

EPTT 2008

Escola de Primavera de Transição e Turbulência

[HOME](#)

[FORMATO
DA ESCOLA](#)

[COMISSÃO
ORGANIZADORA](#)

[PROGRAMA](#)

[ARTIGOS
E LIVRO](#)

[SOBRE O
EPTT 2008](#)

[SAIR](#)



Promoção



Organização



HOME**FORMATO
DA ESCOLA****COMISSÃO
ORGANIZADORA****PROGRAMA****ARTIGOS
E LIVRO****SOBRE O
EPTT 2008****SAIR**

FORMATO DA ESCOLA

Como nas edições anteriores, a 6ª Escola de Primavera de Transição e Turbulência (EPTT) oferecerá palestras ministradas por pesquisadores brasileiros e estrangeiros. As atividades incluem também mini-cursos e sessões técnicas.

Nesta edição do evento, foram destacadas duas propostas: a primeira ligada aos escoamentos bifásicos e a segunda, relacionada com aplicações aeronáuticas. A decisão está expressa na formulação dos temas das palestras e mini-cursos.

Outro viés privilegiado, foi o de contemplar tópicos com expressivo interesse e utilidade para a comunidade. Em especial, em temas como a instabilidade, transição e controle, pouco explorados nas edições anteriores da EPTT, assim como a abordagens teóricas, analíticas, computacional e experimental.

Nas palestras nacionais, a intenção é apresentar os tópicos de forma acessível para alunos de graduação e pós. O objetivo é despertar neles o interesse pelas áreas de instabilidade, transição e turbulência.

A apresentação de tópicos mais avançados ficará a cargo dos convidados estrangeiros, representando o estado da arte no nível mundial. E por fim, as sessões técnicas representam oportunidade para grupos de pesquisa brasileiros apresentar trabalhos desenvolvidos no País.

Número de participantes esperados: 200

Número de sessões técnicas: 27

Palestras convidadas nacionais: 6

Palestras convidadas internacionais: 7

HOME

**FORMATO
DA ESCOLA**

**COMISSÃO
ORGANIZADORA**

PROGRAMA

**ARTIGOS
E LIVRO**

**SOBRE O
EPTT 2008**

SAIR

COMISSÃO ORGANIZADORA

Marcello Augusto Faraco de Medeiros - EESC/USP

Oscar Mauricio Hernandez Rodriguez - EESC/USP

Sávio Brochini Rodrigues - UFSCar

Valdemir Garcia Ferreira - ICMC/USP

Nivaldo Aparecido Corrêa - EESC/USP

COMISSÃO EDITORIAL

Francisco Ricardo da Cunha - UNB

Luis Fernando Figueira da Silva - PUC-Rio

Daniel Onofre de Almeida Cruz -UFPA

Sergio Viçosa Möller - UFRGS

Márcio Teixeira de Mendonça - CTA/IAE

HOME**FORMATO
DA ESCOLA****COMISSÃO
ORGANIZADORA****PROGRAMA****ARTIGOS
E LIVRO****SOBRE O
EPTT 2008****SAIR****EPTT2008 PRELIMINARY PROGRAM**

Time	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday
8:00	registration	Savio	Braga and	Bigarella and	Oscar
9:45	and opening	Rodrigues	Catalano	Azevedo	Rodriguez
10:15	Jorge	Jeffrey	Michel	Jörn	Luis
12:00	Silvestrini	Crouch	Stanislas	Sesterhenn	Portela
12:00	lunch	lunch	lunch	lunch	lunch
13:45					
13:45	papers	papers	papers	papers	papers e
15:45					posters
16:15	Marcio	Vassilis	Michael	Hermann	
18:00	Mendonça	Theofilis	Gaster	Fasel	

Note: The opening section on Monday morning will start at 9:45.

HOME

**FORMATO
DA ESCOLA**

**COMISSÃO
ORGANIZADORA**

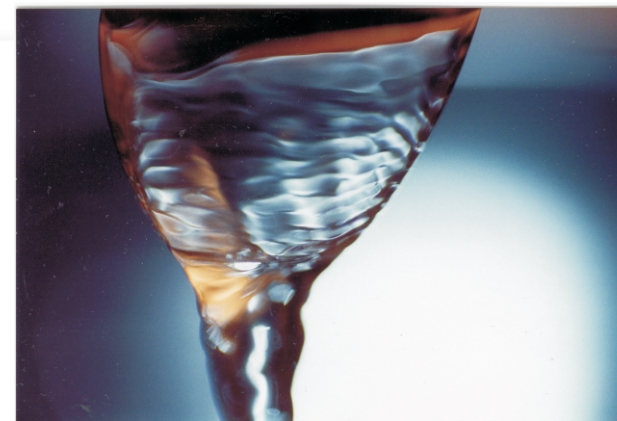
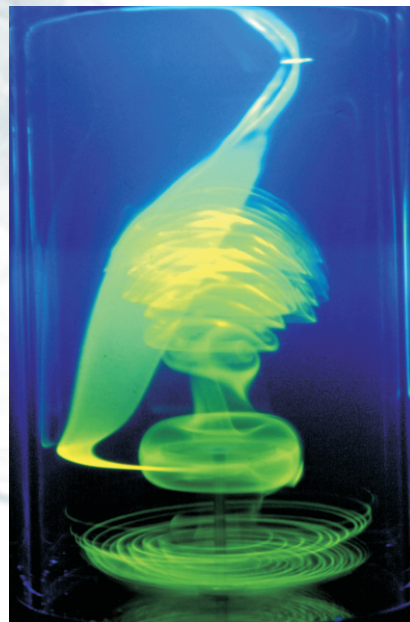
PROGRAMA

**ARTIGOS
E LIVRO**

**SOBRE O
EPTT 2008**

SAIR

**GRADE
PAPPERS**



ARTIGOS

LIVRO

HOME

**FORMATO
DA ESCOLA**

**COMISSÃO
ORGANIZADORA**

PROGRAMA

**ARTIGOS
E LIVRO**

**SOBRE O
EPTT 2008**

SAIR

SOBRE O EPTT 2008

A primeira edição da EPTT foi realizada em 1998 por iniciativa do Professor Átila Silva Freire, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Na época, o evento preencheu lacuna importante no cenário nacional, a partir do grande amadurecimento do trabalho dos grupos acadêmicos nacionais envolvidos com pesquisas na área.

A comunidade científica comemorou a realização de um evento exclusivo para a área de Transição e Turbulência, em formato menor que o Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT).

Ao longo da década, a EPTT firmou-se como um fórum de ensino, discussão e atualização de grande importância. Motivou a criação de painéis em outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, a Rede Nacional de Combustão, ocorrida em 2007, em Florianópolis (SC).

A 6ª EPTT será realizada em São Carlos (SP). A organização é da USP São Carlos, Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e Comando Geral de Tecnologia Aeroespacial, o antigo Centro Técnico Aeroespacial (CTA). Mais uma vez reunirá alunos, pesquisadores e corpo científico nacional e estrangeiro para debater e divulgar trabalhos na área de Transição e Turbulência.

Ano	Local	Instituição	Participantes
1998	Rio de Janeiro	COPPE/UFRJ,IME/R	197
2000	Uberlândia	UFU	176
2002	Florianópolis	UFSC	216
2004	Porto Alegre	UFRGS, PUC/RS	224
2006	Rio de Janeiro	COPPE/UFRJ,IME/R	239

VI ESCOLA DE PRIMAVERA EM TRANSIÇÃO E TURBULÊNCIA

SEGUNDA FEIRA 22/09

- 13:45-14:05 SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS EM CAVIDADES CÚBICAS Elie Luis M. Padilla, Felipe Pamploma Mariano, Tiago de Assis Silva, Aristeu da Silveira Neto
- 14:05-14:25 EXPERIMENTOS EM TÚNEL DE VENTO DA CAMADA LIMITE INTERNA NO CENTRO DE LANÇAMENTO DE ALCÂNTARA Luciana Bassi Marinho Pires, Ana Cristina Avelar, Roberto da Motta Girardi, Gilberto Fisch
- 14:25-14:45 FLOW VISUALIZATION IN BANKS OF CYLINDERS OF TRIANGULAR ARRANGEMENT IN A WATER CHANNEL A. V. de Paula, L. A. M. Endres, S. V. Möller
- 14:45-15:05 FLOW AROUND A CIRCULAR CYLINDER NEAR A WALL IN A CHANNEL FLOW FOR LOW REYNOLDS NUMBER Marcelo de Araujo Vitola, Edith Beatriz Camaño Schettini, Jorge Hugo Silvestrini
- 15:05-15:25 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM PAR DE CILINDROS DE BASE QUADRADA DISPOSTOS EM DIFERENTES ARRANJOS GEOMÉTRICOS Vinicius Souza Morais, SÃ©rgio Said Mansur, Rubens Campregher
- 15:25-15:45 NONLINEAR REGIME OF A SPANWISE MODULATED WAVETRAIN IN A PLANE POISEUILLE FLOW Homero Ghioti da Silva, Marcello Augusto faraco de Medeiros

TERÇA FEIRA 23/09

- 13:45-14:05 REYNOLDS AVERAGE NAVIER-STOKES SIMULATION OF HIGHLY ANISOTROPIC TURBULENCE STRUCTURES Andr   Luiz Tenório Rezende, Luiz Eduardo Bittencourt Sampaio, Angela Ourivio Nieckele
- 14:05-14:25 MODELA O DO ESCOAMENTO TURBULENTO EM COMPRESSORES CENTRÍFUGOS DE ALTA VELOCIDADE Rovadir Baungartner, César J. Deschamps
- 14:25-14:45 DIRECT COMPUTATION OF INCOMPRESSIBLE TURBULENT FREE SURFACE FLOW USING A NEW HIGH ORDER UPWIND SCHEME Rafael Alves Bonfim de Queiroz, Fernando Akira Kurokawa, Valdemir Garcia Ferreira
- 14:45-15:05 PERFORMANCE OF THE REYNOLDS STRESS MODEL (RSM) IN THE PREDICTION OF THE HEAT TRANSFER OF AN IMPINGING JET D. I. Maldonado, A. O. Nieckele
- 15:05-15:25 ANÁLISE DE MODELOS SUBMALHA EM ELEMENTOS FINITOS Carla Marques Xavier, Adriane Prisco Petry
- 15:25-15:45 ESTUDO DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM CILINDRO DE BASE QUADRADA POSICIONADO PRÓXIMO A UMA PAREDE PLANA Augusto Salomão Bornschlegell, Sérgio Said Mansur, Rubens Campregher

QUARTA FEIRA 24/09

- 13:45-14:05 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM ESCOAMENTO AO REDOR DE UM PAR DE CILINDROS EM TANDEM COM OSCILAÇÃO FORÇADA Eduardo Silveira Molina, Luis Fernando Posada Cuadro, Jorge Hugo Silvestrini
- 14:05-14:25 NOISE GENERATED BY TURBULENT FLOW THROUGH SHORT LENGTH TUBES Abraham A. Janssen, Andre Morriesen, Cesar J. Deschamps, Arcanjo Lenzi
- 14:25-15:45 CONSTRUCTING THE DEPENDENCE OF THE REYNOLDS STRESS TENSOR ON KINEMATIC TENSORS FROM DNS DATA Roney L. Thompson, Laurent Thais, Gilmar Mompean
- 14:45-15:05 ANÁLISE DO MODELO DE LANGEVIN ESTENDIDO NA MODELAGEM DA COMBUSTÃO TURBULENTA USANDO A ABORDAGEM DE REATOR PARCIALMENTE AGITADO Elder M. Orbegoso, Luis Fernando Figueira da Silva
- 15:05-15:25 SYMMETRY PRESERVING ADVECTIVE REGULARIZATION (SPAR) MODELLING OF TURBULENT FLOWS USING NON-STRUCTURED MESHES ON PARALLEL COMPUTERS Oriol Lehmkuhl, Ricard Borell, Guillem Colomer, C.D. Pérez Segarra
- 15:25-15:45 DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOWS USING LOW COST PARALLEL COMPUTERS AND SUPERCOMPUTERS M. Soria, X. Trias, A. Oliva

QUINTA FEIRA 25/09

- 13:45-14:05 HISTERESE NO CONTROLE DE ESCOAMENTO USANDO JATOS SINTÉTICOS Bruno Henrique de Sena e Oliveira, Marcello Augusto Faraco de Medeiros
- 14:05-14:25 REDUCED ORDER MODELS FOR WAKE FLOWS AT LOW REYNOLDS NUMBERS Juan D'Adamo, Ada Cammilleri, Guillermo Artana, Mémin Etienne,
- 14:25-14:45 CONTROLE DE ESCOAMENTO EM UM DIFUSOR A PARTIR DE EXCITAÇÕES PERIÓDICAS Átila Antunes FranÃ§a Barbosa, Bruno Henrique de Sena e Oliveira, Marcelo Machado Bariani, Marcello Augusto Faraco de Medeiros
- 14:45-15:05 NUMERICAL AND THEORETICAL INVESTIGATION OF THE ASYMMETRY EFFECTS IN A WAKE PROFILE E. M. Gennaro, M. A. F. Medeiros
- 15:05-15:25 ESTUDO NUMÉRICO TRIDIMENSIONAL TRANSIENTE DA FORMAÇÃO DE CLUSTERS E ESTRUTURAS DE VÓRTICES EM UM LEITO FLUIDIZADO CIRCULANTE TURBULENTO - MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE CENTRO DE VÓRTICES Ivan Carlos Georg, Ricardo V. P. Rezende e Clovis R. Maliska
- 15:25-15:45 HYDRODYNAMIC STABILITY IN ELECTROCHEMICAL CELLS: THE NEUTRAL CURVE OF STATIONARY PERTURBATIONS José Pontes, Norberto Mangiavacchi, Oswaldo E. Barcia, Oscar R. Mattos, Bernard Tribollet

SEXTA FEIRA 25/09

- 13:45-14:05 CÁLCULO DIRETO DO RUÍDO AERODINÂMICO GERADO POR CAMADAS DE MISTURA EM EVOLUÇÃO ESPACIAL Carlos Anissem Soares Moser
- 14:05-14:25 CÉLULAS DE CORRENTES EM ESCOAMENTOS GERADOS POR GRADES OSCILANTES Carlos Eugênio Pereira, José Eduardo Alamy Filho, Nivaldo Aparecido Corrêa, Harry Edmar Schulz
- 14:25-14:45 Airfoil Optimization for Business Aircraft Rafael Fernandes de Oliveira, Ricardo Maiko Uehoka Entz, Luiz Guilherme Noujain Corrêa, Anselmo Eduardo Jorge Cortellazzi Filho, Rodrigo Polan Domingues, Bruno Giovaneti de Macedo, Marcello Augusto Faraco de Medeiros

ESTUDO DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM CILINDRO DE BASE QUADRADA POSICIONADO PRÓXIMO A UMA PAREDE PLANA

Augusto Salomão Bornschlegell, augusto.s.b@gmail.com

Sérgio Said Mansur, mansur@dem.feis.unesp.br

UNESP Ilha Solteira, Depto de Engenharia Mecânica, Av. Brasil Centro 56, Ilha Solteira, SP, 15385-000.

