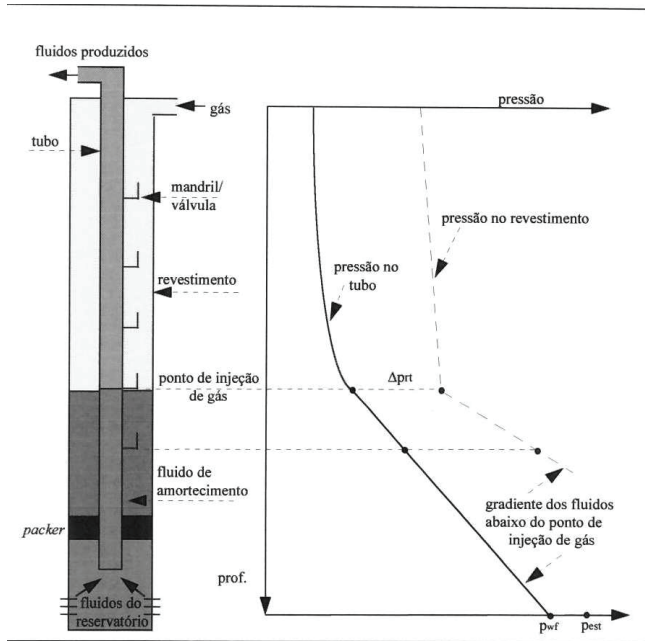


Fig. 12 Gradiente de pressão de um poço produzindo por Gás Lift. Peixoto G.A. 1995.

### 6.3.3. Válvulas e mandris de Gas lift

O mandril de *gas-lift* (Fig. 13) pode ser descrito como sendo um tubo com uma bolsa lateral, dentro do qual é assentada a válvula de *gas-lift*.

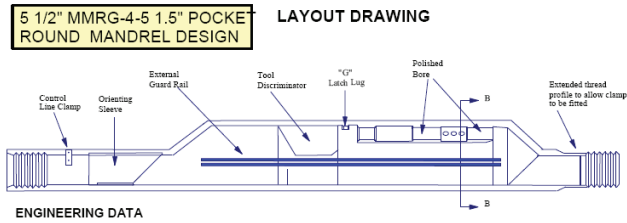
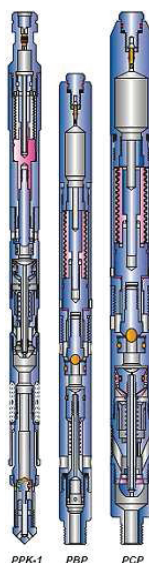


Fig. 13 Mandril de gas lift. Prado, M.G. 2007 b.

As válvulas são equipamentos alojados no mandril (Fig. 14) e servem para controlar a passagem de gás do anular para a coluna de produção.

A utilização da válvula tem por objetivo: Facilitar a descarga do poço; Controlar o fluxo de gás do anular para a coluna.

Tipos de válvulas: Orifício, Pressão operada pelo revestimento, Pressão operada pela coluna de produção



**Fig. 14** Válvulas de *Gás Lift*. Americancompletiontools.com pesquisado em 13/01/2010

## 6.4. *Gás Lift Intermitente*

É um método cíclico de produção que utiliza a injeção de gás a alta pressão na coluna de produção.

A expansão do gás eleva uma golfada de fluido até a superfície.

Este método é utilizado para a produção de pequenos volumes.

O líquido produzido pelo reservatório acumula-se na coluna de produção e somente após a coluna atingir o nível de interesse o gás é injetado diretamente abaixo da golfada a ser produzida

### 6.4.1. Ciclo de Intermitência

Corresponde às fases que ocorrem para a elevação de uma golfada até a superfície (**Fig. 15**). É o tempo decorrido entre duas aberturas da válvula operadora.

A injeção de gás é feita através de um Controlador Lógico Programável – CLP, que envia um sinal para uma motor-valve, para esta abrir ou fechar, desta forma enviar ou não gás para o poço.

O tempo de injeção deve ser suficiente para elevar a pressão no anular até a pressão de abertura da válvula operadora.

