

Atila P. Silva Freire,
Philippe P. M. Menut e
Jian Su

TURBULÊNCIA

Rio de Janeiro

ABCM – Associação Brasileira de Ciências Mecânicas

2002

Coleção Cadernos de Turbulência
Turbulência, Volume 1

1ª Escola de Primavera em Transição e Turbulência
Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
21 a 25 de setembro de 1998

Editores

Atila P. Silva Freire PEM/COPPE/UFRJ C.P. 68503 Rio de Janeiro, Brasil	Philippe P. M. Menut PEM/COPPE/UFRJ C.P. 68503 Rio de Janeiro, Brasil	Jian Su PEN/COPPE/UFRJ C.P. 68509 Rio de Janeiro, Brasil
---	--	---

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Processos Técnicos da Biblioteca do
Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Escola de Primavera em Transição e Turbulência (1. : 1998 : Rio de Janeiro, RJ)

Turbulência : Anais da I Escola de Primavera em Transição e Turbulência.
Rio de Janeiro, 21 a 25 de setembro de 1998 / editores: Atila P. Silva Freire,
Philippe P. P. Menut e Jian Su. Rio de Janeiro : ABCM, 2002.

V. 292 p. ; 23 cm - (Coleção Cadernos de Turbulência. Turbulência ; V. 1)
Inclui bibliografias

1. Turbulence. 2. Aeronautics. 3. Fluid mechanics. 4. Transport theory.

I. Freire, Atila P. Silva. II. I ETT (1. : 1998 : Rio de Janeiro , RJ).

III. Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. IV. Título. II. Série.

629.13232

E74T

ISBN 85-85769-10-6

Copyright 2002, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, ABCM.

A ABCM não autoriza a reprodução de qualquer parte desta publicação para sua distribuição em geral, para promoções, para a criação de novas publicações ou para a venda. Apenas através de prévia solicitação, por escrito, e em casos excepcionais, a ABCM poderá consentir a cópia de partes deste livro.

Documento preparado pelos Editores em \LaTeX .

Impresso no Brasil pela Ediouro Gráfica e Editora S.A.

ISBN 85-85769-10-6



9 788585 769109

Prefácio

A I Escola de Primavera em Transição e Turbulência (ETT) foi uma iniciativa do Comitê de Ciências Térmicas da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas (ABCM). Sonho antigo da comunidade de mecânica dos fluidos, ela se tornou realidade graças ao entusiasmo de alguns pesquisadores e ao apoio generoso de várias instituições.

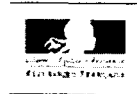
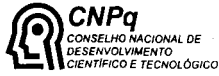
O grande interesse no assunto, aliado à sua importância tecnológica, foram fatores que sempre conspiraram a favor de sua realização. De fato, por ser a turbulência de interesse geral para vários ramos do conhecimento, o atual formato da conferência sempre foi anseio natural da comunidade. Um fórum onde métodos e práticas pudessem ser discutidos de modo livre se constituía em demanda legítima.

A Escola supriu essa demanda adicionando, além disso, ao seu escopo, sessões técnicas de alto nível. Fruto principal da Escola, as notas dos mini-cursos dão origem a este livro. Preparadas com enorme dedicação por excelentes pesquisadores e professores em turbulência, elas certamente deverão servir de material didático para um grande número de cursos de pós-graduação em ciências e engenharias afins.

Este volume, portanto, reproduz praticamente na íntegra os textos apresentados na I ETT. No futuro, novas publicações semelhantes a esta serão editadas pela ABCM.

A.P.S.F.

Agradecimentos



Ambassade de France



Conteúdo

1 Fundamentos da Turbulência nos Fluidos	1
Aristeu da Silveira Neto	
1.1. Aspectos históricos	3
1.2. Escalas da Turbulência	6
1.2.1. Escalas dissipativas de Kolmogorov	6
1.2.2. Grandes Escalas	7
1.2.3. Taxa de dissipação	7
1.2.4. Relações entre as escalas da turbulência	8
1.2.5. Escalas moleculares versus escalas turbulentas	8
1.3. Caracterização da Turbulência	10
1.3.1. Aspectos gerais	10
1.3.2. A turbulência é um fenômeno altamente difusivo	11
1.3.3. A turbulência é rotacional e tridimensional	11
1.3.4. A turbulência é um fenômeno altamente dissipativo	11
1.3.5. A turbulência é um fenômeno contínuo	12
1.3.6. A turbulência é um fenômeno imprevisível	12
1.3.7. A turbulência: altos números de Reynolds e largo espectro de energia	13
1.4. Origem da Turbulência	13
1.4.1. Escoamentos cizalhantes livres	14
1.4.2. Camada limite	24
1.4.3. Outros tipos de escoamentos que transicionam	27
1.5. Alguns Comentários sobre a Teoria da Estabilidade Linear	31
1.5.1. Escoamentos complexos	32
1.6. Exemplos de Escoamentos Turbulentos	34
1.6.1. Desenvolvimento da turbulência	34
1.6.2. Turbulência homogênea e isotrópica	36
1.6.3. Escoamentos cizalhantes	36
1.6.4. Escoamentos turbulentos parietais	36
1.6.5. Escoamentos turbulentos confinados	37
1.6.6. Escoamentos turbulentos complexos	37
1.7. Turbulência e Caos	37
1.7.1. Sistema dinâmico tipo pêndulo simples	38

1.7.2. Movimento caótico de um pêndulo	40
1.7.3. Caos na dinâmica dos fluidos	41
1.8. A visão Determinística e a Visão Estatística da Turbulência	42
1.9. Comentários sobre o Problema de Fechamento e a Modelagem da Turbulência	43
1.10. Referências	46
2 Equações do Movimento e Resultados Assintóticos Aplicados à Teoria de Camada Limite	49
Atila P. Silva Freire e Daniel O. A. Cruz	
2.1 As Equações do Movimento para um Escoamento Turbulento: o Tensor de Reynolds	51
2.1.1 O conceito de média de Reynolds	51
2.1.2 As equações do movimento	53
2.1.3 A equação de transporte para os elementos do tensor de Reynolds	57
2.1.4 Considerações sobre a energia	60
2.2 As Equações de Camada Limite	63
2.2.1 Alguns resultados experimentais sobre as flutuações turbulentas	64
2.2.2 A estrutura assintótica da camada limite turbulenta	67
2.2.3 A lei da parede	71
2.2.4 A lei da esteira	76
2.2.5 A lei da parede para um escoamento compressível	79
2.2.6 Escoamento sobre uma superfície rugosa	82
2.2.7 Escoamento com transpiração na parede	85
2.2.8 Escoamento próximo a um ponto de separação	87
2.2.9 A camada limite carregada com partículas sólidas	89
2.3 Referências	92
3 Modelos Algébricos e Diferenciais	99
César J. Deschamps	
3.1. Introdução	101
3.2. Média do Escoamento Turbulento	105
3.2.1. O Conceito de mediar para escoamentos turbulentos	105
3.2.2. Equação de Reynolds	106
3.2.3. O conceito de média aplicada a equações de transporte de escalares	107
3.2.4. Equação de transporte para o tensor de Reynolds	107
3.2.5. Equação de transporte para a energia cinética turbulenta	110
3.2.6. Equações de transporte para o fluxo turbulento de propriedades escalares	110

3.3. Aspectos Fenomenológicos da Turbulência	111
3.3.1. Características básicas da turbulência	111
3.3.2. Escalas da turbulência	112
3.3.3. Estrutura da turbulência em escoamentos livres	115
3.3.4. Estrutura da turbulência em escoamentos junto a superfícies sólidas	115
3.4. Modelos Baseados no Conceito de Viscosidade Turbulenta	121
3.4.1. Conceito de viscosidade turbulenta	122
3.4.2. Modelo algébrico do comprimento da mistura	123
3.4.3. Modelo a uma equação	125
3.4. 4. Principais observações sobre os modelos algébricos e a uma equação	127
3.4.5. Modelos a duas equações	128
3.5. Modelos para a Equação de Transporte das Tensões de Reynolds	143
3.5.1. Aspectos físicos das equações	143
3.5.2. Modelo para o transporte das tensões de Reynolds	147
3.5.3. Modelo para as equações de transporte de	150
3.6. Referências	152
4 Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos	157
Aristeu da Silveira Neto	
4.1. Turbulência	159
4.2. Metodologias de Simulação	159
4.3. Simulação Numérica Direta	160
4.4. Simulação de Grandes Escalas	160
4.4.1. Processos de separação de escalas e de filtragem das equações	161
4.4.2. Modelagem sub-malha da turbulência	163
4.4.3. Modelo sub-malha de Smagorinsky	164
4.4.4. Modelo sub-malha Função Estrutura de Velocidade	166
4.4.5. Modelagem dinâmica sub-malha	169
4.4.6. Considerações sobre aplicação de modelagem sub-malha em malhas irregulares	172
4.5. Exemplos Ilustrativos de Aplicações de LES	174
4.5.1. Simulação de Grandes Escalas de escoamentos em transição sobre cavidades bidimensionais	174
4.5.2. Simulação de Grandes Escalas da convecção mista sobre um cilindro rotativo aquecido	177
4.5.3. Simulação de Grandes Escalas de escoamentos turbulentos complexos	184
4.6. Discussão	186
4.7. Referências	188

5 Elementos Finitos Aplicados à Turbulência	191
Antonio C. P. Brasil Jr.	
5.1. Introdução	193
5.2. Histórico	193
5.3. Formulação	196
5.3.1. Equações de conservação médias	196
5.3.2. Modelos de turbulência: aspectos gerais	198
5.3.3. Modelo à duas equações κ - ϵ	199
5.3.4. Modelo κ - ϵ anisotrópico	200
5.3.5. Condições de contorno	201
5.4. Discretização Temporal	205
5.5. Problema Convecção - Difusão	207
5.5.1. Generalidades	207
5.5.2. Métodos de estabilização	210
5.5.3. Esquema SUPG	211
5.5.4. Esquema GLS	213
5.5.5. Estabilização das equações (κ , ϵ)	214
5.6. Problema Pressão-Velocidade	216
5.6.1. Tratamento de condições de contorno	221
5.7. Resultados Numéricos	223
5.7.1. Jato plano turbulento	223
5.7.2. Expansão brusca	224
5.7.3. Jato 3D normal à um escoamento livre	226
6 Anemometria de Fio-quente	235
Philippe Patrick Marie Menut	
6.1. Introdução	238
6.2. Princípio Básico de Funcionamento de um Anemômetro de Fio-quente	239
6.2.1. Lei de comportamento do fio-quente	239
6.2.2. Calibração do anemômetro de fio-quente	242
6.2.3. Sensibilidade à velocidade e à temperatura	243
6.2.4. Sensores de Anemometria de Fio-Quente	244
6.2.5. Coeficiente de superaquecimento	245
6.2.6. Anemômetro a corrente constante	247
6.2.7. Anemômetro a temperatura constante	248
6.2.8. Passos básicos de medição com a Anemometria de Fio-Quente	249
6.3. Medição das Características Turbulentas com o Anemômetro de Fio-quente	250

6.3.1	Sensibilidade direcional	250
6.3.2	Tensor de Reynolds	253
6.3.3	Sensor Tri-componentes	254
6.3.4	Medições simultâneas	254
6.3.5	Intensidades turbulentas	255
6.3.6	Correlações espaciais e temporais	257
6.3.7	Análise espectral	261
6.4	Medição de Temperatura e de Concentração	262
6.4.1	Medição de temperatura por sensor duplo	262
6.4.2	Medição de temperatura por fio resistente	262
6.4.3	Medição de concentração por sensor único	264
6.4.4	Medição de concentração por sensor duplo	264
6.5	Medição de Escoamentos com Separação e Recirculação – a Técnica de Anemometria de Fio-quente Pulsátil	265
6.6	Referências	269

Capítulo 1

Fundamentos da Turbulência nos Fluidos

Aristeu da Silveira Neto
Departamento de Engenharia Mecânica (UFU)
38400-206, Uberlândia, M.G., Brasil

1.1 Aspectos históricos

A maior parte dos escoamentos encontrados na natureza e em aplicações práticas são turbulentos. Consequentemente, é muito importante compreender os mecanismos físicos que governam este tipo de fenômeno. Os escoamentos turbulentos são instáveis e contém flutuações que são dependentes do tempo e da posição no espaço. Dentre as características mais importantes dos escoamentos turbulentos, destaca-se a multiplicidade de escalas que os caracterizam, desde as maiores estruturas (baixas frequências), controladas pela geometria que as geram, até as menores estruturas (altas frequências) as quais são controladas pela viscosidade do fluido. Os escoamentos turbulentos são também altamente rotacionais.

O regime turbulento é predominante nos escoamentos. Isto se deve ao fato que pequenas perturbações injetadas nos escoamentos são naturalmente amplificadas, gerando-se instabilidades que os conduzem à transição. Os parâmetros adimensionais mais comuns que controlam o fenômeno da transição são os números de Reynolds e de Rayleigh.

Nas investigações das instabilidades presentes nos escoamentos em uma ou mais dimensões, usualmente passa-se por uma formulação de um problema linear de um trem infinito de ondas de pequenas amplitudes, visando obter informações sobre como determinados comprimentos de onda evoluirão no tempo. Uma descrição completa da transição requer a análise do processo não linear de amplificação de perturbações. Isto constitui uma tarefa teórica difícil uma vez que se trata de problemas não lineares.

Ferramentas estatísticas são usualmente utilizadas para a análise de escoamentos turbulentos completamente estabelecidos, considerando-se a suas naturezas complexas, pelo menos numa banda larga do espectro. No entanto as médias estatísticas não permitem o acesso às mais importantes informações dos mecanismos físicos dos escoamentos, especialmente no que concerne às instabilidades. Isto é menos sério para os escoamentos completamente desorganizados, como os escoamentos isotrópicos e homogêneos gerados atrás de uma grelha.

Por outro lado, para se entender o comportamento altamente intermitente de determinados tipos de escoamentos, como os mecanismos de produção de turbulência e a interrelação das fases, as técnicas de médias não são suficientes. Nestes casos os processos de amostragens condicionais podem ser utilizados para retirar informações dos escoamentos turbulentos altamente oscilantes. Esta técnica tem sido utilizada para investigações experimentais da estrutura da turbulência de escoamentos confinados por paredes e escoamentos cizalhantes livres. Técnicas modernas de simulação numérica, pelas quais as equações governantes são finamente resolvidas têm sido desenvolvidas e utilizadas na última década e têm se tornado ferramentas acessórias e complementares das ferramentas experimentais para a análise da turbulência nos fluidos.

A turbulência e o campo correlato da transição à turbulência a partir de um regime laminar, tem sido um dos assuntos científicos mais seriamente pesquisados no último século. Isto nos dá um testemunho das dificuldades e dos desafios científicos oferecidos por este tema, o qual está bem longe de ser esgotado, e, ao contrário, é ainda muito mal compreendido nas suas bases fundamentais.

Os primeiros estudos sobre instabilidade e turbulência foram desenvolvidos por Osborne Reynolds e Lorde Rayleigh no século XIX. Reynolds (1883), na sua famosa investigação de escoamentos no interior de tubos, estabeleceu claramente a existência de dois regimes fundamentais de escoamentos: laminar e turbulento (denominado "sinuoso" por ele). Ele estabeleceu também a existência de um parâmetro de controle da transição,

$$Re = \frac{Ud}{\nu} \quad (1.1)$$

onde, U é a escala de velocidade, d é a escala de comprimento e ν é a viscosidade cinemática do fluido. Este parâmetro se tornou conhecido posteriormente como sendo o número de Reynolds. Ele estabeleceu que um escoamento turbulento no interior de uma tubulação só pode ser sustentado para Re acima de 2300, valor crítico. Hoje se sabe que este valor depende da forma que o escoamento está sendo perturbado. Outra descoberta importante realizada por Reynolds foi a existência de regiões turbulentas intermitentes (spots), uma propriedade posteriormente estabelecida como comum a escoamentos próximos de paredes. Reynolds deixou também outra contribuição importante ao desenvolver as famosas equações médias de Reynolds para os escoamentos turbulentos quando ele introduziu as conhecidas tensões de Reynolds (1884).

Em paralelo aos trabalhos experimentais de Reynolds, Lord Rayleigh desenvolvia suas investigações teóricas sobre instabilidades de escoamentos paralelos de fluidos invíscidos. Seus estudos, que deram origem a vários outros trabalhos, permitiram determinar quando uma pequena perturbação na forma de um trem de ondas infinito e de amplitude uniforme se amplifica ou se amortece com o tempo, (Rayleigh, 1878). Entre seus importantes resultados, destaca-se a demonstração de que a condição necessária para que um escoamento paralelo seja instável é a presença de uma região inflexional no campo de velocidade (Rayleigh, 1880).

A idéia de se estudar um escoamento turbulento como sendo laminar e modificar viscosidade molecular via conceito de viscosidade turbulenta nasceu com Boussinesq (1877). Ele supôs que as tensões turbulentas de Reynolds são proporcionais às taxas de deformação, como foi feito por Stokes para o caso das tensões viscosas, mas com um coeficiente de proporcionalidade denominado viscosidade turbulenta, a qual é muito maior que a viscosidade molecular do fluido. A princípio, uma viscosidade turbulenta constante foi utilizada para escoamentos livres do tipo esteira, jatos e camadas de mistura. No entanto, para escoamentos sobre placas ou no interior de dutos, do tipo camada limite, não se consegue resultados coerentes sem que a viscosidade turbulenta varie com a distância à parede.

A partir dos trabalhos de Prandtl e Von Karman, no período de 1920-1930, desenvolveu-se métodos baseados em constantes empíricas capazes de melhor aproximar as soluções para perfis médios de velocidade. Particularmente, Prandtl (1925) propôs o bem sucedido conceito, para aquela época, de comprimento de mistura para o cálculo de uma viscosidade turbulenta variável com o espaço e com o tempo. Ainda hoje este conceito, que leva o seu nome, é utilizado. Ressalta-se que Taylor (1915) já tinha estabelecido este conceito em termos do afastamento médio de uma partícula em relação à linha de corrente média. Prandtl assumiu um comprimento de mistura proporcional à distância à parede o que permitiu se obter os perfis de velocidades médias junto a ela de forma mais coerente. Após Prandtl numerosas e mais complexas hipóteses foram feitas visando-se modelar a transferência de quantidade de movimento pelas flutuações turbulentas. Nas últimas décadas modernas técnicas foram desenvolvidas, como a modelagem sub-malha para Simulação Numérica de Grandes Escalas, que será objeto de estudo detalhado em outra seção.

A teoria estatística da turbulência foi objeto de desenvolvimentos importantes nas décadas de 1940 a 1950, primeiramente pelos estudos de Kolmogorov (1941), Millionschikov (1939) e (1941), Obukov (1941), Heisenberg (1948) e Batchelor (1953). Apesar de que esta área de pesquisa sobre turbulência ainda permanece ativa até os dias atuais, nenhuma teoria completa para turbulência isotrópica foi concluída.

Uma área na qual se conseguiu importantes progressos foi a área de transição à turbulência. As primeiras investigações feitas por Rayleigh concernentes à estabilidade dos escoamentos cizalhantes livres invíscidos foram sucedidas por investigações nas quais se leva em conta os efeitos viscosos. Orr (1907) e Sommerfeld (1908) derivaram de forma independente a equação para perturbações infinitesimais em escoamentos cizalhantes livres viscosos. Esta equação leva hoje os seus nomes. A grande dificuldade em resolvê-la, exigiu um tempo importante para se conseguir novos progressos, o que começou a acontecer com Tollmien (1935) e Schlichting (1933) e (1935). Uma importante questão que se colocou por muito tempo, foi até que ponto as chamadas ondas de Tollmien-Schlichting, previstas teoricamente, poderiam ser observadas experimentalmente em laboratórios. Os primeiros a observá-las e a comprovar a teoria da estabilidade linear foram Schubauer e Skramstad (1947), os quais forçaram distúrbios de comprimentos de onda e amplitudes conhecidos, numa camada limite e obtiveram as chamadas ondas TS. No entanto, as instabilidades lineares são apenas o primeiro estágio de um complexo conjunto de instabilidades não lineares que caracterizam a transição e o estado turbulento de um escoamento conforme descrito por Klebanoff et al. (1962).

No que concerne aos escoamentos cizalhantes livres (jatos, esteiras e camadas de mistura) a evolução aconteceu de forma mais gradual. A estrutura da turbulência completamente desenvolvida em escoamentos cizalhantes livres tem sido objeto de numerosas investigações experimentais e, nas últimas décadas, por experimentalistas numéricos. Do lado dos experimentalistas de laboratório os avanços se deram graças aos desenvolvimentos de sistemas de medidas do tipo anemometria a fio e a filme quente, anemometria a laser, assim como aos avanços no desenvolvimento de sistemas de visualização. Nesta área, dentre os vários trabalhos, pode-se citar alguns de muita relevância como Townsend (1976) e as investigações Klebanoff et al. (1962) e Laufer (1950).

Uma característica particular da turbulência é o comportamento intermitente dos escoamentos tipo camada limite próximos de uma parede. Durante as duas últimas décadas muitos experimentos de visualização e medidas têm sido realizados objetivando-se o entendimento deste fenômeno particular e de difícil modelagem. Este fenômeno foi evidenciado com o trabalho de visualização de Kline et al. (1967) que observaram o manifesto de turbulência de extrema atividade em períodos de tempos muito curtos, hoje conhecidos como "bursts". Estes períodos de atividades são separados por longos períodos de escoamento ditos laminares, porém instáveis. Este tipo de visualização pode ser entendido como uma forma de amostragem condicional ("conditional sampling") técnica aplicada nos dias de hoje a nível estatístico para medições experimentais. O critério de amostragem pode ser o aparecimento de altas velocidades e acelerações que permitem identificar, no tempo, o acontecimento de "fenômenos interessantes".

Para os escoamentos cizalhantes livres grande progresso foi conseguido na compreensão da turbulência com a descoberta das chamadas estruturas coerentes da turbulência, em particular das instabilidades de Kelvin-Helmholtz, colocadas em evidência em experiências clássicas como Brown e Roshko (1974) sobre uma camada de mistura gerada por uma placa separadora de duas correntes de velocidades diferentes. Este tipo de estruturas pode ser também observadas em esteiras e jatos.

Quanto aos desenvolvimentos teóricos, os escoamentos turbulentos são modelados pelas equações de Navier-Stokes, para números de Mach inferiores a 15, a partir do qual as escalas de Kolmogorov começam a atingir as dimensões das escalas moleculares. Para estes escoamentos, o modelo de fechamento de Stokes, no qual se utiliza o conceito de viscosidade molecular não é mais válido e nestes casos equações do Tipo Boltzman podem ajudar a modelar os escoamentos. No entanto, para a maior parte das aplicações, os números de Mach são inferiores a esta marca

extremamente elevada. Sendo assim, a solução correta das equações de Navier-Stokes são representativas dos escoamentos turbulentos, colocadas à parte as deficiências dos métodos de soluções numéricas e as capacidades dos computadores para se atingir o grau de precisão e de refinamento de malhas necessário à boa representatividade das soluções. Muitos têm sido os testes de validade destas equações, partindo de soluções de escoamentos de Poiseuille em um canal, solução de Blasius para camada limite, escoamentos gerados por dois cilindros concêntricos rotativos (escoamento de Taylor-Couette) e outros experimentos com efeitos de aquecimento e de compressibilidade. Nos últimos anos, modernas técnicas têm permitido a simulação numérica da transição de diversos tipos de escoamentos turbulentos, como transição de camada limite, escoamentos cizalhantes e também do processo de decaimento de energia em escoamentos turbulentos, assim como de escoamentos complexos e até mesmo de escoamentos industriais.

1.2 Escalas da turbulência

Antes de aprofundar qualquer tipo de estudo sobre os escoamentos turbulentos é interessante poder ter uma idéia das ordens de grandezas das variáveis envolvidas nos fenômenos, através das escalas características da turbulência. Estas escalas são relacionadas com tempo, comprimento, velocidades, energia, e vorticidade.

1.2.1 Escalas dissipativas de Kolmogorov

Para lançar o conceito de escala de dissipação viscosa de Kolmogorov, toma-se um turbilhão de tamanho característico r com uma velocidade característica v_r , originário em um fluido de viscosidade ν . Define-se então um número de Reynolds local,

$$Re_r = \frac{v_r r}{\nu}. \quad (1.2)$$

O quadrado deste parâmetro representa a importância relativa das forças de inércia e das forças viscosas. Admita-se que a escala r esteja numa zona do espectro onde, pela teoria de Kolmogorov, $v_r = (\epsilon r)^{1/3}$, ver Lesieur (1994). Substituindo v_r na equação (2) tem-se $Re_r = (\epsilon r^4)^{1/3}/\nu$. Considerando que para esta escala r os efeitos viscosos são pequenos pode-se afirmar que Re_r é maior que 1. Se r diminui Re_r diminui também e se $r < l_d$, onde l_d é definido abaixo,

$$l_d = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \quad (1.3)$$

então Re_r torna-se menor que 1 e os efeitos viscosos passam a dominar os efeitos de inércia. Esta escala l_d é a escala dissipativa de Kolmogorov. Logo os turbilhões de tamanhos menores que l_d são dissipados por efeitos viscosos e não podem se desenvolver. Esta análise permite entender porque o espectro de energia cinética cai tão rapidamente quando se aproxima do número de onda dissipativo de Kolmogorov, $2\pi/l_d$. A título de exemplo, a escala de Kolmogorov no interior da camada limite atmosférica é da ordem de 1 mm, enquanto que no caso de uma turbulência de grelha é da ordem de 0,1 mm. Fazendo-se uma análise dimensional e expressando-se o tempo característico em função de ν e ϵ , chega-se à seguinte expressão para este parâmetro, relativo às estruturas dissipativas de Kolmogorov,

$$\tau = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

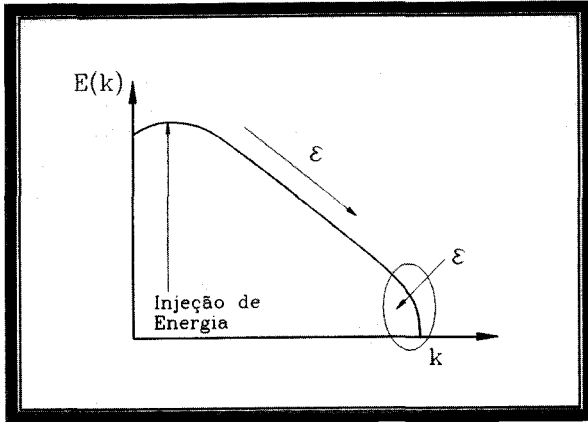


Figure 1.1: Esquema ilustrativo da hipótese do equilíbrio.

De forma semelhante deduz-se as escalas de velocidade, de vorticidade (da ordem do inverso da escala de tempo de Kolmogorov) e de energia cinética turbulenta de Kolmogorov (da ordem do quadrado da escala de velocidade):

$$v = (\nu\epsilon)^{1/4}, \quad (1.5)$$

$$w = \left(\frac{\epsilon}{\nu}\right)^{1/2}, \quad (1.6)$$

$$e = (\nu\epsilon)^{1/2}. \quad (1.7)$$

1.2.2 Grandes Escalas

As maiores estruturas de um escoamento são determinadas pela geometria que lhes dão origem. Seja L a escala de comprimento típica de um escoamento: por exemplo o diâmetro de um cilindro longo à jusante do qual se forma uma esteira turbilhonar. Seja U a escala de velocidade, ou seja, a velocidade de transporte das grandes estruturas de um escoamento. Com estas duas grandezas características define-se as demais, na seguinte ordem: tempo, vorticidade e energia, as quais são dadas pelas equações seguintes:

$$t = \frac{L}{U}, \quad (1.8)$$

$$W = \frac{U}{L}, \quad (1.9)$$

$$E = U^2. \quad (1.10)$$

1.2.3 Taxa de dissipação

Para os escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos pode-se fazer a hipótese do equilíbrio para os quais a dissipação viscosa (ϵ) é igual à taxa de injeção de energia cinética nas grandes escalas (U^2/t). É interessante perceber que a dissipação viscosa pode então ser expressa em função de grandezas independentes da viscosidade, como ilustrado esquematicamente na Figura 1.1.

Desta forma pode-se expressar a taxa de dissipação como segue:

$$\epsilon \approx \frac{U^2}{t} = \frac{U^3}{L}. \quad (1.11)$$

Com esta equação diz-se que a taxa de dissipação pode ser estimada a partir de parâmetros relativos às grandes escalas, sem a participação da viscosidade.

1.2.4 Relações Entre as Escalas da turbulência

Pode-se, agora, deduzir relações interessantes envolvendo as escalas estabelecidas acima. Por exemplo, substituindo-se a equação (11) na equação (3) obtém-se:

$$l_d = \left(\nu^3 / \left(\frac{U^3}{L} \right) \right)^{1/4} \quad (1.12)$$

d'onde

$$\frac{L}{l_d} = Re_L^{3/4}. \quad (1.13)$$

Analogamente,

$$\frac{T}{\tau} = Re_L^{1/2}, \quad (1.14)$$

$$\frac{U}{v_r} = Re_L^{1/4}, \quad (1.15)$$

$$\frac{w}{W} = Re_L^{1/2}, \quad (1.16)$$

$$\frac{E}{e} = Re_L^{1/2}. \quad (1.17)$$

Observa-se alguns fatos interessantes ao analisar estas expressões. Todas elas mostram que as escalas dissipativas são muito menores que as escalas das estruturas coerentes, exceto a vorticidade. As leis de variação com o número de Reynolds são diferentes, como se ilustra na Figura 1.2. Vê-se que as escalas de comprimento se distanciam mais rapidamente que as escalas de tempo e de velocidade.

Pela relação (16) vê-se que as pequenas escalas têm mais vorticidade que as grandes escalas, e, de forma contrária, pela relação (47), as grandes escalas são portadoras de uma maior quantidade de energia.

1.2.5 Escalas moleculares versus escalas turbulentas

As escalas dissipativas de Kolmogorov são as menores que podem ocorrer em um escoamento turbulento. É importante verificar quando estas escalas podem sofrer influências das escalas moleculares. Seja ξ o livre caminho médio molecular. Para os gases a escala de molecular de velocidade pode ser associada à velocidade do som c . Da teoria cinética dos gases mostra-se

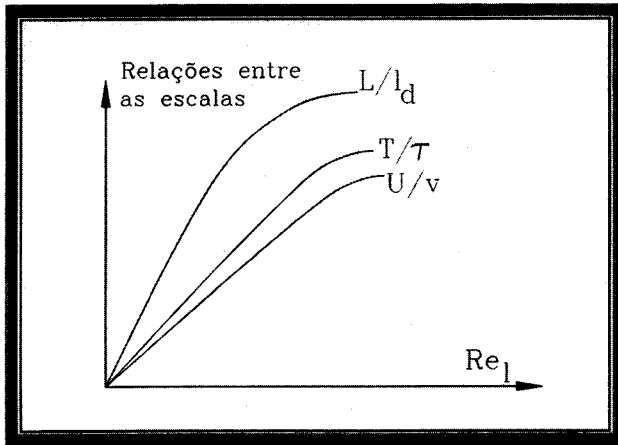


Figure 1.2: Comportamento qualitativo das relações de escalas.

que a viscosidade cinemática pode ser expressa em função destas duas grandezas características (ξ, c) pela relação $\nu \approx \xi c$. d'onde

$$\xi \approx \frac{\nu}{c}. \quad (1.18)$$

Mas da equação (13)

$$l_d = \left(\frac{U}{\nu}\right)^{-3/4} L^{1/4}. \quad (1.19)$$

Dividindo a equação (18) pela equação (19) tem-se:

$$\frac{\xi}{l_d} = \frac{M}{Re_L^{1/4}}, \quad (1.20)$$

onde $M = U/c$ é o número de Mach. Numa primeira análise desta equação poder-se-ia dizer que a escala característica molecular, ξ , é sempre muito menor que a escala dissipativa l_d uma vez que mesmo para altíssimos números de Mach o número de Reynolds deve ser ainda muito superior a ele de forma que esta relação seria sempre muito menor que a unidade. No entanto um cuidado especial deve ser tomado pois à medida que Reynolds aumenta a escala dissipativa l_d tende às escalas moleculares. Segundo Lesieur (1994), para Mach acima de 15 estas duas escalas começam a se confundir. Esta informação é extremamente importante pois isto implicaria em dizer que as equações de Navier-Stokes não são mais representativas dos escoamentos com $M > 15$. Ter-se-ia, neste caso, que utilizar equações alternativas do tipo Boltzman. Felizmente, para quase a totalidade dos problemas práticos da atualidade Mach não supera esta marca, mesmo para os escoamentos com fortes efeitos de aquecimento.

1.3 Caracterização da Turbulência

1.3.1 Aspectos gerais

A turbulência nos fluidos nos concerne a todos, sendo enorme a quantidade de exemplos que podem ser citados. As escalas de tempo e de comprimento concernentes são as mais diversas. No interior de uma bolha em ascensão por força de empuxo pode-se encontrar transição à turbulência. A fumaça gerada por um cigarro dá origem a instabilidades do tipo toroides, as quais se desestabilizam e geram turbulência tridimensional. O processo de transporte de calor ou poluentes num dado ambiente pode ser extremamente acelerado pela presença de turbulência. Se se considera apenas o processo difusivo molecular, a difusão de um contaminante depositado numa dada posição de uma sala poderia demorar alguns dias para se completar, enquanto que, na realidade, as forças empuxo ou mesmo as correntes de escoamentos forçantes aceleram este processo a alguns minutos, devido a ação da turbulência. O escoamento turbulento no interior de nossos pulmões aceleram a difusão de oxigênio e facilita o processo de absorção. Graças à turbulência de pequenas escalas o processo de mistura de combustível e oxigênio no interior de uma câmara de combustão se torna eficiente o bastante para aumentar o rendimento do motor e reduzir os efeitos nefastos da poluição dos gases tóxicos liberados pelos automóveis e aviões. O movimento turbulento da atmosfera se encarrega de dispersar e transportar para outras regiões, os gases poluentes originários das cidades e das indústrias que tendem a subir por forças de empuxo. No entanto pode acontecer que estes gases, normalmente mais leves que o ar, subam até encontrar uma camada de mesma densidade onde eles se "estacionam". Na verdade estes gases se encontram em escoamento turbulento e toda a energia cinética turbulenta deve ser transformada, o que dá origem a espécies de ondas internas horizontais que por sua vez se degeneram novamente em turbulência, a qual os dispersará em extensas camadas que, por vezes encobrem toda uma cidade, criando conseqüências danosas para a saúde dos habitantes.

Fenômenos como o famoso "El Niño" provocam supostamente, sem muitas provas científicas, verdadeiras catástrofes em todo o planeta, tamanhas as conseqüências climáticas dele advindas. De forma muito resumida este fenômeno é a conseqüência de um sobreaquecimento do oceano pacífico nas costas do Peru o que modifica a natureza das circulações atmosféricas de praticamente todo o planeta. Publicações recentes nos jornais falam de descobertas importantes em relação ao comportamento altamente turbulento do sol, cujas instabilidades afetariam de forma importante o clima da terra. Em particular acredita-se numa estreita ligação entre as chamadas manchas solares e determinadas singularidades climáticas do nosso planeta. Em particular, a chamada pequena idade glacial que ocorreu na terra no século 17 coincide com a época de quase desaparecimento destas manchas solares. Retornando a problemas de menores escalas não se pode deixar de citar a importância dos escoamentos turbulentos em aplicações ligadas aos processos de troca de calor, transferência de massa, sistemas de bombeamento, e o vasto campo de problemas envolvendo os corpos em movimento num dado meio fluido. Neste último caso, enormes esforços científicos têm sido direcionados para a compreensão dos fenômenos envolvidos. Esta compreensão implica em competência de controle destes fenômenos, o que pode ter como conseqüência a redução de custos com aumento da segurança e do conforto. De fato, ao longo de uma viagem aérea, freqüentes são os anúncios de "estamos atravessando uma zona de turbulência, favor atar os cintos". Realmente as oscilações induzidas sobre as estruturas, especialmente sobre as asas dos aviões, são visualizáveis a olho. Felizmente tudo se passa como se espera na quase totalidade destas ocorrências.

Em todas estas situações, as características da turbulência são de extrema importância. Por

isto, nesta unidade caracterizar-se-á a turbulência nos fluidos à luz da compreensão física já adquirida e registrada na bibliografia ao longo dos últimos tempos. Em primeiro lugar, a turbulência não é uma propriedade dos escoamentos. De fato pode-se encontrar o comportamento turbulento em qualquer sistema dinâmico desde que o mesmo possa ser caracterizado por um alto número de graus de liberdade. O bom senso indica que os comportamentos dos complexos sistemas de bolsas de valores, sistema econômico-político-social de um país, sistema de migração de povos de uma região para outra, o processo de crescimento de uma cidade e muitos outros exemplos, são turbulentos.

1.3.2 A turbulência é um fenômeno altamente difusivo

Restringindo o raciocínio para a turbulência nos fluidos, as observações experimentais e de modernas simulações numéricas, levam a concluir que a turbulência aumenta em muito o poder de difusão de um escoamento, como já foi ilustrado no início desta unidade através de exemplos. Em consequência, a mistura de massa, contaminantes, energia, quantidade de movimento é muito mais eficiente neste regime de escoamento. No regime laminar as partículas de fluido não têm a oportunidade de se deslocar rapidamente de uma posição a outra, enquanto que no regime turbulento partículas em altas temperaturas, ou portadoras de muita concentração de um dado contaminante, viajam rapidamente de uma posição a outra, entrando em contato com outras partículas que se encontram em baixa temperatura ou portadoras de uma baixa concentração de contaminante. Isto implica em fortes gradientes dos potenciais associados, o que acelera o processo de difusão molecular.

1.3.3 A turbulência é rotacional e tridimensional

A turbulência só pode ocorrer em escoamentos rotacionais. Na verdade todos os mecanismos conhecidos sobre o processo de transição à turbulência passam pela geração de vorticidade via instabilidades de diferentes naturezas: nos escoamentos turbulentos cizalhantes livres a transição se inicia com a geração das famosas instabilidades de Kelvin-Helmholtz, as quais são rotacionais; em escoamentos parietais a transição se dá via ondas de Tollmien-Schlichting as quais dão origem as famosas instabilidades em "grampo de cabelo" que se degeneram em turbulência tridimensional; as instabilidades de Couette-Taylor aparecem em escoamentos entre cilindros concêntricos rotativos, e, à medida que a diferença de rotação aumenta, estas instabilidades também se degeneram em turbulência tridimensional. Em todos estes exemplos e em outros não descritos, o caminho da transição leva à um estado altamente rotacional.

Tomando as equações de Navier-Stokes e aplicando-lhes o operador rotacional, gera-se uma equação de transporte para a vorticidade, conhecida como a equação de Helmholtz. Entre os seus vários termos aparece aquele que representa a geração de vorticidade. Facilmente se demonstra que este termo é nulo em escoamentos bidimensionais. Isto leva à conclusão que não é possível de se gerar vorticidade em escoamentos bidimensionais, ou seja, todo escoamento turbulento deve ser tridimensional. Um exemplo interessante são as ondas de superfície, que, mesmo podendo ser randômicas, não são turbulentas, pois não são rotacionais.

1.3.4 A turbulência é um fenômeno altamente dissipativo

As tensões cizalhantes de um escoamento, as quais são intensificadas em regime turbulento, conduzem ao processo de transformação de energia cinética em aquecimento. Quanto mais

intensas as flutuações de velocidades, maiores serão os gradientes e o cisalhamento local, e, em consequência maior o efeito de dissipação viscosa. Logo a turbulência exige fornecimento contínuo de energia para a sua manutenção. Caso contrário a turbulência entra em regime de decaimento rápido. Um jato turbulento injetado no interior de uma sala será conduzido ao repouso pois toda sua energia será consumida pelos efeitos viscosos. As ondas de gravidade interna, geradas por efeitos estabilizadores, como a estratificação estável superposta à turbulência, não são turbulentas, por não ser dissipativas, apesar de serem randômicas.

1.3.5 A turbulência é um fenômeno contínuo

Como foi comentado no item (1.2) as menores escalas da turbulência, as escalas dissipativas de Kolmogorov, são ainda muito maiores que as escalas características dos movimentos moleculares, exceto para altíssimos números de Mach ($M > 15$). Portanto, toda modelagem realizada (com hipótese de contínuo) para os escoamentos diversos, são também válidas para os escoamentos turbulentos: as equações de Navier-Stokes modelam os escoamentos turbulentos. Na realidade, existem ainda dúvidas sobre até que ponto os movimentos moleculares podem excitar as escalas contínuas de um escoamento, de forma a influenciar o seu comportamento dinâmico. Quanto à fase das estruturas turbilhonares, existem cogitações de que "o bater de asas de uma borboleta" pode alterar o clima da terra em localidades extremamente distantes. Acredita-se, no entanto, que, pelo menos do ponto de vista estatístico, perturbações tão pequenas, não afetam os escoamentos turbulentos.

1.3.6 A turbulência é um fenômeno imprevisível

A imprevisibilidade do comportamento de um sistema dinâmico, governado por equações determinísticas, pode ser vista como uma alta sensibilidade de sua dinâmica às condições iniciais que lhe são impostas. O conjunto de estados que serão adquiridos pelo sistema será afetado de valores finitos quando ele é perturbado inicialmente por excitações infinitesimais. Este processo se caracteriza por interações não lineares entre os diversos modos do sistema, o que resulta por amplificar as perturbações inicialmente muito pequenas mas que determinam instabilidades de naturezas complementemente diferentes nas suas fases, frequências e posições. Um exemplo típico desta característica se dá nos escoamentos turbulentos atmosféricos, cuja previsão meteorológica não pode ser feita com segurança, nos dias atuais, exceto para alguns dias futuros.

Esta imprevisibilidade se dá por três fatores fundamentais: imperfeições nos modelos matemáticos e nos métodos de solução das equações e as imprecisões nos sistemas de medidas que fornecem as condições iniciais para realização das simulações. Os modelos matemáticos utilizados para simular os escoamentos atmosféricos, por exemplo, ainda não podem levar em conta, com precisão, a presença de nuvens carregadas de vapor, os efeitos da camada limite atmosférica (rugosidade), os efeitos de radiação solar e a troca de calor com os oceanos e mares. Por outro lado os métodos de discretização das equações diferenciais não lineares envolvidas não oferecem ainda a precisão necessária para evitar a propagação de erros importantes do ponto de vista da imprevisibilidade, tal qual discutida. Por outro lado, mesmo que se dispusesse de um código computacional perfeito, dos pontos de vista de modelagem e de métodos de solução, qualquer erro nas medidas fornecidas como condições iniciais será amplificado e implicará em discrepâncias finitas no comportamento do sistema dinâmico. Felizmente este tipo de problema só é importante quando se preocupa em obter informações de posição e de fase das instabilidades associadas. Para a compreensão dos fenômenos envolvidos, o que é mais importante é poder

colocar em evidência a existência e a forma das estruturas turbilhonares e suas interações.

Quanto às aplicações de engenharia, informações estatísticas são suficientes para a maioria das situações. Além disto, mesmo do ponto de vista experimental, é impossível de se repetir com fidelidade os resultados de uma experiência. Admita-se que seja possível se iniciar dois experimentos partindo-se de dois estados iniciais idênticos. Mesmo assim as duas realizações seriam completamente diferentes devido às perturbações injetadas no experimento pelas fontes externas não controladas pelo experimentador. Por menores que sejam estas perturbações, elas poderão ser amplificadas e dar origem a famílias de instabilidades diferentes.

1.3.7 A turbulência: altos números de Reynolds e largo espectro de energia

Uma das formas de se interpretar o número de Reynolds é através da relação entre os efeitos convectivos e os efeitos difusivos envolvidos num dado escoamento. Os efeitos difusivos têm papel amortecedor das instabilidades originárias no seio interior do escoamento, enquanto que os efeitos convectivos (não lineares) trabalham no sentido de amplificar perturbações e gerar estas instabilidades. Assim, só é possível de se ter instabilidades e turbulência a $Re \gg 1$. Por outro lado, como atesta a equação (13) a relação entre as escalas da turbulência (grandes escalas e escalas dissipativas) é proporcional ao número de Reynolds. Decorre então que o número de graus de liberdade, por unidade de volume, de um escoamento pode ser calculado através da equação abaixo:

$$Ngl = \left(\frac{L}{l_d}\right)^3 = Re_L^{9/4} \quad (1.21)$$

Como a turbulência só ocorre para altos Reynolds, conclui-se que se trata de um fenômeno a alto número de graus de liberdade. Outra forma de caracterizá-lo é através do espectro de energia, o qual deverá ser forçosamente portador de uma larga banda de frequências ou comprimentos de onda. Todas as experiências realizadas até o momento têm confirmado este fato.

Estas são as características mais importantes dos escoamentos turbulentos. Qualquer fenômeno que se manifesta na natureza e que não apresenta todas elas simultaneamente, não pode ser caracterizado como turbulento. Além disto, com estas características em mente fica mais fácil de entender melhor e de forma mais organizada a natureza deste complexo problema.

1.4 Origem da turbulência

A transição à turbulência, identificada por Reynolds (1883), é caracterizada pelo aparecimento de instabilidades num escoamento originalmente estável (denominado laminar) as quais se multiplicam por um processo não linear e degeneram-se finalmente em um regime turbulento. Em qualquer tipo de escoamento, o processo de transição pode ser generalizado como sendo o resultado da amplificação de perturbações injetadas por variadas fontes de ruídos. Esta amplificação só se torna possível pela presença de zonas cizalhantes no interior dos escoamentos. No entanto, a forma física em que este processo de geração de instabilidades ocorre depende do tipo de escoamento em questão, o que conduz a uma reflexão e a uma possível classificação dos escoamentos transicionais.

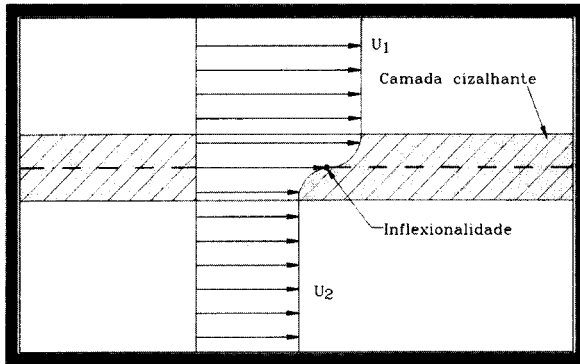


Figure 1.3: Campo de velocidade inflexional.

Os escoamentos cizalhantes livres são caracterizados pela ausência de paredes e obstáculos no seu interior ou nos seus limites. As instabilidades que se desenvolvem nesta classe de escoamentos são ditas de natureza cizalhantes uma vez que, pela teoria da estabilidade linear, elas podem se desenvolver mesmo na situação hipotética de escoamentos invíscidos. Rayleigh estabeleceu o critério da inflexionalidade do campo de velocidade como requisito necessário para geração de instabilidades em escoamentos cizalhantes livres. Quanto aos escoamentos que se desenvolvem sob a influência de uma parede, onde não existe inflexionalidade, a experiência mostra que, indiferente a isto, ocorre a transição. Neste caso as instabilidades típicas devem ser de outra natureza que a cizalhante. Manifestamente os efeitos viscosos são necessários para ocorrer o processo de amplificação de perturbações e geração de instabilidades. Fala-se neste caso de instabilidades de natureza viscosa. Outros tipos de transição podem ocorrer, como aquelas sob efeitos de rotação e também aqueles sob efeitos de convecção térmica.

Estes escoamentos (cizalhantes, parietais, convecção térmica e sob rotação) podem ser vistos isoladamente como escoamentos de base, que, quando combinados geram uma classe especial de problemas: os escoamentos complexos. Via de regra, nas situações práticas encontra-se uma combinação de escoamentos do tipo cizalhantes, camada limite, rotação e sob efeitos de transferência de calor. A seguir são apresentados estudos resumidos do processo de transição de diferentes escoamentos dentro dos grupos colocados acima.

1.4.1 Escoamentos cizalhantes livres

Este grupo de escoamentos pode ser subdividido em três tipos distintos apesar do processo de transição ser similar em todos eles. São eles: camadas de mistura, jatos e esteiras.

Camadas de mistura

a. Camada de mistura em desenvolvimento temporal

Uma camada de mistura se desenvolve devido à existência de diferenças de velocidade no interior de um escoamento. Normalmente têm-se uma camada altamente cizalhante que separa duas camadas de escoamentos uniformes com velocidades diferentes, como ilustra a Figura 1.3.

As instabilidades que se desenvolvem neste tipo de escoamento são o resultado do processo de amplificação de perturbações injetadas no seu interior por fontes externas. Existe neste caso

uma frequência que será amplificada com taxa de amplificação máxima e que se manifestará em primeiro lugar. Posteriormente, estas instabilidades induzirão outras frequências harmônicas que por sua vez induzirão novas frequências e assim até a degeneração em turbulência. A primeira manifestação acontece com a oscilação da napa cizalhante de fluido ilustrada na Figura 1.3, com a frequência de máxima taxa de amplificação, como se ilustra na Figura 1.4.

O processo de transição se inicia a partir de uma faixa cizalhante gerada por duas correntes de velocidade uniformes de magnitudes U_1 e U_2 . O parâmetro $\Lambda = (U_1 + U_2)/2$ permite caracterizar o comportamento dinâmico da camada de mistura. Observa-se na Figura 1.4 (b) a manifestação de oscilações com comprimento de onda λ_{max} que se desenvolvem com máxima taxa de amplificação. O processo de seleção deste comprimento de onda ainda não é bem compreendido.

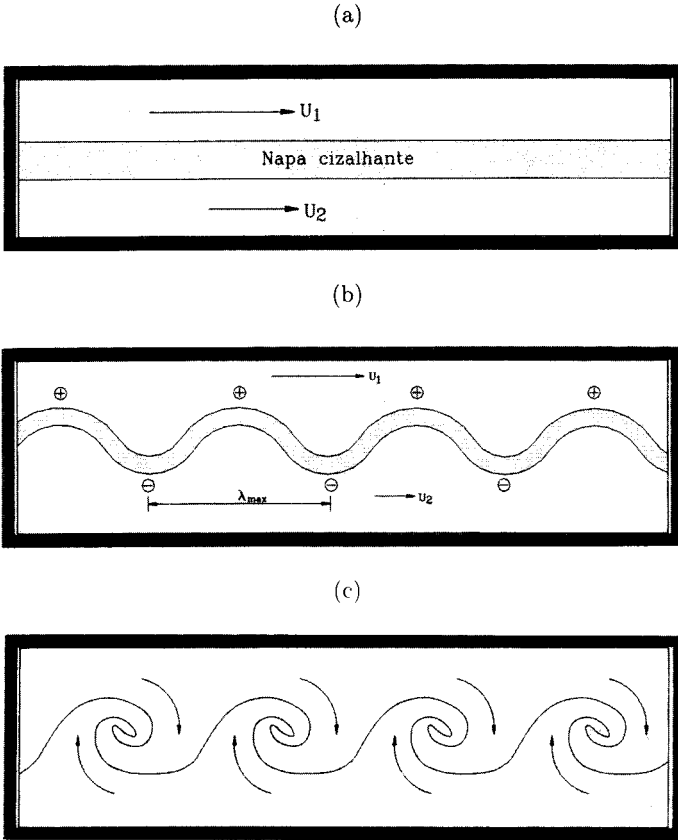


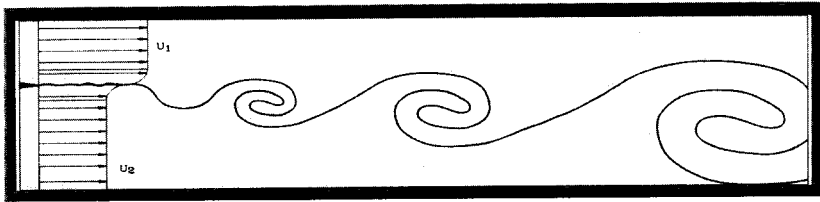
Figure 1.4: Camada de mistura em desenvolvimento temporal.

Quando estas instabilidades aparecem observa-se a geração de cristas e vales da napa cizalhante inicialmente uniforme. Eles são assinalados com mais e menos sobre esta onda. É natural que sobre as cristas a pressão seja menor que no interior dos vales uma vez que as velocidades são maiores e menores respectivamente. Este fato faz com que se tenha um sistema completamente instável no qual as instabilidades só podem amplificar. Além disto, as cristas entram em zonas rápidas e os vales entram em zonas lentas do escoamento. Desta forma as cristas serão transportadas mais rapidamente que os vales o que resulta no processo de enrolamento ilustrado na Figura 1.4 (c). As instabilidades da Figura 1.4 (b) e os turbilhões da Figura 1.4 (c) são conhecidas como instabilidade e turbilhões de Kelvin-Helmholtz. Observa-se na Figura 1.4 (c) que os turbilhões transportam fluido rico em quantidade de movimento (sentido descendente) e fluido pobre em quantidade de movimento (sentido ascendente) para o interior da camada de mistura, o que explica a denominação de "camada de mistura". Na Figura 1.5 mostra-se uma camada de mistura em desenvolvimento temporal observada na atmosfera. Na parte inferior da figura observa-se uma cidade sobre a qual o escoamento se desenvolve magistralmente.



Figure 1.5: Camada de mistura em desenvolvimento temporal; escoamento atmosférico.

(a)



(b)

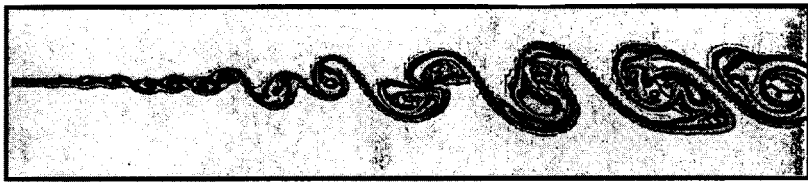


Figure 1.6: Camada de mistura em desenvolvimento espacial.

b. Camada de mistura em desenvolvimento espacial

A Figura 1.6 (a) ilustra uma camada de mistura em desenvolvimento espacial. Observa-se a formação de um campo de velocidade inflexional à jusante de uma placa separadora de duas correntes de velocidades uniformes de intensidades U_1 e U_2 . O desenvolvimento das instabilidades e dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz são observados. Neste caso as estruturas turbilhonares crescem à medida que elas são transportadas espacialmente através de mecanismos do tipo emparelhamento turbilhonar, como ilustrado na Figura 1.6 (b). Nesta última figura tem-se o resultado de uma simulação numérica (Kaul, 1988), onde a corrente uniforme mais rápida



Figure 1.7: Camada de mistura em desenvolvimento espacial (Brown e Roshko, 1974).

encontra-se na região inferior da placa. É interessante observar que o sentido de rotação das estruturas é determinado pelo sentido do cisalhamento.

Na Figura 1.7 mostra-se uma visualização experimental realizada por Brown e Roshko (1974), mostrando os estágios bidimensionais junto à placa separadora e o comportamento qualitativo de tridimensionalização do escoamento. Estas estruturas turbilhonares bem organizadas nas grandes escalas são também conhecidas como estruturas coerentes. A descoberta destas estruturas levou a se acreditar que pelo menos a nível das grandes estruturas a turbulência apresenta um dado nível de organização e coerência do ponto de vista estatístico, ou seja, são estruturas capazes de guardar uma forma geométrica bem definida por um tempo superior ao seu tempo característico de rotação.

c. Desenvolvimento de instabilidades tridimensionais

As instabilidades descritas acima são, num primeiro momento, bidimensionais. Mas como foi comentado na unidade (1.3.3) os escoamentos turbulentos são tridimensionais. Nesta unidade analisa-se os mecanismos envolvidos no processo de tridimensionalização dos escoamentos do tipo camada de mistura.

O complexo processo de transição à turbulência é ainda pouco compreendido. No entanto nas últimas décadas grandes avanços têm sido conseguidos graças aos desenvolvimentos de novas técnicas experimentais e também dos computadores de última geração e de novas e performantes metodologias de solução das equações que modelam os escoamentos turbulentos. A transição pode ser entendida como sendo um processo de multiplicação de frequências cujas formas estão sendo desvendadas pouco a pouco. No presente texto objetiva-se apenas transmitir as idéias básicas do processo de transição e por isto limitar-se-á a apresentar alguns resultados ilustrativos existentes na literatura.

Como comentado precedentemente, as instabilidades primárias formadas numa camada de mistura possuem formas cilíndricas bidimensionais. Complexos mecanismos não lineares induzem oscilações harmônicas sobre estas instabilidades iniciais. Concomitantemente filamentos turbilhonares longitudinais são induzidos entre as estruturas primárias consecutivas o que cria um processo de fortes interações não lineares e que, aparentemente, levam ao processo de tridimensionalização e de multiplicação de frequências que caracterizam a transição para o estado de turbulência tridimensional. Na Figura 1.8 ilustra-se de forma esquemática este processo. Nesta figura os cilindros transversais representam as instabilidades primárias, as quais giram no sentido horário. Elas induzem a formação das instabilidades secundárias na forma de filamentos turbilhonares contra-rotativos. As setas sobre os filamentos informa o sentido de rotação segundo a regra da mão direita.

Na Figura 1.9 mostra-se o resultado de observações experimentais realizadas por Lasheras e Choi (1988). Visualiza-se o processo de interação entre as estruturas primárias e secundárias

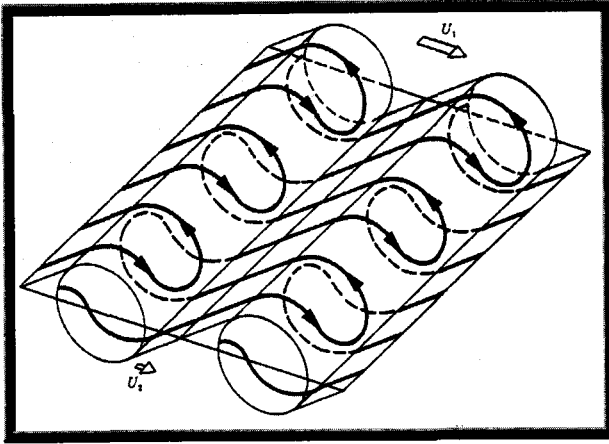


Figure 1.8: Esquema qualitativo do processo de geração de instabilidades secundárias em camadas de mistura.

criando fortes deformações e conduzindo ao processo de tridimensionalização.

Jatos

Os jatos podem ser classificados segundo a geometria que os formam. Fala-se de um jato redondo se ele foi gerado por um orifício circular, jato plano ou retangular se foi gerado por uma cavidade retangular. Em qualquer um destes tipos de jatos a transição é caracterizada, à semelhança das camadas de mistura, pela formação de instabilidades primárias e turbilhões de Kelvin-Helmholtz, os quais induzirão a formação de filamentos secundários. A interação dos filamentos longitudinais contrarrotativos com as estruturas turbilhonares primárias induzirão a formação de oscilações transversais sobre as estruturas primárias as quais se amplificam e finalizam por degenerar o escoamento em turbulência tridimensional.

A transição de um jato laminar para um jato turbulento acontece, via de regra, próximo do bocal que lhe dá origem, de forma que ela dependa da geometria do orifício ou do bocal e também das condições do escoamento à jusante. Desta forma os experimentos são dificilmente comparáveis. Torna-se também difícil de comparar simulações numéricas com dados experimentais, exceto do ponto de vista estatístico.

Como nos casos precedentes, as oscilações aparecem de forma senoidal, indicando um processo de amplificação seletivo de perturbações. Os jatos se transicionam a baixos números de Reynolds, a exemplo do que acontece com todos os escoamentos cizalhantes livres. Os escoamentos parietais exigem maiores números de Reynolds para que aconteça a transição. Para os jatos a transição se inicia a $Re_d = 10$ enquanto em camada limite isto acontece a $Re_d = 1.000$, Drazin e Reid (1981).

A Figura 1.10 ilustra esquematicamente este processo com as diferentes fases da transição: (1) bocal convergente; (2) núcleo de escoamento potencial; (3) toroide de alta concentração de vorticidade; (4) geração de vórtices toroidais bidimensionais; (5) emparelhamento de vórtices anulares; (6) oscilações tridimensionais sobre os vortices toroidais; (7) degeneração em turbulência tridimensional; (8) reorganização da turbulência em grandes escalas compostas de outras múltiplas escalas. Observa-se também neste tipo de escoamento a formação de filamentos

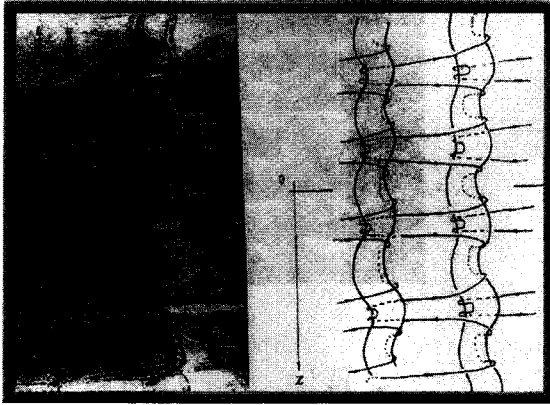


Figure 1.9: Detalhes de uma camada de mistura em desenvolvimento espacial; vista superior; resultado experimental (esquerda) e esquema qualitativo (direita).

longitudinais que interagem com as estruturas primárias. Este cenário têm sido observado tanto em trabalhos experimentais quanto em trabalhos de simulação numérica de grandes escalas. A Figura 1.11 (a) ilustra o processo de transição e a região de degeneração em turbulência de um jato circular. Trata-se de uma visualização experimental com ajuda de um plano de iluminação laser. Mostra-se os primeiros turbilhões de Kelvin-Helmholtz, seguidos de emparelhamentos e de uma região fortemente tridimensional e turbulenta. Na Figura 1.11 (b) mostra-se um corte horizontal efetuado transversalmente ao jato vertical da Figura 1.11 (a) na posição indicada pela seta. Na Figura 1.12 apresenta-se o resultado de uma simulação numérica realizada por Urbin (1997). Nesta figura visualiza-se o desenvolvimento do processo de transição de um jato circular sob fortes efeitos de forçagem na entrada do domínio de cálculo. Verifica-se o desenvolvimento de estruturas toroidais consecutivas com uma frequência igual à frequência de forçagem.

Esteiras

Os escoamentos do tipo esteira aparecem à jusante de um obstáculo onde se gera, em média, um escoamento recirculante com um campo inflexional de velocidade. Este é sem dúvida o escoamento transicional mais familiar para toda a comunidade, mesmo para os mais leigos no assunto, que já teve a oportunidade de observar a clássica esteira de Von Karman atrás dos pilares de uma ponte.

Este talvez seja o momento mais apropriado para falar do conceito de estruturas coerentes da turbulência, conceito lançado nas últimas décadas, associado às grandes estruturas turbulentas de um escoamento, Cantwell (1981) e Hussain (1983). Este conceito leva a novas reflexões no sentido de não se tratar um escoamento turbulento como randômico em todas as suas escalas. Isto cria uma nova possibilidade de interpretação da turbulência, podendo esta ser coerente nas grandes escalas e randômica nas pequenas. A esteira de Von Karman foi uma das primeiras visualizações destas estruturas coerentes em escoamentos à jusante de um cilindro.

A Figura 1.13 ilustra uma esteira formada à jusante de um obstáculo. Observa-se a formação de turbilhões coerentes alternados num modo denominado sinuoso. É menos freqüente mas é

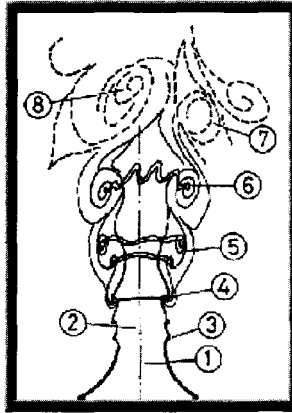


Figure 1.10: Esquema ilustrativo do processo de transição de um jato redondo.



(a)



(b)

Figure 1.11: Jato redondo em transição; (a) visualização de um plano laser vertical e (b) plano laser horizontal transversal ao jato, na posição indicada pela seta (experimento realizado por Balint, Ecole Centrale de Lyon).



Figure 1.12: Simulação numérica de grandes escalas do processo de transição de um jato redondo (Figura concedida por Uribin, CEA Grenoble, 1997).

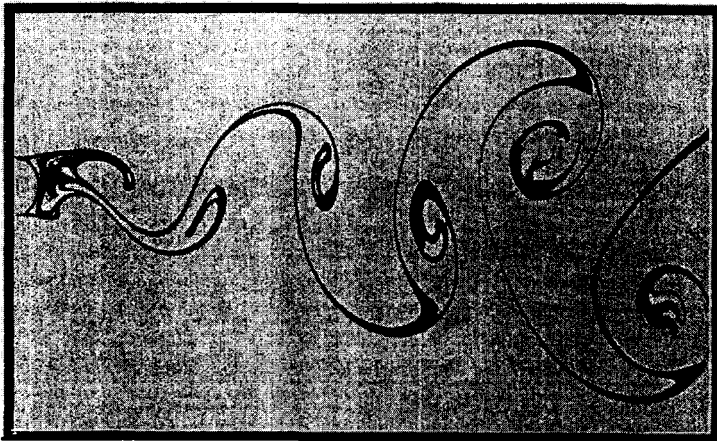


Figure 1.13: Esteira de Von Karman formada à jusante de uma placa rombuda (Van Dyke, 1982). Este comportamento, ilustrado nesta figura, se manifesta bem organizado em regime quase bidimensional na fase de transição, nas proximidades do cilindro. Experimentalmente e por simulação numérica observa-se o processo de transição de forma completamente similar ao que já foi apresentado para os outros tipos de escoamentos.

possível que esta esteira se apresente também no chamado modo varicoso, onde os turbilhões permanecem em fase.

(a)

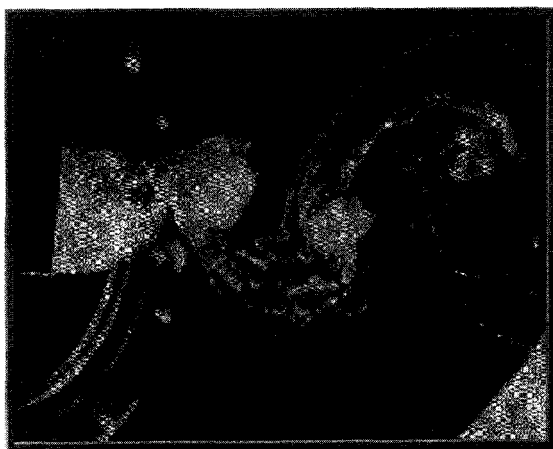


Figure 1.14: Esteira tridimensional à jusante de um obstáculo (retirado de Lesieur, 1994).

O cenário da transição, ilustrado na Figura 1.14 se mostra novamente como uma composição de estruturas primárias transversais e estruturas secundárias longitudinais. Na Figura 1.14 (a) mostra-se o escoamento sob uma vista em perspectiva. O escoamento é visualizado com a ajuda de bolhas que são geradas por processo de cavitação. Como o processo de mudança de fase se dá primeiro nas regiões de baixas pressões, fica claro que o que se visualiza são os centros dos turbilhões. Na Figura 1.14 (b) mostra-se o resultado de uma simulação numérica de grandes escalas deste tipo de escoamento. É espetacular a semelhança entre os resultados sobre um escoamento com tal complexidade. Fica clara a potencialidade das ferramentas numéricas para

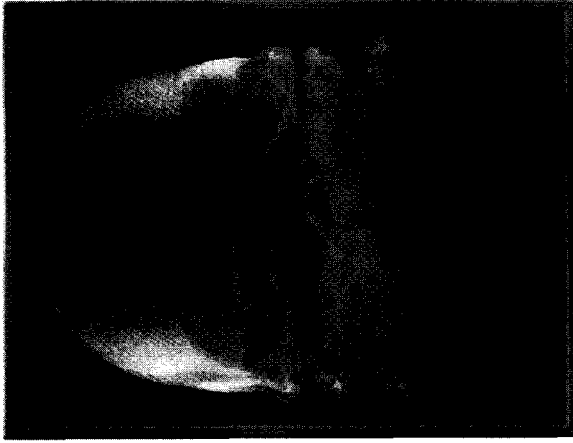


Figure 1.15: Esteira turbilhonar à jusante de uma esfera; o escoamento está direcionado da esquerda para a direita (retirada de Faber, 1995).

se evidenciar detalhes do processo de transição à turbulência. Em especial destaca-se a clareza com que os filamentos longitudinais contrarrotativos são evidenciados. Mais uma vez o processo de interação entre estruturas coerentes primárias e secundárias é primordial para o processo de transição.

Como já comentado uma esteira se forma à jusante de um obstáculo qualquer e o seu comportamento físico depende da geometria deste obstáculo. Nos casos precedentes tem-se geometrias alongadas de forma que as instabilidades geradas são bidimensionais, não apresentando variações na direção transversal. A título de ilustração, na Figura 1.15 mostra-se uma esteira formada à jusante de uma esfera onde se observa a formação de uma família de instabilidades que caracterizam a transição à turbulência. Novamente observa-se a formação de instabilidades e turbilhões de Kelvin-Helmholtz em consequência da existência de um campo médio inflexional de velocidade gerado pelo processo de recirculação. As instabilidades iniciais (próximo da esfera) são toroides quase bidimensionais, apresentando oscilações segundo a direção circunferencial. Verifica-se que estas oscilações amplificam-se rapidamente e degeneram em turbulência tridimensional. A uma distância de um diâmetro da esfera o escoamento já se encontra completamente transicionado.

1.4.2 Camada Limite

Quando um fluido se movimenta sobre um corpo sólido a altos números de Reynolds, a camada limite que se forma sob os efeitos viscosos, pode se tornar turbulenta. Neste caso os efeitos do atrito viscoso sobre o corpo aumentam. Compreender e controlar os fenômenos físicos envolvidos na transição de uma camada limite desperta muito interesse prático devido aos anseios de se reduzir os efeitos de arrastes em aviões e naves, navios e submarinos. Muito interesse também surge para se reduzir os custos de bombeamento e maximizar a eficiência de mistura de componentes em processos químicos. Os comentários que serão lançados neste texto são voltados para o processo de transição de camada limite.

Nas seções precedentes comentou-se sobre os escoamentos cizalhantes livres, nos quais a

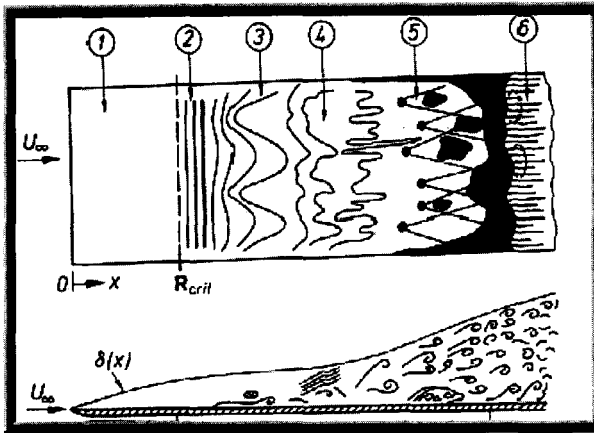


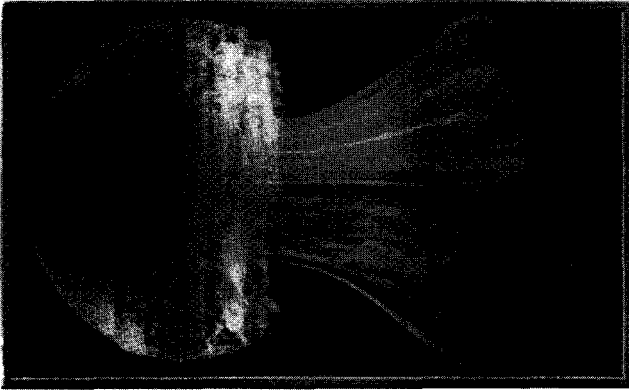
Figure 1.16: Esquema ilustrativo das fases de transição de uma camada limite sobre uma placa plana (retirado de Schlichting, 1968).



Figure 1.17: Spot turbulento no interior de uma camada limite plana em transição (retirado de Cantwell et al., 1978).

transição se dá graças ao processo de geração de instabilidades de Kelvin-Helmholtz, pouco dependentes dos efeitos viscosos mas altamente dependentes do comportamento dos campos médios de velocidade: êles devem ser inflexionais. Enfatiza-se novamente que se trata das instabilidades de natureza cizalhante. No caso das camadas limite a origem da turbulência não pode ter ligação com a inflexionalidade dos perfis médios de velocidade e passa a ter uma forte dependência do comportamento viscoso. As etapas da transição, reconhecidas até o momento, são ilustradas esquematicamente na Figura 1.16, para o caso particular de uma placa plana.

(a)



(b)

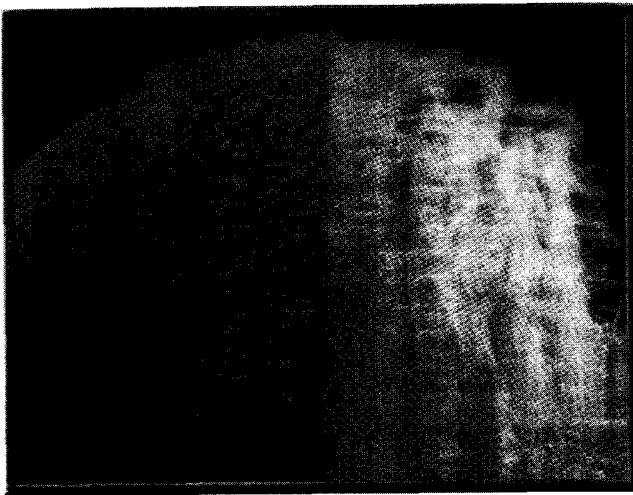


Figure 1.18: Camada limite sobre a primeira metade à esquerda de uma esfera (a); detalhes das ondas de Tollmien-Schlichting e das instabilidades tipo grampo de cabelo (b) (retirada de Faber, 1995).

A primeira fase (1) que antecede a transição é obviamente o escoamento laminar, assumindo-se que não exista turbulência no escoamento que antecede a placa. A segunda fase (2) formação das primeiras instabilidades, junto à parede, de pequenas amplitudes e de comportamento laminar, são denominadas ondas de Tollmien-Schlichting. Em seguida (3) estas ondas se colocam a oscilar na direção transversal à placa, com um comprimento de onda de máxima taxa de amplificação, selecionado entre todos os comprimentos de onda injetados na forma de perturbações, dando origem a instabilidades conhecidas como grampo de cabelo. Estas instabilidades são filamentos turbilhonares contrarrotativos que se erguem para o interior da

camada limite devido ao efeito de bombeamento de fluido criado pelos braços contrarotativos. Na seqüência (4), como uma conseqüência das instabilidades grampos de cabelo surgem os famosos bursts turbulentos que representam fortes concentrações de vorticidade as quais geram transportes violentos de matéria da parede para o interior da camada limite, visualizados classicamente por meio de injeção de fumaça.

A última fase (5) da transição, ilustrada em detalhe na Figura 1.17, representa uma espécie de reorganização do escoamento em spots turbulentos com fortes concentrações de energia cinética turbulenta, o que dá ao processo de transição um caráter fortemente intermitente. Finalmente a fase (6) caracteriza a fase completamente turbulenta da camada limite.

A exemplo do que foi ilustrado para o caso dos escoamentos do tipo esteira, uma camada limite também se desenvolve sobre diferentes tipos de geometrias. Na Figura 1.18 (a) mostra-se a camada limite que transiciona sobre uma esfera. A camada limite se forma à esquerda da mesma seguida da formação de ondas Tollmien-Schlichting e de instabilidades do tipo grampo de cabelo. Estes detalhes podem ser visualizados na Figura 1.18 (b).

1.4.3 Outros tipos de escoamentos que transicionam

Além dos escoamentos já apresentados pode-se encontrar outros tipos, menos frequentes, mas não menos importantes e que merecem alguns comentários. A seguir apresenta-se aqueles escoamentos e suas instabilidades características que eventualmente podem conduzi-los ao processo de transição à turbulência.

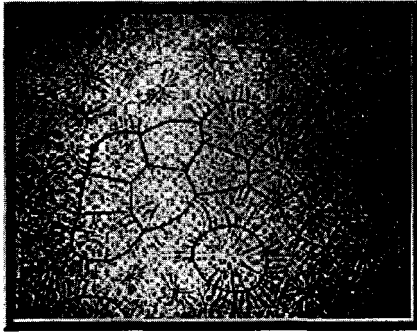
Convecção de Rayleigh-Béarnard e de Marangoni

Supor uma camada de fluido entre duas placas horizontais separadas de uma distância d , submetidas a uma diferença de temperatura $\Delta\theta$. Se a placa inferior for a mais aquecida surgirá movimento gerado pelo empuxo. Devido à conservação da massa, para este caso específico de camada de fluido horizontal, o movimento deve se manifestar forçosamente na forma de instabilidades com movimentos ascendentes e descendentes de forma que o fluxo líquido médio de fluido por um plano intermediário horizontal seja nulo. Estas instabilidades convectivas são as primeiras que aparecem neste tipo de escoamento e são conhecidas como instabilidades de Rayleigh-Béarnard. É bem evidente que elas só aparecerão a partir de condições críticas envolvendo o modo de operação, o tipo de fluido e a geometria do sistema. Estes parâmetros se agrupados via análise dimensional permite a definição do número de Rayleigh, dado pela equação abaixo:

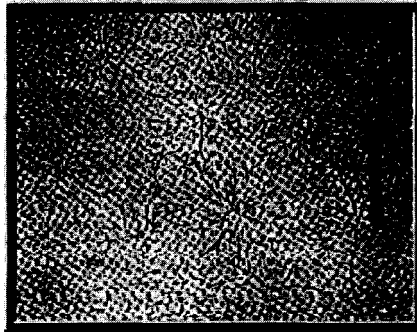
$$Ra = \frac{\beta g \Delta\theta d^3}{\alpha \nu} \quad (1.22)$$

onde β , α e ν são respectivamente o coeficiente de expansão volumétrica, a difusão térmica e a viscosidade cinemática molecular. Assim se $Ra > Ra_c$, inicia-se o processo de amplificação de perturbações e formação das ditas instabilidades de Rayleigh-Béarnard, mais por força do uso que por precisão histórica nos desenvolvimentos científicos.

(a)



(b)



(c)

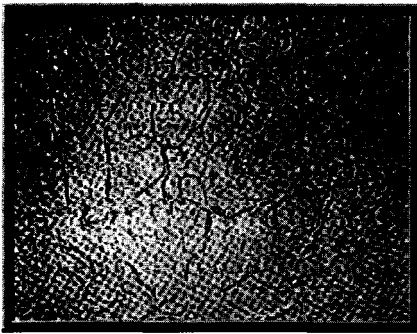


Figure 1.19: Convecção de Bernard em uma camada fluida horizontal, para $Pr = 0,7$: (a) $Ra = 4,8 \times 10^4$; (b) $Ra = 1,3 \times 10^4$ e (c) $Ra = 1,7 \times 10^5$.

Nas Figuras 1.19 (a), (b) e (c) mostra-se três configurações de escoamentos numa camada horizontal relativas a três regimes diferentes. Observa-se que à medida que se aumenta o número

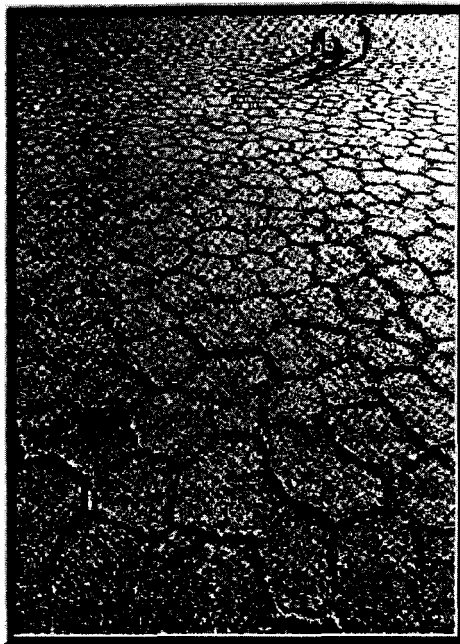


Figure 1.20: Traços de células hexagonais convectivas de Marangoni geradas no fundo de um lago (Figura retirada de Faber, 1995).

de Rayleigh o escoamento se torna menos organizado. Na Figura 1.19 (a) tem-se as células de Bernard ainda bem organizadas. Nas Figuras 1.19 (b) e (c) estas células desapareceram e surge um regime mais desorganizado, onde a transição à turbulência torna-se evidente. O movimento convectivo presente neste tipo de escoamento se deve ao processo de transformação de energia potencial em energia cinética o que alimenta as correntes convectivas. Existe também os efeitos viscosos cuja energia dissipada deve ser reposta também pela energia potencial.

Existem também problemas semelhantes a este nos quais o processo convectivo é alimentado por outra fonte de energia. Imagine-se por exemplo uma camada de fluido fina sobre uma placa plana horizontal e com uma superfície livre. Efeitos de tensão interfacial aparecerão. Aquecendo-se a superfície inferior do fluido, surge um movimento vertical por variação de densidade. Surge então na superfície livre superior regiões mais aquecidas e em consequência gradientes horizontais de temperatura. O coeficiente de tensão interfacial é função da temperatura, diminuindo na direção dos pontos mais quentes. Este fato é conhecido como efeito de Marangoni. Neste caso surge um campo de força resultante, em consonância com os gradientes de temperatura, que promoverá movimentos horizontais. Desta forma à medida que o fluido quente sobe e libera energia térmica para o meio ambiente o escoamento recebe energia liberada na interface a qual tem origem no gradientes de tensões interfaciais. Este movimento combinado com o empuxo completa o movimento convectivo na forma de células organizadas, conhecidas por células de Marangoni.