Rubens Campregher, rubenscamp@dal.ca

Dalhousie University, 1360 Barrington St., Halifax, NS, B3J 2X4, Canada.

Resumo. No presente trabalho, desenvolveu-se um estudo numérico do escoamento em torno de um cilindro de base quadrada de seção transversal $B \times B$ posicionado a uma distância y de uma parede plana. Mais especificamente, foi investigada a influência que a distância y existente entre o cilindro e a parede exerce sobre a configuração do escoamento e sobre a frequência de emissão de vórtices na esteira do cilindro. Simulações bidimensionais foram realizadas para números de Reynolds inferiores a 700, com o auxílio de um programa computacional próprio, que resolve as equações de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas, empregando o método dos volumes finitos. Os resultados obtidos mostram que, para números de Reynolds iguais a 400 e 500, a emissão de vórtices na esteira do cilindro é suprimida quando o corpo sólido aproxima-se da parede em menos de 20% de sua cota lateral, ou seja $y/B < 0,2$. Quando o número de Reynolds eleva-se a 700, essa distância cai para 15% da cota lateral ($y/B < 0,15$).

Palavras-chave: Simulação numérica, volumes finitos, cilindro de base quadrada, emissão de vórtices.

1. INTRODUÇÃO

O escoamento em torno de um cilindro posicionado nas proximidades de uma parede constitui um problema de considerável interesse tecnológico, frequentemente encontrado em aplicações de engenharia. De fato, este tipo de escoamento é comum em sistemas de arrefecimento de componentes eletrônicos, em torno de tubulações e cabos de transmissão posicionados no fundo do mar, ao redor de estruturas de pontes e plataformas *off-shore* e em vários tipos de equipamentos industriais. Em todos estes casos, a presença da parede altera significativamente a configuração do escoamento, modificando a frequência de emissão de vórtices, as cargas dinâmicas sobre o cilindro e a intensidade dos mecanismos de transferência de massa, energia e quantidade de movimento nas imediações do corpo sólido.

Em razão de sua reconhecida importância prática, este problema tem sido objeto de vários estudos numéricos e experimentais ao longo das últimas décadas, com predominância de trabalhos voltados para a investigação do escoamento a números de Reynolds altos e moderados em torno de cilindros circulares. Artigos envolvendo cilindros de base quadrada são bem mais raros na literatura, sobretudo quando baixos números de Reynolds são considerados. A Tab. 1 reúne alguns dos principais artigos que tratam este problema, podendo-se observar que apenas um deles, Bhattacharyya *et al.* (2006), aborda o escoamento com $Re < 1.000$.

Tabela 1. Estudos relacionados ao escoamento em torno de um cilindro de base quadrada posicionado próximo a uma parede plana.

Referência	Re	Metodologia
Bailey <i>et al.</i> (2002)	18.900	Experimental
Bhattacharyya e Maiti (2004)	1.400	Numérica
Bhattacharyya <i>et al.</i> (2006)	500 e 700	Numérica
Bosch e Rodi (1996)	22.000	Numérica e experimental
Bosch <i>et al.</i> (1996)	22.000	Experimental
Campregher <i>et al.</i> (2003)	7.000 e 14.000	Numérica
Durão <i>et al.</i> (1991)	2.000 e 18.000	Experimental
Liou <i>et al.</i> (2002)	22.000	Numérica
Martinuzzi <i>et al.</i> (2003)	18.900	Experimental
Park <i>et al.</i> (2001)	18.000	Experimental
Straatman e Martinuzzi (2003)	23.000	Numérica

No presente trabalho, simulações numéricas bidimensionais do escoamento incompressível em torno de um cilindro quadrado posicionado próximo a uma parede plana é investigado numericamente, para números de Reynolds compreendidos entre 200 e 700.

2. FENOMENOLOGIA DO PROBLEMA

As configurações assumidas pelo escoamento sobre um cilindro de seção transversal quadrada muito se assemelham àquelas encontradas ao redor de um cilindro de base circular. Para um cilindro quadrado, entretanto, os pontos de descolamento da camada limite são definidos intrinsecamente pela geometria do corpo e ocorrem exatamente sobre suas arestas. De uma forma geral, esta tendência se aplica também à maioria dos corpos rombudos dotados de arestas vivas.

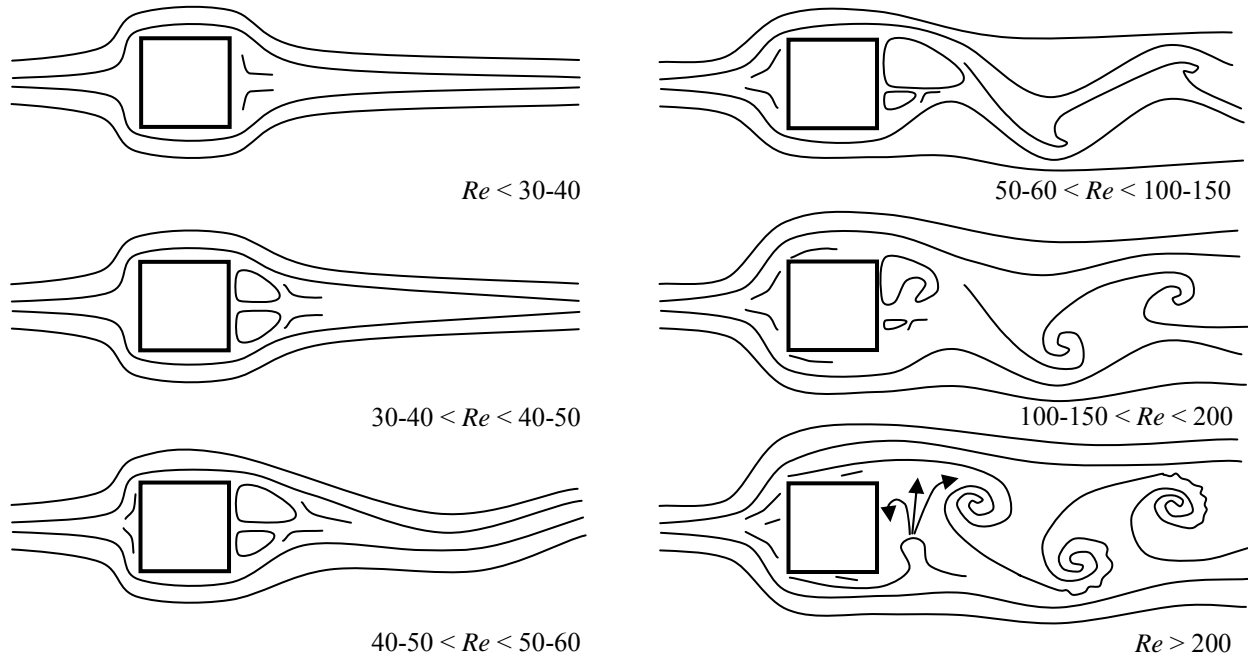


Figura 1. Regimes do escoamento em torno de um cilindro de base quadrada para números de Reynolds moderados.

A Fig. 1 ilustra as diferentes configurações apresentadas pelo escoamento ao redor de um cilindro de base quadrada, na ausência de obstáculos sólidos em sua vizinhança. Para número de Reynolds inferiores a 30-40, ainda que possa ocorrer um pequeno descolamento da camada limite nos bordos de fuga, o escoamento se mantém simétrico em relação ao seu eixo médio horizontal e as linhas de corrente permanecem estáveis e bem comportadas. No intervalo $30-40 < Re < 40-50$, duas bolhas de recirculação contra-rotativas são observadas junto à base do cilindro, que tendem a aumentar em tamanho com o acréscimo do número de Reynolds. Com o subsequente aumento do número de Reynolds, estas bolhas crescem em tamanho e o escoamento perde sua simetria horizontal. A esteira passa, então, a oscilar periodicamente. Na faixa de Reynolds compreendida entre 50-60 e 100-150, tem início o processo de formação de instabilidades de Kelvin-Helmholtz, em ambas as camadas cisalhantes que caracterizam a esteira de um corpo cilíndrico. Na seqüência, estas instabilidades se desenvolvem completamente, ocasionando a emissão de vórtices alternados, que consiste numa etapa importante do processo de transição à turbulência. Os primeiros indícios de turbulência surgem aos arredores das estruturas coerentes, geralmente naquelas que estão mais afastadas do cilindro. A transição caminha em direção do cilindro e, em um segundo momento, para o centro dessas estruturas.

Quando o cilindro se encontra próximo a uma parede plana, como indicado na Fig. 2, a dinâmica do escoamento pode ser radicalmente modificada. Segundo Bhattacharyya *et al.* (2006), esta alteração se dá essencialmente em virtude dos seguintes fatores: a) o perfil de velocidade a montante do cilindro é não uniforme; b) a impermeabilidade da parede restringe a rotação do fluido na esteira do cilindro; c) vórtices secundários são produzidos junto à parede plana e; d) ocorre separação não permanente da camada limite junto à parede. Além disso, se o cilindro for colocado numa posição suficientemente próxima à parede, a emissão periódica de vórtices pode ser totalmente interrompida. O espaçamento relativo parede-cilindro (y/B) a partir do qual este efeito se verifica é conhecido na literatura como distância crítica.

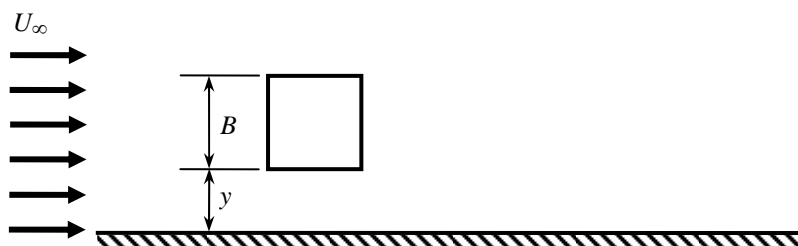


Figura 2. Cilindro de base quadrada posicionado próximo a uma parede plana.

3. EQUAÇÕES GOVERNANTES E PROCEDIMENTO NUMÉRICO

De maneira geral, o escoamento isotérmico, incompressível e não permanente de um fluido newtoniano pode ser matematicamente bem representado pelas equações de conservação da massa e de Navier-Stokes, escritas na forma indicial cartesiana como:

Conservação da massa:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2}$$

onde ρ representa a massa específica do fluido; ν sua viscosidade cinemática, t é o tempo, x as coordenadas espaciais, u as componentes do vetor velocidade e p a pressão.

No presente trabalho, tais equações foram tratadas com o auxílio do método dos volumes finitos, empregando-se um código computacional próprio, escrito em linguagem FORTRAN90. O esquema de diferenças centrais foi utilizado para representar os fluxos difusivos das equações de transporte, enquanto que, para o tratamento dos termos advectivos, empregou-se o esquema QUICK consistente, proposto por Hayase et al.(1992), a partir de uma adaptação do esquema QUICK desenvolvido originalmente por Leonard (1979). O método SIMPLEC foi escolhido para resolver o acoplamento pressão velocidade e uma formulação totalmente implícita foi adotada para todas as variáveis, o que leva à solução de um sistema linear, obtida iterativamente por intermédio do algoritmo de Thomas (TDMA), com varredura linha a linha e coluna a coluna.

O domínio computacional, ilustrado na Fig. 3, é composto por uma malha bidimensional não uniforme, mais refinada nas proximidades da parede e do cilindro quadrado. Suas dimensões foram arbitradas com base nos trabalhos de Bhattacharyya (2006) e de Campregher (2002). As condições de contorno foram prescritas da maneira como segue: a) escoamento uniforme com velocidade U_∞ na entrada do domínio – face oeste; b) escoamento plenamente desenvolvido na saída ($\partial u / \partial x = 0$); c) corrente não perturbada na fronteira superior ($v = \partial u / \partial y = 0$) e; d) condição de impermeabilidade e não deslizamento na fronteira inferior ($u = v = 0$). Na região ocupada pelo cilindro, viscosidade infinita foi imposta. Uma sonda numérica, ajustada para capturar as velocidades u e v com uma frequência de 100 Hz, foi posicionada 1 mm a jusante da base do cilindro.