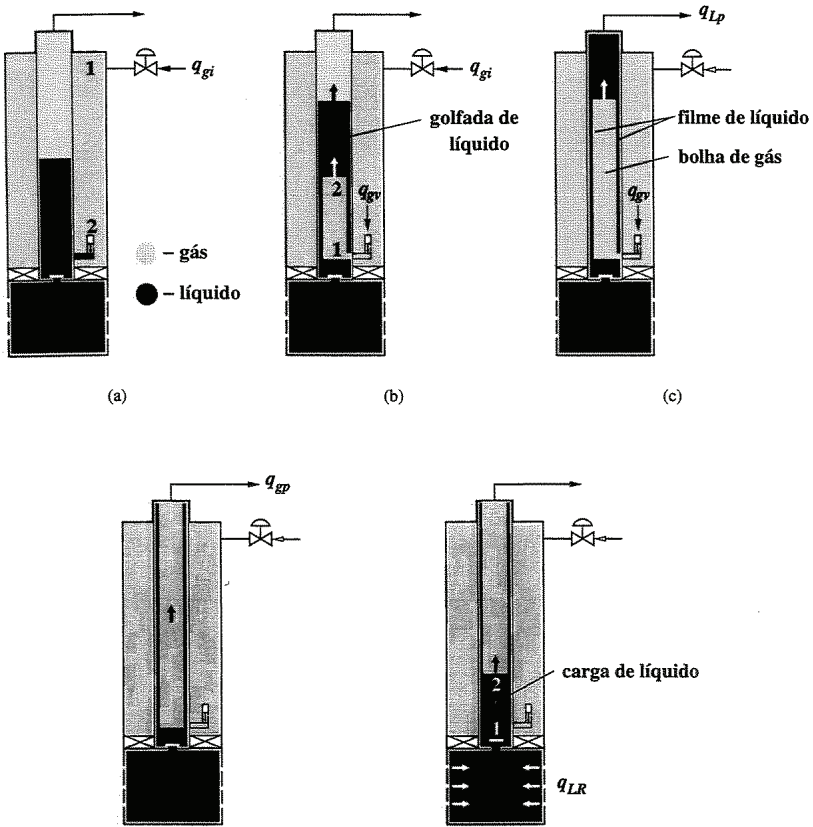


Fig. 15 Ciclo de intermitência.

**A)** A válvula operadora acabou de fechar e a pressão na coluna de produção está alta e a válvula de pé fica fechada e o gás vai para o separador.

**B)** A válvula de pé abre e o fluido da formação passa para a coluna de produção. O fluido se posiciona acima da válvula de pé.

**C)** Uma vez que exista uma altura de fluido suficiente à válvula de operação abre.

**D)** Ocorre uma elevação da golfada de líquido até o separador.

#### 6.4.2. Escorregamento de Líquido e penetração do gás na golfada

**Escorregamento** (“fallback”) é definido como a parcela de líquido que está acima da válvula operadora no instante de sua abertura e não é produzido durante o ciclo. Os valores normais situam-se entre 1,5% a 2% para cada 100 m de elevação.

Influenciado por: Diferencial de pressão na válvula operadora, Diâmetro do orifício da válvula operadora, Volume de gás injetado por ciclo, Diâmetro da coluna de produção, Restrições na cabeça do poço

**Penetração:** consiste no fenômeno do gás de injeção penetrar em parte da golfada durante a sua elevação.

Ocorre na abertura da válvula até a golfada atingir a velocidade de subida.

Na elevação da golfada em função da profundidade do poço.

Ao passar pela cabeça do poço é importante que a golfada atravesse os equipamentos sem reduzir a velocidade.

## **6.5. BCS - Bombeio Centrífugo Submerso**

### **6.5.1. Bomba Centrífuga**

A bomba centrífuga é uma máquina simples constituída de 2 partes principais, um elemento rotativo (impelidor) e um elemento estacionário (voluta).

A função da Bomba Centrífuga é aumentar a pressão do fluido que passa por ela. O líquido que entra na bomba é acelerado pela força centrífuga. A velocidade é então transformada pela bomba em pressão.

A Bomba Centrífuga Submersa usa um modelo modificado onde a voluta é substituída por um difusor.