Na Figura 1.20 ilustra-se os traços das células de Marangoni formadas no solo de um lago (salt lake) após o processo de secagem gerado pela evaporação. Percebe-se que estas células

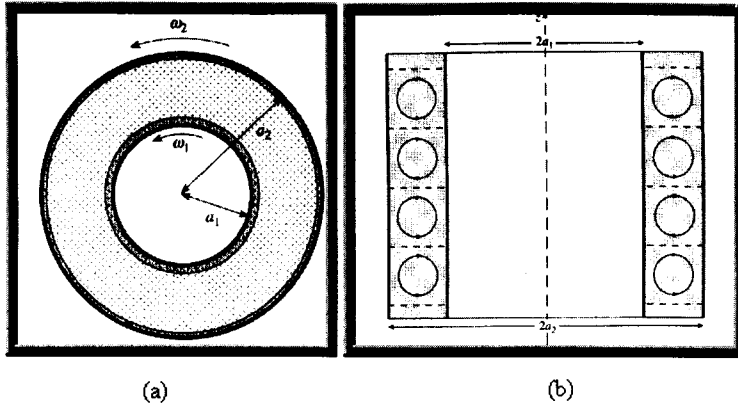


Figure 1.21: Esquema ilustrativo do escoamento de Couette (a) e instabilidades toroidais de Taylor-Couette (b).

são muito regulares e não podem caracterizar um regime turbulento mas é certo que, sendo instabilidades, caracterizam o início do processo de transição.

Observa-se que, quando se tem superfície livre envolvida neste tipo de problema, as duas fontes de manutenção da convecção (energia interfacial e energia potencial) co-existem. Pode-se demonstrar (Faber, 1995) que os efeitos da energia interfacial serão predominantes quando

$$\frac{d\sigma}{dT} > -3\rho g d^2. \quad (1.23)$$

À título de exemplo se se coloca óleo silicone sobre uma superfície horizontal e se a espessura d da camada de líquido não excede 3 mm então os efeitos de Marangoni serão predominantes.

Este é um tipo de escoamento envolvido em muitos problemas práticos. Além disto ele tem sido alvo da atenção de muitos pesquisadores, tornando-se um campo muito rico para análise de instabilidades e a evolução para a movimentos trubulentos.

Instabilidades de Taylor-Couette

Um outro tipo de instabilidades, semelhantes às instabilidades de Rayleigh-Bérnard, se formam em escoamentos isotérmicos no interior de uma cavidade entre dois cilindros concêntricos rotativos. Este tipo de escoamento é conhecido como escoamento de Couette. Neste caso as forças centrífugas geradas pela rotação estão ligadas à formação e manutenção das instabilidades de Taylor-Couette, descritas nesta seção.

Nas Figuras 1.21 (a) e (b) mostra-se respectivamente um corte transversal e um corte longitudinal do canal composto por dois cilindros concêntricos. Na Figura 1.21 (b) ilustra-se as instabilidades toroidais contrarrotativas de Taylor-Couette. Nas Figuras 1.22 (a), (b) e (c) tem-se a visualização experimental destas instabilidades assim como do processo de transição à turbulência.

Na Figura 1.22 (a) os toroides contrarrotativos, relativos a uma dada diferença de rotação, são bidimensionais. À medida que esta diferença de rotação aumenta surgem oscilações harmônicas

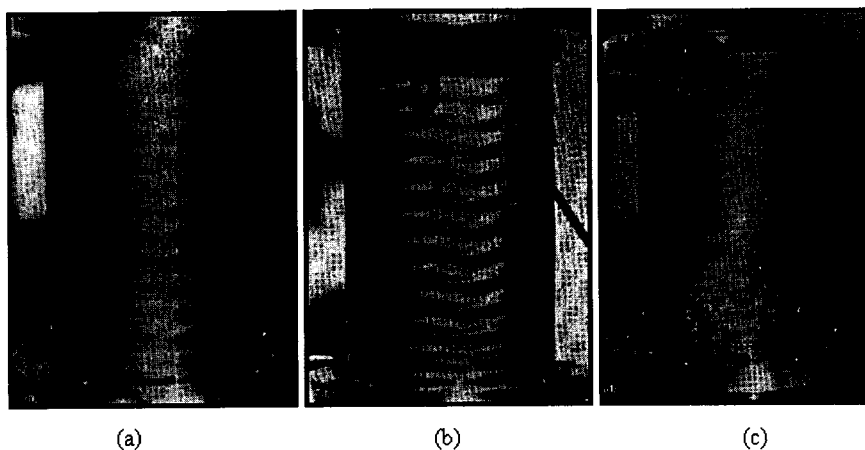


Figure 1.22: Instabilidades de Taylor-Couette (a); oscilações harmônicas (b) e degeneração em turbulência (c); Figura retirada de Coles (1965).

sobre os toroides, as quais se amplificam e o escoamento se degenera em turbulência, como se ilustra na Figura 1.22 (c). Este é apenas mais um cenário de transição à turbulência com características similares aos precedentes: surgimento de instabilidades típicas do escoamento como resultado do processo de amplificação de perturbações; bifurcação destas instabilidades primárias e geração de uma nova família e finalmente degeneração em um espectro largo de instabilidades característico da turbulência.

O leitor interessado pode encontrar mais detalhes sobre o tratamento analítico deste problema, via teoria da estabilidade linear em Tritton (1988).

1.5 Alguns comentários sobre a teoria da estabilidade linear

Como já foi mencionado anteriormente não existe até o momento uma teoria que permita explicar o processo de transição dos escoamentos na sua totalidade. No entanto a teoria da estabilidade linear pode elucidar muitos aspectos, pelo menos na fase inicial da transição onde a natureza do escoamento é essencialmente laminar e portanto com pouca influência das não linearidades.

Todo escoamento cizalhante pode transicionar a valores suficientemente elevados do número de Reynolds. A teoria da estabilidade linear indica quando um escoamento cizalhante laminar pode transicionar para o regime turbulento. No entanto, como demonstrado na vasta literatura as ondas previstas por este tipo de teoria são apenas o primeiro estágio do cenário da transição para a turbulência. Fica a questão do que acontece na seqüência, onde este tipo de teoria não pode dar nenhuma resposta às questões que se coloca sobre a física do processo de transição. Além disto não existe outro tipo de teoria. Restam ainda as investigações experimentais e por simulações numéricas. Estes tipos de investigações, apesar de conduzir à compreensão dos processos físicos, não pode conduzir a uma teoria fechada, a qual sempre estaria sob influência do modo de observação de cada experimentalista ou numericista. Esta discussão

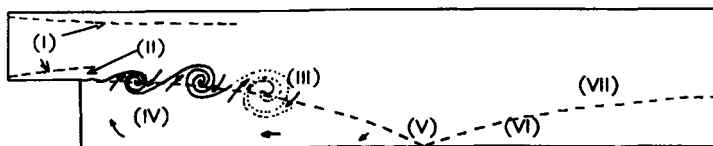


Figure 1.23: Características geométricas e físicas qualitativas do escoamento transicional sobre uma expansão brusca.

conduz a interpretações muito complexas e é apropriada para dar uma descrição fenomenológica. Detalhes sobre a teoria da estabilidade linear e vários exemplos de análise de escoamentos específicos através desta teoria podem ser encontrados nos livros de Schlichting (1968) e Drazin and Reid (1981).

1.5.1 Escoamentos Complexos

Transição sobre uma expansão brusca

Os escoamentos ditos complexos são os mais freqüentes na natureza e nas aplicações práticas e tecnológicas. Eles podem ser entendidos como sendo uma composição dos escoamentos de base apresentados nas seções precedentes. Do ponto de vista da transição, muito do que foi apresentado em matéria da natureza física, pode ser encontrado no interior deste tipo de escoamento.

O caso de uma expansão brusca em um canal retangular é aqui apresentado como exemplo deste tipo de escoamento. Esta geometria, ilustrada na Figura 1.23, é bastante simples de ser discretizada e, no entanto, propicia o aparecimento de um escoamento transicional de alta complexidade. Como ilustrado na Figura 1.23, nas regiões (I) tem-se escoamentos do tipo camada limite: sobre o degrau, ponto (II) a camada limite se descola e gera-se uma zona cizalhante (III) com a formação de instabilidades do tipo Kelvin-Helmholtz, as quais são submetidas ao efeito de confinamento e são transportadas em direção à região de recolamento da camada limite (V), região esta de grande complexidade devido ao choque das estruturas turbilhonares com a parede inferior do canal; em baixo da camada cizalhante têm-se uma região de escoamento recirculante interagindo com ela; após a região de recolamento encontra-se a região de redesenvolvimento da camada limite (VI) a qual interage com as estruturas turbilhonares que são transportadas para a saída do canal; finalmente, sobre tudo isto encontra-se a região de escoamento mais estável (VII) a qual não pode ser considerada como potencial devido às fortes instabilidades que são injetadas de forma intermitente no seu interior.

Simulações numéricas bidimensionais e tridimensionais têm sido realizadas para analisar a natureza física deste problema, por exemplo Silveira-Neto (1991). Na Figura 1.24 mostra-se os resultados de uma simulação bidimensional, evidenciando o processo de transição. Visualiza-se o escoamento com a ajuda de um colorante passivo numérico. Uma seqüência temporal é apresentada. Observa-se no lado esquerdo desta figura, a formação das primeiras oscilações, seguidas do aparecimento de instabilidades de Kelvin-Helmholtz e de aparelhamentos turbilhonares, de forma similar ao que foi apresentado para uma camada de mistura em desenvolvimento espacial. Trata-se, neste caso de um degrau alto, para o qual a parede inferior exerce pouca influência sobre as instabilidades.

Na Figura 1.25 apresenta-se resultados de uma simulação tridimensional do escoamento

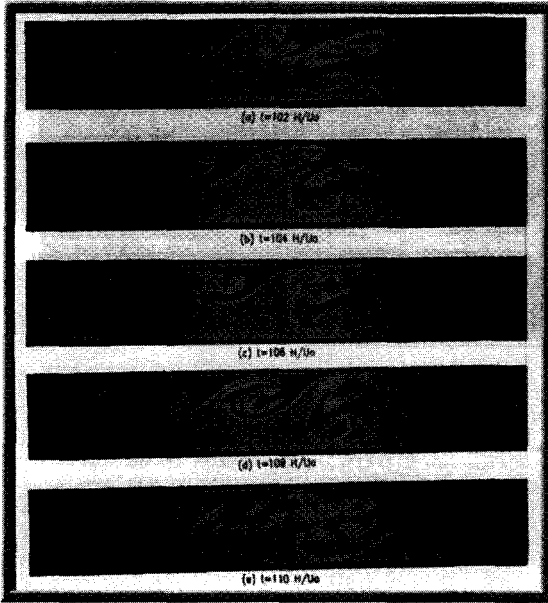


Figure 1.24: Escoamento bidimensional à jusante de uma expansão brusca.

sobre esta geometria. Na Figura 1.25 (a) visualiza-se, através de uma vista inclinada do canal de saída, após a expansão, isosuperfícies de vorticidade e na Figura 1.25 (b) visualiza-se as isosuperfícies do campo de pressão, sendo neste caso uma vista superior do canal. Percebe-se o processo de transição em ambas as figuras, com a presença de instabilidades primárias de Kelvin-Helmholtz, bidimensionais inicialmente, as quais se tornam fortemente tridimensionais quando são transportadas para a direita da figura. Visualiza-se claramente a presença dos turbilhões contrarrotativos longitudinais induzidos aparentemente pelas estruturas primárias já descritas. A intensa ação mecânica destas estruturas filamentosas longitudinais sobre as estruturas primárias pode ser percebida na Figura 1.25 (b). Reconhece-se a importância delas no processo de transição e aparecimento da turbulência num estágio posterior não mostrado nesta figura. Esta configuração refere-se a um degrau pequeno e portanto a parede inferior exerce uma forte influência sobre o processo de transição.

(a)



(b)



Figure 1.25: Escoamento tridimensional sobre uma expansão brusca.

Retomando o escoamento apresentado na Figura 1.24, agora tridimensional, obtém-se o que se mostra na Figura 1.26, numa vista superior inclinada do escoamento. Focaliza-se o escoamento logo após a expansão brusca de forma a se visualizar os detalhes das instabilidades tridimensionais formadas. Claramente se vê os filamentos de cores alternadas as quais representam valores negativos e positivos de mesmo valor em módulo da vorticidade longitudinal. Fica mais evidente que se trata de filamentos de vórtices contrarrotativos. Para tornar mais clara esta constatação, na Figura 1.27 visualiza-se um corte vertical da Figura 1.26 sobre os turbilhões longitudinais. Traçou-se o campo de velocidade e os vetores mostram a existência de estruturas turbilhonares na forma de cogumelos assim como os núcleos dos turbilhões longitudinais.

1.6 Exemplos de Escoamentos Turbulentos

1.6.1 Desenvolvimento da turbulência

A turbulência, na maioria dos casos conhecidos, é iniciada por uma das instabilidades descritas nos itens precedentes. O desenvolvimento destas instabilidades é relativamente bem compreendido. No entanto, pouco se compreende sobre o que leva, à partir destas instabilidades, os escoamentos a se degenerarem em turbulência completamente desenvolvida. Reconhece-se também que os escoamentos turbulentos são imprevisíveis no sentido de que não se pode calcular precisamente o campo de velocidade $\vec{v} = (\vec{x}, t)$ devido à dificuldade de fornecer, sem erros, as condições iniciais do escoamento. No entanto o campo médio $\vec{v} = (\vec{x}, t)$ é calculável. É sabido também que cada nova instabilidade que se desenvolve no seio de um escoamento introduz

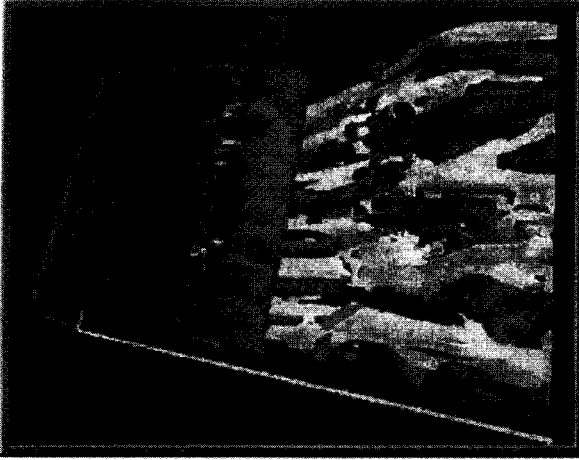


Figure 1.26: Detalhe dos turbilhões longitudinais contrarotativos.

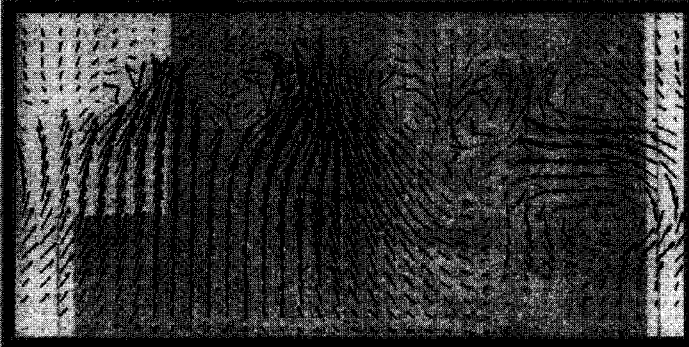


Figure 1.27: Corte vertical sobre os turbilhões longitudinais da Figura 26; campo de velocidade.

uma nova frequência no espectro de energia e que cada nova frequência deve ser diferente das demais frequências presentes pois que elas se desenvolvem a partir de perturbações randômicas. Isto leva à concluir novamente que os escoamentos turbulentos são caracterizados por espectros largos de energia.

1.6.2 Turbulência homogênea e isotrópica

Muitas são as investigações teóricas desenvolvidas sobre o tema turbulência homogênea e isotrópica: as propriedades estatísticas do escoamento são invariantes por translação (homogeneidade) e invariantes por rotação (isotropia). Uma aproximação experimental para este tipo de turbulência é o caso do escoamento gerado atrás de uma tela fina. Sendo assim, as constatações teóricas podem ser comprovadas experimentalmente. As teorias advindas para este tipo de escoamento conduzem a várias predições, não só no que se refere aos espectros de potência mas também às constantes de difusão as quais governam as taxas de transporte de quantidade de movimento, calor e escalares passivos e ativos, no interior de escoamentos turbulentos. É dentro deste contexto que foi desenvolvida a teoria de Kolmogorov, a qual não será abordada no contexto deste capítulo.

1.6.3 Escoamentos cizalhantes

As instabilidades típicas dos escoamentos cizalhantes foram descritas anteriormente. Estes escoamentos, a título de organizar as idéias, são: camada de mistura espacial; camada de mistura temporal; jatos e esteiras. Este grupo de escoamentos não se enquadram na categoria do item (1.5.2) devido a característica de cisalhamento médio, diante da qual as propriedades de invariância estatística não são obedecidas. Por outro lado, como foi visualizado anteriormente, estes escoamentos são caracterizados pela presença das chamadas estruturas coerentes, as quais apresentam um importante grau de organização local, o que promove anisotropia e inhomogeneidade do escoamento. O termo coerente se refere ao fato que elas guardam uma geometria bem definida por um tempo superior ao tempo característico de giro delas mesmas. As figuras apresentadas nos itens precedentes ilustram estes argumentos.

1.6.4 Escoamentos turbulentos parietais

Um escoamento parietal acontece sempre que se tem um corpo submerso no escoamento. Junto à parede do mesmo, devido à ação da viscosidade, aparece uma zona rotacional. Nesta região, as primeiras instabilidades a surgirem, são do tipo ondas de Tolmien-Schlichting, as quais dão origem a outra família de instabilidades chamadas grampo de cabelo que desencadeiam os famosos bursting ou explosões turbulentas e finalmente a degeneração em turbulência desenvolvida. Este cenário é típico de camadas limite sobre placas planas ou com curvaturas convexas. Caso se tenha curvaturas côncavas podem aparecer também as instabilidades de Goertler, como se ilustra na Figura 1.28.

Estas instabilidades têm natureza semelhante àquelas de Taylor-Couette, geradas pelos efeitos de forças centrífugas. A compreensão do processo de transição à turbulência e a natureza física do seu estado completamente turbulento é de elevada importância prática devido ao fato que no regime turbulento os esforços de arraste aumentam significativamente.

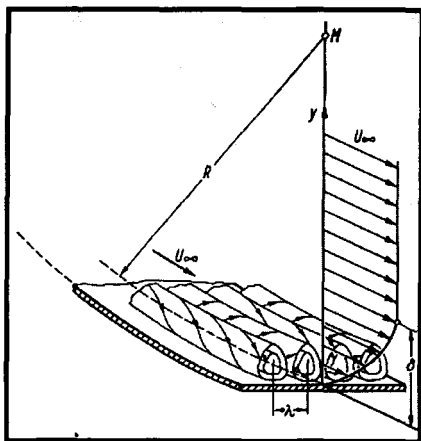


Figure 1.28: Instabilidades de Goertler formadas no interior de uma camada limite sobre um corpo curvo côncavo.

1.6.5 escoamentos turbulentos confinados

Esta família é composta pelos escoamentos no interior de tubos e dutos. Eles podem ser também entendidos como problemas de camada limite, considerando que, também aqui, são os efeitos viscosos junto às paredes internas que governa a transição à turbulência e a natureza do escoamento turbulento. Eles são também muito importantes para os processos de bombeamento e problemas de termo-hidráulica em geral, onde os efeitos de atrito e de transferência de calor vão determinar a potência de bombeamento e a eficiência de transporte de energia térmica em equipamentos diversos.

1.6.6 escoamentos turbulentos complexos

Um exemplo acadêmico deste tipo de escoamento já foi apresentado: escoamento sobre uma expansão brusca. A maioria dos escoamentos práticos e industriais podem ser classificados como complexos devido ao fato que as geometrias envolvidas também o são. Via de regra ter-se-á a composição de jatos, esteiras, camadas de mistura, camada limite, descolamento, recolamento, efeitos de rotação, efeitos de estratificação, efeitos de curvatura e interações diversas entre estes tipos de base.

1.7 Turbulência e Caos

Pequenas causas, grandes efeitos. Uma só linha errada nos programas computacionais utilizados na bolsa de Wall Street e se assistirá um onda de instabilidade financeira mundial. Assim se exprimem aqueles que se interessam por uma das mais importantes disciplinas da atualidade: a teoria do caos. Por muito tempo a ciência funcionou ao abrigo da satisfação geral e confortável dos fenômenos previsíveis e das equações lineares. Conhecendo-se a vazão da torneira e o volume da banheira determina-se rapidamente o tempo necessário para enchê-la. Conhecendo-se o peso do satélite e a altura da órbita desejada, calcula-se o empuxo necessário ao lançador

para executar a tarefa de colocá-lo em órbita. Conhecendo-se o número de famintos espalhados pelo imenso Brasil calcula-se a quantidade de alimento necessária para saciá-los por um período determinado. Mas o que dizer do comportamento dinâmico das bolsas mundiais nos dias que seguiriam a dita libertação do Koweit em 1991? O que dizer sobre o que acontecerá com a população de regiões específicas do nordeste brasileiro em função do êxodo rural que têm acontecido nas últimas décadas?

Nada! A ciência tradicional muito pouco pode afirmar sobre os fenômenos naturais complexos. No entanto, falando em fenômenos complexos, nós estamos mergulhados neles e apenas se conhece isto! No entanto a disciplina do caos não é nada nova. Ainda 1889 que Henri Poincaré já tinha descoberto a noção de caos determinista no contexto de um problema de mecânica celeste a três corpos. Ele se afastou de suas equações, considerando os poucos recursos de cálculo daquela época. Hoje, no entanto, o progresso das ciências matemáticas e dos extraordinários recursos de cálculo apontam para um novo horizonte.

Os escoamentos turbulentos têm sido vistos como um dos mais importantes e menos compreendidos domínios da dinâmica dos fluidos. Tem sido verificado também que muitos sistemas dinâmicos com menor número de graus de liberdade apresentam características semelhantes aos movimentos turbulentos. Alguns destes sistemas são muito mais simples que os escoamentos e a compreensão do seus comportamentos pode ajudar a entender sistemas cada vez mais complexos.

A palavra turbulência têm sido intimamente associada aos escoamentos, apesar de que isto não é verdadeiro. Como já ressaltado, qualquer sistema dinâmico que se caracterize por um número de graus de liberdade suficientemente elevado pode atingir o regime de turbulência. Observa-se que todos os sistemas dinâmicos são governados matematicamente por equações determinísticas. Observa-se ainda que um sistema dinâmico com baixo grau de liberdade não pode atingir tal regime turbulento, mas podem atingir, no entanto, comportamentos altamente imprevisíveis. Neste sentido fala-se então de caos determinístico.

Para compreender melhor este importante tópico, será feita uma digressão dos sistemas fluidos e alguns exemplos de sistemas dinâmicos não fluidos serão discutidos.

1.7.1 Sistema dinâmico tipo pêndulo simples

Supõe-se um pêndulo simples com um grau de liberdade: rotação circunferencial, como ilustrado na Figura 1.29. Considere-se inicialmente uma situação em que se tenha os efeitos dissipativos presentes. Posiciona-se o pêndulo no ponto C e libera-o. Neste momento sua aceleração é máxima e sua velocidade é nula. Ao passar pelo ponto B sua aceleração é nula e sua velocidade é máxima. Ao se dirigir ao ponto A o comportamento se inverte até se atingir o ponto de equilíbrio A, tendo, no entanto, menor nível de energia potencial que no ponto C, devido aos efeitos dissipativos. A cada ciclo o pêndulo tem sua energia inicial dissipada, até atingir o repouso no ponto B. Define-se o chamado espaço das fases como sendo composto por duas variáveis, a aceleração e a velocidade. O comportamento deste sistema está plotado no espaço das fases na Figura 1.30 (a).

O ponto para o qual o sistema converge é um ponto de equilíbrio. Neste caso particular ele corresponde ao repouso, o que não constitui uma regra e sim uma particularidade.

Para o caso em que o sistema ilustrado não está submetido a efeitos dissipativos, ou se ele é movido por uma força externa o equilíbrio será representado por um círculo limite para o qual o sistema deve convergir, como ilustrado na Figura 1.30 (b).

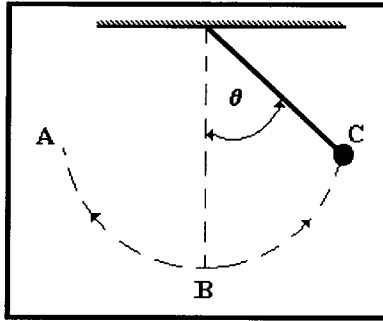


Figure 1.29: Sistema dinâmico tipo pêndulo simples.

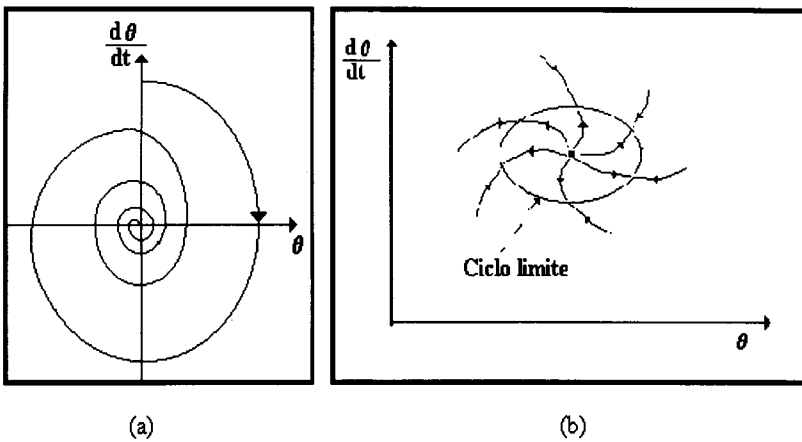


Figure 1.30: Representação dinâmica no espaço de fases.

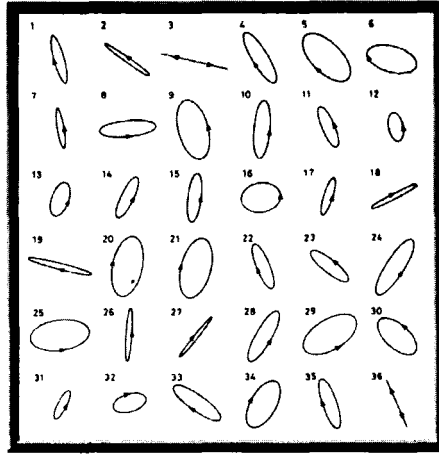


Figure 1.31: Comportamento caótico das órbitas de um pêndulo esférico (retirado de Tritton, 1988).

1.7.2 Movimento caótico de um pêndulo

O conceito de movimento caótico é algo bastante abstrato. Assim, será utilizado aqui um sistema dinâmico simples, que, mesmo não sendo um sistema fluido, é um arranjo que exhibe este tipo de comportamento. Supor o pêndulo do caso precedente, porém com três graus de liberdade: movimento circular e movimento vertical. Desta forma a esfera do pêndulo pode percorrer uma esfera de raio variável. Trata-se de um arranjo conhecido como um pêndulo esférico ou cônico. O ponto de apoio do pêndulo pode oscilar segundo uma senoide, com uma amplitude pequena comparada com o comprimento do pêndulo. Si a frequência f de forçagem está próxima da frequência natural do sistema, obviamente as oscilações se amplificarão e darão origem a um regime instável. Como resultado, existe uma faixa de frequências de excitação para as quais a esfera do pêndulo orbita no interior da casca esférica de raio máximo ao invés de percorrer um arco sobre esta esfera.

É este movimento orbital que exhibe o fenômeno com o qual o estudo está relacionado. Experimentos já realizados mostram que o sistema exhibe um comportamento surpreendente na forma de oscilações, à medida que a frequência de excitação é alterada. É curioso observar que quando a frequência de excitação é levemente superior que a frequência natural o sistema adquire um comportamento caótico, enquanto que se ela é levemente inferior, isto não acontece. Na Figura 1.31 mostra-se um conjunto de 36 órbitas assumidas pelo sistema em tempos diferentes. Ressalta-se que é totalmente imprevisível qual delas o sistema assumirá em um dado tempo futuro, apesar deste sistema ser regido por equações determinísticas. Isto mostra a extrema sensibilidade deste sistema as perturbações injetadas. Neste sentido diz-se que o sistema evoluiu para um regime de caos determinístico. Mais detalhes sobre este estudo pode ser encontrado em Tritton (1988).

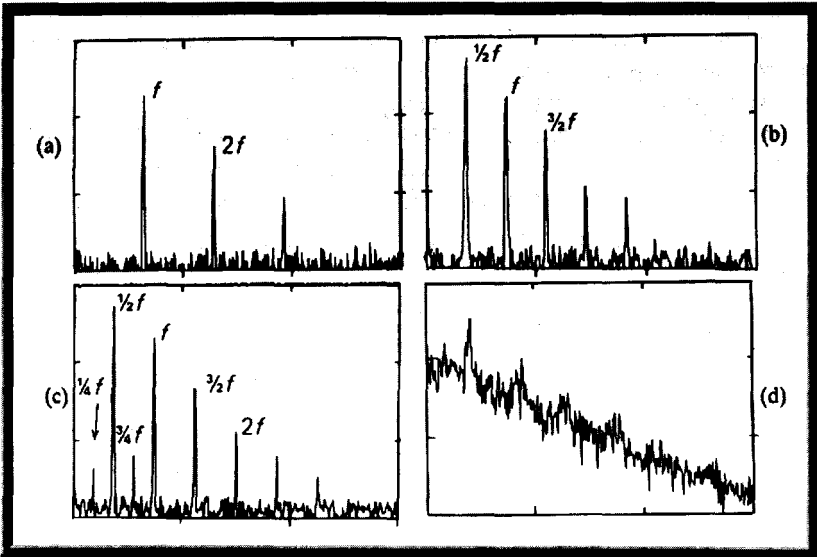


Figure 1.32: Espectro de potência da velocidade em uma experiência de Bénard, mostrando o processo de multiplicação de freqüências e de intermitência: (a) $Ra/Ra_c = 21,0$; (b) $Ra/Ra_c = 26,0$; (c) $Ra/Ra_c = 27,0$ e (d) $Ra/Ra_c = 36,9$ (retirado de Tritton, 1988).

1.7.3 Caos na dinâmica dos fluidos

Fica evidente, com base nos argumentos apresentados nas seções precedentes, que um mesmo sistema dinâmico pode tanto estar em regime caótico quanto em regime ordenado para diferentes valores do parâmetro de forçagem. O sistema percorre então um caminho (transiciona) para o caos à medida que se varia este parâmetro. Os processos de transição para o caos e transição para a turbulência serão comparados qualitativamente.

A primeira razão pela qual a teoria do caos pode ser importante para a dinâmica dos fluidos é a turbulência. Deve-se enfatizar que existem algumas formas que um escoamento pode exibir um comportamento caótico. A questão de quando um escoamento torna-se turbulento pode ser diferente de quando ele se torna caótico. Um escoamento de Taylor-Couette, por exemplo, pode adquirir várias combinações de regimes: laminar, caótico laminar e turbulento caótico. Seguindo as idéias modernas sobre caos, pode-se considerar os movimentos turbulentos como exemplos de caos determinístico, desde que se admita que os mesmos sejam governados pelas equações determinísticas de Navier-Stokes.

Duas configurações mais estudadas neste tipo de transição tem sido o caso de convecção de Bénard entre duas placas planas horizontais e o escoamento de Taylor-Couette entre dois cilindros rotativos concêntricos. No caso da convecção de Bénard duas rotas de transição são identificadas: rota de multiplicação freqüências e rota de intermitência. A Figura 1.32 ilustra os espectros de potência para diferentes valores do número de Rayleigh. Observa-se nas Figuras 1.32 (a) e (b) que existe uma multiplicação de freqüências, passando pela Figura 1.32 (c) onde se observa a presença de intermitência através dos níveis de energia das diversas freqüências. Finalmente se observa na Figura 1.32 (d) um espectro de energia contínuo, mostrando a presença de uma banda de freqüências e caracterizando um estado caótico e turbulento do escoamento.

Observa-se que pequenas mudanças na bancada pode promover o aparecimento de uma rota diferente para o caos. As razões não são bem conhecidas. Fica ainda uma questão de difícil

resposta: pode uma rota standard para o caos ser identificada na transição para a turbulência?

Uma última questão a ser abordada aqui é a possibilidade de retorno à ordem ou processo de relaminarização de um escoamento. Sob alguns efeitos estabilizadores os escoamentos podem ser relaminarizados e retornar à ordem. Um exemplo é o caso de reestabilização de escoamentos turbulentos quando submetidos a fortes efeitos de estratificação estável em densidade. Os efeitos de rotação assim como de compressibilidade exercem um papel semelhante.

1.8 A visão determinística e a visão estatística da turbulência

A turbulência é um regime de operação de um sistema dinâmico de grande complexidade. Muito já se compreende sobre ele mas, sem dúvida, resta ainda muito mais a compreender. Segundo a visão já adquirida, tudo indica que a turbulência é um fenômeno determinístico e como tal ela é, na sua essência, prediscível. A questão de imprevisibilidade já discutida está associada à impossibilidades científicas ligadas à falta de capacidade de se fornecer corretamente as condições iniciais, aos métodos de solução das equações governantes e aos recursos computacionais disponíveis. De fato, pequeníssimos erros nas condições iniciais serão amplificados exponencialmente pelas interações não lineares gerando instabilidades que são dependentes destes ruídos iniciais. Qualquer variação nas condições iniciais determinarão estados completamente diferentes nas previsões. Um dos primeiros cientistas a perceber este fato foi Henri Poincaré, o qual descobriu no fim do século passado que um sistema simples como o sistema sol-terra-lua interagindo gravitacionalmente, pode ter um comportamento imprevisível ou caótico. Este é, no entanto, um ponto de vista determinista pois trata-se de um sistema dinâmico regido por equações deterministas. É neste sentido que Einstein diz que "Deus não decide por jogo de dados" pois certamente Ele conhece em todos os detalhes as ínfimas perturbações que vibram no Universo.

Um exemplo fantástico de sistema caótico é o comportamento dinâmico da nossa atmosfera: desafio colossal é a previsão meteorológica do nosso clima. Surpreendente são também os avanços conseguidos neste domínio, graças ao aumento de precisão nas medidas de estações experimentais, as quais são fornecidas a computadores cada vez mais potentes que giram códigos computacionais cada dia mais representativos da física destes escoamentos, têm permitido a previsão do comportamento climático com bom nível de confiabilidade para até 5 dias futuros.

Felizmente, para a maior parte das aplicações da engenharia e mesmo para a busca da compreensão fenomenológica dos escoamentos, a previsão exata da posição e da fase de uma estrutura turbilhonar não é tão indispensável como se pode imaginar. Tão importante é se ter uma boa predição do comportamento estatístico de um sistema dinâmico. Isto significa que mesmo que não se possa reproduzir exatamente uma experiência realizada em um laboratório, sabe-se que se pode reproduzi-la no que se refere ao seu comportamento estatístico. Por exemplo, os turbilhões reproduzidos numa experiência numérica (solução numérica das equações governantes) não correspondem exatamente ao turbilhões observados numa experiência de laboratório, no que se refere à sua posição no espaço e no tempo, por mais próximas que sejam as condições iniciais e limites. No entanto, quando se extrai as informações estatísticas destes turbilhões teóricos obtém-se normalmente excelentes concordâncias com a estatística experimental. Outro fato também importante é que os fenômenos físicos são também corretamente representados, o que permite interpretações e compreensão a partir de resultados teóricos.

Fica então as idéias de que os comportamentos dos sistemas dinâmicos podem ser im-

prediscíveis mesmo sendo eles regidos por equações determinísticas. De fato, não é possível fornecer exatamente as mesmas condições iniciais presentes nos experimentos. Por outro lado o comportamento estatístico dos sistemas dinâmicos independem destas perturbações iniciais para a maior parte das aplicações práticas. As ferramentas estatísticas de modelagem da turbulência são portanto indispensáveis e permitem também auxiliar não só na questão da imprevisibilidade como também na questão crucial da pequena potência computacional disponível para se resolver, de forma estatística, os escoamentos turbulentos. Na unidade seguinte será introduzido o problema de fechamento da turbulência.

1.9 Comentários sobre o problema de fechamento e a modelagem da turbulência

Como foi comentado no início deste documento, uma das características mais importantes de um escoamento turbulento é a multiplicidade de escalas que o caracteriza. Para ilustrar esta afirmação, mostra-se na Figura 1.33 o escoamento em transição à jusante de uma bolha que sobe em um meio líquido. Nesta figura observa-se a formação de duas recirculações simétricas de tamanhos característicos da ordem do tamanho físico da bolha. Observa-se que estas recirculações são nitidamente compostas de instabilidades de Kelvin-Helmholtz. Se a fotografia apresentasse maior nível de detalhe poder-se-ia detectar que estas menores instabilidades já apresentariam sinais de novas instabilidades sobre si mesmas, dando uma idéia física do processo de multiplicidade de escalas.

Esta multiplicidade de escalas representa também o número de graus de liberdade de um escoamento turbulento, o qual pode ser estimado utilizando-se o número de Reynolds, via equação abaixo:

$$ngl = \left(\frac{L}{l_d}\right)^3 = Re_L^{9/4}. \quad (1.24)$$

Percebe-se com esta equação que quanto maior o número de Reynolds maior será o número de graus de liberdade do escoamento. Na Figura 1.34 mostra-se um espectro de energia de um escoamento turbulento a alto número de Reynolds obtido em um túnel de vento.

Observa-se que este espectro está representado em escalas log-log e que a sua largura é de cinco décadas aproximadamente. Este resultado é atualmente o record experimental em túneis de vento.

Para exemplificar o cálculo do Ngl de escoamentos turbulentos, dois casos extremos serão tomados: escoamento atmosféricos e escoamento à jusante de uma grelha. O primeiro caso está ilustrado na Figura 1.35, onde uma estrutura turbilhonar atmosférica pode ser visualizada.

Para o cálculo do Ngl de um escoamento, tomar-se-á alguns dados típicos: $l \approx 500km$ (escala de comprimento característica) e $\eta \approx 1mm$ (menor escala da turbulência, escala dissipativa de Kolmogorov). Com estas duas escalas calcula-se o $Ngl \approx 10^{24}$. Sabendo-se que, a análise teórica de um problema passa pela solução de sistemas lineares, compostos por um número de equações igual ao Ngl , vê-se que a solução teórica ou numérica do problema acima está fora das possibilidades atuais, mesmo com os supercomputadores existentes.

Um outro exemplo pode ser visualizado na Figura 1.36 onde se mostra um escoamento turbulento à jusante de uma grelha. Visualiza-se as estruturas turbilhonares características.



Figure 1.33: Escoamento em transição em torno de uma bolha (Figura retirada de Couder et al. 1989).

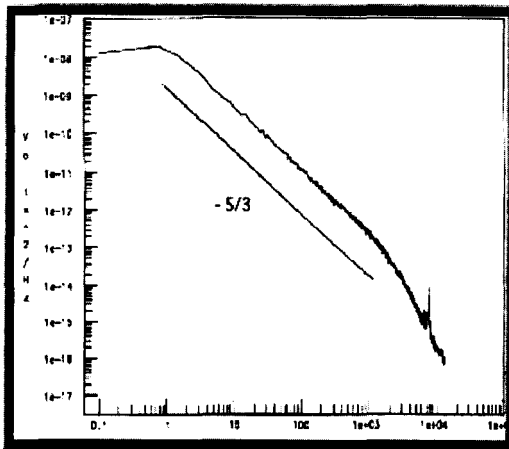


Figure 1.34: Espectro de energia cinética turbulenta de um escoamento a alto número de Reynolds (Retirado de Lesieur, 1994).



Figure 1.35: Turbilhão atmosférico (Figura retirada de Lesieur, 1994).

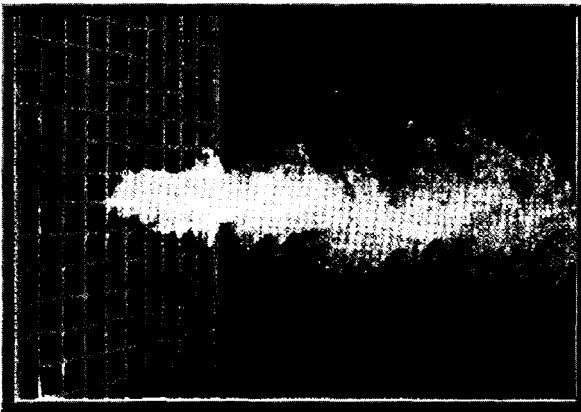


Figure 1.36: Escoamento turbulento à jusante de uma grelha (Figura retirada de Lesieur, 1994).

Para o cálculo do N_{gl} , novamente tomar-se-á alguns dados típicos: $l = 4mm$ (largura dos passos da grelha); $U = 10m/s$ (velocidade típica); $\nu = 10^{-5}m^2/s$ (viscosidade cinemática). Com estas informações tem-se $Re = 4.000$, o que fornece $N_{gl} = 1,3 \times 10^8$. Verifica-se que, mesmo neste caso a um modesto número de Reynolds, o cálculo explícito de todos os graus de liberdade não é possível. Seria necessário resolver sistemas lineares de $1,0 \times 10^8$ equações simultâneas. A maior parte dos problemas práticos de engenharia são caracterizados por números de Reynolds que se localizam nesta faixa. Surge então a questão: como resolver esta classe de problemas?

Reynolds (1894) iniciou uma reflexão sobre este assunto e propôs um processo de decomposição das equações governantes de tal forma a se analisar o comportamento médio do escoamento e modelar suas flutuações. Esta decomposição proposta conduz ao chamado problema de fechamento da turbulência e deu origem um vasto domínio de pesquisa e desenvolvimento, denominado problema de fechamento e modelagem da turbulência. Em outra unidade este problema será investigado e serão apresentadas duas linhas de modelagem: modelagem estatística clássica (simulação numérica do comportamento médio dos escoamentos turbulentos) e modelagem sub-malha (simulação numérica de grandes escalas, onde as grandes estruturas são resolvidas explicitamente e as menores estruturas são modeladas).

1.10 Referências

- Batchelor, G. K. 1953. The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press, Cambridge.
- Boussinesq, J. 1877. Theorie de lécoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section, 2 vols., Fautiers-Villars, Paris.
- Brown, G. L. and Roshko, A., 1974, On density effects and large structure in turbulent mixing layers. J. Fluid Mech., 64, pp. 775-816.
- Cantwell, B. J., 1981, Ann. Rev. Fluid Mech., 13, p. 457.
- Cantwell, B. J., Coles, D. and Dimotakis, P., 1978, J. Fluid Mech., 87, pp. 641-672.
- Coles, D., 1965, J. Fluid Mechanics, 21, p. 385.
- Couder, Y., Chomaz, J. M. and Rabaud, M, 1989, On the hydrodynamics of soap films, Physica D 37, pp. 384-405.
- Drazin, P. G. and Reid, W. H., 1981, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press.
- Faber, T. E., Fluid Dynamics for Physicists, Cambridge University Press.
- Heisenberg, W. 1948. On the theory of statistical and isotropic turbulence. Proc. R. Soc. London, Ser. A 195, pp. 402-406.
- Hussain, A. K. M. F., 1983, Phys. Fluids, 26, p. 2816.
- Kaul, U. K., 1988, Do large structures control their own growth in a mixing layer? An assessment, J. Fluid Mech., 190, pp. 427-450.

- Klebanoff, P. S., Tidstrom, K. D. and Sargent, L. H., 1962, The three dimensional nature of boundary layer instability, *J. Fluid Mech.*, 12, pp. 1-34.
- Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. and Runstadler, P. W., 1967, The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, 30, pp. 741-773.
- Kolmogorov, A. N. 1941. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 30, pp. 299-303.
- Laufer, J., 1950, Some recent measurements in a two-dimensional turbulent channel, *J. Aeronaut. Sci.*, 17, pp. 227-287.
- Lesieur, M., 1994, *La turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble, France.
- Millionschikov, M. 1939. Decay of homogeneous isotropic turbulence in a viscous incompressible fluid. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 22, pp. 236-240.
- Millionschikov, M. 1941. On the theory of homogeneous isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 32, pp. 611-614.
- Obukov, A. M. 1941, Energy distribution in the spectrum of a turbulent flow. *Izvestya AN SSR, Ser. geogr. geofiz.*, N. 4-5, pp. 453-466.
- Orr, W. M. F., 1907. The stability or instability of the steady motions of a liquid, *Proc. R. Irish Acad. A* 27, pp. 9-27 e 69-138.
- Prandtl, L. 1925. Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *Z. and. Math. Mech.* 5, pp. 136-137.
- Rayleigh, Lord. 1978. On the instability of jets. *Proc. London Math. Soc.* 10, 4-13, Scientific papers, Cambridge University Press, Vol.1, pp. 361-371.
- Rayleigh, Lord. 1980. On the stability or instability of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.* 11, 57-70, Scientific papers, Cambridge University Press, Vol.1, pp. 474-487.
- Reynolds, O. 1883. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans. R. Soc., London* 174, pp. 935-982.
- Reynolds, O. 1884. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc., London* 186, pp. 123-161.
- Schlichting, H., 1933, Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math-phys. K.*, 1, pp. 181-208.
- Schlichting, H., 1935, Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattengrenzschicht. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math-phys. K.*, 1, pp. 14-78.
- Schlichting, H., 1968, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, Inc.

- Schubauer, G. B. and Skramstad, H. K., 1947, Laminar Boundary layer oscillations and stability of laminar flow. *Journal Aeronaut. Sci.*, 14, pp. 69-78.
- Silveira-Neto, A., 1991, Simulation Numérique des Grandes Echelles d'un Ecoulemento Turbulent Decollé en aval d'une Marche, Tese de doutorado do INPG-France.
- Sommerfeld, A., 1908, Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklarun der turbulenten Flus-sigkeitsbewegung. *Proceedings of the fourth international congress on mathematicians, Roma*, Vol. III, pp. 116-124.
- Taylor, G. I. 1915, Eddy motion in the atmosphere. *Phils. Trans. R. Soc. London, Ser. A* 215, pp. 1-26.
- Tollmien, W., 1935. Ein allgemeines Kriterium der Instabilitat laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen. Math-phys. Kl.*, 50, pp. 79-114.
- Townsend , A. A., 1976. *The structure of turbulent shear flow*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Tritton. D. J., 1988, *Physical Fluid Dynamics*, Claredon Press, Oxford.
- Urbain, G., 1997, Large-Eddy Simulation of Turbulent Jets, *Comunication Privée*.
- Van Dyke, M., 1982, *An album of luid motion*, Parabolic Press, Stanford.

Capítulo 2

Equações do Movimento e Resultados Assintóticos Aplicados à Teoria de Camada Limite

Atila P. Silva Freire
Programa de Engenharia Mecânica (COPPE/UFRJ)
C.P. 68503, 21945-970, Rio de Janeiro, Brasil

e Daniel O. A. Cruz
Departamento de Engenharia Mecânica (UFPA)
Belém, Brasil

2.1 As equações do movimento para um escoamento turbulento; o tensor de Reynolds

2.1.1 O conceito de média de Reynolds

O capítulo introdutório inicial deixou claro ao leitor que a caracterização da turbulência não é fácil. Neste capítulo, não intencionamos repetir todos os conceitos discutidos anteriormente. Nosso objetivo principal é deduzir as equações do movimento para um escoamento turbulento de acordo com o procedimento clássico de Reynolds(1895).

Lembremos que um escoamento turbulento é caracterizado por violentas flutuações. Este fato sugere a dificuldade de se obter uma completa descrição do escoamento. Para muitos dos fenômenos de interesse, entretanto, frequentemente é suficiente se conhecer o valor médio das variáveis de interesse. Para os escoamentos turbulentos, estas médias podem ser definidas com respeito ao tempo ou ao espaço.

Escrevamos o valor instantâneo da velocidade como

$$U = \bar{U} + u \quad (2.1)$$

onde a barra denota um valor médio, e, portanto, u representa a flutuação instantânea, de modo que $\bar{u} = 0$.

Com a passagem da média, toda informação sobre a violência das flutuações é perdida. Para recuperar esta informação definimos a intensidade das flutuações turbulentas como

$$\sigma = \sqrt{\overline{u^2}}. \quad (2.2)$$

A intensidade relativa pode ser definida como

$$IT = \frac{\sigma}{\bar{U}}. \quad (2.3)$$

As médias indicadas acima podem ser tomadas de vários modos. Se o escoamento é quase estacionário, médias com relação ao tempo podem ser usadas. No caso da turbulência homogênea, médias com relação ao espaço podem ser tomadas. Para outros casos, pode ser que as médias tenham que ser tomadas sobre um grande número de experimentos que possuam as mesmas condições iniciais e de contorno; temos então o chamado *valor esperado* ou *esperança matemática* da variável.

Os três métodos de tomada da média descritos acima podem ser expressos matematicamente da seguinte forma:

Média temporal para uma turbulência estacionária:

$$\bar{U}^t(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U(x_0, t) dt. \quad (2.4)$$

Média espacial para a turbulência homogênea:

$$\bar{U}^s(t_0) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X U(x, t_0) dx. \quad (2.5)$$

Valor esperado para uma repetição de N experimentos:

$$\bar{U}^e(x_0, t_0) = \frac{\sum_1^N U_n(x_0, t_0)}{N}. \quad (2.6)$$

O valor esperado pode também ser obtido por meio da função densidade de probabilidade, $f(U)$, através da expressão

$$\bar{U}^e(x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} U f(U) dU. \quad (2.7)$$

Para a turbulência estacionária e homogênea podemos esperar e considerar que os três processos de passagem da média levem ao mesmo resultado,

$$\bar{U}^t(x_0) = \bar{U}^s(t_0) = \bar{U}^e(x_0, t_0). \quad (2.8)$$

Este resultado é conhecido como a *hipótese ergótica*.

Os escoamentos reais não são estacionários nem tão pouco homogêneos; além disso, por razões práticas não podemos realizar a passagem da média com respeito ao tempo ou ao espaço para infinitos valores de T ou X . Neste caso, deve-se definir um intervalo adequado que represente bem o fenômeno em estudo, e a média será obtida para este intervalo de tempo.

Consideremos, por exemplo, o escoamento no interior de um túnel de vento. Este escoamento pode apresentar variações de baixa frequência provenientes do ventilador usado para sua geração. Portanto, se tomarmos T como um intervalo finito, este intervalo deve ser grande o suficiente quando comparado com a escala temporal da turbulência mas pequeno o suficiente para que flutuações de baixa frequência resultantes de artefatos externos sejam claramente notadas e caracterizadas. Na prática, a escolha de um T adequado frequentemente pode ser feita sem dificuldades. A Figura 2.1 apresenta um sinal obtido com o auxílio de um anemômetro de fio-quente instalado no interior de um túnel de vento de baixa intensidade turbulenta situado no Laboratório de Mecânica da Turbulência do COPPE/UFRJ. A curva superior representa o sinal diretamente medido a uma taxa de aquisição de 1000 Hz. A curva seguinte representa o mesmo sinal com todas as frequências superiores a 500 Hz filtradas. Na terceira curva, todas as frequências superiores a 100 Hz foram filtradas. Através de filtragens sucessivas pode-se chegar, portanto, a sinais cada vez mais suaves, que caracterizem bem o escoamento médio.

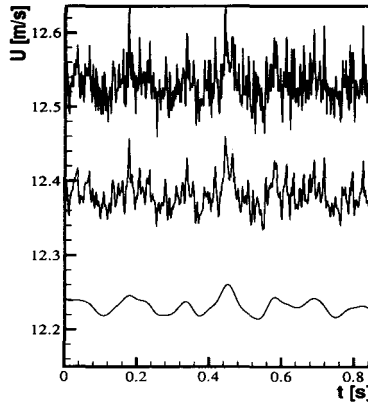


Figura 2.1: Flutuações no escoamento como medidas por um anemômetro de fio-quente(Menut, 1998).

Os valores encontrados após a passagem da média devem ser independentes da origem no tempo considerada.

Nas equações anteriores, a passagem da média foi indicada por uma barra. Este símbolo, portanto, indica um operador matemático linear. As seguintes propriedades valem para este operador:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A + a}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{a}} = \overline{A} + \overline{a}, \text{ ou seja, } \overline{\overline{a}} = 0. \quad (2.9)$$

$$\overline{\overline{A B}} = \overline{\overline{A}} \overline{\overline{B}} = \overline{A} \overline{B}. \quad (2.10)$$

$$\overline{\overline{A b}} = \overline{\overline{A}} \overline{\overline{b}} = \overline{A} \overline{b} = 0; \text{ pois } \overline{b} = 0. \quad (2.11)$$

Do mesmo modo,

$$\overline{\overline{B a}} = \overline{\overline{B}} \overline{\overline{a}} = \overline{B} \overline{a} = 0. \quad (2.12)$$

$$\overline{\overline{A B}} = \overline{\overline{(A + a)(B + b)}} = \overline{\overline{A B}} + \overline{\overline{A b}} + \overline{\overline{B a}} + \overline{\overline{a b}} = \overline{A B} + \overline{a b}. \quad (2.13)$$

2.1.2 As equações do movimento

No escoamentos turbulentos as equações do movimento valem em qualquer instante de tempo, e, portanto, também na média. De fato, um conjunto de equações para as quantidades médias, as equações de Reynolds, pode ser obtido diretamente das equações de Navier-Stokes pela aplicação do operador média temporal.

A técnica de passagem da média de Reynolds consiste de dois passos:

1. As variáveis que aparecem nas equações do movimento são decompostas em partes médias e flutuantes.
2. É aplicado o operador média temporal sobre um intervalo de tempo finito nos termos resultantes.

As grandezas que caracterizam o campo de um escoamento são, dentro do processo de decomposição escritas como

$$U_i = \bar{U}_i + u_i, \quad (2.14)$$

$$P = \bar{P} + p, \quad (2.15)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}, \quad (2.16)$$

$$T = \bar{T} + t, \quad (2.17)$$

onde U_i representa os componentes da velocidade nas i direções, P é a pressão, ρ é a massa específica e T a temperatura. As flutuações em massa específica foram denotadas por $\tilde{\rho}$.

A equação da continuidade para um escoamento compressível pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j) = 0. \quad (2.18)$$

Substituindo-se as expressões para ρ e U_j na equação (2.18), e após a passagem da média, obtém-se

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j)} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} U_j) \quad (2.19)$$

$$= \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \bar{U}_j) \quad (2.20)$$

$$= \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \bar{U}_j + \bar{\rho} \bar{u}_j). \quad (2.21)$$

Como resultado, observamos que a equação da continuidade não pode ser re-escrita simplesmente em termos de $\bar{\rho}$ e de \bar{U}_i , pois aparece um termo adicional que estabelece uma correlação entre as flutuações de massa específica e de velocidade.

A equação da continuidade para um escoamento turbulento fica então

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \bar{U}_j + \bar{\rho} \bar{u}_j) = 0. \quad (2.22)$$

A equação de Navier-Stokes, ou da conservação da taxa da quantidade de movimento linear, para um escoamento compressível pode ser escrita como

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\kappa - \frac{2}{3} \mu) \Theta. \quad (2.23)$$

onde f_i representa as forças de corpo na i -ésima direção, μ é a viscosidade molecular, κ representa uma viscosidade de volume e $\Theta = d_{jj} = \partial U_j / \partial x_j$. Para os fluidos newtonianos, $\kappa = 0$.

Para deduzir as equações médias do movimento diretamente das equações de Navier-Stokes, aplicamos o operador média na equação de conservação da taxa de variação da quantidade de movimento, que pode ser re-escrita como (termo a termo):

$$\overline{\rho \frac{\partial U_i}{\partial t}} = \overline{\rho} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{\rho' \frac{\partial u_i}{\partial t}}, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \overline{\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} &= \overline{\rho} \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho' u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{U}_j \overline{\rho' \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \\ &\quad + \overline{\rho' u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho' u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\overline{\rho f_i} = \overline{\rho} f_i, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p}, \quad (2.27)$$

$$\overline{\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right]} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right], \quad (2.28)$$

$$\frac{2}{3} \overline{\mu \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}} = \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i}. \quad (2.29)$$

A equação (2.23), então, ser escrita em sua forma completa como

$$\begin{aligned} \overline{\rho} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{\rho} \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} &= \overline{\rho} f_i + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i} \\ &\quad - \left[\overline{\rho' \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\rho' u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{U}_j \overline{\rho' \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\rho' u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho' u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para um escoamento incompressível, a equação da continuidade implica que

$$\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.31)$$

$$\rho = \overline{\rho}, \quad (2.32)$$

$$\overline{\rho'} = 0, \quad (2.33)$$

deste modo, a equação (2.30) pode ser re-escrita na forma

$$\rho \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \rho \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j^2} - \overline{\rho' u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.34)$$

Uma comparação da equação (2.30) com a equação de Navier-Stokes revela vários termos novos. Esses termos podem ser associados ao aumento de resistência à deformação provocado

pela turbulência do escoamento. Em outras palavras, a presença da turbulência manifesta-se num aumento aparente da viscosidade do fluido.

Agrupando os termos que surgiram com a aplicação do operador média temporal, obtemos

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = - \left[\overline{\tilde{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\tilde{\rho} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{U_j \tilde{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{\rho} u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{\tilde{\rho} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right]. \quad (2.35)$$

A tensão τ_{ji} é o resultado das interações entre as flutuações no campo de escoamento. Primeiramente introduzidas por Reynolds, elas definem os elementos do tensor de tensões “aparentes” ou “turbulentas” conhecidas como o tensor de Reynolds.

Combinando a equação (2.35) com a equação da continuidade, obtemos

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = - \left[\frac{\partial}{\partial t} \overline{\tilde{\rho} u_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tilde{\rho} u_i u_j} + \overline{U_i \tilde{\rho} u_j} + \overline{U_j \tilde{\rho} u_i} + \overline{\tilde{\rho} u_i u_j}) \right]; \quad (2.36)$$

deste modo, os efeitos da turbulência são determinados pelas correlações

$$\overline{u_i u_j}, \quad \overline{\tilde{\rho} u_i}, \quad \overline{\tilde{\rho} u_i u_j}. \quad (2.37)$$

Para o caso de um escoamento incompressível, o termo de tensão turbulenta é fornecido por

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = - \overline{\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}. \quad (2.38)$$

Observemos, porém, que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} = \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}. \quad (2.39)$$

Entretanto,

$$\overline{U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j}} = \overline{U_i \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j}} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}. \quad (2.40)$$

Da equação da continuidade para um escoamento incompressível, resulta que o termo da esquerda e o primeiro termo da direita da igualdade acima são nulos. Logo,

$$\overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0, \quad (2.41)$$

de modo que podemos escrever

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j}. \quad (2.42)$$

Desde que ρ é uma constante, $\tau_{ji} = -\rho \overline{u_i u_j}$; ou em forma tensorial

$$\tau_{ij} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u^2} & \overline{vu} & \overline{wu} \\ \overline{uv} & \overline{v^2} & \overline{vw} \\ \overline{uw} & \overline{vw} & \overline{w^2} \end{bmatrix}.$$

No tensor de Reynolds os elementos da diagonal representam os componentes de tensão normal. Os elementos fora da diagonal representam as tensões cisalhantes.

Os desenvolvimentos acima demonstram que os componentes da velocidade média de um escoamento turbulento satisfazem as mesmas equações que um escoamento laminar, exceto pelo fato de que as tensões laminares devem ser acrescidas de tensões adicionais fornecidas pelo tensor de Reynolds. Estas tensões são devidas às flutuações turbulentas, sendo obtidas pelos valores médios dos termos quadráticos dos componentes turbulentos. Como essas tensões são adicionadas ao termo viscoso das equações de Navier-Stokes e possuem influência semelhante sobre o escoamento, elas são chamadas de tensões turbulentas.

O processo de tomada da média faz, portanto, aparecerem correlações envolvendo flutuações de velocidade na equação do movimento médio. Estes novos termos são interpretados como uma tensão adicional ao movimento: uma tensão turbulenta. De fato, a equação do movimento médio, equação (2.30), é idêntica à equação de Navier-Stokes exceto pela inclusão dos termos de tensões turbulentas.

As variáveis independentes para o caso turbulento passam, portanto, a ser \overline{U}_i , \overline{P} e $\overline{u_i u_j}$, (caso incompressível). Isto faz com que nosso número de incógnitas seja superior ao número de equações disponíveis. Para resolver qualquer problema que envolva um escoamento turbulento é, então, necessário providenciar um novo conjunto de equações que relacione as grandezas médias às grandezas instantâneas. Este procedimento de obtenção de novas relações funcionais que completem a formulação do problema é chamado, em turbulência, de “problema do fechamento”.

O modo mais simples de se definir o problema é considerar que os fenômenos de transferência de quantidade de movimento molecular e turbulento se processem de modo análogo. Esta abordagem, proposta pioneiramente por Boussinesq em 1877, sugeria que a tensão turbulenta deveria estar relacionada ao gradiente local de velocidades do escoamento médio através de uma viscosidade associada às características do fluido, do escoamento e da geometria envolvida no problema sob consideração, ou seja,

$$\tau_t = \mu_t \frac{d\overline{U}}{dy}. \quad (2.43)$$

A viscosidade turbulenta, μ_t , deveria, portanto, imbutir em sua definição parâmetros que bem caracterizassem a turbulência através da representação do fluido, do escoamento médio e da geometria desejada.

2.1.3 A equação de transporte para os elementos do tensor de Reynolds

Em seções futuras dedicaremos bastante tempo ao problema de estabelecer relações funcionais entre as grandezas turbulentas desconhecidas que formam os elementos do tensor de Reynolds e os componentes médios do escoamento. Este problema é bastante complexo, podendo ser abordado de várias formas.

Uma possibilidade interessante é utilizar a própria equação de Navier-Stokes para obter equações de transporte que descrevam o comportamento desses elementos. De fato, por meio de manipulações algébricas, é possível se desenvolver equações exatas para os momentos de uma certa ordem que envolvam momentos de ordem superior.

Nos capítulos subsequentes, a modelagem dos termos turbulentos por técnicas relativamente simples que envolvam o conceito de viscosidade turbulenta será realizada. Modelos formados por equações algébricas ou por equações diferenciais serão desenvolvidos. Alguns desses modelos utilizarão a equação da energia cinética turbulenta. De fato, alguns modelos fazem uso de uma velocidade característica, u_c . Neste caso, a rota natural é se tomar $u_c = (K)^{1/2}$, onde K denota a energia cinética turbulenta. Deste modo, relaciona-se as flutuações a uma propriedade turbulenta inerente ao escoamento, a energia cinética turbulenta.

Para obtermos uma equação para os momentos de segunda ordem $\overline{u_i u_j}$, multipliquemos (2.30) por u_j e tiremos a média temporal de cada termo da equação resultante. A seguir adicionamos a esta equação uma outra idêntica a ela própria, mas com todos os índices i e j trocados. Com o auxílio da equação da continuidade, equação (2.22), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} = & - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right) \\ & + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho} \delta_{ik} \right. \\ & \left. \frac{\overline{p u_i}}{\rho} \delta_{jk} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} - \nu u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \nu u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) - \\ & \left(2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \nu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

a qual pode ser escrita de forma contracta como

$$\frac{D}{Dt} \overline{u_i u_j} = P_{ij} + \phi_{ij} + D_{ij} - \epsilon_{ij}. \quad (2.45)$$

O termo P_{ij} em (2.45) representa a taxa de criação de $\overline{u_i u_j}$ pela ação do escoamento médio sobre o campo turbulento. Apenas momentos de 2ª ordem e propriedades do escoamento médio aparecem neste termo de modo que eles são tratados de modo exato. As correlações que envolvem flutuações de pressão e de velocidade, ϕ_{ij} , resultam de dois processos: um processo puramente turbulento e outro dependente da taxa de deformação do campo médio de velocidade. Uma propriedade importante de ϕ_{ij} é que seu traço é zero, pois

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.46)$$

O termo, portanto, não faz qualquer contribuição para o nível global da turbulência, servindo tão somente para redistribuir energia entre os componentes de tensão normal.

O termo D_{ij} é facilmente reconhecido como sendo um termo difusivo. De fato, uma integração deste termo sobre o domínio mostra que nenhuma contribuição para o nível de turbulência é feita, mesmo sendo os valores locais de $\overline{u_i u_j}$ diferentes de zero. O efeito de D_{ij} é promover uma redistribuição espacial da tensão turbulenta. Os três últimos termos de D_{ij}

descrevem o transporte difusivo devido à efeitos moleculares. Na maioria dos escoamentos eles são desprezíveis.

O termo ϵ_{ij} representa a taxa de destruição de $\overline{u_i u_j}$ pelos efeitos viscosos. Este termo garante que a energia continuamente retirada do escoamento médio pelo campo turbulento através do termo P_{ij} será destruída, evitando portanto, um crescimento ilimitado de $\overline{u_i u_j}$.

Qualquer tentativa de solução da equação (2.44) passa, agora, necessariamente, pela modelagem dos termos ϕ_{ij} , D_{ij} e ϵ_{ij} . Idealmente, gostaríamos que esta modelagem fosse simples e universal. Infelizmente, isto não é possível. Alguns princípios, entretanto, deverão ser seguidos. Primeiramente, gostaríamos que o caráter matemático de modelo fosse fiel ao caráter matemático das equações que o originaram. Por exemplo, se o processo físico requerendo aproximação é representado por um tensor simétrico de traço zero, assim também deverá o ser o modelo. Este princípio sempre deve ser observado para a modelagem de momentos de 2ª ordem. Outro conceito fundamental é o princípio de influência recedente. Ele afirma que a influência sobre o escoamento dos momentos de ordem n sempre será menor que a influência dos momentos de ordem $n - 1$. Este princípio é frequentemente invocado para, justamente, violar o anterior, com vistas a obtenção de equações menos complexas que sejam numericamente mais facilmente implementáveis. Outro importante princípio é aquele que exige que as formas aproximadas exibam as mesmas respostas a translações e reflexões do sistema de coordenadas que o fenômeno real exibiria. Outra exigência normalmente aplicada é a de que o sistema de equações modeladas não gere valores "não físicos", tais como, tensões normais negativas ou correlações com a forma $\overline{u_i u_j} / \sqrt{\overline{u_i^2} \overline{u_j^2}}$ com valores maiores do que 1.

Duas outras idéias importantes para simplificar o processo de modelagem de um escoamento são as chamadas "hipóteses de altos números de Reynolds". Estas idéias são aplicadas extensivamente em escoamentos cisalhantes. Elas podem ser expressas como:

- As interações entre as maiores escalas, responsáveis predominantemente pelo transporte de quantidade de movimento e de grandezas escalares, não são afetadas pela viscosidade do fluido.
- Os movimentos de menores escalas, responsáveis pela dissipação viscosa, não tomam conhecimento da natureza do escoamento médio e portanto das maiores escalas. Sua estrutura é semelhante àquela encontrada na turbulência isotrópica.

É evidente que o movimento nas menores escalas não é exatamente isotrópico. Entretanto, se as duas regras acima forem aplicadas com critério, uma série de simplificações úteis poderá ser obtida durante o processo de modelagem turbulenta.

A modelagem da turbulência por modelos *Ad Hoc* será amplamente discutida em um capítulo específico.

Podemos então agora deduzir uma equação para K diretamente da equação (2.44) tomando-se $i = j$. Daí,

$$\rho \frac{DK}{Dt} = -\rho \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \overline{K' u_j} + \overline{p u_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 K}{\partial x_j \partial x_j} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2. \quad (2.47)$$

onde $K' = 1/2(u^2 + v^2 + w^2)$.

A equação acima nos fornece o modo como a taxa de variação da energia turbulenta ocorre com o tempo como função dos vários efeitos representados no lado direito. A interpretação

desses efeitos é idêntica àquela desenvolvida para a equação de transporte para os elementos do tensor de Reynolds.

2.1.4 Considerações sobre a energia

Discutimos amplamente que os escoamentos turbulentos são altamente dissipativos e que, por causa desta dissipação, energia mecânica é transformada em calor. Deste modo, a manutenção da turbulência requer um suprimento contínuo de energia. Também como resultado do movimento turbulento, a difusão de partículas juntamente com sua energia cinética ocorre.

Concluimos que um estado estacionário pode apenas existir se houver um equilíbrio entre a energia fornecida à turbulência, o transporte dela por convecção ou difusão e sua dissipação por mecanismos viscosos.

A seguir faremos uma nova dedução da equação da energia cinética turbulenta, desta vez a partir de equações de balanço para a energia total. O objetivo é identificar as relações entre as energias que ocorrem em um escoamento turbulento.

A energia total por unidade de massa de um fluido pode ser escrita como

$$E = E_{cin} + E_{int} = \frac{\overline{U_i U_i}}{2} + E_{int}. \quad (2.48)$$

Para escrever a equação acima desprezamos quaisquer efeitos externos, tais como a energia provocada por um campo gravitacional ou eletro-magnético.

Segue-se que a equação de transporte para E pode ser escrita como

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \sigma_{ij} U_i \right), \quad (2.49)$$

onde θ é a temperatura do fluido, e κ é o coeficiente de condutividade térmica.

Para um fluido newtoniano, o tensor tensão σ_{ij} é descrito por

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu D_{ij} - \frac{2}{3} \mu \Theta \delta_{ij}. \quad (2.50)$$

A combinação das duas expressões acima, nos fornece

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - P \Theta - U_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) U_i - \frac{2}{3} \mu \Theta U_i \right]. \quad (2.51)$$

A interpretação de cada um dos termos da equação acima é a seguinte:

1. variação local com o tempo e mudanças devido ao transporte convectivo por unidade de volume e de tempo da energia total,
2. mudanças por unidade de volume e de tempo devido a condutividade térmica,
3. mudanças por unidade de volume e de tempo devido ao trabalho por compressão e expansão,

4. mudanças por unidade de volume e de tempo devido o trabalho pelos gradientes de pressão,
5. mudanças por unidade de volume e de tempo devido ao trabalho pelas tensões viscosas.

O termo (3) é convertido em calor enquanto o termo (4) fornece a contribuição em energia cinética. O termo (5) pode ser re-escrito como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) U_i - \frac{2}{3} \mu \Theta U_i \right] &= \left[U_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2}{3} \mu \Theta \right) \right] \\ &+ \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \mu \Theta^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

O primeiro termo desta equação contribui com a energia cinética enquanto o segundo contribui com a dissipação.

Considerando-se separadamente a energia cinética e a energia interna podemos escrever:

Para a energia cinética:

$$\rho \frac{D}{Dt} \frac{U_i U_i}{2} = -U_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-P \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) U_i - \frac{2}{3} \mu \Theta \right], \quad (2.53)$$

ou

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \frac{U_i U_i}{2} &= -U_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) U_i - \frac{2}{3} \mu \Theta U_i \right] \\ &- \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \mu \Theta^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para a energia interna:

$$\rho \frac{D E_{int}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - P \Theta + \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \mu \Theta^2 \right]. \quad (2.55)$$

A equação (2.55) pode ser identificada como a primeira lei da termodinâmica. A interpretação de cada um de seus termos é, portanto, clara.

Às equações acima podemos agora aplicar a decomposição de Reynolds. Para um escoamento compressível o algebrismo é grande. Aqui, por simplicidade, consideraremos as equações para um escoamento incompressível.

A decomposição de Reynolds, como visto na seção anterior, nos fornece

$$U_i = \bar{U}_i + u_i, \quad (2.56)$$

$$P_i = \bar{P} + p_i, \quad (2.57)$$

$$U_i U_i = \bar{U}_i \bar{U}_i + 2\bar{U}_i u_i + u_i u_i = \bar{U}_i \bar{U}_i + 2\bar{U}_i u_i + q^2. \quad (2.58)$$

A substituição dessas relações na equação (2.54), seguida pela tomada da média resulta em

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{U_i U_i}}{\partial t} \frac{1}{2} + \frac{\partial \overline{q^2}}{\partial t} \frac{1}{2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{U_i} \left(\frac{\overline{P}}{\rho} + \frac{1}{2} \overline{U_j U_j} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{U_j} \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \\
&\quad - \nu \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i} \left(\frac{\overline{p}}{q} + \frac{1}{2} \overline{q^2} \right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{U_j u_i u_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{U_i q^2} \\
&\quad + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Multiplicando-se cada termo da equação da conservação da taxa de quantidade de movimento por $\overline{U_i}$ obtemos

$$\frac{\partial \overline{U_i U_i}}{\partial t} \frac{1}{2} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{U_i} \left(\frac{\overline{P}}{\rho} + \frac{1}{2} \overline{U_j U_j} \right) + \nu \overline{U_i} \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{U_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j}, \tag{2.60}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{U_i U_i}}{\partial t} \frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{U_i} \left(\frac{\overline{P}}{\rho} + \frac{1}{2} \overline{U_j U_j} \right) &= - (-\overline{u_i u_j}) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} \overline{U_i} \\
&\quad + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{U_j} \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \nu \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Estas são as equações de transporte para a energia cinética do movimento médio. O primeiro termo do lado direito da equação corresponde ao trabalho de deformação pelas tensões turbulentas por unidade da massa e de tempo. Quando $i \neq j$, tal que $-\overline{u_i u_j}$ é uma tensão de cisalhamento, normalmente esta tensão possui o mesmo sinal de $\partial \overline{U_i} / \partial x_j$; logo, para $i \neq j$ este termo fornece uma contribuição negativa para a energia cinética do escoamento, isto é, ele extrai energia do movimento médio. Quando $i = j$ a contribuição pode ser positiva ou negativa, dependendo do sinal de $\partial \overline{U_i} / \partial x_j$. Então, de certa forma, este termo pode ser visto como um termo de dissipação para o escoamento médio. De fato, uma comparação entre todos os termos do lado direito da equação (2.61) mostra que o primeiro e o quarto termos fornecem o trabalho de deformação do escoamento médio pelas tensões turbulentas e viscosas respectivamente. No caso da dissipação viscosa, este trabalho é convertido em calor.

Subtraindo-se a equação (2.61) da equação (2.59), obtemos a equação da energia cinética turbulenta. Esta equação é repetida aqui.

$$\begin{aligned}
\frac{D \overline{q^2}}{Dt} \frac{1}{2} &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i} \left(\frac{\overline{p}}{q} + \frac{1}{2} \overline{q^2} \right) - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \\
&\quad + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Observe que o segundo termo do lado direito desta equação é o primeiro termo da equação anterior com o sinal trocado. Isto indica que ele transfere energia do movimento médio para a

turbulência e vice-versa. Na equação da energia cinética turbulenta ele é chamado de termo de produção. Fisicamente, a transferência de energia se dá através de um processo de esticamento dos vórtices turbulentos devido ao escoamento médio.

Como exercício, consideremos um escoamento onde a velocidade aumenta na direção longitudinal, x_1 , tal que $\partial \overline{U}_1 / \partial x_1 > 0$. Neste caso o termo $-\overline{u_i^2 \partial \overline{U}_1 / \partial x_1}$ é negativo. Isto promove um decréscimo em energia turbulenta. Por outro lado, se $\partial \overline{U}_1 / \partial x_1 < 0$, a turbulência tenderá a aumentar. Acabamos de deduzir a seguinte regra: um escoamento sujeito a um gradiente positivo de velocidade possui uma tendência à intensidade turbulenta relativa diminuir; um escoamento sujeito a um gradiente negativo de velocidade sofre os efeitos contrários.

Terminamos esta seção lembrando que frequentemente a equação da energia cinética turbulenta aparece escrita de outro modo.

De fato, para um escoamento incompressível,

$$\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}} = 0. \tag{2.63}$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} - \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{q^2} - \frac{\overline{\partial u_i \partial u_j}}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\overline{\partial u_j \partial u_j}}{\partial x_i \partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \overline{q^2} - \frac{\overline{\partial u_j \partial u_j}}{\partial x_i \partial x_i}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

A equação da energia cinética turbulenta então fica,

$$\frac{D}{Dt} \frac{\overline{q^2}}{2} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i \left(\frac{p}{q} + \frac{1}{2} q^2 \right)} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \overline{q^2} - \nu \frac{\overline{\partial u_j \partial u_j}}{\partial x_i \partial x_i}. \tag{2.65}$$

2.2 As equações de camada limite

Para os escoamentos turbulentos, as equações de camada limite podem ser deduzidas utilizando-se os mesmos conceitos e hipóteses do caso laminar. Nominalmente, que existe um comprimento característico na direção transversal, a espessura da camada limite, o qual é muito menor que o comprimento característico na direção longitudinal. Isto é equivalente a se dizer que, na equação de Navier-Stokes, os gradientes dos termos difusivos na direção x podem ser desprezados perante os gradientes na direção y .

De fato, a hipótese da existência de um comprimento característico transversal muito menor que os outros comprimentos envolvidos no problema sob tratamento é típica das teorias de camadas finas; estas envolvem a camada limite, os jatos, as esteiras, as plumas, etc.

No caso de um escoamento incompressível, bi-dimensional, isto leva às seguintes equações:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} = 0, \tag{2.66}$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \bar{uv} \right\}. \quad (2.67)$$

Comparando-se as equações (2.66) e (2.67) com as equações para os escoamentos laminares, observamos que:

1. Os componentes de velocidade U, V e P foram substituídos por \bar{U}, \bar{V} e \bar{P} .
2. Os termos de inércia e de pressão permanecem com a forma inalterada, enquanto o termo viscoso é trocado por

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \bar{uv} \right). \quad (2.68)$$

Isto é equivalente a dizer que as forças viscosas laminares por unidade de volume ($= \partial \tau_l / \partial y$) são trocadas por

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_l + \tau_t \right), \quad (2.69)$$

onde $\tau_l = \mu \partial \bar{U} / \partial y$ e $\tau_t = -\rho \bar{uv}$ é a tensão turbulenta resultante da hipótese de Reynolds.

As condições de contorno a serem satisfeitas por um escoamento turbulento são idênticas àquelas impostas aos escoamentos laminares. São elas a condição de não deslizamento ($y = 0, \bar{U} = 0$) e a condição de não penetrabilidade ($y = 0, \bar{V} = 0$). Longe da parede, a velocidade deve tender assintoticamente aos valores do escoamento externo. Desde que a condição de não deslizamento deve ser satisfeita, é claro que na parede as flutuações são nulas e portanto os componentes do tensor tensão de Reynolds também o são. A consequência é que bastante próximo a parede as tensões turbulentas devem ser menos importantes que as tensões viscosas laminares, desde que estas são, genericamente falando, diferentes de zero. Segue-se que para todo escoamento turbulento existe próximo à parede uma região bastante fina onde o comportamento do escoamento é laminar. Esta camada é conhecida como a sub-camada laminar. Nela, as forças viscosas dominam também os termos de inércia. Imediatamente acima da sub-camada laminar encontra-se uma outra região onde os efeitos das flutuações, através do termo de tensões de Reynolds, se tornam comparáveis aos efeitos viscosos. A seguir, uma outra região é atingida onde as tensões turbulentas dominam completamente as tensões laminares. Embora a espessura da região de escoamento laminar seja muito pequena, seu estudo é importante por ser ali que o fenômeno da aderência do fluido à parede, que dá origem ao arrasto, acontece.

2.2.1 Alguns resultados experimentais sobre as flutuações turbulentas

Experimentos sobre escoamentos turbulentos devem, preferencialmente, prover medidas não apenas das quantidades médias mas também dos componentes das flutuações. De fato, medidas

das quantidades médias nos fornecem a maioria das informações necessárias para o tratamento de problemas simples de engenharia. Porém, só com o conhecimento das flutuações turbulentas poderemos ganhar um completo conhecimento da mecânica da turbulência. Nosso propósito nesta seção é apresentar medidas de algumas quantidades do campo de turbulência de modo a enriquecer nossa visão do fenômeno e oferecer alguma justificativa para os procedimentos matemáticos a serem adotados no futuro.

A Figura 2.2 apresenta dados experimentais para o perfil de velocidade médio e para os valores médios quadráticos dos dois componentes $\sqrt{u^2}$ e $\sqrt{v^2}$ das flutuações. Observe o alto valor atingido por $\sqrt{u^2}$ próximo à parede ($= 0.13U$).

O produto $-\overline{uv}$ é mostrado na Figura 2.3. Na maior parte do escoamento as tensões se devem exclusivamente aos termos turbulentos. Apenas junto à parede, onde as flutuações devem ir a zero, as tensões laminares dominam. A linha tracejada mostra a variação de tensão cisalhante. Ainda nesta Figura, é mostrado o coeficiente de correlação $-\phi$, definido como

$$\phi = \frac{\overline{uv}}{\sqrt{\overline{u^2}}\sqrt{\overline{v^2}}}. \tag{2.70}$$

Um outro conjunto de medidas é mostrado na Figura 2.4.

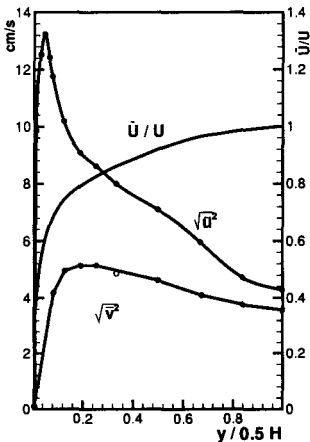


Figura 2.2: Medidas dos componentes de flutuação turbulenta em um túnel de vento (Reichardt, 1938).

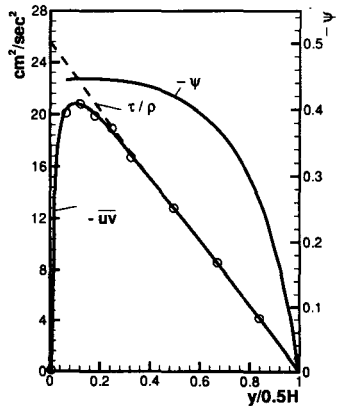


Figura 2.3: Medidas dos componentes de flutuação turbulenta em um canal (Reichardt, 1938).

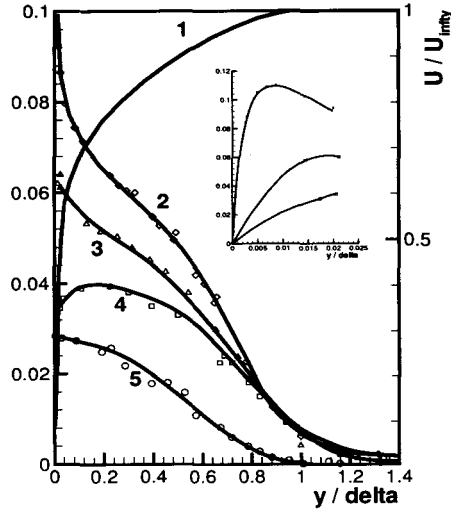


Figura 2.4: Variação dos componentes de flutuação em uma camada limite de acordo com as medidas de Klebanoff(1955). Curva 1, \bar{U} ; curva 2, $\sqrt{u^2}$; curva 3, $\sqrt{w^2}$; curva 4, $\sqrt{v^2}$; curva 5, \sqrt{uv} . As três curvas no detalhe representam respectivamente as curvas 2, 3 e 4.