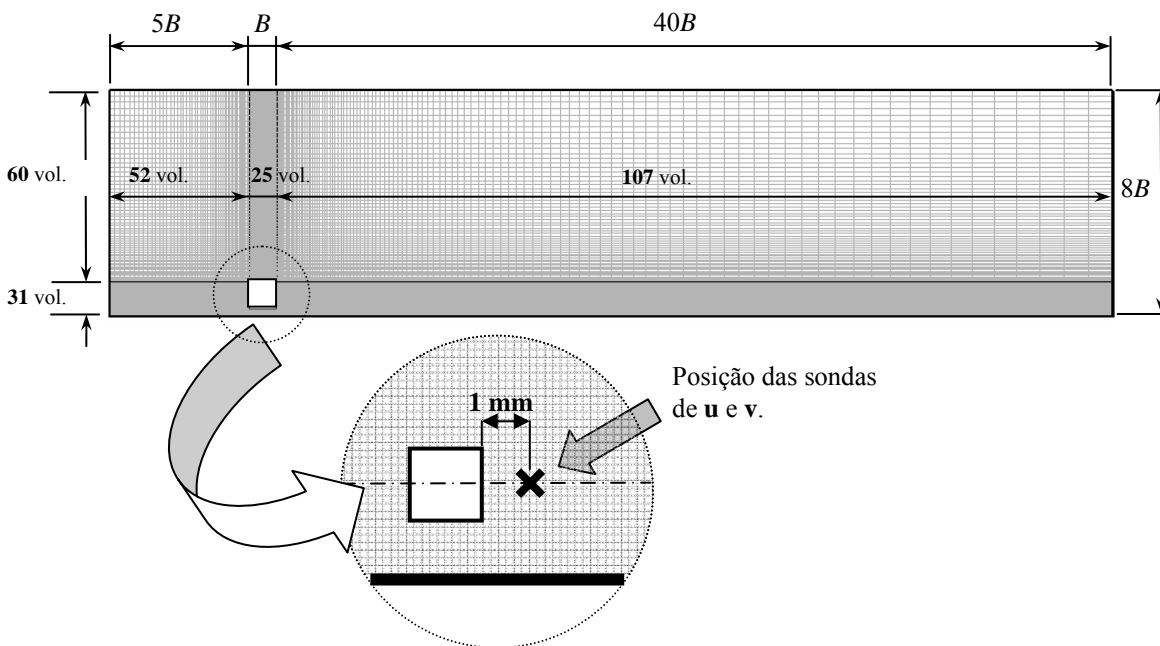


Figura 3. Anatomia da malha computacional M25.

Testes preliminares foram realizados para garantir independência entre a malha computacional adotada e os resultados obtidos. Com este propósito, simulações para $Re = 200$ foram executadas com 25, 50, 100 e 150 volumes de controle na região do cilindro, referenciadas, nesse trabalho, como M25, M50, M100 e M150, respectivamente. Estas mesmas densidades de malha foram empregadas na região entre a parede e o cilindro, com uma descompactação de 3% nas direções norte, leste e oeste do cilindro. Os tempos de CPU obtidos para as malhas M25, M50, M100 e M150 foram, respectivamente, de 2, 4, 8 e 120 horas. Comparando-se as frequências de emissão de vórtices fornecidas por estas diferentes simulações, concluiu-se que a malha M50 ofereceu a melhor relação custo benefício, proporcionando a mesma frequência obtida com a malha M100, com a metade do tempo computacional.

4. RESULTADOS

Simulações definitivas foram realizadas para os valores de $Re = 200, 250, 350, 400, 500$ e 700 , com distâncias relativas y/B de $0,10, 0,15, 0,20$ e $0,25$.

Nas Figs. 4 a 9 são mostradas a evolução temporal das velocidades u e v capturadas pela sonda numérica posicionada junto à base do cilindro, para diferentes números de Reynolds e diferentes espaçamentos y/B . Todas as simulações foram realizadas fixando-se um tempo de 100 s de escoamento.

Para $Re = 200$, Fig. 4, observa-se que só ocorrem oscilações de velocidade a jusante do cilindro para $y/B = 0,25$ e que estas oscilações são amortecidas à medida que o tempo avança. Com o acréscimo do número de Reynolds para 250, Fig. 5, este padrão de comportamento se mantém, mas a amplitude destas oscilações para o mesmo espaçamento relativo $y/B = 0,25$ cresce consideravelmente, permanecendo as demais curvas ainda sem oscilações. O novo aumento no número de Reynolds para 350, Fig. 6, induz flutuações também nas demais distâncias relativas e, para $y/B = 0,25$, as oscilações não são mais inteiramente amortecidas nos cem primeiros segundos de escoamento.

Para um mesmo espaçamento y/B , esta tendência oscilatória vai se estendendo aos demais sinais de velocidade, na medida em que o número de Reynolds aumenta, como mostram as Figs. 7 e 8.

Para $Re = 700$ e $y/B = 0,20$, Fig. 9, observa-se que a amplitude das oscilações permanece aproximadamente constante a partir do instante $t \approx 50s$, indicando que um regime estatisticamente permanente se estabeleceu. Isto acontece também para $y/B = 0,25$. Este sinal, entretanto, é claramente mais irregular que o anterior, indicando uma fase mais adiantada de transição à turbulência.

No que tange à configuração do escoamento, diferentes regiões podem ser identificadas em torno do cilindro, como mostra a Fig. 10. À montante, tem-se o desenvolvimento da camada limite sobre a placa plana. Ao encontrar o cilindro, um ponto de estagnação é gerado e o escoamento divide-se, então, em duas porções. Na porção inferior, no espaço compreendido entre a face sul do cilindro e a parede plana, o escoamento assume uma forma parabólica, que muito se aproxima do escoamento entre duas placas planas paralelas. Na porção superior, por sua vez, observa-se o descolamento da camada limite no bordo de ataque, sem recolamento posterior ao longo da face superior do cilindro. O perfil de velocidades sobre esta face apresenta um ponto de inflexão, favorecendo a amplificação de instabilidades. A jusante do cilindro forma-se a esteira, onde as porções de fluido separadas a montante se reencontram e interagem fortemente entre si.

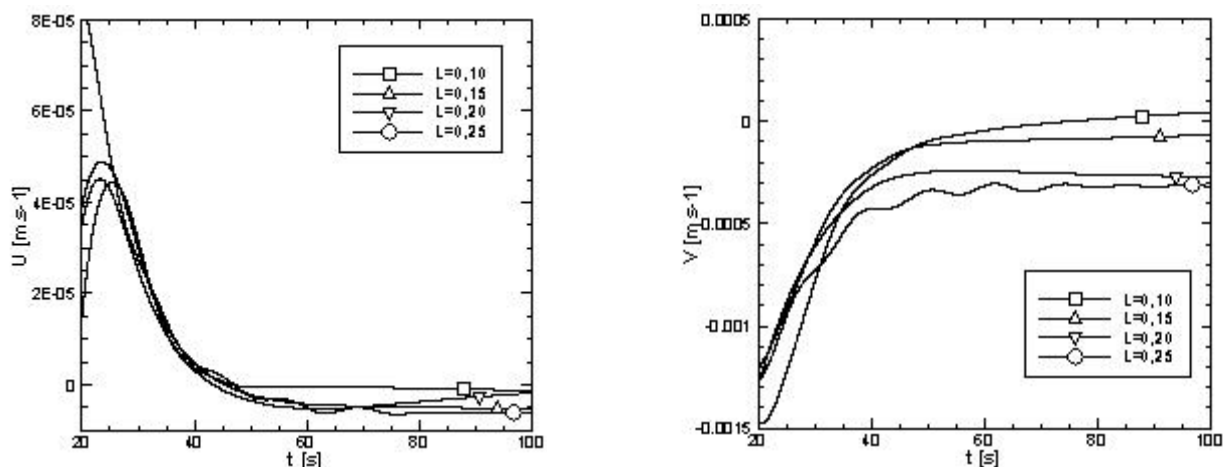


Figura 4. Evolução temporal das componentes u e v da velocidade, para $Re = 200$.

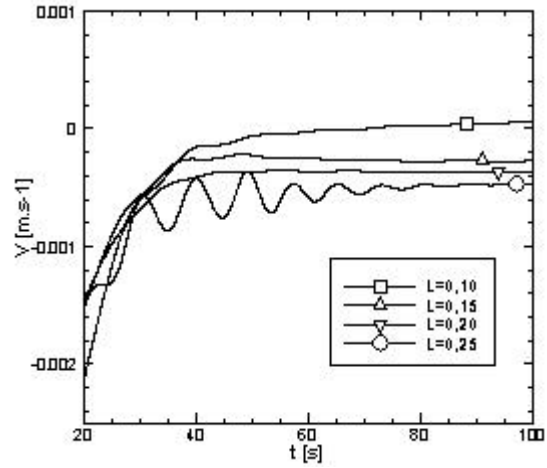
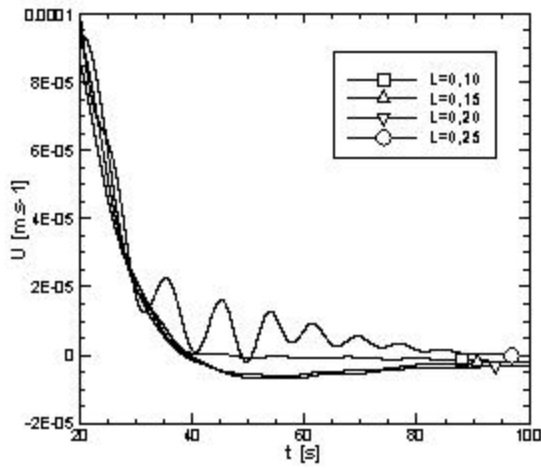


Figura 5. Evolução temporal das componentes u e v da velocidade, para $Re = 250$.

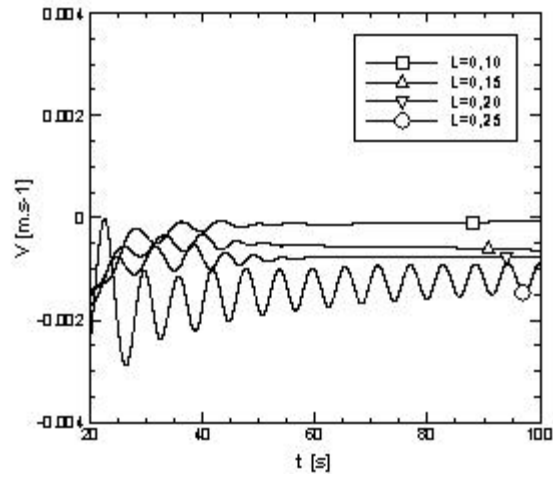
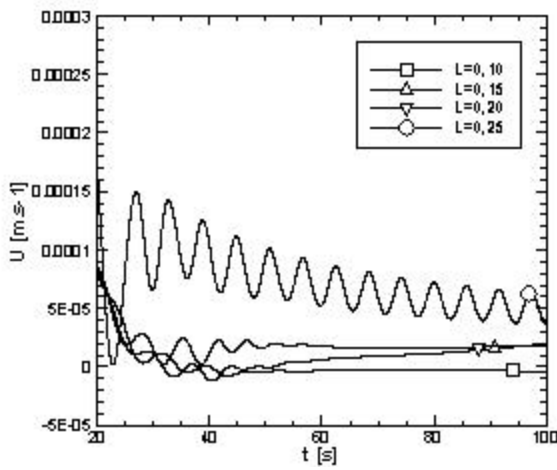


Figura 6. Evolução temporal das componentes u e v da velocidade, para $Re = 350$.

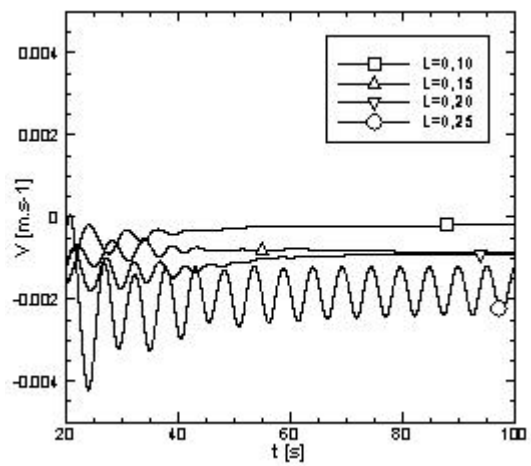
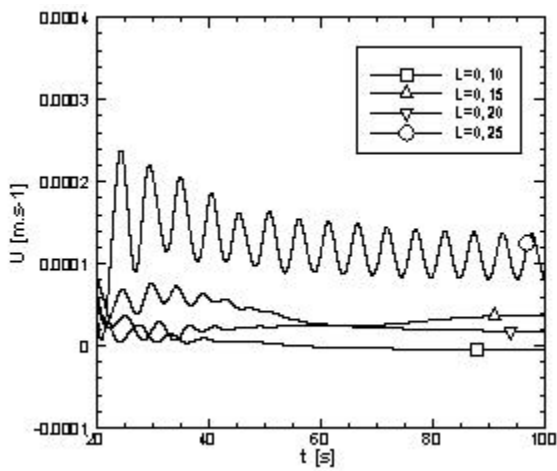


Figura 7. Evolução temporal das componentes u e v da velocidade, para $Re = 400$.

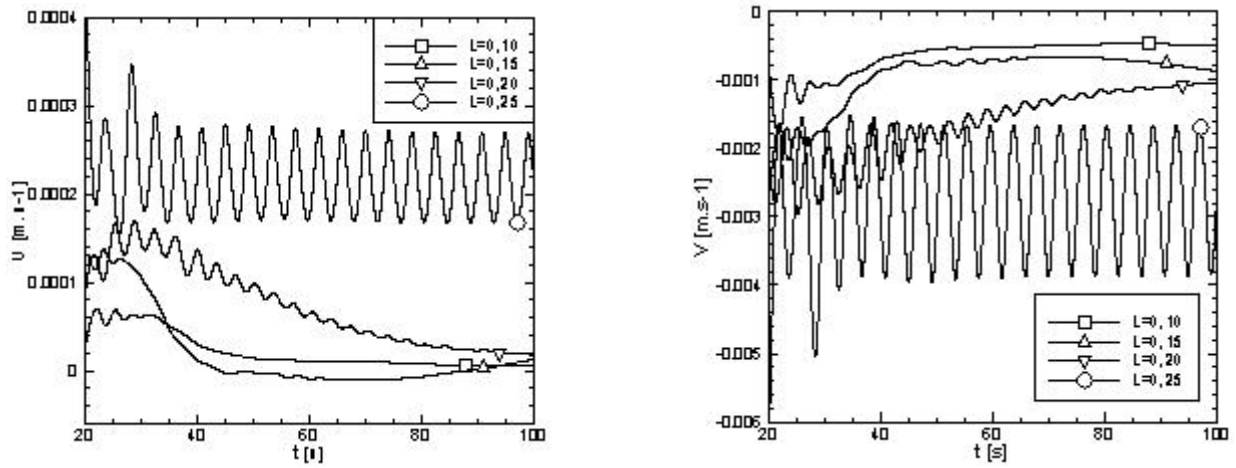


Figura 8. Evolução temporal das componentes u e v da velocidade, para $Re = 500$.