A energia é transmitida para o fundo do poço através de um cabo elétrico. A energia elétrica é transformada em energia mecânica por um motor de subsuperfície, que tem um eixo conectado a uma bomba centrífuga. A bomba transmite a energia para o fluido sob a forma de pressão.

### **6.5.2. Histórico de BCS**

Em 1911, um russo chamado Armais Arutunoff iniciou a produção de motores denominado Russian Electric Dynamo of Arutunoff. Durante a primeira grande guerra foi utilizado como arma.

Arutunoff emigrou para os EUA em 1923 e continuou o desenvolvimento do motor submersível. Na década de 20 o motor foi testado com sucesso em poços de petróleo na califórnia, sendo que em 1927 foi desenvolvido o sistema de bombeamento na Phillips Petroleum, em 1928 com o apoio da Phillips Petroleum mudou-se para Bartlesville e formou uma empresa. Em 1930 estabeleceu a **Russian Electric Dynamo of Arutunoff (Fig. 16)**.

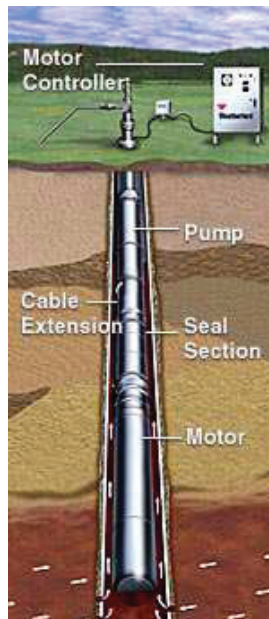




**Fig. 16** Fabrica da Redá. Prado, M.G. 2007a

### 6.5.3. Características do método

O Método de elevação por BCS (**Fig. 17**) normalmente é aplicável a poços que tenham Altas vazões, sendo aplicável a poços desviados ou profundos, mas tem como restrições poços que produzem areia e poços que tenham uma alta RGO, pois para frações de vazão local acima de 30 a 35 % já começa a ter problemas de travamento (gas lock). É um método aplicável a zona urbana, pois tem um baixo nível de ruído. Devido às altas tensões os equipamentos devem ser bem protegidos, para evitar acesso a curiosos ou animais.



**Fig. 17** Método BCS.

([http://www.weatherford.com/weatherford/groups/public/documents/production/esp\\_espssystemo verview.hcsp](http://www.weatherford.com/weatherford/groups/public/documents/production/esp_espssystemo verview.hcsp)) pesquisado em 01/02/2010

## 7. Transferência de Calor em Linhas

A transferência de calor é a troca de energia provocada por uma diferença de temperatura entre dois sistemas. Na termodinâmica têm-se as bases da transferência de calor, pois:

1ª Lei: a taxa de Transferência de Calor para um sistema é igual à taxa de aumento da energia do sistema.

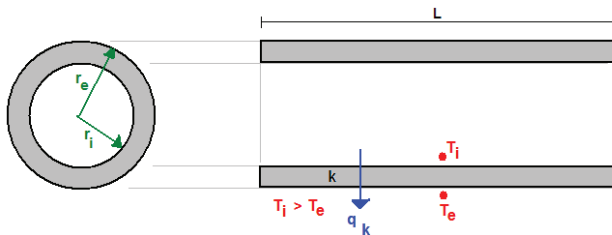
2ª Lei: o calor é transferido na direção da temperatura decrescente.

Contudo com estas duas leis da termodinâmica não há um indicativo de quanto tempo é necessário para que ocorra a troca térmica. É justamente neste ponto que entra o estudo de transferência de calor onde se estuda as taxas de transferência de calor.

### 7.1. Transferência de Calor em Tubulação de Seção Circular

As linhas de petróleo têm em sua geometria a seção circular, desta forma entender a transferência de calor neste tipo de geometria é fundamental para projetar linhas isoladas de forma