É claro que, devido à própria natureza do escoamento, a turbulência nas regiões mais externas da camada limite é intermitente. Oscilogramas dos componentes da velocidade demonstram que a posição da borda da camada limite que divide as regiões de escoamento turbulento do escoamento externo, varia fortemente com o tempo. A variação do fator de intermitência γ ao longo da direção transversal do escoamento é mostrada na Figura 2.5. O valor $\gamma = 1$ significa que o escoamento é turbulento todo o tempo; $\gamma = 0$ corresponde ao caso contrário.

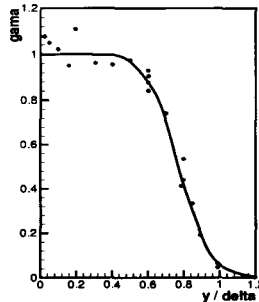


Figura 2.5. Comportamento do fator de intermitência γ em uma camada limite turbulenta como medido por Klebanoff(1955).

2.2.2 A estrutura assintótica da camada limite turbulenta

Para deduzirmos a estrutura assintótica da camada limite turbulenta precisamos, antes de qualquer coisa, estimar a ordem de grandeza das flutuações turbulentas. Isto deve ser feito através de uma análise meticulosa dos dados experimentais. A tensão turbulenta $-\overline{uv}/U_\infty^2$ medida próxima à parede é comparável em ordem de grandeza à tensão local na parede $\tau_w/\rho U_\infty^2 \simeq 0.0015$. Isto nos sugere ser razoável assumir que

$$\text{ord}(u) = \text{ord}(v) = \text{ord}(u_\tau), \quad (2.71)$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}. \quad (2.72)$$

De fato, um farto material pode ser encontrado na literatura para corroborar as hipóteses acima. Para a camada limite incompressível, os dados de Schubauer e Klebanoff(1951), de Klebanoff(1955) e de Laufer(1951, 1954) estabeleceram as igualdades acima como verdadeiras. Para o escoamento compressível, medidas de Kistler(1959), de Kistler e Chen(1963) e de Morkovin(1962) não apenas confirmaram este resultado como chegaram à

$$\text{ord}\left(\frac{u}{U_\infty}\right) = \text{ord}\left(\frac{v}{U_\infty}\right) = \text{ord}\left(\frac{t}{\Delta T}\right) = \text{ord}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) = \text{ord}\left(\frac{u_\tau}{U_\infty}\right) \quad (2.73)$$

Outros trabalhos podem ser encontrados na literatura que demonstram ser as relações acima validas mesmo para escoamentos com gradiente externo de pressão ou injeção normal de fluido na parede.

A velocidade característica u_τ é chamada de velocidade de atrito. Podemos então agora proceder a uma análise sobre a ordem relativa dos termos na equação (2.66).

Numa vizinhança imediatamente adjacente à parede deve existir uma região onde os termos laminares viscosos dominam exclusivamente. Podemos então adiantar que a equação do movimento para esta região se reduz a

$$\mu \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^2} = 0. \quad (2.74)$$

Uma primeira integral, nos fornece

$$\mu \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = A. \quad (2.75)$$

Desde que a igualdade acima vale em particular para $y = 0$, temos $A = \tau_w$.

Uma integral segunda resulta em

$$\overline{U} = \frac{\tau_w y}{\mu}, \quad (2.76)$$

pois na parede $\overline{U} = 0$.

A equação (2.76) pode ainda ser escrita da forma

$$\frac{\bar{U}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu}. \quad (2.77)$$

ou ainda,

$$U^+ = y^+. \quad (2.78)$$

A conclusão é que o perfil de velocidade de um escoamento turbulento possui forma linear na região muito próxima à parede. Podemos ainda concluir que $(u_\tau, yu_\tau/\nu)$ são variáveis de similaridade para esta região.

Imediatamente acima da região laminar viscosa deve existir uma região onde os efeitos das tensões laminares e turbulentas possuem a mesma importância. A equação do movimento se reduz então a

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (2.79)$$

Infelizmente, como até o momento não desenvolvemos qualquer relação constitutiva que nos permita modelar o termo turbulento, não podemos obter uma integral segunda da equação (2.79) chegando a uma solução analítica fechada para o perfil de velocidade. Podemos, entretanto, avançar nosso conhecimento com alguns argumentos de escala. Façamos portanto

$$\text{ord}\left(\nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\right) = \text{ord}(\bar{u}\bar{v}). \quad (2.80)$$

Como na camada limite turbulenta a mistura na direção transversal é muito intensa, a variação do perfil da velocidade com y não pode ser de ordem unitária, como acontece com a camada limite laminar: ela deve ser, de fato, bem menor. Observa-se que próximo à parede

$$\text{ord}\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\right) = \text{ord}\left(\frac{u_\tau}{y}\right). \quad (2.81)$$

Este resultado, de fato, é plenamente sugerido pela equação (2.77).

Seja agora $\hat{\delta}$ a espessura da camada onde a relação (2.81) é satisfeita, logo

$$\text{ord}\left(\frac{\nu u_\tau}{\hat{\delta}}\right) = \text{ord}(u_\tau^2), \quad (2.82)$$

pois vimos anteriormente que $\text{ord}(u) = \text{ord}(v) = \text{ord}(u_\tau)$,

Segue-se que a espessura da camada viscosa laminar é fornecida por

$$\hat{\delta} = \text{ord}(\nu/u_\tau). \quad (2.83)$$

Imediatamente acima da região viscosa laminar encontramos uma região onde as tensões turbulentas dominam completamente o escoamento. Esta região, de suma importância para a

determinação de várias propriedades importantes do escoamento, será tratada em detalhes em uma seção específica a seguir. Por ora nos deteremos na determinação de sua espessura.

Acima da região completamente turbulenta segue-se uma região onde os termos de inércia dominam a equação do movimento. Esta região compreende a maior parte da camada limite turbulenta sendo chamada normalmente de camada externa ou camada defeituosa; este termo ficará claro a seguir.

Para determinarmos a espessura da camada completamente turbulenta consideraremos a região onde os termos de tensão turbulenta e os termos de inércia possuem a mesma ordem de grandeza; isto é, consideraremos a região onde

$$ord\left(\overline{U}\frac{\partial\overline{U}}{\partial x}\right) = ord\left(-\frac{\partial\overline{uv}}{\partial y}\right). \quad (2.84)$$

Para avaliarmos a ordem dos termos acima consideraremos que na região interna do escoamento as quantidades de referência ainda são $(u_\tau, \nu/u_\tau)$. Para a região externa, entretanto, tomaremos como quantidades de referência $(\overline{U}_\infty, \delta)$, onde δ denota a espessura da camada limite baseada em $\delta = 0.99 \overline{U}_\infty$.

De fato, na região externa do escoamento as equações do movimento para uma primeira ordem de aproximação são as equações do escoamento de um fluido não viscoso. Os termos turbulentos conferem a essas equações uma correção de primeira ordem. Portanto, numa primeira aproximação, a solução para a camada limite turbulenta na região externa é simplesmente $\overline{U} = \overline{U}_\infty(x)$. A correção de ordem superior a esta solução, provocada pelo termo turbulento, resulta em um "defeito" na solução não viscosa. Daí o termo camada defeituosa.

Chamando a espessura da camada completamente turbulenta de $\tilde{\delta}$, da equação (2.84) vem

$$\frac{U_\infty^2}{L} = ord\left(\frac{u_\tau^2}{\tilde{\delta}}\right), \quad (2.85)$$

isto é,

$$\tilde{\delta} = 0\left(\frac{u_\tau^2}{U_\infty^2}L\right). \quad (2.86)$$

Se δ denota a espessura da camada limite, sua estrutura pode ser vista esquematicamente na Figura 2.6.

A camada limite turbulenta possui então estrutura bastante distinta da camada limite laminar. Ela possui junto à parede uma camada bastante fina, de espessura $\hat{\delta}$, onde os termos viscosos prevalecem. Acima desta camada e até a espessura $\tilde{\delta}$, a predominância é dos termos turbulentos. Finalmente, na região mais externa, de espessura δ , o domínio é dos termos de inércia. Nesta região, os termos de tensão aparente de Reynolds possuem uma contribuição de ordem superior.

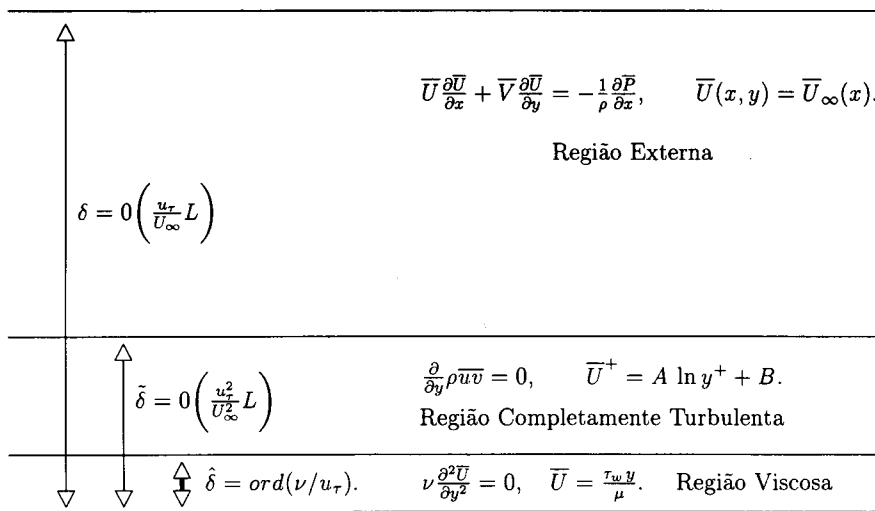


Figura 2.6. A estrutura assintótica da camada limite turbulenta.

A Figura 2.7 ilustra um perfil de velocidade construído em coordenadas internas e gráfico mono-logarítmico. Observe que todos os perfis de velocidade colapsam para $y^+ < 1000$. Possuindo inicialmente uma forma linear, como demonstrado pela expressão (2.77), o perfil de velocidade assume a seguir uma forma logarítmica. Em toda esta região, as variáveis de similaridade ($u_\tau, \nu/u_\tau$) permanecem perfeitamente válidas. Repare que estas variáveis haviam sido deduzidas com base apenas na região de solução linear e que, portanto, existe alguma surpresa ao constatarmos que elas são válidas para uma extensão bem mais ampla que aquela inicialmente pensada.

Na região externa, os perfis não coincidem tendo em vista serem as variáveis de similaridade (\bar{U}_∞, δ). A solução desta região também será discutida em separado.

Aos conceitos acima emitidos uma interpretação matemática rigosa pode ser fornecida pela utilização de técnicas de perturbação. Os trabalhos de Yajnik(1969) e de Mellor(1972) são clássicos. Neles, a camada limite é caracterizada por duas regiões distintas, possuindo representação por expansões assintóticas diferentes e apresentando um domínio comum de validade, a região turbulenta.

Para o caso compressível, podemos adiantar que a estrutura assintótica da camada limite turbulenta permanece a mesma. Na realidade, a variação local da massa específica e da temperatura do escoamento, tornam qualquer análise matemática do problema muito mais complexa. A própria definição de uma velocidade característica próxima à parede torna-se difícil pois agora u_τ pode ser definido em função do valor da massa específica na parede ou no escoamento externo.

Afzal(1973) discutiu a camada limite turbulenta compressível sob o ponto de vista do método das expansões assintóticas combinadas. Ele identificou uma estrutura e soluções aproximadas que sofreram críticas de vários outros autores. A dificuldade principal residia no modo como a combinação das soluções interna e externa foi realizada para o perfil de massa específica. Mais tarde Silva Freire(1989a) utilizando o conceito de limite de Kaplun(1967) mostrou que a

análise de Afzal encontrava-se correta em quase todos os detalhes e que, portanto, a camada limite turbulenta compressível possui uma estrutura de duas camadas. Nesta segunda análise, modificações de ordem superior foram introduzidas para garantir o fechamento da combinação das expansões assintóticas.

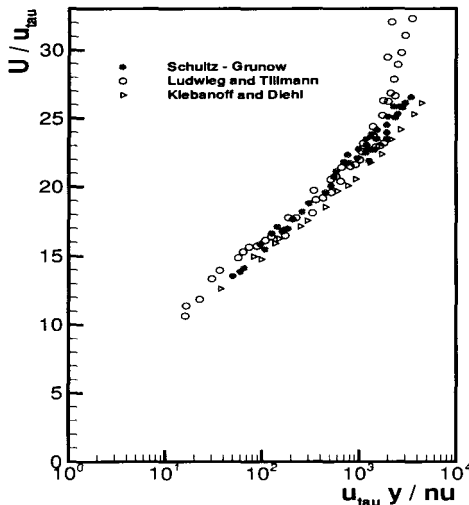


Figura 2.7: O perfil de velocidade escrito em função das coordenadas internas (Ludwig and Tillmann(1949), Klebanoff and Diehl(1951), Schultz-Grunow(1940)).

Toda a análise anterior pode ser estendida para a camada limite térmica sem muitas dificuldades; esta também apresenta uma estrutura em três camadas com a região da parede dominada pelos efeitos condutivos. Adjacente a esta encontra-se uma camada dominada pelos efeitos turbulentos. Finalmente, na camada mais externa, os efeitos convectivos dominam. Mais detalhes sobre esta estrutura podem ser obtidos em Silva Freire e Hirata(1989).

Discussões mais gerais sobre a estrutura da camada limite turbulenta baseadas no conceito de limite de Kaplun(1967) podem ser encontradas em Silva Freire(1990, 1996, 1998).

2.2.3 A lei da parede

Na seção anterior estabelecemos uma série de regiões distintas para a camada limite turbulenta. De fato, vários pesquisadores já haviam no início do século identificado muitas dessas regiões e suas soluções.

Por meio do limite assintótico de uma expansão Prandtl, obteve a solução linear para a sub-camada laminar em 1910. A solução logarítmica foi primeiramente deduzida por Taylor em 1916 e subsequentemente por Prandtl em 1925 e von Kármán em 1930. Os dois últimos autores usaram argumentos relacionados à teoria do comprimento de mistura (a ser apresentada em seções posteriores). Mais tarde, em 1939, von Kármán dividiu a solução logarítmica em

duas para obter uma melhor concordância com os dados experimentais.

A solução logarítmica recebeu uma dedução a partir de argumentos de escala e de análise dimensional por meio de Millikan em 1939. Em sua análise do problema Millikan utilizou apenas razões de ordem geral, não precisando considerar qualquer argumento sobre o fechamento do termo de tensão turbulenta.

Para um escoamento sobre uma superfície lisa, o comprimento característico foi visto na seção anterior ser ν/u_τ . No caso de uma parede rugosa, a distribuição de velocidade deve ser afetada pelas características dos elementos rugosos, particularmente quando estes possuírem dimensões superiores à espessura da sub-camada laminar.

O resultado é que, para a região da parede, argumentos dimensionais revelam ser \bar{U} uma função de u_τ , k , ν e y . Aqui, k denota um comprimento apropriado capaz de caracterizar a rugosidade da parede. Segue-se de argumentos dimensionais que

$$\frac{\bar{U}}{u_\tau} = f\left(\frac{u_\tau y}{\nu}, \frac{u_\tau k}{\nu}\right). \quad (2.87)$$

A relação acima é conhecida como a *lei da parede*. Para uma parede lisa, ela fica simplificada para

$$\frac{\bar{U}}{u_\tau} = f\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right). \quad (2.88)$$

Para a região externa da camada limite, farta evidência experimental mostra que similaridade pode ser obtida se considerarmos a diferença de velocidade, $\bar{U}_\infty - \bar{U}$, e a distância da parede, y , adimensionalizadas respectivamente por u_τ e δ ; ou seja

$$\frac{\bar{U}_\infty - \bar{U}}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) = g(\eta) \quad (2.89)$$

A relação acima é válida em uma grande extensão da camada limite. Observando a grande similaridade entre as condições do escoamento na região externa da camada limite e na esteira de corpos a equação (2.89) tem sido chamada de a *lei da esteira*, ou, ainda como anteriormente, de a lei do defeito na velocidade.

As leis da parede e da esteira são válidas em regiões distintas do domínio, devendo ser necessariamente combinadas para se obter uma solução global válida da parede à região externa da camada limite. Deste modo, deve existir uma região onde as expressões (2.87) e (2.89) possuem domínio de validade comum. Neste caso, isto deve também ser válido para os gradientes locais de velocidade.

Segue-se que

$$\frac{\partial \bar{U}^+}{\partial y^+} = \frac{df}{dy^+} = -\frac{dg}{d\eta} \frac{d\eta}{dy^+} \quad (2.90)$$

onde $\bar{U}^+ = \bar{U}/u_\tau$ e $y^+ = y u_\tau/\nu$.

Como $d\eta/dy^+ = \nu/\delta u_\tau = \eta/y^+$, temos

$$y^+ \frac{df}{dy^+} = -\eta \frac{dg}{d\eta} = \text{constante} = A. \quad (2.91)$$

A solução fica então

$$\bar{U}^+ = f(y^+) = A \ln y^+ + B, \quad (2.92)$$

e

$$\bar{U}_\infty^+ - \bar{U}^+ = g(\eta) = -A \ln \eta + C. \quad (2.93)$$

Resulta, portanto, que a função aparecendo na lei da parede possui forma logarítmica.

Como dito anteriormente, muitos autores realizaram programas experimentais extensivos para a validação da expressão acima. Hoje existe consenso que para a camada limite sujeita a um gradiente de pressão zero os parâmetros A e B possuem valor constante e igual a 2,5 e 5,0 respectivamente. O parâmetro A é normalmente escrito sob a forma $A = 1/\kappa$, onde $\kappa = 0,4$ é a chamada constante de von Kármán. Esta constante, como veremos em seções subsequentes, está relacionada ao conceito de comprimento de mistura.

Uma outra inspeção da Figura 2.7 revela que o valor de y^+ a partir do qual os dados experimentais divergem da solução logarítmica dependem do número de Reynolds. Os dados divergem dando origem a curvas com mesma forma, mostrando que para altos valores de y^+ a linha reta fornece resultados muito inferiores aos dos perfis de velocidade medidos.

Na Figura 2.7 a lei da parede foi desenhada com valores de constante $A = 2,5$ e $B = 5,0$. Esses são os valores preferidos de Coles(1956), que os obteve após a análise de mais de 600 diferentes experimentos.

Novas indicações da existência da lei da parede serão fornecidas a seguir. O conjunto de experimentos a ser apresentado foi realizado por Avelino et al.(1998c) em um dos túneis de vento do Laboratório de Mecânica da Turbulência do PEM/COPPE/UFRJ.

A Figura 2.8 mostra os perfis de velocidade medidos ao longo de 13 estações para uma camada limite que se desenvolve sobre uma placa lisa com gradiente de pressão externa nulo. Os perfis foram desenhados em coordenadas dimensionais em um gráfico mono-log (logarítmico de Neper). A existência de uma região onde a solução é linear não deixa dúvidas. O coeficiente linear das retas na região logarítmica diminui em valor a medida que o escoamento se desenvolve a montante, indicando que o coeficiente de atrito diminui. Os mesmos perfis de velocidade são vistos na em Figura 2.9 em internas. Observe como todos eles colapsam dando origem a uma única curva que representa a lei da parede, expressão (2.92).

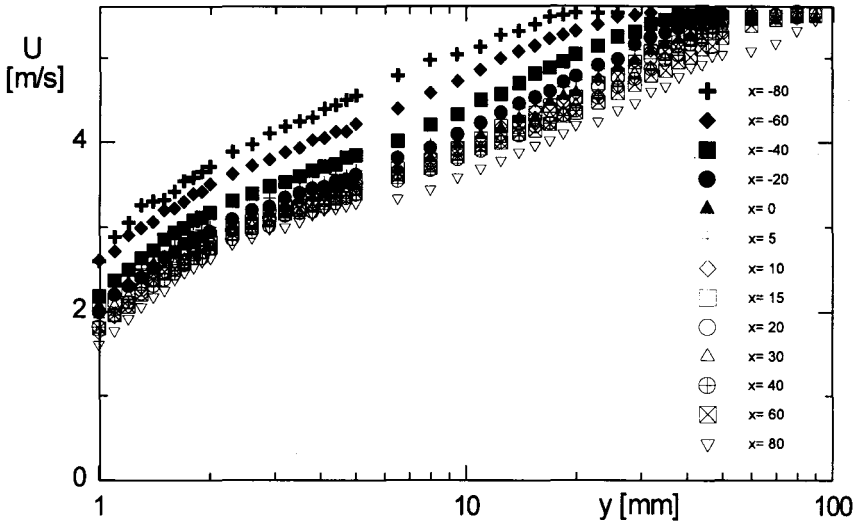


Figura 2.8: O perfil de velocidade escrito em coordenadas dimensionais (Avelino et al., 1998c).

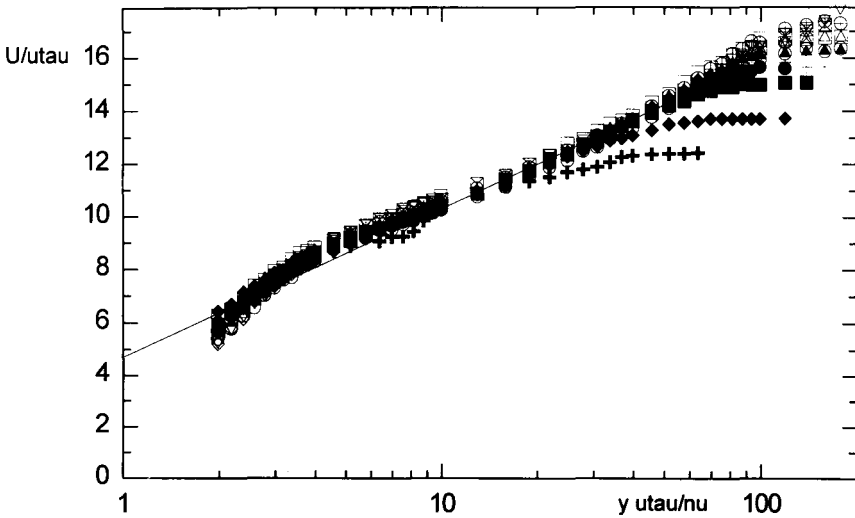


Figura 2.9: O perfil de velocidade escrito em coordenadas internas (Avelino et al, 1998).

Façamos agora uma dedução alternativa da lei da parede por argumentos semelhantes aos anteriores mas apresentados de modo totalmente original.

Retornemos à equações (2.88) e (2.89), considerando que as leis da parede e da esteira possam ser escritas como

$$\bar{U}(x, y) = u_\tau f\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right), \quad (2.94)$$

e

$$\bar{U}(x, y) = \bar{U}_\infty(x) - u_\tau g\left(\frac{y}{\delta}\right). \quad (2.95)$$

Como estas relações devem ser simultaneamente válidas em uma mesma região do escoamento, a região de combinação das soluções interna e externa, temos que a seguinte equação pode ser escrita

$$\bar{U}_\infty(x) = u_\tau [f(y^+) + g(\eta)]. \quad (2.96)$$

Derivando a equação (2.96) com relação a x vem

$$\bar{U}'_\infty(x) = u_\tau \left[\frac{u'_\tau}{u_\tau} y^+ f'(y^+) - \frac{\delta'}{\delta} \eta g'(\eta) \right] + u'_\tau [f(y^+) + g(\eta)]. \quad (2.97)$$

Derivando com relação a y obtemos,

$$0 = u_\tau \left[\frac{u_\tau}{\nu} f'(y^+) + \frac{1}{\delta} g'(\eta) \right], \quad (2.98)$$

$$g'(\eta) = -\frac{u_\tau \delta}{\nu} f'(y^+).$$

Substituindo-se as expressões (2.96) e (2.98) em (2.97) chegamos a

$$\bar{U}'_\infty(x) = u_\tau \left[\frac{u'_\tau}{u_\tau} y^+ f'(y^+) + \frac{\delta'}{\delta} y^+ f'(y^+) \right] + u'_\tau \frac{\bar{U}_\infty(x)}{u_\tau}, \quad (2.99)$$

ou ainda,

$$\frac{\bar{U}'_\infty(x) - \bar{U}_\infty(x) \frac{u'_\tau}{u_\tau}}{\frac{u'_\tau}{u_\tau} + \frac{\delta'}{\delta}} = y^+ f'(y^+). \quad (2.100)$$

Como os termos do lado direito e esquerdo da equação (2.100) são funções de variáveis diferentes estes devem ser iguais a uma constante, ou seja,

$$y^+ f'(y^+) = A, \quad f(y^+) = A \ln y^+ + B. \quad (2.101)$$

Logo, na região onde ambas f e g são válidas o perfil deve ser logarítmico. O lado esquerdo da equação (2.100) nos fornece

$$\frac{\overline{U}'_{\infty}(x)}{u_{\tau}} - \overline{U}_{\infty}(x) \frac{u'_{\tau}}{u_{\tau}^2} = A \left[\frac{u'_{\tau}}{u_{\tau}} + \frac{\delta'}{\delta} \right], \quad (2.102)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\overline{U}_{\infty}(x)}{u_{\tau}} \right] = A \frac{d}{dx} [\ln u_{\tau} + \ln \delta], \quad (2.103)$$

$$\frac{\overline{U}_{\infty}(x)}{u_{\tau}} = A \ln u_{\tau} \delta + B. \quad (2.104)$$

A última equação pode ser facilmente identificada como a equação do atrito na parede anteriormente deduzida.

2.2.4 A lei da esteira

Para altos valores de yu_{τ}/ν será mais apropriado considerarmos a diferença de velocidade $(\overline{U}_{\infty} - \overline{U})/u_{\tau}$ ao invés de \overline{U}/u_{τ} . Da expressão (2.92) podemos obter diretamente

$$\frac{\overline{U}_{\infty} - \overline{U}}{u_{\tau}} = -A \ln \frac{y}{\delta}. \quad (2.105)$$

Infelizmente, como vimos das Figuras 7 e 9 a expressão (2.92) não fornece uma boa representação do perfil de velocidade para $y=\delta$ de modo que a expressão acima deve ser corrigida pela introdução de uma constante arbitrária. Logo, segue que

$$\frac{\overline{U}_{\infty} - \overline{U}}{u_{\tau}} = -A \ln \frac{y}{\delta} + C. \quad (2.106)$$

A Figura 2.10 mostra um gráfico logarítmico da distribuição de velocidade em coordenadas externas. Para valores de y/δ inferiores a 0,15 a curva é praticamente reta com valores de A e C iguais a 2,5 e 3,7 respectivamente. Os valores de $y/\delta \approx 0,15$ correspondem a $yu_{\tau}/\nu = 750$.

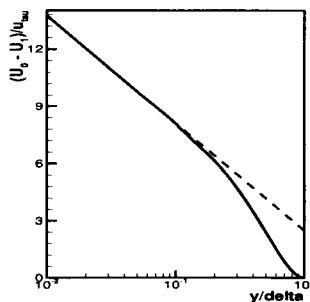


Figura 2.10: A distribuição de velocidade em coordenadas externas (Clauser, 1956).

Os perfis de velocidade das Figuras 2.8 e 2.9 são re-apresentados aqui na Figura 2.11 em coordenadas externas. Observe que todos os perfis colapsam na região externa do escoamento, enquanto o mesmo não acontece para a região interna. Portanto, temos acabado de demonstrar que a descrição da camada limite turbulenta realmente requer o concurso de dois conjuntos de escalas distintos, um para representar a região interna e outro para representar a região externa do escoamento.

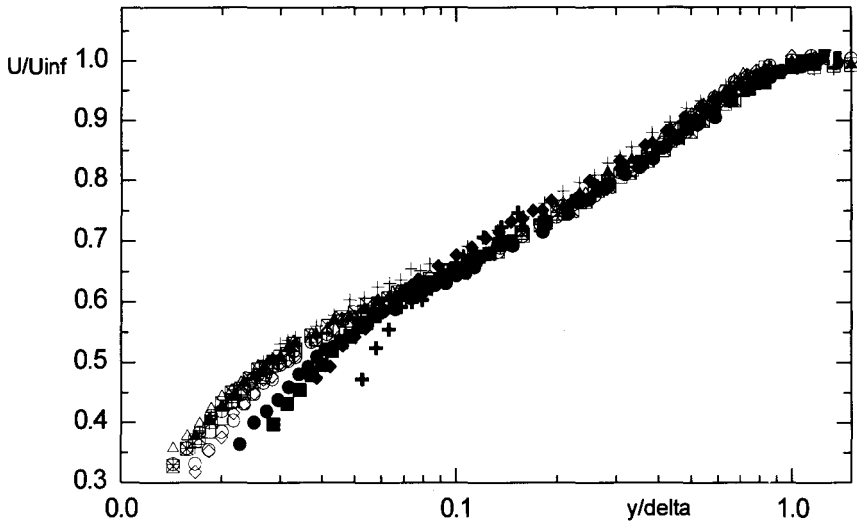


Figura 2.11: O perfil de velocidade escrito em coordenadas externas (Avelino et al, 1998c).

Uma proposta de Hama(1954) para representar o perfil de velocidade para $y/\delta > 0,15$ resultou na seguinte correlação empírica

$$\frac{\overline{U}_\infty - \overline{U}}{u_\tau} = 9,6 \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2. \quad (2.107)$$

Entretanto, se esta fórmula for aceita como verdadeira, a conclusão é que o ponto limítrofe entre as regiões interna e externa da camada limite turbulenta independe do número de Reynolds, e isto não parece razoável. De qualquer forma, a expressão acima possui muita utilidade em aplicações práticas.

Impressionado pela grande similaridade apresentada pelos escoamentos na região externa da camada limite e em uma esteira, Coles(1956) propôs uma correlação puramente empírica para a correção da lei da parede e sua consequente extensão para a regiões externa. De fato, os escoamentos na região externa da camada limite e em uma esteira são ambos dominados por processos de mistura de grande escala controlados pelos efeitos de inércia e não por processos viscosos.

Após a análise de mais de 600 experimentos distintos, Coles propôs escrever a expressão para o perfil de velocidade como

$$\frac{\bar{U}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) + B + \frac{\Pi}{\kappa} W(\eta). \quad (2.108)$$

Na expressão acima κ é a constante de von Kármán ($=0,40$), $B = 5,0$ e $\eta = y/\delta$.

A função $W(\eta)$ é uma função positiva, de caráter aparentemente universal; ela é conhecida como a *lei da esteira*. O parâmetro Π não depende de y . Ele está relacionado ao coeficiente de atrito local pela expressão

$$\frac{\bar{U}_\infty}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u_\tau \delta}{\nu}\right) + B + \frac{\Pi}{\kappa} W(1). \quad (2.109)$$

Esta expressão mostra que Π deve ser uma função implícita de x por meio de sua dependência em u_τ e δ . Coles considerou Π independente de x ; entretanto uma análise dos dados experimentais revela que

$$\Pi = -0,05757 \ln^2 R_\theta + 1,062 \ln R_\theta - 4,317; \quad R_\theta < 5600 \quad (2.110)$$

$$= 0,55; \quad R_\theta > 5600. \quad (2.111)$$

onde R_θ denota o número de Reynolds baseado na espessura da quantidade de movimento local.

Re-escrito em variáveis externas, o perfil de velocidade fica

$$\frac{\bar{U}_\infty - \bar{U}}{u_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln \eta + \frac{\Pi}{\kappa} [2 - W(\eta)]. \quad (2.112)$$

A lei da parede possui uma interpretação física muito interessante e relacionada à separação de um escoamento. A equação (2.109) pode ser re-escrita como

$$1 = \frac{1}{\kappa} \frac{u_\tau}{\bar{U}_\infty} \ln\left(\frac{u_\tau \delta}{\nu}\right) + \frac{u_\tau}{\bar{U}_\infty} B + \frac{u_\tau \Pi}{\bar{U}_\infty \kappa} W(1). \quad (2.113)$$

Considerando-se $W(1) = 2$, um valor sugerido por Coles, a passagem do limite $u_\tau \rightarrow 0$ na equação acima nos fornece

$$\lim_{u_\tau \rightarrow 0} \frac{u_\tau \Pi}{\bar{U}_\infty \kappa} = \frac{1}{2}. \quad (2.114)$$

Logo, resulta da expressão (2.108) que no ponto de separação,

$$\frac{\bar{U}}{\bar{U}_\infty} = \frac{1}{2} W(\eta). \quad (2.115)$$

A função universal $W(\eta)$ foi apresentada por Coles em forma tabular.

A lei da esteira.

η	$W(\eta)$	η	$W(\eta)$
0	0	0,55	1,152
0,05	0,004	0,60	1,307
0,10	0,029	0,65	1,458
0,15	0,084	0,70	1,600
0,20	0,168	0,75	1,729
0,25	0,272	0,80	1,840
0,30	0,396	0,85	1,926
0,35	0,535	0,90	1,980
0,40	0,685	0,95	1,999
0,45	0,838	1,00	2,000
0,50	0,994		

A curva que representa $W(\eta)$ é quase simétrica com relação ao ponto $\eta = 0,5$. Ela pode ser aproximada por

$$W(\eta) = 1 + \text{sen} \frac{(2\eta - 1)\pi}{2}. \quad (2.116)$$

Outra aproximação bastante popular é

$$W(\eta) = 1 - \cos \pi \eta. \quad (2.117)$$

2.2.5 A lei da parede para um escoamento compressível

Nos escoamentos turbulentos compressíveis, os mecanismos de transporte associados a flutuações da massa específica, da temperatura, e da viscosidade poderiam ser suficientes para, de alguma forma, alterar a estrutura já estabelecida para o escoamento incompressível. Mostraremos a seguir que este não é o caso.

Para um escoamento compressível Morkovin(1960) deduziu a seguinte expressão

$$\frac{t}{T} = -\frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} = -(\gamma - 1)M^2 \frac{u}{U}, \quad (2.118)$$

onde M representa o número de Mach.

A partir desta equação, verifica-se que a razão entre as flutuações em massa específica e seu valor médio é pequena, não excedendo valores superiores a 0,1 para números de Mach inferiores a 5,0. Pode-se concluir que as flutuações de temperatura e de massa específica não exercem influência significativa no campo de turbulência até números de Mach iguais a 5,0. Isto significa que o conhecimento adquirido sobre a estrutura turbulenta em escoamentos subsônicos pode ser estendida para escoamentos supersônicos.

Sob certas condições a equação da energia para um escoamento turbulento possui solução analítica. Para o caso em que a temperatura na parede é constante, Crocco(1933)(veja Rotta(1965)) obteve

$$\frac{T}{T_\delta} = -\frac{T_w}{T_\delta} + \frac{T_r - T_w}{T_\delta} \frac{\bar{U}}{\bar{U}_\delta} - r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \left(1 - \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_\delta} \right) \right), \quad (2.119)$$

onde,

r = fator de recuperação (=0,896),

T_w = temperatura na parede,

T_δ = temperatura na região externa da camada limite,

T_r = temperatura de recuperação,

e

$$T_r = T_\delta \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \right). \quad (2.120)$$

Para um escoamento adiabático, isto é, sem fluxo de calor na parede, a equação (2.119) se torna

$$\frac{T}{T_\delta} = 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \left(1 - \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_\delta} \right) \right), \quad (2.121)$$

De todo o exposto, espera-se, portanto, que a camada limite possa ser dividida em uma região interna e outra externa. Deste modo, para uma região localizada imediatamente adjacente à parede onde os efeitos viscosos dominem podemos escrever

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = \frac{u_\tau^2}{\nu_w} \left(\frac{T_w}{T} \right)^\omega, \quad (2.122)$$

onde a variação da viscosidade com a temperatura foi avaliada pela expressão

$$\mu = \mu_w \left(\frac{T_w}{T} \right)^\omega. \quad (2.123)$$

Substituindo-se a expressão (2.119) em (2.122) com $\omega = 1$ obtemos

$$\frac{\bar{U}^c}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu_w}, \quad (2.124)$$

onde

$$\bar{U}^c = \bar{U} \left[1 + \frac{1}{2} a^* \frac{\bar{U}}{\bar{U}_\delta} - \frac{1}{3} b^{*2} \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_\delta} \right)^2 \right], \quad (2.125)$$

$$a^* = \frac{T_\delta}{T_w} \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \right) - 1, \quad (2.126)$$

$$b^{*2} = r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \frac{T_\delta}{T_w}. \quad (2.127)$$

e o superscrito c foi adicionado para lembrar que o escoamento é incompressível.

Esta expressão se reduz ao caso incompressível no limite $M_\delta \rightarrow 0$.

Logo acima da região dominada pelos efeitos moleculares, existe uma região onde os efeitos difusivos turbulentos dominam, a região onde a lei logarítmica prevalece.

Nesta região, o gradiente local de velocidade é fornecido por

$$\frac{\partial \bar{U}^c}{\partial y} = \frac{1}{\kappa y} u_\tau \left(\frac{T}{T_w} \right)^{1/2} \quad (2.128)$$

Uma primeira integral desta equação resulta em

$$\frac{\bar{U}^*}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + C_1^* \quad (2.129)$$

onde

$$\bar{U}^* = \frac{\bar{U}_\delta}{b^*} \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{2b^{*2} \bar{U}^c}{\bar{U}_\delta^2} - a^* \right] \quad (2.130)$$

A transformação acima é conhecida como a transformação de Van Driest(1951). Ela transforma um perfil de velocidades compressível, \bar{U}^c , em um perfil \bar{U}^* equivalente à lei da parede clássica. De fato, toda a influência da compressibilidade é incorporada à transformação através dos coeficientes a^* e b^* . A constante C_1^* é igual ao valor clássico 5.0.

A extensão da lei da parede compressível à região externa do escoamento pode ser feita nos mesmos moldes de Coles(1956); isto é, adicionando-se uma função universal aos termos do lado direito de (2.129). Esta foi a proposta de Maise e McDonald(1968).

De fato, mostra-se que a lei da parede para um escoamento incompressível vale para situações muito mais complexas desde que o escoamento não separe. Mesmo para o caso da interação de uma onda de choque com uma camada limite, pode-se mostrar que formulações de lei de parede ainda podem ser utilizadas para descrever o escoamento nas regiões internas da camada limite. Veja, por exemplo, os trabalhos de Silva Freire(1988b), Silva Freire(1989b,1989c), Silva Freire(1990), Silva Freire e Terra(1991) e de Terra, Su e Silva Freire(1996,1997). Em todos estes trabalhos técnicas assintóticas foram utilizadas para identificar uma região de forte interação ao redor da onda de choque, secundada por regiões de fraca interação antes e depois da onda de choque. No trabalho de 1988, o método das expansões assintóticas combinadas foi utilizado para estudar problemas onde a onda de choque era forte e penetrava bastante na camada limite. Todo o trabalho foi desenvolvido num contexto analítico com soluções locais aproximadas sendo obtidas para todas as regiões do escoamento. A necessidade de combinar todas as soluções nas direções longitudinal e transversal do escoamento resultou em um procedimento bastante complexo, em particular para as regiões internas da camada limite. Uma revisão completa de todo o procedimento de solução pode ser vista em Silva Freire(1989c).

Para obter uma sistemática mais simples de solução, Silva Freire(1989b), Silva Freire(1990), e Silva Freire e Terra(1991) resolveram o problema da interação desconsiderando a existência da região de mistura na região de forte interação. O resultado foi uma solução muito mais simples onde a região externa era combinada diretamente à região viscosa. Uma comparação

entre os procedimentos completo e simplificado mostrou ser o desempenho do segundo muito bom.

Nos trabalhos de Terra, Su e Silva Freire(1996,1997) a ênfase foi na descrição da estrutura assintótica. Utilizando limites de Kaplun(1967), os autores mostraram que a camada limite possui uma estrutura onde na maior parte do escoamento próximo à onde de choque os efeitos viscosos turbulentos podem ser desprezados.

2.2.6 Escoamento sobre uma superfície rugosa

Quando um escoamento ocorre sobre uma superfície rugosa, as expressões desenvolvidas anteriormente passam a não ser mais válidas de modo que algumas modificações devem ser efetuadas.

Nikuradse estabeleceu em 1933 os conceitos fundamentais do problema por meio do estudo de escoamentos em tubos que apresentavam superfície rugosa do tipo "areia". Ele observou que, para altos números de Reynolds, o escoamento próximo à superfície torna-se independente da viscosidade, sendo uma função de um comprimento característico da rugosidade, do diâmetro do tubo, e do próprio número de Reynolds. Ele também observou que, para a camada externa da camada limite, as relações universais se aplicam para a maior parte do escoamento, independentemente das condições na parede. A influência da rugosidade, portanto, ficava restrita a uma região fina adjacente à parede.

De argumentos dimensionais, Nikuradse escreveu

$$\frac{\bar{U}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} + B \left[\frac{ku_\tau}{\nu} \right]. \quad (2.131)$$

A equação acima foi escrita de modo alternativo por Clauser(1954) como

$$\frac{\bar{U}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + A - \frac{\Delta\bar{U}}{u_\tau} \left[\frac{ku_\tau}{\nu} \right]. \quad (2.132)$$

As funções B e $\Delta\bar{U}$ deveriam ser determinadas a partir de dados experimentais. De fato, após um extensivo programa experimental, Hama(1954) obteve

$$\frac{\Delta\bar{U}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{ku_\tau}{\nu} + C. \quad (2.133)$$

Na realidade, a expressão acima vale para um tipo particular de rugosidade, as rugosidades ditas do tipo " k ". Escoamentos, por outro lado, que são insensíveis a k nas dependem de uma escala global são chamados de escoamentos do tipo " D ". No primeiro caso, a rugosidade é caracterizada por uma série de dentes distantes suficientemente uns dos outros para que o escoamento entre eles penetre bem atingindo a superfície. No segundo caso, os dentes estão suficientemente juntos para provocar o aparecimento de estruturas vorticiais entre eles.

Para uma rugosidade do tipo D a lei da parede fica

$$\frac{\bar{U}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + A - \frac{\Delta\bar{U}}{u_\tau} \frac{Du_\tau}{\nu}. \quad (2.134)$$

A princípio, não existe qualquer razão para que as funções aparecendo nas equações (2.132) e (2.134) tenham a mesma forma, desde que os comprimentos característicos usados para ambas representações são distintos. Entretanto, Moore(1951) mostrou que uma relação universal pode ser escrita se a origem do perfil de velocidade for considerada alguma distância abaixo da crista dos elementos rugosos. Um método detalhado para a determinação do deslocamento na origem foi desenvolvido por Perry and Joubert(1964). Este deslocamento é normalmente chamado de erro na origem, ε .

Para escrever uma expressão universal, válida para todos os tipos de rugosidade fazemos, então

$$\frac{\bar{U}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{(y_T + \varepsilon)u_\tau}{\nu} + A - \frac{\Delta\bar{U}}{u_\tau}, \quad (2.135)$$

onde

$$\frac{\Delta\bar{U}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\varepsilon u_\tau}{\nu} + C_i, \quad (2.136)$$

y_T é medido a partir da crista dos elementos rugosos, e $C_i, i = K, D$; é uma constante característica da rugosidade.

Mais detalhes sobre como a formulação acima pode ser estendida para a camada limite térmica, ou utilizada em conjunção com modelos turbulentos diferenciais de duas equações podem ser obtidos em Silva Freire e Hirata(1990) e Avelino et al.(1997, 1998b). Uma investigação experimental completa sobre a camada limite rugosa, incluindo uma farta explicação sobre o modo de redução dos dados pode ser vista em Avelino et al.(1998c) e Avelino e Silva Freire(1998).

Alguns dos resultados de Avelino et al.(1998c) serão reproduzidos aqui.

A Figura 2.12 compara os perfis de velocidade obtidos para uma parede lisa com os perfis obtidos para uma parede rugosa. Os elementos rugosos possuíam altura de 3mm, largura de 12mm e passo de 24mm; isto caracteriza uma rugosidade do tipo k . A Figura 2.12 foi desenhada em coordenadas dimensionais. Observe que são dois os efeitos da rugosidade:

1. Deformar as retas que definem a região logarítmica, provocando um deslocamento de seus pontos para a esquerda.
2. Abaixar o nível dos pontos localizados na região completamente turbulenta.
3. Eliminar a região linear adjacente à parede.

De fato, o método desenvolvido para calcular o deslocamento na origem consiste num procedimento para "retificar" a curva definida pelos pontos da região turbulenta.

A Figura 2.13 apresenta os mesmos pontos da Figura 2.12, agora em coordenadas internas. Vemos então dois conjuntos de pontos que se agrupam de acordo com as leis da parede para uma superfície lisa e para uma superfície rugosa. O agrupamento ocorre apenas na região interna do escoamento. Na região externa, todos os perfis de velocidade diferem.

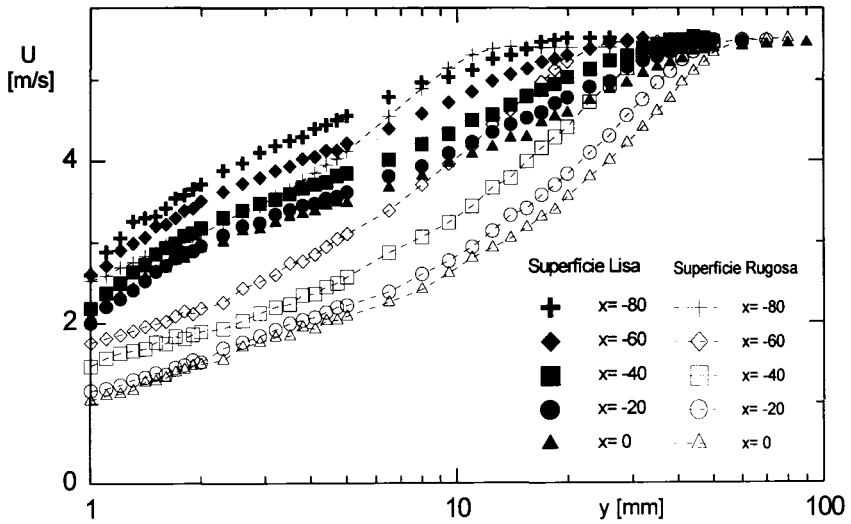


Figura 2.12: O perfil de velocidade escrito em coordenadas dimensionais para o escoamento sobre uma superfície rugosa (Avelino, 1998c).

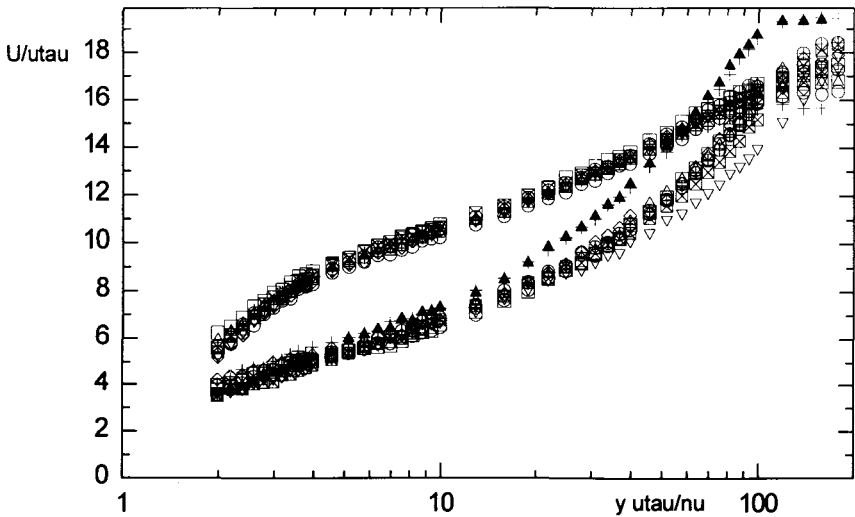


Figura 2.13: O perfil de velocidade escrito em coordenadas internas para o escoamento sobre uma superfície rugosa (Avelino, 1998c).

A Figura 2.14 mostra os perfis de velocidade da Figura 2.12 em coordenadas externas. Eles colapsam na região externa reiterando, como afirmado anteriormente, que a influência dos elementos rugosos fica restrita à região da parede.

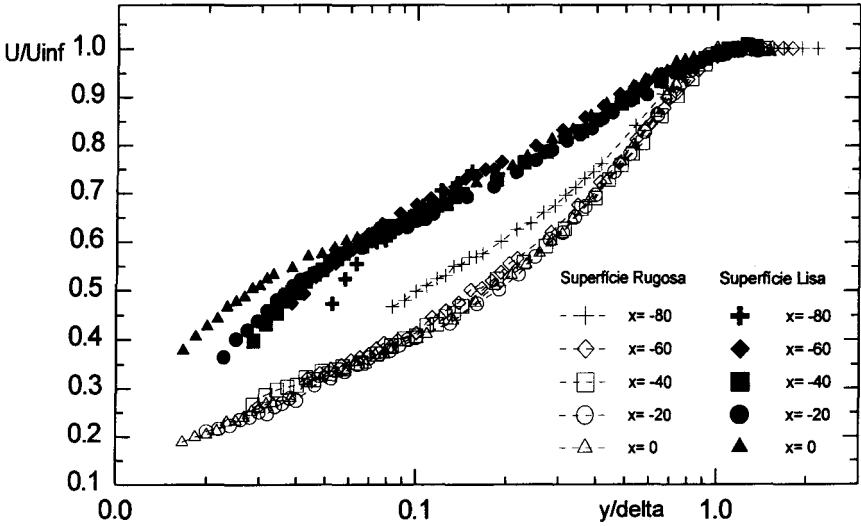


Figura 2.14: O perfil de velocidade escrito em coordenadas externas para o escoamento sobre uma superfície rugosa (Avelino, 1998c).

2.2.7 Escoamento com transpiração na parede

A injeção ou sucção normal de fluido na parede fornece um modo clássico de controlar as propriedades da camada limite turbulenta. Com injeção ou sucção de fluido podemos proteger térmicamente uma parede, evitar a separação ou provocar a re-laminarização de um escoamento; de fato, podemos modificar de modo controlado muitas de suas características locais e globais.

Quando injeção ou sucção de fluido na parede é aplicada a um escoamento, a equação do movimento para a região interna do escoamento pode ser escrita como

$$V_w \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} - \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y}, \tag{2.137}$$

onde V_w é a velocidade de injeção ou sucção de fluido normal à parede.

Na região completamente turbulenta, os termos moleculares podem ser desprezados e esta relação pode ser simplificada para

$$V_w \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y}. \tag{2.138}$$

Uma integração das equações acima nos fornece

$$V_w \bar{U} + u_\tau^2 = -\bar{u}\bar{v}. \quad (2.139)$$

A solução desta equação possui a forma

$$\frac{\bar{U}}{u_\tau} = f\left(y^+, \frac{V_w}{u_\tau}\right). \quad (2.140)$$

De fato, pode-se mostrar (Silva Freire, 1988a) que a lei da parede para um escoamento com injeção ou sucção de fluido na parede fica da forma

$$\frac{\bar{U}}{u_\tau} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + B + \frac{1}{4} \frac{V_w}{u_\tau} \left(\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + B \right)^2. \quad (2.141)$$

O parâmetro B passa agora a ser uma função da velocidade de injeção ou sucção de acordo com a expressão (Silva Freire, 1988a):

$$B = 5,0 - 512 \frac{V_w}{U_\infty}. \quad (2.142)$$

Para escoamentos incompressíveis, a expressão (2.141) pode ser facilmente estendida para a região externa da camada limite pela simples adição da lei da esteira. Neste caso, o perfil, Π , da lei da esteira varia com a velocidade de injeção (Silva Freire, 1988a).

Uma lei da parede e uma lei da esteira para escoamentos compressíveis com injeção ou sucção de fluido normal à parede também podem ser deduzidas desde que a transformação de van Driest seja invocada. Os resultados podem ser vistos em Silva Freire(1988c).

A contrapartida desses resultados para a camada limite térmica incompressível também pode ser obtida por argumentos similares; consulte Medeiros e Silva Freire(1989, 1992) e Medeiros et al.(1990). Nestas análises novas expressões foram propostas para as leis da parede e da esteira para os perfis de velocidade.

O problema térmico, compressível, com injeção de massa foi estudado por Silva Freire et al.(1991, 1995). Utilizando o método das expansões assintóticas combinadas, os autores desenvolveram uma solução analítica para a representação da lei da parede que fornece excelentes resultados para a previsão do número de Stanton. A regra do termo de dissipação na solução do problema térmico foi discutida em Cruz e Silva Freire(1991). Uma revisão, sob o ponto de vista assintótico, dos vários aspectos do problema pode ser vista em Silva Freire(1991).

Outros estudos do problema com transferência de massa foram realizados por Su et al.(1993, 1995) e Avelino et al.(1996, 1998b). Diferentemente dos estudos anteriores, estes trabalhos se preocuparam exclusivamente com o desenvolvimento de modelos turbulentos específicos para esta classe de problemas. Modelos algébricos (Su et al.(1993) e diferenciais de duas equações (Su(1995), Avelino et al.(1996, 1998b)) foram abordados, resultando em um novo modelo de baixo número de Reynolds e novas expressões para a lei da parede para K , a energia cinética turbulenta, e para ϵ , a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta por unidade de massa.

2.2.8 Escoamento próximo a um ponto de separação

A descrição do comportamento da camada limite turbulenta próxima a um ponto de separação não pode ser realizada dentro do contexto anteriormente desenvolvido. No ponto de separação, a velocidade característica previamente utilizada, u_τ , torna-se identicamente nula fazendo com que a estrutura de duas camadas deixe de existir, pelo menos nos moldes deduzidos anteriormente.

Quando a camada limite encontra-se sujeita a grandes gradientes adversos de pressão, o “defeito” em sua região externa torna-se grande resultando em uma equação do movimento não linear para a primeira ordem de aproximação. Os argumentos utilizados para a dedução da equação clássica da camada limite também deixam de ser válidos, de modo que não podemos esperar mais a existência de um perfil logarítmico de solução.

A seguir, faremos uma breve análise do problema para identificar a forma do perfil de velocidade próximo a um ponto de separação. Uma análise completa do problema para os campos de velocidade e de temperatura pode ser obtida em Cruz e Silva Freire(1995a, 1995b, 1998).

Consideremos o gradiente normal de velocidade na região completamente turbulenta do escoamento. A dependência funcional de $\partial u/\partial y$ nos parâmetros do escoamento deve possuir a forma

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y, \rho, \tau), \quad (2.143)$$

A única combinação dos parâmetros y, ρ, τ que fornece a dimensão de $\partial u/\partial y$ é

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \pm \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{|\tau/\rho|}{y}}, \quad (2.144)$$

onde o sinal + ou - deve concordar com o sentido de τ .

Para resolver esta equação tomemos uma expansão em série de Taylor de τ ao redor $y = 0$, isto é

$$\tau = \tau_w + \frac{dP_w}{dx}y + O(y^2), \quad (2.145)$$

onde τ_w e dP_w/dx denotam a tensão cisalhante e o gradiente de pressão na parede.

A substituição da equação acima na anterior nos fornecerá três funções diferentes, dependendo dos valores relativos de τ_w e de (dP_w/dx) .

CASO 1: $\frac{\tau_w}{\rho} \geq 0 \rightarrow$

$$u = \frac{2}{\kappa} \sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}y} + \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{\kappa} \ln \left| \frac{\sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}y} - \sqrt{\tau_w/\rho}}{\sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}y} + \sqrt{\tau_w/\rho}} \right| + C_1(x), \quad (2.146)$$

CASO 2: $\frac{\tau_w}{\rho} \leq 0$ e $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}y| \geq |\tau_w/\rho| \rightarrow$

$$u = \frac{2}{\varkappa} \sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \frac{\tau_w/\rho}{\sqrt{-\tau_w/\rho}} \frac{2}{\varkappa} \arctan \sqrt{\frac{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y}{-\tau_w/\rho}} + C_2(x), \quad (2.147)$$

CASO 3: $\frac{\tau_w}{\rho} \leq 0$ e $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \leq |\tau_w/\rho| \rightarrow$

$$u = -\frac{2}{\varkappa} \sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \frac{\sqrt{-\tau_w/\rho}}{\varkappa} \ln \left| \frac{\sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{-\tau_w/\rho}}{\sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{-\tau_w/\rho}} \right| + C_3(x). \quad (2.148)$$

As equações acima são uma generalização da lei da parede para escoamentos que apresentem separação. Longe do ponto de separação $\tau_w/\rho \gg (dP_w/dx)(y/\rho)$ e a primeira das equações se reduz a

$$u^+ = \frac{1}{\varkappa} \ln y^+ + b_m, \quad (2.149)$$

a lei da parede clássica.

Próximo a um ponto de separação esta mesma expressão se reduz a

$$u^+ = \frac{2}{\beta \varkappa} (y^+)^{1/2} - A, \quad (2.150)$$

a lei da parede de Stratford(1959).

Após o ponto de separação, na região de escoamento reverso, a expressão (2.148) possui validade. Similarmente à equação (2.146), esta equação possui um comportamento logarítmico. O sentido reverso, é garantido pelo sinal negativo.

Consideremos agora um outro aspecto importante do nosso problema: a escala característica do escoamento. Para obtê-la consideremos

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} = 0, \quad (2.151)$$

a equação aproximada junto à parede.

Uma integração sucessiva desta equação nos fornece

$$u^* u_\tau = \frac{\tau_w L}{\rho \nu} y^* + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} \frac{L^2}{2\nu} y^{*2}, \quad (2.152)$$

onde $u^* = u/u_\tau$, $y^* = y/L$ e L é o comprimento característico, ainda a ser determinado.

Considerando que na região viscosa $ord(u^*) = ord(y^*) = ord(1)$, e passando o limite quando $u_\tau \rightarrow 0$, obtemos

$$L = \frac{-u_\tau^2 \pm | -u_\tau^2 | \left(1 + \frac{\nu}{\tau_\tau^2} \frac{dP_w}{dx} u_\tau \right)}{\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}}. \quad (2.153)$$

Da equação acima, resulta que

$$L = \frac{2|u_\tau^2|}{\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}}. \quad (2.154)$$

Como pode ser visto, o comportamento de L a jusante da separação é completamente diferente de seu comportamento a montante, onde $L = \nu/u_\tau$.

Em Cruz e Silva Freire(1994, 1995a, 1995b, 1998) além dos desenvolvimentos descritos acima, uma completa análise da estrutura assintótica do escoamento foi realizada. Mostra-se que a estrutura clássica de duas camadas deve ser substituída por uma estrutura de uma camada, que possui parâmetros de escala variáveis com a distância da separação. No campo de temperaturas, expressões equivalentes àquelas acima para a lei da parede foram desenvolvidas. A principal novidade é o aparecimento de um perfil de temperatura proporcional a $y^{-1/2}$ na região de separação, em oposição ao perfil de $y^{1/2}$ deduzido por Stratford(1959) para a velocidade. Este fato, caracteriza a quebra da hipótese de similaridade de Reynolds junto ao ponto de separação. Este fato implica que o número de Stanton deixa de poder ser calculado diretamente a partir do coeficiente de atrito na parede. Por este motivo, uma equação específica para a previsão do número de Stanton deve ser desenvolvida; este foi o objetivo do trabalho de Cruz e Silva Freire(1996).

Uma discussão sobre os critérios adotados para a previsão da separação da camada limite turbulenta pode ser vista em Cruz e Silva Freire(1992).

2.2.9 A camada limite carregada com partículas sólidas

Escoamentos turbulentos carregados com partículas ocorrem corriqueiramente nos fenômenos naturais e tecnológicos. As primeiras teorias tratavam deste problema sob o ponto de vista puramente estatístico, considerando a dispersão das partículas como a difusão de um contaminante passivo. A difusão turbulenta era então calculada baseada em propriedades do escoamento e das partículas. Nos trabalhos mais recentes, o papel das estruturas coerentes tem sido incorporado na previsão da formação de regiões de alta ou baixa concentração.

A análise do problema com partículas sólidas é de modelagem e solução difícil pois vários fatores como o número de Reynolds da partícula, a constante de tempo, o campo gravitacional, o carregamento mássico, a distribuição e o diâmetro das partículas, a relação entre as massas específicas do fluido e da partícula, sempre deverão ser levados em conta.

A seguir, mostraremos como a presença de pequenas partículas dispersas no fluido afeta as propriedades do escoamento na região da parede. Em particular, mostraremos como a lei da parede é modificada pela ação das partículas.

O procedimento a ser apresentado aqui seguirá os mesmos princípios das seções anteriores. Portanto, a partir das equações gerais do movimento, chegaremos a um conjunto simplificado de equações para a região completamente turbulenta da camada limite, as quais, após sucessivas integrações, fornecerão uma solução analítica local. Para a obtenção das soluções aproximadas,

o importante é modelar corretamente a interação entre as partículas e o escoamento. Devemos atentar para o fato de que, agora, as equações do movimento deverão ser acrescidas de uma equação de transporte para a concentração. Esta nova equação deverá possuir um termo convectivo, um termo difusivo molecular e um termo difusivo turbulento.

Seguindo a análise de Camozzato e Silva Freire(1996a, 1996b, 1998) consideraremos que a força de arrasto por unidade de volume aplicada ao fluido pelas partículas possui uma forma linear. Esta hipótese é razoável para situações onde a partícula é muito mais densa que o fluido, seu número de Reynolds é próximo de um e os efeitos gravitacionais podem ser desprezados.

Segue-se que as equações da conservação da taxa de variação da quantidade de movimento e da concentração podem ser escritas como

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} F_i, \quad (2.155)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{c} \bar{u}_j + \lambda \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.156)$$

onde,

$$F_i = \frac{\bar{C}}{\tau_p} (\bar{U}_i - \bar{V}_i) + \frac{c}{\tau_p} (u_i - v_i). \quad (2.157)$$

Nas equações acima a notação é a clássica; λ representa o coeficiente de transporte molecular de concentração, \bar{C} representa a concentração local média de partículas, τ_p é a chamada constante de tempo aerodinâmica da partícula e \bar{V}_i é a velocidade da partícula. Às equações acima deve ser adicionada a equação da continuidade.

Em Camozzato e Silva Freire(1996), argumentos assintóticos são utilizados para simplificar as equações (2.155) e (2.156) através do reconhecimento da estrutura das camadas limite de velocidade e de concentração. Segue-se que na região completamente turbulenta, as equações aproximadas se reduzem a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_i \bar{u}_j - \frac{1}{\rho} F_i = 0, \quad (2.158)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{c} \bar{u}_j = 0. \quad (2.159)$$

Nesta região, as flutuações de velocidade podem ser consideradas da ordem da velocidade de atrito, u_τ , enquanto as flutuações de concentração podem ser consideradas da ordem da concentração de atrito, c_τ .

Para a solução dessas equações, alguma hipótese deve ser feita sobre a natureza da turbulência. Em Camozzato e Silva Freire(1996b) um modelo simples algébrico foi utilizado. Aqui, apenas adiantaremos que as leis da parede para a velocidade e para a concentração se tornam

$$\bar{U} = u_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln y_\eta + A \right) + \alpha u_\tau \left[\frac{y_\eta}{\kappa \kappa_c} \left(\frac{1}{2} \ln y_\eta + \frac{b \kappa_c}{2} - 1 \right) + D \right], \quad (2.160)$$

$$\bar{C} = c_\tau \left(\frac{1}{\kappa_c} \ln y_\eta + B \right) + \alpha c_\tau \left[\frac{y_\eta}{\kappa_c^2} \left(-\frac{1}{2} \ln y_\eta - \frac{b \kappa_c}{2} + 1 \right) + E \right] \quad (2.161)$$

onde o parâmetro α representa $[(\bar{U} - \bar{V})/\rho\tau_p] [(v_{c\tau})/u_\tau^3]$. A grandeza $(\bar{U} - \bar{V})$ foi considerada constante.

Na realidade, a obtenção das soluções (2.160) e (2.161) é mais complexa do que aquela descrita acima. No trabalho original, os campos de velocidade e de concentração foram representados por expansões assintóticas apropriadas. Após a substituição dessas expansões nas equações (2.158) e (2.159) chega-se então a quatro novas equações do movimento acopladas que devem ser resolvidas simultaneamente. A descrição detalhada da solução pode ser encontrada em Camozzato e Silva Freire(1996b).

As soluções (2.160) e (2.161) foram incluídas no presente trabalho por exemplificar como métodos assintóticos podem ser utilizados para resolver problemas complexos com equações acopladas.

Seguindo ainda a metodologia desenvolvida nas seções anteriores, as soluções acima podem ser estendidas para a região externa do escoamento através da função universal de Coles. Com isto, pode-se deduzir uma equação para a previsão da concentração na parede.

2.3 Referências

Afzal, N.; "A higher order theory for compressible turbulent boundary layers at moderately large reynolds number", *J. Fluid Mechanics*, vol. 57, pp. 1-23, 1973.

Avelino, M. R., Su, J., e Silva Freire, A. P., "A consistent asymptotic solution for the K - ϵ equations for transpired boundary layer flows", 6^o Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Florianópolis, pp. 1839-1843, dezembro, 1996.

Avelino, M. R., Menut, P. P. M. e Silva Freire, A. P., "Characteristics of a turbulent boundary layer when subjected to a step change in surface roughness and temperature", XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM), Bauru, dezembro, 1997.

Avelino, M. R., Menut, P. P. M. e Silva Freire, A. P.; "On the displacement in origin for turbulent boundary layers on a surface downstream of step changes in wall temperature and roughness", 5^o Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Fortaleza, outubro, 1998a.

Avelino, M. R. e Silva Freire, A. P.; "A wind tunnel study of boundary layer flow over a sudden change in surface roughness", X Congresso Brasileiro de Meteorologia, Brasília, outubro, 1998.

Avelino, M. R., Su, J. e Silva Freire, A. P.; "An analytical near wall solution for the κ and ϵ equations for transpired boundary layer flows: Numerical implementation and experimental facts", 8^o Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Rio de Janeiro, dezembro, 1998b, submetido para publicação.

Avelino, M. R., Menut, P. P. M. e Silva Freire, A. P.; "Experimental characterization of a turbulent boundary layer subjected to a step change in surface roughness", 8^o Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Rio de Janeiro, dezembro, 1998c, submetido para publicação.

Avelino, M. R., Su, J. e Silva Freire, A. P.; "An analytical near wall solution for the κ - ϵ model for transpired boundary layer flows", 1998d, submetido para publicação.

Boussinesq, J.; "Essai sur la théorie des eaux courantes", *Mém. prés. Acad. Sci.*, vol. XXIII, pp. 46, 1877.

Camozzato, G. G. e Silva Freire, A. P., "The law of the wall for two-phase solid-liquid systems", 6^o Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Florianópolis, pp. 1851-1855, dezembro, 1996.

Camozzato, G. G., Souza, R., Silva, A. J. S., e Silva Freire, A. P., "The turbulence of mixing of iron particles in water systems", 6^o Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Florianópolis, pp. 1369-1374, dezembro, 1996

Camozzato, G. G. e Silva Freire, A. P.; "A higher order correction for the law of the wall for particle laden flows", 5^o Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Fortaleza, outubro, 1998.

Clauser, F. H. Turbulent Boundary layers in Adverse Pressure Gradients. *J. Aero. Sci.*, vol. 21, pp. 91, 1954.

- Coles, D.; "The law of the wake in turbulent boundary layer", *J. Fluid Mechanics*, vol. 1, pp. 191-226, 1956.
- Cruz, D. O. A. e Silva Freire, A. P.; "Escalas características da camada limite turbulenta na região de separação", 2º Cong. de Eng. Mec. Norte-Nordeste, João Pessoa, junho, 1992.
- Cruz, D. O. A. e Silva Freire, A. P.; "A separation criterion for the turbulent boundary layer", 4º Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Rio de Janeiro, pp. 623-626, dezembro, 1992.
- Cruz, D. O. A. e Silva Freire, A. P.; "The asymptotic structure of the thermal turbulent boundary layer near a separation point", *International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, 9-12 agosto, Lisboa, Portugal, 1994.
- Cruz, D. O. A. e Silva Freire, A. P.; "The Stanton number equation near a separation point", 6º Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Florianópolis, pp. 1863-1867, dezembro, 1996.
- Cruz, D. O. A. e Silva Freire, A. P., 1995a, "The thermal turbulent boundary layer near a separation point. PartII: Law of the wall formulation", XIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM), Belo Horizonte, dezembro, 1995.
- Cruz, D. O. A. e Silva Freire, A. P.; "The asymptotic structure of the thermal turbulent boundary layer near a separation point", *Turbulence, Heat and Mass Transfer*, Begell House, Vol 1, No 1, 1995b.
- Cruz, D. O. A. e Silva Freire, A. P.; "On single limits and the asymptotic behaviour os separating turbulent boundary layers", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 41, No 14, pp. 2097-2111, 1998.
- Hama, F. R. *Boundary Layer Characteristics for Smooth and Rough Surfaces*. *Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Engrs.*, vol. 62, pp. 333, 1954.
- Kaplun, S.; *Fluid Mechanics and Singular Perturbations*, Academic Press, 1967.
- Kistler, A. L., *Fluctuation Measurements in a Supersonic Turbulent Boundary Layer*. *Phys. Fluids*, vol. 2, pp. 290-296, 1959.
- Kistler, A. L. e Chen, W. S., *A Fluctuating Pressure Field in a Supersonic Turbulent Boundary Layer*, *J. Fluid Mechanics*, vol. 16, pp. 41-64, 1963.
- Klebanoff, P. S.; *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes No 3178*, 1955.
- Klebanoff, P. S. e Diehl, F. W.; *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes No 2475*, 1951.
- Laufer, J.; "Investigation of turbulent Flow in a two-dimensional channel", *NACA Rep. 1053*, 1951.
- Laufer, J.; "The structure of turbulence in fully developed pipe flow", *NACA Rep. 1174*, 1954.

Ludwig, H. e Tillmann, W.; *Ingr. Arch.*, vol. 17, pp. 288, 1949.

Maise, G. e McDonald, H.; "Mixing length and kinematic eddy viscosity in a compressible boundary layer", *AIAA J.*, vol. 6, pp. 73-80, 1968.

Medeiros, M. A. F. e Silva Freire, A. P.; "The thermal turbulent boundary layer in an incompressible flow", 10^o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, pp. 65-69, dezembro 1989.

Medeiros, M. A. F. e Silva Freire, A. P.; "The transfer of heat in turbulent boundary layers with injection or suction: universal laws and Stanton number equations", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, No 4, pp. 991-992, 1992

Medeiros, M. A. F.; Pellegrini, C. C. e Silva Freire, A. P.; "The turbulent boundary layer with addition of mass and heat", *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, Elsevier, NY, pp. 779-788, 1990.

Mellor, G. L.; *The Large Reynolds Number Asymptotic Theory of Turbulent Boundary Layers*, *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 10, pp. 851-873, 1972.

Millikan, C. B.; "A critical discussion of turbulent flow in channels and tubes", *Proc. 5th Int. Congress on Applied Mechanics*, J. Wiley, N.Y., 1939.

Morkovin, M. V.; *Effects of Compressibility on Turbulent Flows*, *Int Sym on "Mecanique de la turbulence"*, pp. 367-380, 1962.

Morkovin, M. V.; "The structure of supersonic turbulent boundary layers", *AGARD Wind Tunnel and Model Testing Panel*, 1960.

Moore, W. L. *An Experimental Investigation of the Boundary Layer Development Along a Rough Surface*. Ph. D. Thesis, State University of Iowa, 1951.

Nikuradse, J. *Gesetzmässigkeiten der Turbulenten Strömung in Glatten Rohren*, *Forschung a.d. Geb. Ing.*, No 356, 1930.

Nikuradse, J. *Stromungsgesetze in Rauhen Rohren*. V. D. I. *Forshungsheft* No 361, 1933.

Perry, A. E. & Joubert, P. N. *Rough-Wall Boundary layers in Adverse Pressure Gradients*. *J. Fluid Mechanics*, vol. 17, pp. 193-211, 1963.

Prandtl, L. *Über die Ausgebildete Turbulenz*, *ZaMM*, vol. 5, pp. 136, 1925.

Reynolds, O.; "On the dynamical theory on incompressible viscous fluids and the determination of the criterion", *Phil. Trans. Roy. Soc. A* 186, pp. 123-164, 1895.

Rotta, J. C.; "Heat transfer and temperature distribution in turbulent bounday layers at supersonic and hypersonic flows, *AGARDograph* 97, pp. 35-63, 1965.

Schubauer, G. B. e Klebanoff, P. S.; *NACA Rep.* 1053, 1951.

- Silva Freire, A. P.; "An asymptotic solution for transpired incompressible turbulent boundary layers", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, No. 5, pp. 1011-1021, 1988a.
- Silva Freire, A. P.; "An asymptotic approach for shock-wave/ transpired turbulent boundary layer interactions", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZaMP)*, Vol 39, pp. 478-503, 1988b.
- Silva Freire, A. P.; "An extension of the transpired skin-friction equation to compressible turbulent boundary layers", *International Journal Heat and Mass Transfer*, Vol 31, No 11, pp. 2395-2398, 1988c.
- Silva Freire, A. P.; "On the matching conditions for a two-deck compressible turbulent boundary layer model", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZaMM)*, Vol 69, No 2, pp. 100-104, 1989a.
- Silva Freire, A. P.; "A skin-friction equation for shock-wave/ transpired turbulent boundary layer interactions", 10^o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, pp. 69-73, dezembro 1989b.
- Silva Freire, A. P.; "A detailed review of a solution procedure for shock-wave/turbulent boundary layer interaction problems", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, Vol XI, No 3, pp. 211-246, 1989c.
- Silva Freire, A. P.; "Drag reduction by passive control at transonic speeds: the skin-friction equation", *Proceedings of the 1st International Symposium on Experimental and Computational Aerodynamics of Internal Flows*, Chinese Academy of Sciences, Beijing, pp. 151-158, July, 1990.
- Silva Freire, A. P.; "Asymptotic structure and characteristics of turbulent boundary layers: short review and recent developments", *Trends in Heat & Mass Transfer*, pp. 203-218, Research Trends, Trivandrum, India, 1991.
- Silva Freire, A. P., "On Kaplun limits and the asymptotic structure of the turbulent boundary layers", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, ABCM*, Vol. XVIII, No 1, pp. 80-87, 1996.
- Silva Freire, A. P., "A new law of the wall formulation", XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM), Bauru, dezembro, 1997.
- Silva Freire, A. P., "On Kaplun limits and the multi-layered asymptotic structure of the turbulent boundary layer", submetido para publicação, 1998.
- Silva Freire, A. P., Avelino, M. R. e Santos, L. C. C.; "The state of the art in turbulence modelling in Brazil", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, ABCM*, vol. XX, No 1, pp. 1-38, 1998.
- Silva Freire, A. P. e Cruz, D. O. A.; "Influence of the dissipation function on the turbulent boundary layer temperature solution", 1^o Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Natal, março, 1991.

Silva Freire, A. P.; Cruz, D. O. A. e Pellegrini, C. C.; “Velocity and temperature distributions in compressible turbulent boundary layers with heat and mass transfer”, XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM), São Paulo, SP, pp. 457-460, dezembro, 1991.

Silva Freire, A. P., Cruz, D. O. A. e Pellegrini, C. C.; “Velocity and temperature distributions in compressible turbulent boundary layers with heat and mass transfer”, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol 38, No 13, pp. 2507-2515, 1995.

Silva Freire, A. P. e Hirata, M. H.; “On the matching conditions for turbulent boundary layer problems with heat transfer”, II Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Águas de Lindóia, SP, pp. 241-245, dezembro, 1988.

Silva Freire, A. P. e Hirata, M.H.; “ Approximate solutions to singular perturbation methods: The intermediate variable technique”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol 145, No 1, pp. 241-253, 1990.

Silva Freire, A. P.; Hirata, M. H.; “Analysis of thermal turbulent boundary layers over rough surfaces”, 3^o Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Itapema, SC, pp. 313-316, dezembro, 1990.

Silva Freire, A. P. e Terra, G. S.; “A higher order theory for two dimensional interactions between shock waves and turbulent boundary layers”, XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM). São Paulo, SP, pp. 453-456, dezembro, 1991.

Schubauer, G. B. e Klebanoff, P. S.: Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes No 1030, 1951.

Schultz-Grunow, F.: Luftfahrt-Forsch, vol. 17, pp. 239, 1940.

Stratford, B. S.: An Experimental Flow with Zero Skin-Friction throughout its Region of Pressure Rise, J. Fluid Mechanics, vol. 5, pp. 17-35, 1959.

Su, J., Sandim, C. L. e Silva Freire, A. P.; “A comparative study of four algebraic turbulence models for transpired turbulent boundary layers with an adaptive finite difference solution procedure”. XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM), Brasília, pp. 1045-1048, dezembro, 1993.

Su, J., Avelino, M. R., e Silva Freire, A. P., “A modified near-wall κ - ϵ turbulence model for transpired turbulent boundary layers”, XIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM), Belo Horizonte, dezembro, 1995.

Taylor, G. I. Conditions at a Surface of a Hot Body Exposed to the Wind, Brit. Aero. Res. Comm. R & M No 272, pp. 423, 1916.

Terra, G. S., Su, J., e Silva Freire, A. P., “The asymptotic structure of the turbulent boundary layer when subject to an interacting shock-wave”, 6^o Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT), Florianópolis, pp. 1833-1838, dezembro, 1996.

Terra, G. S., Su, J., e Silva Freire, A. P., “Further results on the asymptotic behaviour of interacting turbulent boundary layers and shock waves”, XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM), Bauru, dezembro, 1997.

van Driest, E. R.; "Turbulent boundary layer in compressible fluid", J. Aero. Sci., vol. 18, pp. 145-160, 1951.

von Kármán, T. Mechanische Ähnlichkeit u. Turbulenz, Nachr. Ges. der Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, vol. 58, 1930.

von Kármán, T. The Analogy Between Fluid Friction and Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 61, pp. 705-710, 1939.

Yajnik, K. S.; Asymptotic Theory of Turbulent Shear Flow, J. Fluid Mechanics, vol. 42, pp. 411-427, 1970.

Capítulo 3

Modelos Algébricos e Diferenciais

César J. Deschamps
Departamento de Engenharia Mecânica (DEM/UFSC)
88040-900. Florianópolis, S.C., Brasil



Figure 3.1: Sinal típico de flutuações de velocidade em um escoamento turbulento; adaptado de Tritton (1988).

3.1 Introdução

A análise de escoamentos é uma atividade extremamente importante a nível tecnológico haja visto que muitos equipamentos e sistemas industriais envolvem líquidos e gases para o seu funcionamento ou a sua manufatura. Na maioria das situações de interesse prático prevalece no escoamento um comportamento caótico de grande complexidade, referenciado comumente como turbulência. A Figura 3.3 mostra um sinal típico de velocidade registrado ao longo do tempo, para uma posição fixa num escoamento, que demonstra o caráter desordenado da turbulência.

Os primeiros modelos para a descrição da transferência de quantidade de movimento e de energia (ou outra propriedade) em escoamentos turbulentos se baseavam essencialmente na identificação de grandezas adimensionais para a caracterização do escoamento. Os modelos assim desenvolvidos relacionam, por exemplo, quantidades tais como o número de Nusselt em função de parâmetros tais como o número de Reynolds Re e o número de Prandtl Pr . Embora úteis em algumas situações, essas correlações são via de regra limitadas à geometria do problema e às faixas de Re e de Pr para as quais foram ajustadas.

Com o surgimento dos primeiros computadores digitais, análises mais elaboradas tornaram-se possíveis através da aplicação de técnicas numéricas para a solução das equações diferenciais governantes do escoamento. Este tipo de análise, normalmente referenciada como Mecânica dos Fluidos Computacional, está hoje bem consolidada como uma alternativa para a análise de problemas de engenharia e, em princípio, se constitui numa ferramenta extremamente flexível. Por exemplo, a característica do escoamento pode ser facilmente modificada pela simples alteração das condições de contorno ou parâmetros físicos introduzidos no procedimento de cálculo. Esta flexibilidade, aliada ao aumento contínuo da capacidade de processamento dos novos computadores (a custos cada vez mais baixos) e ao desenvolvimento de técnicas numéricas mais eficientes, explica o fato da Mecânica dos Fluidos Computacional ser hoje um dos métodos mais empregados para a análise de escoamentos em situações industriais. As Figuras 2 e 3 apresentam uma visão sobre a o custo e a evolução dos recursos computacionais ao longo dos anos.

Apesar desse cenário, e do fato que as equações de Navier-Stokes sejam adequadas para a descrição rigorosa do fenômeno da turbulência, não há expectativa da obtenção de soluções numéricas para situações de interesse industrial num futuro próximo. O problema é que o escoamento turbulento é sempre tridimensional e transiente, caracterizando-se pela presença de vórtices, com uma larga faixa de escalas de comprimento e de tempo, que requerem níveis de discretização espacial e temporal extremamente pequenos para as suas corretas caracterizações. Embora simulações numéricas diretas a partir das equações de Navier-Stokes (" *Direct Numerical Simulation* " - DNS) tenham sido realizadas recentemente para situações relativamente

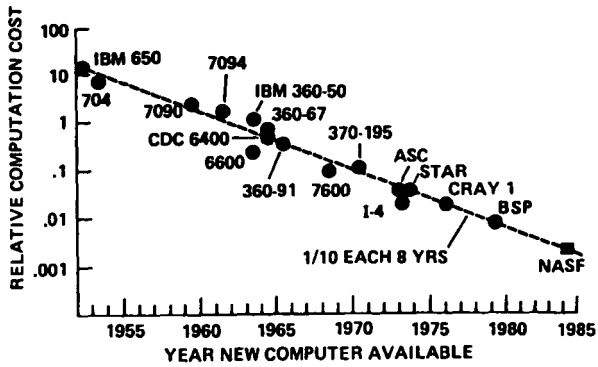


Figure 3.2: Custo computacional relativo ao longo dos anos para a solução de um dado escoamento; adaptado de Fletcher (1991).

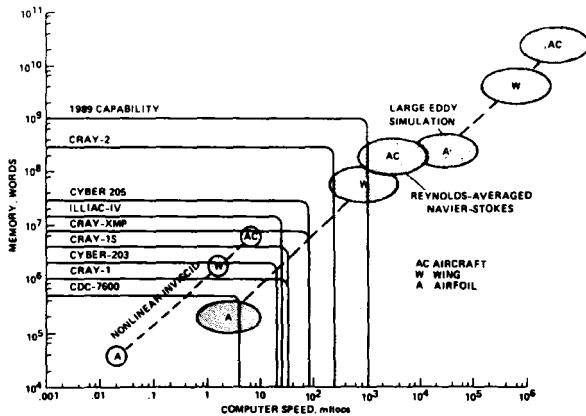


Figure 3.3: Velocidade de processamento e memória computacionais requeridas para a solução numérica de escoamentos; adaptado de Fletcher (1991).

simples de escoamentos turbulentos, a magnitude dos recursos computacionais envolvidos nessas simulações indicam que a solução direta de escoamentos complexos terá que ser aguardada ainda por muitas décadas. Deve-se ressaltar, no entanto, que simulações deste tipo permitem a obtenção de informações sobre parâmetros de difícil, ou impossível, medição experimental. Por esta razão, apesar da limitação na análise de situações complexas de escoamentos, a simulação direta pode e tem sido utilizada para o melhor entendimento da turbulência e para o refino de modelos para a sua descrição.