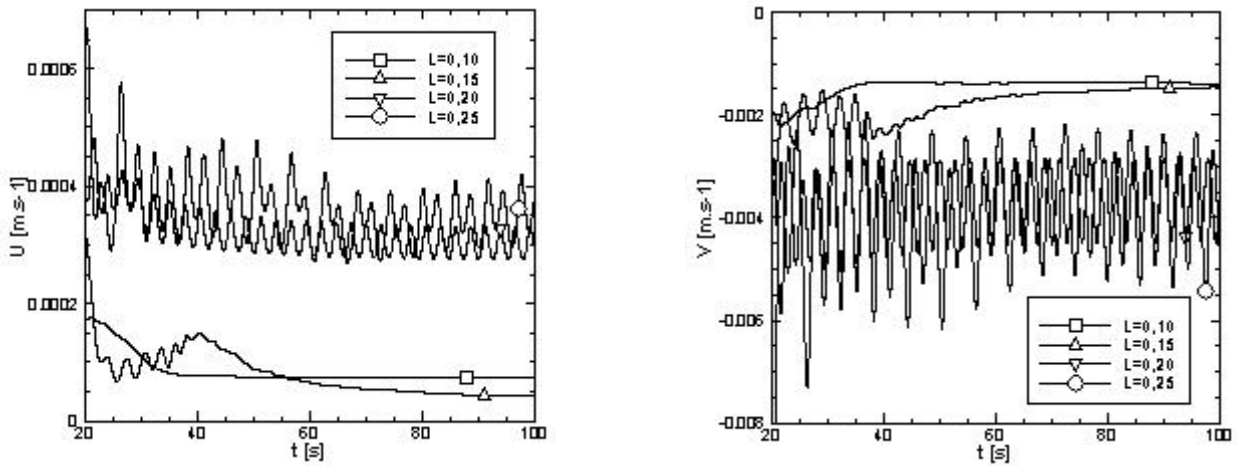


Figura 9. Evolução temporal das componentes u e v da velocidade, para $Re = 700$.

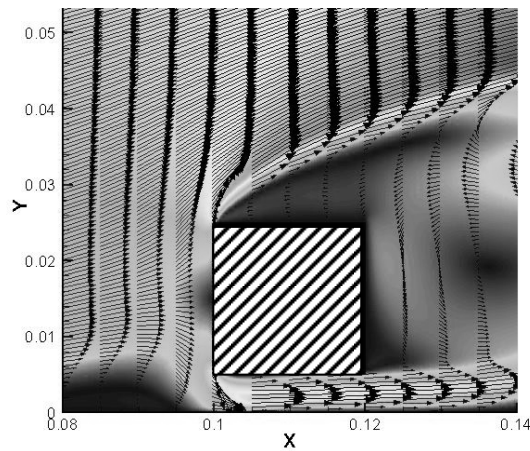


Figura 10. Campo de velocidades nas adjacências do cilindro, para $Re = 700$ e $y/B = 0,25$.

Os mapas de isovorticidade apresentados nas Figs. 11 a 14 permitem visualizar a evolução temporal do escoamento, para os valores de Re iguais a 200, 400, 500 e 700 e para diferentes espaçamentos y/B . Todas as seqüências foram montadas para um mesmo intervalo de 0 a 100 segundos, sendo que as imagens colocadas lado a

lado correspondem a um mesmo instante.

Para $Re = 200$, Fig. 11, observa-se que a esteira é bem comportada, sem a emissão periódica de vórtices. Para $y/B = 0,25$, verifica-se que, nos primeiros instantes, o vórtice gerado na aresta sudeste do cilindro é atraído pela estrutura turbilhonar gerada no bordo superior, com dimensão característica equivalente ao lado B do cilindro. O escoamento entre o cilindro e a parede ocorre em espaço confinado, e o fluido que passa por essa região não atinge a mesma velocidade das partículas que passam sobre o cilindro. Dessa forma, as estruturas geradas na porção inferior tendem a ser arrastadas em direção às estruturas formadas na porção superior. Depois de atingido o regime estatisticamente permanente, observa-se, a partir da aresta noroeste do cilindro, uma região de cisalhamento intenso, que se estende por uma distância aproximada de $5D$.

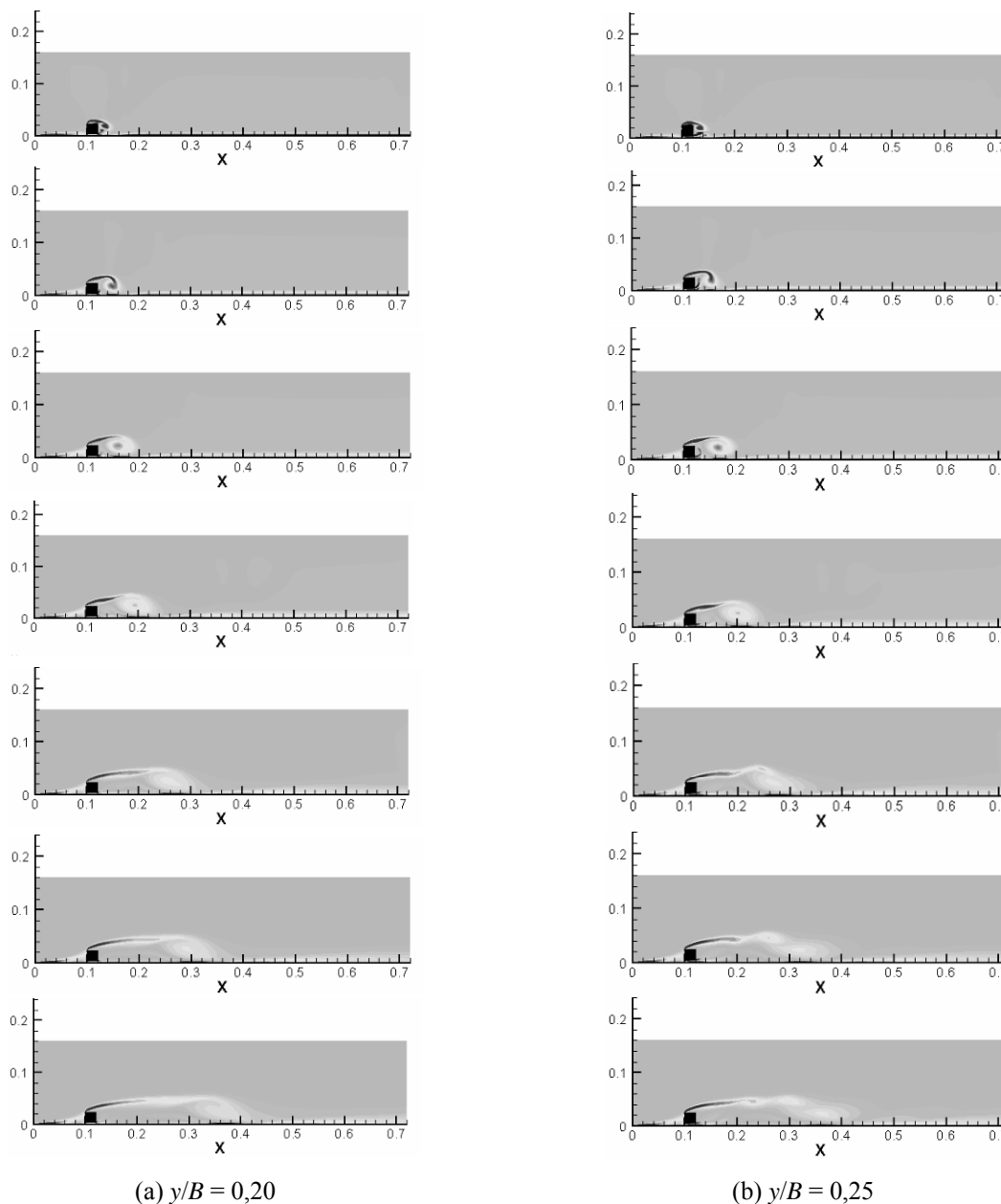
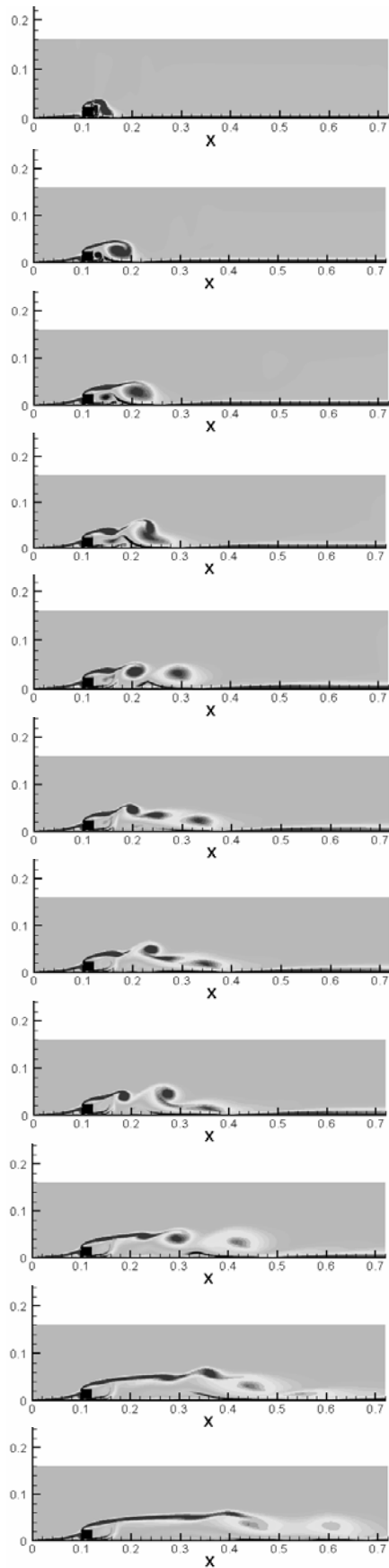
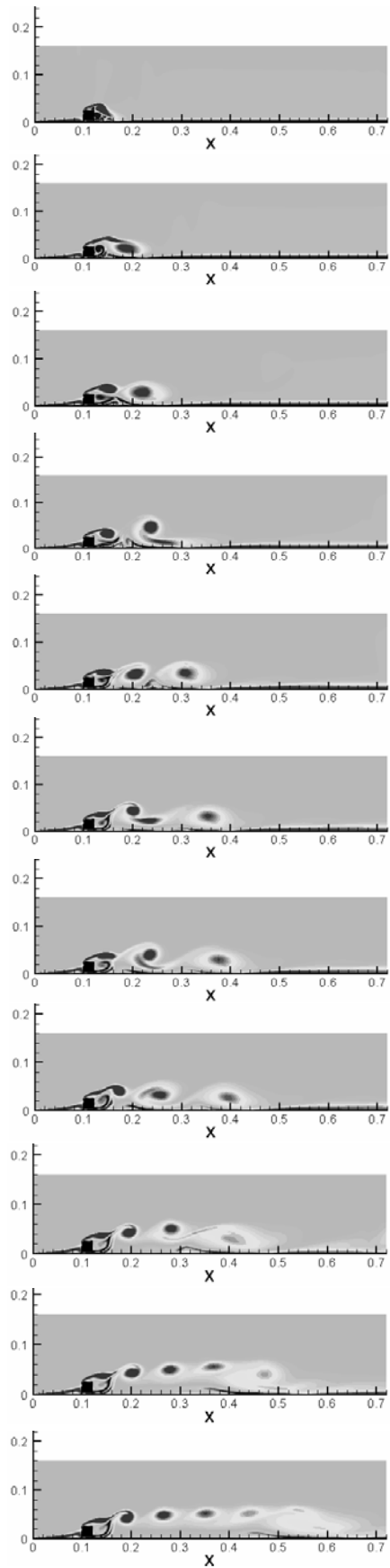


Figura 11. Mapa de isovorticidade para $Re = 200$, de 0 a 100 segundos.

Dobrando-se o valor do número de Reynolds de 200 para 400, o escoamento torna-se bem mais complexo, sobretudo para $y/B = 0,25$, como mostra a Fig. 12. Embora o escoamento ainda seja laminar, nesta nova condição, a emissão de vórtices periódicos é observada na região da esteira. A frequência de desprendimento de vórtices depende, neste caso, da magnitude das interações entre as estruturas turbilhonares formadas nas regiões superior e inferior do cilindro. De fato, tais estruturas possuem vorticidade de sinais opostos e, ao interagirem, uma forte dissipação ocorre, resultando no desprendimento de vórtices periódicos.