#### 7.1.1. Transferência de Calor Unidimensional por condução, em Regime Permanente



**Fig. 18** Transferência de calor em uma linha de produção de petróleo.

Partindo da equação de Transferência de Calor:

$$q_k = -k.A.\frac{dT}{dx} \quad (1)$$

Pode-se chegar a mesma equação no sistema de unidades cilíndricas:

$$q_k = -k.(2.\pi.r.L).\frac{dT}{dx} \quad (2)$$

Reescrevendo a Eq. 2 tem-se:

$$dT = -\frac{q_k}{2.\pi.k.L} \frac{1}{r} dr \quad (3)$$

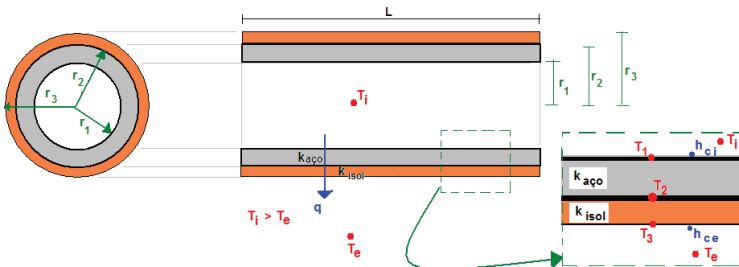
Que após ser integrada tem-se:

$$\int_{T_i}^{T_e} dT = -\frac{q_k}{2.\pi.k.L} \cdot \int_{r_i}^{r_e} \frac{1}{r} dr \quad (4)$$

Resolvendo-se a Eq. 4 tem-se a quantidade de calor transferida entre o interior da linha de produção de petróleo e o meio ambiente, ver Eq. 5:

$$q_k = \frac{2.\pi.k.L}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}.(T_i - T_e) \quad (5)$$

### 7.1.2. Condução e Convecção em Tubos Cilíndricos Concêntricos (fluxo de calor radial e permanente)



**Fig. 19** Condução em tubos cilíndricos.

Além da condução de calor a convecção também é importante nos escoamentos de petróleo. A quantidade de calor “q” são iguais, independente da forma com que está sendo transmitida, desta forma tomando-se como exemplo uma tubulação genérica que tenha uma parte de aço e um isolamento (**Fig. 19** Condução em tubos cilíndricos.), tem-se em regime permanente:

$$\begin{aligned}
 q_{ci} &= h_{ci} \cdot (2\pi \cdot r_1 \cdot L) \cdot (T_i - T_1) \quad \rightarrow \quad (T_i - T_1) = R_1 \cdot q \\
 q_{k_{aço}} &= \frac{2\pi \cdot k_{aço} \cdot L}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot (T_1 - T_2) \quad \rightarrow \quad (T_1 - T_2) = R_2 \cdot q \\
 q_{k_{isol}} &= \frac{2\pi \cdot k_{isol} \cdot L}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} \cdot (T_2 - T_3) \quad \rightarrow \quad (T_2 - T_3) = R_3 \cdot q \\
 q_{ce} &= h_{ce} \cdot (2\pi \cdot r_3 \cdot L) \cdot (T_3 - T_e) \quad \rightarrow \quad (T_3 - T_e) = R_4 \cdot q
 \end{aligned} \tag{6}$$

Somando-se todos os elementos da Eq. 6 tem-se:

$$(T_i - T_e) = \frac{q}{2\pi \cdot L} \left[ \frac{1}{h_{ci} \cdot r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k_{aço}} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{k_{isol}} + \frac{1}{h_{ce} \cdot r_3} \right] \tag{7}$$

Ou, rearranjando a Eq. 7:

$$q = U \cdot A_e \cdot (T_e - T_i) \tag{8}$$

Sendo:  $A_e = 2\pi \cdot r_3 \cdot L$  = Área externa, define-se:  $U$  = Coeficiente de Troca Térmica Global.

$$U = \frac{1}{\left[ \frac{r_3}{h_{ci} \cdot r_1} + \frac{r_3 \cdot \ln(r_2/r_1)}{k_{aço}} + \frac{r_3 \cdot \ln(r_3/r_2)}{k_{isol}} + \frac{r_3}{h_{ce} \cdot r_3} \right]} \tag{9}$$

Na indústria de Petróleo é mais comum definir a troca térmica em termos de TEC (Thermal Exchange Coefficient) e não em função do  $U$  (Coeficiente de Troca Térmica Global). O TEC se relaciona com o  $U$  da seguinte forma:

$$TEC = \frac{U \cdot A_e}{L} \tag{10}$$

Unidades: [W/(m.K)]

OBS: Para linhas com  $TEC < 3$ , significa que mesma é bem isolada.