Uma outra alternativa que tem sido considerada para a solução numérica de escoamentos turbulentos recebe o nome de Simulação de Grandes Escalas (" *Large Eddy Simulation* " - LES). Essa técnica é similar a DNS pelo fato de que ela tenta resolver parte da turbulência, portanto tridimensional e transiente. No entanto, as discretizações espacial e temporal adotadas são aplicadas somente aos maiores vórtices, o que diminui consideravelmente os recursos computacionais necessários para a simulação. As pequenas escalas de comprimento e de tempo, associadas aos menores vórtices e de comportamento mais universal, são aproximadas pela introdução de algum modelo algébrico simples. Apesar da grande redução nos recursos computacionais, quando comparada à simulação direta, a simulação de grandes escalas é ainda impraticável para escoamentos encontrados em situações de engenharia. No entanto, em função dos avanços na área de recursos computacionais, é possível que essa metodologia possa ser utilizada dentro de alguns anos, especialmente para a solução de escoamentos nos quais mesmo os maiores vórtices apresentam transientes rápidos.

Embora informações sobre as menores escalas do escoamento turbulento sejam relevantes, em muitas situações é suficiente uma descrição do escoamento médio. O conceito de tensão de Reynolds, introduzido por Osborne Reynolds (1895), usa esta idéia e é o ponto de partida para a vasta maioria das simulações de escoamentos industriais. De acordo com esse método, qualquer propriedade do escoamento pode ser expressa através de uma quantidade média e de outra de flutuação associada à turbulência. Por exemplo, a componente de velocidade instantânea \tilde{U}_i na direção x_i pode ser escrita como a soma de uma velocidade média U_i e uma flutuação de velocidade u_i em torno da média:

$$\tilde{U}_i = U_i + u_i \quad . \quad (3.1)$$

Aplicando esta definição para todas as quantidades envolvidas no escoamento, pode-se deduzir uma equação para a descrição do escoamento médio através de uma média temporal das equações de Navier-Stokes. Este método é uma espécie de filtro que remove as flutuações das variáveis dependentes, permitindo o uso de malhas bem menos refinadas, o emprego de hipóteses simplificativas (tais como, escoamento bidimensional, regime permanente, etc) e, como consequência, uma redução drástica dos recursos computacionais requeridos.

Da tomada desta média, o único termo relacionado à turbulência que permanece é $\overline{u_i u_j}$, denominado *tensor de Reynolds*. O problema do analista é então o fornecimento de um método para a determinação de $\overline{u_i u_j}$ que possa prever de forma adequada o maior número possível de situações de escoamento. Basicamente, duas são as formas mais utilizadas para este fim:

1. o conceito de viscosidade turbulenta e
2. a modelação da equação de transporte do tensor de Reynolds.

A primeira técnica usa a proposta de Boussinesq (1877) que, numa forma semelhante à postulada para os fluidos Newtonianos, tenta relacionar contribuições da turbulência na transferência da quantidade de movimento (representadas por $\overline{u_i u_j}$) através de taxas de deformação

do escoamento médio. Por exemplo, para uma camada limite sobre uma placa plana a hipótese de Boussinesq fornece:

$$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.2)$$

A hipótese de viscosidade turbulenta relaciona \overline{uv} a gradientes de velocidade do escoamento médio através de uma viscosidade turbulenta ν_t a ser determinada. Modelos com esta finalidade são conhecidos como *modelos de viscosidade turbulenta* numa alusão que o efeito prático da turbulência é o de aumentar a difusão no escoamento.

Embora modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta tenham alcançado sucesso na solução de determinados escoamentos externos muitas deficiências são ainda encontradas em escoamentos internos. Tais deficiências estão geralmente associadas a efeitos de curvatura, regiões de separação e aceleração, para os quais a hipótese de Boussinesq é falha.

Modelos mais sofisticados de turbulência abandonam a hipótese de viscosidade turbulenta e deduzem equações de transporte para o cálculo das componentes de $\overline{u_i u_j}$. Porém, neste novo sistema de equações surgem novas incógnitas, tais como correlações triplas de flutuações de velocidade $\overline{u_i u_j u_k}$, bem como outras envolvendo flutuações de pressão. Novas equações para estas correlações representam o surgimento de outras de ordem ainda superior e um aumento dramático no número de equações diferenciais. O problema assim colocado recebe o nome de *problema de fechamento* pois não é possível igualar o número de equações ao número de incógnitas. A metodologia comumente adotada por diversos grupos de pesquisa emprega a equação de transporte para $\overline{u_i u_j}$ com aproximações para os termos desconhecidos.

O desenvolvimento dos modelos de turbulência, seja a partir do conceito de viscosidade turbulenta ou a partir de equações de transporte para $\overline{u_i u_j}$, tem sido invariavelmente realizado com base em investigações experimentais. Mais recentemente, com a disponibilidade de computadores de grande capacidade de processamento e memória, resultados da simulação direta (DNS) e de grande escalas (LES) estão também sendo utilizados para a calibração dos modelos de turbulência (Rodi et al., 1990). É importante ressaltar que, de fato, o grau de precisão de um modelo de turbulência depende essencialmente da validade das hipóteses utilizadas na sua concepção e que, portanto, o desenvolvimento desses modelos está inevitavelmente associado a uma compreensão fenomenológica do problema em mãos.

O presente texto apresenta em detalhes os modelos de turbulência atualmente utilizados para a simulação de escoamentos de interesse prático. Inicialmente, na seção 2, o conceito de média para o escoamento turbulento introduzido por Reynolds (1895) e que serve de ponto de partida para esses modelos é descrito. Na seção 3 são discutidas algumas características fenomenológicas da turbulência importantes para a modelação de escoamentos. Como visto anteriormente, os modelos de turbulência podem ser divididos em duas classes: i) modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta e ii) modelos para as equações de transporte do tensor de Reynolds. Informações referentes à obtenção desses modelos bem com uma análise dos méritos e limitações de cada um deles, são apresentadas na seção 4 (modelos de viscosidade turbulenta) e na seção 5 (modelos para o transporte do tensor de Reynolds).

3.2 Média do Escoamento Turbulento

3.2.1 O Conceito de Média para Escoamentos Turbulentos

A maioria dos escoamentos encontrados em situações de engenharia são turbulentos e, portanto, tridimensionais e transientes. Como será mostrado na próxima seção, a equação de Navier-Stokes é válida para a descrição do escoamento turbulento mas a sua solução numérica é impraticável, devido aos níveis de discretização espacial e temporal extremamente elevados para a caracterização do movimento dos menores vórtices. Por outro lado, mesmo que os computadores atuais fossem capazes de suprir os recursos computacionais necessários para a simulação numérica, deve-se ter em mente que na maioria das aplicações industriais somente uma pequena parte da solução seria de interesse.

Para eliminar a necessidade de resolver todos os detalhes do escoamento utiliza-se uma integração ao longo de um intervalo de tempo de tal forma que as flutuações instantâneas do escoamento possam ser desprezadas. Quando variações temporais do escoamento, não associadas à turbulência, ocorrem ao longo de escalas de tempo muito maiores do que as referentes aos maiores vórtices, uma média temporal das variáveis como definida por Osborne Reynolds (1895) torna-se conveniente:

$$U_i(t) = \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \tilde{U}_i(t) dt . \quad (3.3)$$

Um aspecto importante desta média é que um grande número de escoamentos turbulentos de interesse são estacionários e assim nesses casos a simulação numérica pode ser realizada para um único instante de tempo. Adicionalmente, as propriedades resultantes desta média para um escoamento turbulento estacionário variam muito menos espacialmente do que os valores instantâneos da turbulência. Por exemplo, em algumas situações as propriedades médias podem apresentar variações significativas somente em uma ou duas direções, muito embora o escoamento instantâneo seja sempre tridimensional.

A velocidade média na equação (3.3) é definida como um valor limite alcançado para valores de T indefinidamente longo. Na prática, o valor médio pode ser estabelecido num intervalo de tempo pequeno que, dependendo do escoamento, pode representar uns poucos segundos ou mesmo alguns milésimos de segundo. Em regiões do escoamento totalmente turbulento a velocidade média pode ser avaliada de forma razoável num intervalo de tempo da ordem de $10^2 L/u$, onde u e L são as magnitudes das escalas de velocidade e de comprimento, respectivamente, dos maiores vórtices. Desta forma, a equação (3.3) pode em princípio ser usada para a definição de valores médios mesmo em escoamentos não-estacionários, desde que o ao longo do tempo mínimo necessário para a média, T , a variação da velocidade média seja muito pequena, ou seja:

$$\frac{\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{U}_i(t) dt - \int_{T/2}^{3T/2} \tilde{U}_i(t) dt}{\int_0^T \tilde{U}_i(t) dt} \ll 1 \quad (3.4)$$

Quando as variações temporais do escoamento médio são tão rápidas que a equação (3.4) não é satisfeita, a definição dada pela equação (3.3) deixa de ser válida.

A diferença entre a velocidade instantânea \tilde{U}_i e seu valor médio U_i é definida como

$$u_i = \tilde{U}_i - U_i \quad (3.5)$$

Da equação (3.3) pode-se observar que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_{i(t)} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{U}_{i(t)} dt - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U_{i(t)} dt = 0 \quad (3.6)$$

Por conveniência, usaremos a seguinte notação para a média temporal aplicada acima a u_i

$$\bar{u}_i = 0 \quad (3.7)$$

Por analogia ao que foi feito para a velocidade \tilde{U}_i , uma quantidade instantânea qualquer $\tilde{\Phi}$ pode ser escrita como a soma de um valor médio Φ e um termo de flutuação ϕ :

$$\tilde{\Phi} = \Phi + \phi \quad (3.8)$$

e assim,

$$\bar{\phi} = 0 \quad (3.9)$$

Com essas relações, podemos agora obter outras necessárias na avaliação da transferência de quantidade de movimento, calor e massa do escoamento médio:

$$\overline{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_i}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (3.10)$$

uma vez que operações temporais e espaciais são comutativas. Da mesma forma,

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.11)$$

3.2.2 Equação de Reynolds

O campo de velocidade instantâneo de um escoamento turbulento é descrito pelas equações de Navier-Stokes:

- Conservação da Massa,

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{U}_i}{\partial x_i} = 0 ; \quad (3.12)$$

- Conservação da Quantidade de Movimento na direção x_i

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{U}_j \tilde{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \tilde{\mu} \left[\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_k} \right] \right\} + \tilde{F}_i , \quad (3.13)$$

onde \tilde{F}_i é uma força de corpo instantânea. Todas as quantidades aparecendo nas equações acima podem apresentar flutuações decorrentes da turbulência. Vamos considerar que as variações da massa específica $\tilde{\rho}$ e da viscosidade $\tilde{\mu}$ sejam suficientemente pequenas de tal forma que seus efeitos sobre a turbulência possam ser desprezados. Uma outra hipótese que assumiremos é a de escoamento incompressível. Com estas hipóteses, as equações (3.12) e (3.13) podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} = 0 ; \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \tilde{F}_i , \quad (3.15)$$

Realizando a promédia destas equações resulta:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right] + F_i \quad . \quad (3.17)$$

Estas equações são conhecidas como as *Equações de Reynolds* e diferem das equações (3.14) e (3.15) apenas pela presença da média do produto das flutuações de velocidade $\overline{u_i u_j}$, denominado *tensor de Reynolds*, o qual representa a transferência de quantidade de movimento adicional causada pela turbulência.

Embora $\overline{u_i u_j}$ tenha sua origem na não-linearidade dos termos de inércia da equação de Navier-Stokes, geralmente ele é agrupado junto à tensão viscosa no lado direito da equação de Reynolds. Por este motivo, e também pelo seu papel no aumento da difusividade da quantidade de movimento, as componentes de $\overline{u_i u_j}$ costumam ser denominadas tensões turbulentas.

Deve-se notar que o tensor de Reynolds é simétrico:

$$\overline{u_1 u_2} = \overline{u_2 u_1} \quad ; \quad \overline{u_1 u_3} = \overline{u_3 u_1} \quad ; \quad \overline{u_2 u_3} = \overline{u_3 u_2} \quad (3.18)$$

Logo existem seis componentes independentes do tensor. A determinação destas componentes é o principal objetivo da modelação da turbulência.

3.2.3 O Conceito de Média Aplicado a Equações de Transporte de Escalares

O transporte de uma propriedade instantânea escalar $\tilde{\Phi}$ pode ser descrita através de uma equação da forma:

$$\frac{\partial \rho \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \tilde{U}_j \tilde{\Phi}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} \right) + \tilde{S}_{\tilde{\Phi}} \quad (3.19)$$

Além de representar eventuais fontes ou sumidouros, o termo $\tilde{S}_{\tilde{\Phi}}$ pode englobar também qualquer termo que não se encaixe na estrutura dos outros termos da equação. Aplicando o conceito de média à equação (3.19) temos

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\gamma \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \right] + \overline{S}_{\Theta} \quad (3.20)$$

onde $\gamma = \Gamma/\rho$. O termo fonte é representado como uma média \overline{S}_{Θ} para enfatizar a possibilidade do mesmo conter termos não-lineares. A média do produto de flutuações $\overline{u_j \theta}$ é interpretada como uma difusividade adicional de Θ devido à turbulência e precisa ser determinada.

3.2.4 Equação de Transporte para o Tensor de Reynolds

Podemos obter uma equação exata para a descrição do transporte do tensor de Reynolds através dos seguintes passos:

1. Troca do índice repetido "j" pelo índice "k" na equação (3.15);
2. Multiplicação da equação por u_j ;
3. Média da equação resultante;
4. Adição de uma equação equivalente a anterior mas com os índices "i" e "j" trocando de posição.

Após algumas manipulações da equação resultante, obtemos

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + C_{ij} = P_{ij} + F_{ij} + \phi_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij} , \quad (3.21)$$

onde

$$C_{ij} = U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} , \quad (3.22)$$

$$D_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k u_i u_j} + \delta_{jk} \frac{\overline{u_i p}}{\rho} + \delta_{ik} \frac{\overline{u_j p}}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) , \quad (3.23)$$

$$P_{ij} = -\left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) . \quad (3.24)$$

$$F_{ij} = \frac{1}{\rho} \left(\overline{f_i u_j} + \overline{f_j u_i} \right) . \quad (3.25)$$

$$O_{ij} = \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) . \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} . \quad (3.27)$$

Os termos do lado esquerdo da equação (3.21) são de fácil interpretação e não necessitam de maiores detalhes. Por outro lado, os dois primeiros termos no lado direito representam a taxa de geração de $\overline{u_i u_j}$ por efeitos da deformação do escoamento médio, P_{ij} , e pela ação de flutuações de força de corpo, F_{ij} .

A correlação entre flutuações de pressão e flutuações de deformação do escoamento, ϕ_{ij} , é muito importante. Podemos notar que seu traço é zero, já que para um escoamento incompressível

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.28)$$

Assim podemos interpretar que o termo ϕ_{ij} não contribui para o nível total da energia da turbulência, atuando somente para a redistribuição da energia entre as tensões normais.

Os termos agrupados em D_{ij} estão associados ao transporte difusivo que somente redistribui espacialmente $\overline{u_i u_j}$. Os três primeiros termos aparecendo em D_{ij} são associados ao transporte turbulento, enquanto que o último representa a contribuição da ação molecular na difusão, podendo ser desprezado em regiões do escoamento totalmente turbulentas.

Finalmente, o termo ε_{ij} representa a taxa de destruição de $\overline{u_i u_j}$ pela ação viscosa. Ao contrário da difusão molecular, citada anteriormente, os termos de dissipação ε_{ij} não podem ser desprezados em situação alguma, já que englobam correlações de derivadas de flutuações de velocidade, as quais são sempre elevadas, mesmo nas menores escalas do escoamento.

Dada a importância dos termos de produção, P_{ij} , é oportuno exemplificar seus valores para uma situação simples de escoamento, mostrada na Figura 3.4, onde a única taxa de deformação

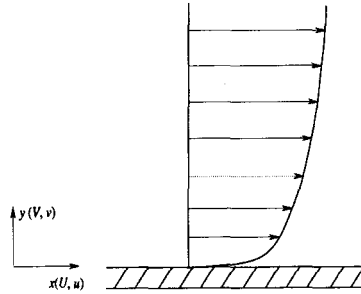


Figure 3.4: Escoamento sobre uma placa plana.

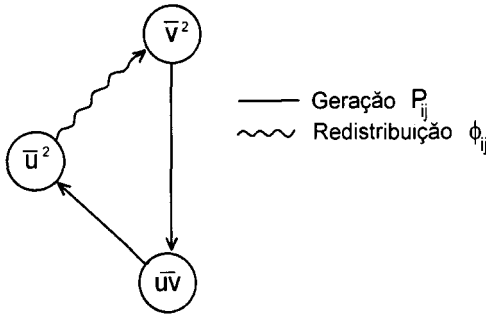


Figure 3.5: Processo de transferência de energia entre as tensões de Reynolds.

importante é $\partial U/\partial y$. Para o caso ilustrado, $\partial U/\partial y > 0$, $\overline{uv} < 0$, $\overline{u^2} > 0$, $\overline{v^2} > 0$ e $\overline{w^2} > 0$. Com estas informações, podemos resumir o valor da produção para cada tensão através da seguinte tabela

Table 3.1: Produção de $\overline{u_i u_j}$

\mathcal{P}_{11}	\mathcal{P}_{22}	\mathcal{P}_{33}	\mathcal{P}_{12}
$-2 \overline{uv} \partial U/\partial y$	0	0	$-2 \overline{v^2} \partial U/\partial y$

Embora não haja produção para as tensões $\overline{v^2}$ e $\overline{w^2}$ isto não significa que elas desaparecerão, uma vez que o termo ϕ_{ij} atua para a redistribuição de energia entre as várias tensões normais. O processo de transferência de energia entre as tensões $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ e \overline{uv} pode ser representado pelo diagrama indicado na Figura 3.5. Detalhes adicionais de como o termo de redistribuição age serão mostrados na seção 5.

3.2.5 Equação de Transporte para a Energia Cinética Turbulenta

Uma quantidade muito utilizada na investigação da turbulência é a energia cinética turbulenta, k , definida como

$$k = \frac{\overline{u_i u_i}}{2} \quad (3.29)$$

Pode-se obter uma equação de transporte para k pela contração da equação de transporte do tensor de Reynolds $\overline{u_i u_j}$ (ou seja, fazendo $i = j$) resultando:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + C_k = \mathcal{D}_k + \mathcal{P} + \varepsilon, \quad (3.30)$$

onde

$$C_k = U_j \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (3.31)$$

$$\mathcal{D}_k = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (3.32)$$

$$\mathcal{P}_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad (3.33)$$

$$\varepsilon = -\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}, \quad (3.34)$$

Os dois primeiros termos no lado esquerdo da equação denotam a taxa de variação local e o transporte por convecção de k , respectivamente.

O termo \mathcal{D}_k representa o transporte de k por difusão, somente transferindo energia de um posição para outra no escoamento, não sendo responsável pela geração nem tampouco dissipação de k . O último termo entre colchetes refere-se ao transporte molecular de k , enquanto os outros dois termos são associados ao transporte turbulento.

O termo de produção \mathcal{P}_k representa a taxa de transferência de energia do escoamento médio para o mecanismo da turbulência. Finalmente, o último termo na equação (3.30), ε , é interpretado como sendo a taxa de dissipação viscosa da energia turbulenta.

3.2.6 Equações de Transporte para o Fluxo Turbulento de Propriedades Escalares

Da mesma forma como fizemos para $\overline{u_i u_j}$, podemos também obter uma equação para o fluxo turbulento de escalares, $\overline{u_i \theta}$, seguindo os seguintes passos:

1. Multiplicação da equação (3.19) por u_i ;
2. Adição dessa equação à equação (3.15) multiplicada por θ e;
3. Média da equação resultante.

Considerando que o termo fonte $\overline{S_\theta}$ não apresenta nenhum termo de flutuação, a equação para $\overline{u_i \theta}$ assume então a seguinte forma:

$$\frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial t} + C_{i\theta} = \mathcal{D}_{i\theta} + \mathcal{P}_{i\theta} + \phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}, \quad (3.35)$$

onde

$$C_{i\theta} = U_k \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_k}, \quad (3.36)$$

$$D_{i\theta} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_k \theta} + \delta_{ik} \frac{\overline{p \theta}}{\rho} - \nu \theta \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \gamma \overline{u_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right), \quad (3.37)$$

$$P_{i\theta} = -\left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} + \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right), \quad (3.38)$$

$$F_{i\theta} = \frac{\overline{f_i \theta}}{\rho}, \quad (3.39)$$

$$\phi_{i\theta} = \frac{\overline{p}}{\rho} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right), \quad (3.40)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = (\gamma + \nu) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}. \quad (3.41)$$

Podemos observar que as equações para $\overline{u_i u_j}$ e $\overline{u_i \theta}$ têm estruturas semelhantes.

3.3 Aspectos Fenomenológicos da Turbulência

3.3.1 Características Básicas da Turbulência

A turbulência se manifesta em situações de escoamentos com número de Reynolds elevado através de instabilidades do escoamento laminar. Os detalhes desta transição não possuem até o momento uma descrição matemática completa, já que a maior parte da teoria aplicada ao surgimento das instabilidades é válida somente para pequenas perturbações no escoamento. No entanto, para a condição de número de Reynolds tendendo ao infinito, onde o transporte devido à ação molecular pode ser desprezado, é possível um tratamento teórico assintótico da turbulência que fornece resultados extremamente úteis.

Apesar da natureza caótica da turbulência, ela pode ser perfeitamente descrita pela teoria do contínuo, uma vez que, como veremos nesta seção, as menores escalas de comprimento envolvidas no problema são bem superiores ao caminho livre médio das moléculas.

O escoamento turbulento é dissipativo e precisa de um suprimento contínuo de energia, caso contrário decai rapidamente. Uma forma para este suprimento é dada pela própria deformação do escoamento médio. Do ponto de vista prático, uma das características mais importantes da turbulência é o aumento da difusividade das propriedades do escoamento (quantidade de movimento, calor e massa) causado pelo seu movimento desordenado. É precisamente a avaliação deste incremento da difusividade que os modelos de turbulência buscam determinar. A próxima subseção apresenta uma avaliação aproximada do efeito da turbulência sobre os mecanismos de transporte do escoamento.

Algumas características de escoamentos livres e de escoamentos junto a superfícies sólidas são introduzidas nas subseções 3.3 e 3.4, com o objetivo de fornecer subsídios para a discussão dos modelos de turbulência algébricos e diferenciais.

3.3.2 Escalas da Turbulência

Uma das características marcantes da turbulência é aumento das taxas de transferência de quantidade de movimento, calor e massa, quando comparada ao regime laminar. Para ilustrar isto, vamos comparar as taxas de difusão molecular e turbulenta de calor numa sala com uma dimensão característica L e na qual está instalado um radiador de calor.

Caso não haja movimentação de ar na sala, o calor deve ser transferido por difusão molecular. Este processo é governado pela equação da difusão

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.42)$$

Ao invés de resolver a equação anterior para um conjunto de condições de contorno, vamos proceder uma análise dimensional, reescrevendo a equação (3.42) na seguinte forma aproximada:

$$\frac{\Delta \theta}{T_m} \sim \gamma \frac{\Delta \theta}{L^2} \quad (3.43)$$

onde $\Delta \theta$ é uma diferença característica de temperatura. Desta forma,

$$T_m \sim \frac{L^2}{\gamma} \quad (3.44)$$

Se o comprimento característico da sala L for igual a 5 m, o tempo T_m é da ordem de 10^6 s (mais de 10 dias). já que $\gamma_{ar} \cong 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Vamos considerar agora que a turbulência também possa ser caracterizada por L , ou seja, os maiores vórtices possuem uma dimensão L já que eles são limitados pelo tamanho da sala. Precisamos também de uma velocidade característica u para o vórtice. Assim, para o escoamento com dimensão L e velocidade característica u , o tempo característico é T_t :

$$T_t \sim \frac{L}{u} \quad (3.45)$$

Uma velocidade característica razoável para este tipo de problema é da ordem de 5 cm/s, o que fornece $T_t \sim 100$ s. Portanto, através deste exemplo podemos observar que a difusão turbulenta é bem mais efetiva do que a molecular.

Com os resultados anteriores para T_m e T_t , podemos expressar a relação entre as escalas de tempo para os dois processos de transporte

$$\frac{T_t}{T_m} \sim \frac{L}{u} \frac{\gamma}{L^2} = \frac{\gamma}{uL} \quad (3.46)$$

Como para gases, $\nu \cong \gamma$, a relação anterior em termos adimensionais fica

$$\frac{T_t}{T_m} \sim \frac{\nu}{uL} = \frac{1}{Re} \quad (3.47)$$

No nosso exemplo $Re \cong 12\,000$. Isto mostra que este número de Reynolds do movimento turbulento pode ser interpretado como a relação entre a escala de tempo molecular (a qual prevaleceria na ausência da movimentação do fluido) e a escala de tempo da turbulência.

Uma forma de tratar o aumento da difusividade originada pela turbulência é através da introdução de uma difusividade turbulenta. Quando fazemos isto, deixamos parcialmente de

lado a busca do entendimento da turbulência e tendemos a tratá-la como se ela fosse uma propriedade do fluido. Conceitualmente, este procedimento é incorreto mas torna o problema matemático bem mais simples. Usando esta definição para o presente problema temos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.48)$$

onde K representa a difusividade turbulenta.

Para que a equação (3.48) possa representar os efeitos verificados no escoamento turbulento, a difusividade K deve ser escolhida de tal forma a fornecer a mesma escala de tempo T_t verificada para a difusão turbulenta. Pela análise dimensional da equação (3.48) concluímos que

$$T_t \sim \frac{L^2}{K} \quad (3.49)$$

e, assim,

$$K \sim uL \quad (3.50)$$

Esta equação mostra que K aumenta com o aumento da escala de comprimento L dos vórtices.

A difusividade K pode ser comparada com a viscosidade cinemática ν e a difusividade térmica γ

$$\frac{K}{\gamma} \cong \frac{K}{\nu} = \frac{uL}{\nu} = Re \quad (3.51)$$

A relação entre as difusividades turbulenta e molecular é portanto outra possível interpretação para o número de Reynolds do movimento turbulento.

Até aqui consideramos somente as maiores escalas de tempo e comprimento associadas aos maiores vórtices. Ao nível das menores escalas de comprimento, correspondentes aos menores vórtices, os termos viscosos atuam no sentido de limitar o surgimento de vórtices ainda menores através da dissipação de energia na forma de calor. Já que movimentos com pequenas escalas de comprimento tendem a ter pequenas escalas de tempo, é possível que estes movimentos sejam estatisticamente independentes dos movimentos mais lentos de grande escala, bem como do escoamento médio. Se esta hipótese for correta, movimentos de pequena escala deveriam depender somente da taxa de suprimento de energia pelo escoamento médio e da viscosidade cinemática. Adicionalmente, como os termos viscosos limitam o tamanho dos menores vórtices, a dissipação ocasionada por estes termos deveria igualar a quantidade de energia fornecida. Esta é a base da "Hipótese do Equilíbrio Universal" de Kolmogorov (1942), a qual postula que os únicos parâmetros importantes para o movimento de pequena escala são a taxa de dissipação ϵ e a viscosidade cinemática ν .

Usando portanto a dissipação ϵ e a viscosidade cinemática ν , podemos formar através de uma análise dimensional as seguintes escala de comprimento η , tempo τ e velocidade v :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}; \quad \tau = \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2}; \quad v = (\nu\epsilon)^{1/4} \quad (3.52)$$

Da equação (3.52) notamos que as escalas de comprimento e velocidade são tais que o número de Reynolds baseado neles é

$$Re = \frac{v\eta}{\nu} = 1 \quad (3.53)$$

Uma hipótese razoável a respeito da taxa de transferência de energia dos vórtices de grande escala para os de pequena escala é assumir que ela seja proporcional ao inverso da escala de tempo dos vórtices de grande escala:

$$T_t^{-1} = \frac{u}{L} \quad (3.54)$$

Como a energia por unidade de massa dos grandes vórtices é proporcional a u^2 , a taxa de transferência de energia é, portanto, proporcional a u^3/L . Como esta energia deve ser dissipada ao nível dos menores vórtices,

$$\varepsilon \sim \frac{u^3}{L} \quad (3.55)$$

Usando a relação (3.55) nas expressões (3.52) para os movimentos de pequena escala temos:

$$\frac{\eta}{L} = \left(\frac{uL}{\nu}\right)^{-3/4} = Re^{-3/4} \quad ; \quad (3.56)$$

$$\frac{\tau}{t} = \frac{\tau u}{L} = \left(\frac{uL}{\nu}\right)^{-1/2} = Re^{-1/2} \quad ; \quad (3.57)$$

e

$$\frac{v}{u} = \left(\frac{uL}{\nu}\right)^{-1/4} = Re^{-1/4} \quad (3.58)$$

Podemos observar que as escalas de comprimento, tempo e velocidade dos menores vórtices são muito menores do que as dos maiores vórtices e que esta diferença aumenta com a elevação do número de Reynolds.

A vorticidade tem dimensões de frequência (s^{-1}). Logo, como a vorticidade dos menores vórtices deve ser proporcional ao inverso da escala de tempo τ , podemos concluir que a vorticidade dos menores vórtices é muito maior do que a dos maiores vórtices. Por outro lado, a relação v/u mostra que a energia dos menores vórtices é bem menor do que a energia contida nos vórtices de grandes escalas e, desta forma, num escoamento turbulento a maior parte da energia está associada ao movimento de grandes escalas.

Antes de terminarmos esta seção, vamos examinar se os escoamentos turbulentos podem ser descritos pela hipótese do contínuo. Da teoria da cinética dos gases

$$\nu \sim c\xi \quad (3.59)$$

onde ν é a viscosidade cinemática, c é a velocidade do som no meio e ξ é o caminho livre médio das moléculas. Assim,

$$\frac{\xi}{\eta} \sim \frac{M}{Re^{1/4}} \ll 1 \quad (3.60)$$

onde

$$M = \frac{u}{c} \quad (3.61)$$

é o número de Mach do movimento turbulento.

Para o caso da transferência de calor numa sala considerada anteriormente, $Re = 12500$ e $M = 1,47 \times 10^{-4}$ e assim $\xi/\eta \cong 1,4 \times 10^{-5}$.

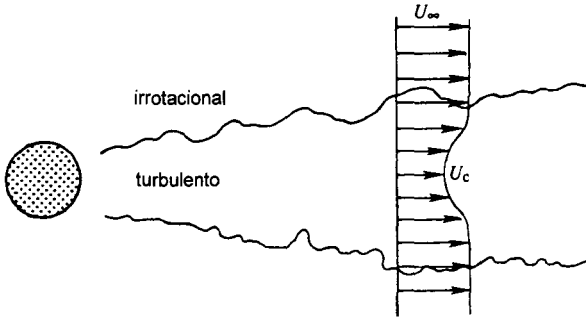


Figure 3.6: Esteira formada pelo escoamento sobre um cilindro; adaptado de Kundu (1990).

3.3.3 Estrutura da Turbulência em Escoamentos Livres

Para a situação de escoamentos livres, como a esteira formada atrás um cilindro (Figura 3.6), a intensidade da turbulência é consideravelmente elevada e fortemente tridimensional. Na ausência de gradientes de velocidade, ou outro mecanismo de suprimento de energia, a turbulência decai com a distância.

A Figura 3.7 mostra a distribuição das tensões de Reynolds ($\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, \overline{uv}) e da energia cinética turbulenta k para uma esteira bidimensional. O valor da tensão cisalhante de Reynolds \overline{uv} é zero no centro da esteira devido à condição de simetria e tende também a zero à medida que se aproxima da borda da esteira, onde vigora o escoamento irrotacional. Neste tipo de escoamento, a intensidade de \overline{uv} é muito maior do que a de $\nu\partial U/\partial y$, fazendo com que a esteira aumente rapidamente o seu espalhamento, com a conseqüente queda da diferença de velocidade $U_\infty - U_c$.

O balanço de energia, apresentado na Figura 3.8, mostra a contribuição de cada um dos termos da equação de transporte da energia cinética turbulenta k . A máxima produção de energia é localizada próximo ao máximo de \overline{uv} (e de $\partial U/\partial y$ também). O principal mecanismo de suprimento de energia para a turbulência é o gradiente de velocidade do escoamento médio. No centro da esteira a difusão é pequena mas ocorre um suprimento de energia considerável devido ao mecanismo de convecção. Na região junto à borda da esteira a convecção torna-se uma contribuição negativa devido à transferência de energia para regiões do fluido ainda não perturbadas e que vão sendo incorporadas pelo espalhamento da esteira.

3.3.4 Estrutura da Turbulência em Escoamentos junto a Superfícies Sólidas

Os níveis das tensões de Reynolds em escoamentos junto a superfícies sólidas são muito menores do que aqueles encontrados em escoamentos livres, devido à ação inibidora da parede.

Podemos expressar a tensão local num escoamento junto a uma parede como a soma da tensão viscosa e da tensão turbulenta:

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu\partial U/\partial y - \overline{uv} \quad (3.62)$$

Na superfície a condição de velocidade nula se aplica a todo instante e, portanto, $U_i = 0$ e $u_i = 0$.

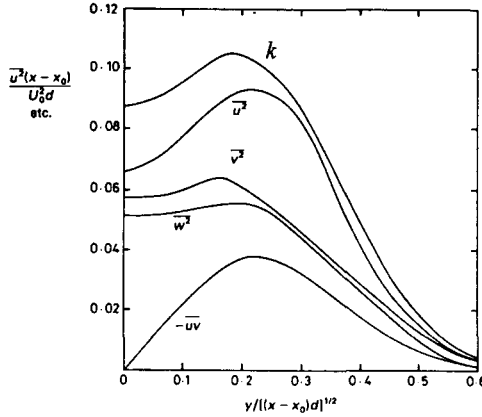


Figure 3.7: Distribuição de tensões de Reynolds numa esteira bidimensional para $Re=1360$, $x/d > 500$; adaptado de Tritton (1988).

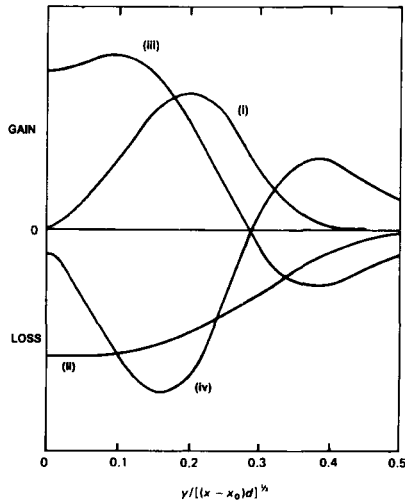


Figure 3.8: Balanço da energia cinética k numa esteira bidimensional: i) produção, ii) dissipação, iii) convecção, iv) difusão; adaptado de Tritton (1988).

Como consequência, a tensão de cisalhamento de Reynolds também é nula na parede ($\overline{uv} = 0$) e, desta forma, a única tensão exercida lá é a tensão viscosa ($\nu \partial U / \partial y$). Numa região um pouco mais afastada da parede a tensão de Reynolds tem seu valor aumentado e eventualmente se compara em importância à tensão viscosa. Finalmente, afastando-se da parede ainda mais, a tensão turbulenta se torna dominante e a difusão molecular pode ser desprezada.

A Figura 3.9 apresenta as distribuições da tensão total τ/ρ , da tensão viscosa $\nu \partial U / \partial y$ e da tensão turbulenta $-\overline{uv}$ para uma camada limite sobre uma placa plana em função da distância à parede. A região onde a tensão viscosa é importante representa uma pequena fração da espessura da camada limite. Para a diminuição brusca na tensão viscosa mostrada na Figura 3.9, o escoamento médio deve apresentar um perfil de velocidade aproximadamente plano na região afastada da parede e uma variação brusca junto à superfície. Para ilustrar isto, a Figura 3.10 mostra para uma mesma vazão os perfis de velocidade numa canalização para as condições correspondentes ao escoamento turbulento e ao escoamento laminar. Fica evidente da figura a variação muito mais brusca do perfil de velocidade junto à parede no caso do escoamento turbulento.

Devido à inibição do movimento do fluido na direção normal à parede, a anisotropia das flutuações de velocidade junto à parede é bem maior do que no caso do escoamento livre. A Figura 3.11 mostra a distribuição das tensões de Reynolds ($\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, \overline{uv}) junto a uma parede sólida. Como pode ser observado, as maiores intensidades das flutuações de velocidade ocorrem na região adjacente à parede, onde os gradientes de velocidade são muito elevados e, como consequência, também a geração da turbulência \mathcal{P}_{ij} .

Uma visão da contribuição de cada um dos mecanismos de transporte no balanço da energia cinética k é apresentada na Figura 3.12. Existe uma região junto à parede onde a produção é elevada e praticamente iguala-se à dissipação. Esta região é comumente dita estar na condição de *equilíbrio local*, numa referência ao fato de que os mecanismos de suprimento e remoção de energia da turbulência estão em equilíbrio.

A taxa de geração \mathcal{P}_k da energia cinética k junto à parede pode ser representada por $\overline{uv} \partial U / \partial y$. Bem próximo à superfície a produção de k é pequena devido ao baixo valor de \overline{uv} . Por outro lado, em regiões afastadas da parede $\partial U / \partial y$ torna-se pequeno e neste caso também a produção será baixa. Podemos escrever o termo de produção de k da seguinte forma

$$\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(\tau - \mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.63)$$

Considerando a região onde a tensão total τ é constante, podemos deduzir dessa equação que a localização da máxima produção de k ocorre para a posição onde $\mu \partial U / \partial y = \tau / 2$, ou seja, onde a tensão viscosa e tensão turbulenta trocam seus papéis de dominância sobre o valor de τ .

O Perfil Universal de Velocidade junto a Paredes Sólidas

Os vórtices próximos a paredes sólidas possuem diminutas escalas de comprimento e assim frequências altas. Desta forma, a turbulência nessas regiões pode ser considerada estatisticamente independente dos vórtices de baixa frequência (grandes escalas de comprimento) e do escoamento médio. Assim, o escoamento junto à parede é assumido ser afetado somente pela proximidade da parede e pela viscosidade do fluido. Tal região é denominada *Região da Parede* e pode ser subdividida em três regiões:

- *Subcamada limite viscosa* - onde o transporte devido à difusão molecular é dominante;

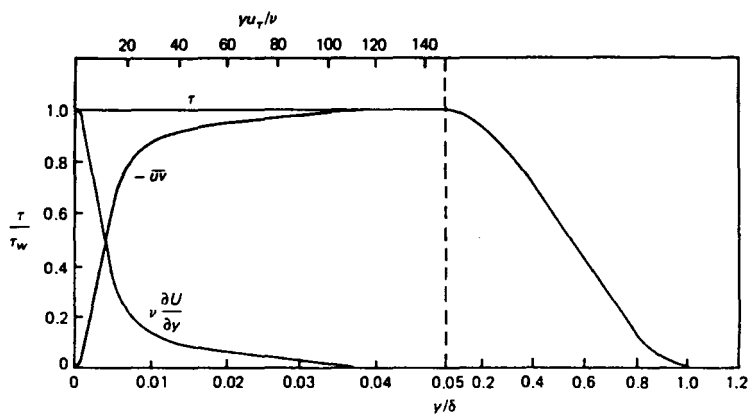


Figure 3.9: Distribuição da tensão total, tensão viscosa e tensão de Reynolds através de uma camada limite; adaptado de Tritton (1988).

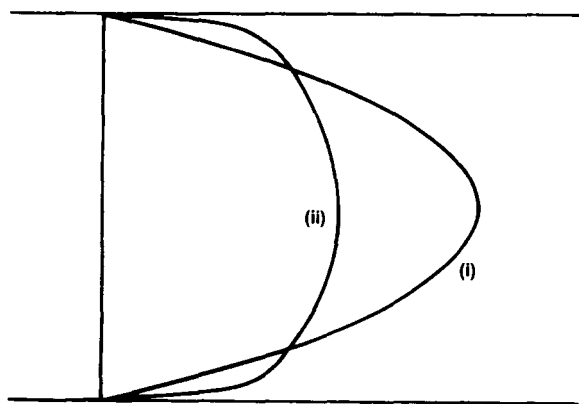


Figure 3.10: Comparação entre perfis de velocidade no interior de uma canalização para uma mesma vazão: i) escoamento laminar; ii) escoamento turbulento; adaptado de Tritton (1988).

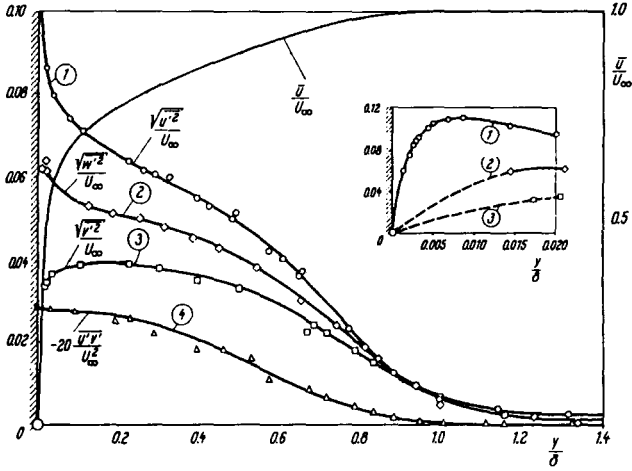


Figure 3.11: Distribuição de tensões de Reynolds junto a uma superfície sólida; adaptado de Schlichting (1968).

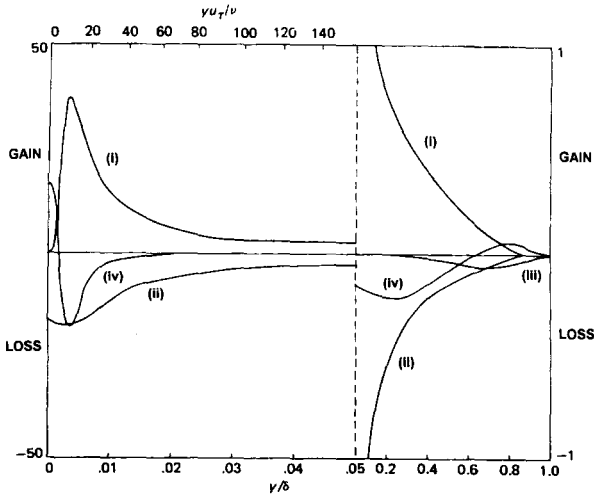


Figure 3.12: Balanço de energia para uma camada limite sobre uma placa plana ($Re_\delta = 7 \times 10^4$): i) produção, ii) Dissipação, iii) convecção, iv) difusão; adaptado de Tritton (1988).

- *Camada de amortecimento* - onde os transportes molecular e turbulento são da mesma ordem de magnitude;
- *Região turbulenta* - onde o transporte turbulento é dominante.

Uma outra característica importante do escoamento turbulento junto a superfícies sólidas é a existência de uma região onde a tensão total τ (a soma da tensão viscosa e da tensão de Reynolds) é constante e igual à tensão na parede τ_w , conforme mostrado na Figura 3.9.

Dadas essas características, o perfil de velocidade U do escoamento pode ser determinado a partir das condições na parede, expressas pela tensão de cisalhamento τ_w e pela rugosidade e , da distância y à superfície e das propriedades físicas do fluido, ou seja:

$$U = U(\tau_w, e, y, \rho, \mu) \quad (3.64)$$

De uma análise dimensional

$$\frac{U}{u^*} = f\left(\frac{u^*y}{\nu}, \frac{u^*e}{\nu}\right) \quad (3.65)$$

onde

$$u^* = \sqrt{\tau_w/\rho} \quad (3.66)$$

e $\nu (= \mu/\rho)$ é a viscosidade cinemática. Para uma superfície lisa $e = 0$ e, portanto,

$$\frac{U}{u^*} = f\left(\frac{u^*y}{\nu}\right) \quad (3.67)$$

• Subcamada limite viscosa

Na subcamada limite viscosa ($y \rightarrow 0$) a tensão total τ é praticamente igual à tensão viscosa e à tensão na parede τ_w . Portanto,

$$\mu \frac{\partial U}{\partial y} \cong \tau = \tau_w \quad (3.68)$$

ou

$$\frac{\partial U}{\partial y} \cong \frac{\tau_w}{\mu}$$

Esta relação indica uma variação linear de velocidade e, como $U = 0$ na parede, temos

$$U = \frac{\tau_w}{\mu} y \quad (3.69)$$

ou, em termos adimensionais:

$$\frac{U}{u^*} = \frac{u^*y}{\nu} \quad (3.70)$$

Denotando

$$u^+ = \frac{U}{u^*} \quad \text{e} \quad y^+ = \frac{u^*y}{\nu} \quad (3.71)$$

podemos escrever o perfil de velocidade para a subcamada limite viscosa como:

$$u^+ = y^+ \quad (3.72)$$

Dados experimentais mostram que esta relação é válida para valores de $y^+ < 5$.

• Região Turbulenta

Na região turbulenta o transporte turbulento é dominante. Portanto espera-se que nessa região a variação da velocidade não dependa da viscosidade mas somente de u^* e y , ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = f(u^*, y) \quad (3.73)$$

Aplicando uma análise dimensional à equação acima temos

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u^*}{\kappa y}$$

onde κ é uma constante de proporcionalidade. Integrando a equação acima, resulta

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (3.74)$$

A relação (3.74) é conhecida como perfil logarítmico de velocidade da parede e é um dos resultados mais conhecidos no estudo da turbulência, sendo válida aproximadamente para o intervalo $30 < y^+ < 200$. Na região $5 < y^+ < 30$ os efeitos viscosos e turbulentos são da mesma ordem de magnitude e um perfil de velocidade deve ser ajustado. Para valores de $y^+ > 200$ a variação de velocidade não depende mais somente dos parâmetros ligados à parede sólida mas também de efeitos dinâmicos da camada limite como um todo.

De acordo com resultados experimentais de Nikuradse (1933) $\kappa = 0,4$ e $B = 5,5$. Por outro lado, num trabalho mais recente Coles e Hirst (1968) propõem $\kappa = 0,41$ e $B = 5,0$. A Figura 3.13 apresenta a distribuição de velocidade do escoamento médio junto a uma superfície sólida comparada a dados experimentais.

É importante notar que a Lei da Parede como deduzida aqui não pode ser aplicada em algumas situações de interesse prático. Exemplos dessas exceções são escoamentos envolvendo paredes com transferência de massa, regiões de separação, regiões com gradientes elevados de pressão ou de massa específica, a presença de forças de corpo, etc.

3.4 Modelos Baseados no Conceito de Viscosidade Turbulenta

Seja qual for o modelo a ser adotado para a simulação do escoamento turbulento, algumas características são desejáveis. Inicialmente, o modelo deveria ser matematicamente simples e envolver o menor número possível de conceitos físicos. Além disto, deveria ser capaz de prever uma grande variedade de escoamentos sem a necessidade de ajustes nas suas constantes ou equações. Finalmente, por uma questão de conveniência o modelo deveria ser numericamente estável.

Os modelos que consideraremos são conhecidos como "single-point closures", pelo fato de avaliarem as correlações envolvendo produtos de flutuações (por exemplo, $\overline{u_i u_j}$) a partir de propriedades localizadas numa mesma posição espacial. Dentro desta classe de modelos existem diferentes metodologias utilizadas para a descrição da turbulência. A maioria delas assume que os fluxos de quantidade de movimento, $\overline{u_i u_j}$, e de escalares, $u_i \theta$, podem ser representados por

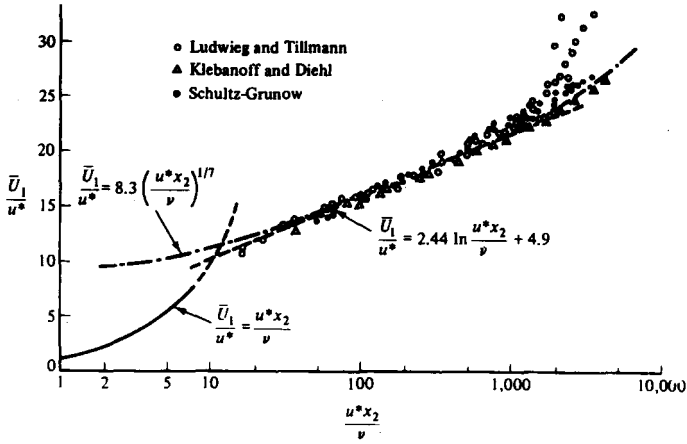


Figure 3.13: Perfil de velocidade junto a uma parede sólida; adaptado de Hinze (1975).

um coeficiente de difusão turbulento (modelos seguindo esta metodologia serão discutidos nesta seção). Outras obtêm formas modeladas para as equações de transporte de $\overline{u_i u_j}$ e $\overline{u_i \theta}$ (modelos deste tipo serão analisados na próxima seção).

3.4.1 Conceito de Viscosidade Turbulenta

A hipótese de que as tensões de Reynolds $\overline{u_i u_j}$ são proporcionais à deformação do escoamento médio, agindo de forma análoga às tensões viscosas, foi originalmente proposta por Boussinesq (1877) através do conceito de viscosidade turbulenta. Considerando um escoamento unidirecional ao longo de uma placa plana infinita, ele propôs que assim como no caso da tensão viscosa, a contribuição da turbulência na transferência de quantidade de movimento poderia ser modelada por

$$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.75)$$

onde u e v são as flutuações de velocidade associadas às componentes de velocidade U e V , paralela e normal à superfície, respectivamente, e y é a direção normal à superfície da placa. Em contraste à viscosidade molecular, ν_t não é uma propriedade física do fluido mas sim uma medida local do nível da turbulência, variando de ponto a ponto e de escoamento para escoamento.

Ao longo dos últimos anos, a hipótese de Boussinesq, numa forma generalizada proposta por Kolmogorov (1942), tem sido um dos métodos mais empregados para a previsão de escoamentos turbulentos. Segundo Kolmogorov (1942), o tensor de Reynolds pode ser avaliado através da seguinte relação:

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (3.76)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e k é a energia cinética das flutuações de velocidade. Introduzindo esta relação na equação (3.17) resulta:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{2}{3}k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.77)$$

Modelos seguindo esta hipótese avaliam ν_t utilizando desde simples relações algébricas até mesmo equações diferenciais. A energia cinética k não precisa ser obtida obrigatoriamente do modelo já que ela pode ser eliminada pela definição de uma nova pressão P^* para o escoamento:

$$P^* = P + \frac{2}{3}k$$

3.4.2 Modelo Algébrico do Comprimento de Mistura

Considerando um escoamento turbulento simples com $U = U(y)$ e $V = W = 0$, conforme representado na Figura 3.14, Prandtl (1925) desenvolveu sua *Hipótese do Comprimento de Mistura* e propôs com base nela um modelo algébrico de turbulência.

Prandtl imaginou para o escoamento turbulento ao longo da parede, porções de fluido que se juntam e movimentam-se através de um determinado comprimento ℓ_m sem alterar sua quantidade de movimento na direção x . Vamos assumir inicialmente que o movimento de uma porção de fluido comece em $y = -\ell_m$ e se desloque com $v > 0$ ao longo de um comprimento ℓ_m para a nova posição $y = 0$. Sua quantidade de movimento por unidade de volume é $\rho U(-\ell_m)$, onde $U(-\ell_m)$ designa a velocidade em $y = -\ell_m$. Como o fluido mantém sua quantidade de movimento, sua velocidade na nova posição $y = 0$ é menor do que a velocidade existente lá. A diferença entre as velocidades na nova posição será

$$\Delta U_1 = U(0) - U(-\ell_m) \quad (3.78)$$

Através de uma série de Taylor podemos escrever a expressão acima na seguinte forma aproximada

$$\Delta U_1 \approx \ell_m \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.79)$$

Considerando agora uma porção de fluido vindo de $y = \ell_m$ para $y = 0$, ou seja $v < 0$, a velocidade do fluido será maior do que a velocidade na sua nova vizinhança e a diferença de velocidade será

$$\Delta U_2 \approx \ell_m \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.80)$$

As diferenças no valor de velocidade originada pelo movimento transversal pode ser interpretado como as flutuações de velocidade em $y = 0$. O valor médio do módulo dessas flutuações de velocidade em $y = 0$ pode ser avaliado por:

$$\overline{\|u\|} = \frac{1}{2} (\|\Delta U_1\| + \|\Delta U_2\|) = \ell_m \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \right\| \quad (3.81)$$

A equação acima permite que se interprete o comprimento de mistura como a distância que deve ser percorrida por uma porção de fluido com sua velocidade original de tal forma que a diferença entre os valores de sua velocidade e o da velocidade na nova região seja igual ao valor médio da flutuação de velocidade naquela região.

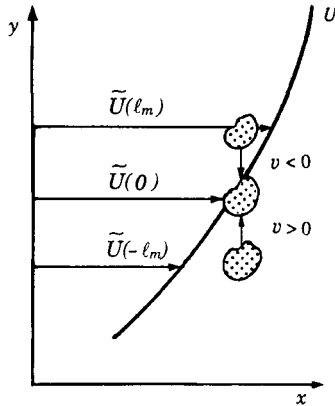


Figure 3.14: Escoamento considerado para a Hipótese do Comprimento de Mistura.

É natural esperar que a componente de velocidade transversal v possui a mesma ordem de magnitude de u , ou seja,

$$\|v\| = c\|u\| = c\ell_m \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \right\| \tag{3.82}$$

onde $0 < c < 1$. Para avaliar o produto \overline{uv} devemos observar que uma condição $v > 0$ geralmente está associada a uma condição de $u < 0$, já que porções de fluido vindas de regiões com menor velocidade tendem a produzir uma redução de velocidade (flutuação) no novo meio. Usando o mesmo argumento, podemos também associar à condição de $v < 0$ valores de $u > 0$. Desta forma, para o perfil de velocidade representado na Figura 3.14, a tensão cisalhante \overline{uv} deve ser escrita como:

$$\overline{uv} = -c\|u\| \cdot \|v\| \tag{3.83}$$

Substituindo as equações (3.81) e (3.82) na equação (3.83) temos

$$\overline{uv} = -\ell_m^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \tag{3.84}$$

já que a constante c pode ser incorporada na expressão de ℓ_m ainda não definida. Finalmente, levando em consideração o sinal que \overline{uv} deve apresentar para diferentes situações de perfis de velocidade, é necessário ainda escrever:

$$-\overline{uv} = \ell_m^2 \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\| \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\| \tag{3.85}$$

A expressão acima é o principal resultado da *Hipótese do Comprimento de Mistura* de Prandtl.

O valor do comprimento de mistura ℓ_m varia de acordo com o tipo de escoamento. Por exemplo, para escoamentos junto a paredes sólidas é natural esperar que, à medida que se aproxime da superfície, a escala de comprimento da turbulência associada ao tamanho do vórtices diminua. Nestas situações a expressão comumente adotada para o comprimento de mistura é

$$\ell_m = \kappa y \tag{3.86}$$

onde $\kappa = 0,41$.

Por outro lado, em regiões do escoamento sem a influência de superfícies sólidas, a escala de comprimento é praticamente equivalente a dimensão geométrica do escoamento. Nesses casos, o comprimento de mistura é geralmente definido por:

$$\ell_m = c_\kappa \delta \quad (3.87)$$

onde δ pode representar a espessura da camada limite, no caso de esteiras e jatos planos, ou o raio no caso de jatos circulares. O coeficiente c_κ é introduzido para ajustar a relação aos vários tipos de escoamento, podendo assumir valores entre 0,07 e 0,16.

Para uma consulta dos valores de ℓ_m adequados a diferentes situações de escoamento turbulento recomenda-se o livro de Launder e Spalding (1972).

3.4.3 Modelo a Uma Equação

Na seção 3 vimos que podemos expressar a viscosidade turbulenta como o produto de uma velocidade característica u e uma escala de comprimento L . Ou seja,

$$\nu_t \sim uL \quad (3.88)$$

Uma forma de introduzir um pouco de mais informação física do escoamento no cálculo de ν_t é considerar no cálculo da velocidade característica u a energia cinética turbulenta k ($= \overline{u_i u_i} / 2$) da seguinte forma:

$$u = k^{1/2} \quad (3.89)$$

A equação de transporte para k

$$\frac{\partial k}{\partial t} + C_k = \mathcal{D}_k + \mathcal{P} + \varepsilon$$

onde

$$\begin{aligned} C_k &= U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \\ \mathcal{D}_k &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \mathcal{P}_k &= -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ \varepsilon &= -\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} \end{aligned}$$

já foi deduzida na seção 2.

Nesta equação, os dois primeiros termos no lado esquerdo da equação denotam a taxa de variação local e o transporte por convecção de k , respectivamente, e não necessitam ser modelados.

O termo \mathcal{D}_k representa o transporte de k por difusão. O último termo entre colchetes refere-se ao transporte difusivo molecular de k e é somente importante em regiões de baixa intensidade da turbulência (como, por exemplo, a subcamada limite viscosa). Os outros dois

termos aparecendo em \mathcal{D}_k são associados ao transporte difusivo turbulento e são portanto aproximados através a idéia do conceito de viscosidade turbulenta:

$$-u_j \overline{\left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} \simeq \gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (3.90)$$

A difusividade γ_k é determinada da analogia de Reynolds, que relaciona a difusividade de qualquer propriedade linearmente com a difusividade da quantidade de movimento, isto é:

$$\gamma_k \simeq \frac{\nu_t}{\sigma_k} \quad (3.91)$$

O número de Prandtl turbulento σ_k para o transporte de k é comumente assumido ser igual a 1.

O termo \mathcal{P}_k , geralmente denotado de termo de produção, representa a taxa de transferência de energia do escoamento médio para o mecanismo da turbulência. Em modelos baseados na hipótese da viscosidade turbulenta, o tensor $\overline{u_i u_j}$ aparecendo em \mathcal{P}_k é aproximado utilizando a equação (3.76).

Finalmente, o último termo aparecendo na equação, ε , é interpretado como sendo a taxa de dissipação viscosa de k . Neste caso, a hipótese de equilíbrio local e a observação experimental, que relacionam a dissipação de energia dos grandes vórtices ($\sim k$) com as suas escalas de tempo ($\sim L/k^{1/2}$), já discutido na seção 3, produzem a seguinte estimativa para ε .

$$\varepsilon \simeq \frac{k^{3/2}}{L_\varepsilon} \quad (3.92)$$

Usando essas aproximações, o modelo a uma equação pode ser expresso como:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \frac{k^{3/2}}{L_\varepsilon} \quad (3.93)$$

A viscosidade turbulenta é obtida da seguinte relação, proposta independentemente por Kolmogorov (1942) e Prandtl (1945) e caracterizada, em adição à velocidade $k^{1/2}$, pela escala de comprimento L_μ :

$$\nu_t = c_\mu k^{1/2} L_\mu \quad (3.94)$$

onde $c_\mu (= 0.09)$ é uma constante empírica.

Assumindo a condição de equilíbrio local podemos encontrar uma expressão para L_ε . Inicialmente, reconhecemos que para esta condição

$$-\overline{u v} \frac{\partial U}{\partial y} = \varepsilon \quad (3.95)$$

Para o modelo a uma equação

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{L_\varepsilon} \quad (3.96)$$

Portanto,

$$L_\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{-\overline{u v} \partial U / \partial y} \quad (3.97)$$

Como nesta região o perfil de velocidade é o logarítmico, $\partial U/\partial y = u^*/\kappa y$. Introduzindo esta relação na equação anterior, e lembrando que na região da parede a tensão local $-\overline{uv}$ é praticamente igual à tensão na parede τ_w e $\ell_m = \kappa y$ temos

$$L_\epsilon = -\frac{k^{3/2}}{(\overline{uv})^{3/2}} \ell_m$$

Para a maior parte da camada limite o coeficiente estrutural $-\overline{uv}/k \cong 0,3$ se aplica. Logo,

$$L_\epsilon = 2,44y$$

A escala de comprimento L_μ é geralmente considerada ser igual a L_ϵ . No entanto, para a região muito próxima à parede onde a viscosidade molecular ν é maior ou comparável a viscosidade turbulenta ν_t , a inclusão das seguintes funções de amortecimento se torna necessária para a previsão correta do escoamento:

$$L_\epsilon = 2,44y [1 - \exp(-A_D y^*)] \quad (3.98)$$

$$L_\mu = 2,44y [1 - \exp(-A_\mu y^*)] \quad (3.99)$$

onde A_D e A_μ são constantes iguais a 0,235 e 0,016, respectivamente, e y^* representa um número de Reynolds local que indica a intensidade da turbulência e definido como $y^* = yk^{1/2}/\nu$.

Para escoamentos livres L_ϵ é usualmente expresso por

$$L_\epsilon = c\delta \quad (3.100)$$

onde $0,4 < c < 1$ (dependente do tipo de escoamento) e δ é a espessura da camada limite.

Para o caso de camada limite sobre superfícies sólidas é comum a definição de uma "função-degrau":

$$\begin{aligned} L_\epsilon &= 2,44y \rightarrow y/\delta \leq \lambda/\kappa \\ L_\epsilon &= c\delta \rightarrow y/\delta > \lambda/\kappa \end{aligned} \quad (3.101)$$

onde $\lambda = 0,09$ e $\kappa = 0,41$. Maiores detalhes do modelo a uma equação podem ser obtidos em Launder e Spalding (1972).

3.4.4 Principais Observações sobre os Modelos Algébrico e a Uma Equação

Como vimos anteriormente, o modelo algébrico do comprimento de mistura necessita somente de quantidades do campo de velocidade média do escoamento e, desta forma, requer menos recursos computacionais do que o modelo a uma equação.

Para escoamentos em dutos, o modelo a uma equação permite o cálculo de regiões plenamente desenvolvidas, ou em desenvolvimento, com a simples prescrição de L_ϵ . No caso do modelo do comprimento de mistura necessitamos introduzir ajustes para evitar que $\nu_t = 0$ quando $\partial U/\partial y = 0$ (Figura. 3.15a).

Regiões de separação do escoamento (Figura. 3.15b) são também situações onde o modelo do comprimento de mistura é totalmente inadequado. Devido aos pequenos gradientes de velocidade média na região de separação, o modelo do comprimento de mistura não é capaz de prever os coeficientes do transporte turbulento com a intensidade evidenciada por dados experimentais. Além disto, o modelo é também incapaz de prever os níveis elevados de turbulência

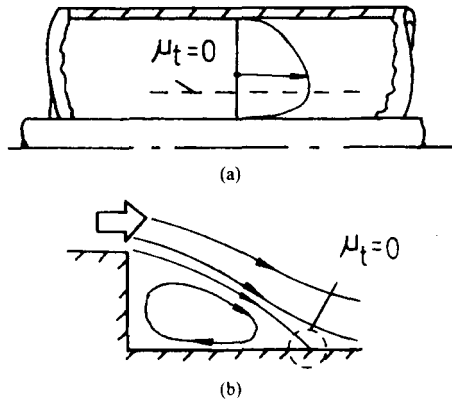


Figure 3.15: Situações de escoamento onde o modelo do comprimento de mistura fornece resultados fisicamente inconsistentes: adaptado de Launder e Spalding (1972).

verificados experimentalmente em regiões de estagnação do escoamento. Essa deficiências, que não acontecem no modelo a uma equação, se originam essencialmente pelo fato do modelo do comprimento de mistura não incluir os mecanismos de transporte por convecção e difusão no cálculo de ν_t . Para a condição de equilíbrio local, onde a convecção e a difusão são insignificantes, os dois modelos de turbulência são equivalentes.

A maior deficiências do modelo a uma equação, e também da formulação do comprimento de mistura, é a necessidade de se prescrever uma escala de comprimento para caracterização da turbulência. Esta prática, com a exceção de escoamentos de geometria simples, é de difícil execução. O ideal seria portanto determinar o valor da escala L_ϵ também de uma equação de transporte; este enfoque é discutido a seguir.

3.4.5 Modelos a Duas Equações

A Escolha da Segunda Variável

Na elaboração de um modelo a duas equações faz sentido continuarmos usando a equação para a energia cinética k , devido ao pouco empiricismo usado na sua obtenção. Como podemos utilizar qualquer combinação do tipo $k^a L^b$ para a segunda variável, várias propostas surgiram ao longo dos anos:

- Frequência dos vórtices $f(= k^{1/2} L^{-1})$ (Kolmogorov, 1942);
- Produto energia \times escala de comprimento kL (Rodi e Spalding, 1970);
- Vorticidade; $w(= kL^{-2})$ (Wilcox, 1988);
- Dissipação $\epsilon(= k^{3/2} L^{-1})$ da energia cinética k (Harlow e Nakayama, 1968 e Launder e Spalding, 1974).

O modelo $k-\epsilon$ é sem dúvida o modelo que tem recebido maior atenção devido, principalmente, aos trabalhos de Jones e Launder (1972, 1973) e de Launder e Spalding (1974).

Equação de Transporte para ϵ

Uma equação exata para o transporte de ϵ pode ser obtida pela manipulação das equações de Navier-Stokes.

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}}_I &= - \underbrace{2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)}_{II} - \underbrace{2\nu \frac{u_j \partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}}_{III} \\
 &\quad - \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{IV} - \underbrace{2 \left(\nu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2}_V \\
 &\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right]}_{VI}
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

O termo I corresponde à taxa da variação local e a taxa do transporte de ϵ por convecção e não necessita de modelação alguma. Porém, vários outros termos na equação precisam ser aproximados. Os termos II e III representam a geração de ϵ devido a mecanismos associados a vorticidade e ao escoamento médio. De acordo com Tennekes e Lumley (1972), ambos podem ser desprezados em situações de números de Reynolds elevados. Os termos IV e V são, respectivamente, a geração devido ao alongamento dos vórtices e à dissipação viscosa. Finalmente, o termo VI representa a difusão de ϵ .

Modelação da Equação de ϵ

Os termos na equação de transporte de ϵ podem ser agrupados de tal forma a representarem mecanismos físicos distintos:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \mathcal{D}_\epsilon + \mathcal{P}_\epsilon + d_\epsilon \tag{3.103}$$

onde \mathcal{D}_ϵ , \mathcal{P}_ϵ e d_ϵ representam, respectivamente, os mecanismos de difusão, produção e destruição de ϵ . As principais técnicas para a modelação dos termos na equação de ϵ são a análise dimensional e a intuição física.

A difusão \mathcal{D}_ϵ é aproximada usando o gradiente de ϵ :

$$d_\epsilon \cong \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \tag{3.104}$$

Por outro lado, a produção \mathcal{P}_k de k deve ser balanceada pela produção \mathcal{P}_ϵ de ϵ para evitar um aumento ilimitado de k . Assim,

$$\mathcal{P}_\epsilon \approx \frac{\epsilon}{k} \mathcal{P}_k \tag{3.105}$$

onde (ϵ/k) é o inverso da escala de tempo.

O termo de destruição d_ϵ na equação de ϵ deve tender ao infinito quando $k \rightarrow 0$, caso contrário k pode tornar-se negativo. Desta forma:

$$d_\epsilon \approx \frac{\epsilon}{k} \epsilon \tag{3.106}$$

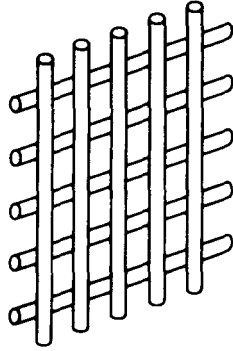


Figure 3.16: Escoamento através de uma tela.

Usando as aproximações anteriores, o modelo k - ε para números de Reynolds elevados assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \varepsilon. \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mathcal{P}_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (3.108)$$

onde:

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (3.109)$$

com os valores das constantes tomando os seguintes valores: $c_\mu = 0,09$; $c_{\varepsilon 1} = 1,44$; $c_{\varepsilon 2} = 1,92$; $\sigma_k = 1,0$ e $\sigma_\varepsilon = 1,3$. A seguir são apresentadas as formas através das quais os valores de c_μ , $c_{\varepsilon 1}$ e $c_{\varepsilon 2}$ são determinados.

- Determinação de $c_{\varepsilon 2}$

O valor de $c_{\varepsilon 2}$ é determinado pela observação do decaimento da turbulência gerada por uma tela em um túnel de vento, conforme ilustrado esquematicamente na Figura 3.16. Para uma posição suficientemente afastada da tela ($x > 100\Upsilon$), onde Υ é o espaçamento da malha, pode-se obter aproximadamente a condição de isotropia para a turbulência ($\overline{u^2} \cong \overline{v^2} \cong \overline{w^2}$) e portanto $k \cong 3/2 \overline{u^2}$.

Considerando o escoamento ser uniforme e a turbulência homogênea, as equações de k e ε assumem a seguinte forma:

$$U \frac{dk}{dx} = -\varepsilon \quad (3.110)$$

e

$$U \frac{d\varepsilon}{dx} = -c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.111)$$

Assumindo uma variação para energia cinética do tipo $k = cx^n$ nas equações acima temos

$$Ucnx^{n-1} = -\varepsilon \quad (3.112)$$

e

$$U^2 cn(n-1)x^{n-2} = -c_{\varepsilon 2} \frac{(Ucnx^{n-1})^2}{cx^n} \quad (3.113)$$

Logo,

$$c_{\varepsilon 2} = \frac{n-1}{n} \quad (3.114)$$

De medições experimentais do decaimento de k ao longo de x temos que $n \cong -1.08$ e desta forma $c_{\varepsilon 2} = 1,92$.

- Determinação de c_μ

A constante c_μ pode ser determinada a partir da região logarítmica do perfil de velocidade, onde o efeito da tensão viscosa é insignificante, a produção de energia cinética é igual à dissipação viscosa e a tensão de Reynolds ($\overline{uv} = (u^*)^2 = \tau_w/\rho$) é praticamente constante.

Do perfil logarítmico de velocidade podemos escrever

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u^*}{\kappa y} \quad (3.115)$$

onde $\kappa = 0,41$. Substituindo a relação acima na equação da energia cinética k para a condição de equilíbrio local vem que

$$\mathcal{P} = \varepsilon = \frac{\tau_w}{\rho} \left[\frac{(\tau_w/\rho)^{1/2}}{\kappa y} \right] \quad (3.116)$$

Logo, podemos escrever

$$\varepsilon = \frac{(u^*)^3}{\kappa y} \quad (3.117)$$

Expressando a tensão turbulenta através do conceito de viscosidade turbulenta do modelo $k-\varepsilon$

$$-\overline{uv} = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.118)$$

e substituindo as estimativas para os valores de ε e $\partial U/\partial y$ temos

$$-\frac{\overline{uv}}{k} = c_\mu^{1/2} \quad (3.119)$$

Ao longo da maior partê da camada limite sobre uma placa plana a seguinte relação estrutural da turbulência é válida (Figura 17):

$$-\frac{\overline{uv}}{k} \cong 0,3 \quad (3.120)$$

Portanto, $c_\mu \cong 0,09$.

- Determinação de $c_{\varepsilon 1}$

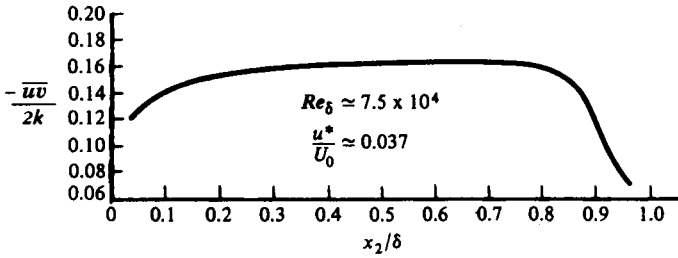


Figure 3.17: Relação entre a tensão cisalhante \overline{uv} e a energia cinética k na seção transversal de uma camada limite: adaptado de Hinze (1975).

A determinação de $c_{\varepsilon 1}$ pode também ser realizada com auxílio do perfil de velocidade logarítmico e da condição de equilíbrio local. Estas condições aplicadas à equação modelada do transporte de ε (retendo os termos de difusão, produção e dissipação) fornecem como resultado

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^{*4}}{\sigma_\varepsilon} y^{-1} \right) + \frac{(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1}) c_\mu^{1/2} u^{*4}}{\kappa^2 y^2} \tag{3.121}$$

Resolvendo a equação acima temos

$$c_{\varepsilon 1} = c_{\varepsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon c_\mu^{1/2}} \tag{3.122}$$

Podemos observar que $c_{\varepsilon 1}$ é relacionado a σ_ε . Os escoamentos livres são muito sensíveis a mudanças nos coeficientes $c_{\varepsilon 1}$ e $c_{\varepsilon 2}$, tal que uma alteração de 10% nos seus valores altera a taxa de crescimento da camada limite de mistura em torno de 40%. Estes escoamentos são adotados para ajustar numericamente os valores de $c_{\varepsilon 1}$, pelo ajuste de σ_ε , de tal forma que o modelo produza uma boa previsão do escoamento. O valor de $\sigma_\varepsilon = 1,3$ é comumente adotado no modelo, gerando um valor de $c_{\varepsilon 1} = 1.49$. No entanto, o modelo de Launder e Spalding (1974) emprega $c_{\varepsilon 1} = 1.44$.

Modelo $k-\varepsilon$ para Números de Reynolds Baixos

Em regiões junto a superfícies sólidas onde $y^+ < 30$, o transporte difusivo molecular não pode ser desprezado e portanto deve ser incluído em todas as equações de transporte. Praticamente todos os modelos a duas equações utilizam alguma correção, em função de um número de Reynolds da turbulência, para a previsão correta do escoamento.

Considera-se que os efeitos viscosos começam ser importantes quando:

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} < 100 \tag{3.123}$$

Em regiões próximas a paredes sólidas, a condição de não deslizamento implica que $k \rightarrow 0$ e $\varepsilon \neq 0$ quando $y \rightarrow 0$, onde y é a distância à parede. Então nessas regiões $R_t \rightarrow 0$. Para ilustrar isto vamos considerar a o escoamento sobre a placa plana mostrada na Figura 18.

A condição de não-deslizamento na parede implica que para as flutuações de velocidade u , v e w

$$u = v = w = 0$$

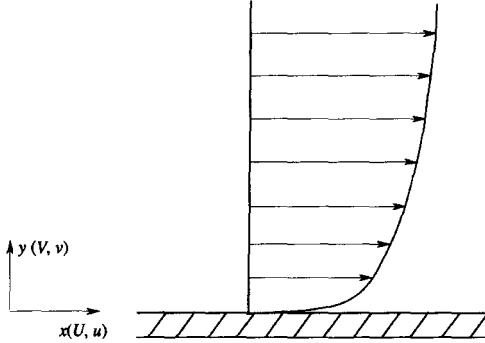


Figure 3.18: Escoamento sobre uma placa plana.

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.124}$$

em $y = 0$. Assim, pela continuidade,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \tag{3.125}$$

Portanto, representando as flutuações de velocidade u , v e w através de polinômios

$$\begin{aligned} u &= a_1 y + a_2 y^2 + \dots \\ v &= \quad \quad b_2 y^2 + \dots \\ w &= c_1 y + c_2 y^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.126}$$

temos,

$$\begin{aligned} \overline{uv} &\sim a_1 b_2 y^3 + \dots \\ k &\sim 1/2 (a_1^2 + c_1^2) y^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.127}$$

e

$$\nu_t \sim y^3 \tag{3.128}$$

Sabemos que

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} \tag{3.129}$$

Portanto, para a dissipação na parede, ε_w , a seguinte condição ocorre

$$\varepsilon_w = \nu \left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} \right] = 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \tag{3.130}$$

Da equação acima podemos observar que ε em $y = 0$ é diferente de zero ($\varepsilon_w \neq 0$). No entanto definindo $\tilde{\varepsilon}$ como

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \tag{3.131}$$

temos que $\tilde{\varepsilon}_w = 0$.

O primeiro modelo k - ε para números de Reynolds baixos foi proposto por Jones e Launder (1972) e adota $\tilde{\varepsilon}$ ao invés de ε com o objetivo de simplificar a prescrição da condição de contorno de ε na parede. Além disto, Jones e Launder (1972) adicionaram na equação da dissipação um termo fonte proporcional a

$$\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_m} \right)^2$$

com o objetivo de melhorar a previsão do perfil da energia cinética k junto à parede.

O modelo de Jones e Launder (1972) foi otimizado posteriormente por Launder e Sharma (1974), a fim de tornar as constantes do modelo também adequadas para escoamentos livres. A versão final do modelo tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \tilde{\varepsilon} - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.132)$$

e

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + f_1 c_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \mathcal{P} - f_2 c_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + 2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_l} \right)^2 \quad (3.133)$$

com a viscosidade turbulenta sendo calculada através de

$$\nu_t = f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (3.134)$$

As funções f_1 , f_2 e f_μ , introduzidas para corrigir o modelo em regiões do escoamento sob ação de efeitos viscosos, tomam as seguintes formas:

$$f_1 = 1.0 \quad (3.135)$$

$$f_2 = 1.0 - 0.3 \exp(-R_t^2) \quad (3.136)$$

$$f_\mu = \exp[-3.4/(1.0 + R_t/50.0)^2] \quad (3.137)$$

Os valores das constantes c_μ , $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, σ_k e σ_ε permanecem como no modelo k - ε para número de Reynolds elevados.

Deficiências do Modelo k - ε

Em algumas situações comuns de escoamento o modelo k - ε apresenta deficiências significativas. Exemplos dessas situações são:

1. Escoamento na presença de curvatura de linhas de corrente;
2. Escoamento sob ação de gradientes de pressão adversos;
3. Escoamentos com regiões de separação;
4. Jatós;

5. Escoamentos sob ação de campos de força.

i) Curvatura de Linhas de Corrente

Escoamentos que possuem linhas de corrente curvas são um exemplo onde a modelação da turbulência é extremamente difícil. Por exemplo, na Conferência de Stanford 1980-81 (Kline et al., 1981) nenhum dos modelos testados conseguiu prever os efeitos da curvatura das linhas de corrente sobre o escoamento, sem que fossem incluídos nas equações termos extras para este fim. Bradshaw (1973), numa excelente revisão deste tipo de escoamento, mostra que mesmo taxas de deformação pequenas associadas a curvaturas suaves das linhas de corrente acarretam um efeito pronunciado sobre as tensões de Reynolds. Resumidamente, pode-se dizer que a força centrífuga reduz a turbulência sobre superfícies convexas e aumenta sua produção ao longo de superfícies côncavas.

Mais recentemente, Muck et al. (1985) e Hoffman et al. (1985) analisaram em detalhes os efeitos de curvaturas convexas e côncavas sobre camadas limite e concluíram que eles são totalmente diferentes entre si, mesmo do ponto de vista qualitativo. Uma das diferenças apontada por eles relaciona-se ao tempo de resposta muito mais curto da camada limite à aplicação ou retirada de curvaturas convexas. Além disto, eles notaram que os efeitos de curvatura convexa não causam grandes alterações na estrutura da turbulência, ao contrário daqueles associados à curvatura côncava, onde a turbulência é modificada diretamente pela própria curvatura e indiretamente pelo surgimento de vórtices longitudinais semi-inviscidos ao longo da superfície. Por este motivo, eles sugerem que modificações nos modelos de turbulência para o cálculo destes efeitos devam ser implementadas de forma distinta para os dois tipos de curvatura.

Dados experimentais mostram que para reproduzir os efeitos mencionados acima através do conceito de viscosidade turbulenta, adotado no modelo $k-\varepsilon$, precisamos de uma relação do tipo

$$\overline{uv} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \alpha \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (3.138)$$

onde $8 < \alpha < 15$.

Várias propostas surgiram para minimizar esta deficiência do modelo $k-\varepsilon$ e, via de regra, utilizam como parâmetro o número de Richardson. As correções são introduzidas na forma de termos fontes/sumidouros na equação da dissipação ε . Por exemplo, Launder et al. (1977) propuseram:

$$c_{\varepsilon 2} = 1,92(1,0 - 0,2Ri_t) \quad (3.139)$$

onde

$$Ri_t = \frac{k^2 V_\theta \cos \alpha}{\varepsilon^2} \frac{\partial (rV_\theta)}{r^2 \partial r} \quad (3.140)$$

As correções introduzidas nos modelos para a previsão dos efeitos da curvatura de linhas de corrente são de alguma ajuda mas são necessárias diferentes interpretações do número de Richardson em função do tipo de escoamento considerado.

ii) Gradientes Adversos de Pressão

Originalmente, as constantes do modelo $k-\varepsilon$ foram ajustadas de tal forma a produzir para o caso de escoamento turbulento em equilíbrio local ($\mathcal{P}_k = \varepsilon$) o correto aumento da escala de comprimento da turbulência com a distância y medida a partir da parede, isto é:

$$L_e = 2,44y \quad (3.141)$$

Através da evidência experimental sabe-se que a escala de comprimento dada pela relação acima é válida mesmo para escoamentos sob a ação de gradientes adversos de pressão elevados. Porém, quando a camada limite progride em direção à separação do escoamento, o modelo $k-\epsilon$ prevê escalas de comprimento $L_\epsilon = (k^{3/2}/\epsilon)$ muito maiores do que L_e . Conseqüentemente, os níveis de turbulência tornam-se excessivos e o escoamento tende a não separar-se, mesmo em situações em que a evidência experimental indica o contrário. Este problema, associado à equação de ϵ , é ainda mais crítico quando adota-se a versão do modelo $k-\epsilon$ para baixos números de Reynolds.

Hanjälíc e Launder (1980) propuseram uma modificação para a equação de ϵ a partir da mod-elação de escoamentos em bocais. Haja visto os grandes gradientes de velocidade na direção principal do escoamento em tais situações, eles argumentaram que a energia através do espectro da turbulência é transferida preferencialmente pelas tensões normais. Pelo fato desta energia terminar sendo dissipada pela ação viscosa ao nível dos menores vórtices, Hanjälíc e Launder (1980) argumentaram que a equação da dissipação ϵ deveria prever este papel maior das contribuições originadas pelas tensões normais. Para conseguir este efeito, eles propuseram em \mathcal{P}_ϵ um coeficiente maior do que $c_{\epsilon 1}$ para as tensões normais através da seguinte da seguinte modificação:

$$\mathcal{P}_\epsilon = \tilde{c}_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - c'_{\epsilon 1} c_\mu k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \tag{3.142}$$

onde

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se dois ou mais índices se repetem} \\ 1 & \text{se a permutação for seqüencial} \\ -1 & \text{se a permutação for alternada} \end{cases} \tag{3.143}$$

com $\tilde{c}_{\epsilon 1} = 4,44$ e $c'_{\epsilon 1} = 3,0$.