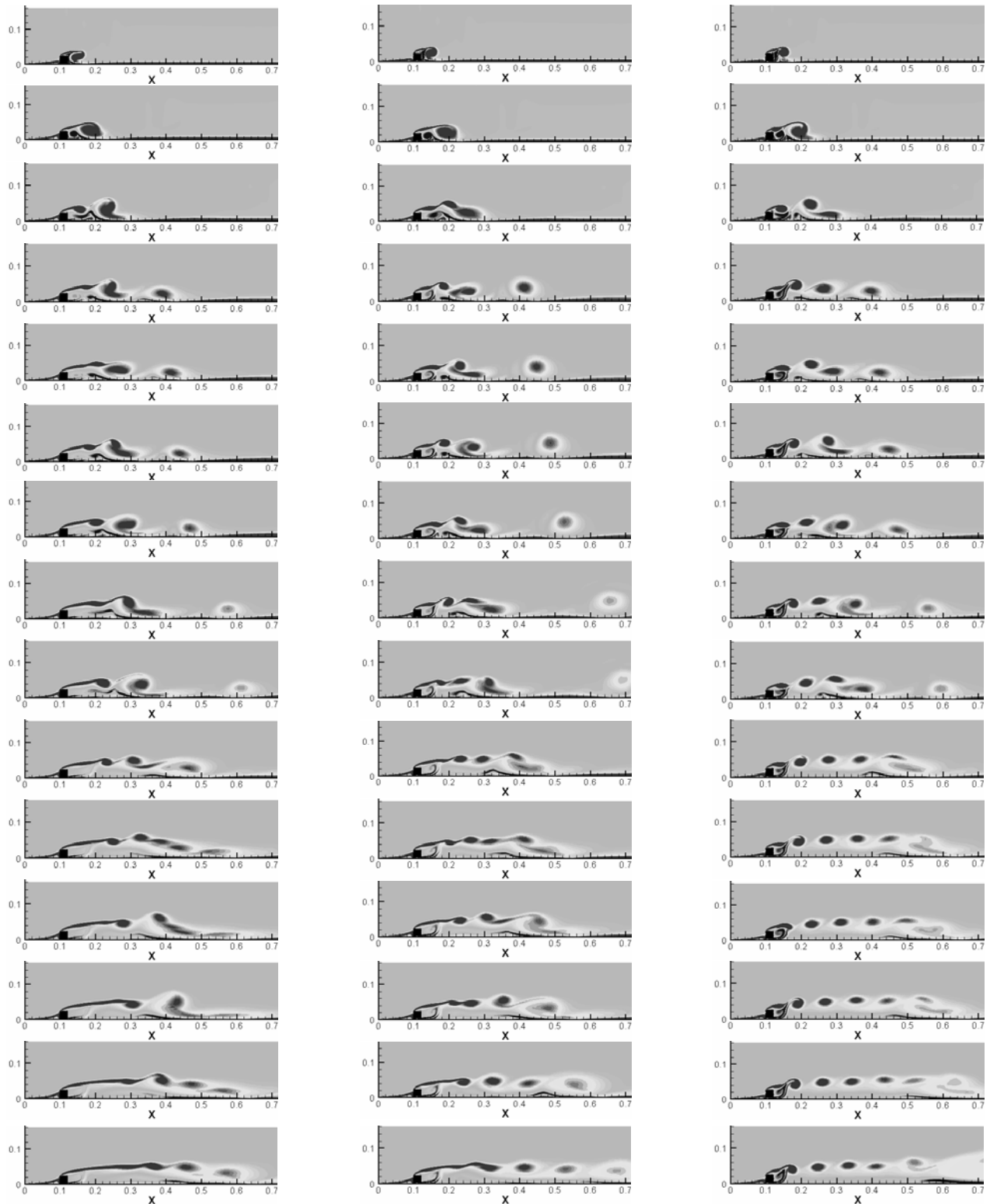
(a) $y/B = 0,20$



(b) $y/B = 0,25$

Figura 12. Contornos de isovorticidade para $Re = 400$, de 0 a 100 segundos.

Para $Re = 500$, Fig. 13, a interação entre as estruturas que concentram vorticidade é intensificada, ocasionando, em alguns casos, o emparelhamento de dois ou mais vórtices. Com efeito, quando um vórtice advectado pelo escoamento se aproxima da região da parede, além de perder circulação, ele passa a se deslocar mais lentamente que os demais, sendo alcançado por outras estruturas geradas depois dele.



(a) $y/B = 0,15$

(b) $y/B = 0,20$

(c) $y/B = 0,25$

Figura 13. Mapas de isovorticidade para $Re = 500$, de 0 a 100 segundos.

Quando o número de Reynolds é elevado a 700, Fig. 14, um número maior de emparelhamentos passa a acontecer, tornando o escoamento ainda mais intrincado. No processo de coalescência entre duas ou mais estruturas turbilhonares de mesmo sinal, uma só estrutura resultante é formada, com tamanho duas ou três vezes maior do que as que lhe deram origem, mas com velocidade angular nitidamente menor. Esta dinâmica particularmente ativa que decorre dos mecanismos de interação entre estruturas turbilhonares justifica as oscilações irregulares de velocidade captadas próximo à base do cilindro, observadas na Fig. 9.

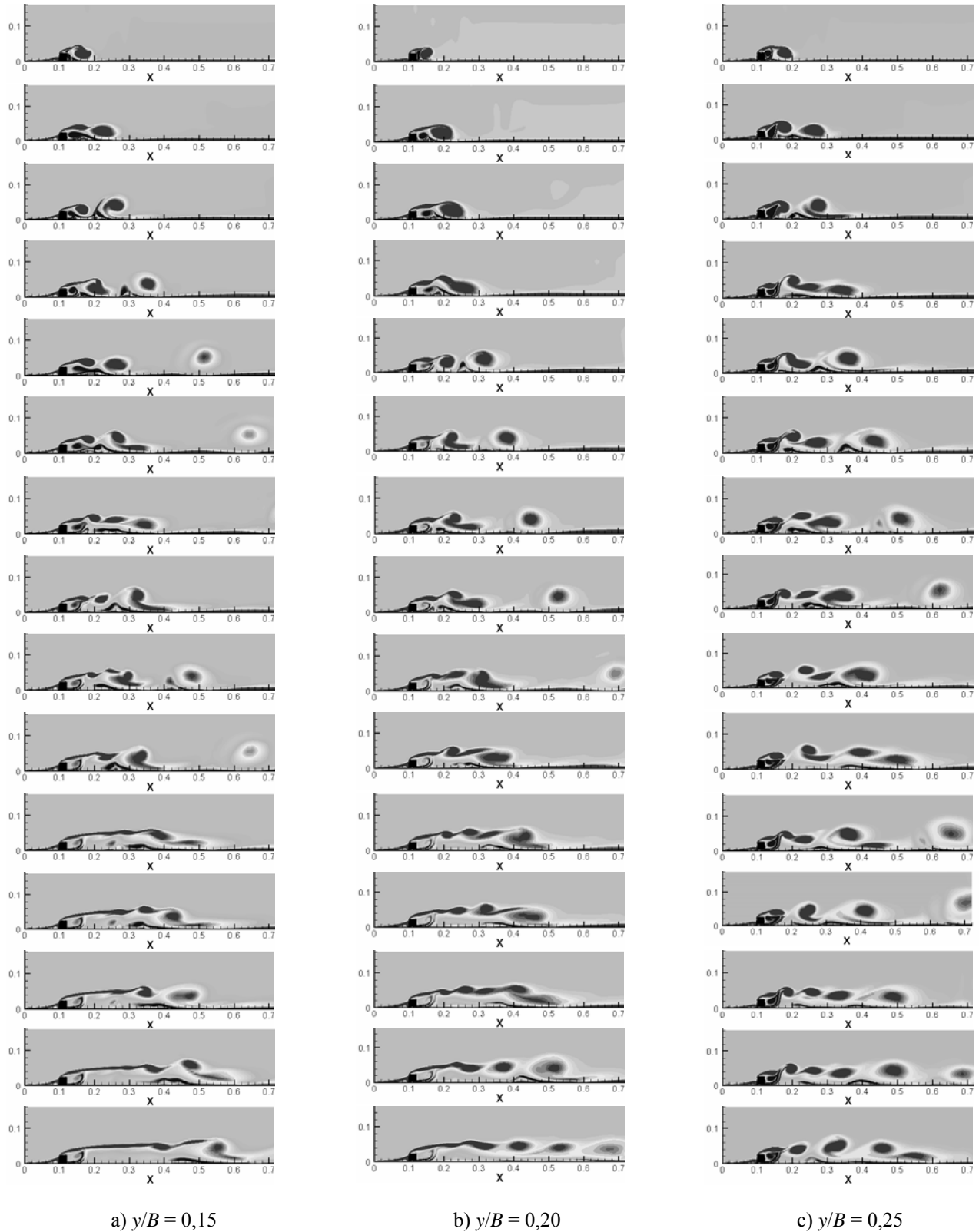


Figura 14. Mapas de isovorticidade para $Re = 700$, de 0 a 100 segundos.

Uma análise simultaneamente dos dados quantitativos obtidos com o auxílio da sonda numérica (Figs. 4 a 9) com os resultados qualitativos apresentados nas Figs. 11 a 14, permite verificar que a esteira mostra comportamento oscilatório para $y/B = 0,25$ e $Re \geq 400$. A supressão da emissão de vórtices para Re iguais a 400 e 500 ocorre com $y/B = 0,20$ e para $Re = 700$ para $y/B = 0,15$. Estes resultados podem ser facilmente comprovados realizando-se uma Transformada Rápida de Fourier (FFT) dos sinais de velocidade apresentados nas Figs. 7, 8 e 9. Os resultados decorrentes deste processo são apresentados na Fig. 15, mostrando que, para valores de y/B inferiores a 0,2, só ocorre a emissão de vórtices para $Re = 700$.

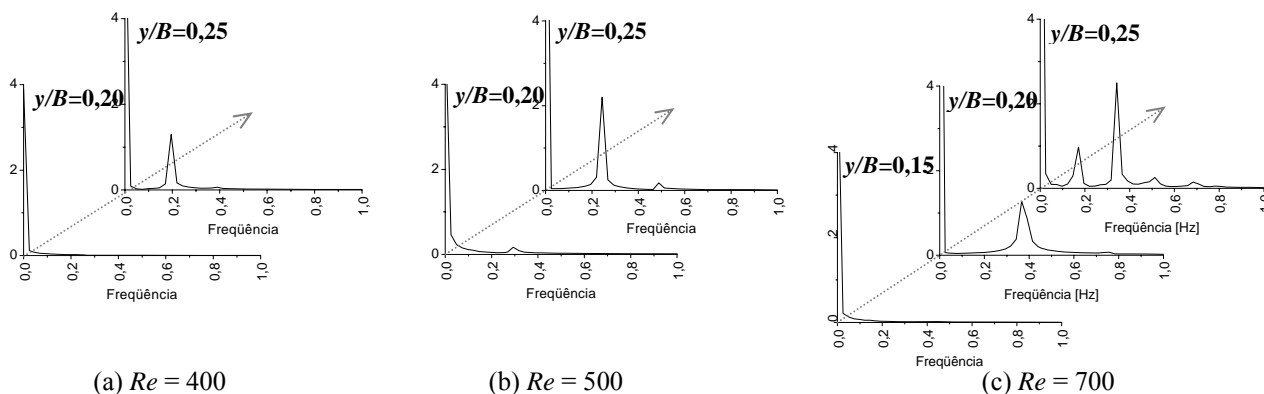


Figura 15. Frequência de emissão de vórtices para diferentes distâncias da parede.

A partir destes resultados, pode-se obter os seguintes valores para o número de Strouhal: a) para $y/B = 0,25$ e $Re = 400, 500$ e 700 , $St = 0,1953$; b) para $y/B = 0,20$ e $Re = 700$, $St = 0,2093$. Estes resultados não concordam bem com os dados de Bhattacharyya *et al.* (2006), onde não foi identificada a emissão de vórtices para $Re < 500$, para espaçamentos y/B menores que 0,25. A principal causa para este desencontro nos resultados pode ser atribuída à forma do perfil de velocidades prescrita na entrada do domínio de cálculo – uniforme, no caso do presente estudo, e cisalhante linear no trabalho de Bhattacharyya *et al.* (2006).

5. CONCLUSÃO

No presente trabalho, o escoamento em torno de um cilindro de base quadrada posicionado nas imediações de uma parede plana impermeável foi investigado numericamente. Simulações bidimensionais, realizadas para números de Reynolds relativamente baixos, permitiram a obtenção de resultados qualitativos e quantitativos, a partir dos quais as distâncias y/B críticas, correspondentes à supressão do regime de emissão de vórtices, puderam ser identificadas. Os dados obtidos são fisicamente consistentes, embora apresentem certa divergência com dados disponibilizados na literatura.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores expressam seus agradecimentos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP e à Fundação para o Desenvolvimento da UNESP – FUNDUNESP, pelo apoio concedido à realização deste trabalho.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bailey, S.C.C., Martinuzzi, R.J., Kopp, G.A., 2002, "The effects of wall proximity on vortex shedding from a square cylinder: three-dimensional effects", *Physics of Fluids*, v.14, pp.4160-4177.
- Bhattacharyya, S., Maiti, D.K., 2004, "Shear flow past a square cylinder near a wall", *International Journal of Engineering Science*, v.42, pp.2119-2134.
- Bhattacharyya, S., Karagpur, Maiti, D.K., 2006, "Vortex shedding suppression for laminar flow past a square cylinder near a plane wall: a two-dimensional analysis", *Acta Mechanica*, v.184, pp.15-31.
- Bosch, G., Kappler, M., Rodi, W., 1996, "Experiments on the flow past a square cylinder placed near a wall", *Experimental Thermal and Fluid Science*, v.13, pp.292-305.
- Bosch, G., Rodi, W., 1996, "Simulation of vortex shedding past a square cylinder near a wall", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v.17, pp.267-275.
- Campregher, R., Silveira-Neto, A., Mansur, S.S., 2003, "The near-wall influence on the flow around a single square cylinder", *Proc. 17th International Congress of Mechanical Engineering*, pp.1-5.
- Campregher, R.J., 2002, "Simulação Numérica de Escoamentos Transicionais e Turbulentos ao Redor de Geometrias Cartesianas", Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Unesp, Ilha Solteira, Brasil.

- Durão, D.F.G., Gouveia, P.S.T., Pereira, J.C.F., 1991, "Velocity characteristics of the flow around a square cross section cylinder placed near a channel wall", *Experiments in Fluids*, v.11, pp.341-350.
- Hayase, T., Humphrey, J.A.C., Greif, R., 1992, "A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures", *J. Comput. Physics*, Vol.98, pp.108-118.
- Leonard, B.P., 1979, A stable and accurate convective modeling proceed based on quadratic upstream interpolation, *Comp. Meth. Applied Mech. Eng.*, vol.19, pp.59-97.
- Liou, T.M., Chen, S.H., Hwang, P.W., 2002, "Large eddy simulation of turbulent wake behind a square cylinder with a nearby wall", *Journal of Fluids Engineering*, v.124, pp. 81-90.
- Martinuzzi, R.J., Bailey, S.C.C., Kopp, G.A., 2003, "Influence of wall proximity on vortex shedding from a square cylinder", *Experiments in Fluids*, v.34, pp.585-596.
- Park, Y, Cho, Y., Lee, D.H., 2001, "Vortex Shedding around a square cylinder near a wall", *Proc. 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV.
- Straatman, A.G., Martinuzzi, R.J., 2003, "An examination of the effect of boundary layer thickness on vortex shedding from a square cylinder near a wall", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v.91, pp.1023-1037.