Substituindo a Eq. 10 na Eq. 8 tem-se:

$$q = TEC \cdot L \cdot (T_e - T_i) \tag{11}$$

### 7.1.3. Procedimento De Acoplamento para Cálculo Simultâneo dos Gradientes de Pressão e Temperatura em Regime Permanente

É importante realizar o cálculo integrado entre o gradiente de pressão e a temperatura, pois as propriedades do petróleo se alteram significativamente com a mudança de temperatura.

$$dU + d(P/\rho) + \frac{u.du}{g_c} + \frac{g}{g_c}.dz + dq + dW_s = 0 \quad (12)$$

Onde: U = Energia Interna; q = Fluxo de calor; W<sub>s</sub> = trabalho realizado sobre o fluido.

Considerando que o trabalho realizado sobre o fluido é ZERO, e combinando com a equação:

$$dU = dh - d\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (13)$$

onde: h = Entalpia.

Tem-se:

$$\begin{aligned} dh + \frac{u.du}{g_c} + \frac{g}{g_c}.sen\theta.dL + dq &= 0 \\ \rightarrow \frac{dh}{dL} = -\frac{dq}{dL} - \frac{g}{g_c}.sen\theta - \frac{u.du}{g_c.dL} \end{aligned} \quad (14)$$

Como o gradiente de Perda de Calor é:

$$\frac{dq}{dL} = \frac{U_o.\pi.D_o}{\dot{m}}.(\bar{T} - \bar{T}_{amb}) \quad (15)$$

Onde:  $\bar{T}$  é Temperatura média do segmento dL;  $\bar{T}_{amb}$  é a Temperatura média do ambiente no segmento dL; U<sub>o</sub> é o Coeficiente global de transferência de calor; D<sub>o</sub> é o Diâmetro externo;  $\dot{m}$  é a vazão mássica total (líquido + gás).

Então a questão é resolver o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dL} = -\frac{dq}{dL} - \frac{g}{g_c} \cdot \text{sen} \theta - \frac{u \cdot du}{g_c \cdot dL} \\ \frac{dq}{dL} = \frac{U_o \cdot \pi \cdot D_o}{\dot{m}} \cdot (\bar{T} - \bar{T}_{amb}) \end{cases} \quad (16)$$

#### 7.1.4. Gradiente de Temperatura em poços de Produção

Aproximação de RAMEY (1962), usada pela maioria dos simuladores;

OBS: - Desprezou os efeitos de energia cinética; - Desprezou os efeitos de fricção; - Assume o fluido incompressível.

$$\begin{aligned} T(L, t) = & (T_{rocha} - g_G \cdot L \cdot \text{sen} \theta) + \\ & + g_G \cdot A \cdot \text{sen} \theta \cdot (1 - e^{-L/A}) + (T_{bh} - T_{rocha}) \cdot e^{-L/A} \end{aligned} \quad (17)$$

Onde: L é a distância do fundo do poço;  $T_{rocha}$  é a temperatura da rocha distante do poço;  $g_G$  é o gradiente geotérmico;

A é a distância de relaxação:

$$A = \frac{\dot{m} \cdot c_p}{2\pi} \cdot \left( \frac{1}{r_{to} \cdot U} \right) \quad (18)$$

$c_p$  é o calor específico do fluido e depende de: Grau API,  $T_{gás}$ , densidade gás, Pressão e Temperatura.

$r_{to}$  é o raio externo da coluna de produção.