Expandindo a equação anterior para uma situação de escoamento bidimensional e usando a aproximação de Boussinesq

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k$$

tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\epsilon = & (\tilde{c}_{\epsilon 1} - c'_{\epsilon 1}) c_\mu k \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - \tilde{c}_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} [\overline{u^2} - \overline{v^2}] \frac{\partial U}{\partial x} + \\ & + 2c_\mu k (\tilde{c}_{\epsilon 1} + c'_{\epsilon 1}) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.144}$$

Podemos explorar agora a ação dessa proposição de Hanjälíc e Launder (1980) para algumas situações comuns de escoamento, conforme indicadas na Figura 3.19.

• Camada limite sobre superfície plana e com gradiente adverso de pressão

Neste tipo de escoamento a única deformação importante é $\partial U/\partial y$. Considerando a presença de um gradiente adverso de pressão \mathcal{P}_ϵ se reduz a

$$\mathcal{P}_\epsilon = (\tilde{c}_{\epsilon 1} - c'_{\epsilon 1}) c_\mu k \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \tilde{c}_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} [\overline{u^2} - \overline{v^2}] \frac{\partial U}{\partial x} \tag{3.145}$$

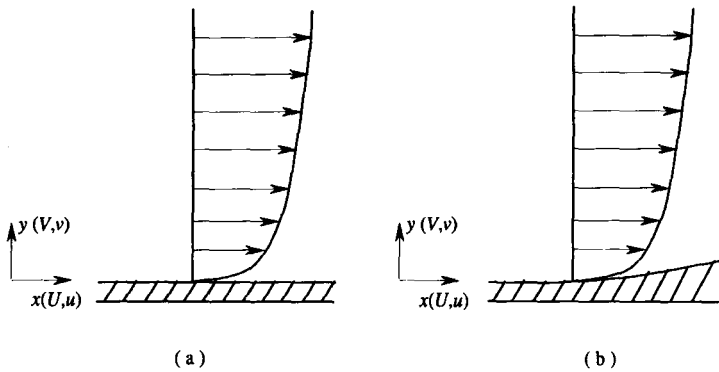


Figure 3.19: Escoamento turbulento sobre superfícies (a) plana e (b) levemente curva.

Como pode ser observado, o termo atua no sentido de tornar a produção de ϵ muito mais insível a acelerações e desacelerações do escoamento, já que $\tilde{c}_{\epsilon 1}$ é bem maior do que $(\tilde{c}_{\epsilon 1} - c'_{\epsilon 1})$. Hanjalic e Launder (1980) verificaram desta forma uma melhora significativa na modelação de jatos e camadas limite com gradientes adversos de pressão. Mais tarde, Rodi and Scheuerer (1986) adotaram a mesma modificação na previsão de outras situações de camada limite sob um gradiente adverso de pressão, observando também uma melhora sensível nos resultados.

• Escoamento com linhas de corrente curvas

Para esta situação de escoamento, ambas as taxas de deformação $\partial U/\partial y$ e $\partial V/\partial x$ são importantes. Assim,

$$P_\epsilon = (\tilde{c}_{\epsilon 1} - c'_{\epsilon 1}) c_\mu k \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] + 2c_\mu k (\tilde{c}_{\epsilon 1} + c'_{\epsilon 1}) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.146)$$

É interessante observar desta equação que o coeficiente $(\tilde{c}_{\epsilon 1} + c'_{\epsilon 1})$ é muito maior do que $(\tilde{c}_{\epsilon 1} - c'_{\epsilon 1})$. Para uma camada limite desenvolvendo-se sobre uma superfície convexa $\partial U/\partial y$ é positivo e $\partial V/\partial x$ é negativo. Assim, o produto deles é negativo e, mesmo para curvaturas suaves, o termo pode ser elevado o suficiente para a diminuição de ϵ e um conseqüente aumento da viscosidade turbulenta; ou seja, um efeito exatamente oposto à situação física verificada experimentalmente. A proposição de Hanjalic e Launder (1980) por esta razão não é adequada para escoamentos na presença de linhas de corrente curvas, sob pena de fornecer resultados não realísticos.

iii) **Escoamentos com Região de Separação**

A eficiência de um grande número de aplicações é afetada pelo fenômeno da separação do escoamento causada por gradientes adversos de pressão ao longo de superfícies sólidas. Sob

a ação do campo de pressão e da tensão na parede, o fluido é desacelerado junto à superfície até o repouso para então separar-se. As informações disponíveis sobre este tipo de escoamento tem se originado quase que exclusivamente de trabalhos experimentais e muito pouco de abordagens teóricas. Apesar da grande importância tecnológica e do grande esforço envolvido na investigação do fenômeno, o entendimento da interação dos fatores envolvidos na separação de escoamentos turbulentos permanece ainda um grande desafio.

Simpson et al. (1974) realizaram uma análise experimental de uma camada limite com separação usando anemometria laser e observaram que a lei da parede é válida somente até a região próxima ao ponto de separação, uma região segundo eles onde os termos das equações do movimento associados às tensões normais têm grande importância. Simpson et al. (1981) apresentaram um exame detalhado da região separada e concluíram que não é possível estabelecer para ela uma lei da parede. Com base nos resultados experimentais, eles argumentaram que o escoamento em sentido reverso na região separada não é proveniente do escoamento médio à jusante, e sim de vórtices de considerável tamanho que cruzam a camada limite. Além disso, a tensão cisalhante \overline{uv} foi observada ser dependente somente da estrutura da turbulência e não ter relação alguma com taxas de deformação média do escoamento. Por este motivo Simpson et al. (1981) concluíram que modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta são inapropriados para a descrição da região separada.

iv) Jatos

Os jatos circulares têm uma taxa de espalhamento em torno de 20% menor do que os jatos planos. No entanto, previsões desses escoamentos com o modelo $k-\epsilon$ fornecem um espalhamento maior para os jatos circulares. O problema novamente parece ser originado na equação de ϵ . Apesar de várias tentativas para a otimização das constantes no modelo nenhuma delas alcançou sucesso.

iv) Escoamentos sob a Ação de Forças de Corpo

Situações de escoamento onde ocorre a presença de forças de corpo são também inapropriadas para uma análise com o modelo $k-\epsilon$. A seção 5 apresenta uma discussão sobre a origem do problema.

Observações Gerais sobre as Deficiências do Modelo $k-\epsilon$

O modelo $k-\epsilon$ é falho na previsão de escoamentos afastados da condição de equilíbrio local. Esta deficiência é séria o suficiente para que o modelo tenha que ser utilizado com cautela na previsão de escoamentos complexos. Basicamente, os erros no modelo $k-\epsilon$ se originam pelo uso de uma relação entre tensões turbulentas e taxas de deformação do escoamento médio análoga à usada para o escoamento laminar e também à pouca fundamentação física da equação de transporte de ϵ , para a qual nenhuma das correções propostas até o momento fornece uma generalidade suficiente.

Outras Propostas de Modelos a Duas Equações

i) Modelo $k-\epsilon$ Não-Linear

A relação linear usada para $\overline{u_i u_j}$, não é adequada em muitas situações. Por exemplo, para um escoamento plenamente desenvolvido num duto de seção retangular o modelo $k-\epsilon$ prevê a

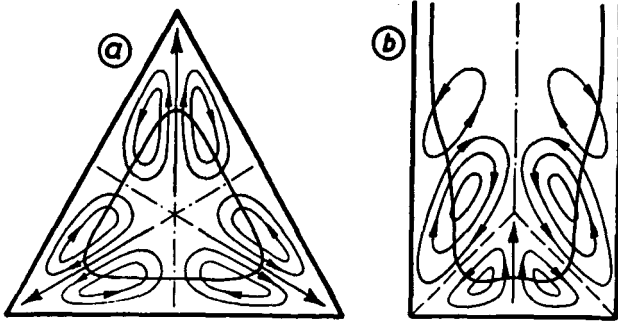


Figure 3.20: Escoamento secundário em escoamentos turbulentos plenamente desenvolvidos no interior de dutos: a) seção triangular; b) seção retangular.

condição de isotropia para a turbulência, contradizendo os resultados experimentais. Este erro ocasiona a supressão do escoamento secundário, verificado experimentalmente (Figura 3.20), uma vez que para isto a condição de anisotropia $\overline{u^2} \neq \overline{v^2}$ deve existir.

Um outro problema decorrente de imprecisões na previsão das tensões normais acontece em regiões de separação do escoamento (Figura 3.21). Nessas situações, como enfatizado por Simpson et al. (1974), as tensões normais têm um papel importante sobre o escoamento à medida que se aproxima do ponto de separação.

Uma tentativa para contornar os problemas acima consiste na inclusão de termos não-lineares no cálculo de $\overline{u_i u_j}$, (por exemplo, Lumley, 1970, Speziale, 1987 e Myong e Kasagi, 1990). Dentro desta classe de modelos, a proposta de Speziale (1987) é uma das mais conhecidas e avalia $\overline{u_i u_j}$ é através da seguinte expressão:

$$\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} \delta_{ij} k + 2c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} s_{ij} + 4c_D c_\mu^2 \frac{k^3}{\epsilon^2} \left(s_{im} s_{mj} - \frac{1}{3} s_{mn} s_{mn} \delta_{ij} \right) + 4c_E c_\mu^2 \frac{k^3}{\epsilon^2} \left(s_{ij}^0 - \frac{1}{3} s_{mn}^0 \delta_{ij} \right) \tag{3.147}$$

onde

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \tag{3.148}$$

$$s_{ij}^0 = \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} + U_j \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_m} S_{mj} - \frac{\partial U_j}{\partial x_m} S_{mi} \tag{3.149}$$

A complexidade de implementação e o tempo de processamento computacional requeridos pelo modelo de Speziale (1987) são comparáveis aos modelos diferenciais para as equações de transporte de $\overline{u_i u_j}$, a ser discutido na próxima seção, mas requer aproximadamente 30% a menos de espaço de memória.

As Figuras 3.22 e 3.23 mostram resultados da distribuição de tensões normais $\overline{u^2}$ e $\overline{v^2}$ obtidos com o modelo de Speziale (1987) para o escoamento plenamente desenvolvido no interior de uma canalização de seção retangular, comparados aos resultados obtidos com o modelo $k-\epsilon$. Nota-se que enquanto o modelo $k-\epsilon$ prevê a condição de isotropia ($\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}$), o modelo não-linear prevê valores diferentes para as tensões normais e prever o escoamento secundário, conforme ilustrado na Figura 3.24.

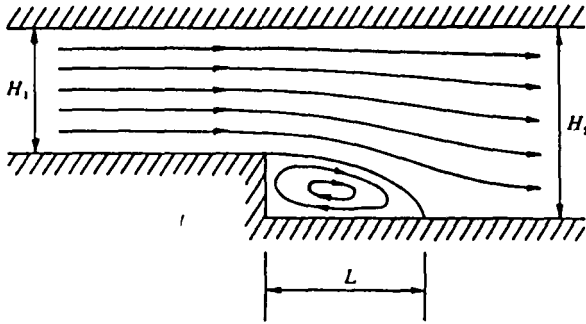


Figure 3.21: Separação do escoamento turbulento provocada por uma expansão brusca.

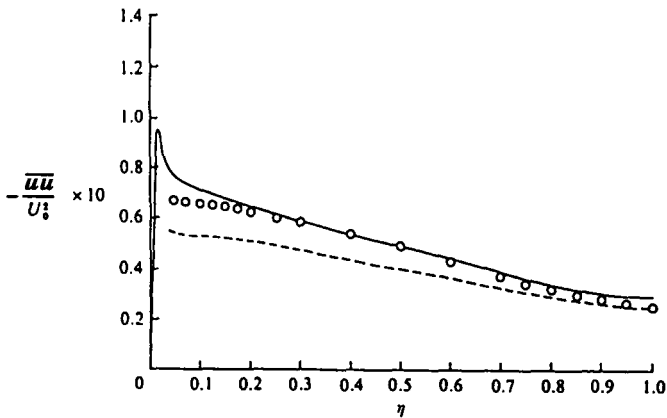


Figure 3.22: Distribuição da tensão normal \overline{uu} para o escoamento totalmente desenvolvido em um tubo retangular; \circ Resultado experimental; $--$ $k-\epsilon$; $-$ $k-\epsilon$ não-linear; adaptado de Speziale (1998).

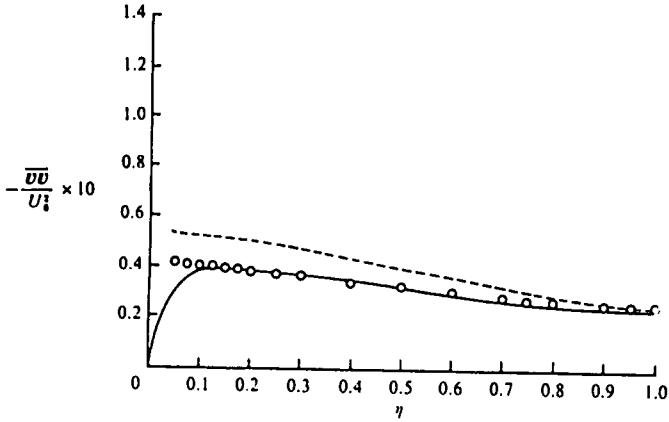


Figure 3.23: Distribuição da tensão normal $\overline{v'v'}$ para o escoamento plenamente desenvolvido em duto de seção retangular; ○ Resultado experimental; --- $k-\epsilon$; — $k-\epsilon$ não-linear; adaptado de Speziale (1998).

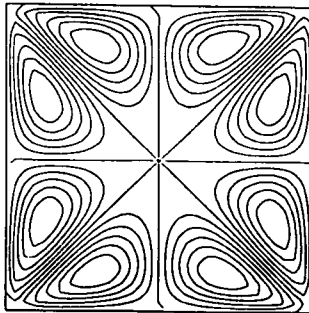


Figure 3.24: Escoamento secundário plenamente desenvolvido numa canalização de seção retangular obtido com o $k-\epsilon$ não-linear; adaptado de Speziale (1987).

ii) Modelo RNG $k-\varepsilon$

Uma variante do modelo $k-\varepsilon$, recentemente proposta por Orszag et al. (1993), foi derivada a partir da Teoria do Grupo de Renormalização. O apelo desta nova versão, denominada de modelo RNG $k-\varepsilon$ se deve ao fato de que constantes e funções aparecendo no modelo são obtidas teoricamente, e não empiricamente como no caso do modelo $k-\varepsilon$ tradicional. Além disto, o modelo pode ser aplicado à subcamada limite viscosa sem a necessidade da inclusão de correções nas constantes ou funções nas equações de transporte.

Devido à sua base matemática, em oposição ao caráter empírico do modelo $k-\varepsilon$ tradicional, Orszag et al. (1993) defendem que o modelo RNG $k-\varepsilon$ oferece um espectro de aplicação maior. Resultados preliminares, indicam que o modelo RNG $k-\varepsilon$ fornece previsões mais precisas do que o modelo $k-\varepsilon$, em situações de escoamento incluindo separação, linhas de corrente curvas e regiões de estagnação.

A viscosidade efetiva $\nu_{ef}(= \nu + \nu_t)$ é calculada no modelo RNG $k-\varepsilon$ pela seguinte relação:

$$\nu_{ef} = \nu \left(1 + \sqrt{\frac{c_\mu}{\nu}} \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^2, \quad (3.150)$$

a qual é válida para qualquer nível de turbulência.

A energia cinética k e sua dissipação ε são obtidas de suas respectivas equações de transporte, também derivadas teoricamente:

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \nu_{eff} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t S^2 - \varepsilon \quad (3.151)$$

e

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \nu_{eff} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t S^2 - c_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} - R, \quad (3.152)$$

com os valores de c_{ε_1} e c_{ε_2} iguais a 1,42 e 1,68, respectivamente. O inverso do número de Prandtl α para o transporte turbulento é dada pela seguinte relação:

$$\left| \frac{\alpha - 1,3929}{\alpha_0 - 1,3929} \right|^{0.6321} \left| \frac{\alpha - 2,3929}{\alpha_0 - 2,3929} \right|^{0.3679} \quad (3.153)$$

onde $\alpha_0 = 1.0$.

O termo de deformação, R , é obtido de

$$R = \frac{c_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \varepsilon^2 \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} k \quad (3.154)$$

com $\eta = Sk/\varepsilon$, $\eta_0 \approx 4,38$, $\beta = 0,012$, $S^2 = 2S_{ij}S_{ij}$ e $S_{ij} = 1/2(\partial U_i/\partial x_j + \partial U_j/\partial x_i)$. Em regiões de pequenas deformações do escoamento, o termo R tende a aumentar ν_{ef} um pouco, mas mesmo nessas situações o valor de ν_{ef} é ainda menor do que o valor que seria avaliado pelo modelo $k-\varepsilon$ tradicional. Em regiões de grande deformação o sinal de R torna-se negativo e ν_{ef} é reduzido consideravelmente. Esta característica do modelo RNG $k-\varepsilon$ é responsável pelas melhorias verificadas na previsão de escoamentos com regiões de separação.

Finalmente, o valor menor de c_{ε_2} obtido na dedução do modelo RNG $k-\varepsilon$, comparado ao valor de 1,9 usado no modelo $k-\varepsilon$ tradicional, age no sentido de reduzir a taxa de destruição de ε , fornecendo valores menores para ν_{ef} .

3.5 Modelos para a Equação de Transporte das Tensões de Reynolds

Os modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta fornecem resultados satisfatórios para escoamentos turbulentos bidimensionais sobre superfícies planas mas não são capazes de prever corretamente os efeitos da curvatura de linhas de corrente sobre o escoamento. Uma outra limitação dessa classe de modelos acontece na avaliação das tensões normais de Reynolds, de grande importância em escoamentos com separação. Uma alternativa para a solução desses problemas é a obtenção das tensões de Reynolds diretamente de suas equações de transporte. Nesta seção serão discutidos as principais vantagens, e também limitações, associadas aos modelos para as equações de transporte do tensor de Reynolds. Inicialmente, são discutidos alguns aspectos físicos da turbulência que estão envolvidos na equação de transporte de $\overline{u_i u_j}$ e, posteriormente, apresentadas as técnicas comumente adotadas para a sua modelação.

3.5.1 Aspectos Físicos das Equações de $\overline{u_i u_j}$

Termo de Produção \mathcal{P}_{ij}

i) Escoamento sobre Placa Plana

Vamos considerar o termo de geração de devido à ação da deformação do escoamento médio:

$$\mathcal{P}_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \quad (3.155)$$

Bradshaw (1973) mostrou que reduzidas taxas de deformação associadas a pequenas curvaturas do escoamento causam apreciáveis alterações nos níveis das tensões de Reynolds. Para uma camada limite sobre uma placa plana (Figura 3.19a), onde somente a tensão cisalhante \overline{uv} é importante, a geração de $\overline{u_i u_j}$ dada pela equação (3.155) se reduz a

$$\mathcal{P}_{\overline{uv}} = - \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.156)$$

Esta relação mostra porque \overline{uv} tem sinal oposto a $\partial U / \partial y$.

ii) Escoamento sobre Superfície Curva

Para uma camada limite desenvolvendo-se sobre uma superfície levemente curva (Figura 3.19b), isto é

$$\frac{\partial V}{\partial x} \sim 10^{-2} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.157)$$

o termo de geração assume a seguinte forma

$$\mathcal{P}_{\overline{uv}} \cong - \left(\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{u^2} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (3.158)$$

$$\mathcal{P}_{\overline{v^2}} \cong - 2\overline{uv} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.159)$$

Próximo à superfície \bar{u}^2 é muito maior do que \bar{v}^2 (Figura 3.11) e, desta forma, \bar{u}^2 aumenta a influência de $\partial V/\partial x$ em $\mathcal{P}_{\bar{u}\bar{v}}$. Além disto, $\mathcal{P}_{\bar{v}^2}$ origina-se puramente de $\partial V/\partial x$ e como para uma superfície côncava este gradiente é positivo \bar{v}^2 é aumentada. Como resultado, verifica-se que em semelhantes situações $\bar{u}\bar{v}$ é entre 10 a 15 vezes mais sensível a $\partial V/\partial x$ do que $\partial U/\partial y$.

Obviamente, os modelos baseados na hipótese de Boussinesq são incapazes de prever semelhante influência de $\partial V/\partial x$ sobre $\bar{u}\bar{v}$. Em tais situações, a relação de Boussinesq fornece o valor da tensão de cisalhamento como:

$$-\bar{u}\bar{v} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \tag{3.160}$$

Assim, se $\partial V/\partial x$ for 1% de $\partial U/\partial y$ teremos somente uma alteração 1% sobre $\bar{u}\bar{v}$. A deficiência do modelo está relacionada precisamente com a hipótese de Boussinesq, a qual relaciona tensões de Reynolds e taxas de deformações do fluido numa forma análoga à usada para fluidos Newtonianos.

Termo de Produção \mathcal{F}_{ij}

A aplicação de um campo de força pode alterar as características do escoamento médio e da turbulência. Como vimos na seção 3, uma flutuação de força, f_i , origina termos do tipo:

$$\mathcal{F}_{ij} = \left(\overline{f_i u_j} + \overline{f_j u_i} \right) \tag{3.161}$$

na equação de $\overline{u_i u_j}$ e

$$\mathcal{F}_{i\theta} = \overline{f_i \theta} \tag{3.162}$$

na equação de $\overline{u_i \theta}$.

Geralmente os efeitos sobre o escoamento médio podem ser modelados usando o conceito de viscosidade turbulenta. No entanto, como veremos a seguir, os efeitos sobre $\overline{u_i u_j}$ e $\overline{u_i \theta}$ só podem ser descritos por modelos baseados nas suas respectivas equações de transporte.

i) Força empuxo

Vamos considerar inicialmente a situação de uma pluma térmica, como mostrada na Figura ??

No presente caso temos $g_i = (-g, 0, 0)$. Logo a geração de $\overline{u_i u_j}$ (\mathcal{P}_{ij} e F_{ij}) é dada por

$$\overline{u u} : -\bar{u}\bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} - 2\overline{u\rho'} \frac{g}{\rho} \tag{3.163}$$

$$\overline{v v} \text{ e } \overline{w w} : 0 \tag{3.164}$$

$$\overline{u v} : -\bar{v}\bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{v\rho'} \frac{g}{\rho} \tag{3.165}$$

O fato de $\partial U/\partial y$ ser negativo faz com que $\bar{u}\bar{v}$ seja positivo. Da mesma forma, como $\partial \rho/\partial x$ é positivo, $\overline{v\rho'}$ é negativo. Assim, a força de empuxo aumenta a magnitude de $\bar{u}\bar{v}$. Podemos representar as relações entre as correlações de segunda ordem nas equações de transporte para este escoamento bidimensional através da Figura 3.26.

Para um escoamento horizontal teríamos $g_i = (0, -g, 0)$. Conforme ilustrado na Figura 3.27, as relações entre as tensões e os fluxos de escalares associados a gradientes de velocidade

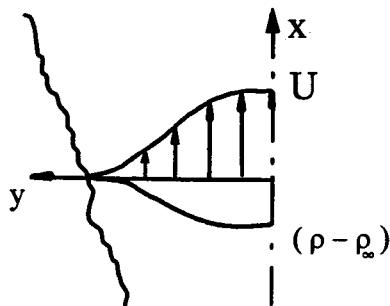


Figure 3.25: Perfis de velocidade e densidade em uma pluma térmica.

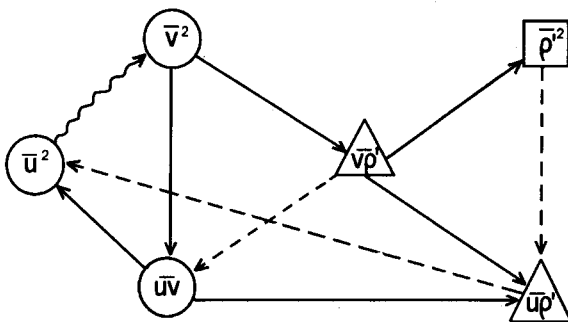


Figure 3.26: Relação entre as tensões de Reynolds e as difusividades turbulentas no processo de produção e redistribuição de energia; escoamento vertical.

e escalares médios são as mesmas encontradas na situação do escoamento anterior. Porém as relações decorrentes do campo gravitacional são bem distintas nos dois casos. De fato, a complexidade das relações entre as tensões de Reynolds e os fluxos turbulentos sugere que os modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta terão, na melhor das hipóteses, pouca generalidade. Portanto, somente com o emprego de equações de transporte para $\overline{u_i u_j}$ e $\overline{u_i \theta}$ pode-se alcançar uma descrição adequada do fenômeno.

ii) Força de Coriolis

Uma outra situação de escoamento onde a equação de transporte do tensor de Reynolds mostra-se superior à hipótese de Boussinesq ocorre quando forças de Coriolis estão presentes. Quando usamos um sistema de coordenadas sendo rotacionado com velocidade angular ω constante, aparecem acelerações associadas ao uso do sistema de coordenadas não-inercial. Matematicamente, podemos expressar isto por

$$\left(\frac{D\vec{V}}{Dt}\right)_I = \left(\frac{D\vec{V}}{Dt}\right)_R + \vec{\omega} \otimes (\vec{\omega} \otimes \vec{r}) + 2\vec{\omega} \otimes \vec{V}_R \tag{3.166}$$

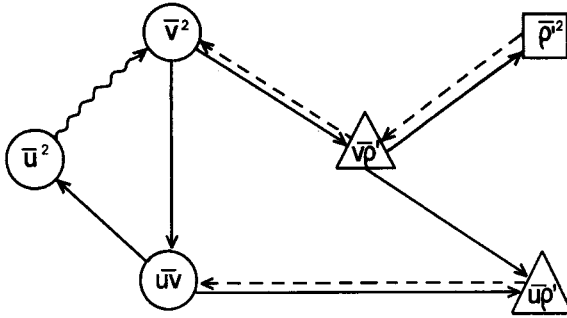


Figure 3.27: Relação entre as tensões de Reynolds e as difusividades turbulentas no processo de produção e redistribuição de energia; escoamento vertical.

Os subíndices "I" e "R" referem-se aos sistemas de coordenadas inercial e em rotação, respectivamente. $(D\vec{V}/Dt)_I$ é a aceleração total a que o fluido estará sujeito e é a quantidade a ser igualada ao somatório das forças agindo sobre o escoamento. Usando a expressão para $(D\vec{V}/Dt)_I$ podemos portanto escrever a equação da conservação da quantidade de movimento com base em velocidades relativas ao sistema de coordenadas em rotação:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \vec{\omega} \otimes (\vec{\omega} \otimes \vec{r}) - 2\vec{\omega} \otimes \vec{V}_R + \nu \nabla^2 \vec{V} \tag{3.167}$$

A força de Coriolis no escoamento turbulento origina uma força de flutuação

$$f_i = -2\omega_k \epsilon_{ikm} u_m \tag{3.168}$$

onde ϵ_{ikm} é o símbolo de permutação, já definido anteriormente. Assim, na equação de transporte de $\overline{u_i u_j}$ teremos o seguinte termo fonte

$$F_{ij} = -2\omega_k (\epsilon_{ikm} \overline{u_m u_j} + \epsilon_{jkm} \overline{u_m u_i}) \tag{3.169}$$

Para um duto com rotação do tipo indicada na Figura 3.28 temos que

$$F_{12} = -2\omega (\overline{u_1^2} - \overline{u_2^2}) \tag{3.170}$$

Para esta situação F_{12} é negativo próximo à superfície de pressão e positiva junto à superfície de sucção. Como consequência, $\overline{u_1 u_2}$ é aumentada junto à superfície de pressão e amortecida junto à superfície de sucção.

Redistribuição de Energia

Vamos considerar as equações de $\overline{u_i u_j}$ para o caso de um escoamento sobre uma placa plana

$$\frac{D\overline{uv}}{Dt} = -\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{uv^2} + \frac{\overline{pu}}{\rho} \right) - 2\nu \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \tag{3.171}$$

$$\frac{D\overline{u^2}}{Dt} = -2\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u^2 v} - 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \tag{3.172}$$

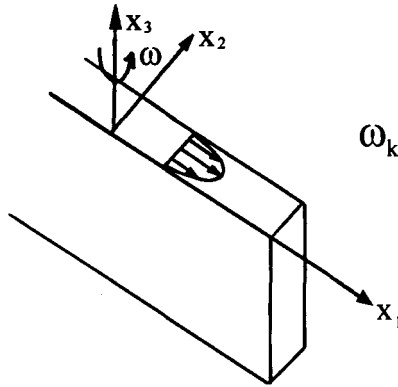


Figure 3.28: Escoamento entre placas planas sob o efeito de rotação.

$$\frac{D\overline{v^2}}{Dt} = 0 + 2\frac{\overline{p}}{\rho}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v^3} + 2\frac{\overline{pv}}{\rho}\right) - 2\nu\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial x_k}\right)^2 \quad (3.173)$$

$$\frac{D\overline{w^2}}{Dt} = 0 + 2\frac{\overline{p}}{\rho}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{w^2v} - 2\nu\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial x_k}\right)^2 \quad (3.174)$$

Pode-se observar que não há produção de energia para $\overline{v^2}$ nem tampouco para $\overline{w^2}$. Portanto, a única forma de suprir energia para estas componentes, essencial para a manutenção da turbulência, é através da transferência de energia da direção principal do escoamento para as outras direções através do termo de redistribuição associado a flutuações de pressão. Se considerarmos que, através da distribuição de energia, as flutuações de pressão atuam no sentido da isotropia da turbulência podemos interpretar, como veremos mais adiante, que estes termos agem também como uma espécie de sumidouro de energia da equação de \overline{uv} .

3.5.2 Modelo para o Transporte das Tensões de Reynolds

Observamos anteriormente que as equações de $\overline{u_i u_j}$ e $\overline{u_i \theta}$ possibilitam a interpretação física de efeitos de curvatura do escoamento, campos de força, etc. Também observamos que os termos de geração \mathcal{P}_{ij} e \mathcal{F}_{ij} são escritos em função de quantidades conhecidas e, portanto, não necessitam modelação. A seguir, apresentaremos a modelação dos termos não conhecidos na equação de transporte de $\overline{u_i u_j}$. Além de procurar a maior simplicidade possível para a forma final da equação modelada, devemos observar alguns princípios importantes:

1. Inicialmente devemos assegurar que os termos nas formas original e modelada tenham as mesmas dimensões;
2. Além disto, o termo modelado deve ter as mesmas propriedades matemáticas do termo substituído. Esta condição é geralmente satisfeita para correlações de segunda ordem mas é freqüentemente ignorada para correlações de ordem superior, partindo da hipótese de que os termos de ordem n tem menor influência sobre o escoamento médio do que termos de ordem $(n-1)$;

3. Finalmente, a forma modelada deve apresentar as mesmas respostas à translação e à rotação do sistema de coordenadas apresentadas pelo termo original e ser incapaz de produzir valores fisicamente inconsistentes.

i) Modelação da Dissipação ϵ_{ij}

Da hipótese de número de Reynolds elevado, assume-se que as flutuações contribuindo para ϵ_{ij} são isotrópicas e, desta forma,

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij}\epsilon \tag{3.175}$$

Esta condição implica na inexistência de dissipação viscosa para as tensões cisalhantes. A validade da hipótese de isotropia para ϵ_{ij} não é totalmente aceita entre os vários grupos de pesquisa mas devido à dificuldade de se obterem dados confiáveis de ϵ_{ij} , a maioria dos modelos tenta compensar qualquer imprecisão de sua modelação através da modelação do termo de redistribuição ϕ_{ij} .

ii) Modelação da Redistribuição ϕ_{ij}

Através da manipulação da equação diferencial de u_i , podemos chegar a uma equação para a flutuação de pressão p :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial^2 x_l} = -2 \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} - \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} (u_l u_m - \overline{u_l u_m}) \tag{3.176}$$

Chou (1945) mostrou que a solução desta equação substituída no termo de ϕ_{ij} produz um novo termo composto de três parcelas:

$$\phi_{ij} = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij,w} \tag{3.177}$$

onde

$$\phi_{ij,1} = -\frac{1}{4\pi} \int_{Vol} \overline{\left(\frac{\partial^2 u_l u_m}{\partial x_l \partial x_m} \right)'} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \frac{dV}{\bar{r}} \tag{3.178}$$

$$\phi_{ij,2} = -\frac{1}{4\pi} \int_{Vol} 2 \overline{\left(\frac{\partial U_l'}{\partial x_m} \right)} \overline{\frac{\partial u_m'}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \frac{dV}{\bar{r}} \tag{3.179}$$

$$\phi_{ij,w} = \frac{1}{4\pi} \int_{Area} \left\{ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial n'} \overline{p'} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} - \overline{p'} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{\bar{r}} \right) \right\} dS \tag{3.180}$$

Na equação anterior, dV e dS são elementos de volume e de área das integrais em torno de um ponto do escoamento. Derivadas normais a superfícies sólidas são representadas por n . O índice " ' " indica que a quantidade é avaliada a uma distância \bar{r} do local x_i , considerado.

A equação (3.177) sugere que o termo de redistribuição é afetado por diferentes processos físicos. A primeira parcela, $\phi_{ij,1}$, é associada essencialmente a flutuações de velocidade enquanto a segunda, $\phi_{ij,2}$, representa contribuições provenientes de quantidades do escoamento médio e da turbulência. O terceiro termo, $\phi_{ij,w}$, representa a influência de paredes sólidas na redistribuição da turbulência.

Podemos observar da equação de $\overline{u_i u_j}$, que todas as parcelas que compõem a solução devem ser tensores simétricos de segunda ordem. Como os termos em ϕ_{ij} atuam no sentido de redistribuir energia entre as tensões de Reynolds, tanto $\phi_{ij,1}$ como $\phi_{ij,2}$ devem agir no sentido de levar a turbulência à condição de isotropia (onde as tensões normais são iguais e as tensões cisalhantes são zero, ou seja, $\overline{u_i u_j} = 2/3 \delta_{ij} k$). Seguindo esta idéia, (Rotta, 1951) assumiu para a modelação de $\phi_{ij,1}$ que em escoamentos onde as taxas de deformação do escoamento são nulas, o retorno à condição de isotropia é proporcional ao nível de anisotropia:

$$\phi_{ij,1} = -c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) , \quad (3.181)$$

onde $c_1 = 1,8$.

Empregando o mesmo princípio, Naot et. al. (1970) propuseram que $\phi_{ij,2}$ teria o papel de redistribuir os termos de produção \mathcal{P}_{ij} no sentido da condição de isotropia:

$$\phi_{ij,2} = -c_2 \left(\mathcal{P}_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mathcal{P}_k \right) , \quad (3.182)$$

onde $c_2 = 0,6$.

A presença de paredes sólidas em um escoamento faz com que a flutuação de velocidade normal às superfícies decaia muito mais rapidamente do que aquelas nas outras direções. Ao contrário do transporte difusivo associado a mecanismos viscosos, os efeitos das paredes sobre ϕ_{ij} são sentidos mesmo em regiões afastadas no escoamento. A proposta mais difundida para a modelação de $\phi_{ij,w}$ foi apresentada por Gibson e Launder (1978) e é dada por:

$$\phi_{ij,w} = \phi_{ij,1}^w + \phi_{ij,2}^w \quad (3.183)$$

onde

$$\phi_{ij,1}^w = c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_k n_i - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k n_j \right) f_w \quad (3.184)$$

$$\phi_{ij,2}^w = c_2 \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_k n_i \right) f_w \quad (3.185)$$

Nestas equações, as constantes c_1 e c_2 são iguais a 0,5 e 0,3, respectivamente, e n_i representa as componentes do vetor unitário \vec{n} normal à parede sólida. A função de escala de comprimento f_w é introduzida de tal forma a diminuir a atuação de $\phi_{ij,1}^w$ e $\phi_{ij,2}^w$ à medida que se afasta da parede. Uma forma comumente adotada para f_w é

$$f_w = \frac{k^{3/2} / \varepsilon}{c_1 d_w} \quad (3.186)$$

onde $c_1 = 2,44$ e d_w é uma distância à parede (de difícil interpretação para situações de escoamentos com complexidade geométrica).

Quando o escoamento incide contra uma superfície, como no caso de um jato, a modelação de $\phi_{ij,2}^w$ falha completamente e distribui a energia entre as tensões de forma fisicamente inconsistente. Embora propostas recentes para a modelação de $\phi_{ij,2}^w$ (Craft, 1991) corrijam esta anomalia, elas não apresentam generalidade suficiente para aplicação em diferentes escoamentos. Por esta razão, em alguns casos (Lea, 1993) o procedimento tem sido a não inclusão de $\phi_{ij,2}^w$ nas equações de transporte de $\overline{u_i u_j}$.

iii) Modelação da Difusão \mathcal{D}_{ij}

A hipótese generalizada do gradiente de difusão de Daly e Harlow (1970) é a forma mais utilizada para a aproximação do transporte difusivo. De acordo com esta hipótese

$$\overline{u_k \phi} = -c_\phi \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_m} \tag{3.187}$$

Assim, caso ϕ represente a tensão de Reynolds instantânea $u_i u_j$, a relação acima fornece

$$\overline{u_k u_i u_j} = -c_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} \tag{3.188}$$

onde $c_s = 0,22$.

3.5.3 Modelo para as Equações de Transporte de $\overline{u_i u_j}$.

Introduzindo as aproximações para \mathcal{D}_{ij} , ϕ_{ij} e ε_{ij} discutidas anteriormente, podemos escrever a equação modelada para o transporte de $\overline{u_i u_j}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \underbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{c_{ij}} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(c_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right)}_{\mathcal{D}_{ij}} - \underbrace{\left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)}_{\mathcal{P}_{ij}} \\ &\quad - \underbrace{c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right)}_{\phi_{ij,1}} - \underbrace{c_2 \left(\mathcal{P}_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mathcal{P}_k \right)}_{\phi_{ij,2}} \\ &\quad + \underbrace{c'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j n_k n_i} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i n_k n_j} \right)}_{\phi_{ij,1}^w} f_w \\ &\quad + \underbrace{c'_2 \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_k n_i \right)}_{\phi_{ij,2}^w} f_w \\ &\quad - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \end{aligned} \tag{3.189}$$

A taxa de dissipação ε é uma incógnita e portanto precisamos calculá-la. A forma mais utilizada da equação modelada de ε é essencialmente a mesma adotada em modelos de viscosidade turbulenta:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \mathcal{D}_\varepsilon + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mathcal{P}_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{3.190}$$

com o termo de difusão \mathcal{D}_ε sendo modelado através da hipótese generalizada do gradiente de difusão de Daly e Harlow (1970):

$$d_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_\varepsilon \overline{u_i u_j} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \tag{3.191}$$

onde $c_\varepsilon = 0,18$

Devido ao grande número de hipóteses utilizadas na sua obtenção, a equação de transporte de ε é uma das principais fontes de erro nos modelos de turbulência. Esta incerteza associada à equação de ε tem conseqüências diretas sobre a modelação das equações de transporte de

$\overline{u_i u_j}$. Por exemplo, devemos ser capazes de separar eventuais imprecisões na previsão de $\overline{u_i u_j}$ entre erros na determinação de ε e erros nos na modelação dos outros termos da equação de $\overline{u_i u_j}$ (especialmente ϕ_{ij}). Embora existam dificuldades para esse diagnóstico, podemos fazer tal separação reconhecendo que erros nos níveis de ε agem no sentido de produzir níveis de energia excessivamente baixos ou elevados, enquanto que deficiências em ϕ_{ij} originam distribuições incorretas de energia entre as tensões.

A energia cinética k das flutuações que aparece no termo de redistribuição $\phi_{ij,1}$ e na equação de ε pode ser obtida diretamente da soma das tensões normais. No entanto, algumas vezes o uso de uma equação de transporte também para k torna o procedimento iterativo mais estável. Neste caso, da mesma forma como realizado para a equação de ε , o termo de difusão \mathcal{D}_k na equação de k é aproximado pela hipótese generalizada do gradiente de difusão:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_k \overline{u_i u_j} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] - \mathcal{P}_k - \varepsilon \quad (3.192)$$

onde $c_k = 0,22$

3.6 Referências

- Boussinesq, J. 1877. Essai sur la théorie des aux courantes. *Mem. Présentés Acad. Sci.*, **23**, 46.
- Bradshaw, P. 1969. The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow. *J. Fluid Mechanics*, **36**, 177–191. Bradshaw, P. 1973. *Effects of streamline curvature on turbulent flow*. NATO, AGARD monograph No. 169.
- Chou, P.Y. 1945. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quarterly of Applied Mathematics*, **3**, 38–54.
- Coles, D.E., & Hirst, E.A. 1968. Computation of turbulent boundary-layer – 1968 AFOSR-IFP Stanford Conference. In: *Proc. 1968 Conference*, vol. 2.
- Craft, T.J. 1991. *Second-moment modelling of turbulent scalar transport*. Ph.D. thesis, UMIST.
- Daly, B.J., & Harlow, F.H. 1970. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, **13**, 2634.
- Davidov, B.I. 1961. On the statistical dynamics of an incompressible turbulent flow. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **136**, 47.
- Fletcher, C.A.J. 1991. *Computational techniques for fluid dynamics*. Spring-Verlag.
- Gibson, M.M., & Launder, B.E. 1978. Ground effects on pressure fluctuatings in the atmospheric boundary layer. *J. fluid mechanics*, **86**, 491.
- Hanjalić, K., & Launder, B.E. 1976. Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence. *J. Fluid Mechanics*, **74**, 4, 593–610.
- Hanjalić, K., & Launder, B.E. 1980. Sensitizing the dissipation equation to irrotational strains. *Transactions of the ASME—J. Fluids Engng.*, **102**, 34–40.
- Harlow, F.H., & Nakayama, P.I. 1967. Turbulence transport equations. *Physics of Fluids*, **10**(11), 2323.
- Hinze, J.O. 1975. *Turbulence*. McGraw-Hill.
- Hoffman, P.H., Muck, K.C., & Bradshaw, P. 1985. The effect of concave surface curvature on turbulent boundary layers. *J. Fluid Mechanics*, **161**, 371.
- Jones, W.P., & Launder, B.E. 1972. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**, 301.
- Jones, W.P., & Launder, B.E. 1973. The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **16**, 1119–1130.
- Kline, S.J., Cantwell, B. & lilley, (eds.) 1980-81 Comparison of computation and experiment. *Proc. 1980-81 AFOSR-HTTM-Stanford Conf. on Complex Turbulent Flows*, Stanford.

- Kolmogorov, A.N. 1942. Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. *Akad. Nauk. USSR, Ser. Phys.*, **6**, 56–58. (transl. into English by D. B. Spalding as Imperial College, Mech. Engng. Dept. Report ON/6, 1968.).
- Kundu, P.K. 1990. *Fluid mechanics*. Academic Press.
- Launder, B.E., & Spalding, D.B. 1972. *Lectures in mathematical models of turbulence*. Academic Press, London.
- Launder, B.E., & Sharma, B.I. 1974. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Lett. Heat Mass Transfer*, **1**, 131.
- Launder, B.E., & Spalding, D.B. 1974. The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **3**, 269–289.
- Launder, B.E., Reece, G.J., & Rodi, W. 1975. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. *J. Fluid Mechanics*, **68**, 537.
- Launder, B.E., Priddin, C.H., & Sharma, B.I. 1977. The calculation of turbulent boundary layers on spinning and curved surfaces. *J. Fluid Mechanics*, **68**, 537–566.
- Launder, B.E. 1989. Second-moment closure: present... and future?. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **10**, 4, 282–300.
- Lea, C. 1993 (in preparation). *Second-moment closure for in-cylinder flow computations*. Ph.D. thesis, Faculty of Technology, UMIST.
- Lumley, J.L. 1970. Towards a turbulent constitutive relation. *J. fluid mech.*, **41**, 413.
- Muck, K. C., Hoffman, P. H., & Bradshaw, P. 1985. The effect of convex surface curvature on turbulent boundary layers. *J. Fluid Mechanics*, **161**, 347.
- Myong, H.K., & Kasagi, N. 1990. Prediction of anisotropy of the near-wall turbulence with an anisotropic low-Reynolds-number k - ε turbulence model. **112**(521–524).
- Naot, D., Shavit, A., & Wolfshtein, M. 1970. Interactions between components of the turbulent velocity correlation tensor. *Israel J. Tech.*, **8**, 738.
- Nikuradse, J. 1933. *Strömungsgesetze in rauhen Rohren*. Forsch. Arb. Ing.- Ees.
- Orszag, S.A., Yakhot, V., Flannery, W.S., Boysan, F., Chouhury, D., Maruzewski, J., & Patel, B. 1993. Renormalization group modeling and turbulence simulations. In: So, R.M.C., Speziale, C.G., & Launder, B.E. (eds), *Near-Wall turbulent flows*. Elsevier Science Publisher.
- Pope, S.B. & Whitelaw, J.H. 1976. The calculation of near-wake flows. *J. Fluid Mechanics*, **73**, 1, 9–32.
- Prandtl, L. 1925. Bericht über untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz. *ZAMM*, **5**, 136.
- Prandtl, L., & Wieghardt, K. 1945. Über ein neues formelsystem für die ausgebildete turbulenz. *Nachr. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl.*, **6**.

- Prud'homme, M. & Elghobashi, S. 1986. Turbulent heat transfer near the reattachment of flow downstream of a sudden pipe expansion. *Numerical Heat Transfer J.*, **10**, 349–368.
- Reynolds, O. 1895. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **186**, 123–164.
- Rhie, C.M. & Chow, W.L. 1983. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA J.*, **21**, 11, 1525–1532.
- Rodi, W., & Spalding, D.B. 1970 A two-parameter model of turbulence and its application to free jets. *Wärme-und Stoffübertragung*, **3**, 2, 85–95.
- Rodi, W. 1972 The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence. Ph.D. Thesis, University of London.
- Rodi, W., & Scheuerer, G. 1986 Scrutinizing the k - ϵ turbulence model under adverse pressure gradient conditions. *Transactions of the ASME—J. Fluids Engng.*, **108**, 174–179.
- Rodi, W., Mansour, N.N. & Michelassi, V. 1990 One-equation near-wall turbulence modelling with the aid of direct simulation data. *Transactions of the ASME—J. Fluids Engng.*, **115**, 196–205.
- Rota, J.A. 1951 Statistische theorie nichthomogener turbulenz. *Z. Phys.*, **129**, 547.
- Schlichting, H. 1968 *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill.
- Speziale, C.G. 1987 On nonlinear K -1 and K - ϵ models of turbulence. *J. Fluid Mechanics*, **178**, 459–475.
- Simpson, R.L., Strickland, J.H. & Barr, P.W. 1974 The structure of a separating turbulent boundary layer. *J. Southern Methodist Univ, Thermal and Fluid Sciences Center, WT-3*, Texas, USA.
- Simpson, R.L., Young, S.T.B. & Bradshaw, P. 1979a The effect of short regions of high surface curvature on turbulent boundary layers. *J. Fluid Mechanics*, **94**, 209.
- Simpson, R.L., Eaton, J.A. & Bradshaw, P. 1979b The response of a turbulent boundary layer to lateral divergence. *J. Fluid Mechanics*, **94**, 243.
- vSimpson, R.L., Chew, Y.T. & Shivaprasad, B.G. 1981 The structure of a separating turbulent boundary layer. Part 1: Mean flow and Reynolds stresses. *J. Fluid Mechanics*, **113**, 23.
- Tennekes, H. & Lumley, J.L. 1972. *A first course in turbulence*. MIT Press.
- Tritton, D.J. 1988. *Physical fluid dynamics*. Oxford Science Pub.
- Tselepidakis, D.P. 1990 *Second moment closure for the viscous sub-layer*. Proc. 4th Biennial CFD Colloquium, UMIST.
- Warsi, Z.U.A. 1992 *Fluid dynamics—Theoretical and computational approaches*. CRC Press.

White, F.M. 1991 *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill.

Wilcox, D.C. 1988. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA j.*, **26**(11), 1299-1310.

Yap, C.R. 1987 *Turbulent heat and momentum transfer in recirculating and impinging flows*. Ph.D. Thesis, UMIST.

Capítulo 4

Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos

Aristeu da Silveira Neto
Departamento de Engenharia Mecânica (UFU)
38400-206, Uberlândia, M.G., Brasil

4.1 Turbulência

A turbulência nos fluidos está entre os mais complexos e espetaculares fenômenos encontrados na natureza. É naturalmente tridimensional e dependente do tempo. É caracterizada por processos não lineares de troca de massa, energia e quantidade de movimento, o que se dá via interações entre estruturas das mais variadas escalas de tempo e de comprimento. A importância prática da compreensão da turbulência é muito grande e crescente com o tempo. A turbulência é estudada por físicos, químicos, engenheiros (mecânicos, aeronáuticos, nucleares, termo-hidráulicos), matemáticos, biólogos, médicos, sociólogos, economistas, meteorologistas e astrofísicos, cada um com suas motivações particulares geradas pela busca de compreender os seus problemas.

Basicamente existem duas correntes de estudos da turbulência: os experimentalistas de laboratórios e os experimentalistas numéricos. Neste capítulo será abordada a metodologia de Simulação de Grandes Escalas dos escoamentos turbulentos, uma entre as numerosas metodologias de tratamento teórico deste assunto. Ela se iniciou com os trabalhos do meteorologista Smagorinsky (1963), com a motivação de simular apenas as grandes escalas dos escoamentos atmosféricos, na impossibilidade de simular todo o espectro de escalas. As primeiras aplicações em problemas de engenharia se iniciaram com Deardorff (1970). Durante estes quarenta anos esta metodologia já evoluiu bastante. Novos modelos foram desenvolvidos e muitas pesquisas têm atestado o potencial desta metodologia tanto para análise de problemas de engenharia quanto para análise física e fenomenológica.

Turbulência ocorre com muita frequência na natureza e tem sido objeto de estudos por mais de 150 anos. Na verdade desde Leonardo da Vinci (1510) os estudos neste domínio têm acontecido. Ele fez interpretações muito importantes com base em observações visuais apenas: a esteira de vórtices gerada à jusante de um obstáculo é composta por uma larga quantidade de frequências e de formas diversas. Esta foi, provavelmente, a idéia precursora do processo de decomposição de escalas de Reynolds (1894).

É grande o investimento em pesquisas relacionadas à compreensão e ao controle dos escoamentos turbulentos, devido à enorme gama de implicações práticas advindas, envolvendo sistemas de transportes (aeronaves, navios, automóveis), sistemas de conversão e transmissão de energia (motores, turbinas, compressores, trocadores de calor) e também aplicações geofísicas (meteorologia, qualidade do ar, dispersão de poluentes nos mares). A necessidade de modelos matemáticos e de métodos de solução de equações é crescente. Grandes esforços tem sido dispensados e com tendência de crescer ao longo do tempo, para o desenvolvimento de ferramentas numéricas que possam ser empregadas tanto para a realização do que hoje se chama *experimentação numérica* quanto para a obtenção de informações para a aplicação imediata em atividades de engenharia. Dentre as maiores dificuldades para o desenvolvimento da modelagem matemática dos escoamento encontra-se a problemática da modelagem da turbulência, objeto de discussões neste documento.

4.2 Metodologias de Simulação

São numerosas as formas de se modelar e simular os efeitos da turbulência. Elas variam desde as correlações e diagramas empíricos até as modernas metodologias de simulação numérica. Um exemplo das primeiras são os diagramas de cálculo de perda de carga (diagramas de Moody) utilizados para dimensionar sistemas de bombeamento e ventilação. Neles se leva em conta

o número de Reynolds, a geometria dos condutos e a rugosidade de suas paredes internas. Quanto às metodologias de simulação numérica mais clássicas, mas não menos importantes, outros capítulos serão dedicados a elas. Lembra-se que este capítulo é dedicado à metodologia de Simulação de Grandes Escalas (SGE), considerada uma das mais modernas formas de se analisar as causas e os efeitos ligados aos escoamentos turbulentos. No entanto, antes de se entrar neste assunto especificamente, serão feitas considerações sobre a metodologia de Simulação Numérica Direta (SND).

4.3 Simulação Numérica Direta

Como discutido no capítulo de Fundamentos da Turbulência nos Fluidos, uma das principais características dos escoamentos turbulentos é o alto grau de liberdade que caracteriza este tipo de sistema dinâmico. Mostrou-se, inclusive, que o número de graus de liberdade (N_{gl}) pode ser estimado em função do número de Reynolds (equação 21 do item 1.3.7). Com esta equação conclui-se que quanto maior o número de Reynolds maior é o número de graus de liberdade.

A forma mais intuitiva de se simular um escoamento passa pela solução das equações de Navier-Stokes. Se a malha de discretização for suficientemente fina, todos os fenômenos físicos serão resolvidos, ou seja, todos os N_{gl} e todo o processo de interação não linear entre eles. Este tipo de simulação é conhecido como Simulação Numérica Direta (SND) da turbulência. Obviamente, por questões de capacidade computacional, esta metodologia só pode ser utilizada para escoamentos a baixos números de Reynolds. Isto é uma consequência do fato que cada grau de liberdade corresponde a uma equação linear discretizada. A título de exemplo, voltando-se à unidade 1.7, figura 35, estima-se $Re = 4.000$ o que fornece um $N_{gl} = 1,3 \times 10^8$. Observa-se que, numa estimativa grosseira, a solução deste problema via SND exigiria a solução de 130 milhões de equações simultâneas. As perspectivas para a solução direta deste problema são muito otimistas pois nos dias atuais já se fala na solução de 20 milhões de equações simultâneas. No entanto este número de Reynolds é muito modesto diante dos valores que caracterizam uma grande maioria dos problemas de engenharia e de geofísica. Um outro exemplo extremo, ilustrado na figura 35 da unidade 1.7, mostra que um escoamento típico atmosférico é caracterizado por um $N_{gl} = 10^{24}$. A solução direta deste tipo de sistema dinâmico está fora de todas as esperanças atuais.

Diante desta rápida exposição, conclui-se que a maior parte dos problemas práticos não podem ser solucionados via SND. Neste sentido, Smagorinsky (1963), utilizando das idéias de decomposição das escalas de Reynolds (1894), propôs uma nova filosofia de modelagem, com a qual a separação em um campo médio e nas respectivas flutuações não é mais utilizada mas sim a separação das altas frequências das baixas frequências, utilizando-se de um processo de filtragem. O comprimento característico do filtro (que determina a frequência de corte) é baseado no tamanho da malha de discretização. Este assunto é o objeto central deste capítulo, o qual será discutido com mais detalhes na unidade seguinte.

4.4 Simulação de Grandes Escalas

Simulação de Grandes Escalas é uma metodologia intermediária à Simulação Direta e à simulação via equações médias de Reynolds. Em SGE as estruturas turbulentas transportadoras de energia e quantidade de movimento são resolvidas diretamente da solução das equações filtradas, enquanto que apenas as menores estruturas são modeladas. Considerando-se que

as menores estruturas tendem a ser mais homogêneas e isotrópicas e menos afetadas pelas condições de contorno, espera-se que os modelos advindos sejam mais universais e independentes dos diferentes tipos de escoamentos, quando comparados com a metodologia média clássica.

As metodologias de SND e SGE são semelhantes no sentido que ambas permitem a obtenção de resultados tridimensionais e transientes das equações de Navier-Stokes. Sendo assim, SGE continua a exigir malhas refinadas. No entanto, torna-se possível resolver escoamentos a altos números de Reynolds, devido ao processo de separação de escalas utilizado e ao processo de modelagem dos tensores sub-malha adicionais que aparecem. Devido a estas características a SGE se tornou uma das mais promissoras metodologias para solução de escoamentos turbulentos. Nos próximos capítulos serão fornecidos detalhes sobre os processos de filtragem e de modelagem sub-malha.

4.4.1 Processos de separação de escalas e de filtragem das equações

Nesta unidade restringir-se-á aos escoamentos incompressíveis cujas equações de transporte são as seguintes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.3)$$

Estas equações representam respectivamente a conservação da quantidade de movimento, da energia e da massa. Trata-se de um sistema de 5 equações e 5 incógnitas, constituindo-se, portanto, num sistema de equações fechado. Conforme já argumentado, a solução direta destas equações só é possível para baixos números de Reynolds. Para escoamentos a altos números de Reynolds, a alternativa é o processo de filtragem e de separação das escalas. Para tanto, as variáveis presentes nestas equações governantes são separadas em uma parte dita de grandes escalas $\bar{f}(\vec{x}, t)$ e em outra parte dita sub-malha $f'(\vec{x}, t)$:

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t). \quad (4.4)$$

A parte filtrada é dada por

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int_D f(\vec{x}', t) G(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (4.5)$$

onde a função filtro é definida de diversas formas, entre as quais uma das mais utilizadas, é a função filtro por volume, dada pela equação abaixo:

$$G(\vec{x}) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & \text{se } |\vec{x}| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{se } |\vec{x}| > \Delta/2, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde Δ é o tamanho característico do filtro, o qual caracteriza a frequência de corte da filtragem. Em particular, se Δ for tomado como o tamanho da malha, o processo de filtragem

se confunde com a filtragem imposta pela discretização, uma vez que no interior de um volume de discretização todas as variáveis são mantidas constantes. Outro tipo de filtro sugerido pela literatura é dado por uma função gauseana clássica. Em função do processo de filtragem acima, as propriedades clássicas da decomposição não são mais verificadas, ou seja:

$$\begin{cases} \overline{u_i u_j'} \neq 0 \\ \overline{u_i} \neq \overline{u_i} \end{cases} \quad (4.7)$$

Aplicando-se o processo de filtragem às equações governantes (1) a (3) obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right), \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \right), \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0. \quad (4.10)$$

O sistema de equações acima modelam o transporte das variáveis $\overline{u_i u_i}$ e \overline{T} . Nota-se que os termos não lineares se apresentam na forma de dois produtos filtrados, o que torna impossível a solução deste sistema de equações. Desta forma, faz-se necessário decompor as escalas, utilizando a equação (4), o que modificará apenas o termo não linear ou de transporte convectivo destas equações, da seguinte forma:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\overline{u_i} + u_i')(\overline{u_j} + u_j')} = \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_i' \overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u_j'}, \quad (4.11)$$

$$\overline{u_j T} = \overline{(\overline{u_j} + u_j')(\overline{T} + T')} = \overline{u_j} \overline{T} + \overline{u_j' T'} + \overline{u_j' \overline{T}} + \overline{\overline{u_j} T'}. \quad (4.12)$$

Observa-se que o processo de decomposição ainda não resolve o problema colocado, pois os últimos membros das equações (11) e (12) continuam dependendo de dois produtos filtrados. Objetivando expressar estes termos em função do produto das variáveis filtradas utiliza-se um tensor e um fluxo turbulento adicionais, definidos das seguintes formas:

$$L_{ij} = \overline{u_i' u_j'} - \overline{u_i} \overline{u_j}, \quad (4.13)$$

$$L_{\theta j} = \overline{u_j' T'} - \overline{u_j} \overline{T}. \quad (4.14)$$

Substituindo-se as equações (13) e (14) nas equações (11) e (12), obtém-se as seguintes equações:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_i' \overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u_j'} + L_{ij}, \quad (4.15)$$

$$\overline{u_j T} = \overline{u_j} \overline{T} + \overline{u_j' T'} + \overline{u_j' \overline{T}} + \overline{\overline{u_j} T'} + L_{\theta j}. \quad (4.16)$$

Finalmente, estes dois termos estão escritos em função do produto das variáveis filtradas e de alguns tensores e fluxos adicionais, identificados a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \implies \text{Tensor de Reynolds sub-malha} \\ C_{ij} = \overline{u'_i u'_j} + \overline{u_i u'_j} \implies \text{Tensor cruzado} \\ L_{ij} = \overline{u_i u'_j} - \overline{u_i} \overline{u'_j} \implies \text{Tensor de Leonard} \\ \theta_j = \overline{u'_j T'} \implies \text{Fluxo turbulento sub-malha} \\ C_{\theta j} = \overline{u'_j T'} + \overline{u_j T'} \implies \text{Fluxo turbulento cruzado} \\ L_{\theta j} = \overline{u_j T'} - \overline{u_j} \overline{T'} \implies \text{Fluxo turbulento de Leonard.} \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Substituindo-se estes resultados nas equações (8) e (9) obtém-se as equações governantes filtradas, nas seguintes formas:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - (\tau_{ij} + C_{ij} + L_{ij}) \right], \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} - (\theta_j + C_{\theta j} + L_{\theta j}) \right], \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0. \quad (4.20)$$

Este é um sistema de cinco equações e cinco variáveis de transportadas ($\overline{u_i}, \overline{T}, \overline{p}$) acrescidas dos três tensores (τ_{ij}, C_{ij} e L_{ij}) e dos três vetores fluxos turbulentos ($\theta_j, C_{\theta j}$ e $L_{\theta j}$). Trata-se então de um sistema de equações aberto com mais equações que incógnitas. Este problema tem sua origem no termo não linear da equação de conservação da quantidade de movimento e no termo de transporte convectivo da equação da conservação da energia. Observa-se que eles apareceram do processo de geração das equações (18), (19) e (20) que governam o transporte de momentos estatísticos de primeira ordem. Os tensores e vetores incógnitas já citados têm como componentes, correlações ou momentos de segunda ordem. É sempre possível se gerar equações de transporte para estes momentos de segunda ordem, o que acarretaria no aparecimento de momentos de terceira ordem e assim sucessivamente. Este é o clássico problema de fechamento da turbulência, um dos maiores desafios científicos da física moderna, o qual está ainda completamente em aberto, não contando ainda com uma teoria fechada.

Métodos paliativos de fechamento da turbulência foram propostos ao longo das últimas décadas. Neste capítulo dedica-se à modelagem sub-malha da turbulência que conduz à metodologia de Simulação de Grandes Escalas, a qual é objeto de discussão no próximo item.

4.4.2 Modelagem sub-malha da turbulência

Os modelos de turbulência podem ser classificados em dois grupos básicos: aqueles que dependem da viscosidade turbulenta (hipótese de Boussinesq) e aqueles baseados em equações algébricas, os quais não dependem da viscosidade turbulenta. No presente estudo restringir-se-á ao primeiro grupo, ou seja, àqueles que dependem da viscosidade turbulenta.

Boussinesq propôs expressar o tensor de Reynolds sub-malha em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta, como segue:

$$\tau_{ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (4.21)$$

onde a viscosidade turbulenta ν_t pode ser calculada via diferentes modelos. Os mais utilizados serão descritos posteriormente. A energia cinética turbulenta sub-malha pode ser incorporada à pressão estática. Os tensores cruzado e de Leonard podem ser modelados seguindo a idéia de Clark et al. (1979) que sugerem expressar a soma destes tensores como uma expansão de Taylor do campo de velocidade filtrado. Com base nisto Findikakis e Street (1979) demonstraram que:

$$L_{ij} + C_{ij} \cong \frac{\Delta_k}{12} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}, \quad (4.22)$$

onde $k = 1, 2, 3$. Com esta expressão calcula-se explicitamente estes tensores em função do campo filtrado de velocidade. Shaanan et al. (1975) estimaram que, quando um esquema de transporte convectivo de até segunda ordem é utilizado, os tensores de Leonard e cruzado podem ser desprezados. Por outro lado, quando se utiliza esquemas de ordens mais elevadas ou métodos espectrais, este tensor não pode ser mais desprezado. Silveira-Neto et al. (1993), em experiências numéricas sobre uma expansão brusca, evidenciaram que mesmo para esquemas de terceira ordem estes dois tensores podem ser desprezáveis face ao tensor de Reynolds sub-malha. Para tanto foram definidos três termos de difusão como segue:

$$D_R = \left\| \bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}} \right\|, \quad (4.23)$$

$$D_L = \left\| \bar{\nabla} \cdot (L_{ij} + C_{ij}) \right\|, \quad (4.24)$$

$$D_M = \left\| \bar{\nabla} \cdot (2\nu \bar{S}_{ij}) \right\|, \quad (4.25)$$

onde D_R , D_L e D_M são respectivamente os efeitos da difusão associada ao tensor de Reynolds sub-malha, aos tensores de Leonard e cruzado e ao tensor viscoso respectivamente. Estes efeitos foram calculados em simulações de grandes escalas com as equações (21) e (22), onde a viscosidade turbulenta foi avaliada com um modelo de Smagorinsky (1963) a ser descrito ainda.

Na Figura 1 mostra-se os efeitos relativos destas difusões. Nas regiões mais distantes do degrau (x/H maior) os efeitos D_R são da ordem de 40 vezes os efeitos de D_L e D_M . Este resultado está de acordo com os resultados de Antonopoulos-Domis (1981) obtidos com um método de discretização semelhante. Desta forma a inclusão ou não destes tensores depende da ordem de precisão do esquema de transporte convectivo.

Resta ainda o problema ligado ao cálculo da viscosidade turbulenta, objeto de diferentes tipos de modelos a serem descritos nos itens que seguem.

4.4.3 Modelo sub-malha de Smagorinsky

Este modelo foi proposto por Smagorinsky (1963), baseando-se na hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas, ou seja, que a produção de tensões turbulentas sub-malha seja igual à dissipação:

$$\wp = \varepsilon \quad (4.26)$$

onde a produção pode ser escrita em função da taxa de cisalhamento do campo filtrado e a dissipação pode ser escrita em função da escala de velocidade e do comprimento característicos sub-malha:

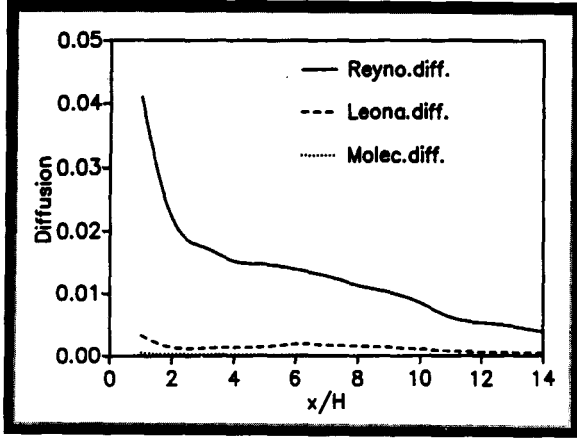


Figure 4.1: Comparação dos efeitos de difusão molecular, de Leonard e cruzado e de Reynolds sub-malha (Silveira-Neto et al., 1993).

$$\varphi = -\overline{u'_i u'_j} S_{ij} = 2\nu_t S_{ij} S_{ij}, \tag{4.27}$$

$$\varepsilon = -c_1 (\overline{u'_i u'_j})^{3/2} / l. \tag{4.28}$$

Observa-se que $-\overline{u'_i u'_j}$ contém apenas a parte anisotrópica do tensor de Reynolds sub-malha. Na última equação, $(\overline{u'_i u'_j})^{1/2}$ e l são as escalas de velocidade e de comprimento sub-malha respectivamente. Supõe-se ainda que a viscosidade turbulenta sub-malha seja proporcional a estas duas escalas, conforme a equação seguinte:

$$\nu_t = c_1 l (\overline{u'_i u'_j}). \tag{4.29}$$

Utilizando-se este conjunto de equações pode-se exprimir a viscosidade turbulenta em função da taxa de deformação e da escala de comprimento:

$$\nu_t = (C_S l)^2 \sqrt{S_{ij} S_{ij}}. \tag{4.30}$$

O comprimento característico l é calculado em função da malha de discretização. A constante de Smagorinsky $C_S = 0,18$ foi determinada analiticamente por Lilly (1967), para turbulência homogênea e isotrópica. No entanto o valor desta constante tem sido questionado e adaptado segundo o tipo de código de cálculo utilizado pela comunidade. Apesar disto, este primeiro modelo sub-malha tem sido largamente utilizado e permitiu o início de uma das mais promissoras linhas de pesquisa na área da simulação numérica de escoamentos turbulentos. No campo da modelagem sub-malha, avanços consideráveis têm sido conseguidos, chegando à novas concepções como os modelos dinâmicos que não necessitam do uso desta constante ad-hoc. Nesta nova concepção de modelagem, esta constante é substituída por uma função avaliada dinamicamente durante a simulação.

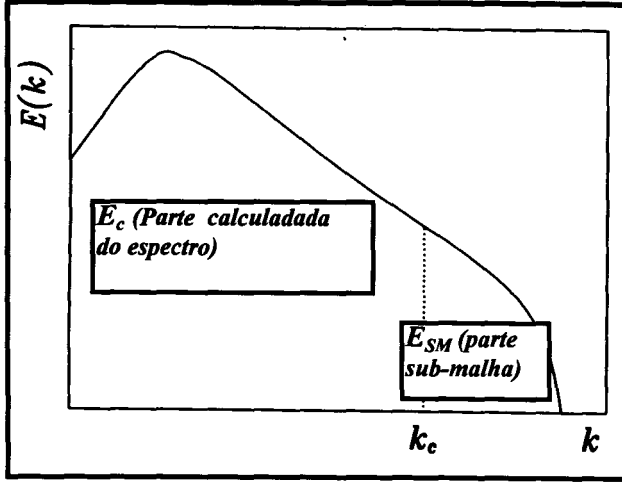


Figure 4.2: Espectro de energia cinética turbulenta e número de onda de corte.

4.4.4 Modelo sub-malha Função Estrutura de Velocidade

Em uma simulação de grandes escalas os fluxos turbulentos de quantidade de movimento e de calor são modelados via conceitos de viscosidade e de difusão turbulentas. Chollet e Lesieur (1982) apresentaram o formalismo para o cálculo de ν_t (viscosidade turbulenta) e α_t (difusividade turbulenta) no espaço de Fourier. Estas quantidades servem à modelagem das interações das grandes estruturas que correspondem aos pequenos números de onda $k < k_c$ com as estruturas sub-malha relativas aos grandes números de onda $k > k_c$, onde k_c é o número de onda de corte (ver figura 2) determinado pela malha de discretização utilizada, ($k_c = \pi/\Delta$).

A partir do formalismo desenvolvido por Kraichnan (1976), Cholet e Lesieur (1982) utilizaram a teoria EDQNM, Lesieur (1997), para fechar as equações de conservação. Eles obtiveram a seguinte equação para a viscosidade turbulenta:

$$\nu_t(k_c, t) = \nu_t^+ \sqrt{\frac{E(k_c, t)}{k_c}}. \quad (4.31)$$

A constante ν_t^+ é determinada fazendo-se um balanço de energia como segue:

$$\int_0^{k_c} 2\nu_t k^2 E(k, t) dk = \varepsilon(t), \quad (4.32)$$

onde $\varepsilon(t)$ é o fluxo de energia cinética turbulenta através do espectro de energia de Kolmogorov:

$$E(k, t) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (4.33)$$

o que permite obter

$$\nu_t^+ = (2/3) C_K^{-3/2}, \quad (4.34)$$

onde $C_K = 1,4$ é a constante de Kolmogorov. Percebe-se que o cálculo de ν_t passa pelo cálculo do espectro de energia cinética turbulenta no espaço de Fourier. O cálculo desta grandeza no espaço físico é bastante difícil de ser realizado. Uma forma de resolver este problema é utilizar o conceito de função estrutura de velocidade de ordem 2, o que deu origem a um novo tipo de modelagem sub-malha, proposto por Métais e Lesieur (1991). Um resumo desta modelagem é aqui apresentado.

A função estrutura de ordem 2 da velocidade é definida como segue:

$$F_2(\vec{x}, r, t) = \overline{\|\vec{u}(\vec{x} + \vec{r}, t) - \vec{u}(\vec{x}, t)\|^2}, \tag{4.35}$$

onde o operador "—" denota o processo de média espacial em torno do ponto \vec{r} e no interior de uma esfera de raio r . A literatura, Batchelor (1953), mostra que existe um dualismo entre a função estrutura $F_2(\vec{r}, t)$ (definida no espaço físico) e o espectro de energia $E(k, t)$ (definido no espaço de Fourier), válido para turbulência homogênea e isotrópica. Nestas condições, utiliza-se um espectro de energia que apresenta uma zona inercial em $k^{-5/3}$ e obtém-se a relação procurada:

$$E(\vec{x}, k_c, t) = 0,03\Delta F_2(\vec{x}, r, t), \tag{4.36}$$

onde Δ é o tamanho característico da malha e $k_c = \pi/\Delta$ é o número de onda de corte. Substituindo-se a equação (36) na equação (31) obtém-se o seguinte resultado:

$$\nu_t(\vec{x}, \Delta, t) = 0,067C_K^{-3/2}\Delta\sqrt{F_2(\vec{x}, \Delta, t)}. \tag{4.37}$$

Com a equação (37) o problema de cálculo de ν_t está resolvido, sob as hipóteses utilizadas. No entanto, $F_2(\vec{x}, r, t)$ é a função estrutura relativa ao espectro de energia completo, com $k \in [0, \infty]$. Por outro lado, em simulação de grandes escalas, este cálculo deve ser realizado utilizando-se a parte resolvida do espectro, ou seja, $k < k_c$ ou do campo de velocidade filtrado, fazendo-se uma média sobre uma esfera de raio $r \geq \Delta$. Falta, em consequência, a parte das escalas sub-malha. Métais e Lesieur (1991) propuseram uma correção supondo-se uma extensão da zona inercial do espectro de energia para $k > k_c$. Define-se então uma função estrutura truncada como segue:

$$F_2(\vec{x}, r, t) = \overline{\|\vec{u}(\vec{x} + \vec{r}, t) - \vec{u}(\vec{x}, t)\|^2}_{\|\vec{r}\|=\Delta}. \tag{4.38}$$

A forma mais simples de calcular a média espacial é fazê-lo sobre os seis pontos mais próximos do ponto \vec{x} . A figura 3 mostra a distribuição dos pontos utilizados, no caso específico de duas dimensões.

Finalmente, o cálculo de ν_t , levando-se em conta esta correção, é feito com a equação seguinte:

$$\nu_t(\vec{x}, \Delta, t) = 0,104C_K^{-3/2}\Delta\sqrt{F_2(\vec{x}, \Delta, t)}. \tag{4.39}$$

A viscosidade turbulenta é calculada no espaço físico para cada posição \vec{x} e para cada instante t , utilizando-se o campo de velocidade filtrado. Observa-se que a passagem de uma

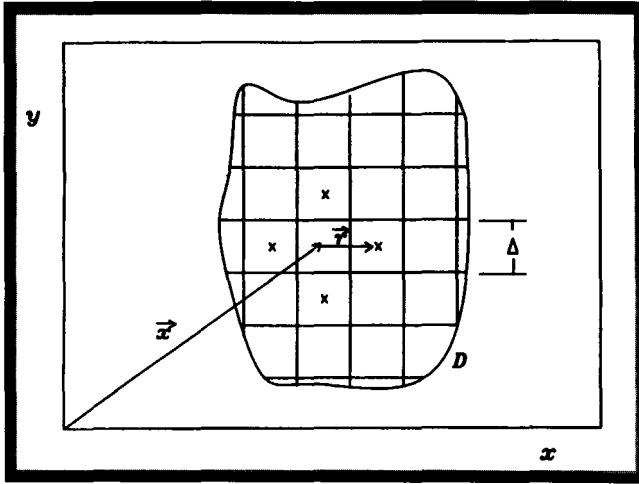


Figure 4.3: Distribuição dos pontos utilizados para o cálculo da função estrutura truncada $F_2(\vec{x}, \tau, t)$ sobre um domínio D .

viscosidade turbulenta $\nu_t(k_c, t)$ no espaço espectral para uma viscosidade turbulenta $\nu_t(\vec{x}, \Delta, t)$ no espaço físico é justificada pela hipótese de homogeneidade e isotropia nas pequenas escalas, as quais são levadas em conta via modelagem sub-malha. A não homogeneidade das grandes escalas deve ser levada em conta explicitamente via solução numérica das equações de conservação filtradas e modeladas.

No que se refere à modelagem da equação da conservação da energia, ela é realizada com o conceito de difusividade térmica turbulenta α_t , calculada via conceito de número de Prandtl turbulento, $pr_t = \nu_t/\alpha_t = 0,6$, conforme Chollet e Lesieur (1982) e Métais e Lesieur (1991).

Observa-se que neste tipo de modelo também está presente uma constante ad-hoc, determinada analiticamente, o que o torna, como o modelo de Smagorinsky limitado a escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos. Estes modelos não são adequados à simulação de escoamentos em transição e escoamentos nas proximidades de paredes.

Modificações sobre esta versão básica do modelo função estrutura foram propostas no sentido de torná-lo aplicável a todos os regimes de escoamentos, incluindo a transição. David (1993) propôs o modelo função estrutura seletivo, no qual a viscosidade turbulenta "é desligada" se o escoamento não apresenta o devido nível de tridimensionalização. Fallon (1996) aplicou este modelo para simulação da transição sobre uma expansão brusca, obtendo resultados mais coerentes que com o uso do modelo de base. Ducros (1995) propôs o modelo função estrutura filtrado, no qual as baixas frequências são eliminadas via um filtro passa alta. Testes foram realizados para a transição de camada limite. Resta no entanto uma lacuna de maior generalidade destas novas versões, bem como a possibilidade de se simular corretamente o que acontece junto a paredes onde, normalmente se faz necessário o uso seja de modelos específicos, seja de malhas extremamente finas. Necessita-se também de modelagem para os problemas de transição à turbulência, onde as hipóteses de homogeneidade e isotropia não são mais verdadeiras e a teoria de Kolmogorov não é válida.

No que diz respeito ao modelo de Smagorinsky, novas propostas têm sido feitas, dentre as quais se destaca a chamada modelagem dinâmica, a qual é apresentada no próximo item.

4.4.5 Modelagem dinâmica sub-malha

Aspectos Fundamentais

A modelagem sub-malha convencional envolve uma constante de proporcionalidade ad-hoc imposta. Apesar das limitações advindas deste fato, conseguiu-se, nos últimos anos, avanços extremamente importantes na área de simulação numérica dos escoamentos turbulentos. Os resultados que podem ser obtidos em turbulência completamente desenvolvida e fora das regiões parietais colocam a SGE hoje como uma ferramenta paralela à experimentação em laboratórios (Bradshaw et al., 1996, e Gharib, 1996).

Uma das principais limitações diz respeito à análise de escoamentos em transição e nas proximidades de paredes, em consequência da imposição ad-hoc de uma constante de proporcionalidade. A determinação dinâmica de uma função de proporcionalidade no cálculo da viscosidade turbulenta pode representar avanços importantes.

Modelagem sub-malha dinâmica

Neste tipo de modelo o coeficiente de proporcionalidade não é mais uma constante e sim uma função que se ajusta ao escoamento no tempo e no espaço. A base desta modelagem é o uso de dois filtros com comprimentos característicos diferentes:

- No primeiro, usa-se as dimensões da malha para calcular o seu comprimento característico. Ele é denominado filtro a nível da malha;
- No segundo usa-se um múltiplo das dimensões das malhas para calcular o comprimento característico. Ele é denominado filtro teste.

Com base no uso dos dois níveis de escalas (acima da malha), conclui-se que, na modelagem dinâmica, usa-se informações do nível de energia contido nas menores escalas resolvidas, situadas entre as escalas dos dois filtros, para modelar a transferência de energia entre as escalas resolvidas e as escalas não resolvidas, como ilustrado na figura 4.

É importante perceber que a função a ser determinada varia com o tempo e com o espaço. Ela deve se anular nas regiões de escoamentos laminares e proximidades de fronteiras sólidas, implicando num melhor comportamento assintótico.

Espera-se ainda a possibilidade de se simular o efeito de transferência inversa de energia cinética turbulenta das escalas sub-malha para as escalas resolvidas (back-scatter), fenômeno este que aparece nas regiões de camada limite, por exemplo.

É necessário enfatizar que o principal ingrediente para o estabelecimento do modelo dinâmico é a identidade entre as tensões turbulentas sub-malha e a faixa do espectro definida por dois filtros de larguras diferentes.

A base matemática dos modelos dinâmicos são as equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (4.40)$$

Aplicando-se um filtro \bar{G} com comprimento característico $\bar{\Delta}$, calculado com base na malha, obtém-se a seguinte equação filtrada:

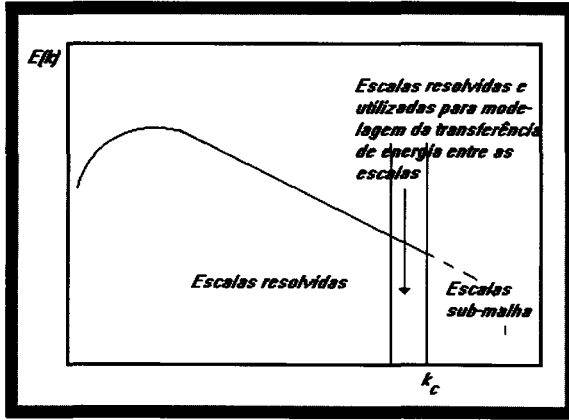


Figure 4.4: Espectro de energia, ilustrando as duas escalas que definem os dois filtros utilizados e a banda de frequência que serve à modelagem do processo de interação entre as escalas resolvidas e as escalas sub-malha.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right). \quad (4.41)$$

Define-se um tensor de Reynolds global sub-malha (alternativamente ao que foi definido na equação (17)) como segue:

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (4.42)$$

Tem-se então a seguinte equação filtrada:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij} \right). \quad (4.43)$$

Aplica-se agora um novo filtro \hat{G} de largura $\hat{\Delta} > \bar{\Delta}$ sobre a equação (41),

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i \hat{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij} \right), \quad (4.44)$$

onde a relação $\hat{\Delta} = 2\bar{\Delta}$ tem sido utilizada. Define-se o tensor das tensões relativas ao segundo filtro, também chamadas de sub-teste, como sendo:

$$T_{ij} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \hat{u}_i \hat{u}_j, \quad (4.45)$$

e em consequência a equação (45) pode ser reescrita na forma seguinte:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i \hat{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} - T_{ij} \right). \quad (4.46)$$

Filtrando-se a equação (43) obtém-se:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\widehat{u}_i \widehat{u}_j \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} - t \widehat{u}_{ij} \right) \quad (4.47)$$

Subtraindo-se da equação (46) a equação (47), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\widehat{u}_i \widehat{u}_j - \widehat{u}_i - \widehat{u}_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij}). \quad (4.48)$$

Define-se o tensor de Leonard global a partir da equação (48),

$$L_{ij} = \left(\widehat{u}_i \widehat{u}_j - \widehat{u}_i \widehat{u}_j \right) = (T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij}). \quad (4.49)$$

Esta igualdade é conhecida como a identidade de Germano. Ela pode ser utilizada para determinação da função coeficiente $c(\vec{x}, t)$ que aparece nos modelos de fechamento da turbulência.