MODELAÇÃO DO ESCOAMENTO TURBULENTO EM COMPRESSORES CENTRÍFUGOS DE ALTA VELOCIDADE

Rovanir Baungartner, baungartner@polo.ufsc.br

César J. Deschamps, deschamps@polo.ufsc.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Santa Catarina
88.040-900, Florianópolis, SC

Resumo. Compressores centrífugos são comumente adotados para a compressão de gases em diversas aplicações de engenharia. Este tipo de compressor possui usualmente geometrias complexas, tornando difícil a caracterização do escoamento através do emprego de modelos semi-empíricos, principalmente quando uma geometria não usual deve ser analisada. De fato, para a avaliação do desempenho do compressor torna-se necessária a caracterização do escoamento ao longo do rotor e de eventuais regiões de separação. Embora grande parte dos estudos sobre compressores centrífugos seja apoiada em investigações experimentais, recentemente tem havido uma tendência para o uso da simulação numérica do escoamento turbulento para o dimensionamento preciso de rotores. Neste trabalho, o escoamento turbulento no rotor de um compressor centrífugo de alta velocidade é simulado com o emprego do modelo de turbulência RNG $k-\varepsilon$. Resultados para os campos de pressão, velocidade e grandezas turbulentas são apresentados para uma análise detalhada do escoamento, de forma a permitir o entendimento dos parâmetros globais de desempenho.

Palavras chave: compressor centrífugo, escoamento sob efeito de rotação, modelação da turbulência.

1. INTRODUÇÃO

O compressor centrífugo é a aplicação mais comum de máquinas de fluxo de alta rotação, sendo utilizado para a compressão de gases em sistemas de alimentação de motores de combustão interna e em sistemas de refrigeração industrial. Construtivamente o compressor centrífugo é semelhante a uma bomba centrífuga. O fluido sofre a ação centrífuga das pás do rotor e, após ser succionado na região central do rotor, é obrigado a se deslocar para a região periférica. Do rotor o fluido se dirige para um difusor, responsável por reduzir a velocidade do escoamento e, por conseqüência, aumentar a pressão. Em casos onde a razão de pressão é baixa, o compressor pode ser constituído de um único rotor. No entanto, na maioria dos casos adota-se a compressão por múltiplos estágios, sendo o número destes diretamente ligado à razão de pressão requerida.

De acordo com Came e Robinson (1999), a disponibilidade atual de recursos de processamento computacional adequados tem permitido a utilização de modelos mais realísticos para a simulação e o projeto desses compressores, considerando o padrão tridimensional de escoamento nos rotores. De fato, o uso tradicional de modelos semi-empíricos é muitas vezes impraticável, principalmente quando se objetiva a análise de uma geometria não usual.

Uma série de escoamentos turbulentos é caracterizada pela condição de não-equilíbrio e por efeitos de inércia, originados pela rotação ou curvatura do escoamento. Modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta geralmente falham na previsão de tais situações de escoamento, como detalhado em diversos estudos experimentais e numéricos. A forma mais natural para incorporar o efeito da rotação consiste na adoção de um modelo baseado em equações de transporte para as tensões de Reynolds, uma vez que as mesmas possuem as formas exatas dos termos que descrevem tal fenômeno. No entanto, embora essa abordagem seja fisicamente mais atrativa do que a oferecida pelos modelos de viscosidade turbulenta, modelos de transporte para as tensões de Reynolds não tiveram o desenvolvimento, ou a aceitação, como inicialmente previsto há mais de dez anos atrás. A razão desta situação se deve em parte ao maior custo computacional associado à solução numérica de um sistema bem mais complexo de equações, além de dificuldades com a estabilidade numérica do procedimento iterativo de cálculo. Por esta razão, os modelos de viscosidade turbulenta são ainda a opção mais adotada na solução de escoamentos complexos. Uma vez que esses modelos são intrinsecamente insensíveis a efeitos de rotação, suas equações são usualmente modificadas de forma a incluir termos dependentes da rotação (Howard *et al.*, 1980).

Segundo Yuan *et al.* (2003), o modelo RNG $k-\varepsilon$ (Yakhot e Orzag, 1986) é um modelo de viscosidade turbulenta que fornece previsões consistentes para escoamentos sob efeitos de curvatura e de gradientes adversos de pressão, o que explica sua representação adequada de escoamentos com rotação. Além disto, o modelo RNG $k-\varepsilon$ oferece estabilidade numérica e taxa de convergência satisfatória, necessitando somente de um pequeno esforço computacional adicional quando comparado com versões de modelo $k-\varepsilon$ tradicionais.

Neste trabalho, o escoamento turbulento no rotor de um compressor centrífugo de alta velocidade é modelado com o emprego do modelo de turbulência RNG $k-\varepsilon$, considerando uma formulação tridimensional. Resultados para os campos de pressão total e de grandezas turbulentas são apresentados para uma análise do escoamento.

2. METODOLOGIA DE SIMULAÇÃO

2.1. Equações governantes do escoamento

Ao se aplicar o conceito de média de Reynolds, as equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia podem ser reescritas da seguinte forma (Versteeg e Malalasekera, 1995):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j U_i) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) + F_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i \rho H) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \overline{u'_i h'}) \quad (3)$$

Analisando a equação referente à quantidade de movimento (Eq. 2), observa-se que a média do produto das flutuações de velocidade $\overline{u'_i u'_j}$, denominada tensor de Reynolds, representa o transporte de quantidade de movimento adicional devido à turbulência. A mesma interpretação pode ser dada ao fluxo de energia turbulento $\overline{u'_i h'}$.

Como a solução das equações de Reynolds depende do conhecimento do tensor de Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ e do fluxo turbulento de energia $\overline{u'_i h'}$, a avaliação desses termos é o principal objetivo dos modelos de turbulência. Geralmente, esses modelos fazem uso da hipótese de viscosidade turbulenta, μ_t , proposta originalmente por Boussinesq. Esta hipótese é uma analogia direta às relações constitutivas para fluidos newtonianos, nas quais as tensões são proporcionais à deformação do escoamento. Desse modo, o tensor de Reynolds é avaliado através da introdução de uma viscosidade turbulenta:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu_t \frac{\partial U_m}{\partial x_m} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \quad (4)$$

Analogamente ao que se realiza para a transferência de quantidade de movimento, a contribuição da turbulência no transporte de energia térmica pode ser modelada através de uma difusão turbulenta, Γ_t , relacionada com μ_t através da definição de um número de Prandtl turbulento $Pr_t (= \mu_t C_p / \Gamma_t)$:

$$-\rho \overline{u'_i h'} = \frac{C_p \mu_t}{Pr_t} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

O parâmetro C_p representa o calor específico do fluido à pressão constante. Usualmente os modelos de turbulência assumem valores para Pr_t em torno de 1, mas, segundo Wang e Komori (1998), um valor mais apropriado para gases fica em torno de 0,90. O modelo de turbulência adotado neste trabalho para as simulações do escoamento, assume $Pr_t = 0,85$. Para investigar a eventual importância deste aspecto, foram realizadas simulações com valores para Pr_t iguais a 0,85 e 0,90, não sendo encontradas diferenças significativas nos resultados.

Como o escoamento presente ao longo dos rotores centrífugos é de natureza compressível torna-se necessária ainda uma equação de estado que relacione a massa específica com a pressão e a temperatura. Neste trabalho, por simplicidade, adotou-se a equação de estado para gás ideal:

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (6)$$

2.2. Modelação da turbulência

Kunz e Lakshminarayana (1992) utilizaram o modelo $k-\varepsilon$ para simular o escoamento em um rotor centrífugo, encontrando uma concordância satisfatória com dados experimentais. O modelo RNG $k-\varepsilon$ (Yakhot e Orzag, 1986) é uma das diversas versões de modelo $k-\varepsilon$. Orzag et al. (1993) defendem que o modelo RNG $k-\varepsilon$ permite a previsão de

escoamentos com regiões de separação, linhas de corrente curvas e regiões de estagnação; características comuns em rotores centrífugos.

A viscosidade efetiva, μ_{ef} , é definida como a soma das viscosidades molecular e turbulenta:

$$\mu_{ef} = \mu + \mu_t \quad (7)$$

O modelo RNG k - ε utilizado neste trabalho permite que o efeito da rotação sobre a turbulência seja avaliado, através da seguinte relação para a viscosidade turbulenta:

$$\mu_t = \mu_{t0} f\left(\alpha_s, \Omega, \frac{k}{\varepsilon}\right) \quad (8)$$

Em que Ω é um parâmetro de rotação e α_s é uma constante igual a 0,07. Para números de Reynolds elevados o valor da viscosidade turbulenta μ_{t0} que aparece na Eq. (8) é avaliado de:

$$\mu_{t0} = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (9)$$

sendo que $C_\mu = 0,0845$.

A energia cinética turbulenta, k , e sua dissipação, ε , necessárias na avaliação da viscosidade turbulenta, são obtidas das seguintes equações de transporte:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \mu_{ef} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \mu_t S^2 - \rho \varepsilon - Y \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \mu_{ef} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t S^2 - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - R \quad (11)$$

sendo que os valores de $C_{\varepsilon 1}$ e $C_{\varepsilon 2}$ são iguais a 1,42 e 1,68, respectivamente.

O inverso do número de Prandtl, α , que aparece nos termos de transporte por difusão das equações acima, é dado pela seguinte relação:

$$\left| \frac{\alpha - 1,3929}{\alpha_0 - 1,3929} \right|^{0,6321} \left| \frac{\alpha - 2,3929}{\alpha_0 - 2,3929} \right|^{0,3679} = \frac{\mu}{\mu_{ef}} \quad (12)$$

em que $\alpha_0 = 1,0$.

O termo Y na Eq. (10) representa efeitos de compressibilidade do escoamento sobre a turbulência, sendo avaliado de acordo com a proposta de Sarkar e Balakrishnan (1990):

$$Y = \frac{2\rho \varepsilon k}{\gamma RT} \quad (13)$$

O termo R na Eq. (11) é relacionado à taxa de deformação do escoamento, sendo expresso por:

$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta / \eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (14)$$

em que $\eta = Sk / \varepsilon$, $\eta_0 \cong 4,38$, $\beta = 0,012$, $S^2 = 2S_{ij}S_{ij}$.

O parâmetro S_{ij} representa o tensor taxa de deformação do escoamento médio. Em regiões de pequenas deformações do escoamento, o termo R tende a aumentar um pouco o valor da viscosidade efetiva, μ_{ef} , mas mesmo nessas situações o valor de μ_{ef} ainda é menor do que se fosse avaliado pelo modelo k - ε padrão. Em regiões de grande deformação o sinal de R torna-se negativo e μ_{ef} é reduzido consideravelmente. Esta característica do modelo RNG k - ε é principal responsável pelas melhorias verificadas na previsão de escoamentos com regiões de separação.

2.3. Condições de Contorno

Devido à natureza elíptica das equações de transporte apresentadas nas seções anteriores, condições de contorno para todas as variáveis dependentes devem ser especificadas em todos os contornos. No presente trabalho, quatro tipos de condições de contorno foram adotados: i) condição de entrada; ii) condição de saída; iii) condição de parede sólida; iv) condição de periodicidade.

Usualmente, perfis de velocidade e de quantidades turbulentas são obtidos de dados experimentais, no entanto, neste trabalho estas informações não estão disponíveis. De acordo com Versteeg e Malalasekera (1995), é comum a solução de escoamentos avaliando as quantidades turbulentas a partir da intensidade turbulenta $I (= u'/V_{ref})$ e da escala de comprimento $L^* (=L/D)$.

Neste trabalho, adotaram-se em todas as simulações valores de 0,03 para a intensidade turbulenta, I , e de 0,07 para a escala de comprimento, L^* . Na intensidade turbulenta, u' representa uma média aritmética entre os desvios padrões das flutuações de velocidade nas três direções do escoamento e V_{ref} é uma velocidade de referência, neste trabalho representada pela velocidade média do escoamento na entrada do rotor. Por outro lado, a escala de comprimento L é adimensionalizada pelo comprimento característico da geometria na entrada do rotor, neste caso pela diferença entre raios da entrada do rotor.

A entrada do domínio de solução é posicionada um pouco a montante da entrada do rotor, conforme representada pela superfície azul na Fig. 1. Assume-se que o escoamento seja axial nesta região, sendo então especificadas a pressão e a temperatura de estagnação. Ao se posicionar a região de entrada do domínio desta forma, buscou-se garantir a estabilidade numérica do procedimento iterativo e, além disto, prever eventuais regiões de recirculação na entrada do rotor.

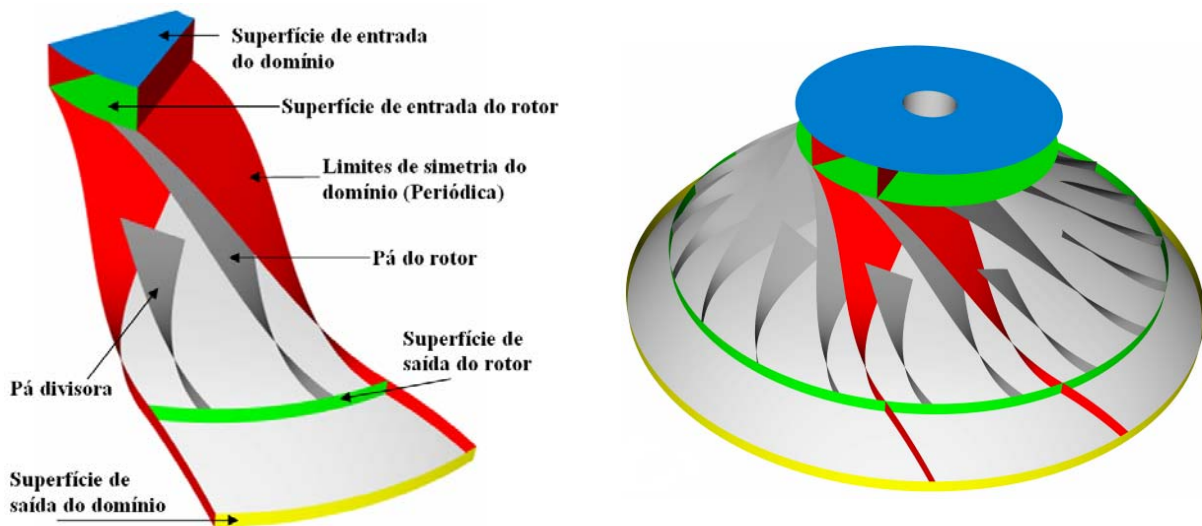


Figura 1. Representação do domínio computacional adotado, com as superfícies de interesse (à esquerda) e a representação da condição de contorno periódica (à direita).