#### 7.1.5. Equação de Balanço de Energia – SIMPLIFICADA

Sabe-se que:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} \rightarrow q - 0 = \frac{dE}{dt} \quad (19)$$

onde: W é o trabalho externo; Q é a Quantidade de calor

$$q = \frac{\partial E}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial E}{\partial s} \quad (20)$$

Substituindo na equação (20), E por  $\frac{1}{2}m.u^2 + m.g.z + m.h$  e já reagrupando os termos da equação tem-se:

$$q = m \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}u^2 + g.z + h \right) + u \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2}u^2 + g.z + h \right) \right] \quad (21)$$

a) Regime Permanente (desprezando o efeito joule-thompson) tem-se:

$$q = \dot{m} \cdot \left[ \frac{1}{2} \Delta u^2 + g \cdot \Delta z + \Delta h \right] \rightarrow q = \dot{m} \cdot \Delta h = \dot{m} \cdot c_p \cdot \Delta T \quad (22)$$

b) Regime Transiente (desprezando o efeito joule-thompson) tem-se:

$$q = m \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = m \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (23)$$

### 7.1.6. Efeito Joule-Thompson

O Coeficiente de Joule-Thompson é definido por:

$$\mu_{JT} = - \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_h = - \frac{(\partial h / \partial P)_T}{(\partial h / \partial T)_P} \quad (24)$$

Como a equação da entalpia é:

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \cdot dT + \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_T \cdot dP \quad (25)$$

E a equação do calor específico a pressão constante:

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \quad (26)$$

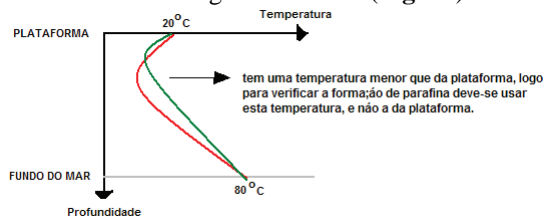
Combinando-se as Eqs. 26 e 25 na Eq. 24 e reagrupando-se tem-se:

$$dh = c_p \cdot (dT - \mu_{JT} \cdot dP) \quad (27)$$

“O coeficiente de Joule-Thompson é uma entidade que relaciona a variação de temperatura” se o coeficiente for positivo a temperatura irá abaixar, mas se for negativo ao haver uma diminuição da pressão a temperatura irá aumentar:

$$\begin{cases} \mu_{JT} > 0 \Rightarrow \downarrow T \\ \mu_{JT} < 0 \Rightarrow \uparrow T \end{cases} \quad (28)$$

Um exemplo de utilização da utilização deste efeito é nas linhas de produção de petróleo, pois se não levar este efeito em consideração pode-se, por exemplo, ter temperaturas abaixo da temperatura de aparecimento de cristais de parafina e sem a utilização deste efeito não se conseguiria detectar (**Fig. 20**).



**Fig. 20** Exemplo da aplicação do efeito Joule-Thompson em uma linha de produção de Petróleo.

## 7.2. Cálculo de Perfis de Pressão e Temperatura

### 7.2.1. Gradiente de Pressão

Juntando a equação da Conservação de Energia:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dq}{dx} - u \cdot \frac{du}{dx} - \frac{\rho_{grav}}{\rho_{ac}} \cdot g \cdot \sin\theta \quad (29)$$

Com a expansão do termo de Entalpia:

$$\frac{dh}{dx} = c_p \frac{dT}{dx} - \mu_{JT} \cdot c_p \cdot \frac{dP}{dx} \quad (30)$$

E a equação de transferência de calor:



$$\frac{dq}{dx} = \frac{\pi \cdot D \cdot U_o}{\dot{m}} \cdot (T_e - T_f) + \frac{q_G}{\dot{m}} \quad (31)$$

Substituindo as Eqs. 29 a 31, na combinação das equações de “Conservação de Massa” com a de “Conservação da Quantidade de Movimento”:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho_{grav} \cdot g \cdot \text{sen}\theta - \rho_{ac} \cdot u \cdot \frac{dv}{dx} + \rho_{fric} \cdot f \cdot \frac{u^2}{2} \quad (32)$$

Combinando as equações anteriores, chega-se a uma equação com Pressão e Temperatura:

$$\begin{aligned} c_p \cdot \frac{dT_f}{dx} - \left[ \mu_{JT} \cdot c_p + \frac{1}{\rho_{ac}} \right] \cdot \frac{dP}{dx} = \\ = \frac{\pi \cdot D \cdot U_o}{\dot{m}} \cdot (T_e - T_f) + \frac{q_G}{\dot{m}} + \frac{\rho_{fric}}{\rho_{ac}} \cdot \frac{f}{D} \cdot \frac{u^2}{2} \end{aligned} \quad (33)$$