A parte anisotrópica do tensor de Reynolds global sub-malha pode ser modelada com a hipótese de Bousinesq:

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{ij} = -2\nu_t \overline{S}_{ij} = -2c(\vec{x}, t) \overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij}, \quad (4.50)$$

onde $|\overline{S}| = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}$.

Modelando-se as tensões turbulentas sub-teste T_{ij} de forma análoga, tem-se:

$$T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} T_{ij} = -2c(\vec{x}, t) \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| \widehat{S}_{ij}. \quad (4.51)$$

Filtrando-se a equação (50) tem-se:

$$\widehat{\tau}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widehat{\tau}_{ij} = -2\nu_t \widehat{S}_{ij} = -2c(\vec{x}, t) \overline{\Delta}^2 |\widehat{S}| \widehat{S}_{ij}. \quad (4.52)$$

Utilizando-se as equações (49), (50), (51) e (52) e após manipulações tensoriais obtém-se a expressão procurada para o coeficiente dinâmico:

$$c(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}. \quad (4.53)$$

O tensor de Leonard L_{ij} foi definido pela equação (49) e o tensor M_{ij} é definido da seguinte forma:

$$M_{ij} = \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| \widehat{S}_{ij} - \overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij}. \quad (4.54)$$

Observa-se que o cálculo do coeficiente dinâmico só depende de grandezas resolvidas e de um duplo processo de filtragem.

Em seguida fornece-se uma lista de publicações mais relevantes neste domínio: Germano (1986), Germano et al. (1991), Moin et al. (1991), Lilly (1992), Germano (1992), Piomeli (1993), Carati et al.(1995), Ghosal et al. (1995) e Spyropoulos e Blaisdel (1996).

4.4.6 Considerações sobre aplicação de modelagem sub-malha em malhas irregulares

Os modelos sub-malha são baseados em duas formas de cálculo da viscosidade turbulenta: A primeira delas exige o cálculo de taxas de deformação (família de modelos baseados no modelo de Smagorinsky, 1963), e a segunda passa pelo cálculo de diferenças de velocidades (família de modelos baseados no modelo da função estrutura de velocidade - Lesieur e Métais, 1991). A aplicação destes modelos para malhas regulares não oferece dificuldades uma vez que os comprimentos característicos dos filtros são calculados diretamente da dimensão regular da malha. Para os casos de malhas irregulares, deve-se levar em conta este fato via modificações nos modelos originais.

Modelos derivados do modelo de Smagorinsky

O modelo original de Smagorinsky pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\tau_{ij} = -2 \left[L(\vec{\Delta}) \right]^2 \left[2\bar{S}_{mn}\bar{S}_{mn} \right]^{1/2} \bar{S}_{ij}, \quad (4.55)$$

onde $\vec{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ e $L(\vec{\Delta})$ dependem do grau de anisotropia ou de irregularidade da malha utilizada. Se a malha é completamente regular,

$$L(\vec{\Delta}) = C_s \Delta \quad (4.56)$$

sendo $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$ e C_s é a constante de Smagorinsky, já apresentada. Para fracas anisotropias, Deardorff (1970) propôs

$$L(\vec{\Delta}) = C_s \Delta_{eq}, \quad (4.57)$$

$$\Delta_{eq} = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{1/3}. \quad (4.58)$$

Para fortes anisotropias, um desenvolvimento mais rigoroso foi proposto por Scotti e Meneveau (1993) o qual pode ser resumido nos seguintes resultados:

$$L(\vec{\Delta}) = C_s \Delta_{eq} f(a_1, a_2) \quad (4.59)$$

onde

$$f(a_1, a_2) = \cosh \sqrt{\frac{4}{27} [(\ln a_1)^2 - \ln a_1 a_2 + (\ln a_2)^2]}, \quad (4.60)$$

e a_1 e a_2 são os fatores de aspecto, definidos como segue:

$$a_1 = \frac{\Delta_i}{\Delta_{max}}; a_2 = \frac{\Delta_k}{\Delta_{max}}, \quad (4.61)$$

$$\Delta_{max} = \max\{a_1, a_2, a_3\}. \quad (4.62)$$

Observa-se que este tipo de correção pode ser adaptada para a modelagem dinâmica também.

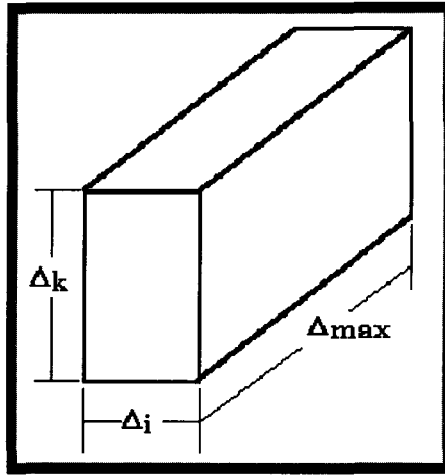


Figure 4.5: Malha irregular.

Modelos baseados no conceito de Função Estrutura de Velocidade

Neste tipo de modelo a viscosidade turbulenta é calculada com uma equação do seguinte tipo:

$$\nu_i^{SF}(\vec{x}, \Delta x, t) = 0,105 C_K^{-3/2} \Delta x [F_2(\vec{x}, \Delta x, t)]^{1/2}, \tag{4.63}$$

$$F_2(\vec{x}, \Delta x) = \langle \|\vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{u}(\vec{x} + \vec{r}, t)\|^2 \rangle_{\|\vec{r}\|=\Delta x}. \tag{4.64}$$

Quando a malha é estruturada e regular, Δx é obtido da própria malha. Quando a malha é estruturada e irregular faz-se necessária uma correção e Lesieur e Métais (1996) sugerem o seguinte:

$$c = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3} \tag{4.65}$$

Toma-se em conta a lei de Kolmogorov (1941) a qual estabelece que a função estrutura de segunda ordem é proporcional a $(\epsilon r)^{2/3}$, onde r é a distância entre os dois pontos em questão. A viscosidade turbulenta acima é então recalculada substituindo-se Δx por Δc , o que resulta, na formulação a 6 pontos, em:

$$F_2(\vec{x}, \Delta c, t) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \left[\|\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x} + \Delta x_i \vec{e}_i)\|^2 + \|\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x} - \Delta x_i \vec{e}_i)\|^2 \right] \left(\frac{\Delta c}{\Delta x_i} \right)^{2/3} \tag{4.66}$$

Nesta equação \vec{e}_i é o vetor na direção x_i . Para compreender melhor reescreve-se esta expressão de uma forma estendida:

$$F_2(\vec{x}, \Delta c, t) = \frac{1}{6} \left\{ \begin{aligned} & \left[\|\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x} + \Delta x_1 \vec{e}_1)\|^2 + \|\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x} - \Delta x_1 \vec{e}_1)\|^2 \right] \left(\frac{\Delta c}{\Delta x_1} \right)^{2/3} + \\ & \left[\|\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x} + \Delta x_2 \vec{e}_2)\|^2 + \|\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x} - \Delta x_2 \vec{e}_2)\|^2 \right] \left(\frac{\Delta c}{\Delta x_2} \right)^{2/3} + \\ & \left[\|\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x} + \Delta x_3 \vec{e}_3)\|^2 + \|\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x} - \Delta x_3 \vec{e}_3)\|^2 \right] \left(\frac{\Delta c}{\Delta x_3} \right)^{2/3} \end{aligned} \right\} \tag{4.67}$$

Imagine-se uma forte anisotropia na malha, por exemplo $\Delta x_1 \gg \Delta x_2 \approx \Delta x_3$. Neste caso,

$$\frac{\Delta_c}{\Delta x_1} \ll \frac{\Delta_c}{\Delta x_2} \approx \frac{\Delta_c}{\Delta x_3}. \quad (4.68)$$

e a anisotropia faz com que as flutuações na direção influenciem menos no cálculo da viscosidade turbulenta que nas outras direções. Quando a malha é não estruturada, sugere-se interpolar a velocidade sobre um círculo de raio $\|r\|$, como se ilustra na figura abaixo. Com as velocidades localizadas em posições equidistantes, calcula-se a viscosidade turbulenta em um ponto no centro deste círculo.

4.5 Exemplos ilustrativos de aplicações de LES

4.5.1 Simulação de Grandes Escalas de escoamentos em transição sobre cavidades bidimensionais

Dois casos destes escoamentos foram estudados numericamente utilizando-se de uma formulação para escoamentos compressíveis. O método de discretização de MacCormack (1969) foi utilizado. O modelo clássico de Smagorinsky (1963), com uma constante $C_s = 0,2$ foi empregado para estabilização dos cálculos. Observa-se que a turbulência é, por definição, tridimensional e hipóteses de bidimensionalidade serve apenas como uma aproximação para os escoamentos em transição aqui apresentados. Observa-se que o código computacional não apresenta convergência sem o modelo sub-malha, para cálculos a altos números de Reynolds. Este fato apenas confirma a necessidade de se modelar o processo de transferência de energia pela frequência de corte, mesmo para escoamentos em transição. O ideal teria sido utilizar modelos sub-malha dinâmicos que se adaptam melhor a este tipo de escoamento. O modelo de Smagorinsky foi empregado por maior simplicidade nesta fase inicial destes desenvolvimentos. Os dois casos são apresentados a seguir.

Cavidade bidimensional aberta

A geometria deste problema está ilustrada na Figura 6. Ilustra-se ainda o processo de transição do escoamento com a presença de instabilidades que compõem as recirculações no interior da cavidade. Na figura 7 mostra-se os campos de temperatura (Figura 7.a), de vorticidade (Figura 7.b) e as linhas de corrente (Figura 7.c). Observa-se a presença das estruturas turbilhonares que são formadas na zona cizalhante da cavidade, as quais são transportadas e incorporadas à recirculação média, como esquematizado na Figura 6. É interessante observar que estas recirculações médias são compostas de estruturas turbilhonares menores, ilustrando a multiplicidade de escalas comentada.

Os turbilhões que se formam são transportados para a direita da cavidade chocando-se contra a parede vertical. Estes choques podem ser observados e quantificados pelos pulsos de pressão criados nesta posição. Para tanto, foi registrado o histórico de pressão em uma malha localizada nesta região de choque. Esta distribuição temporal da pressão está ilustrada na figura 8. Na figura 9 mostra-se a transformada de Fourier deste sinal, evidenciando a frequência típica de choque dos turbilhões. O número de Strouhal é $St = 0,66$.

Na figura 10 mostra-se a comparação do coeficiente de pressão obtido numericamente com os valores experimentais. Observa-se um bom acordo entre eles, exceto nas proximidades da

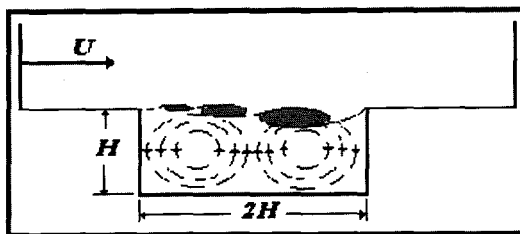


Figure 4.6: Esquema ilustrativo do escoamento em transição no interior de uma cavidade aberta.

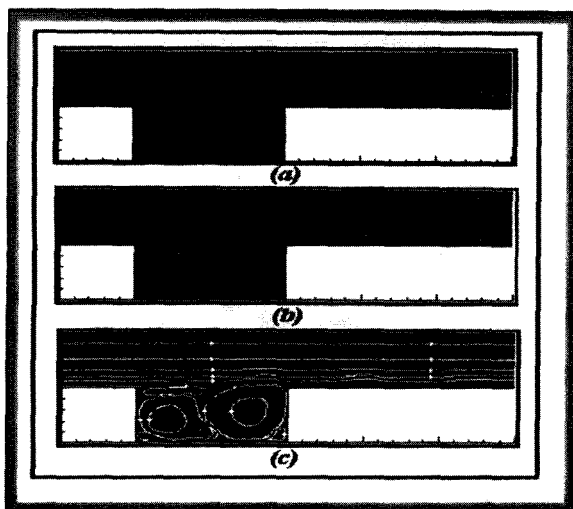


Figure 4.7: Escoamento em transição numa cavidade plana; (a) temperatura , (b) vorticidade e (c) linhas de corrente.

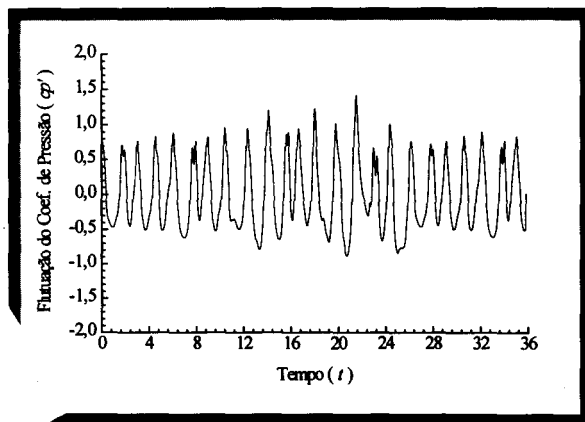


Figure 4.8: Distribuição da pressão, em função do tempo, na região de choques turbilhonares contra a parede direita da cavidade.

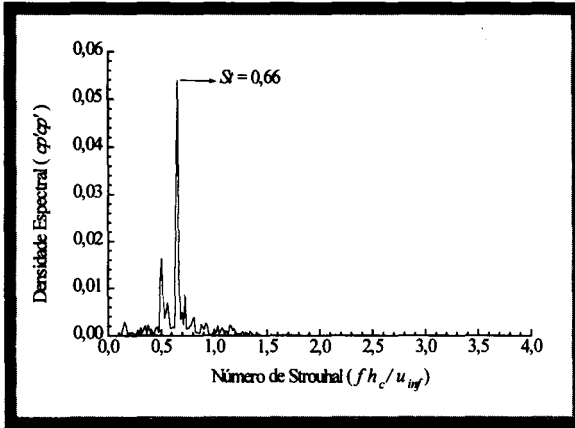


Figure 4.9: Transformada de Fourier do sinal da figura 8.

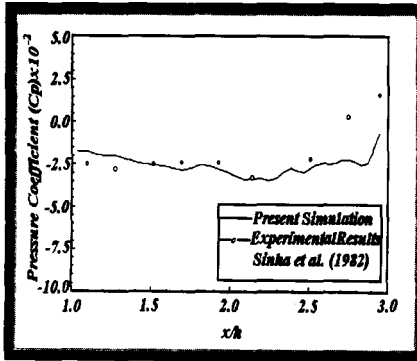


Figure 4.10: Coeficiente de pressão junto à parede inferior.

parede da direita, onde os dados experimentais são também questionáveis. Maiores detalhes sobre este trabalho podem ser encontrados em Pinho (1996).

Cavidade simétrica fechada com efeitos térmicos

Neste estudo objetivou-se analisar o processo de amortecimento de flutuações térmicas utilizando-se de um capacitor na forma de uma dupla cavidade como ilustrada na Figura 11. Na entrada deste domínio são impostos os perfis de velocidade e de temperatura. A temperatura é flutuante na entrada de forma a simular a existência de pulsos que devem ser amortecidos pelo capacitor. O objetivo é ter na sua saída uma distribuição temporal de temperatura o mais uniforme possível.

Na Figura 12 mostra-se os campos de vorticidade e de temperatura que ilustram bem a natureza física do escoamento no interior da cavidade. As estruturas turbilhonares se formam e se desenvolvem no espaço e no tempo. À direita da figura os campos de temperatura mostram a presença dos pulsos de temperaturas através das variações de cores. As cores mais escuras representam temperaturas de valor unitário e as cores mais claras representam temperaturas da ordem de zero. Este pulsos são transportados para o interior do capacitor e difundidos pelo efeito molecular.

É interessante observar que as instabilidades dinâmicas são muito importantes para acelerar

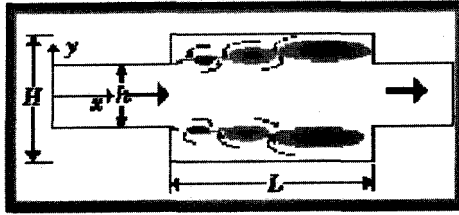


Figure 4.11: Cavidade plana simétrica, geometria e características físicas do escoamento.

este processo de amortecimento térmico. Vê-se, desta forma, que a SGE fornece a natureza física do escoamento, o que facilita a compreensão do processo.

Dos cálculos também se extrai as informações quantitativas que podem ser visualizadas na Figura 13. Na figura 13 (a) têm-se as oscilações de temperatura na entrada do capacitor, com uma frequência constante e igual a $0,1U_\infty/h$. A amplitude do sinal na entrada é de 40°C . Na figura (b) têm-se a distribuição de temperatura na saída do capacitor. O seu comportamento é mais complexo. Ele apresenta uma amplitude igual, em média, a 10°C . Observa-se, desta forma, um amortecimento muito importante nas oscilações imposta na sua entrada. Quanto à frequência das oscilações, a transformada de Fourier deste sinal na saída permite identificar um valor típico de $0,1U_\infty/h$, o que mostra que o processo de amortecimento não alterou a frequência de entrada, dando origem, no entanto, a alguns harmônicos.

À fim de ilustrar a influência da frequência das oscilações na entrada do capacitor, foi simulado um caso com uma frequência 10 vezes superior à precedente, ou seja, $1,0U_\infty/h$. Na Figura 15 mostra-se os campos de vorticidade e de temperatura correspondentes. Nos campos de temperatura ficam claras as flutuações de temperatura pelas variações das cores. A análise quantitativa, ilustrada nas Figuras 16 e 17, mostra que o processo de amortecimento é muito mais eficiente neste caso.

Considerando que a geometria é a mesma e que o número de Reynolds também não foi modificado em relação ao caso precedente, o aumento na eficiência de amortecimento deve estar ligado ao aumento da frequência das oscilações de temperatura. Realmente, comparando os lados direitos das Figuras 12 e 15, observa-se que na última encontra-se um número maior de pulsos de temperatura por unidade de volume. Isto implica na existência de maiores e mais numerosos gradientes de temperatura no interior do capacitor, o que claramente acelera o processo de difusão molecular e em consequência o processo de homogeneização do campo de temperatura. A transformada de Fourier da Figura 16 (b), ilustrada na Figura 17, mostra que houve uma drástica redução também na frequência das flutuações de temperatura. Maiores detalhes sobre este trabalho podem ser encontrados em Matos (1996).

Observa-se que este tipo de compreensão física seria difícil de ser obtida via experimentação e impossível via simulações médias. Este é um caso interessante que ilustra as potencialidades da aplicação de SGE para análise e solução de problemas práticos.

4.5.2 Simulação de Grandes Escalas da convecção mista sobre um cilindro rotativo aquecido

No estudo a aproximação de Boussinesq foi utilizada para modelar as forças de empuxo. A figura 18 ilustra o sistema de coordenadas cilíndricas, bem como os volumes de discretização.

A técnica de discretização dos Volumes Finitos com malhas co-localizadas e um esquema

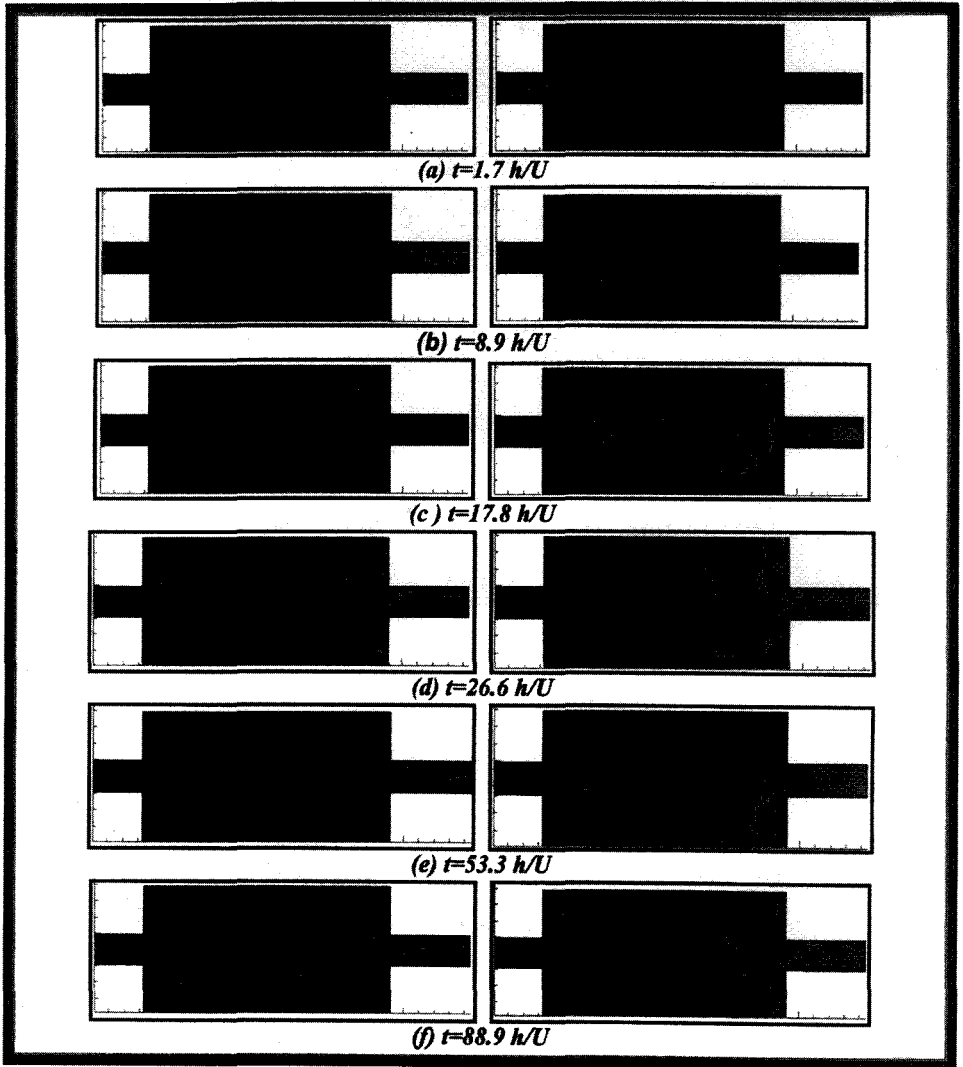


Figure 4.12: Seqüência temporal dos campos de vorticidade (esquerda) e de temperatura (direita); $Re = 30.000 (Re = U_\infty h / \nu)$; freqüência das oscilações de temperatura de $0, 1 U_\infty / h$; $L = 0, 8h$.

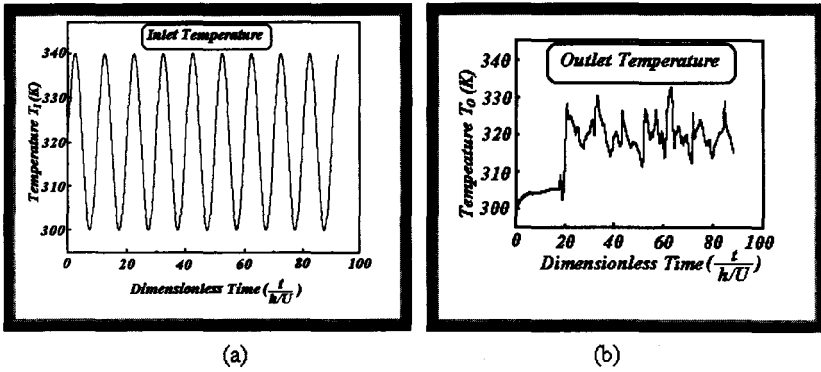


Figure 4.13: Distribuições de temperatura, relativas à Figura 12, na entrada (a) e na saída (b) do capacitor.

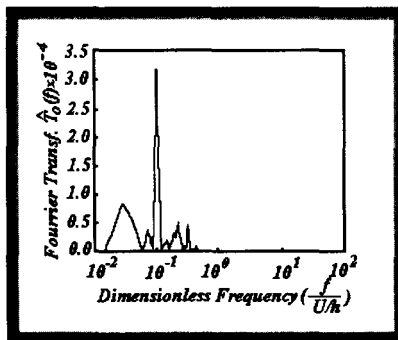


Figure 4.14: Transformada de Fourier do sinal da Figura 13 (b).

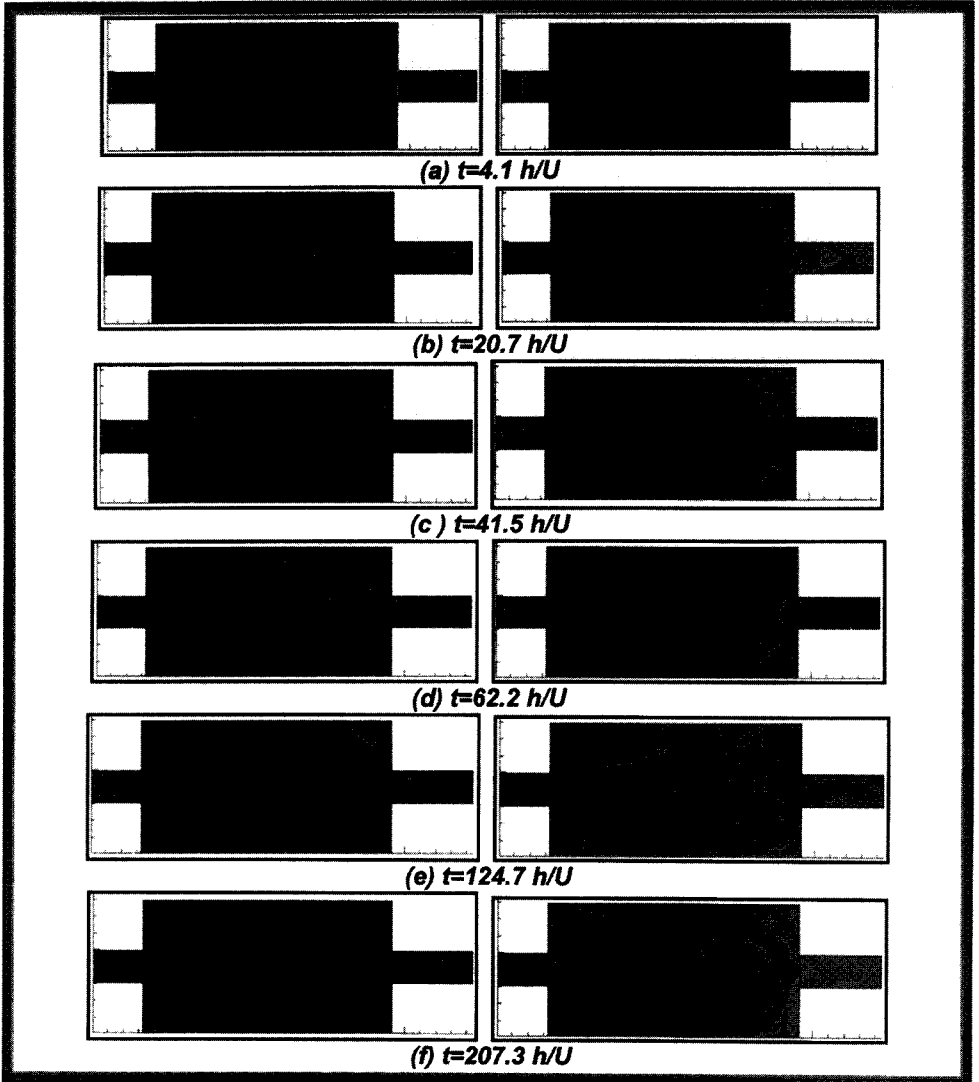


Figure 4.15: Sequência temporal dos campos de vorticidade (esquerda) e de temperatura (direita); $Re = 30.000 (Re = U_\infty h / \nu)$; frequência das oscilações de temperatura de $0,1 U_\infty / h$; $L = 0,8h$.

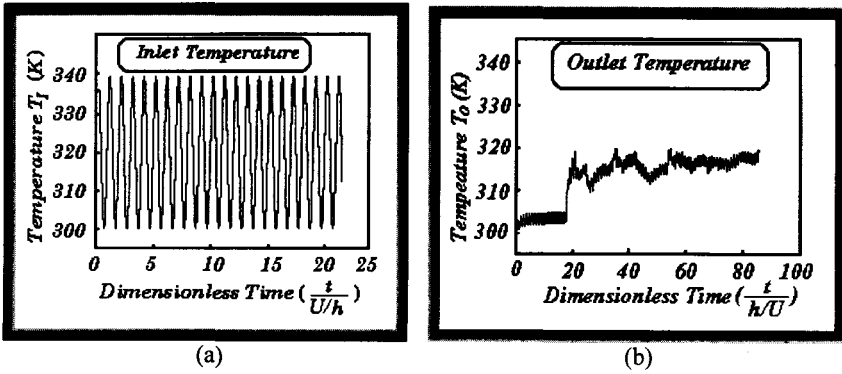


Figure 4.16: Distribuições de temperatura, relativas à Figura 15, na entrada (a) e na saída (b) do capacitor.

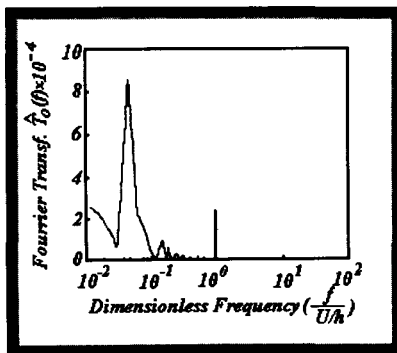


Figure 4.17: Transformada de Fourier do sinal da Figura 16 (b).

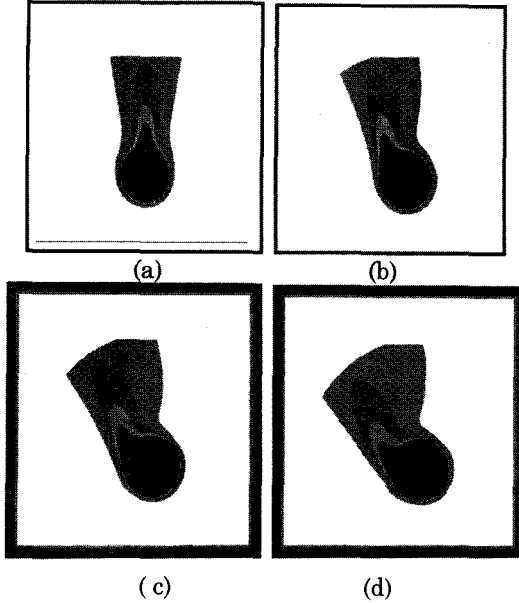


Figure 4.19: Campos de temperatura sobre um cilindro rotativo; $Ra^* = 1 \times 10^6$; $Pr = 0,7$; $C_s = 0,32$; (a) $Re = 0, s = 8(0rpm)$; (b) $Re = 290, s = 2(52rpm)$; (c) $Re = 410, s = 1(75rpm)$; (d) $Re = 557, s = 0,5(110rpm)$.

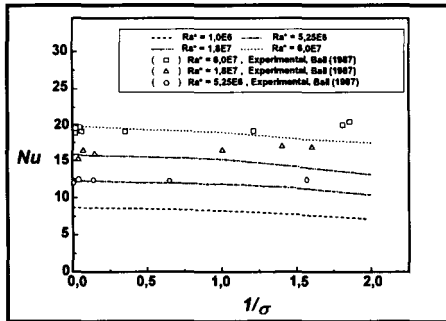


Figure 4.20: Nusselt médio em função do inverso de Froude ($1/s$) e de Ra^* ; $Pr = 0,7$.

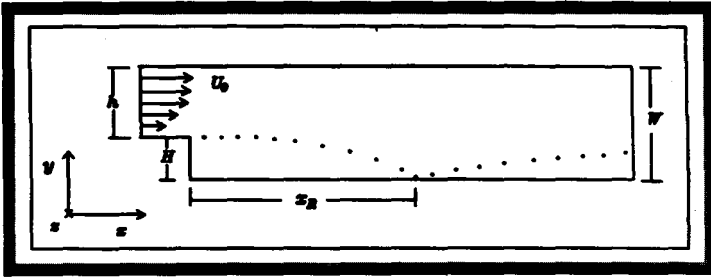


Figure 4.21: Expansão brusca; domínio de cálculo e características geométricas.

4.5.3 Simulação de Grandes Escalas de escoamentos turbulentos complexos

Neste item são apresentados resultados de dois estudos ilustrativos da aplicação de SGE para a solução de problemas complexos: trata-se de escoamentos turbulentos sobre uma expansão brusca e a interação de múltiplos jatos tridimensionais. Ambos foram tratados com um código computacional em volumes finitos com malhas entrelaçadas. O modelo sub-malha função estrutura de segunda ordem foi utilizado.

Escoamento turbulento sobre uma expansão brusca

Este problema está esquematizado na Figura 21 onde se vê os detalhes geométricos. Na figura 22 mostra-se o escoamento sobre uma expansão de baixo degrau, onde se visualiza os campos de vorticidades para vários instantes. Observa-se os detalhes do escoamento: descolamento no lado esquerdo da figura; a formação da região de recirculação com o processo de acumulação de vórtices que são transportados periodicamente para a saída do canal, em direção à direita do mesmo; o descolamento da camada limite junto a parede superior e a formação de uma esteira turbilhonar.

O escoamento tridimensional sobre esta mesma geometria pode ser visualizado nas Figuras 23 (a) e (b) onde se mostra respectivamente os campos de vorticidade e de pressão. É notória a complexidade do escoamento. Visualiza-se a formação das estruturas turbilhonares primárias (transversais ao escoamento), assim como as estruturas secundárias (longitudinais) com fortes interações não lineares entre si. Mais uma vez observa-se que foi possível colocar em evidência detalhes muito finos do escoamento, os quais foram também observados experimentalmente em escoamentos similares, tipo camada de mistura em desenvolvimento espacial. Mais detalhes sobre este trabalho podem ser encontrados em Silveira-Neto et al. (1993).

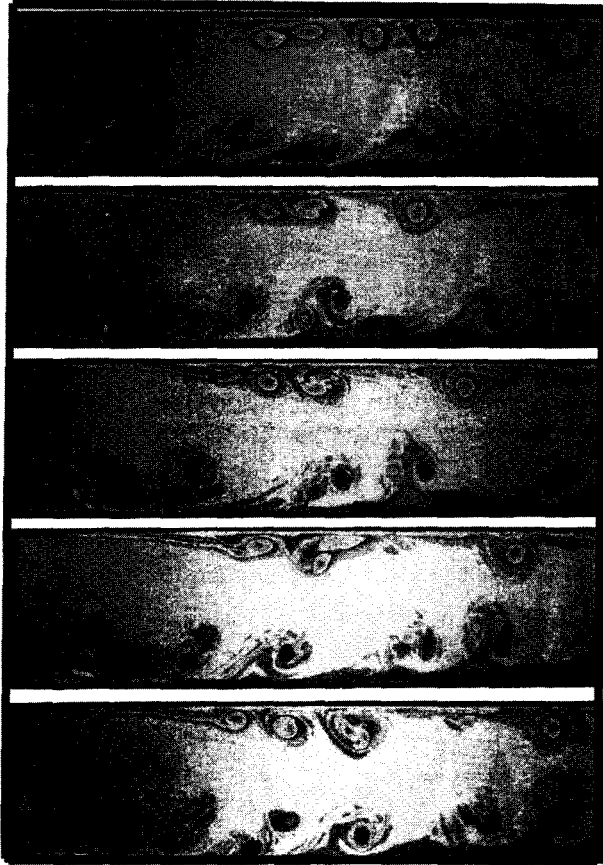


Figure 4.22: Evolução temporal do escoamento turbulento sobre um degrau; visualiza-se o campo de vorticidade; o número de Reynolds baseado na altura do degrau é ; utilizou-se uma malha de 320x80 pontos nas direções x e y respectivamente.



(a)

Figure 4.23
200x30x30 €

(b)

alha de

Figure 4.23: Simulação tridimensional da configuração descrita na Figura 22; malha de 200x30x30 em x, y e z respectivamente.

Interação entre jatos tridimensionais

Este estudo foi desenvolvido por Urbin (1997) utilizando o mesmo código computacional descrito no item anterior. Mostra-se aqui parte da análise de sistemas de múltiplos jatos, a título de exemplificação da aplicação de Simulação de Grandes Escalas para a solução de problemas industriais complexos. Na Figura 24 visualiza-se um sistema composto de 10 jatos simultâneos, os quais são simulados em três dimensões. O processo físico de formação das instabilidades é evidenciado claramente. Na figura 25 evidencia-se, sobre este mesmo sistema a formação de baixas frequências sobre o conjunto. Na Figura 25 (a) mostra-se a visualização experimental e na Figura 25 (b) mostra-se a visualização via Simulação de Grandes Escalas. É notória a semelhança entre os dois resultados. Ressalta-se o alto grau de complexidade deste tipo de escoamento, composto por múltiplos jatos interagindo entre si simultaneamente.

4.6 Discussão

Procurou-se dar uma visão geral sobre a metodologia de Simulação de Grandes Escalas de escoamentos turbulentos. Fez-se um apanhado dos tipos de modelos sub-malha existentes na literatura, desde os mais antigos até os mais modernos desenvolvidos nos últimos anos. Eles foram comparados e as vantagens e desvantagens foram levantadas ao longo do texto. Resultados ilustrativos foram apresentados, os quais permitiram ilustrar as potencialidades da metodologia SGE para a solução e análise de problemas envolvendo escoamentos complexos.

Ressalta-se que todos os modelos sub-malha apresentados apresentam deficiências no que se refere à simulação dos seguintes problemas: escoamentos em transição; escoamentos nas

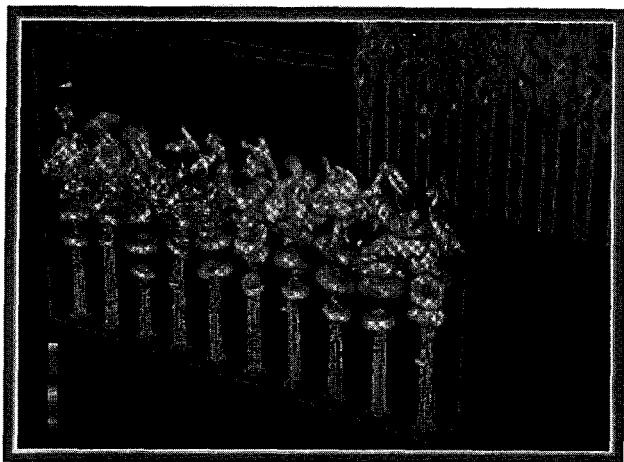


Figure 4.24: Simulação de grandes escalas do processo de interação entre múltiplos jatos; visualiza-se o campo de pressão (Urbin, 1997).

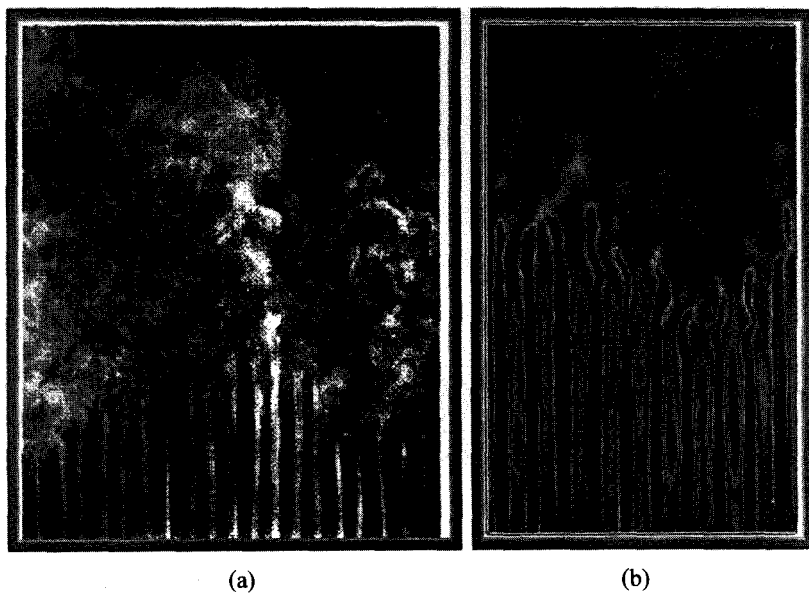


Figure 4.25: Simulação de grandes escalas de múltiplos jatos; evidencia-se a formação de baixas frequências sobre o sistema (Urbin, 1997).

proximidades de paredes e transporte inverso de energia das escalas não resolvidas (sub-malha) para as escalas resolvidas, através da frequência de corte: este fenômeno é conhecido como back-scatter.

A modelagem dinâmica, recentemente desenvolvida e ainda em fase de testes e mesmo de desenvolvimento, poderá resolver em parte estes problemas. Resta, no entanto, problemas de viscosidade turbulenta negativa em determinados momentos dos cálculos, o que promove divergências nas simulações. Muito ainda se tem que desenvolver em matéria de modelagem da turbulência, objetivando-se modelos que sejam ao mesmo tempo simples e gerais, ou seja, válidos para todas as geometrias e para escoamentos de naturezas físicas diferentes.

4.7 Referências

- Amtonopoulos-Domis, 1981, "Large-Eddy simulation of a passive scalar in isotropic turbulence", *J. Fluid Mechanics*, vol. 104, pp. 55-79.
- Batchelor, G. K., 1953, *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press.
- Bradshaw, P., Launder, B. E. and Lumley, J. L., 1996, "Collaborative testing of turbulence models", *J. of Fluids Eng.*, vol. 118, pp. 243-247.
- Carati, D., Ghosal, S. and Moin, P., 1995, "On the representation of backscatter in dynamic localization models", *Phys. Fluids*, vol. 7 (3), pp. 606-626.
- Churchill, S. W. and Chu, H. H. S., 1975, "Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Horizontal Cylinder", *I. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 18, pp. 1049-1053.
- Cholet, J. P. e Lesieur, M., 1982, "Parametrization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures", *J. Atms. Sci.*, vol. 38, pp. 2747-2757.
- Clark, R. A., Ferziger, J. H. and Reynolds, W. C., 1979, "Evaluation of subgrid-scale models using and accurately simulated turbulent flow", *J. Fluid Mech.*, vol. 91, pp. 1-6.
- Couder, Y., Chomaz, J. M. and Rabaud, M., 1989, "On the hydrodynamics of soap films", *Physica D* 37, pp. 384-405.
- David, E., 1993, "Modélisation des écoulements compressibles et hypersoniques: une approche instationnaire", PhD thesis, Nat. Polytech. Inst. Grenoble.
- Deardorff, J. M., 1970, "A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number", *J. Fluid Mech.*, vol. 41, pp. 453-480.
- Ducros, F., 1995, "Simulations numériques directes et des grandes échelles de couches limites compressibles", PhD thesis, Nat. Polytech. Inst. Grenoble.
- Fallon, B., 1996, "Large-Eddy Simulation of Stable-Stratification effects upon a backstep flow", Thèse, INPG-IMG-LEGI, Grenoble.

- Findikakis, A. e Streeter, R., 1979, "An algebraic model for subgrid-scale turbulence in stratified flows", *J. Atmos. Sciences*, vol. 36, pp. 1934-1949.
- Gagne, Y., 1987, "Etude expérimentale de l'intermittance et des singularités dans le plan complexe en turbulence développée", Thèse de Doctorat d'Etat, Grenoble, France.
- Germano, M., 1986, "A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in filtered Navier-Stokes equations", *Phys. Fluids*, vol. 29 (7), pp. 2323-2324.
- Germano, M., Piomelli, U, Moin, P. and Cabot, W., H., 1991, "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model", *Phys. Fluids A*, vol. 3 (7), pp. 1760-3128.
- Germano, M., 1992, Turbulence, the filtering approach, *J. Fluid Mech.*, vol. 238, pp. 325-336.
- Gharib, G., 1996, "Perspective: the experimentalist and the problem of turbulence in the age of supercomputers", *J. of Fluids Eng.*, vol. 118, pp. 233-241.
- Ghosal, S., Lund, T. S., Moin, P and Voll, K. A., 1995, "A dynamic localization models for large-eddy simulation of turbulent flows", *J. Fluid Mech.*, vol. 286, pp. 229-255.
- Kolmogorov, A. N., 1941, "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 30, pp. 301-305.
- Kraichnan, R. H., "Eddy viscosity in two and three-dimensions", *J. Atmos. Sci.*, vol.33, pp. 1521-1536.
- Lesieur, M., 1997, Turbulence in Fluids Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Lesieur, M. e Métais, O., 1996, "New trends in Large-Eddy simulation of turbulence", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 28, pp. 45-82.
- Lesieur, M., 1994, La turbulence, Presses Universitaires de Grenoble, France.
- Lilly, D. K., 1987, "In lecture notes on turbulence", edited by J. R. Herring and J. C. McWilliams, pp. 171-218, World Scientific, USA.
- Lilly, D. K., 1992, "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method", *Phys. Fluids A*, vol. 4(3), pp. 633-635.
- MacCormack, R. W., 1996, "The effect of viscosity hypervelocity impact catering", AIAA paper, pp. 69-354.
- Matos, A., 1996, "Simulação numérica de grandes escalas de escoamentos turbulentos em cavidades retangulares axisimétricas", Master of Science Dissertation, Federal University of Uberlândia, Brazil.
- Métais, O. e Lesieur, M., 1991, "Spectral and Large-Eddy Simulations of isotropic and stably-stratified turbulence", *J. Fluid Mech.*, vol. 239, pp. 157-194.
- Moin, P., Squires, K., Cabot, W and Lee, S., 1991, "A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport", *Phys. Fluids A*, vol. 3 (11), pp. 2746-2757.

Morales, R. E. M., 1996, "Simulação de Grandes Escalas da Convecção Mista sobre um Cilindro Rotativo Aquecido, Dissertação de Mestrado", Universidade Federal de Uberlândia - UFU.

Morales, R. E. M., Balparda, A. e Silveira-Neto, A., 1998, "Simulação numérica de grandes escalas da convecção mista sobre um cilindro rotativo"; artigo aceito para publicação no *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*.

Pinho, F. A. A., 1996, "Simulação numérica de grandes escalas de escoamentos turbulentos em cavidades retangulares bidimensionais", Master of Science.

Piomelli, U., 1993, "High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model", *Phys. Fluids A*, vol. 5(6), pp. 1484-1490.

Reynolds, O., 1894, "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 186, Part I, pp.122-164.

Scotti, A. and Meneveau, C., 1993, "Generalized Smagorinsky model for anisotropic grids", *Phys. Fluids A*, vol. 5(9), pp. 2306-2308.

Shaanan, S., Ferziger, J. H. e Reynolds, W. C., 1975, "Numerical simulation of turbulence in presence of shear", Rep. TF-6, Dept. Mechanical Engineering, Stanford University.

Silveira-Neto, A., Grand, D., Métais, O. and Lesieur, M., 1993, "A numerical investigation of the coherent structures of turbulence behind a backward-facing step", *Int. J. of Fluid Mech.*, vol. 256, pp. 1-25.

Smagorinsky, J., 1963, "General Circulation Experiments with Primitive Equations", *Mon. Weather Rev.*, vol. 91, pp. 99-164.

Srredhar, M. e Ragab, S., 1994, "Large-eddy Simulation of longitudinal stationary vortices", *Phys. Fluid*, vol. 6(7), pp. 2501-2514.

Spyropoulos, E. T. and Blaisdel, G. A., 1996, "Evaluation of the dynamic models for simulation of compressible decaying isotropic turbulence", *AIAA Journal*, vol. 34 (5), pp. 990-998.

Urbin, G., 1997, "Large-Eddy Simulation of Turbulent Jets", CEA-Grenoble, Communication Privée.

Capítulo 5

Elementos Finitos Aplicados à Turbulência

Antonio C. P. Brasil Junior
Programa de Engenharia Mecânica (UnB)
70910-900, Brasília, D.F., Brasil

5.1 Introdução

Uma das consequências do avanço tecnológico de sistemas computacionais, sem dúvida nenhuma, foi de proporcionar a engenheiros e cientistas ferramentas de simulação numérica que permitem a análise de problemas cada vez mais realistas. Associadas ao desenvolvimento de métodos numéricos eficientes, com a utilização ou não do paradigma da computação paralela, as ferramentas de simulação permitem uma abordagem confiável, com baixo custo, de problemas complexos tanto sob o ponto de vista de sua formulação matemática, quanto de seu domínio espacial.

Escoamentos industriais podem ser abordados, na atualidade, considerando-se efeitos físicos diversos relacionados à turbulência, compressibilidade ou reatividade, dentre outros. Geometrias e condições de contorno complexas podem também ser tratadas dentro de contextos de métodos numéricos adequados. Na segunda metade deste século, a modelagem da turbulência vem evoluindo em conjunto com metodologias numéricas avançadas. Esta dualidade, praticamente indissociável, permite uma abordagem prática de problemas, com efetiva redução de custo de desenvolvimento industrial nas áreas aeroespacial, de processos químicos e de alimentos, automotiva, etc. A utilização de códigos baseados em métodos de volumes finitos ou elementos finitos é uma realidade no desenvolvimento de projetos de sistemas. Isto é consequência do desenvolvimento científico de alto nível envolvendo engenheiros e cientistas de diferentes países. O estágio atual dos códigos de simulação de escoamentos é caracterizado pelo repasse constante de novas implementações, permitindo aos grupos de projeto a utilização de tecnologia de ponta envolvendo tanto modelos matemáticos mais realistas, quanto métodos numéricos mais eficientes.

Neste capítulo uma introdução ao método de elementos finitos para a simulação de escoamentos turbulentos é apresentada. Pretende-se colocar de lado uma discussão pouco profícua sobre a utilização de metodologias do tipo elementos finitos ou volumes finitos. Considera-se que ambas as metodologias são adequadas à simulação de problemas industriais complexos, sendo a escolha por uma ou outra abordagem uma escolha pessoal que envolve o histórico da formação do profissional de P&D envolvido na utilização do método, ou mesmo a oportunidade de negócio ou desenvolvimento associada à compra do código de trabalho. Para a abordagem de problemas matemáticos que formulam diferentes tipos de escoamento, ambas as metodologias demonstraram nos últimos anos a capacidade de apresentar soluções realistas, de maneira computacionalmente eficiente.

Este texto não pretende de forma nenhuma esgotar o assunto da utilização do método de elementos finitos (MEF) aos escoamentos turbulentos. Trata-se somente de um texto motivador, que introduz a linguagem específica do MEF, a profissionais ligados ao tratamento deste tipo de escoamento.

5.2 Histórico

Os primeiros métodos numéricos para a simulação de escoamentos datam das décadas de cinquenta e sessenta e baseavam-se no método de diferenças finitas. Para as formulações de escoamentos por variáveis primitivas (u e p) ou em termos de função corrente-vorticidade ($\psi - \xi$) foram desenvolvidos as primeiras metodologias numéricas, relatadas por exemplo nos trabalhos de *Roache (1970)*, *Gosman et al. (1969)* e *Hirt (1971)*. As aplicações encontradas na literatura desta época envolvem principalmente problemas laminares, definidos em domínios

regulares. Algumas poucas aplicações de simulação de escoamentos turbulentos, com a utilização de modelos algébricos simples tipo comprimento de mistura, podem ser encontradas na literatura. Nesta mesma época o desenvolvimento do MEF avançava no sentido de tratar problemas lineares com formulação matemática mais simples, tais como em engenharia estrutural, condução de calor, escoamento potencial, etc. (e.g. *Zienkiewicz (1967)*). O apelo ao tratamento de geometrias complexas proporcionava então a esta metodologia uma grande vantagem em relação a outras metodologias, que por outro estavam mais adaptadas à resolução de problemas de mecânica dos fluidos, estes não-lineares.

Os anos 70 foram caracterizados por um grande avanço no desenvolvimento tanto de modelos de turbulência mais realísticos, quanto no desenvolvimento de novas metodologias numéricas mais adaptadas. *Patankar & Spalding (1972)* e *Patankar (1980)* caracterizam o marco de proposta da metodologia de volumes finitos. Esta metodologia, associada a proposta de modelos de turbulência com duas equações (*Harlow & Nakayama (1972)*, *Jones & Launder (1972)*) e *Launder & Spalding (1972)*) permitiram a simulação de escoamentos turbulentos com recirculação, envolvendo assim diversas situações práticas mais evidentes. Surgem também as primeiras versões mais objetivas de modelos de fechamento de segunda ordem (*Hanjalic & Launder (1972)*, *Launder et al. (1975)*). Nesta década, os avanços do MEF associados à mecânica dos fluidos foram caracterizados por um embasamento teórico mais sólido associado à análise numérica de problemas com formulação mista (problemas de Stokes). Neste tipo de estudo, avaliou-se os espaços admissíveis de interpolação dos campos de velocidade e pressão (e.g. *Brezzi (1974)*, *Girault & Raviart (1979)* e *Bercovier & Pironneau (1979)*). Elementos finitos consistentes para o tratamento de problemas em mecânica dos fluidos são então propostos, permitindo assim as primeiras simulações de escoamentos incompressíveis (*Bristeau et al. (1980)*). Esquemas estáveis para a discretização de problemas convectivos foram desenvolvidos com uma forte base nos desenvolvimentos anteriores para estabilização de problemas convectivos em diferenças finitas (*Hughes (1978)* e *Kelly et al. (1980)*). Um atraso de quase dez anos em relação à evolução de métodos tipo diferenças finitas/volumes finitos é observado. A turbulência e elementos finitos ainda estavam bem distantes.

Na década de oitenta a evolução dos modelos de turbulência direcionou-se no sentido de propostas de modelos de fechamento de segunda ordem (e.g. *Launder (1987)*) e para condições físicas mais complexas tais como compressibilidade (*Vandrome (1983)*) ou múltiplas fases (*Elghobashi & Abou-Arab (1983)*). Modelos válidos para regiões próximas à parede são também propostos (Modelos baixo Reynolds), permitindo assim a integração do problema em todo o domínio (*Patel et al. (1985)*). O método de elementos finitos evolui nos anos 80 no sentido de colocar dentro de um contexto de embasamento teórico os tratamentos dos problemas de estabilização do problema de convecção-difusão (*Brooks & Hugues (1982)*, *Johnson & Saranen (1986)* e de interpolação dos campos de velocidade e pressão (e.g. *Hugues & Franca (1987)*, *Hughes et al. (1986)*). Isto permitiu tanto a utilização de esquemas de discretização com convergência assegurada para problemas fortemente convectivos, como também a utilização de elementos finitos com mesma ordem de interpolação para os campos de velocidade e pressão. A aplicação do MEF a modelos de turbulência tipo $k-\epsilon$ é somente reportada nos trabalhos pioneiros de *Taylor (1983)*, *Smith (1984)* e *Brison et al (1985)*.

Se por um lado uma grande evolução do MEF no sentido de tratamento de problemas laminares e turbulentos foi observada, permitindo assim a resolução numérica de problemas com geometrias complexas, um atraso ainda grande quanto ao tempo de cálculo em comparação com métodos que utilizavam malhas estruturadas, tipo volumes finitos, era ainda notado. Pelo lado do método de volumes finitos, o contexto de coordenadas generalizadas permitiu então

o tratamento de domínios um pouco mais complexos que aqueles definidos em coordenadas cartesianas (ou polares) (*Maliska (1986)*). Porém, neste ponto específico, a metodologia de elementos finitos era ainda mais adequada a tratar problemas geométricos mais complexos.

No fim deste século, o MEF para aplicações em escoamentos laminares e turbulentos atinge uma maturidade de desenvolvimento. Atualmente o estágio de desenvolvimento desta metodologia permite o tratamento de uma enorme variedade de problemas de escoamentos turbulentos, definidos em geometrias 2D e 3D, utilizando uma gama de modelos de fechamento de primeira e segunda ordem, os quais também apresentaram um nível de evolução importante. Diversos códigos comerciais baseados em elementos finitos são disponíveis no mercado, os quais disponibilizam modelos de turbulência avançados, considerando situações complexas de interações da hidrodinâmica com efeitos de compressibilidade ou combustão, por exemplo. O sentido de evolução da metodologia baseia-se atualmente na melhoria da eficiência dos algoritmos de maneira a acelerar a convergência de problemas não-lineares e no sentido de viabilizar a utilização de malhas de discretização que envolvam um número cada vez maior de graus de liberdade. A modelagem da turbulência por outro lado evolui no sentido de proporcionar relações de fechamento mais exatas, com base em resultados experimentais obtidos com instrumentação avançada, ou ainda oriundos de simulações diretas ou de grandes vórtices (DNS ou LES). No estágio atual, tanto o MEF quanto o método de volumes finitos apresentam uma enorme potencialidade de resolução de problemas de escoamentos complexos quaisquer. A utilização de malhas não-estruturadas com grande número de graus de liberdade é uma realidade na solução de problemas de escoamentos em geometrias bastante complicadas. A própria evolução da computação paralela, em máquinas de relativo baixo custo, permite na virada do milênio a construção de túneis de vento virtuais, com excelente confiabilidade de resultados, proporcionando portanto a redução de custos de desenvolvimento de projetos de diferentes produtos, de aviões à próteses de válvulas cardio-vasculares.

5.3 Formulação

5.3.1 Equações de conservação médias

Considera-se no presente trabalho escoamentos de fluidos newtonianos, incompressíveis e turbulentos. Define-se como Ω e Γ respectivamente o domínio no qual o escoamento é definido ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3) e seu contorno. As equações que governam o problema são dadas pelas versões médias dos princípios de conservação da massa e quantidade de movimento:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{U}) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{U}) - \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}) \quad (5.2)$$

Nestas equações ρ e ν são a densidade e a viscosidade do fluido, \mathbf{U} e P os campos médios de velocidade e pressão respectivamente, e $\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}$ o tensor de tensões turbulentas.

Condições de contorno devem ser adicionadas, especificando a velocidade ou a pressão em uma dada parcela do domínio, ou seja: $\mathbf{U} = \mathbf{g}$ em Γ_g ; e $P = h$ em Γ_h . Condições iniciais para o campo de velocidade devem ser consideradas, na forma $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ em Ω , para $t = 0$.

O aparecimento do tensor de Reynolds na equação de conservação é uma consequência direta do processo estocástico de geração de equações médias de grandezas aleatórias, envolvendo sempre uma recursividade a momentos de ordem superior. Uma equação média tensorial pode ser obtida a partir da equação exata do campo flutuante (*c.f. Hinze (1975)*). Esta equação é escrita na forma:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} = \mathbf{P} + \mathbf{d} + \Phi - \epsilon \quad (5.3)$$

Nesta equação $\boldsymbol{\tau} \equiv \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}$ e as diferentes parcelas tensoriais são dadas por:

- Parcela de produção devido a taxa de deformação do campo médio:

$$\mathbf{P} = -\boldsymbol{\tau} (\nabla \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U}) \quad (5.4)$$

- Mecanismo de transporte por difusão, agregando as parcelas correspondentes às flutuações de velocidade, às flutuações de pressão e à difusão molecular:

$$\mathbf{d} = -\nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}) - \frac{1}{\rho} (\nabla \overline{p \mathbf{u}} + \nabla^T \overline{p \mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\nu \nabla \boldsymbol{\tau}) \quad (5.5)$$

- Parcela correspondente às correlações entre a taxa de deformação do campo flutuante com as flutuações de pressão. Esta parcela reflete o mecanismo de redistribuição, pela pressão, da energia cinética de turbulência, entre os diferentes componentes do tensor de Reynolds:

$$\Phi = \frac{1}{\rho} \overline{p (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})} \quad (5.6)$$

- Tensor de dissipação, que equaciona a dissipação viscosa:

$$\epsilon = 2\nu \overline{\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla^T \mathbf{u}} \quad (5.7)$$

Observação 1

O tensor de Reynolds é simétrico e positivo definido

Observação 2

Os componentes da diagonal do tensor são sempre positivos, (c.f Condição de realizabilidade¹ - Lumley (1983)): $\tau_{ii} \geq 0$, $i = 1, 2, 3$

Observação 3

Valem as seguintes relações:

- $\forall (i, j)$, $(\overline{u_i \cdot u_j}) \leq \overline{u_i^2} \cdot \overline{u_j^2}$, (Desigualdade de Cauchy-Schwartz);
- $\det \tau \geq 0$, (Determinante do tensor positivo)

As características apresentadas nas observações anteriores são consequência das propriedades estatísticas das correlações dos componentes de velocidade que compõem o tensor de Reynolds. Tais propriedades são utilizadas para a verificação da consistência de modelos de fechamento, ou mesmo para avaliar a convergência de esquemas numéricos.

A partir do traço da equação 5.3 pode-se obter a equação de evolução da energia cinética de turbulência, definida como:

$$k \equiv \frac{\overline{q^2}}{2} = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \quad (5.8)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla k &= \nabla \cdot \left(\nu \nabla k - \overline{\mathbf{u}k} - \frac{1}{\rho} \overline{p\mathbf{u}} \right) - \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} : \nabla \mathbf{U} - \\ &\quad - \frac{\nu}{2} \overline{(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Em geral utiliza-se a notação dos termos de produção e dissipação desta equação respectivamente por:

$$P_k = -\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} : \nabla \mathbf{U} \quad (5.10)$$

$$\epsilon = \frac{\nu}{2} \overline{(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})} \quad (5.11)$$

Para a dissipação, uma equação exata pode ser deduzida a partir da equação exata do campo flutuante (c.f. Hinze (1975)).

¹Reliability constraint

5.3.2 Modelos de Turbulência: Aspectos gerais

As equações 5.3 e 5.9 foram obtidas diretamente das leis de conservação com a aplicação de um operador de média estatística. Nesta dedução, novas variáveis de correlação estatística de ordem superior são obtidas ($\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}, \overline{\mathbf{u} \nabla p}, \dots$). Isto é uma característica peculiar dos métodos estocásticos, onde uma correlação de uma dada ordem será sempre função de correlações de ordem superior. Em dado nível de descrição estatística, o problema de fechamento é colocado, necessitando-se assim a modelagem inexata de correlações de ordem superior.

Em geral a modelagem da turbulência utiliza técnicas análogas aquelas aplicadas na mecânica dos meios contínuos, onde procura-se representar uma grandeza escalar, vetorial ou tensorial em função de grandezas conhecidas. Metodologias de modelagem baseadas em teoremas de representação e invariância material são bastante utilizadas (e. g., Lumley (1970) e Speziale (1989)). As constantes a determinar são ajustadas a partir de experiências precisas oriundas de análises experimentais ou de simulações diretas (DNS). Estas experiências apresentam informações fundamentais para a modelagem, tais como os campos médios de velocidade e pressão, e suas estatísticas, bem como suas correlações de ordem superior. Estes parâmetros permitem a determinação das escalas características da turbulência e de seu balanço energético.

Na classificação habitual de um modelo de turbulência, o modelo de fechamento em *primeira ordem* visa estabelecer relações diretas para o tensor de tensões de Reynolds com o campo de velocidade média, mais particularmente com os seus gradientes. Para um modelo de fechamento em *segunda ordem*, novas equações de transporte devem ser utilizadas para cada componente do tensor de Reynolds. Neste último caso os termos de ordem superior da equação média (equações 5.4-5.7) são convenientemente modelados. Neste trabalho limita-se a uma modelagem de fechamento em primeira ordem da turbulência.

O princípio de invariância material estabelece que se o tensor de tensões turbulentas é função do gradiente de velocidade, a única dependência linear possível é dada por (Chacon & Pironneau (1986)):

$$\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} = a\mathbf{I} + b\mathbf{D}(\mathbf{U}) \quad (5.12)$$

Onde $a, b \in \mathbb{R}$, \mathbf{I} é o tensor identidade e $\mathbf{D}(\mathbf{U})$ a parte simétrica do gradiente de velocidade dada por:

$$\mathbf{D}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}(\nabla \overline{\mathbf{U}} + \nabla^T \overline{\mathbf{U}}) \quad (5.13)$$

Isto de fato embasa matematicamente a relação proposta no século XIX por Boussinesq (1877) na forma:

$$\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} = \frac{2}{3}k\mathbf{I} - 2\nu_T\mathbf{D}(\mathbf{U}) \quad (5.14)$$

Onde ν_T é a viscosidade de turbulência, um parâmetro que deve ser ainda modelado mais precisamente.

A hipótese de Boussinesq foi originalmente proposta tendo em vista uma analogia do escoamento turbulento com a teoria cinética dos gases. Embora matematicamente correta, a hipótese de viscosidade de turbulência equivale a alinhar os eixos principais dos tensores de Reynolds e

de taxa de deformação, o que em diversas situações físicas não é observado. Para escoamentos onde as tensões tendem a um comportamento anisotrópico (escoamentos com forte curvatura nas linhas de corrente, controlados por forças de empuxo ou giro e em zonas de recirculação) os resultados obtidos com este tipo de modelo apresentam discordâncias em relação às medições experimentais. Mesmo com estas limitações, o modelo de viscosidade de turbulência é uma ferramenta importante para a resolução de escoamentos complexos sendo eles industriais ou ambientais.

A relação 5.14 pode ser expandida em uma aproximação mais geral que envolve termos não-lineares (*Speziale (1987)*). Este tipo de modelo, ainda que de primeira ordem, considera efeitos anisotrópicos o que o torna mais realista do que a proposta original de Boussinesq. De forma geral, pode-se escrever este tipo de modelo na forma:

$$\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} = \frac{2}{3}k\mathbf{I} - 2\nu_T\mathbf{D}(\mathbf{U}) + \mathbf{B}(\mathbf{U}) \quad (5.15)$$

O tensor $\mathbf{B}(\mathbf{U})$ é uma função quadrática do gradiente de velocidade média. Este modelo será discutido à seguir.

5.3.3 Modelo à duas equações $k - \epsilon$

O modelo de turbulência $k - \epsilon$, proposto por *Harlow & Nakayama (1972)*, e implementado numericamente por *Jones & Launder (1972)* e *Launder & Spalding (1972)*, é certamente o modelo de turbulência mais utilizado para a simulação numérica de escoamentos turbulentos. Sua implementação numérica é relativamente simples de ser executada a partir de um código laminar base. Embora sua ineficiência na previsão de alguns tipos de escoamento seja observada, o mesmo é um bom ponto de partida para a análise de problemas que se necessitem um conhecimento básico do campo turbulento. A base do modelo de turbulência $k - \epsilon$ é a aproximação de Boussinesq formulada pela equação 5.14. A viscosidade de turbulência é então formulada por uma relação de escalas formada pela dissipação e pela energia cinética de turbulência. Esta relação é dada pela proposta de Prandtl-Kolmogorov:

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.16)$$

Utilizando as últimas relações na equação 5.9 e um fechamento simples para os termos difusivos, tem-se a equação para a energia cinética de turbulência:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \epsilon \quad (5.17)$$

A equação para ϵ é obtida através do fechamento de seus termos de ordem superior, ou de maneira mais simple e objetiva por argumentos de escala. Esta equação é dada por:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (5.18)$$

Nas equações básicas do modelo (eqs. 5.17 e 5.18), constantes são introduzidas ($\sigma_k, \sigma_\epsilon, \dots$). Os valores originais propostos por Jones & Launder (1972) são dados por:

$$C_\mu = 0.09; C_{\epsilon 1} = 1.44; C_{\epsilon 2} = 1.92; \sigma_k = 1.0; \sigma_\epsilon = 1.3$$

Observação 4

Com base na metodologia RNG (*Renormalization Group Theory*), Yakhot & Orsag (1986) propõem uma versão ligeiramente diferente para as constantes do modelo, modificando-as para:

$$C_\mu = 0.085; \sigma_k = 0.72; \sigma_\epsilon = 0.72; C_{\epsilon 2} = 1.68;$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.42 - \frac{\eta(1 - \eta/4.38)}{1 + 0.012\eta^3}$$

Onde

$$\eta = \frac{k \sqrt{2\mathbf{D}(\mathbf{U}) : \mathbf{D}(\mathbf{U})}}{\epsilon}$$

Os resultados obtidos utilizando esta abordagem demonstram uma melhora significativa para casos de escoamentos com recirculação (*e.g.* Lien & Leschziner (1994))

Observação 5

O modelo formulado considera sempre que a turbulência local é desenvolvida. O mesmo não apresenta uma tendência assintótica para o escoamento laminar, quando os valores de Reynolds local são baixos. Para que o modelo de turbulência consiga prever a laminarização do escoamento, é necessário que ajustes sejam propostos, caracterizados por modificações nas constantes das equações de k e ϵ (*e.g.* Shi (1990), Yap (1987)). Estas modificações em geral envolvem funções de amortecimento da turbulência baseadas em um número de Reynolds local ($Re_T = k^2/\nu\epsilon$) ou da distância da parede sólida.

5.3.4 Modelo $k - \epsilon$ Anisotrópico

As principais deficiências do modelo $k - \epsilon$ são consequência da utilização do conceito de viscosidade de turbulência. Sabe-se que a capacidade de tal modelo em prever situações onde as tensões normais são relevantes (escoamentos com forte curvatura das linhas de corrente, com influência da força de corpo ou giro, ou nas zonas de recirculação) são fracas e os resultados obtidos apresentam geralmente grandes diferenças em relação aos resultados experimentais.

Diversas modificações empíricas do modelo são propostas para adaptá-lo às diferentes situações. Cita-se por exemplo as propostas de Leschziner & Rodi (1984) para escoamentos com giração, Rodi (1984) para escoamentos com força de empuxo, dentre diversas outras versões adaptadas deste modelo para situações específicas. É importante observar que as adaptações do modelos original são feitas com base em um empirismo *had hoc* que só convém à situações particulares, limitantes em seu uso geral.

Uma modificação bastante robusta foi proposta por Speziale (1987) ou Speziale (1991), que partindo das idéias de modelagem constitutivas de fluidos não-Newtonianos tipo Rivlin-Ericksen, congruentes com as idéias de base do modelo $k - \epsilon$, obtem-se uma versão anisotrópica e não-linear, que produz resultados muito bons para escoamentos com recirculação. Observa-se que os mesmos conceitos para a inclusão de termos anisotrópicos no modelo, foi proposta por

Yoshizawa (1984) utilizando um formalismo DIA. Mais recentemente o modelo anisotrópico foi discutido nos artigos de *Craft et al (1993)* e *Park & Sung (1995)* e novamente os resultados obtidos são surpreendentes.

As idéias básicas que fundamentam o modelo anisotrópico, são oriundas de uma extensão do conceito de tensor do comportamento *viscoso* do tensor de Reynolds, utilizando uma equação constitutiva mais geral do tipo fluido visco-elástico, invariante à mudança de referencial. Esta concepção de fato é originária de um trabalho de *Lumley (1970)*. Desta maneira *Speziale (1987)* utiliza a equação extendida 5.15, com o tensor **B** definido como:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{U}) = & C_{\tau 1} \nu_T \frac{k}{\epsilon} (\mathbf{D}^2(\mathbf{U}) - \frac{1}{3} D_{II}^2 \mathbf{I}) + C_{\tau 2} \nu_T \frac{k}{\epsilon} (\mathbf{W}(\mathbf{U})\mathbf{D}(\mathbf{U}) + \mathbf{W}^T(\mathbf{U})\mathbf{D}(\mathbf{U})) \\ & + C_{\tau 3} \nu_T \frac{k}{\epsilon} (\mathbf{W}^2(\mathbf{U}) - \frac{1}{3} W_{II}^2 \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Nesta equação o tensor **W**(**U**) é a parte anti-simétrica do gradiente de velocidade, *i. e.*:

$$\mathbf{W}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} - \nabla^T \mathbf{U}) \quad (5.20)$$

e os invariantes dados por:

$$D_{II}^2 = \mathbf{D}(\mathbf{U}) : \mathbf{D}(\mathbf{U}) ; W_{II}^2 = \mathbf{W}(\mathbf{U}) : \mathbf{W}(\mathbf{U}) \quad (5.21)$$

Os valores das constantes do modelo são dadas por *Park & Sung (1995)*:

$$C_{\tau 1} = 0.6 ; C_{\tau 2} = 0.4 ; C_{\tau 3} = 0.005 \quad (5.22)$$

Observação 6

Embora os modelos apresentados anteriormente, contemplem matematicamente a parte transiente através da presença da derivada temporal nas equações de *k* e ϵ , as hipóteses de fechamento originalmente utilizadas são incompatíveis com a variação dos campos com o tempo. A evolução temporal da turbulência deve estar associada a um fechamento que considere termos de história dos campos médios e de tensões de Reynolds. Para o modelo anisotrópico, um termo adicional de história, baseado na parcela transiente da derivada de Oldroyd, $\partial \mathbf{D}(\mathbf{U}) / \partial t$ deve ser considerado (ver *Speziale (1986)*). Para o caso do modelo *k - \epsilon* convencional, modificações devem ser propostas no sentido de considerar a escala de tempo de evolução da turbulência.

5.3.5 Condições de Contorno

O sistema de equações diferenciais parciais apresentado nos capítulos anteriores válidas no domínio Ω , deve ser complementado por um conjunto de condições de contorno, estabelecidas na fronteira Γ . Estas condições são caracterizadas por valores impostos dos campos **U**, *P*, *k*, ϵ , e suas derivadas sobre Γ .

As condições de contorno geralmente impostas são:

- **Condição de afluxo:** Para o escoamento entrando no domínio, sobre a superfície Γ_e , impõe-se condições do tipo Dirichlet para os campos de velocidade e de grandezas turbulentas, *i.e.*:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_e(\mathbf{x}); k(\mathbf{x}) = k_e(\mathbf{x}); \epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon_e(\mathbf{x}); \forall \mathbf{x} \in \Gamma_e \quad (5.23)$$

- **Condição de efluxo:** Para o escoamento saindo do domínio, sobre a superfície Γ_s , com normal \mathbf{n} , impõe-se condições do tipo Neumann homogêneas sobre os componentes do campo de velocidade, k e ϵ , considerando também uma pressão de referência na saída:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} = 0; \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0; \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0; P(\mathbf{x}) = P_s; \forall \mathbf{x} \in \Gamma_s \quad (5.24)$$

- **Condições de parede:** O estabelecimento de condições de contorno relativas à uma parede sólida que confina o escoamento, é um ponto delicado na modelagem da turbulência e seu tratamento numérico. Lembra-se inicialmente que as equações descritas nos itens anteriores, não são válidas próximas à parede. A tendência natural seria de modificar o modelo, considerando uma tendência assintótica para laminarização, integrando assim as equações até a parede. Este tipo de estratégia, que utiliza modelos de baixo Reynolds, é utilizada em algumas situações. Nota-se porém que a utilização de tais modelos está associada à uma utilização de malhas de discretização muito densas próximo da parede. Esta é a única maneira de capturar as fortes variações dos campos nestas regiões. Em geral, para contornar esta dificuldade, *leis de parede* são utilizadas. Nesta abordagem, o domínio é deslocado de uma distância δ , muito pequena, na direção normal da parede. A partir desta superfície, vale as equações do modelo de turbulência. Sobre esta superfície serão então impostos valores para \mathbf{U} , k e ϵ .

Seja portanto uma superfície limite do domínio, próxima à parede sólida notada como Γ_w , como mostra a figura 5.1. Em qualquer ponto desta superfície, pode-se definir um referencial local formado pelos vetores unitários normal à parede, \mathbf{n} , tangencial à linha de corrente que passa sobre o ponto, \mathbf{t} , e um vetor binormal aos dois primeiros \mathbf{s} . A generalização das leis de equilíbrio sobre este sistema de coordenadas é dada por:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{t}_w = f(\delta, \mathbf{U}, \nu, \nabla P \cdot \mathbf{t}) \quad (5.25)$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_w = 0; \mathbf{U} \cdot \mathbf{s}_w = 0 \quad (5.26)$$

$$k_w = k(\delta, \mathbf{U}, \dots); \epsilon_w = \epsilon(\delta, \mathbf{U}, \dots) \quad (5.27)$$

As leis de parede são obtidas da integração da equação de quantidade de movimento na direção normal à parede, utilizando hipóteses de camada limite. Subdivide-se a região próxima em zonas internas e externas, cujo o efeito da turbulência é levado em conta ou não (*e.g. Tritton (1988)*). Obtem-se portando a seguinte relação para o componente tangencial da velocidade:

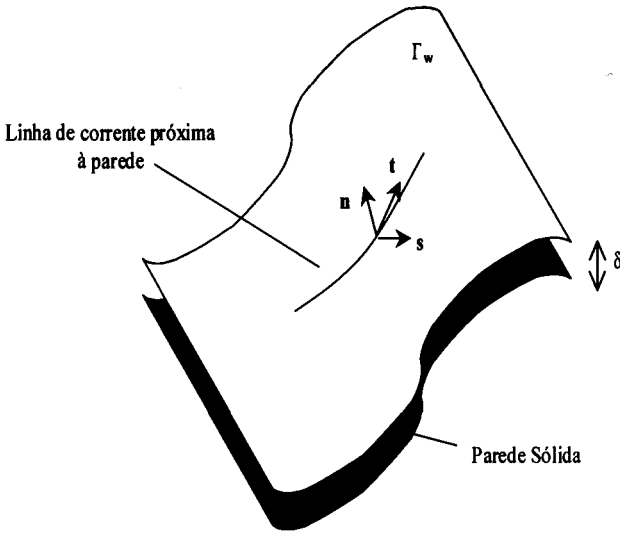


Figura 5.1: Condição de proximidade de parede

$$\frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{t}}{u_f} = \begin{cases} \frac{\delta u_f}{\nu}; & \text{se } \frac{\delta u_f}{\nu} \leq 11.5 \\ \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta u_f}{\nu} + C; & \text{se } \frac{\delta u_f}{\nu} > 11.5 \end{cases} \quad (5.28)$$

Nesta equação $\kappa = 0.419$ e $C = 5.445$, e u_f é a velocidade de fricção, definida como:

$$u_f^2 \equiv \frac{\tau_w}{\rho} = (\nu + \nu_T) \frac{\partial}{\partial n} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{t}) \quad (5.29)$$

As condições para k e ϵ são obtidas das de energia cinética de turbulência, utilizando o equilíbrio entre produção e dissipação. Estas condições são dadas por:

$$k_w = \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}}; \quad \epsilon_w = \frac{u_f^3}{\kappa \delta} \quad (5.30)$$

Observação 7

Outras leis de parede são propostas e analisadas na literatura, associando a variação da velocidade tangencial com diferentes fatores tais como gradiente adverso de pressão (*Foutoura Rogrigues (1990)*), proximidade de zonas de recirculação (*Panton (1990)*) ou efeitos de rugosidade (*Mohammadi et al. (1998)*), por exemplo.

Observação 8

Alguns autores preferem a imposição de condições de contorno tipo leis de parede, de maneira ligeiramente diferente que a proposta anteriormente. No presente trabalho, as condições de contorno de parede são imposta na forma de condições de contorno tipo Dirichlet, sob o campo de velocidade. Alguns trabalhos preferem impor este tipo de condição na forma de uma condição de contorno tipo Neumann homogênea (*e. g. Ilnka et al. (1997)* ou *Hallo et al. (1977)*), utilizando um termo de tensão cisalhante imposta, ou seja:

$$\tau_t = \tau_w = \rho u_f^2 \quad (5.31)$$

A velocidade de atrito é calculada pela equação não-linear dada pela lei de parede 5.28 em cada ponto de Γ_w .

5.4 Discretização temporal

O sistema de equações diferenciais parciais formado pelas equações médias de conservação de massa e quantidade de movimento, acrescida das equações para k e ϵ , é fortemente não-linear e acoplado. Em geral, para contornar esta dificuldade, um esquema evolutivo no tempo pode ser utilizado. Desta maneira, durante a integração do problema no tempo, as equações podem ser linearizadas, considerando em alguns termos os valores dos campos calculados em uma etapa de tempo anterior. Propõe-se aqui um esquema de ordem $o(\Delta t)$ para integração incremental das equações. Notando pelos sobrescritos n e $n + 1$, os valores dos campos nas etapas t e $t + \Delta t$ respectivamente, o esquema de integração utilizado é escrito como:

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} = 0 \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{U}^{n+1} + (\nabla \mathbf{U}^{n+1}) \mathbf{U}^n &= -\frac{1}{\rho} \nabla P^{n+1} + \nabla \cdot (K_U^n \nabla \mathbf{U}^{n+1}) + \\ &+ \nabla \cdot (\mathbf{B}(\mathbf{U}^n)) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{U}^n + \nabla \cdot (K_U^n \nabla^T \mathbf{U}^n) \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\frac{1}{\Delta t} k^{n+1} + \mathbf{U}^{n+1} \cdot \nabla k^{n+1} = \nabla \cdot (K_k^n \nabla k^{n+1}) + P_k^{n+1} - \frac{\epsilon^n}{k^n} k^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} k^n \quad (5.34)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \epsilon^{n+1} + \mathbf{U}^{n+1} \cdot \nabla \epsilon^{n+1} = \nabla \cdot (K_\epsilon^n \nabla \epsilon^{n+1}) + C_{\epsilon 1} P_k^{n+1} \frac{\epsilon^n}{k^{n+1}} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^n}{k^n} \epsilon^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} \epsilon^n \quad (5.35)$$

Nestas equações os coeficientes difusivos são dados por:

$$K_U = \nu + \nu_T; K_k = \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k}; K_\epsilon = \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \quad (5.36)$$

Lembra-se ainda que para cada etapa de tempo, a viscosidade de turbulência é calculada com base na etapa de tempo anterior, ou seja:

$$\nu_T = C_\mu \left(\frac{k^2}{\epsilon} \right)^n \quad (5.37)$$

Observação 9

A parcela do gradiente de pressão leva em conta agora a parte dos efeitos axiais devido à energia cinética de turbulência, *i. e.*, $P^* = P - (2/3)k$. Isto é consequência da utilização da aproximação de Boussinesq.

Observação 10

Os termos de fonte das equações de k e ϵ foram convenientemente linearizados, no intuito de proporcionar estabilidade quanto à integração temporal (*Jeandel et al. (1986), Brun (1988)*).