De maneira análoga à região de entrada, estabelece-se a região de saída do domínio de solução também afastada da saída do rotor, representada pela área amarela na Fig. 1. Na região de saída é especificada uma condição de contorno de pressão estática. No caso de não haver recirculação através da fronteira de saída, a condição de contorno para as demais quantidades recai em uma situação de escoamento localmente parabólico. Caso contrário, prescrevem-se valores para as quantidades turbulentas e a temperatura de estagnação. Os valores para a intensidade turbulenta e a escala de comprimento são avaliados da mesma forma como descrito para a seção de entrada, com o comprimento característico sendo a largura da superfície de saída do domínio computacional.

A fim de reduzir o tempo computacional, e aproveitando a simetria da geometria do escoamento, a simulação não foi feita para o rotor completo, mas sim para um canal formado entre duas pás, região compreendida entre as superfícies vermelhas na representação da Fig. 1. Assume-se, portanto, que o escoamento seja idêntico entre todos os canais internos formados pelo rotor e a carcaça. Esta hipótese é representada pela condição de periodicidade entre as superfícies ao longo rotor e das regiões prolongadas na entrada e na saída.

Para a velocidade foi assumida a condição de não deslizamento e de parede impermeável. Além disto, as paredes sólidas foram consideradas adiabáticas. O movimento de rotação do rotor é modelado através de um sistema de referência móvel. Não menos importante para a modelação da turbulência, é a maneira como são tratadas as regiões próximas a paredes. A condição de não deslizamento junto à parede implica que, na vizinhança imediata de uma

superfície sólida, os efeitos viscosos são predominantes, afetando o campo de velocidades e a turbulência. A fim de evitar o uso de malhas extremamente refinadas nas proximidades das paredes, reduzindo assim os custos computacionais, foram utilizadas funções-parede de não-equilíbrio (Kim e Choudhury, 1995)

2.4. Metodologia de Solução Numérica

A metodologia de volumes finitos foi escolhida para a solução numérica das equações governantes, empregando o código comercial Fluent 6.3.26 (ANSYS, 2006). O sistema de equações para as variáveis do escoamento foi resolvido pelo método segregado, com a linearização das equações sendo realizada através de uma formulação totalmente implícita em um arranjo de malha co-localizado. O sistema de equações algébricas foi resolvido com o emprego do método de Gauss-Seidel em conjunto com o método Multigrid (AMG).

Pelo fato das equações não serem lineares e, além disto, serem acopladas, a solução do problema deve ser obtida através de algoritmos iterativos. Para minimizar eventuais efeitos de instabilidade numérica, fatores de sub-relaxação foram empregados para reduzir a variação do valor das propriedades de uma iteração para outra. O algoritmo PISO, em particular, é sugerido para a aplicação em problemas compressíveis (ANSYS, 2006), sendo então o utilizado neste trabalho.

Em escoamentos complexos encontrados em máquinas de fluxo, muitas vezes passíveis de regiões de recirculação e estagnação, há a necessidade do uso de esquemas de interpolação de precisão elevada para a avaliação dos valores nas faces dos volumes, em malhas não estruturadas. Dentre os esquemas de interpolação de maior precisão disponíveis, optou-se pelo uso de um esquema *upwind* de segunda ordem (Barth e Jespersen, 1989).

Para escoamentos que envolvam rotações elevadas e/ou sejam dominados por efeitos de curvatura, é recomendado o uso do esquema PRESTO! (*PREssure STaggering Option*) para a interpolação da pressão. O esquema PRESTO! utiliza um balanço discreto da massa em um volume de controle desencontrado sobre a face, de forma a encontrar o valor da pressão na face do volume.

Quando a fronteira externa no domínio computacional do fluido se encontra em movimento, é conveniente alterar o sistema de referência para expressar as equações. O método MRF (*Moving Reference Frame*) é aplicado com o intuito de simplificar o cálculo do escoamento no domínio computacional em rotação, permitindo transformar um problema transiente, em relação a um sistema de referência estacionário, em um problema estacionário, quando formulado para um sistema referencial em rotação.

Uma etapa importante, senão essencial, da simulação de escoamentos é a análise de erros de truncamento devido à discretização das equações na malha computacional e a validação dos resultados numéricos através de comparações com dados experimentais ou resultados de outras referências. Neste trabalho, devido a não existência de dados experimentais para compressores centrífugos operando nas condições de baixa capacidade de refrigeração aqui analisada, realizou-se uma análise dos erros de truncamento por refino de malha.

3. RESULTADOS

A simulação do escoamento foi realizada para o canal formado entre duas pás do rotor de um compressor centrífugo, do 1º estágio de um compressor projetado para operar com o fluido R601a, em uma capacidade de refrigeração de 17,6 kW, na condição HBP (*High Back Pressure*). Um aspecto que deve ser mencionado é o fato de que a espessura das pás foi negligenciada na simulação numérica. A Tab. 1 apresenta as principais características geométricas e operacionais do compressor em questão, chamando-se a atenção para a velocidade do compressor que gira com 61.000 rpm.

Tabela 1. Principais parâmetros geométricos e condições de operação do rotor analisado.

Rotação	D_{1h}	D_{1t}	D_2	b_2	P_{02}	\dot{m}	Razão de pressão
61.000 rpm	8 mm	19,3 mm	77,9 mm	1,9 mm	125,6 kPa	60,75 g/s	2,43

O valor da pressão prescrito na saída do domínio de solução foi avaliado de tal forma que o escoamento, após passar pelo difusor, produzisse a razão de pressão de projeto. Assim, este procedimento recai em um processo iterativo, pois não se conhece inicialmente a velocidade na saída do rotor. Deve ser salientado que pelo fato de o difusor não ser incluído no domínio de solução, a pressão na saída do estágio de compressão foi avaliada através de um coeficiente de recuperação de pressão de 65%.

Devido aos elevados gradientes das propriedades do escoamento em determinadas regiões do compressor centrífugo, tais como junto a superfícies sólidas e nas regiões de entrada e saída do rotor, a malha computacional deve ser suficientemente refinada para resolver tais gradientes de forma adequada. Apesar de boa parte dos trabalhos computacionais na área de turbo máquinas valer-se do uso de malhas hexaédricas, tais como os trabalhos de Kunz e

Lakshiminarayana (1992) e Tang (2006), ou malhas híbridas como em Michael *et al.* (2004), neste trabalho optou-se por utilizar uma malha com elementos tetraédricos.

Para a grande variação geométrica existente em compressores centrífugos de dimensões reduzidas, a malha tetraédrica foi capaz de caracterizar o compressor adequadamente, com um número de volumes inferior ao que seria requerido pela malha hexaédrica. De fato, devido à altura reduzida do canal na saída do rotor e do pequeno raio interno na região de entrada, torna-se difícil a obtenção de razões de aspecto adequadas para os volumes de uma malha hexaédrica, comprometendo a qualidade da solução e o custo computacional envolvido.

A fim de quantificar a influência do refino de malha sobre o resultado numérico, bem como no custo computacional envolvido, foram testadas quatro malhas computacionais, conforme o domínio computacional anteriormente mencionado. Os resultados para a vazão de massa, velocidade média e pressão nas regiões de entrada e saída do rotor são apresentados na Tab. 2.

Tabela 2. Variações das propriedades para diferentes refinamentos de malha.

Variáveis de Interesse	Malha Computacional (número de volumes)			
	I (634.076)	II (765.053)	III (916.813)	VI (1.091.449)
Fluxo de massa [g/s]	58,83	58,64	58,68	58,56
Velocidade na entrada, C_{01} [m/s]	47,36	47,27	49,18	48,89
Velocidade na saída, C_{02} [m/s]	173,47	173,49	173,06	173,20
Pressão total na saída, P_{02} [kPa]	115,17	115,22	115,03	115,18

Partindo do domínio computacional mencionado, com uma malha de aproximadamente 630.000 elementos (malha I), foram realizados refinamentos adaptativos com base nos gradientes das propriedades do escoamento. Inicialmente, foi realizado um refino da malha no rotor, notadamente para melhor caracterizar os gradientes de velocidade na região entre a carcaça e o rotor (malha II). Na sequência, a fim de melhor caracterizar eventuais regiões de recirculação, foi realizado um refino, tomando como referência os gradientes de grandezas turbulentas (malha III). Finalmente, a malha IV promove um refino do caso III a partir de gradientes de número de Mach, de forma a caracterizar regiões com a possível ocorrência de escoamento supersônico.

Conforme pode ser observado nos resultados da Tab. 2 para as seções de entrada e saída do rotor, de interesse no projeto do compressor centrífugo, não há uma diferença significativa nos resultados obtidos com as diferentes malhas. Da mesma forma, para a região de saída do rotor (Fig. 1) os resultados para contornos de número de Mach obtidos para as quatro malhas foram também similares, conforme lustrado na Fig. 2.

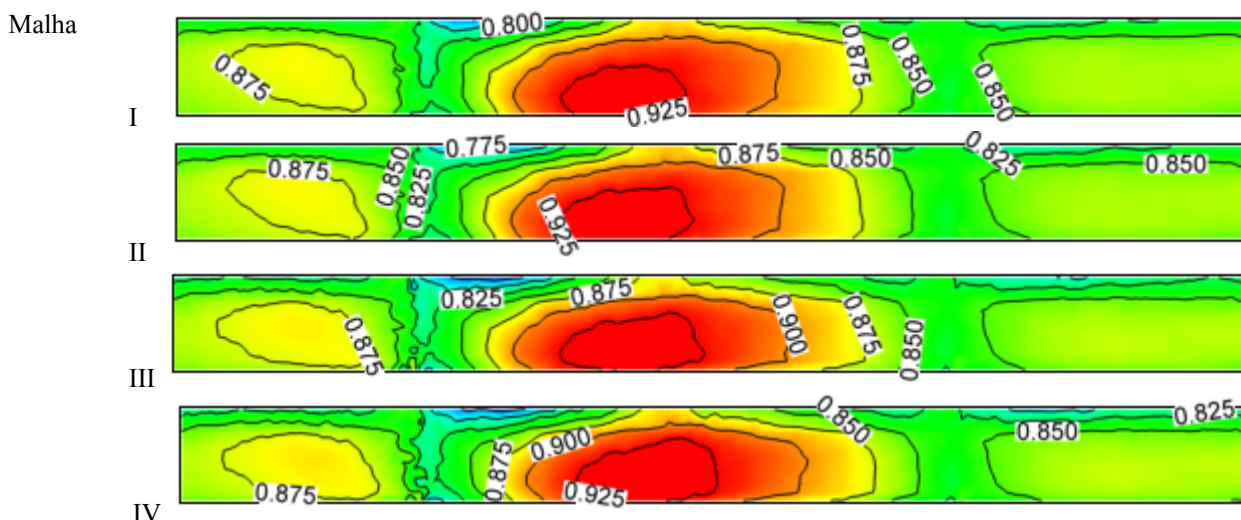


Figura 2. Número de Mach na saída do rotor, para diferentes níveis de refino de malha.

No entanto, analisando os resultados para contornos de energia cinética turbulenta [m^2/s^2] na saída do rotor, apresentados na Fig. 3, percebe-se que a caracterização da turbulência é afetada pelo refino da malha. De fato, os refinamentos das malhas III e IV produzem níveis de turbulência um tanto diferentes daqueles obtidos com as malhas I e II. Contudo, em função da concordância mostrada na Tab. 2 para resultados de vazão e velocidades médias nas seções de entrada e saída do rotor obtidos com as diversas malhas, pode-se afirmar que essa variação nos valores das grandezas turbulentas não afeta de forma significativa os parâmetros globais do escoamento.

Em função dos resultados para os campos do escoamento, concluiu-se que a diferença originada pelo maior refino da malha IV não justifica o custo computacional extra de cerca de duas vezes maior do que o necessário para a malha I. Para os resultados apresentados a seguir optou-se pelo uso da malha III, com um custo computacional 55% superior a malha I.

Para uma melhor compreensão da localização das seções do rotor em que os resultados serão apresentados, a Fig. 4. foi preparada com a identificação das principais superfícies de interesse no rotor. Neste sentido, a superfície do rotor é representada pela área delimitada pelas linhas em azul e a superfície da carcaça externa ao rotor pela área marcada pelas linhas em verde. Além disto, a pá do rotor está identificada pela cor amarela.

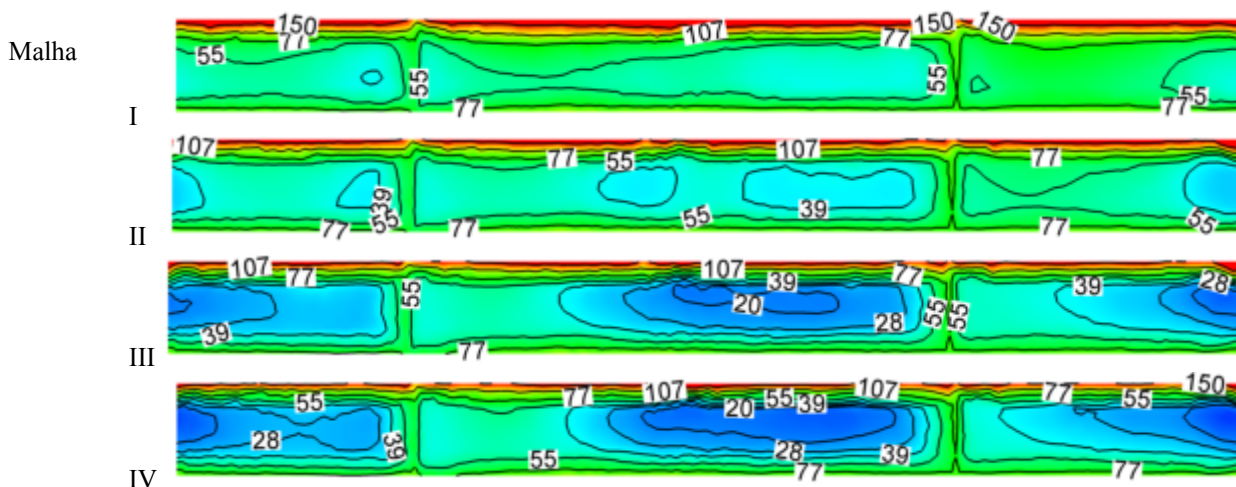


Figura 3. Energia cinética turbulenta na saída do rotor nos diferentes casos avaliados.