## 8. Anexo

### 8.1. Calor Específico

Equação Sugerida pelo API

$$c_p = c_0 + c_1 \cdot API + c_2 \cdot T \left( \frac{BTU}{lbm \cdot ^\circ F} \right) \quad (34)$$

Onde:

$$c_0 = 0,33; \quad c_1 = 0,0022; \quad c_2 = 0,00055$$

OBS: Equação para Ajuste

$$c_p = a_0 + a_1 \cdot API + a_2 \cdot \sqrt{T_r} + a_3 \cdot T^{1,5} + a_4 \cdot \sqrt{P_r} + a_5 \cdot P^{1,5} \quad (35)$$

## 8.2. Condutividade Térmica

Correlação de Latini et al para Líquidos

$$k_L = \frac{A.(1-T_r)^{0,38}}{T_r^{1/6}} \left( \frac{W}{m.K} \right) \quad (36)$$

Onde:

$$A = \frac{0,0035.T_b^{1,2}}{PM^{0,5} T_c^{0,167}} \quad (37)$$

## 9. Referência Bibliográfica

Americancompletiontools.com pesquisado em 13/01/2010

BRILL, J.P., MUKHERJEE, H., “Multiphase Flow in Wells”, Monograph Volume 17 SPE Henry L. Doherty Series, SPE, Richardson-Texas, 1999

Brown, K.E., "Overview of Artificial Lift Systems", Journal of Petroleum Technology, 1982, SPE 9979, pp. 2384-2396

Carvalho Filho, Clodoaldo de Oliveira. “Produção de petróleo por elevação a gás intermitente: simulação e análise dos métodos convencional e invertido” / Clodoaldo de Oliveira Carvalho Filho, orientador: Sérgio Nascimento Bordalo – Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências.

<http://brasiloffshore.files.wordpress.com/2009/02/reservoir.jpg> pesquisado em 16/12/2009

<http://nanangsugiarto.files.wordpress.com/2008/03/image70.png> pesquisado em 22/02/2010

<http://www.glossary.oilfield.slb.com/DisplayImage.cfm?ID=504> pesquisado em 22/02/2010

<http://www.glossary.oilfield.slb.com/DisplayImage.cfm?ID=532> pesquisado em 07/02/2010

[http://www.weatherford.com/weatherford/groups/public/documents/production/gl\\_advantages.hcsp](http://www.weatherford.com/weatherford/groups/public/documents/production/gl_advantages.hcsp) pesquisado em 01/02/2010

[http://www.weatherford.com/weatherford/groups/public/documents/production/esp\\_espssystemoverview.hcsp](http://www.weatherford.com/weatherford/groups/public/documents/production/esp_espssystemoverview.hcsp) pesquisado em 01/02/2010

Latini, G., and M. Pacetti, Therm. Conduct., 15, 245, 1977

Mauricio G. Prado, “Electrical Submersible Pump” , Rio de Janeiro – Brazil Agosto 2007

Mauricio G. Prado, “Continuous Gas Lift” , Macaé – Rio de Janeiro – Brazil September 2007

Oliveira G.P.H.A., “Elevação Natural de Petróleo”, UN-BC/RH/DRH, 2005.

Oliveira, Marcius Ferrari Duarte de. Análise da aplicação de um sistema de bombeamento multifásico submarino na produção de petróleo / Marcius Ferrari Duarte de Oliveira; orientadores: Marcos Sebastião P. Gomes, Elísio Caetano Filho. – Rio de Janeiro : PUC, Departamento de Engenharia Mecânica, 2003.

Oliveira, Pedro da Silva, “A Operação do Bombeamento Centrífugo Submerso(BCS)” Revisada em Setembro/2007

- Ramey, H.J. (1962) "Wellbore Heat Transmission" Journal of petroleum technology. April 1962; 427-435
- Vogel, J.V., "Inflow Performance Relationships for Solution-Gas Drive Wells", Journal of Petroleum Technology, Janeiro 1968, 83-92
- Peixoto, G. A., "Otimização do dimensionamento de Gas-Lift contínuo em poços marítimos"/Guilherme de Almeida Peixoto – Campinas – Orientador: Francisco José Soares Alhanati, Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, FEM.