Observação 11

Como a utilização do esquema de integração temporal consiste apenas em uma forma de linearizar o problema, evoluindo assim o cálculo de maneira a atingir a solução em regime permanente, o esquema de primeira ordem proposto é suficientemente estável, sem um compromisso com a precisão no tempo. Para problemas verdadeiramente transientes, esquemas de discretização com ordem mais elevada, e mesmo um modelo de turbulência mais adequado, devem ser empregados.

A partir de condições iniciais para o campo de velocidade, k e ϵ , a solução em regime permanente pode ser obtida utilizando as equações acima. Nota-se que em cada etapa de tempo deve-se resolver um conjunto de problemas matemáticos formados por um problema de busca de solução dos campos hidrodinâmicos (U, P), equações 5.32-5.33, e dois problemas tipo convecção-difusão para os campos turbulentos (equações 5.34-5.35). Estes problemas serão tratados, quanto à sua discretização espacial, pelo método de elementos finitos.

5.5 Problema Convecção - Difusão

5.5.1 Generalidades

Considera-se um problema de contorno, do tipo convecção-difusão, definido no domínio fechado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com contorno Γ subdividido em partes complementares Γ_g e Γ_h . Este problema pode ser formulado de forma geral como:

Dado um campo de velocidade advectante $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, solenoidal (i.e. $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), e as funções $(\alpha, \nu, f, g, h) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; encontre $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \alpha\phi + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi - \nabla \cdot (\nu \nabla\phi) &= f \quad \text{em } \Omega \\ \phi(\mathbf{x}) &= g \quad \text{Sobre } \Gamma_g \\ \mathbf{n} \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}) &= h \quad \text{Sobre } \Gamma_h \end{aligned} \tag{5.38}$$

Neste problema g representa as condições de contorno essenciais, ou tipo Dirichlet, aplicadas à parte complementar do contorno Γ_g ; h representa as condições de contorno naturais, ou tipo Neumann, em Γ_h , sendo \mathbf{n} a normal a esta parte do contorno. Esta formulação representa uma das equações do sistema formado por 5.32-5.35, e o desenvolvimento do MEF para este caso específico é o primeiro passo para o tratamento geral do problema.

A formulação fraca do problema postulado em 5.38, pode ser obtida através do método de resíduos ponderados, e é escrita na forma:

Dados $\mathbf{u}, \alpha, \nu, f, g$ e h , como definidos em 5.38, encontrar $\phi \in U; \forall v \in V$, tal que:

$$B(\phi, v) = F(v) \tag{5.39}$$

com

$$B(\phi, v) = (\alpha\phi, v) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\phi, v) + (\nu \nabla\phi, \nabla v) \tag{5.40}$$

$$F(v) = (f, v) + (h, v)_{\Gamma_h} \tag{5.41}$$

$$(u, v) \equiv \int_{\Omega} uvd\Omega \tag{5.42}$$

Os conjuntos de funções admissíveis U e V são definidos como sub-conjuntos do espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$:

$$U = \{u \mid u \in H^1(\Omega); u(\mathbf{x}) = g, \mathbf{x} \in \Gamma_g\} \tag{5.43}$$

$$V = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega)\} \quad (5.44)$$

O terceiro termo de 5.40 e o segundo de 5.41 são conseqüências da utilização do teorema de Green para integração por partes.

A aproximação discreta da formulação fraca 5.39, pode ser construída a partir da utilização do método de Galerkin, com funções base oriundas da repartição do domínio por elementos finitos. Desta maneira, O problema 5.40 pode ser escrito em sua forma aproximada como:

$$B(\phi_h, v_h) = F(v_h) \quad (5.45)$$

com

$$B(\phi_h, v_h) = (\alpha \phi_h, v_h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h, v_h) + (\nu \nabla \phi_h, \nabla v_h) \quad (5.46)$$

$$F(v_h) = (f, v_h) + (h, v_h)_{\Gamma_h} \quad (5.47)$$

As funções de interpolação pertencem à sub-espacos de dimensão finita, ou seja, $\phi_h \in U_h \subset U$ e $v_h \in V_h \subset U$, de maneira que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\phi - \phi_h\| = 0; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\| = 0 \quad (5.48)$$

h representa um parâmetro de aproximação relacionado com a *malha* de elementos finitos.

Nota-se que se $\dim V_h = N$ e $\{N_i(\mathbf{x}) \in V_h; i = 1, 2, \dots, N\}$ forma uma base desse conjunto, qualquer função ϕ_h pode ser representada por:

$$\phi_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i N_i(\mathbf{x}) + \phi_g \quad (5.49)$$

onde $\phi_g = g; \mathbf{x} \in \Gamma_g$ e $\phi_i \in \mathfrak{R}$.

Utilizando estes conceitos, a equação 5.45 pode ser escrita em uma forma matricial como:

$$\mathbf{A}\phi = \mathbf{F} \quad (5.50)$$

com

$$\mathbf{A}_{ij} = (\alpha N_i, N_j) + (\mathbf{u} \cdot \nabla N_i, N_j) + (\nu \nabla N_i, \nabla N_j) \quad (5.51)$$

$$\phi = \phi_i \quad (5.52)$$

$$\mathbf{F}_i = (f, N_i) + (h, N_i)_{\Gamma_h} - B(g, N_i) \tag{5.53}$$

No método de elementos finitos as funções $N_i(\mathbf{x})$ são construídas com base na subdivisão do domínio Ω em um conjunto de *elementos finitos* (repartição do domínio), no caso triângulos não superpostos (Tetraedros para 3D). Logo, a *triangularização* do domínio é definida como um conjunto de m elementos $\{T_h = K_i; i = 1, 2, \dots, m\}$, de maneira que nenhum vértice de cada triângulo esteja sobre a face de um outro (ver figura 5.2).

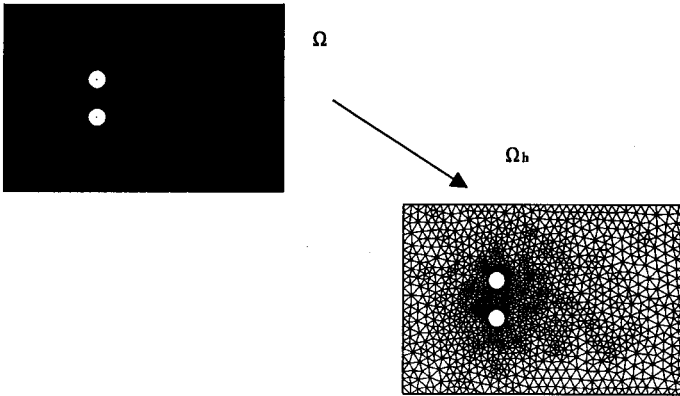


Figura 5.2: Discretização do domínio

Desta maneira as funções $N_i(\mathbf{x}) \in V_h$ são dadas como polinômios definidos no interior de cada um dos elementos finitos resultantes da discretização de Ω , i. e.,

$$V_h = \{v_h \mid v_h \in P^r(\Omega)|_K, K \in T_h, v_h = 0 \text{ sobre } \Gamma\} \tag{5.54}$$

Onde P^r são os polinômios interpoladores de grau $1 \leq r \leq k$, definidos no interior dos elementos K , em função das coordenadas de seus vértices, ou *nós*, e k é a ordem de interpolação dos elementos. Como as funções base são definidas sobre cada elemento K teremos a matriz e o vetor locais definidos como:

$$\mathbf{A}_{ij}^K = (\alpha N_i, N_j)_K + (\mathbf{u} \cdot \nabla N_i, N_j)_K + (\nu \nabla N_i, \nabla N_j)_K \tag{5.55}$$

$$\mathbf{F}_i^K = (f, N_i)_K + (h, N_i)_{\Gamma_h} - B(g, N_i) \tag{5.56}$$

Portanto, globalmente, o sistema é composto pela união de todas as matrizes e vetores locais, o que pode ser escrito com auxílio de um operador de montagem dado por:

$$\mathbf{A} = \bigcup_{K=1}^m \mathbf{A}^K \tag{5.57}$$

$$\mathbf{F} = \bigcup_{K=1}^m \mathbf{F}^K \quad (5.58)$$

Observação 12

A análise de estabilidade do esquema de discretização demonstra que uma estimativa do erro de aproximação é dada por (Hughes (1987) e Johnson & Sarasen (1986), por exemplo):

$$\|\phi - \phi_h\| < C P e_h h^{k-1} \quad (5.59)$$

onde h é o raio do elemento (para triângulos utiliza-se por exemplo a raiz quadrada do dobro da área), C é uma constante independente de h e $P e_h$ é o número de Peclet da malha definido por:

$$P e_h = \frac{|\mathbf{u}|h}{2\nu} \quad (5.60)$$

Este resultado explicita a dependência direta do erro de aproximação com o número de Peclet local. Como consequência, para altos números de Peclet a solução apresenta oscilações espaciais que devem ser reduzidas ou pela utilização de malhas mais densas (Menores h 's) ou através de esquemas de estabilização.

5.5.2 Métodos de estabilização

A estabilização de problemas tipo convecção-difusão tem sido nos últimos anos, objeto de um grande número de trabalhos publicados. Tal interesse decorre, em grande parte, das dificuldades numéricas associadas à solução de escoamento com alto número de Peclet. Em tais situações, caracterizadas pela preponderância dos termos convectivos sobre os termos difusivos, necessita-se de métodos de elementos finitos com características de estabilidade capazes de apresentar soluções satisfatórias de problemas expressos por 5.39.

As primeiras proposta de estabilização do problema convecção difusão, para o método de elementos finitos, partiram das idéias oriundas de esquemas aplicados ao método de diferenças finitas. A ideia original era então de ponderar de maneira diferente as funções de interpolação, considerando a direção do escoamento. Esquemas foram inicialmente propostos no sentido de utilizar esquemas de integração diferenciados para a matriz convectiva (e.g., Hughes (1978)). Naturalmente, seguindo a trilha de desenvolvimento de esquemas em diferenças finitas tipo *Upwind*, foram também propostos equemas que visaram a utilização de termos extras na formulação fraca, com o objetivo de adicionar difusão artificial na direção da linha de corrente (Esquemas tipo ABD : *Anisotropic balancing dissipation* - Kelly et al. (1980)). Embora a utilização dos esquemas ABD proporcionarem a redução das oscilações espúrias dos resultados obtidos para altos valores de Peclet, os mesmos apresentam resultados pouco precisos quando os termos de fonte são não nulos. Isto se deve ao fato que este tipo de esquema não apresenta consistência, devido os termos extras adicionados.

No começo da década de 80 os métodos de estabilização foram postulados de maneira consistente, superando assim as desvantagens apresentadas pelo esquema ADB. Surgiram então

os esquemas SUPG - *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (Brooks & Hughes (1982)). Neste tipo de metodologia, termos de difusão artificial são adicionados na direção da linha de corrente através de uma modificação conveniente das funções peso. O método de Galerkin é então colocado de lado, em detrimento de uma estratégia tipo Petrov-Galerkin.

Num contexto mais atual, evoluções em torno dos métodos SUPG têm surgido através de estratégias simples, propostas para superpor estas limitações encontradas no método de Galerkin e introduzir, de forma generalizada, o aparecimento dos termos de estabilização para esse problema. Esses métodos constituem-se principalmente em metodologias que resultam na adição de termos de perturbação, do mesmo modo que nos Métodos SUPG, sem comprometimento da consistência, podendo ser estendidos a diversas situações com grande flexibilidade. Algumas alternativas relativamente recentes de abordagem do problema de estabilização são propostas na literatura:

- **Método GLS:** A estratégia GLS (*Galerkin Least Square*) é uma abordagem alternativa para estabilização de problemas convectivos proposta por Hughes et al. (1989). Esta metodologia baseia-se na utilização de termos de estabilização resultantes da minimização em mínimos quadrados de um operador residual da formulação fraca. Este método tem uma abordagem simplificada adaptada ao contexto de integração temporal (Sampaio (1991), Zienkiewicz & Taylor (1991)), onde o parâmetro de estabilização é o próprio passo de integração no tempo.
- **Método Taylor-Galerkin:** A metodologia Taylor-Galerkin foi proposta por Donnea (1984). Nesta metodologia os termos de estabilização provém de uma expansão em série de Taylor no tempo do campo convectado. Esta metodologia é bastante interessante para utilização de esquemas explícitos, em problemas fortemente convectivos (fortes discontinuidades).
- **Método Characteristics-Galerkin:** Nesta metodologia, os termos de estabilização são interpretados como uma aplicação do método de características dentro de um contexto de problema puramente convectivo (Zienkiewicz & Taylor (1991)).
- **Estabilização com Bolhas:** Recentemente metodologias de estabilização que utilizam funções tipo bolha vem sendo utilizadas (e.g. Franca & Farhat(1995), Simo et al. (1995)). Esta metodologia é uma volta a utilização do método de Galerkin, enriquecendo os espaços de interpolação com funções do tipo bolha.

Embora um número bastante diverso de metodologias de estabilização de problemas convectivos são disponíveis na literatura, em situações de utilização de elementos com interpolação linear e esquemas de integração temporal simples estes esquemas são em geral equivalentes (Zienkiewicz & Taylor (1991)).

5.5.3 Esquema SUPG

A ideia principal de métodos tipo SUPG é oriunda da adição de difusividade artificial na direção das linhas de corrente, através de uma modificação conveniente das funções peso. Esta metodologia é uma evolução natural dos esquemas tipo ABD. Sua formulação no entanto é matematicamente consistente.

No esquema SUPG, a função peso é modificada para:

$$\hat{v} = v + \tau \mathbf{u} \cdot \nabla v \quad (5.61)$$

onde τ é um parâmetro de estabilização que será discutido a seguir.

Desenvolvendo a formulação fraca do problema com base nesta função peso obtém-se de 5.40:

$$B_{SUPG}(\phi, v) = F_{SUPG}(v) \quad (5.62)$$

onde

$$B_{SUPG}(\phi, v) = (\alpha \phi, v) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi, v) + (\nu \nabla \phi, \nabla v) + \sum_k (\alpha \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \nu \nabla^2 \phi, \tau \mathbf{u} \cdot \nabla v) \quad (5.63)$$

$$F_{SUPG}(v) = (f, v) + \sum_K (f, \tau \mathbf{u} \cdot \nabla v) + (h, \hat{v})_{\Gamma_h} \quad (5.64)$$

Os termos de estabilização adicionais neste tipo de formulação envolvem uma ponderação pelo parâmetro τ . A estimativa clássica de ponderação é dada por:

$$\tau = \frac{\lambda(Pe_h)h}{|\mathbf{u}|} \quad (5.65)$$

onde $\lambda(Pe)$ é um valor ótimo para adição de difusão artificial, determinado pela análise de um problema 1D padrão. Utiliza-se neste trabalho a relação:

$$\lambda(Pe_h) = 1 - \frac{1}{0.5Pe_h + 1} \quad (5.66)$$

Alternativamente, com base no trabalho de *Mikuzami (1985)*, pode-se utilizar também:

$$\tau = 0.5 * \frac{M_{ii}/3}{\|A_{ij}\|_{max} + D_{ii}/3} \quad (5.67)$$

Onde M_{ii} é o traço da matriz massa diagonalizada, A_{ij} é a matriz de advecção e D_{ii} é o traço da matriz de difusão. Todas estas matrizes são locais, calculadas com base no método de Galerkin.

A presença da difusão artificial adicionada é evidenciada no termo de estabilização relativo à parte convectiva, que pode ser reescrito como:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \phi, \tau \mathbf{u} \cdot \nabla v) = (K \nabla \phi, \nabla v) \quad (5.68)$$

Introduz-se desta maneira o operador de difusão sobre a linha de corrente dado por:

$$K_{ij} = \frac{\lambda(Pe)h}{2|\mathbf{u}|} u_i u_j \quad (5.69)$$

Este termo é equivalente ao termo "upwind" proposto pelos esquemas ABD (*Kelly et al. (1980)*).

Para elementos finitos lineares, o termo de estabilização relativo a parte difusiva da equação (termo em laplaciano) desaparece como consequência da utilização do teorema de Green. As derivadas segunda da função de forma são nulas para este caso.

Observação 13

Formas de parâmetro de estabilização τ para problemas fortemente convectivo são discutidas por *Franca et al. (1992)* para elementos quadráticos e bilineares. Os resultados obtidos pelos autores demonstram um bom nível de estabilização em diferentes casos teste. Parâmetros de estabilização livres de uma estimativa de raio do elemento, são propostos por *Franca & Madureira (1993)*, novamente também para elementos quadráticos.

5.5.4 Esquema GLS

O esquema GLS é uma generalização do esquema SUPG. A função peso nesta metodologia é dada pela derivada em relação à variável dependente do operador da equação diferencial. Isto pode ser interpretado como um processo de minimização via mínimos quadráticos.

Seja um operador quadrático $L(\phi_h)$ definido como a norma $L^2(\Omega)$ do resíduo da equação diferencial aproximada ao quadrado, dado por:

$$L(\phi_h) = \int_{\Omega} [\alpha\phi_h + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi_h - \nu\nabla^2\phi_h - f]^2 d\Omega \quad (5.70)$$

Minimizando este operador em relação a variável dependente tem-se:

$$\frac{\partial L(\phi_h)}{\partial \phi_h} = \int_{\Omega} 2[A(\phi_h) - f] \frac{\partial A(\phi_h)}{\partial \phi_h} d\Omega = 0 \quad (5.71)$$

onde:

$$A(\phi_h) = \alpha\phi_h + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi_h - \nu\nabla^2\phi_h \quad (5.72)$$

A formulação acima pode ser reescrita na forma geral de um método tipo Petrov-Galerkin dado por:

$$\int_{\Omega} [A(\phi_h) - f] \hat{v}_h d\Omega = 0 \quad (5.73)$$

com

$$\hat{v}_h = v_h + \tau \mathbf{u} \cdot \nabla v_h - \tau \nu \nabla^2 v_h \quad (5.74)$$

Observa-se que a diferença desta formulação em relação ao método SUPG é o termo em laplaciano adicionado na função peso. Sob forma compacta, o problema é escrito como:

$$B_{GLS}(\phi_h, v_h) = F_{GLS}(v_h) \quad (5.75)$$

onde

$$\begin{aligned} B_{GLS}(\phi_h, v_h) &= (\alpha \phi_h, v_h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h, v_h) + (\nu \nabla \phi_h, \nabla v_h) + \\ &+ \sum_K (\alpha \phi_h + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h - \nu \nabla^2 \phi_h, \tau \alpha v_h + \tau \mathbf{u} \cdot \nabla v_h - \tau \nu \nabla^2 v_h) \\ F_{GLS}(v_h) &= (f, v_h) + \sum_K (f, \tau \alpha v_h + \tau \mathbf{u} \cdot \nabla v_h - \tau \nu \nabla^2 v_h) + (h, \hat{v}_h)_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Observação 14

Para elementos lineares os termos em laplaciano são nulos, sendo portanto as duas metodologias apresentadas equivalentes.

5.5.5 Estabilização das equações (k, ϵ)

A estabilização das equações para k e ϵ é desenvolvida de maneira análoga à estabilização da equação genérica para o problema tipo convecção-difusão. Para cada etapa de tempo estas equações tem a forma:

$$\alpha_k k^{n+1} + \mathbf{U}^{n+1} \cdot \nabla k^{n+1} - \nabla \cdot (K_k \nabla k^{n+1}) = f_k \quad (5.77)$$

$$\alpha_\epsilon \epsilon^{n+1} + \mathbf{U}^{n+1} \cdot \nabla \epsilon^{n+1} - \nabla \cdot (K_\epsilon \nabla \epsilon^{n+1}) = f_\epsilon \quad (5.78)$$

Onde:

$$\alpha_k = \frac{1}{\Delta t} + \frac{\epsilon^n}{k^n} \quad (5.79)$$

$$f_k = P_k + \frac{1}{\Delta t} k^n \quad (5.80)$$

$$\alpha_\epsilon = \frac{1}{\Delta t} + C_{e2} \frac{\epsilon^n}{k^n} \quad (5.81)$$

$$f_\epsilon = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon^n}{k^n} P_k + \frac{1}{\Delta t} \epsilon^n \quad (5.82)$$

Os parâmetros de estabilização para estas equações são ligeiramente modificados, visto a presença do termo de ordem zero. Esta proposta foi testada com sucesso no trabalho de *Macedo (1994)* e é dada por:

$$\hat{\tau}_k = \tau + \frac{\alpha_k}{\tau} \quad (5.83)$$

$$\hat{\tau}_\epsilon = \tau + \frac{\alpha_\epsilon}{\tau} \quad (5.84)$$

τ é dado pela equação 5.65. Este tipo de estabilização, não usual, é bem semelhante à recomendação de *Franca & Farhat (1995)*, envolvendo uma re-definição de número de Peclet da malha com argumentos de estabilização com funções tipo bolha.

5.6 Problema Pressão-Velocidade

Durante a discretização no tempo, para cada etapa $n + 1$, um problema para a determinação dos campos de velocidade e de pressão deve ser resolvido. O problema acoplado (\mathbf{u}, p) , postulado pelas equações 5.32 e 5.33, pode ser re-escrito como:

Dados α, ν , e \mathbf{f} , e o campo advectante \mathbf{a} , encontrar \mathbf{u} e p , tal que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \alpha \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{a} - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g \quad \text{Sobre } \Gamma_u \\ p &= p_g \quad \text{Sobre } \Gamma_p \end{aligned} \tag{5.85}$$

Novamente, a formulação fraca do problema pode ser obtida através do método de resíduos ponderados. Portanto, considerando os seguintes espaços de funções admissíveis, colocados em uma forma discreta, com dimensão finita:

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in H_h^1(\Omega)^N; \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma\} \tag{5.86}$$

$$M_h = \{q | q \in C^0(\Omega) \cap L_h^2(\Omega); q = 0 \text{ sobre } \Gamma\} \tag{5.87}$$

A forma fraca discreta do problema (\mathbf{u}, p) pode ser postulada por:

Encontrar $\mathbf{u}_h, (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_g) \in \mathbf{V}_h$ e $p_h, (p_h - p_g) \in M_h, \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ e $q \in M_h$, tal que:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h) = 0 \tag{5.88}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \tag{5.89}$$

Onde:

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \equiv (\alpha \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{a}(\nabla \mathbf{u}_h), \mathbf{v}_h) + (\nu \nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) \tag{5.90}$$

Definindo funções de base para os espaços de velocidade e pressão, os campo aproximados são definidos como:

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \tag{5.91}$$

$$p_h = \sum_{i=1}^M p_i M_i(\mathbf{x}) \tag{5.92}$$

Desta maneira o problema pressão-velocidade pode ser colocado em uma forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.93}$$

Onde:

$$\mathbf{A}_{ij} = (\alpha \mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j) + (\mathbf{a}(\nabla \mathbf{N}_i), \mathbf{N}_j) + (\nu \nabla \mathbf{N}_i, \nabla \mathbf{N}_j) \tag{5.94}$$

$$\mathbf{B}_{ij} = (M_i, \nabla \cdot \mathbf{N}_j) \tag{5.95}$$

$$\mathbf{F}_i = (\mathbf{f}, \mathbf{N}_i) \tag{5.96}$$

A análise teórica do problema de Stokes (caso particular de 5.85 no limite de $Re \rightarrow 0$), evidencia o fato que a unicidade da solução é dada somente para escolhas convenientes dos espaços V_h e M_h . Esta condição de compatibilidade dos espaços de discretização de (\mathbf{u}, p) , é conhecida como condição *Inf-Sup* (Ou condição de Babuska-Brezzi), e estabelece a seguinte restrição para as funções peso (*Brezzi (1974), Babuska (1971)*):

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}_h} \|q_h\|_{p_h}} \geq \beta \geq 0 \tag{5.97}$$

A consequência prática desta restrição é que elementos finitos específicos devem ser utilizados para a discretização dos campos de velocidade e pressão. Diversos trabalhos relatam a compatibilidade de elementos finitos com a condição *Inf-Sup* (e.g *Fortin & Fortin (1985), Pironneau (1989), Hauguel & Cahouet (1986)*). Para o caso de elementos finitos triangulares a figura 5.3 apresenta algumas possíveis escolhas. A versão 3D destes elementos, em forma de tetraedros, também satisfazem a condição *Inf-Sup*. Este elementos possuem as seguintes características quanto à interpolação dos campos de velocidade e pressão:

- **Elemento P1-P1⁺**: Neste elemento os campos de velocidade e pressão são interpolados linearmente, porém o campo de velocidade é enriquecido com um grau de liberdade central, utilizando uma função tipo bolha (*Arnold et al. (1984)*).
- **Elemento P1-P2**: Neste elemento o campo de velocidade é interpolado quadraticamente, enquanto a pressão é interpolada linearmente (*Hood & Taylor (1974)*).

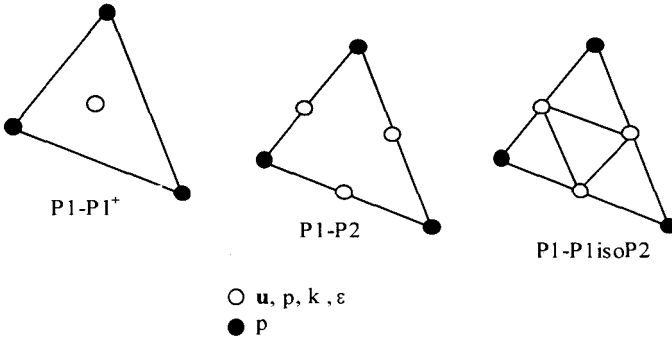


Figura 5.3: Elementos finitos triangulares

- **Elemento P1-P1isoP2:** Neste elemento a pressão é interpolada linearmente sobre um elemento base e a velocidade é interpolada também linearmente, sobre um conjunto de quatro sub-elementos construídos pela repartição uniforme do elemento base (*Bercovier & Pironneau (1979)*). Este tipo de elemento é utilizado no presente trabalho.

Observação 15

Para escoamentos com altos números de Reynolds, os problemas de oscilações espaciais espúrias (*wigless*) também estão presentes, devido o caráter convectivo-difusivo da equação de conservação de quantidade de movimento. Este tipo de problema requer também um tratamento de estabilização de maneira análoga ao desenvolvido na seção anterior. Logo, a formulação 5.89 deve ser acrescida de termos de estabilização como em 5.62, por exemplo.

Observação 16

A utilização de elementos finitos com mesma ordem de interpolação para os campos de pressão e velocidade é possível com a utilização de metodologias adequadas de estabilização. A estabilização do problema (u, p) é discutida com base na metodologia GLS (*Hughes et al. (1986), Franca & Frey (1992)*) ou no contexto da estabilização com funções tipo bolha *Franca et al. (1992)*. Nestes tipos de esquemas, elementos finitos com mesma ordem de interpolação foram testados com sucesso para o caso da equação de Navier-Stokes.

Uma vez escolhido o tipo de elemento finito para a discretização do problema velocidade-pressão, a utilização de uma estabilização conveniente para a questão convectiva-difusiva, o sistema discreto obtido em 5.85 deve ser resolvido. Cabe observar os seguintes pontos, à respeito da resolução do problema matricial colocado:

- O problema matricial é mal condicionado, visto à presença de zeros na diagonal
- A resolução direta do problema envolve matrizes de dimensão $(2N+M)$, à serem invertidas. Evidentemente a evolução dos métodos diretos ou iterativos para a solução de sistemas lineares permitem o tratamento deste problema. Porém, para problemas com muitos graus de liberdade (como no caso de problemas 3D), uma metodologia iterativa, segregada é mais adequada

- Para o caso de escoamentos turbulentos deve-se lembrar que as condições de contorno tipo leis de parede, provêem uma não-linearidade adicional ao sistema.

Uma boa proposta para resolver iterativamente o sistema 5.85, de forma segregada, é utilizar uma metodologia de busca tipo UZAWA (*Arrow et al (1958)*). Neste tipo de método uma estratégia de resolução iterativa é aplicada ao problema em pressão, obtido de 5.85 como:

$$[\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T] p = [\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}] \cdot \mathbf{F} \tag{5.98}$$

Como o resíduo deste sistema é dado por:

$$r = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \tag{5.99}$$

uma sequência iterativa pode ser proposta como:

$$p^{k+1} = p^k - \rho r^k \tag{5.100}$$

ρ é uma constante positiva.

Este método pode ser considerado como um método de minimização do resíduo do problema 5.98, o que é equivalente à minimização da aproximação da norma $L^2(\Omega)$ da divergência do campo de velocidade. Para o caso geral, a matriz $[\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T]$ não é simétrica, e portanto o método iterativo só converge para valores suficientemente pequenos de ρ , mais precisamente para valores de ρ inferiores ao maior auto-valor da matriz (*Fortin & Glowinsky (1982)*).

Se \mathbf{A} é simétrica e positiva definida (caso do problema de Stokes), o algoritmo proposto é equivalente ao método de gradiente aplicado à equação 5.98. De fato, neste caso, o problema contínuo pode ser interpretado como um problema de ponto de sela, para o qual um grande desenvolvimento teórico é disponível na literatura de análise numérica e otimização.

O algoritmo de UZAWA é portanto dado por:

Algoritmo 1: Método de UZAWA para o problema (\mathbf{u}, p)

Inicialização: Dado p^0 ;
 $k := 0$;

Iterações: **Repetir**
 $\mathbf{u}^k := \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{B}^T \cdot p^k)$;
 $r^k := \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}^k$;
 $p^k := p^k - \rho r^k$;
 $k := k + 1$;

Enquanto $\| r^k \| > tol$ e $k \leq k_{max}$.

A velocidade de convergência do algoritmo 1 depende do condicionamento da matriz $[\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T]$. Uma forma de acelerar a convergência de tal algoritmo é pré-condicionar este algoritmo, por uma matriz \mathbf{C} , próxima à $[\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T]$. O problema 5.98 é modificado para:

$$\mathbf{C}^{-1} \cdot [\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T] p = \mathbf{C}^{-1} \cdot [\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}] \cdot \mathbf{F} \tag{5.101}$$

Portanto o novo algoritmo pode ser escrito na forma:

Algoritmo 2: Método de UZAWA pré-condicionado para o problema (\mathbf{u}, p)

Inicialização: Dado p^0 ;

$k := 0$;

Iterações: **Repetir**

$\mathbf{u}^k := \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}^T p^k)$;

$r^k := \mathbf{B} \mathbf{u}^k$;

$d^k := \mathbf{C}^{-1} r^k$;

$p^k := p^k - \rho d^k$;

$k := k + 1$;

Enquanto $\|r^k\| > tol$ e $k \leq k_{max}$.

Observa-se que esta versão do algoritmo introduz a resolução adicional de um sistema matricial de ordem M , durante o pré-condicionamento. *Cahouet & Chabart (1988)* propoem a seguinte matriz de condicionamento para o algoritmo:

$$\mathbf{C}^{-1} = \nu \mathbf{M}^{-1} + \alpha \mathbf{D}^{-1} \quad (5.102)$$

Onde as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{D} são calculadas no espaço de interpolação em pressão como:

$$\mathbf{M}_{ij} = (M_i, M_j); \quad \mathbf{D}_{ij} = (\nabla M_i, \nabla M_j) \quad (5.103)$$

O custo de cálculo adicional devido ao pré-condicionamento é fortemente compensado pela redução no número de iterações necessárias para a convergência do problema.

Observação 17

De maneira a reduzir ainda mais o tempo de cálculo do problema (\mathbf{u}, p) , um algoritmo mais eficiente de minimização de resíduo pode ser utilizado (*Lascaux & Theodor (1987)*, *Buffat(1991)*). Estes algoritmos utilizam uma estratégia de ortogonalização de direções de busca, tal como no método de gradientes conjugados. Esta variação da família de métodos de minimização de resíduos (ORTHOMIN, ORTHODIR e ORTHORES) foram desenvolvidas com sucesso para a resolução de sistemas lineares não-simétricos (*Young & Jea (1980)*), e podem ser aplicados ao problema iterativo de busca (\mathbf{u}, p) . Os resultados utilizando esta metodologia tem demonstrado boa eficiência no tratamento de problemas de escoamentos viscosos (*Buffat (1991)*).

Observação 18

Os algoritmos de busca da solução (\mathbf{u}, p) , apresentados anteriormente, podem ser comparados a certos algoritmos implantados com sucesso no método de volumes finitos. Métodos tipo SIMPLE, SIMPLER, etc.. (*Patankar (1980)*), possuem grande semelhança com as metodologias aqui apresentadas.

5.6.1 Tratamento de condições de contorno

As condições de contorno de proximidade de parede, estabelecidas pelas equações 5.25-5.27, envolvem um tratamento numérico particular devido as não-linearidades relacionadas pela dependência logarítmica do campo de velocidade imposto envolvendo a derivada do campo de velocidade na determinação da velocidade de atrito. O acoplamento dos diferentes componentes direcionais da velocidade, relacionado com a definição de vetores unitários tangenciais às linhas de corrente na proximidade de parede, é um aspecto particular neste tipo de problema.

As não-linearidades das condições de contorno para k e ϵ , expressas pelas equações 5.27, são tratadas ao longo da itegração temporal. Como as equações (k, ϵ) são resolvidas, em cada etapa de tempo, após a determinação dos campos (\mathbf{u}, p) , a imposição das condições do tipo Dirichlet dadas por 5.27 são triviais. Por outro lado, as condições de contorno para a velocidade devem ser tratadas com mais cuidado, devido o comportamento fortemente não-linear destas condições. Dois aspectos devem ser observados com detalhe, relativos tanto aos aspectos geométricos e de cálculo iterativo destas condições:

- **Considerações geométricas:** Para escoamentos 2D, as direções normais e tangenciais são facilmente definidas sobre a face do elemento finito sobre a parede (fig. 5.4a). Os vetores \mathbf{t} e \mathbf{n} são determinados unicamente com base nos parâmetros geométricos do elemento. Os cálculos iterativos são feitos sempre nas faces dos elementos, e depois extrapolados para os nós que compõem a face por simples adição vetorial. Para escoamentos 3D o problema é um pouco mais complexo. A direção tangencial não é conhecida *a priori*. Somente o vetor normal pode ser calculado com base na geometria do elemento de fronteira. A determinação do vetor tangente \mathbf{t} é feita pela projeção do vetor velocidade na etapa de tempo anterior \mathbf{u}^n no nó interno do elemento de parede, sobre a face que forma a parede, como mostra a figura 5.4b.
- **Cálculo Iterativo:** As não-linearidades extras oriundas da lei de parede são tratadas por um algoritmo iterativo tipo relaxação antes da resolução do problema (\mathbf{u}, p) . Após a convergência do problema não-linear associado ao campo de velocidade, a busca por um campo à divergência nula é efetuada. O algoritmo 3 apresenta a etapa iterativa necessária para o cálculo de condições de parede.

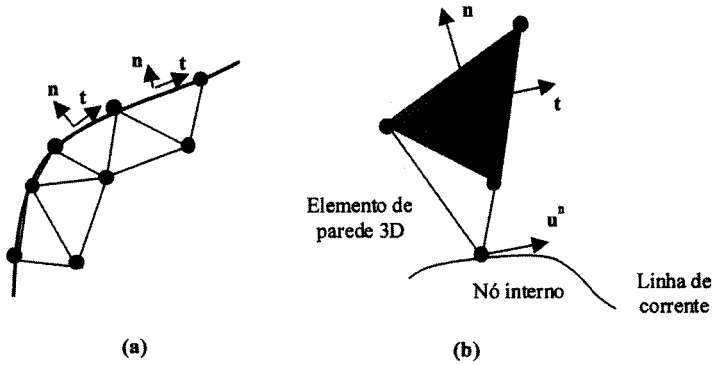


Figura 5.4: Condições de contorno de parede

Algoritmo 3: Cálculo iterativo de condições de contorno tipo lei de parede

Inicialização: Dado \mathbf{u}^n :

Cálculo $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{s})$;

Cálculo $u_f^2(\mathbf{u}^n)$;

Iterações: **Repetir**

Valores de \mathbf{u} na parede $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = f(u_f)$;

$\mathbf{u} := \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{B}^T \cdot p^n)$;

Cálculo $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{s})$;

Cálculo $u_f^{2*}(\mathbf{u})$;

$err := u_f^{2*} - u_f^2$;

$u_f^2 = u_f^{2*} - \zeta err$

Enquanto $\|err\| > tol$.

Observação 19

No trabalho de *Fontoura Rodrigues (1990)*, uma metodologia mais eficiente para cálculo iterativo de condições de contorno é proposta. Esta metodologia baseia-se na utilização de métodos tipo gradiente para a aceleração do algoritmo 3. Um bom aumento de desempenho computacional foi obtido para problemas 2D, considerando formas diferentes de funções de parede que levam em conta o efeito de gradiente adverso de pressão.

Observação 20

Durante as iterações do algoritmo 3, o custo da resolução do problema em velocidade é reduzido utilizando uma fatorização prévia da matriz \mathbf{A} via método de Crout. Portanto nesta etapa, somente a substituição regressiva é efetuada. Para o caso com muitos graus de liberdade (escoamentos 3D), os sistemas lineares são resolvidos por métodos tipo gradiente conjugados. Nesta etapa portanto, a única redução de custo está associada ao pré-condicionamento da matriz.

5.7 Resultados Numéricos

As ideias apresentadas nas seções anteriores, associadas ao método de elementos finitos, foram implementadas em uma série de códigos desenvolvidos em parte por professores, alunos e pesquisadores do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília, em parceria com outros grupos de elementos finitos no país e no exterior. No sentido de validar as metodologias numéricas propostas ao tratamento de problemas de escoamentos turbulentos, uma série de casos vem sendo analisados ao longo dos últimos anos. Estes casos de validação geralmente são escolhidos pela disponibilidade de dados experimentais na literatura, induzindo de maneira necessária uma comparação entre os resultados obtidos numericamente, com as diferentes medições experimentais efetuadas por outros grupos de pesquisa. No presente trabalho, alguns casos já apresentados anteriormente em outros trabalhos ilustrarão a potencialidade das metodologias implementadas.

5.7.1 Jato plano turbulento

Este problema consiste em um jato plano turbulento, injetado em um escoamento livre, com uma pequena velocidade induzida. Este problema foi estudado experimentalmente por *Bradbury (1965)*, onde o autor disponibiliza um grupo muito bom de resultados, oriundos de medições com anemometria de fio quente. Este problema foi simulado utilizando o modelo de turbulência (k, ϵ) , com metodologias de estabilização GLS tanto para o problema convectivo, quanto para a interpolação do campo de velocidade e pressão. Um estudo completo sobre este problema é encontrado no trabalho de *Macedo (1994)*. Este problema, de escoamento livre é um excelente primeiro passo para a validação de códigos turbulentos.

O escoamento foi simulado utilizando uma malha de 651 nós, com 1200 elementos, discretizando um domínio de 10 vezes a abertura de saída do jato. As condições de contorno foram impostas com base nos resultados experimentais, para Reynolds igual a 28000. O domínio de discretização exclui a parte do cone potencial do jato.

Na figura 5.5 a visualização do campo de velocidade e das curvas de nível de energia cinética de turbulência são apresentadas. Na figura 5.6 resultados para um perfil típico de velocidade e energia cinética de turbulência são apresentados, comparando os resultados numéricos obtidos, com as medições de *Bradbury (1965)*.

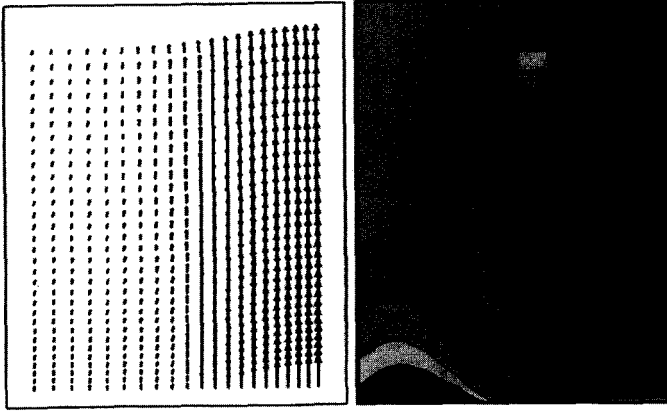


Figura 5.5: Visualização: Jato plano turbulento (u e k)

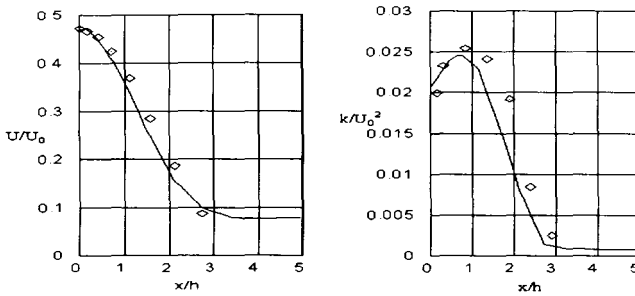


Figura 5.6: Perfis de u e k em $x/h = 23$

5.7.2 Expansão brusca

Este problema é um caso de validação clássico analisado em diferentes *Workshop's* sobre modelagem e simulação numérica de escoamentos turbulentos confinados. Tanto a versão de escoamento plano, quanto a de axi-simétrico, são excelentes casos de validação, que envolvem o cálculo de escoamentos com recirculação. O caso simulado aqui foi tema do Workshop da Associação internacional de Pesquisa em Hidráulica (IAHR) em 1987 (ver *Baron (1987)*), e uma grande massa de resultados experimentais foram levantados utilizando a técnica de anemometria Laser. Este problema consiste de uma expansão brusca em uma tubulação, com relação de diâmetros de 2.0 e Reynolds de 40000. Este caso foi avaliado por *Brasil et al. (1990)*, simulando o problema tanto utilizando elementos 2D como 3D. Foram utilizados elementos finitos tipo P1-P1isoP2, para a discretização do campo de velocidade e pressão.

Na figura 5.7 as visualizações do campo de velocidade e níveis de k são apresentadas. Perfis de velocidade e energia cinética de turbulência são apresentados nas figuras 5.8 e 5.9, para a posição axial $x/D = 1.5$, medida a partir da mudança de diâmetro.

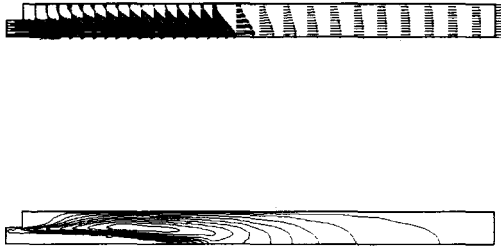


Figura 5.7: Visualização de Resultados : Expansão brusca

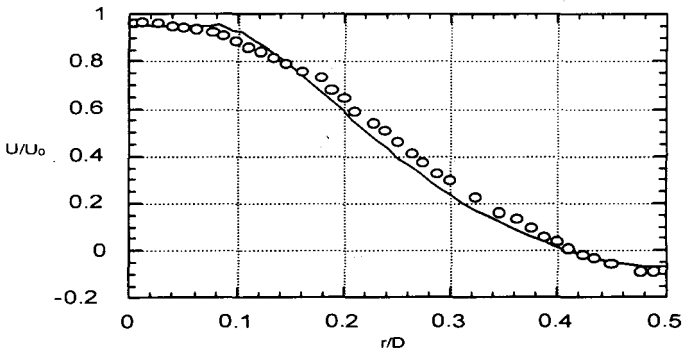


Figura 5.8: Perfil de velocidade em $x/D=1.5$ (o Experimentos – Simulações)

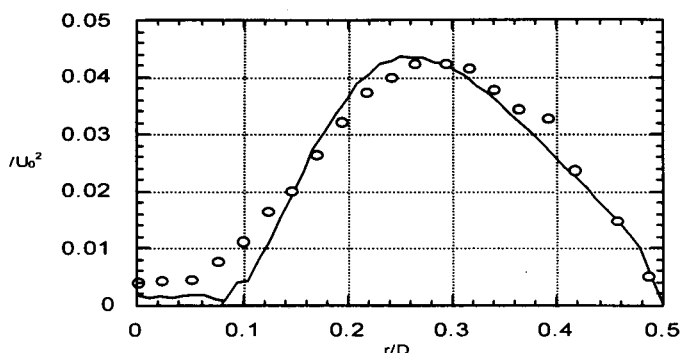


Figura 5.9: Perfil de k em $x/D=1.5$ (o Experimentos – Simulações)

5.7.3 Jato 3D normal à um escoamento livre

O escoamento formado pela injeção de um jato 3D em uma corrente livre, é um caso de validação relacionado com diferentes situações práticas de escoamentos industriais e ambientais. Este problema foi abordado em trabalhos anteriores, utilizando a mesma metodologia aqui apresentada (*Brasil et al (1991a)* e *Brasil et al (1991b)*). Este é um caso prático com bastantes resultados experimentais disponíveis, os quais podem ser comparados aos resultados numéricos obtidos pelo MEF. Trata-se de um escoamento turbulento que envolve uma diversidade de características hidrodinâmicas 3D, tornando-o um excelente caso de validação para códigos que visem tratar escoamentos turbulentos complexos.

Nesta simulação considera-se uma injeção com razão de velocidade (W_i/U_0) igual à 2, com Reynolds de 12000. Para estas condições, dados experimentais são apresentados por *Crab et al. (1981)*, os quais serão utilizados para efeito de comparação. Para esta simulação foi utilizada uma malha de 6039 nós P1, com uma discretização com elementos P1-P1isoP2.

Na figura 5.10 apresenta-se uma visualização do campo de velocidade no plano de simetria do jato. Observa-se o efeito de redirecionamento da corrente de fluido injetado ao longo do escoamento, assim como a região da esteira do jato, caracterizada por uma zona de retorno do escoamento. Na figura 5.11 o escoamento secundário é visualizado. Esta característica hidrodinâmica deste escoamento proporciona um efeito de mistura no escoamento devido ao movimento dos vórtices contrarrotativos observados na figura. Os efeitos médios do escoamento secundário e do escoamento induzido é observado pelas trajetórias de partículas injetadas na saída do jato e próximo à parede, como mostra as figuras 5.12 e 5.13. Nas figuras 5.14 e 5.15 apresenta-se uma comparação de perfis de velocidade e energia cinética de turbulência em diferentes posições, no plano de simetria.



Figura 5.10: Visualização do escoamento : Jato 3D

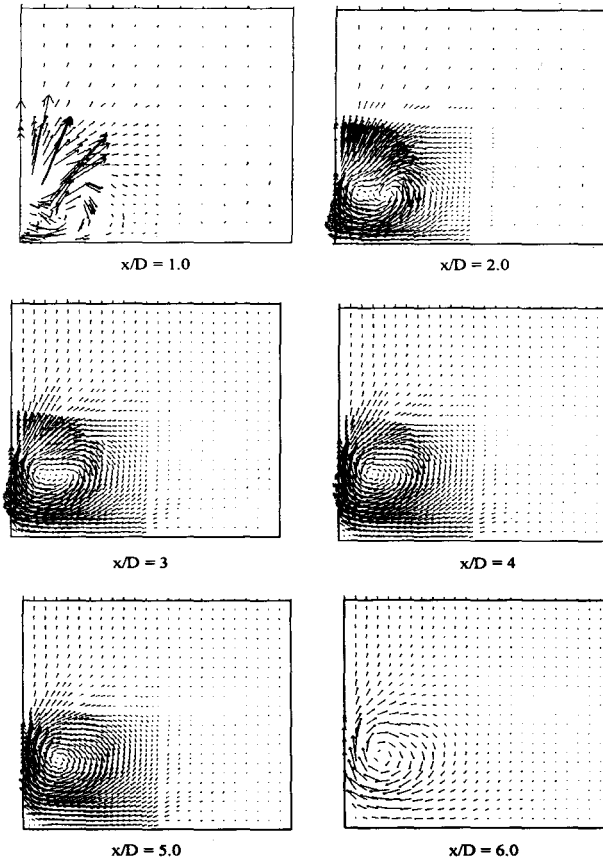


Figura 5.11: Escoamento secundário

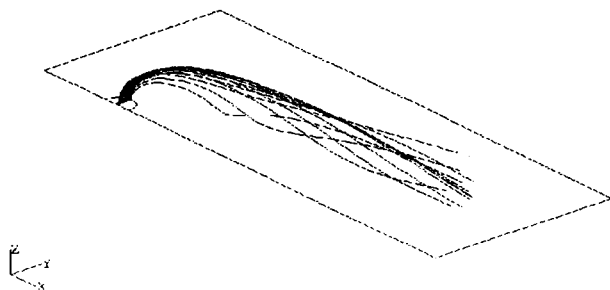


Figura 5.12: Trajetórias: Corpo do jato

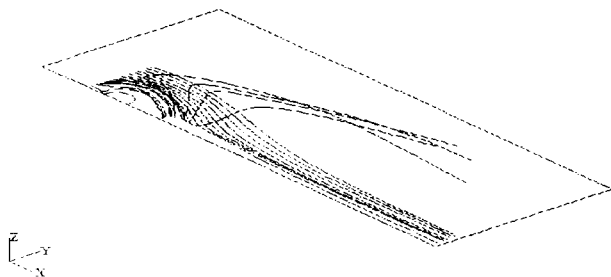


Figura 5.13: Trajetórias: Escoamento induzido

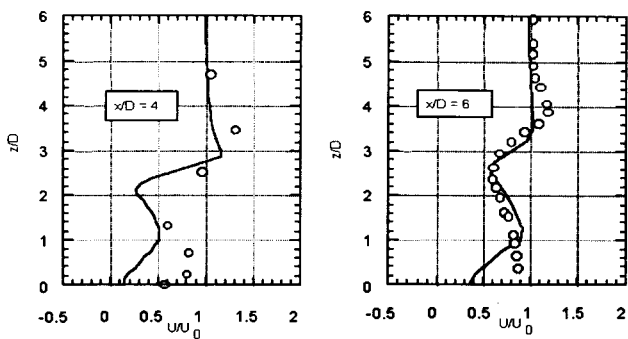


Figura 5.14: Comparação de perfis de velocidade

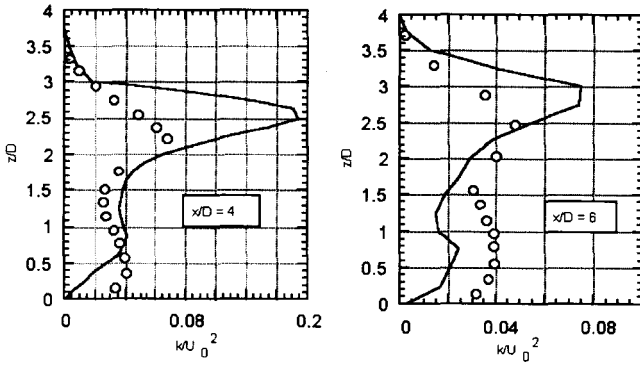


Figura 5.15: Comparação de perfis de energia cinética de turbulência

Bibliografia

- [1] D. ARNOLD, F. BREZZO & M. FORTIN; A stable finite element for Stokes equations, *Calcolo*, 21, 4, pp. 337-344, 1984.
- [2] K. J. ARROW, L. HURWICZ & H. UZAWA; *Studies in non-linear programming*, Stanford Univ. Press, 1958.
- [3] I. BABUSKA; *Numer. Math*, 16, pp. 322-333, 1971
- [4] F. BARON; *Report of 12th IAHR Meeting of group in refined flow modeling*, 1987.
- [5] M. BERCOVIER & O. PIRONNEAU; Error estimatives for finite element method solution of Stokes flow in primitive variables, *Numer. Math.*, 33, 1979.
- [6] J. BOUSSINEQ; Essai sur la théorie des eaux courants, *Mem. Acad. Sci.*, 23, 1877.
- [7] L. J. S. BRADBURY; The structure of self-preserving turbulent plane jet, *J. of Fluid Mech.*, 23, 1, pp 31-64, 1965.
- [8] A. C. P. BRASIL JUNIOR, G. BRUN, M. BUFFAT, Ph. CARRIERE & D. JEANDEL; Simulation des Ecoulements Tuburlents 3D par la Méthode des Eléments Finis, *Proceedings du 10ème Congrès Français de Mécanique*, pp 317 - 321, 1991.
- [9] A. C. P. BRASIL JUNIOR, G. BRUN, M. BUFFAT, Ph. CARRIERE & D. JEANDEL; Numerical Simulation of 3D Confined Turbulent Jets by Finite Element Method, *Proc. of 7th International Conference in Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flows*, pp 422 - 432, Pineridge Press, 1991.
- [10] A. C. P. BRASIL JUNIOR; *Simulation numérique par éléments finis des écoulements tridimensionnels avec dispersion: Approches euleriennes et lagrangiennes*, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [11] F. BREZZI; On the existence uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers, *RAIRO Anal. Num.*, Vol. 8, pp.129-151, 1974.
- [12] J. F. BRISON, M. BUFFAT, D. JEANDEL e E. SERRES; Finite Element simulation of turbulent flows using a two-equation model, em *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows*, Pineridge Press, 1985.
- [13] M. O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, R. MANTEL, J. PERIAUX, P. PERRIER e O. PIRONNEAU; A finite approximation of Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluids. Iterative methods of solution. em *Approximation Methods for Navier-Stokes problems*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 771, Springer-Verlag, pp. 78-128,1980.
- [14] A. N. BROOKS & T. J. R. HUGHES; Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 32, pp. 199-259, 1982.

- [15] G. BRUN; *Developpement et application d'une méthode d'éléments finis pour des écoulements turbulents fortement chauffés*, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1988.
- [16] M. BUFFAT; Numerical simulation of complex three dimensional flows, *Int. J. Num. Methods in fluids*, 12, pp. 683-704, 1991.
- [17] J. CAHOUEY & J. P. CHABARD; Some fast 3D finite element solvers for the generalised Stokes problem, *Int. J. Num. Methods in fluids*, 8, pp. 869-895, 1988.
- [18] T. CHACON & O. PIRONNEAU; On the mathematical foundations of the $k - \epsilon$ model, in *Vistas in Applied Mathematics*, Ed. Springer, 44-56, 1986.
- [19] D. CRAB, D. F. G. DURÃO & J. H. WHITELAW; A round jet normal to a cross flow, *ASME J. of Fluids Eng.* 103, pp. 142-153, 1981.
- [20] T. J. CRAFT, B. E. LAUDER et K. SUGA; Extending the applicability of eddy viscosity models through the use of deformation invariants and non-linear elements, *Proc. of 5th Symp on Refined Flows Modelling and Turbulence*, Paris, 1993.
- [21] S. E. ELGOBASHI & T. W. ABOU-ARAB; A two-equation turbulence model for two-phase flows, *Phys. Fluids*, 26, 4, pp. 931-938, 1983.
- [22] J. L. A. FONTOURA RODRIGUES; *Méthode de minimisation adaptée à la technique des éléments finis pour la simulation des écoulements turbulents avec conditions aux limites de proche parois*, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1990.
- [23] A. FORTIN & M. FORTIN; Newer and newer elements for incompressible flow, in *Finite elements in fluids 6*, Ed. J. Wiley, 1985.
- [24] M. FORTIN & R. GLOWINSKY; *Méthode de lagragien augmenté*, Ed. Masson, 1982.
- [25] L. P. FRANCA, S. L. FREY & T. J. R. HUGHES; Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95, pp. 253-276, 1992.
- [26] L. P. FRANCA & S. FREY; Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes Equations; *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99, pp. 209-233, 1992.
- [27] L. P. FRANCA, F. BREZZI, M. O. BRISTEAU, M. MALLEY & G. ROGE; A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 96, pp. 117-129 (1992).
- [28] L. P. FRANCA & A. L. MADUREIRA; *Element diameter free stability parameters for stabilized methods applied to fluids*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 105, pp. 395-403, 1993.
- [29] L. P. FRANCA & C. FARHAT; Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 123, pp. 299-308, 1995.
- [30] V. GIRAULT & P. A. RAVIART; *Finite element approximation of Navier-Stokes Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 749, Spriger-Verlag, 1979.
- [31] A. D. GOSMAN, W. M. PUN, A. K. RUNCHAL, D. B. SPALDING e M. WOLFSTEIN; *Heat and mass transfer in recirculating flows*, Ed. Academic Press, 1969.
- [32] L. HALLO, C. LE RIBAULT & M. BUFFAT; An implicit mixed finite-volume-finite-element method for solving 3D turbulent compressible flows, *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 25, pp. 1241-1261, 1997.

- [33] K. HANJALIC & B. E. LAUNDER; Reynolds stress model of turbulence and application to thin shear flow *J. of Fluid Mech.*, Vol. 52, pp.609-638, 1972.
- [34] H. HARLOW & P. I. NAKAYAMA; Transport of turbulent energy decay rate, *Rep. no LA-3854* Los Alamos, 1968, cit. Jones & Launder (1972)
- [35] A. HAUGUEL & J. CAHOUE; Finite element methods for incompressible Navier-Stokes and for Shallow Water equations, *VKI Lecture series*, 1986
- [36] J. O. HINZE; *Turbulence*, Ed. McGraw-Hill, N. York, 1975.
- [37] W. C. HIRT; An arbitrary lagrangian Eulerian computing technique, *Proc. of Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Ed. Springer-Verlag, pp. 359, 1971.
- [38] P. HOOD & G. TAYLOR; Navier-Stokes eq. using mixed interpolation, in *Finite element in flow problem*, Ed. Oden, UAH Press, 1974. Cit. *Pirroneau (1989)*.
- [39] T. J. HUGHES; A simple finite element scheme for developing upwind finite elements, *Int. J. Num. Meth. Engineering*, Vol. 12, pp. 1359-1365, 1978.
- [40] T. J. R. HUGHES, L. P. FRANCA e M. BALESTRA; A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 59, pp. 85-99, 1986.
- [41] T. J. R. HUGHES & L. P. FRANCA; A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. The Stokes problem with various well-posed boudary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 65, pp. 85-96, 1987.
- [42] T. J. R. HUGHES; Rcent progress in the developement and understanding of SUPG methods with special reference to compressible Euler and Navier-Stokes equations, *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 7, pp. 1261-1275, 1987.
- [43] T. J. HUGHES, L. P. FRANCA & G. M. HULBERT; A new finite element formulation for computational fluid dyanamics: VIII The Galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 73, pp. 173-189, 1989.
- [44] F. ILINCA, D. PELLETIER & A. GARON; An adaptive finite element method for a two-equation turbulence model in wall-bounded flows, *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 24, pp. 101-120, 1997.
- [45] D. JEANDEL, M. BUFFAT & PH. CARRIERE; Numerical methods for 2D and 3D heat transfer calculations, *VKI Lecture Series*, 1986.
- [46] W. P. JONES & B. E. LAUNDER; The prediction of laminarisation with two-equations model of turbulence, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 15, 1972.
- [47] C. JOHNSON & J. SARANEN; Streamline diffusion methods for incompressible Euler and Navier-Stokes equations, *Math. Comput.*, 47, pp. 1-18, 1986.
- [48] D. W. KELLY, S. NAKAZAWA, O. C. ZIENKIEWICZ e J. C. HEINRINCH; A note on anisotropic balancing dissipation in finite element approximation to convection-diffusion problems, *Int. J. Num. Meth. Engineering*, Vol. 15, pp. 1705-1711, 1980.
- [49] P. LASCAUX & R. THEODOR; *Analise numérique maricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Vol 2, Ed. Masson, 1987.

- [50] B. E. LAUNDER & D. B. SPALDING; *Mathematical models of turbulence* Ed. Academic Press, 1972.
- [51] B. E. LAUNDER, G. J. REECE & W. RODI; Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, *J. of Fluid Mech.*, Vol. 68, pp. 537-566, 1975.
- [52] B. E. LAUNDER; An Introduction to Single-Point Closure Methodology, *VKI Lectures - Introduction to the Modelling of Turbulence*, 1987.
- [53] F. S. LIEN & M. A. LESCHZINER; Assessment of turbulence-transport models including non-linear RNG Eddy-Viscosity formulating and second-moment closure for flow over a backward-facing step, *Computer Fluids*, 23, 8, pp. 283-1004, 1994.
- [54] M. A. LESCHZINER & W. RODI; Computation of strongly axisymmetric free jets. *AIAA Journal*, 22, 12, pp. 1742-1747, 1984.
- [55] J. L. LUMLEY; Toward a turbulent constitutive equation. *J. of Fluid Mech.* 41. pp. 413-434, 1970.
- [56] J. L. LUMLEY; Turbulence modeling, *ASME J. of Appl. Mech.*, 50, pp. 1097-1103. 1983.
- [57] A. P. MACEDO; *Aplicação de métodos de elementos finitos totalmente estabilizados - GLS - à simulação numérica de escoamentos laminares e turbulentos*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília - DM12. 1995.
- [58] C. R. MALISKA; Solução numérica de problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos em coordenadas generalizadas, *Anais do I ENCIT*. pp. 27-38, 1986.
- [59] A. MIZUKAMI; An implementation of the streamlibe-upwind/Petrov-Galerkin method for linear triangular elements; *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 49. pp. 357-364, 1985.
- [60] B. MOHAMMADI, O. PIRONNEAU & F. VALENTIN; *Int. J. Numer. Methods in Fluids*. 27, pp. 169-177, 1998.
- [61] T. S. PARK & H. J. SUNG; A nonlinear low-Reynolds number $k - \epsilon$ model for turbulent separated and reattaching flows - Flow Field computations, *Int. J. of Heat Mass Transfer*. 38, 14, 2657-2666, 1995.
- [62] V. C. PATEL, W. RODI e G. SCHEUERER; Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review, *AIAA Journal*, 23, 9, pp. 1308-1319, 1985.
- [63] S. V. PATANKAR & D. B. SPALDING; A calculation procedure for heat and mass transfer in three-dimensional parabolic flows, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, vol 15, pp. 1787-1806, 1972.
- [64] S. V. PATANKAR; *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Ed. Hemisphere, 1980.
- [65] R. L. PANTON; Scaling turbulent wall layers, *ASME J. of Fluids Eng.*, 112, pp. 425-432, 1990.
- [66] O. PIRONNEAU; *Finite element method for fluids*, Ed. J. Wiley, 1989.
- [67] J. ROACHE; *Computational Fluid Dynamics*, Ed. Cambridge, 1971.
- [68] W. RODI; Turbulence models and their application to hydraulics, *IAHR State-of-the Art paper*, 1984
- [69] P. A. B. SAMPAIO; A Petrov-Galerkin formulation for the incompressible Navier-Stokes equations using equal order of interpolations for velocity and pressure, *Int. J. Num. Meth. Engineering*, vol, 31, pp. 1135-1149, 1991.

- [70] T. H. SHI; An improved $k - \epsilon$ model for near-wall turbulence and comparison with direct numerical simulation, *NASA Report ICOMP-90-16*, 1990.
- [71] J. C. SIMO, F. ARMERO & C. A. TAYLOR; Stable and time-dissipative finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations in advective dominated flows, *Int. J. Num. Meth. Engineering*, vol. 38, pp. 1475-1506, 1995.
- [72] R. M. SMITH; On the finite element calculation of turbulent flows using $k - \epsilon$ model, *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 4, pp. 303-319, 1984.
- [73] C. G. SPEZIALE; On the nonlinear $k - l$ and $k - \epsilon$ models of turbulence, *J. of Fluid Mech.*, 178, pp. 459-455, 1987.
- [74] C. G. SPEZIALE; Turbulence Modelling in Noninertial Frames of References, *Theoret. Compt. Fluid Dynamics*, 1, pp. 3-19, 1989.
- [75] C. G. SPEZIALE; Analytical Methods for the development of Reynolds-stress closure in turbulence, *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 23, 107-157, 1991.
- [76] C. TAYLOR; Solving turbulent flow problems using FEM, em *Finite Element in Water Resources*, Spriger-Verlag, 1982.
- [77] D. J. TRITTON; *Physical Fluid Dynamics*, Claredon Press, 1988.
- [78] D. VANDROME; *Contribution à la modélisation et à la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable*, Thèse d'Etat, Université de Lille, 1983.
- [79] C. YAP; *Turbulent heat and momentum transfer in recirculating and impinging flows* PhD Thesis, Univ. of Manchester, 1987. cit. *Lien & Leschziner (1994)*.
- [80] D. M. YOUNG & K. C. JEA; Generalized conjugated gradien acceleration of nonsymmetrizable iterative methods, in *Linear algebra amd its applications*, pp. 159-194, 1980.
- [81] O. C. ZIENKIEWICZ; *The finite element method in engineering science*, Ed. McGraw-Hill, 1ª edição, 1967.
- [82] O. C. ZIENKIEWICZ & R. L. TAYLOR; *The finite element method*, Ed. McGraw-Hill, 1991.

Capítulo 6

Anemometria de Fio-Quente

Philippe P. M. Menut
Programa de Engenharia Mecânica (COPPE/UFRJ)
C.P. 68503. 21945-970. Rio de Janeiro. Brasil

Glossário:

A_f	Seção transversal do fio
c_p	Calor específico a pressão constante
C_p	Capacidade térmica do fluido
d	Diâmetro do fio
E	Tensão de saída do anemômetro
e'	Tensão de saída flutuante do anemômetro
h	Coefficiente de transferência de calor
\bar{h}	Coefficiente de sensibilidade de arfagem
I	Corrente de alimentação
k	Coefficiente de sensibilidade de guinada
k_f	Condutividade térmica do fio a temperatura T_f
K_u, K_v	Coefficientes de sensibilidade a velocidades U e V
l	Comprimento do fio
L_l, L_t	Escala integral de comprimento longitudinal e transversal
n	Coefficiente de potência da lei de King
$Nu = hd/k$	Número de Nusselt
P	, p' Pressão, flutuação de pressão
$Pr = C_p \mu / k$	Número de Prandtl
R_a, R_{20}	Resistência do fio a temperatura T_a ou a 20°
R_c, R_f e R_l	Resistências do cabo, do fio e das agulhas
$Re = \rho U d / \mu$	Número de Reynolds
R_{ij}, Re_{ij}	Função de correlação temporal, função de correlação espacial
S	Coefficiente de assimetria (Skewness)
S_u	Coefficiente de sensibilidade a velocidade
S_θ, S_Γ	Coefficientes de sensibilidade a temperatura, a concentração
$S_{u,cc}$	Coefficiente de sensibilidade a velocidade no modo Corrente Constante
$S_{\theta,cc}$	Coefficiente de sensibilidade a temperatura no modo Corrente Constante
S_{uu}, S_{uv}	Função de densidade auto-espectral, função de densidade espectral cruzada
T	Coefficiente de achatamento (Flatness ou Kurtosis)
T_a, T_f	Temperatura do escoamento, temperatura do fio
T_r	Tensão de ruptura
U, V, W	Componentes instantâneas da velocidade
\hat{U}	Transformada de Fourier da velocidade U
U_e	Velocidade efetiva
u', v', w'	Velocidade flutuante
α_{20}	Coefficiente de temperatura do material a 20°
ϵ	Emissividade do fio
ϵ_u	Desvio padrão normalizado de U
Γ	Concentração
μ	Viscosidade dinâmica
ρ	Massa específica
ρ_f	Massa específica do fio
σ	Constante de Stephan-Boltzmann
σ^2	Variância
χ_f	Resistividade do fio
χ_{20}	Resistividade do material a 20°

6.1 Introdução

A anemometria térmica pode ser utilizada para numerosos estudos que envolvem escoamentos turbulentos tendo em vista sua possibilidade de medição de grandezas tão variadas como a velocidade, a temperatura, a concentração ou o atrito junto a uma superfície. O princípio de medição baseia-se na transferência de calor convectivo forçado de um elemento sensível, aquecido, imerso num meio fluido escoando.

Este capítulo descreve os princípios básicos da anemometria de fio-quente. Abordaremos, entre outros, alguns temas relacionados aos problemas de: transferência de calor, coeficientes de sensibilidade, modo de corrente constante, modo de temperatura constante, resposta em frequência e resolução espacial, medição de temperatura e de concentração, e, finalmente, anemometria de fio-quente pulsátil. Trataremos de fios-quentes com a forma cilíndrica e de filmes-quentes, por serem eles os sensores de anemometria térmica mais comuns. Aliás, a presente teoria pode ser estendida para qualquer sensor de fio-quente devido aos aspectos de transferência de calor serem similares.

A anemometria de fio-quente funciona perfeitamente bem para as condições nas quais o tubo de Pitot não é recomendado ou não se aplica. O fio-quente por ser de diminutas dimensões e responde muito rapidamente a variações nas condições do escoamento. Mesmo para escoamentos complexos – turbulentos e de geometria tri-dimensional – o fio-quente pode detectar as frequências mais altas presentes na estrutura do escoamento; classicamente, as frequências correspondentes à escala de comprimento de Kolmogorov dos menores turbilhão. Assim, o anemômetro de fio-quente ainda é o principal instrumento de pesquisa para estudo de escoamentos turbulentos. Este instrumento ainda possui a vantagem de fornecer a informação de forma analógica, podendo ser processado eletronicamente para calcular intensidades, correlações ou espectros.

As vantagens da anemometria de fio-quente, para escoamentos cujo nível de intensidade turbulenta é inferior a 25 - 30 %, podem ser enumeradas como:

1. *Tempo de resposta.* Frequências de amostragem de até 50 kHz são comuns para anemometria de fio-quente em modo temperatura constante.
2. *Sinal contínuo.* Ao contrário da anemometria Laser Doppler, o sinal analógico é contínuo. Assim, a amostragem, discretizada à frequência constante, oferece totais condições para uma análise de frequência.
3. *Dimensões do sensor.* O tamanho típico de um sensor de fio-quente é de $5\mu\text{m}$ de diâmetro e 1.25mm de comprimento. Alguns sensores alcançam $0.25\mu\text{m}$ de diâmetro por 0.25mm de comprimento. Apenas para efeito de comparação, registramos aqui que o volume de medição típico para a anemometria Laser Doppler é de $50\mu\text{m}$ por 0.25mm .
4. *Medição de velocidade.* A faixa de medição de velocidades possível na anemometria a fio-quente é extensa, de alguns centímetros por segundo até escoamentos muito rápidos (compressíveis). As três componentes de velocidade instantânea podem ser medidas.
5. *Medição de temperatura.* Pode-se medir a velocidade e a temperatura simultaneamente, utilizando por exemplo um sensor de fio-frio.
6. *Medição em escoamento bifásico.* A anemometria de fio-quente pode ser utilizada em escoamento bifásico. Na hipótese de bolhas maiores do que o tamanho do sensor, a

parte do sinal analógico correspondente a passagem de uma bolha pode ser identificada e eliminada a fim de se obter a velocidade do meio contínuo.

7. *Exatidão.* A Anemometria de Fio-Quente e a Anemometria Laser Doppler possuem exatidão similares de até 0.1 - 0.2 %. A exatidão mais comum alcançada é da ordem de 1%.
8. *Informação espacial.* A utilização de vários fios-quentes fornece a medição de correlações espaciais e temporais para flutuações turbulentas. Por exemplo, uma escova de fios-quentes, acoplada a uma amostragem condicional, permite a identificação e o estudo de estruturas coerentes em escoamentos turbulentos.

A Anemometria de Fio-Quente é complementar a outros instrumentos de medição em mecânica dos fluidos. Como instrumento não absoluto, o fio- quente precisa ser calibrado antes de cada utilização. A calibração é efetuada para a velocidade média, o que requer a utilização, por exemplo, de um tubo de Pitot como instrumento de referência.

A complementaridade dos instrumentos utilizados para medições em mecânica dos fluidos pode ser apresentada assim:

1. O tubo de Pitot para a medição de velocidades médias de um escoamento.
2. A visualização para se obter uma visão física do problema bem como uma análise qualitativa dos fenômenos presentes.
3. A Anemometria Laser Doppler para ser utilizada em meios hostis, por exemplo em câmaras de combustão, por ser um instrumento extrusivo.
4. A velocimetria por imagens de partículas (PIV) para a medição de até três componentes de velocidade simultaneamente em vários pontos de um plano do escoamento.
5. A Anemometria de Fio-Quente para a medição do campo de velocidades instantâneas até as menores escalas.

6.2 Princípio básico de funcionamento de um anemômetro de fio-quente

A transferência de calor entre um elemento aquecido e o meio fluido escoando ao redor dele define o fenômeno básico da Anemometria de Fio-Quente . Dependendo das propriedades do fluido (densidade ρ , viscosidade μ , condução térmica k , calor específica c_p etc.) e dos parâmetros do escoamento (velocidade U , temperatura T_a , pressão P , etc.) podemos estabelecer uma relação entre a velocidade do fluido incidente e a taxa de transferência de calor do fio-quente.

6.2.1 Lei de comportamento do fio-quente

Para conhecermos a lei do comportamento de um fio-quente num escoamento – de velocidade U e de temperatura T_a – vamos identificar cada termo da equação de equilíbrio da taxa de transferência de calor para um comprimento elementar do fio (Figura 6.1):

$$d\dot{Q}_e = d\dot{Q}_{fc} + d\dot{Q}_c + d\dot{Q}_r + d\dot{Q}_a, \tag{6.1}$$

com:

$$d\dot{Q}_e = \frac{I^2 \chi_f}{A_f} dx \quad \text{a taxa de geração de calor pela corrente elétrica,}$$

$$d\dot{Q}_{fc} = \pi dh(T_f - T_a)dx \quad \text{a taxa de transferência de calor por convecção forçada,}$$

$$d\dot{Q}_c = -k_f A_f \frac{\delta^2 T_f}{\delta x^2} dx \quad \text{a taxa de transferência de calor por condução,}$$

$$d\dot{Q}_r = \pi \sigma \epsilon (T_f^4 - T_a^4) dx \quad \text{a taxa de transferência de calor por radiação,}$$

$$d\dot{Q}_a = \rho_f c_f A_f \frac{T_f}{\delta t} \quad \text{a taxa de transferência de calor por acumulação,}$$

e I corrente de alimentação, χ_f resistividade do fio, A_f seção transversal do fio, d diâmetro do fio, h coeficiente de transferência de calor, T_f temperatura do fio, T_a temperatura do escoamento, k_f condutividade térmica do fio à temperatura T_f , σ constante de Stefan-Boltzmann, ϵ emissividade do fio e ρ_f massa específica do fio.

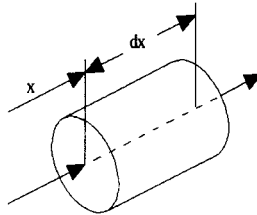


Figure 6.1: Saldo de transferência de calor para um pedaço elementar de fio quente.

O termo devido à transferência de calor por radiação é muito pequeno, pois, como uma temperatura de funcionamento de 300°C é comum para os fios-quentes, este termo pode ser desprezado. O equilíbrio térmico do fio pode ser representado por:

$$\frac{I^2 \chi_f}{A_f} dx - \pi dh(T_f - T_a)dx + k_f A_f \frac{\delta^2 T_f}{\delta x^2} dx - \rho_f c_f A_f \frac{T_f}{\delta t} = 0. \tag{6.2}$$

A partir da equação 6.2, sob condições uniformes $\delta T_f / \delta t = 0$, Bruun (1995) mostra que é possível predeterminar a distribuição de temperatura ao longo de um fio- quente. Ele conclui que o fio tem que ser o mais comprido possível e que o material do fio tem que ter uma condutividade térmica baixa. Para fios-quentes padrões, a perda de calor por condução fica na ordem de 15 % da transferência total de calor no fio.

A resistência R_f de uma porção de fio, de comprimento l , pode ser expressa como $R_f = \frac{\chi_f l}{A_f}$, sendo l o comprimento da porção de fio. O material do fio é termo-resistivo e sua resistência segue uma lei da forma:

$$R_f = R_a + R_{20} \alpha_{20} (T_f - T_a), \tag{6.3}$$

onde R_a e R_{20} representam o valor das resistências do fio respectivamente à temperatura do fluido T_a e a 20°C , e α_{20} o coeficiente de temperatura do material a 20°C . Com a hipótese do fio ser infinitamente longo em condições uniformes, o balanço de calor em uma porção de fio se deduz da equação 6.2 e pode ser escrito como:

$$I^2 R_f = \pi d h l (T_f - T_a). \quad (6.4)$$

A potência elétrica fornecida ao fio é função do coeficiente de transferência de calor e da diferença de temperatura entre o fio e o escoamento. A transferência de calor entre um corpo e o fluido que o circunda foi anteriormente explicitada por outros autores sob a forma de números adimensionais. Para um fio cilíndrico infinitamente longo, King (1914) mostrou, num trabalho experimental e teórico, que a transferência de calor convectiva pode ser expressa na forma de uma relação entre o número de Nusselt ¹ e o número de Reynolds ² que pode ser escrita como:

$$Nu = A + B Re^{1/2}, \quad (6.5)$$

onde A e B são constantes empíricas de calibração.

Kramers (1946) compilou resultados experimentais para fios no ar, na água e no óleo. Ele definiu uma lei cuja validade cobre larga faixas de números de Reynolds e de Prandtl ³: $0.1 < Re < 10000$ e $0.71 < Pr < 1000$. Essa lei pode ser escrita como:

$$Nu = 0.42 Pr^{0.2} + 0.57 Pr^{0.33} Re^{0.5}. \quad (6.6)$$

Introduzindo o número de Nusselt na equação 6.4:

$$I^2 R_f = \pi k l (T_f - T_a) Nu, \quad (6.7)$$

ou, utilizando 6.3 e 6.6:

$$I^2 R_{20} = \pi k l \frac{T_f - T_a}{1 - \alpha_{20}(T_f - T_{20})} (0.42 Pr^{0.2} + 0.57 Pr^{0.33} Re^{0.5}). \quad (6.8)$$

A potência elétrica fornecida ao fio é uma função da temperatura e da velocidade do fio; podemos então escrever:

$$E^2 = A + BU^{0.5} \quad (6.9)$$

$$A = 0.42 \pi k l (T_f - T_a) (R_{20} (1 - \alpha_{20}(T_f - T_{20}))) Pr^{0.2} \quad (6.10)$$

$$B = 0.57 \pi k l (T_f - T_a) (R_{20} (1 - \alpha_{20}(T_f - T_{20}))) Pr^{0.33} \left[\frac{\rho d}{\mu} \right]^{0.5} \quad (6.11)$$

¹ $Nu = \frac{hd}{k}$ com h coeficiente de transferência de calor, d diâmetro do cilindro circular e k condutividade térmica.

² $Re = \frac{\rho U d}{\mu}$ com ρ massa específica, U velocidade, e μ viscosidade molecular.

³ $Pr = \frac{c_p \mu}{k}$ com c_p o calor específico a pressão constante e μ a viscosidade dinâmica.

Sensor de dimensões finitas

As perdas por condução nas extremidades do sensor devem ser tomadas em consideração, assim como uma variação da lei de comportamento do número de Nusselt. Na prática se utiliza um coeficiente n na equação 6.9:

$$E^2 = A + BU^n. \quad (6.12)$$

Nesta equação, sempre referida como a lei de King, as constantes A , B e n são definidas através de uma calibração do instrumento.

6.2.2 Calibração do anemômetro de fio-quente

A curva de calibração de um anemômetro de fio-quente é obtida através da medição de uma velocidade de referência (U_r) e da tensão fornecida pelo anemômetro (E_r). Procura-se uma tensão calculada $E_c = F(U_r)$ que ajuste a função F aos pares de pontos medidos (U_r, E_r).

As constantes de calibração podem ser calculadas procurando minimizar o desvio padrão normalizado ϵ_u :

$$\epsilon_u = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - U_r/U_c)^2 \right)^{1/2}, \quad (6.13)$$

onde $U_c = F^{-1}(E_r)$ e N denota a dimensão da amostra de calibração. Pode-se deduzir diretamente as três constantes, ou deduzir as outras constantes incrementando n ou incrementando A . Esses métodos serão comparados mais à frente.

Na proposta de sua lei, King resolveu utilizar $n = 0.5$; porém Collis e Williams (1959) mostraram que um valor de 0.45 fornece melhores resultados para uma faixa muito ampla de números de Reynolds ($0.02 < Re < 44$). Para se entender a amplitude desta faixa, basta notar que, para um fio de $5\mu m$ de diâmetro no ar, a validade da lei se estende de $6cm/s$ a $132m/s$. Apesar disso, a utilização de um valor ótimo para n o qual pode ser deduzido durante a calibração é a melhor solução. Alguns dos primeiros autores à utilizar esta solução, entre outros, são Van Thinh (1969), Bruun (1976), Bruun e Tropea (1980), Swaminathan et al. (1983) e Pitts e Mc Caffrey (1986). Hoje em dia, esta lei é a mais utilizada para a geração de resultados precisos a serem utilizados em pesquisa.

Outras leis de transferência de calor entre o fio e o escoamento são válidas. Davies e Patrick (1972) e Sidall e Davies utilizaram uma lei experimental proposta por Van der Hegge Zijnen (1956). Trata-se de uma lei de potência da forma:

$$E^2 = A + BU^{0.5} + CU. \quad (6.14)$$

Bruun (1971) desenvolveu um "princípio da função universal" $F(U)$ utilizado assim:

$$E^2 - E_0^2 = CF(U), \quad (6.15)$$

onde C é uma constante do sensor e E_0 uma tensão de deslocamento na origem. Após uma pesquisa profunda do assunto, Bruun não recomenda mais a utilização deste princípio pois essa

função deveria ser válida para qualquer velocidade e daí para amplas faixas de velocidade. Na realidade, um desvio desta lei foi constatado para baixas velocidades.

A caracterização física e experimental da lei de transferência de calor torna válida uma lei polinomial da velocidade do escoamento da forma:

$$U = A + BE + CE^2 + DE^3 + \dots \quad (6.16)$$

Bruun *et al.* (1988) publicaram uma comparação entre as diferentes leis de calibração acima propostas. O sensor utilizado foi do tipo DANTEC 55P01, calibrado numa faixa de velocidade entre 5 e 50m/s. Eles mostraram que as leis deduzidas da lei de King oferecem uma boa precisão, independentemente do método de cálculo das constantes de calibração usadas ($\epsilon_u \cong 0.1 - 0.15\%$).

A lei de potência estendida aplicada aos mesmos dados experimentais permite alcançar um desvio padrão 3 a 4 vezes maior: $\epsilon_u = 0.46\%$. O termo CU age como um corretor: ele é menos eficiente do que modificar a constante n .

Os mesmos dados experimentais foram aplicados a uma lei polinomial. Um desvio padrão da ordem de 0.15% foi obtido. Para alcançar esta precisão foi preciso utilizar uma lei polinomial de quarta ordem ou superior. Uma lei polinomial de segunda ordem não permite diminuir o desvio padrão abaixo de 2.5%.

Três conselhos para a calibração de um anemômetro de fio-quente :

1. Recomenda-se considerar uma amostra com 20 - 30 pontos para reduzir as incertezas associadas à calibração.
2. Recomenda-se também calibrar o anemômetro de fio-quente apenas na faixa de velocidades a serem exploradas, pois as leis de calibração são apenas aproximações do verdadeiro comportamento térmico do fio. Assim, a lei de calibração obtida será melhor para menores faixas de velocidade consideradas.
3. Devido às características individuais de cada sensor, às variações nas componentes do anemômetro e às variações na temperatura do fluido, é sempre necessário realizar uma calibração cada vez que o anemômetro de fio-quente seja utilizado.

6.2.3 Sensibilidade à velocidade e à temperatura

A partir de uma variante da equação 6.9, escrita em função da diferença de temperatura $T_f - T_a$, podemos escrever:

$$\frac{E^2}{R_f} = (A + BU^n)(T_f - T_a). \quad (6.17)$$

No modo temperatura constante a resistência R_f pode ser considerada constante. As constantes de calibração A , B e n são também consideradas independentes da velocidade e da temperatura do escoamento. A flutuação de tensão, e , resultante de uma flutuação de velocidade, u , ou de uma flutuação de temperatura no escoamento, θ , se expressa em função dos coeficientes de sensibilidade S_u e S_θ : $e = S_u u + S_\theta \theta$. Os coeficientes de sensibilidade para a velocidade e para a temperatura se escrevem:

$$S_u = \frac{\delta E}{\delta U} = \frac{nBU^{n-1}}{2} \left[\frac{R_f(T_f - T_a)}{A + BU^n} \right]^{1/2}, \quad (6.18)$$

$$S_\theta = \frac{\delta E}{\delta \theta} = -\frac{1}{2} \left[\frac{R_f(A + BU^n)}{T_f - T_a} \right]^{1/2} \quad (6.19)$$

A sensibilidade na velocidade aumenta com $T_f - T_a$; ela diminui com U devido à forma da equação 6.19. Por outro lado, a sensibilidade em temperatura diminui com $T_f - T_a$ e aumenta com U . Assim, um coeficiente de superaquecimento alto é recomendado para a medição de flutuações de velocidade. Ao contrário, aconselha-se diminuir este coeficiente para medir flutuações de temperatura.

No modo corrente constante o fio funciona com um baixo coeficiente de superaquecimento para a medição da temperatura. A tensão flutua em função da variação de temperatura no fluido e da temperatura do fio. As resistências correspondentes a estas temperaturas são respectivamente R_a e R_f . Demonstra-se que as sensibilidades se expressam em função do valor médio $\overline{R_f}$ por:

$$\frac{S_{u,cc}}{S_{\theta,cc}} = -\frac{nB\overline{U}^{n-1}I^2\overline{R_f}}{(A + BU^n)^2 R_{20\alpha_{20}}}. \quad (6.20)$$

A sensibilidade na medida da temperatura aumenta se a corrente diminui; a sensibilidade na medida da velocidade atua na direção oposta. Para a medição de temperatura recomenda-se diminuir a corrente na ponte com o cuidado de conservar uma taxa sinal/ruído alta.

6.2.4 Sensores de Anemometria de Fio-Quente

Vários sensores foram desenvolvidas para a Anemometria de Fio-Quente. O elemento sensível do anemômetro pode ser um fio metálico muito fino esticado entre duas agulhas de aço inoxidável ou de níquel, ou pode ser uma fina camada de metal depositada num suporte de quartzo. O primeiro é chamado de fio- quente e o segundo de filme- quente. A resistência mecânica de um sensor de fio- quente é suficiente para suportar a medição de altas velocidades em um gás. Um fio- quente padrão pode realizar medição de velocidade de até 500m/s no ar e 5m/s na água. Os sensores de filme- quente possuem uma resistência maior e podem ser usados na água até velocidades de 25m/s.

A Anemometria de Fio-Quente é um sistema especialmente apropriado para o estudo da turbulência. Para esses fenômenos, o sistema de medição deve possuir uma resposta em frequência muito alta e precisa, e ser apto a medições *locais*. O tamanho do sensor não deve ser muito maior do que a escala de comprimento característica de Kolmogorov, presente nas menores estruturas do escoamento. Para estudos de medição de velocidade média ou dos componentes do tensor de Reynolds, um sensor comum de 5 μ m de diâmetro e de 1.25mm de comprimento é apropriado. Um estudo espectral de um escoamento turbulento pode necessitar sensores ainda menores.

O elemento sensível de um sensor de fio- quente é um fio de tungstênio, de platina ou de compostos de platina. Como visto na Tabela 1, o tungstênio não pode ser soldado. O fio de platina é macio e fraco; entretanto, um composto de platina pode torná-lo mais robusto. Se for preciso diminuir o tamanho do sensor pode-se utilizar o processo chamado Wollaston. Uma

haste fina de platina – ou de composto de platina – é coberta por uma camada de prata. O conjunto passa por um molde a fim de tomar a forma de um cilindro homogêneo. O fio é soldado às agulhas. Sofre o tratamento numa gota de solvente de prata afim de exibir um pedaço de fio. O elemento sensível resultante é muito pequeno e a distribuição de temperatura ao longo do fio é melhor porque as perdas de calor para as agulhas são menores. Como não existem solventes para utilização com o tungstênio, o processo de Wollaston não pode ser aplicado com este material.

Tabela 1: Propriedades físicas dos materiais comumente utilizados nos sensores de fio-quente.

Material	T_r [Ncm^{-2}]	α_{20} [$^{\circ}C^{-1}$]	χ_{20} [$\mu\Omega cm$]	k_f [$Wcm^{-1}^{\circ}C^{-1}$]	c_f [$kJkg^{-1}^{\circ}C^{-1}$]	Comentários
Tungstênio	250,000	0.0036	5.5	1.9	0.14	Não pode ser soldado
Platina	35,000	0.0038	9.8	0.7	0.13	Macio e fraco
Platina Rhodium ⁽¹⁾	70,000	0.0016	19	0.4	0.15	Mais robusto que a Pt
Platina Iridium ⁽²⁾	140,000	0.0008	32	0.17	0.13	Mais robusto que a Pt

⁽¹⁾(90 - 10) % ; ⁽²⁾(80 - 20) %. T_r é a tensão de ruptura, α_{20} o coeficiente de temperatura da resistividade a $20^{\circ}C$, χ_{20} a resistividade a $20^{\circ}C$, k_f a condutividade térmica e c_f o calor específico.

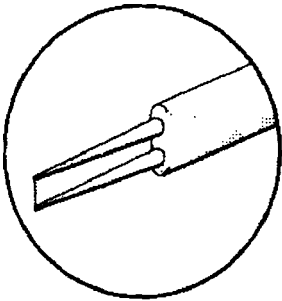
Os sensores de fio-quente podem possuir diversas configurações. Existem principalmente sensores com 1, 2 ou 3 elementos sensíveis. Cada fio mede um componente da velocidade num plano cuja posição é perpendicular ao fio. Os sensores de dois fios – sensores em X – tem aplicações nos escoamentos bi-dimensionais. A Figura 6.2 mostra alguns exemplos de fios-quentes industriais.

Os sensores de filmes-quente são construídos pela deposição de uma camada fina de platina ou de níquel sobre um substrato isolado de quartzo. Existem várias configurações geométricas adaptadas à diversidade de aplicações dos filmes-quentes: sensores na forma de cilindros circulares, de cones, de ângulos agudos ou sensores colados a uma parede. O modelo cilíndrico é o mais freqüente possuindo um elemento sensível com 25 a $70\mu m$ de diâmetro e 1 a 2 milímetros de comprimento.

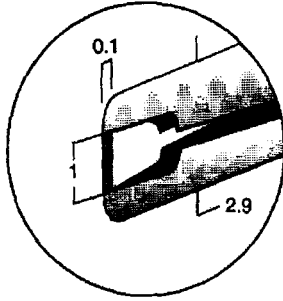
Devido à sua maior resistência mecânica, o filme-quente é preferido ao fio-quente nos meios líquidos. É também o preferido nos casos susceptíveis a contaminações nos escoamentos gasosos. O coeficiente de superaquecimento não deve ultrapassar 1.08 se o fluido for líquido a fim de impedir a formação de bolhas ao redor do filme.

6.2.5 Coeficiente de superaquecimento

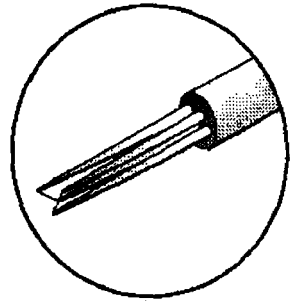
Se a temperatura do fio for muito maior do que a temperatura do escoamento, o Anemometria de Fio-Quente será altamente sensível à variações da velocidade e pouco sensível a variações da temperatura do escoamento. O coeficiente de superaquecimento deve ser escolhido o mais alto possível; porém, a temperatura de oxidação do tungstênio, da ordem de $350^{\circ}C$, não deve estar alcançada. Para este tipo de sensor – o mais comum – o coeficiente de superaquecimento não deve ultrapassar 0.8 - 1. Por exemplo, um sensor simples de tipo DANTEC 55P01 ($5\mu m$ de diâmetro e $1.25mm$ de comprimento) funcionando com um coeficiente de superaquecimento de 0.8, alcança mais ou menos $230^{\circ}C$.



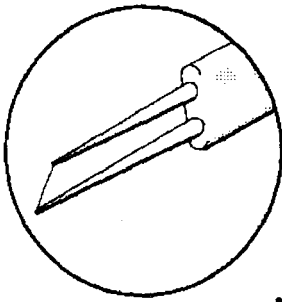
55P11 Fio reto comum



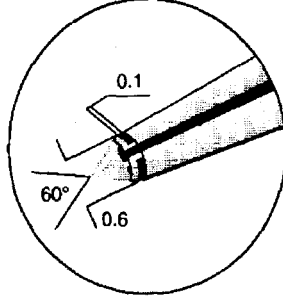
55R31 Filme de ângulo agudo



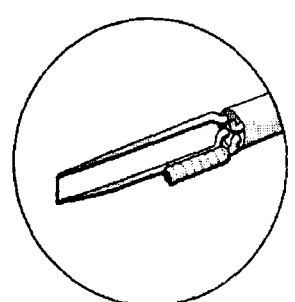
55P61 Fios cruzados



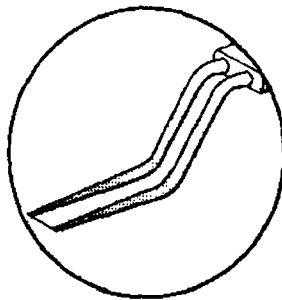
55P12 Fio inclinado a 45°



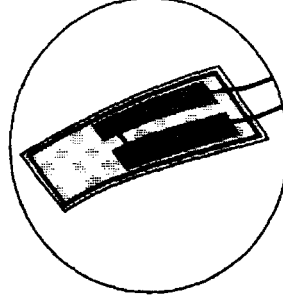
55R41 Filme cônico



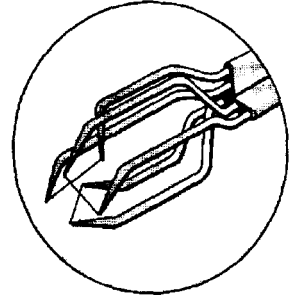
55P81 Fio com compensação térmica



55P15 Fio de camada limite



55R47 Filme grudado a parede



55P91 Fios triplos

Figure 6.2: Diversos tipos de sensores DANTEC.

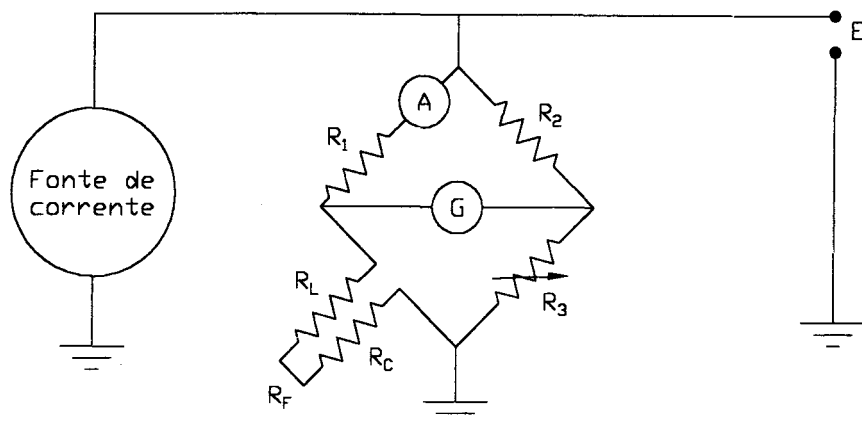


Figure 6.3: Esquema de princípio do Anemômetro a Corrente Constante.

Lembramos que o coeficiente de superaquecimento é definido como a razão entre a resistência do sensor em funcionamento e a resistência do sensor à temperatura do escoamento: $1 + a = R_f/R_a$. Porém, a resistência total inserida na ponte de Wheatstone inclui R_f , R_c , a resistência do cabo, e R_l , a resistência das agulhas. Deve-se então enfatizar que a resistência a ser compensada na ponte no modo de funcionamento será igual a $(1 + a)R_a + R_c + R_l$. Como as resistências R_a , R_l e R_c possuem a mesma ordem de grandeza, nenhuma delas pode ser desprezada. Caso contrário, a temperatura de oxidação pode ser alcançada ou mesmo ultrapassada.

Em casos de utilização num líquido, o sensor não deve ultrapassar a temperatura de ebulição do líquido. Na água, o coeficiente de superaquecimento normalmente utilizado é da ordem de 1.08.

6.2.6 Anemômetro a corrente constante

Existem basicamente dois modos de funcionamento de Anemometria de Fio-Quente: o modo CC (corrente constante) e o modo TC (temperatura constante). Os dois possuem uma taxa sinal/ruído alta. O ruído eletrônico de um anemômetro de fio-quente tem origem no sensor, nas resistências da ponte e no amplificador do circuito. A taxa sinal/ruído pode ser otimizada, conforme menciona Figerson e Freymuth (1983) (veja Bruun (1995)), caso as seguintes condições sejam observadas: 1) operar com taxa de superaquecimento alta; 2) utilizar um material com coeficiente de temperatura alto; 3) optar para um fio fino cuja capacidade térmica é muito baixa.

Um circuito típico de anemômetro a corrente constante é mostrado na Figura 6.3. O coeficiente de superaquecimento é ajustado por meio da resistência R_3 através da relação:

$$\frac{R_f + R_l + R_c}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} \quad (6.21)$$

onde R_l e R_c são respectivamente as resistências das agulhas do sensor e do cabo ligando o sensor ao anemômetro.

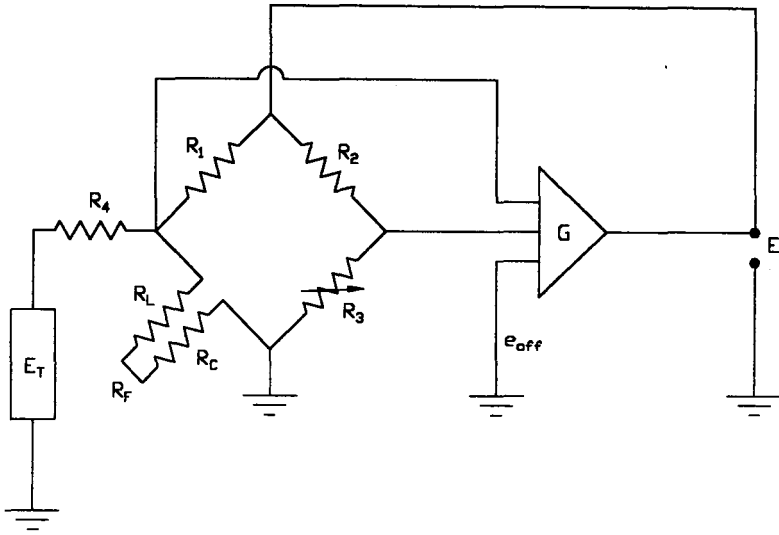


Figure 6.4: Esquema de princípio do Anemômetro a Temperatura Constante.

Se as resistências do circuito são constantes, a tensão de saída E é uma função linear de R_f . Assim, qualquer fenômeno produzindo uma variação linear de R_f resultará em uma variação linear de E . Isto é o caso da temperatura cuja lei segue uma formulação do tipo $R_f = R_a + R_{20}\alpha_{20}(T_f - T_a)$. Infelizmente, este não é o caso da velocidade. Para um anemômetro a corrente constante, a temperatura do sensor depende da velocidade do escoamento; se a velocidade varia, a temperatura também varia. Ora, a inércia térmica do fio tende a se opor à variação de temperatura. A resposta térmica do fio é grande em comparação com o tempo característico de um escoamento turbulento. Isto posto, a faixa de resposta em frequência do sistema é estreita. As frequências de corte de fios comuns de 5 e 1 μm de diâmetro são respectivamente de 100Hz e 2kHz. Estas faixas podem ser otimizadas até 30kHz com uso de circuitos corretores. Porém, estes circuitos devem ser ajustados em função da faixa de velocidades a serem medidas no escoamento a fim de compensar com eficiência a inércia térmica do fio.

Na prática, se a temperatura do sensor é muito maior do que a temperatura do escoamento, o anemômetro a corrente constante é primordialmente sensível a variações na velocidade. Se, ao contrário, a temperatura do sensor e do escoamento são próximas, o anemômetro a corrente constante é sensível à temperatura.

6.2.7 Anemômetro a temperatura constante

Um esquema eletrônico com o princípio de funcionamento do anemômetro a temperatura constante é representado na Figura 6.4. A alimentação da ponte depende, desta vez, de um servidão pelo amplificador de saída. A inércia térmica do elemento sensível é, assim, automaticamente ajustada se as condições de escoamento variam. Esta característica é a maior vantagem deste modo de funcionamento do anemômetro a fio-quente.

As vantagens do modo TC são conhecidas há muito tempo, desde 1943 por Weske ou 1948 por Ossofsky. Entretanto, precisou-se esperar a década dos 60 e o desenvolvimento dos amplificadores em circuitos integrados para implementar o modo TC nos anemômetros a fio-quente.

Quando a velocidade do escoamento muda, a temperatura e a resistência do elemento sensível mudam. Ocorre, então, uma tensão de desequilíbrio na ponte a ser aplicada ao amplificador. A corrente de saída do amplificador é inversamente proporcional à variação da resistência do elemento sensível. Essa corrente será injetada na alimentação da ponte de Wheatstone, o que restaura a resistência a sua valor inicial. Os amplificadores modernos possuem constante de tempo muito pequena, conservando a temperatura do elemento sensível constante, exceto para frequências muito altas.

Porém, o anemômetro a temperatura constante é limitado: o tempo de resposta do circuito fechado de servidão depende do ganho do amplificador contínuo. No entanto, um valor alto demais do ganho resulta em oscilações do sistema auto-regulado. Em um anemômetro a temperatura constante comum as oscilações são limitadas por um filtro H.F. inserido no circuito fechado. O melhor tempo de resposta possível resulta de um compromisso entre o ganho e o filtro H.F..

Qualquer anemômetro a temperatura constante moderno possui também um circuito eletrônico para definir o coeficiente de superaquecimento, e um gerador de ondas quadradas para testar a resposta em frequência do sistema. Os controles disponíveis para o usuário são em geral:

- uma capacitância ou indutância na ponte para compensar a reatância do cabo;
- uma tensão de deslocamento e_{off} do amplificador;
- o ganho do amplificador;
- um filtro H.F. no ramo de volta da alimentação.

Lembramos que a taxa da ponte varia em geral entre 5 e 20 para, principalmente, dirigir a corrente de volta no ramo do elemento sensível.

6.2.8 Passos básicos de medição com a Anemometria de Fio-Quente

Estudos experimentais baseados em Anemometria de Fio-Quente com a assistência de um computador possuem algumas regras básicas de andamento similares. Para um escoamento estacionário, os sucessivos passos podem ser assim definidos:

1. *Definição da medição desejada:* A configuração do escoamento (jato livre, camada limite, camada de mistura ...), o tipo de escoamento (altamente turbulento, temperatura flutuante ...), as componentes de velocidade desejadas etc. são parâmetros importantes na escolha do sistema de medição. Também o tratamento futuro dos dados influencia o material e a instalação experimental. Por exemplo, correlações espaciais duplas ou triplas exigem medições simultâneas de velocidade.
2. *Seleção do tipo de anemômetro e do sensor:* Os dois tipos de anemômetros – o anemômetro a temperatura constante e o anemômetro a corrente constante – possuem características e aplicações diferentes. Quanto à escolha do sensor, foram desenvolvidos e comercializados muitos sensores em resposta à demanda científica. Os parâmetros importantes são: a geometria do espaço de medição, o número de componentes de velocidades desejadas, a influência da temperatura, o tipo de fluido, o limite superior de sensibilidade na frequência desejada (função do diâmetro do sensor).

3. *Calibração:* Depois da escolha da lei de calibração a ser validada, a calibração é realizada em função da sensibilidade do sensor, isto é, de seus componentes e de sua temperatura. Um sensor de fios-quentes cruzados deve ser calibrado com relação à velocidade e à direção.
4. *Seleção do sistema de aquisição digital:* A configuração experimental e o tratamento de dados futuro define o tipo de conversor A/N, o condicionador de sinal (deslocamento e ganho) e os filtros a serem aplicados. Eles definem também a frequência de aquisição, a cadência de armazenamento e o tamanho dos arquivos gravados.
5. *Identificação e medição do escoamento médio:* A caracterização das velocidades médias fornece uma primeira qualificação do escoamento estudado. Esta etapa é primordial no caso da utilização de sensores de fios-quentes cruzados; ela pode ser realizada com um tubo de Pitot.
6. *Medição e aquisição:* Os parâmetros de aquisição foram escolhidos: a frequência de corte do filtro passa-baixo, deslocamento e ganho do condicionador de sinal, frequência de aquisição e número de pontos de aquisição (ou período de aquisição).
7. *Tratamento dos dados.*
8. *Apresentação dos dados.*
9. *Análise de erro.*

6.3 Medição das características turbulentas com o anemômetro de fio- quente

Até os anos 50, a turbulência estava atrelada a um processo totalmente aleatório, cuja única caracterização era estatística. Um escoamento turbulento era visto como composto por um campo de velocidades médias superposto a um campo de velocidades flutuantes turbulentas. A noção de turbilhão era utilizada para modelar os termos turbulentos, sem qualquer idéia da organização e da estrutura da turbulência.

A visualização e o desenvolvimento de instrumentos capazes de medir velocidades instantâneas modificou os conceitos sobre turbulência. Os primeiros resultados mostravam um certo grau de organização, em total contradição a um processo puramente aleatório. Logo a Anemometria de Fio-Quente permitiu a medição e a detecção de todos os componentes da turbulência, até as escalas de comprimento de dissipação, incluindo as estruturas organizadas imersas na turbulência. Daí, muitos artigos de referência em turbulência são baseados em experimentos realizados apenas com a Anemometria de Fio-Quente . Começando por Corrsin e Kistler (1955) , chegamos a uma lista muito extensa, cuja podemos destacar alguns: Coles (1956) , Corrsin (1963) , Fiedler e Head (1966) , Wygnanski e Fiedler (1969) , Antonia (1971) , Bradshaw (1971) , Bruun (1971) , Comte-bellot e Corrsin (1971) , Hussain (1983) , Castro (1985) , Heywood (1987) .

6.3.1 Sensibilidade direcional

A sensibilidade de um sensor de fio- quente possui uma direção privilegiada: o plano perpendicular ao fio. Seja um anemômetro de fio- quente suposto responder a uma lei de potência da forma

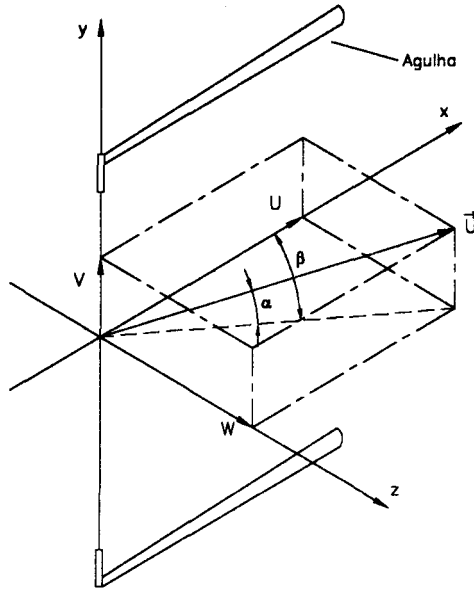


Figure 6.5: Sistema de coordenadas e componentes de velocidade correspondentes.

$$E^2 = A + BU_e^n, \tag{6.22}$$

onde U_e é a velocidade efetiva a ser relacionada à velocidade \vec{U} . Para um sensor horizontal na direção \vec{x} (ver Figura 6.5) a velocidade efetiva exprime-se através da equação de Jorgensen's:

$$U_e^2 = U^2 + k^2V^2 + h^2W^2, \tag{6.23}$$

onde U , V e W são as três componentes de velocidade e k e h os coeficientes de sensibilidade de guinada (yaw) e de arfagem (pitch) do sensor. k e h devem também transcritos em termo de fatores relacionados ao escoamento e a geometria do sensor. Valores típicos de k e h são respetivamente 0.2 e 1.05.

Podemos adaptar a demonstração encontrada na referência Perry (1982) para determinar a sensibilidade de um fio a pequenas perturbações nas três componentes da velocidade. Suponhamos que o eixo do sensor esteja alinhado à velocidade média $\vec{U} = \vec{U}_x$ do escoamento ($\vec{V} = \vec{W} = 0$). As flutuações u' , v' e w' sobrepõem-se à velocidade média. A equação 6.23 se transforma, em uma primeira aproximação em

$$U_e = \bar{U} \left[1 + \frac{u'}{\bar{U}} + \frac{1}{2} \frac{u'^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{2} k^2 \frac{v'^2}{\bar{U}^2} + \frac{1}{2} h^2 \frac{w'^2}{\bar{U}^2} \right]. \tag{6.24}$$

As pequenas perturbações satisfazem $\frac{u'}{\bar{U}}, \frac{v'}{\bar{U}}, \frac{w'}{\bar{U}} \ll 1$, assim,

$$U_e = \bar{U} + u'. \tag{6.25}$$

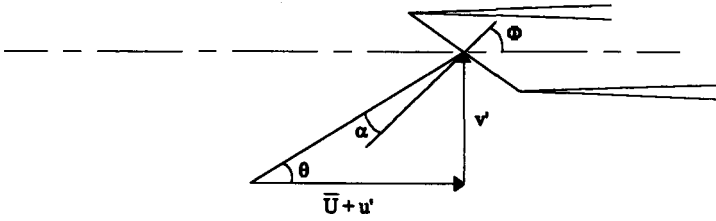


Figure 6.6: Sensibilidade angular de um fio-quente inclinado.

Substituindo em 6.22:

$$\left. \begin{aligned} E &= \left[A + B\bar{U}^n \left(1 + \frac{u'}{\bar{U}} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} \\ E &= \bar{E} + e' \\ \bar{E} &= (A + B\bar{U}^n)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

$$e' = \frac{nB\bar{U}^{1-n}}{2\bar{E}} u' = K_u u' \quad (6.27)$$

Um sensor de fio-quente alinhado com o escoamento médio é sensível, em primeira aproximação, apenas à componente u' das flutuações. O coeficiente de sensibilidade K_u é expresso na equação 6.27.

Fio inclinado:

Um fio-quente inclinado faz um ângulo ϕ com o escoamento médio $\bar{U} = \bar{U}_x$. O fio não é sensível à componente w' pelo mesmo motivo em que ele foi mostrado não ser sensível a um fio normal ao escoamento médio.

Seja U_N a projeção normal ao fio da velocidade, e U_L a projeção longitudinal da velocidade sobre o fio. Podemos escrever:

$$\left. \begin{aligned} U_N &= (\bar{U} + u') \cos \phi + v' \sin \phi \\ U_L &= (\bar{U} + u') \sin \phi - v' \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

$$U_e^2 = U_N^2 + k^2 U_L^2 \quad (6.29)$$

lembrando-se que $\frac{u'}{\bar{U}}$ e $\frac{v'}{\bar{U}} \ll 1$, a combinação de 6.29 com 6.29 fornece:

$$U_e = \bar{U} \cos \phi \left(1 + k^2 \tan^2 \phi \right) \left(1 + \frac{u'}{\bar{U}} + \frac{(1-k)^2 \tan \phi v'}{1 + k^2 \tan^2 \phi \bar{U}} \right) \quad (6.30)$$

substituindo 6.30 em 6.22 temos:

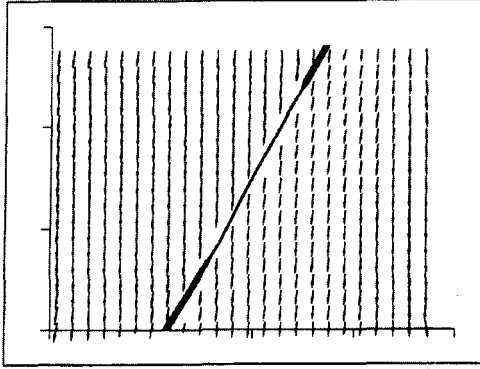


Figure 6.7: Campo de velocidade ao redor de um fio-quente inclinado, $Re = 3.7$. (Graham *et al.*, 1995)

$$E = \bar{E} + e' \quad (6.31)$$

$$\bar{E}^2 = A + B'\bar{U}^n \quad (6.32)$$

$$B' = B \cos^n \phi (1 + k^2 \tan^2 \phi)^{\frac{n}{2}} \quad (6.33)$$

$$e' = K_u u' + K_v v' \quad (6.34)$$

$$K_u = \frac{nB'}{2\bar{E}_0 (\bar{U})^{1-n}} \quad (6.35)$$

$$K_v = \frac{(1 - k^2) \tan \phi}{2\bar{E}_0 (\bar{U})^{1-n} (1 + k^2 \tan^2 \phi)} \quad (6.36)$$

Esta lei de calibração de um fio inclinado possui várias constantes a serem determinadas. A constante B' pode ser determinada por uma interpolação linear dos dados experimentais $(\bar{E}^2, (\bar{U})^n)$. Para calcular K_v , precisa-se determinar os valores de k e ϕ . Devido ao tamanho do sensor, a medição do ângulo ϕ é muito delicada; aconselha-se, portanto a se determinar ϕ na calibração.

Num estudo recente Graham *et al.* (1995) estudaram o escoamento ao redor de um fio-quente inclinado. Este trabalho experimental baseia-se na velocimetria por imagens de partículas ou PIV (Particle Image velocimetry). Eles concluíram que o parâmetro relevante é k^2 e não k , pois o valor de k^2 pode ser negativo. A técnica PIV mostra um efeito de deflexão do vetor velocidade ao chegar no fio (ver figura 6.7; o escoamento tende a desviar-se na direção do fio. A deflexão pode alcançar 3° . O efeito direto é a diminuição da velocidade efetiva de resfriamento do fio, modificando o coeficiente de correção k^2 para valores negativos. Assim, durante a calibração de um fio-quente inclinado, precisa-se determinar as constantes B' , ϕ e k^2 .

6.3.2 Tensor de Reynolds

A tensão de cisalhamento de Reynolds, $\overline{u'v'}$, pode ser medida com apenas um fio-quente inclinado. Duas medições sucessivas são realizadas com o fio vertical, e depois de uma rotação

de 180° do fio sobre o eixo do sensor. Um único fio-quente fornece assim dois sinais:

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= K_u u' + K_v v', \\ e'_2 &= K_u u' - K_v v'. \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

A tensão de cisalhamento de Reynolds é obtida pelo tratamento desses sinais:

$$\overline{u'v'} = \frac{\overline{e_1'^2} - \overline{e_2'^2}}{4K_u K_v}. \quad (6.38)$$

Para medir as tensões normais $\overline{u'^2}$ e $\overline{v'^2}$ o operador precisa de dois fios, ou de um par de fios-quentes cruzados. Porém, dois fios nunca são perfeitamente idênticos. Precisa-se, neste caso, determinar quatro coeficientes de sensibilidade, todos positivos

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= K_{u1} u' + K_{v1} v', \\ e'_2 &= K_{u2} u' - K_{v2} v'. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Desta vez, as tensões de Reynolds são calculadas a partir de:

$$\overline{u'^2} = \frac{\overline{[K_{v2} e'_1 + K_{v1} e'_2]^2}}{K_{u1} K_{v2} + K_{v1} K_{u2}}. \quad (6.40)$$

$$\overline{v'^2} = \frac{\overline{[K_{u2} e'_1 + K_{u1} e'_2]^2}}{K_{u1} K_{v2} + K_{v1} K_{u2}}. \quad (6.41)$$

$$\overline{u'v'} = \frac{K_{v2} K_{u2} \overline{e_1'^2} + e_1' e_2' (K_{v1} K_{u2} - K_{u1} K_{v2}) - K_{u1} K_{v1} \overline{e_2'^2}}{(K_{u1} K_{v2} + K_{v1} K_{u2})^2}. \quad (6.42)$$

6.3.3 Sensor Tri-componentes

A medição das três componentes de velocidades médias e flutuantes pode ser alcançada com sensores industriais. Lakshminarayana *et al.* (1982) publicou uma revisão dos sensores tri-componentes existentes e das técnicas de redução de dados adequadas. Dois sensores apresentaram a menor perturbação aerodinâmica, sendo compostos de três fios: um da TSI, modelo 1299-20-18, e o outro da DANTEC, modelo 55P91 (ver Figura 6.2).

Uma das limitações desse tipo de medição é a seguinte: os sinais fornecidos pelos três anemômetros devem ser adquiridos simultaneamente pelo conversor A/D e pelo gravador. A frequência de aquisição pode alcançar 150 kHz por canal no caso de escoamentos compressíveis a altas velocidades. Nos casos gerais, a frequência pode ser limitada a 50 kHz por canal. Mesmo assim, o equipamento experimental de medição é de alta tecnologia e de custo elevado.

6.3.4 Medições simultâneas

Inicialmente divulgadas por Blackwelder e Kaplan, as escovas de fios-quentes foram rapidamente desenvolvidas. Até 250 fios chegaram a ser implementados em um experimento em andamento na Universidade de Buffalo. As limitações não são mais a capacidade de aquisição e de armazenagem de dados, mas, sim, a influência aerodinâmica dos sensores. Este tipo de medição abre as portas para várias técnicas de análise e tratamento de dados específicas:

- Reconhecimento de forma (Patern Recognition). Consiste em projetar o campo de velocidades instantâneo sobre um plano espaço-tempo para conseguir uma visualização dos turbilhões mais simples e completa.
- Correlações espaço-temporais multi-pontos, até multi-componentes. Medição do tensor de Reynolds.
- Amostragem condicional (Condicional Sampling). Detecção das estruturas “organizadas” no escoamento cujas características são reconhecíveis no campo de velocidade, por exemplo a vorticidade.
- Transformação por ondeletes. Tratamento de dados espectral num domínio espaço-temporal.
- Decomposição Ortogonal Própria ou decomposição em autovalores (POD Proper Orthogonal Decomposição) com informação de fase. Consiste em projetar o campo de velocidades instantâneo sobre uma base de auto vetores determinísticos. Essa base é composta de modos coerentes, não correlacionados entre si no senso da energia (Lumley, 1967 . Delville (1995)).

6.3.5 Intensidades turbulentas

A descrição estatística de um escoamento turbulento se exprime sob a forma de quantidades médias, cujos valores possuem um alto grau de repetibilidade sob condições experimentais idênticas. O valor instantâneo da velocidade é, por si mesmo, de pouco interesse: ele não fornece nenhuma indicação sobre a velocidade no mesmo ponto em um instante diferente, ou num outro ponto no mesmo instante. Ao contrário, a velocidade média em pontos com localização geométrica idêntica é sempre a mesma (por exemplo na mesma distância da fonte de um jato livre turbulento e na mesma distância do eixo do jato).

O primeiro passo na análise estatística de um escoamento turbulento consiste em aplicar a decomposição de Reynolds na velocidade $U = \bar{U} + u'$, isto já foi visto em seções anteriores. É preciso notar que, nas medições com um fio-quente, esta decomposição é geralmente aplicada logo na aquisição dos sinais fornecidos pelos anemômetros. Isto permite aumentar a precisão das medições: se o escoamento for pouco turbulento, as flutuações de velocidade são pequenas comparadas ao valor médio medido. Os conversores A/N possuem uma resolução em tensão fixa (tipicamente 2mV por 12 bits e resolução), sendo recomendável medir as velocidades média e flutuante com ganho próprio.

Existem também outros tipos de decomposição do campo de velocidade como por exemplo $U = \bar{U} + u' + u''$, u' caracterizando as grandes estruturas e u'' caracterizando as pequenas estruturas. Porém, a primeira é a mais comum.

Seja σ^2 a variância da velocidade U ,

$$\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}, \quad (6.43)$$

é conhecido como a intensidade turbulenta. Expressa-se em geral a intensidade turbulenta em porcentagem do valor médio da velocidade. Para não prejudicar esta medição lembramos que nenhum filtro espectral passa baixo deve ser utilizado, sendo, que, qualquer frequência pode

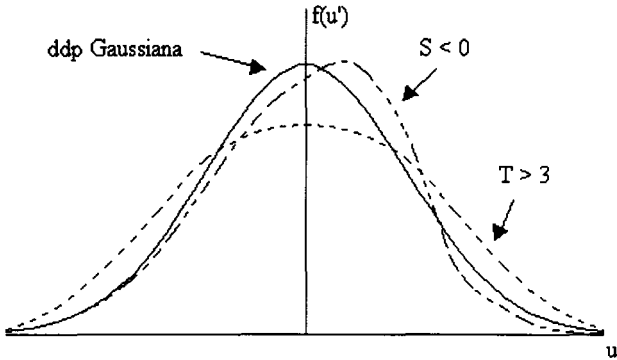


Figure 6.8: Efeito dos momentos de terceiro e quarto ordem.

possuir alguma influência sobre a turbulência. Lembramos também uma limitação da utilização do fio-quente para intensidades turbulentas inferiores a 30% devido à falta de sensibilidade do sensor à direção da velocidade. Por exemplo, velocidades positivas ou negativas possuem a mesma potencialidade de resfriamento sobre o sensor, impedindo o investigador de diferenciá-las.

A ordem de grandeza da intensidade turbulenta é:

- 0.05% a 0.1% em túneis de vento aeronáuticos;
- 0.1% a 0.3% em túneis de vento de laboratório;
- 3% (escoamento livre) a 20% (parede) em escoamento de camada limite;
- 0.05% (eixo) a 0.1% (limite externa) em jatos livres.

A raiz quadrada da variância, σ , é o familiar desvio padrão da amostra. $\overline{u'^2}$ é o momento de segunda ordem da distribuição dos valores u' medidos. Chama-se também de distribuição de probabilidade, e se u' for contínuo, falamos da função de densidade de probabilidade. Supondo $v' = w' = 0$, o valor de σ^2 não pode ser influenciado pela falta de simetria da distribuição dos valores de u' medidos. Enquanto isso, o terceiro momento $\overline{u'^3}$ caracteriza a simetria da distribuição. Definimos o coeficiente de assimetria S (Skewness) e o coeficiente de achatamento T (flatness ou Kurtosis) por:

$$S = \frac{\overline{u'^3}}{\left(\overline{u'^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.44)$$

$$T = \frac{\overline{u'^4}}{\left(\overline{u'^2}\right)^2} \quad (6.45)$$

Se a distribuição medida for Gaussiana $S = 0$ e $T = 3$.

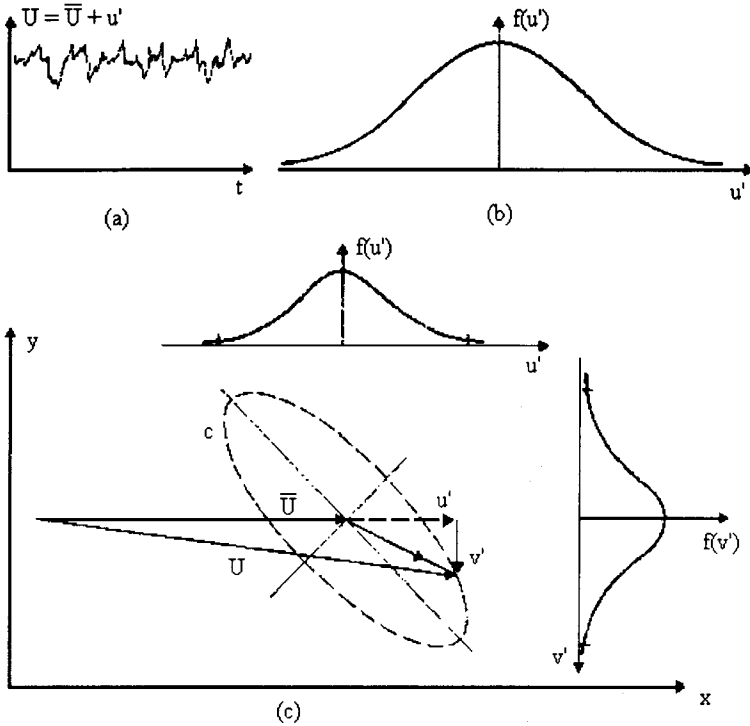


Figure 6.9: Variações aleatórias de velocidade instantânea: (a) velocidade instantânea em função do tempo, (b) a função de densidade de probabilidade correspondente e (c) a correlação das componentes u e v instantâneas da velocidade (Radkivi e Callander, 1975).

6.3.6 Correlações espaciais e temporais

As funções de distribuição de probabilidade são, às vezes, determinadas experimentalmente, mas muito mais freqüentemente através do cálculo do valor médio das quantidades medidas. Mais informações sobre as flutuações em um ponto provém de $\overline{u'^2}$, $\overline{u'^3}$, $\overline{u'^4}$, etc.

A Figura 6.9 mostra um sinal temporal de velocidade (a) e a sua função de densidade de probabilidade correspondente (b). Se a variação de velocidade é aleatória, a função de densidade de probabilidade aproxima-se de uma Gaussiana. Para duas componentes de velocidade, as funções de densidade de probabilidade definem um domínio de maior ocorrência da soma das flutuações $u' + v'$. O limite deste domínio é representado pela curva (c) da Figura 6.9(c). Se não existe nenhuma relação entre as duas componentes de velocidade, a curva c formará um círculo. Se uma relação linear existe entre elas, a curva c formará uma reta. A função de correlação entre as duas velocidades caracteriza a forma da curva c.

Informações sobre as flutuações de velocidades em diferentes pontos e/ou diferentes instantes são fornecidas pela medição de correlações. A correlação entre duas velocidades flutuantes u'_i e u'_j é definida por $\overline{u'_i u'_j}$, enquanto o coeficiente de correlação é dado por:

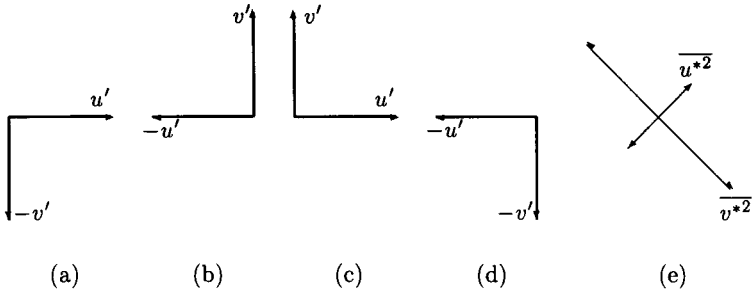


Figure 6.10: Interpretação geométrica das tensões de Reynolds.

$$R = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\sqrt{\overline{u'^2_i}} \sqrt{\overline{u'^2_j}}}. \quad (6.46)$$

Nesta definição, u'_i e u'_j são quantidades quaisquer. Por exemplo, podem ser valores simultâneos de uma componente de velocidade em dois pontos diferentes, ou duas componentes diferentes de velocidade no mesmo ponto. Podem ser também valores de uma componente de velocidade no mesmo ponto em instantes diferentes, ou qualquer combinação desejada. Se as duas velocidades são interdependentes $R \sim \pm 1$. Ao contrário, se não possuem dependência nenhuma entre as duas velocidades, a correlação será nula. Por exemplo, as tensões de Reynolds $-\rho \overline{u'v'}$ provém da correlação de duas componentes de velocidade flutuante no mesmo ponto. Se $\overline{u'v'}$ for negativo, quando u' for negativo, v' possui uma tendência a ser negativo, e vice-versa.

Inclinando as coordenadas x, y de 45° podemos mostrar que isso corresponde a uma anisotropia da turbulência: intensidades diferentes em direções diferentes. Seja

$$u^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(u' + v'), \quad (6.47)$$

$$v^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(u' - v'), \quad (6.48)$$

temos

$$\overline{uv} = \frac{1}{2} (\overline{u^{*2}} - \overline{v^{*2}}). \quad (6.49)$$

A Figura 6.10 mostra que se as configurações das flutuações de velocidade ocorrem mais do modo (a) e (b) do que dos modos (c) e (d), fornecendo um \overline{uv} negativo, $\overline{v^{*2}}$ será maior do que $\overline{u^{*2}}$, como desenhado em (e). Uma correlação deste tipo pode claramente corresponder a um escoamento cisalhante.

A função de correlação espacial entre duas velocidades flutuantes é definida pela função de correlação:

$$\mathfrak{R}_{ij}(\vec{r}, t) = \int_D U_i(\vec{x}, t) U_j(\vec{x} + \vec{r}, t) d\vec{x}, \quad (6.50)$$

onde D é o domínio dos valores de \vec{x} . Se este domínio for discreto, a função de correlação espacial é definida por:

$$\mathfrak{R}_{ij}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{x}} U_i(\vec{x}, t) U_j(\vec{x} + \vec{r}, t). \quad (6.51)$$

Este tipo de correlação é utilizada em turbulência homogênea, já que as densidades de probabilidades da velocidade não dependem do ponto de medição mas sim da distância entre os dois pontos de medição. As correlações espaciais permitem definir escalas integrais de comprimento longitudinal L_l e transversal L_t do escoamento, relacionadas ao tamanho das grandes estruturas:

$$L_l = \int_0^\infty \frac{\mathfrak{R}_{11}(r)}{\sigma_{11}} dr, \quad (6.52)$$

$$L_t = \int_0^\infty \frac{\mathfrak{R}_{22}(r)}{\sigma_{22}} dr. \quad (6.53)$$

A função de correlação espacial resulta de um tratamento de dois sinais de velocidade adquiridos simultaneamente. Precisa-se então de dois anemômetros de fio-quente funcionando em conjunto. Já a função de auto-correlação temporal pode ser obtida com um anemômetro de fio-quente só; ela constitui-se em uma correlação temporal de um sinal com ele mesmo. Ela caracteriza a sua dependência em um determinado instante dos valores de velocidade em outros instantes, e pode ser utilizada para definir uma escala de tempo característica da turbulência. De maneira mais geral, define-se a função de correlação temporal entre duas velocidades flutuantes, como:

$$R_{ij}(\tau, \vec{x}) = \int_0^\infty U_i(\vec{x}, t) U_j(\vec{x}, t + \tau) dt. \quad (6.54)$$

Se o domínio das realizações das velocidades for discreto, a função de correlação temporal é definida por

$$R_{ij}(\tau, \vec{x}) = \sum_t U_i(\vec{x}, t) U_j(\vec{x}, t + \tau). \quad (6.55)$$

Seja R_{ii} a função de auto-correlação temporal da velocidade U_i e σ_i^2 a sua variância, o tempo integral correspondente

$$T = \int_0^\infty \frac{R_{ii}(\tau, \vec{x})}{\sigma_i^2} d\tau, \quad (6.56)$$

é uma medição do período de tempo no qual as velocidades $U(t)$ e $U(t + \tau)$ são correlacionadas. As duas velocidades podem ser consideradas não correlacionadas de um ponto de vista estatístico se $\tau \geq 2T$. $2T$ define o intervalo de tempo ótimo entre duas medições sucessivas. Isso assegura a aquisição de uma amostra de pontos não correlacionados e otimiza o tratamento estatístico futuro. A correlação temporal é utilizada em um escoamento turbulento estacionário, já que as densidades de probabilidades não dependem do instante de medição mas sim do intervalo de tempo que separa as duas medições.

Se um movimento turbulento se superpõe à uma velocidade média alta do escoamento, a turbulência pode ser convectada pelo ponto de observação, ou de medida, mais rapidamente que a evolução das flutuações. Esta condição corresponde a hipótese de Taylor, possibilitando se transformar uma correlação temporal em uma correlação espacial na direção do escoamento médio. O parâmetro de tempo τ é substituído pelo parâmetro espacial r , onde $\tau = r/U$. Considerando a hipótese de Taylor, a escala integral de comprimento L_l pode ser estimada a partir de

$$L_l = \bar{U}T. \quad (6.57)$$

Em um recente trabalho de revisão sobre escoamentos turbulentos e sua modelagem, Bradshaw (1996) declara que a contribuição do estudo das estruturas coerentes sobre o desenvolvimento dos métodos de medição da turbulência foi muito pequena, de certo modo desapontadora. Apenas Goldshtik e Hussain (1995) desenvolveu um trabalho interessante para as camada de mistura. Até agora, a análise das estruturas coerentes se concentra mais na qualificação e na quantificação do nível de organização da turbulência. A maior parte destas análises baseia-se nas correlações de velocidade, e de maneira mais global, nas correlações espaço-temporais

$$\Re_{ij}(\vec{r}, \tau, \vec{x}, t) = \int_D \int_0^\infty U_i(\vec{x}, t) U_j(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau) d\vec{x} dt, \quad (6.58)$$

com D o domínio das valores de \vec{x} . Se este domínio for discreto, a função de correlação espacial é definida por

$$\Re_{ij}(\vec{r}, \tau, \vec{x}, t) = \sum_{\vec{x}} \sum_t U_i(\vec{x}, t) U_j(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau). \quad (6.59)$$

A medição das velocidades deve ser simultânea em vários pontos diferentes. As escovas de fios-quentes são particularmente eficientes neste aspecto.

São também de grande interesse as correlações envolvendo flutuações de pressão, pois o termo $\overline{p'v'}$ encontrado nas equações de Navier-Stokes é de difícil modelagem. Estas quantidades, por serem muito difíceis de ser medidas, foram ainda pouco exploradas.

O conceito de correlações, da mesma maneira que o conceito de distribuições de probabilidade, pode ser estendido para maiores ordens, definindo-se quantidades do tipo $\overline{u'_i u'_j v'_k}$. Tritton (1988) lembra que a completa especificação da turbulência requer considerar as ordens superiores até o infinito. Por exemplo, a equação da energia cinética turbulenta possui correlações triplas de velocidades que representam o transporte de energia turbulenta ou de fluxo de quantidade de movimento: são termos de difusão turbulenta; num escoamento de camada limite, os termos $\overline{u'^2 v'}$ ou $\overline{u' v'^2}$ representam o fluxo turbulento vertical ou horizontal das tensões de cisalhamento.

6.3.7 Análise espectral

Vários escoamentos turbulentos contém fenômenos periódicos, detectáveis por análise espectral. Bendat e Piersol (1986) apresentam uma descrição das definições e do cálculo das funções de densidade de probabilidade espectral, a serem reproduzidas aqui.

Seja \hat{U} a transformada de Fourier da velocidade U .

$$\hat{U}(f, T) = \int_0^T U(t) e^{-2\pi f t} dt \quad (6.60)$$

A função de densidade auto-espectral limitada à T é definida por:

$$S_{uu}(f, T) = \frac{1}{T} \hat{U}^*(f, T) \hat{U}(f, T), \quad (6.61)$$

sendo $\hat{U}^*(f, T)$ o conjugado complexo de $\hat{U}(f, T)$. A função de densidade auto-espectral escreve-se:

$$S_{uu}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E [S_{uu}(f, T)], \quad (6.62)$$

onde $E [S_{uu}(f, T)]$ é a esperança matemática do conjunto das realizações $S_{uu}(f, T)$. Portanto, a função de densidade auto-espectral se define somente na faixa de frequências positivas e assim

$$S_{uu}(f) = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} E [S_{uu}(f, T)]. \quad (6.63)$$

Finalmente, a função de densidade auto-espectral é fornecida por:

$$S_{uu}(f) = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[|\hat{U}(f, T)|^2 \right]. \quad (6.64)$$

No limite quando T tende ao infinito, demonstra-se que a função de densidade auto-espectral pode ser calculada também a partir das correlações temporais:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E [S_{uu}(f, T)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau. \quad (6.65)$$

A estimativa do espectro no caso da medição durante um período finito é dada por:

$$S_{uu}(f) = \frac{2}{T} |\hat{U}(f, T)|^2. \quad (6.66)$$

A função de densidade espectral cruzada de duas velocidades possui a forma:

$$S_{uv}(f) = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\hat{U}^*(f, T) \hat{V}(f, T) \right]. \quad (6.67)$$

6.4 Medição de temperatura e de concentração

A medição de flutuações de temperatura em um escoamento é uma informação difícil de se obter. O anemômetro de fio-quente é um instrumento cuja resposta é muito rápida e, devido a sua sensibilidade à temperatura do fluido, pode ser adaptado para medição de flutuações de temperatura. Dois métodos eficientes e já amplamente utilizados serão descritos nesta seção.

6.4.1 Medição de temperatura por sensor duplo

A resposta de um anemômetro de fio-quente depende de duas variáveis, U e $T_f - T_a$, ou seja, da velocidade instantânea e da diferença de temperatura entre o fio T_f e o escoamento ambiente T_a . A técnica, portanto, propõe utilizar dois anemômetros com fios-quentes paralelos e com diferentes sensibilidades à temperatura e à velocidade. Os dois fios são considerados estar tão próximos que permanecem expostos às mesmas velocidade e temperatura instantâneas do escoamento.

Com anemômetros a temperatura constante, obtemos duas equações a duas incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} E_1^2 &= (A_1 + B_1 U^n) (T_{f1} - T_a), \\ E_2^2 &= (A_2 + B_2 U^n) (T_{f2} - T_a). \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

ou, como as temperaturas dos fios são constantes, podemos utilizar

$$\left. \begin{aligned} E_1^2 &= c_1 + c_2 T_a + (c_3 + c_4 T_a) U^n, \\ E_2^2 &= d_1 + d_2 T_a + (d_3 + d_4 T_a) U^n. \end{aligned} \right\} \quad (6.69)$$

e, eliminando U^n , obtemos uma equação de segunda ordem para T_a :

$$f_2 T_a^2 + f_1 T_a + f_0 = 0. \quad (6.70)$$

onde f_0 , f_1 e f_2 são constantes que dependem das constantes de calibração e das tensões fornecidas pelos anemômetros $E_1(t)$ e $E_2(t)$. Calculado $T_a(t)$, uma das equações 6.69 fornece $U(t)$. Uma única componente de velocidade é tratada e a calibração é bastante simplificada. Isto é um método eficiente e simples de medir tanto a velocidade flutuante quanto a temperatura flutuante. Lienhard e Helland (1989) utilizaram este tipo de sensor; eles utilizaram uma lei de calibração um pouco diferente. A conclusão obtida foi que este tipo de sensor funciona muito bem num escoamento com altas flutuações de temperatura. Portanto, a análise espectral de dados experimentais é fortemente maculada por ruído se as flutuações de temperatura são fracas. Neste caso, estes autores recomendam a utilização do método do fio resistente.

6.4.2 Medição de temperatura por fio resistente

Um fio muito fino posto para funcionar em modo Corrente Constante com baixo coeficiente de superaquecimento é freqüentemente chamado de fio frio. A limitação deste método reside no tempo de resposta da medição devido à inércia térmica do fio. Utiliza-se em geral um fio do tipo Wollaston, cujo diâmetro pode alcançar $0.25 \mu m$. Para o menor diâmetro, a freqüência de corte do instrumento chega a $10 kHz$, caindo para $1 kHz$ se o fio possui um diâmetro de $2.5 \mu m$.

Ao contrário do modo temperatura constante, a taxa de transferência de calor por acumulação não é mais desprezível na equação 6.2.

Seja R_a a resistência do fio possuindo a temperatura do fluido. A resposta do fio pode ser expressa a partir da equação 6.7 transformada:

$$I^2 R_f = (R_f - R_a)(A + BU^n) + \rho_f c_f A_f \frac{T_f}{\delta t}. \quad (6.71)$$

Expressando T_f em função de R_f e utilizando $Nu = A + BU^n$, mostramos que a resistência do fio satisfaz uma equação de segunda ordem,

$$M \frac{dR_f}{dt} + R_f = R_a \frac{\pi l k Nu}{\pi l k Nu - I^2 \alpha_{20} R_{20}}, \quad (6.72)$$

com a constante de tempo,

$$M = \frac{\rho_f c_f (\pi/4) d^2 l}{\pi l k Nu - I^2 \alpha_{20} R_{20}}. \quad (6.73)$$

Portanto, a tensão nas bordas do fio expressa-se, como $E = IR_f$,

$$M \frac{dE}{dt} + E = IR_a \frac{\pi l k Nu}{\pi l k Nu - I^2 \alpha_{20} R_{20}}. \quad (6.74)$$

Um fio ideal, sem inércia térmica ($M = 0$), teria uma resposta E_T da forma

$$E_T = IR_a \frac{\pi l k Nu}{\pi l k Nu - I^2 \alpha_{20} R_{20}}. \quad (6.75)$$

Substituindo 6.75 em 6.74

$$M \frac{dE}{dt} + E = E_T. \quad (6.76)$$

Se o coeficiente de superaquecimento for baixo, a corrente I será pequena e $E_T = IR_a$. E_T acaba sendo uma medição direta de R_a e também da temperatura do fluido. Em uma segunda aproximação, E_T pode ser calculado simplesmente a partir da medição de $E(t)$ e do conhecimento do valor de M . Entretanto, a determinação de M não é trivial, e depende da velocidade do escoamento. Esta dependência é significativa nas medições onde a velocidade média varia, por exemplo, em camadas limite. A correção do valor de $M(U)$ pode ser realizada através de uma medição simultânea de um fio-frio e de um fio-quente. Essas medições duplas mostraram ser de grande qualidade (Bremhorst e Graham, 1990).

6.4.3 Medição de concentração por sensor único

A Anemometria de Fio-Quente pode ser também utilizada para a medição de concentração em escoamentos de mistura de gás. Mc Quaid e Wright (1973) apresentaram um método que utiliza um sensor de fio- quente. O ar, a mistura e o gás são supostos responder de uma forma análoga por:

$$E_a^2 = A_a + B_a U^n, \quad (6.77)$$

$$E_m^2 = A_m + B_m U^n, \quad (6.78)$$

$$E_g^2 = A_g + B_g U^n, \quad (6.79)$$

onde os índices a , m e g correspondem ao ar, à mistura e ao gás. As constantes A_m e B_m dependem do valor da concentração. Eles chegaram à conclusão, através de uma calibração, que a função ψ definida por

$$\psi = \frac{\overline{E_m^2} - \overline{E_a^2}}{\overline{E_g^2} - \overline{E_a^2}}, \quad (6.80)$$

não depende da velocidade mas apenas do valor médio da concentração $\bar{\Gamma}$.

$$\psi(\bar{\Gamma}) = (1 + c)\bar{\Gamma} - c\bar{\Gamma}^2. \quad (6.81)$$

O valor da constante c , dependente do coeficiente de superaquecimento, é determinado por ajuste da curva de calibração.

Sejam as decomposições $E = \bar{E} + e$, $U = \bar{U} + u$ e $\Gamma = \bar{\Gamma} + \gamma$, a resposta do anemômetro a flutuações de velocidade e de concentração pode ser escrita como:

$$e = S_u u + S_\gamma \gamma, \quad (6.82)$$

$$\text{com } S_u = \frac{n(\overline{E_m^2} - A_m)}{2\overline{E_m}U}, \quad (6.83)$$

$$S_\gamma = \psi(\bar{\Gamma}) \frac{\overline{E_g^2} - \overline{E_a^2}}{2\overline{E_m}}, \quad (6.84)$$

$$\text{e } \psi(\bar{\Gamma}) = (1 + c) - 2c\bar{\Gamma}. \quad (6.85)$$

Ora, dois métodos foram aplicadas para resolver este sistema de equações: o primeiro utiliza um fio- quente funcionando com vários coeficientes de superaquecimento; o outro, consiste em medir a resposta de dois fios-quentes simultaneamente, com sensibilidades a velocidade S_u e a concentração S_γ diferentes. Os dois métodos foram tratados por Mc Quaid e Wright (1973).

6.4.4 Medição de concentração por sensor duplo

Um método especialmente adaptado para misturas de ar com hélio foi utilizado por Way e Libby (1970). Um fio- quente de platina de $2.5\mu\text{m}$ de diâmetro é fixo perpendicularmente, e à frente, de um filme- quente cilíndrico. Os sensores são próximos a fim de capturar qualquer

interação entre os campos térmicos. Esta interferência implica em uma grande sensibilidade dos sensores à concentração. As leis de calibração dos dois sensores podem ser expressas por:

$$E_f^2 = A_f(\Gamma) + B_f(\Gamma)U^{1/2}, \quad (6.86)$$

$$E_{fm}^2 = A_{fm}(\Gamma) + B_{fm}(\Gamma)U^{1/2} \quad (6.87)$$

Os índices f e fm se referem, respectivamente, ao fio-quente e ao filme-quente. As constantes, funções da concentração, são determinadas através de uma calibração. A eliminação da velocidade U entre as duas equações fornece uma relação entre Γ e as tensões medidas. As constantes A e B dependem levemente da concentração, o que resulta um valor de Γ pouco preciso. Way e Libby (1970) descobriram que a sensibilidade à concentração aumenta drasticamente se os dois campos térmicos se interferem. Por isso, a distância entre os dois sensores é variada até $0.05mm$. Assim a relação $E_f^2 = a(\Gamma) + bn(\Gamma)E_{fm}^2$ fornece uma solução simples de determinação da concentração.

6.5 Medição de escoamentos com separação e recirculação – a técnica de anemometria de fio-quente pulsátil

A ambigüidade na direção da velocidade medida por um anemômetro de fio-quente padrão impede a sua utilização em várias aplicações práticas: alta turbulência, escoamentos rotativos, ao redor de obstáculos, com separação ou com expansão súbita. Dos anemômetros de fio-quente sensíveis à direção do escoamento, dois foram amplamente utilizados: a técnica do anemômetro de fio-quente em movimento e a técnica do anemômetro de fio-quente pulsátil.

Payne e Lumley (1966) mediram a turbulência atmosférica com um anemômetro de fio-quente instalado a um aeroplano. Esta técnica foi depois bastante utilizada em laboratório para a medição de escoamentos com recirculação. Para maiores detalhes sobre a técnica o leitor pode consultar Bruun (1995), Perry (1982), Sirivat (1989) ou ainda Dinsdale *et al.*(1988).

Agora, concentramos a nossa apresentação na técnica da anemometria de fio-quente pulsátil.

Um fio muito fino, aquecido por um pulso, é colocado perpendicularmente entre dois fios sensores (veja a Figura 6.11). O método consiste em medir o intervalo de tempo necessário para um pulso de calor alcançar um fio sensor. Esta duração é relacionada à velocidade instantânea do fluido. Com dois fios, um à frente e um atrás do fio pulsátil, a direção e a intensidade da velocidade instantânea podem ser determinadas.

Em 1965 Bauer foi o primeiro a utilizar a técnica do fio pulsátil (Bruun, 1995). Um só fio sensor era colocado em paralelo ao fio pulsátil. Infelizmente, essa técnica era limitada aos escoamentos laminares. Bradbury (1969) e Tombach (1969) foram os primeiros a desenvolver, separadamente e em paralelo, o fio pulsátil com a configuração de três fios, dando assim acesso à medição da direção da velocidade para a Anemometria de Fio-Quente. Bradbury e Castro (1971) fizeram uma ampla análise da técnica. O desenvolvimento de novos sensores foi descrito por Bradbury (1976), Jaroch (1985) e Jaroch e Dahm (1988). Handford e Castro (1989), Castro (1991) e Bruun (1995) publicaram artigos de revisão sobre a técnica.

No caso ideal, a inércia térmica do fio pulsado é nula e a difusão térmica e os efeitos de esteira viscosa são pequenos. Seja h a distância entre o fio pulsátil e um fio sensor e \bar{U} a

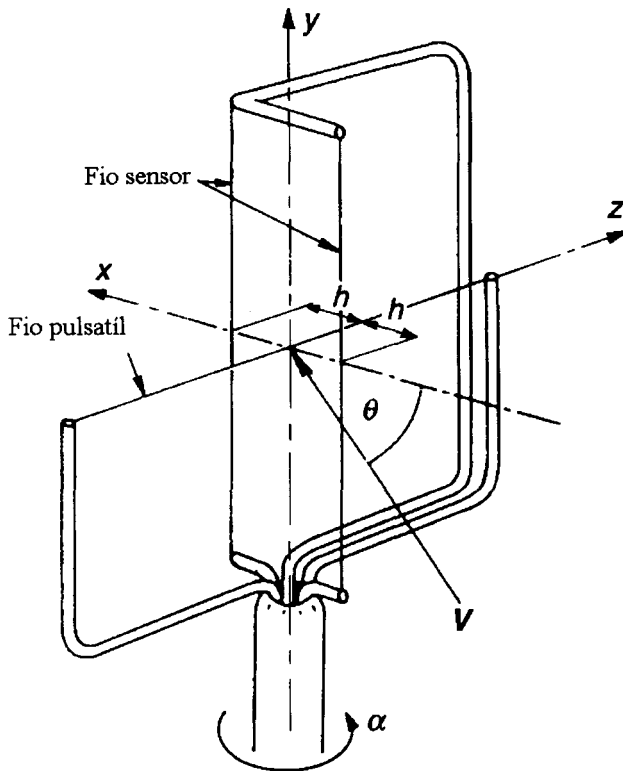


Figure 6.11: Sensor de anemômetro de fio-quente pulsátil, tipo Bradbury-Castro.

velocidade instantânea do fluido, o tempo T para o fluxo de calor passar do fio pulsátil a um fio sensor, ou tempo de viagem é:

$$T = \frac{h}{U \cos \theta}. \quad (6.88)$$

Entretanto, as condições reais, claro, não são ideais, e numa primeira aproximação supomos a difusão térmica desprezível. Os dois fios sensores são supostos colocados na direção do escoamento médio. Precisamos descrever primeiro o comportamento do fio pulsátil e depois a resposta dos fios sensores. A equação 6.2 se simplifica para

$$I^2 R_f = \frac{E_f^2}{R_f} = \rho_f c_f \frac{\pi}{4} d^2 l \frac{dT_f}{dt} + \pi k l N u (T_f - T_a). \quad (6.89)$$

A taxa de geração de calor elétrico é igual à taxa de calor armazenada no fio, mais a taxa de transferência de calor por convecção forçada. O fio pulsátil padrão possui um diâmetro de $5\mu m$ correspondente a uma constante de tempo M_p da ordem de $1ms$ até $5ms$. Este tempo é muito maior do que a duração do pulso de calor ($2 - 10\mu s$). O efeito da convecção forçada pode ser considerado desprezível. Substituindo a expressão de R_f da equação 6.3 na equação 6.89, a resposta do fio é fornecida por

$$\frac{E_f^2}{R_0[1 + \alpha_{20}(T_f - T_{20})]} = \rho_f c_f \frac{\pi}{4} d^2 l \frac{dT_f}{dt}. \quad (6.90)$$

Isto é uma equação diferencial de primeira ordem em T_f cuja valor máximo $T_{f,max}$ será atingido no final do pulso. A temperatura do fio pulsátil responde da forma

$$\frac{T_f - T_a}{T_{f,max} - T_a} = \exp(-t/M_p). \quad (6.91)$$

Para o fio resfriar entre dois pulsos, o período dos pulsos deve ser maior do que M_p . Valores de $70Hz$ até $100Hz$ são comumente utilizadas.

Resposta do fio sensor:

O fio funciona em modo Corrente Constante com baixas correntes de aquecimento. O termo de aquecimento elétrico da equação 6.89 pode ser desprezado. Bradbury e Castro (1971) analisam a resposta do fio sensor, assumindo a influência da difusão térmica e da esteira viscosa desprezíveis. Sob a influência de um pulso de calor, a temperatura do fio sensor T_s aumenta, ao longo do fio de comprimento l , modificando o valor da resistência R_s e da tensão E_s da forma

$$E_s - I R_a = I(R_s - R_a) = \frac{I R_{20} \alpha_{20}}{l} \int_{-l/2}^{l/2} (T_s - T_a) dy. \quad (6.92)$$

Seja M_s a constante de tempo do fio sensor, demonstra-se que a resposta em temperatura segue a relação,

$$\frac{\int_{-l/2}^{l/2} (T_s - T_a) dy}{(T_{p,max} - T_a)h} = \frac{\pi Nu_p}{Pe} \frac{M_p}{M_p - M_s} \left[\exp\left(-\frac{t - h/U}{M_p}\right) - \exp\left(-\frac{t - h/U}{M_s}\right) \right] H(h/U), \quad (6.93)$$

com $Pe = Uh/k$ o número de Peclet, Nu o número de Nusselt do fio pulsátil e $H(h/U)$ a função passo de Heaviside. A amplitude da resposta não depende da distância do sensor pulsátil, mas a resposta é descontínua para o atraso de tempo convectivo, $t = h/U$. Assim, sob a hipótese de não influência da difusão térmica e da esteira viscosa, esta característica da resposta é facilmente detectada e fornece uma medição simples do tempo de convecção; deste modo obtém-se facilmente a velocidade instantânea do fluido. O valor máximo da resposta ocorre no tempo

$$\frac{t}{M_s} = \frac{M_p}{M_p - M_s} \log \frac{M_p}{M_s} + \frac{h}{UM_s}, \quad (6.94)$$

e alcança o valor de

$$max \left(\frac{\int_{-l/2}^{l/2} (T_s - T_a) dy}{(T_{p,max} - T_a)h} \right) = \frac{\pi Nu_p}{Pe} \left(\frac{M_p}{M_s} \right)^{\frac{-M_s}{M_p - M_s}} \quad (6.95)$$

Este valor depende do quociente M_p/M_s . Porém, Corrsin (1963) estimou que a constante de tempo de um fio varia com $d^{3/2}$, dependência esta verificada se $d > 1\mu m$. Bruun (1995) mostra que a escolha do diâmetro do fio pulsátil d_s responde a um compromisso entre: 1) d_s alto para aumentar a resposta do fio sensor; 2) d_s pequeno para o fio resfriar entre dois pulsos e assim aumentar a frequência dos pulsos, a última condição também diminui o efeito da esteira viscosa. Um compromisso prático consiste a tomar um diâmetro de fio pulsátil de $5\mu m$, duas vezes maior do que o diâmetro do fio sensor. O valor máximo da resposta pode ser relacionado a $U^{-0.55}$ (Bradbury e Castro, 1971). Assim, o tempo de viagem pode ser determinado pelo limiar do sinal. Handford e Bradshaw (1989) propõem um corte a um terço do valor típico de um pico do sinal.

Para números de Peclet altos, o efeito da difusão térmica é quase nulo e a teoria concorda com os dados experimentais (Bradbury e Castro, 1971). O efeito da difusão é importante para números de Peclet inferiores a 50. Porém, o resultado teórico fornece uma boa aproximação qualitativa da resposta do fio sensor. Aliás, a calibração de um anemômetro de fio-quente pulsátil leva em consideração os efeitos da difusão térmica e da esteira viscosa.

Calibração de um anemômetro de fio-quente pulsátil:

A resposta em velocidade U de um fio-quente pulsátil em função do tempo de viagem T pode ser expressa por:

$$U = A/T + B/T^n. \quad (6.96)$$

Handford e Bradshaw (1989) compararam várias leis de calibração e mostraram que o valor da constante n pode ser definido igual a 2 ou a 3.

Medições com um anemômetro de fio-quente pulsátil:

O aquecimento impulsivo do fio pulsátil provoca um sinal eletromagnético agudo no fio sensor durante o tempo do pulso ($2 - 10\mu s$). Este efeito demora entre 50 e $100\mu s$ no fio sensor. A empresa PELA Flow Instruments Ltd. comercializa um circuito eletrônico para cancelar este efeito. O circuito corta o sinal de limiar durante um período de $100\mu s$ depois do pulso. A velocidade máxima que pode ser medida é igual ao quociente de h por este período. Por exemplo, se $h = 1.2mm$, a velocidade máxima será de $12m/s$.

O valor da corrente de aquecimento do fio sensor deve responder a um compromisso entre sensibilidade e ruído eletrônico pois é preciso diminuir a sensibilidade à velocidade pela aplicação de uma corrente baixa. Por outro parte, o pulso de calor cobre um pequeno pedaço do fio sensor e o fator sinal/ruído fica importante. Handford e Bradshaw (1989) propõem um valor de $1 - 2mA$ para um fio de tungstênio de $2.5\mu m$.

O instrumento alinhado na direção do escoamento médio consegue medir \bar{U} e $\overline{u'^2}$ com alta precisão. A resposta do fio ao ângulo do escoamento é nitidamente senoidal, até um ângulo máximo definido por $\alpha_{max} = \tan^{-1}(l/(2h))$, onde l é o comprimento do sensor e h a distância entre os fios. Este ângulo alcança 75° (Handford e Bradshaw, 1989), Jaroch, 1985). Porém, o fio pulsátil padrão realiza medições defeituosas para $\alpha = 0$. Por causa da esteira do primeiro fio sensor, a resposta do segundo sensor é alterada. Isto pode ser nitidamente reduzido com a utilização de fios de $2.5\mu m$.

Se a resposta em cosenos for perfeita, um sensor inclinado de um ângulo α mediria uma velocidade fluante efetiva de:

$$\overline{u_e'^2} = \overline{u'^2} \cos^2 \alpha + \overline{v'^2} \sin^2 \alpha + \overline{u'v'} \sin 2\alpha. \quad (6.97)$$

Castro e Cheun (1982) e Jaroch (1985) verificaram que a medição da velocidade efetiva com três ângulos diferentes é suficiente para determinar com alta precisão os momentos de segunda ordem $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ e $\overline{u'v'}$. Os ângulos ótimos seriam de $\pm 45^\circ$. A precisão alcançada para os momentos de segunda ordem depende também da frequência de aquisição, ou frequência de pulso, e do número de medidas da amostra. Aliás, um critério para a determinação da frequência corresponde ao desejo de adquirir dados não correlacionados. Por isso, o intervalo de tempo entre duas medições sucessivas deve ultrapassar em duas vezes a escala de tempo integral característica (cf. 3.5). Experimentalmente, $100Hz$ é um valor suficiente para determinar estas quantidades turbulentas estatísticas.

6.6 Referências

- Antonia, R. A. and Bradshaw, P. (1971). Conditional sampling of turbulent shear flows. Aero. Report 71-04, Imperial College.
- Bendat, J. S. and Piersol, A. G. (1986). *Random data: Analysis and measurement procedures*. John Wiley & Sons, New York, second edition.
- Bradbury, L. J. S. (1969). A pulsed-wire technique for measurements in highly-turbulent flow. Aero. Report 1284, NPL.
- Bradbury, L. J. S. (1976). Measurements with a pulsed-wire and a hot-wire anemometer in highly turbulent wake of a normal flat plate. *J. Fluid Mech.*, 77:473-497.

- Bradbury, L. J. S. and Castro, I. P. (1971). A pulsed-wire technique for measurements in highly turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 49:657–691.
- Bradshaw, P. (1971). *An introduction to turbulence and its measurement*. Pergamon Press, Oxford.
- Bradshaw, P. (1996). Understanding and prediction of turbulent flow – 1996. *int. J. Heat and Fluid Flow*, 18:45–54.
- Bremhorst, K. and Graham, L. J. W. (1990). A fully compensated hot/cold wire anemometer system for unsteady flow velocity and temperature measurements. *Meas. Sci. Technol.*, 1:425–430.
- Bruun, H. H. (1971). Interpretation of a hot wire signal using a universal calibration law. *J. Phys. E.: Sci. Instr.*, 5:812–818.
- Bruun, H. H. (1976). A note on static and dynamic calibration of constant-temperature hot-wire probes. *J. Fluid Mech.*, 76:145–155.
- Bruun, H. H. (1995). *Hot-wire anemometry*. Oxford Science Publications.
- Bruun, H. H., Khan, M. A., Al-Kayiem, H. H., and Fardad, A. A. (1988). Velocity calibration relationships for hot-wire anemometry. *J. Phys. E.: Sci. Instr.*, 21:225–232.
- Bruun, H. H. and Tropea, C. (1980). Calibration of normal, inclined and x-array hot-wire probes. Sonderforschungsbereich 80 SBF80 M 170, Universität Karlsruhe.
- Castro, I. P. (1985). Time-domain measurements in separated flows. *J. Fluid Mech.*, 150:183–201.
- Castro, I. P. (1991). Pulsed wire anemometry. In *Proc. 2nd World Conf. on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics*, pages 202–211, Dubrovnik, Yugoslavia.
- Castro, I. P. and Cheun, B. S. (1982). The measurement of reynolds stresses with a pulsed-wire anemometer. *J. Fluid Mech.*, 118:41–58.
- Coles, D. E. (1956). The law of the wake in the turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 1:191–226.
- Collis, D. C. and Williams, M. J. (1959). Two-dimensional convection from heated wires at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 6:357–384.
- Comte-bellot, G. and Corrsin, S. (1971). Simple eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated, 'isotropic' turbulence. *J. Fluid Mech.*, 48:273–337.
- Corrsin, S. (1963). *Handbuch der Physik*, pages 523–590. Springer, Berlin.
- Corrsin, S. and Kistler, A. L. (1955). Free stream boundary of turbulent flows. Technical Report 1244, NACA report.

- Davies, T. W. and Patrick, M. A. (1972). A simplified method of improving the accuracy of hot-wire anemometry. In *Proc. Conf. on fluid Dynamic Measurements in the Industrial and Medical Environment*, pages 152–155, Leicester University.
- Delville, J. (1995). *La décomposition orthogonale aux valeurs propres et l'analyse de l'organisation tridimensionnelle des écoulements cisailés libres*. PhD thesis, Université de Poitiers, Poitiers.
- Dinsdale, S., Roughton, A., and Collings, N. (1988). Length scale and turbulence intensity measurements in a motored internal combustion engine. *SAE Paper*, 880380.
- Fiedler, H. and Head, M. R. (1966). Intermittency measurements in the turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 25:719–735.
- Fingerson, L. M. and Freymuth, P. (1983). *Fluid mechanics measurements*, pages 99–154. Hemisphere, Washington, r. j. goldstein edition.
- Goldshtik, M. and Hussain, A. K. M. F. (1995). Structural approach to the modeling of a turbulent mixing layer. *Phys. Rev. E.*, 52:2559.
- Graham, L. J. W. (1995). Examination of the flow around a hot-wire probe using particle image velocimetry. *Exp. in Fluids*, 19:379–382.
- Handford, P. M. and Bradshaw, P. (1989). The pulsed-wire anemometer. *Exp. in Fluids*, 7:125–132.
- Heywood, J. B. (1987). Fluid motion within the cylinder of internal combustion engines – the 1986 freeman scholar lecture. *ASME, J. Fluids Eng.*, 109:3–35.
- Hussain, A. K. M. F. (1983). Coherent structures – reality and myth. *Phys. Fluids*, 26:2816–2850.
- Jaroch, M. (1985). Development and testind of pulsed-wire probes for measuring fluctuating quantities in highly turbulent flows. *Exp. in Fluids*, 3:315–322.
- Jaroch, M. and Dahm, A. (1988). A new pulsed-wire probe for measuring the reynolds stresses in the plane containing the main shear direction of a turbulent shear flow. *J. Phys. E.: Sci. Instr.*, 21:1085–1094.
- King, L. V. (1914). On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluid: Determination of the convection constants of small platinum wires with applications to hot-wire anemometry. *Phil. trans. Roy. Soc.*, A214:373–432.
- Kramers, H. (1946). Heat transfert from spheres to flowing media. *Physica*, 12:61–80.
- Lakshminarayana, B., Pouagare, M., and Davino, R. (1982). Three-dimensional flow field in the tip region of a compressor rotor passage, parts 1 and 2. *ASME, J. Eng. for Power*, 104:760–781.
- Lienhard, J. H. and Helland, K. N. (1989). An experimental analysis of fluctuating temperature measurements using hot-wires at different overheats. *Exp. in Fluids*, 7:265–270.

- Lumley, J. L. (1967). The structure of inhomogeneous turbulent flows. In eds Nauka, Y. . T., editor, *Atm. Turb. and Radio Wave Prop.*, Moscow.
- McQuaid, J. and Wright, W. (1973). The response of a hot-wire anemometer in flows of gas mixtures. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 16:819-828.
- Payne, F. R. and Lumley, J. L. (1966). One-dimensional spectra derived from an airborne hot-wire anemometer. *Q. J. Roy. Met. Soc.*, 92:397-401.
- Perry, A. E. (1982). *Hot-wire anemometry*. Clarendon Press, Oxford.
- Pitts, W. M. and McCaffrey, B. J. (1986). Response behaviour of hot wires and films to flows of different gases. *J. Fluid Mech.*, 169:465-512.
- Radkivi, A. J. and Callander, R. A. (1975). *Advanced fluid mechanics: An introduction*. Edward Arnold.
- Sidall, R. G. and Davies, T. W. (1972). An improved response equation for hot-wire anemometry. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 15:367-368.
- Sirivat, A. (1989). Measurement and interpretation of space-time correlation functions and derivative statistics from a rotating hot wire in a grid turbulence. *Exp. in Fluids*, 7:361-370.
- Swaminathan, M. K., Bacic, R., Rankin, G. W., and Sridhar, K. (1983). Improved calibration of hot-wire anemometers. *J. Phys. E.: Sci. Instr.*, 16:335-338.
- Thin, N. V. (1969). On some measurements made by means of a hot wire in a turbulent flow near a wall. *DISA Info*, 7:13-18.
- Tombach, I. H. (1969). *Velocity measurements with a new probe in inhomogeneous turbulent jets*. PhD thesis, California Institute of Technology.
- Tritton, D. J. (1988). *Physical fluid dynamics*. Oxford Science Publications, second edition.
- Van der Hegge Zijnen, B. G. (1956). Modified correlation formulae for the heat transfers by natural and by forced convection from horizontal cylinders. *Appl. Sci. Res.*, A6:129-140.
- Way, J. and Libby, P. A. (1970). Hot-wire probes for measuring velocity and concentration in helium-air mixtures. *AIAA J.*, 8:976-978.
- Wyganski, I. and Fiedler, H. (1969). Some measurements in the self-preserving jet. *J. Fluid Mech.*, 38:577-612.