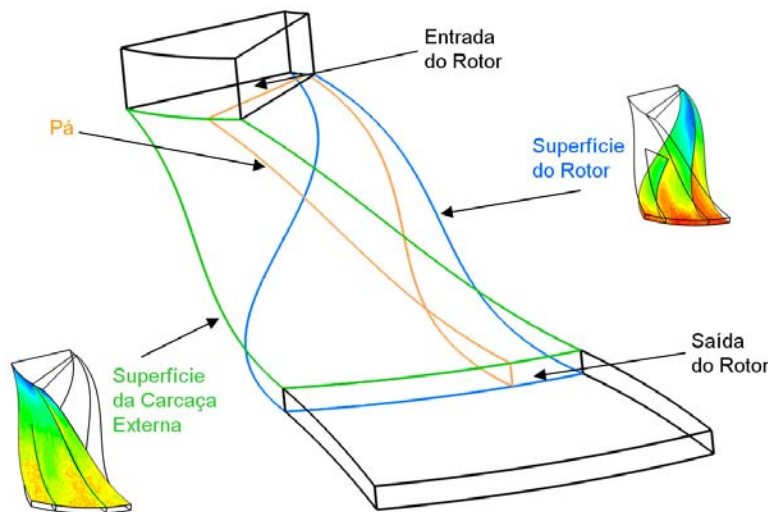


Figura 4. Localização das principais superfícies de interesse.

Os resultados apresentados na Fig. 5 mostram que a viscosidade turbulenta junto às superfícies do rotor e da carcaça externa é praticamente constante, muito embora os seus valores na região de entrada do rotor sejam ligeiramente menores. Deve ser mencionado que a viscosidade absoluta do fluido refrigerante R601a foi considerada constante ao longo do rotor e igual a $8,3 \times 10^{-6}$ Pa.s.

O parâmetro y^+ ($=u*y/v$) é usualmente utilizado para verificar se o refino da malha computacional junto às paredes sólidas é adequado para a aplicação das funções-parede e do modelo de turbulência selecionados. De fato, esse parâmetro, representativo da intensidade turbulenta junto às paredes, é fundamental para a correta caracterização do efeito da parede sobre a turbulência. Conforme mostrado na Fig. 6, as diferenças mais significativas nas magnitudes de y^+ são observadas junto à superfície do rotor, com os valores na região de entrada se aproximando do limite estipulado para a aplicação do modelo ($y^+= 11,2$). Na região de saída do rotor, valores de y^+ entre 70 e 80 são previstos em ambas as superfícies do rotor e da carcaça externa.

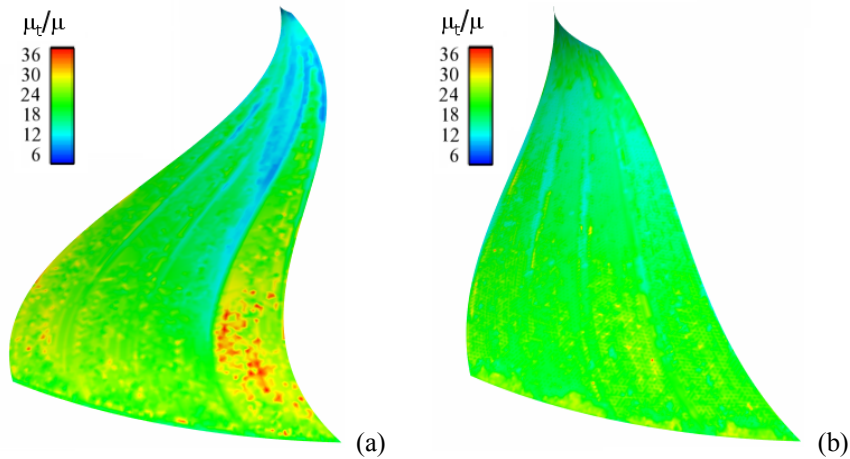


Figura 5. Razão entre viscosidade turbulenta, μ_t , e a viscosidade do fluido, μ : (a) superfície do rotor; (b) carcaça externa.

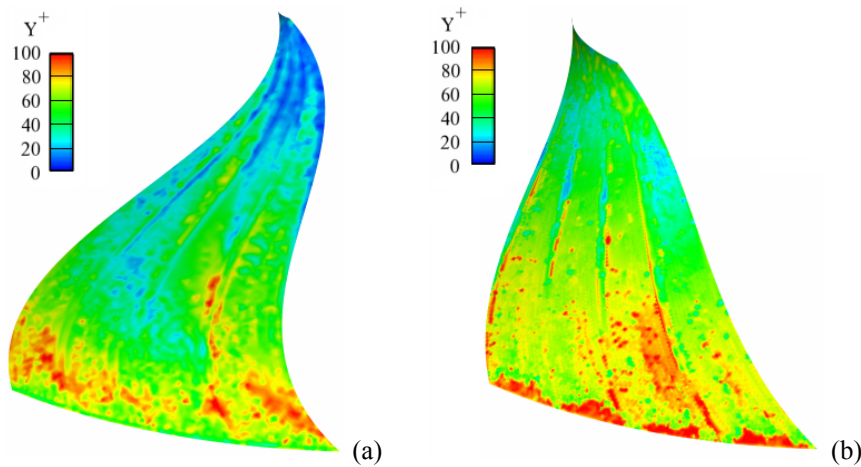


Figura 6. Valores de y^+ na superfície do rotor: (a) superfície do rotor; (b) carcaça externa.

Como pode ser observado na Fig. 7, os campos de velocidade e pressão, referentes a um corte transversal na seção média do rotor apresentam uma variação considerável na região de saída do rotor. Esses gradientes na saída do rotor originam um desvio da trajetória do escoamento na saída do rotor. À medida que este desvio aumenta, o mesmo acontece com as perdas no difusor do compressor devido ao surgimento de regiões de separação. Para reduzir esses gradientes de pressão, adotam-se comumente pás divisoras na saída dos rotores centrífugos. O uso dessas pás resulta em uma maior uniformidade do escoamento na região de saída, aumentando a área efetiva de passagem do escoamento e, desta forma, a vazão gerada pelo rotor.

Evidentemente, metodologias integrais são incapazes de prever alguns aspectos importantes do escoamento. A Fig. 8 representa, por exemplo, o campo de velocidade do escoamento na região de entrada do rotor. Observa-se que o campo de velocidade é muito diferente da hipótese de escoamento uniforme, geralmente adotada em formulações integrais. Verifica-se de fato que existe uma variação nas magnitudes da velocidade entre 10 m/s, na aresta de pressão no raio interno do rotor, e 90 m/s, no raio externo.

Outro aspecto não contemplado pela análise integral é a avaliação da presença de escoamento supersônico ao longo do rotor. Os resultados para o número de Mach junto à superfície do rotor na Fig. 9 mostram uma região de escoamento supersônico ($M \cong 1,1$) na junção entre a pá e a superfície do rotor. No entanto, o valor médio do número de Mach na

saída do rotor permanece abaixo da unidade ($M \cong 0,87$), evitando a formação de choque de pressão na entrada do difusor.

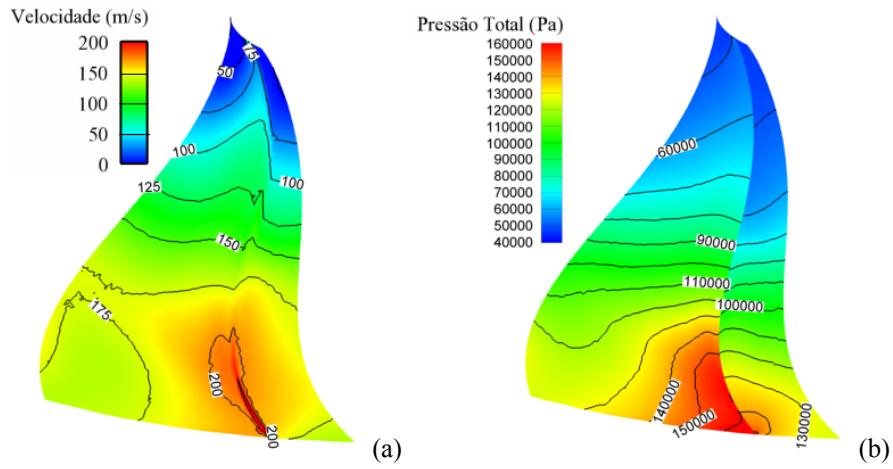


Figura 7. Campos de velocidade (a) e de pressão total (b) em um corte transversal ao longo do rotor.

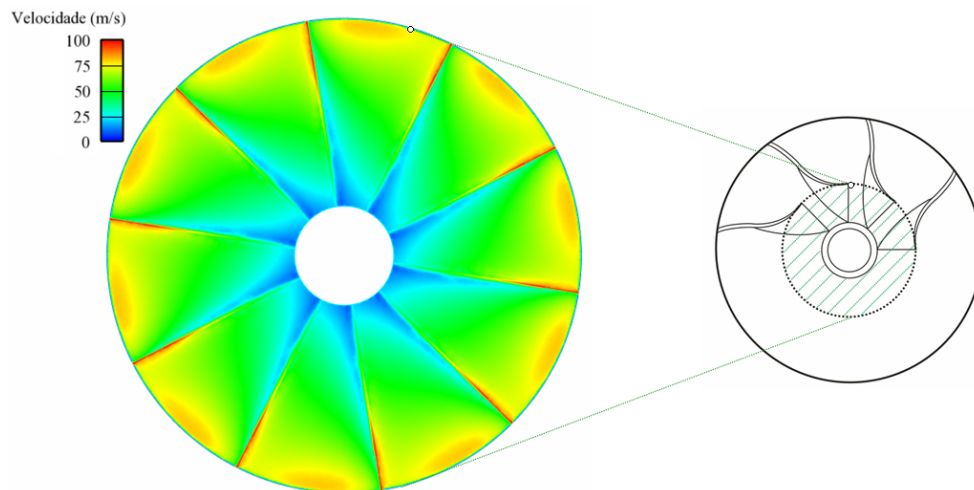


Figura 8. Resultado para velocidade do escoamento na entrada no rotor.

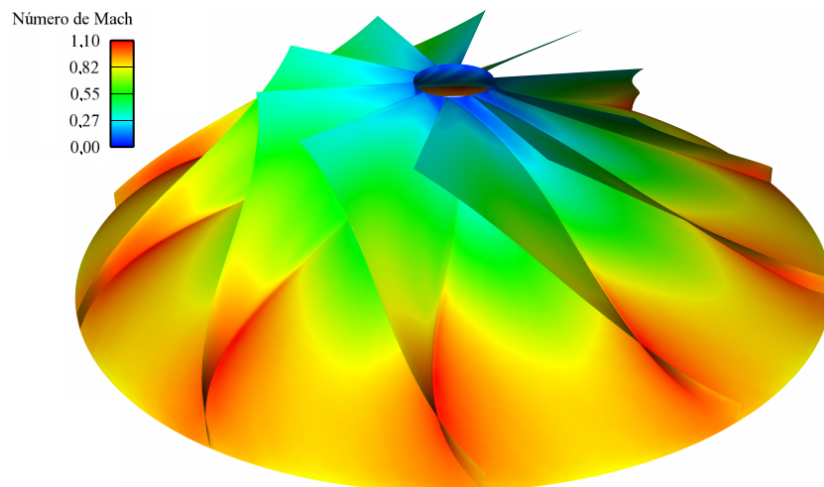


Figura 9. Resultado para valores de número de Mach junto à superfície do rotor.

4. CONCLUSÕES

O presente trabalho considerou a simulação do escoamento através do rotor de um compressor centrífugo de alta velocidade. Uma vez que o regime de escoamento em rotor é turbulento, com números de Reynolds tipicamente acima de 100.000, um modelo de turbulência foi utilizado para a previsão do escoamento.

As simulações numéricas foram realizadas para o escoamento através do rotor do 1º estágio de um compressor centrífugo, projetado para suprir uma capacidade de refrigeração de 17,6 kW, utilizando o fluido R601a, na condição de operação HBP. As equações governantes foram resolvidas numericamente através da metodologia dos volumes finitos, com o emprego de um código comercial. Uma análise de erros de truncamento foi realizada através do refino sistemático da malha computacional.

Resultados para os campos de pressão total e de velocidade foram apresentados e possibilitaram uma análise detalhada do escoamento. Além disto, resultados para grandezas turbulentas junto às superfícies do rotor e da carcaça externa permitiram uma complementação desta análise e uma verificação da aplicação correta das condições de contorno. A simulação tridimensional do escoamento no rotor permitiu identificar uma série de fenômenos que não podem ser previstos por formulações integrais, tais como regiões de não uniformidade nos níveis de velocidade na entrada e na saída do rotor.

5. AGRADECIMENTOS

Este estudo é parte de um acordo de cooperação técnico-científica entre a Universidade Federal de Santa Catarina e a EMBRACO, com apoios da Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

6. REFERÊNCIAS

- Anslys Inc., Fluent, Version 6.3.26, EUA, 2006.
- Barth, T. J., e Jespersen, D., The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes, Technical Report AIAA-89-0366, AIAA 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, 1989.
- Came, P. M., e Robinson, C. J., Centrifugal Compressor Design, ImechE, Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol. 213, Part C, 139-155, 1999.
- Howard, J.H.G., Patankar, S.V., Bordinuik, R.M., Flow Prediction in Rotating Ducts using Coriolis-Modified Turbulence Models. ASME J. Fluids Engrg. Vol. 102, 456-461, 1980.
- Kim, S. E., e Choudhury. D. A Near-Wall Treatment Using Wall Functions Sensitized to Pressure Gradient, ASME, Separated and Complex Flows, Vol. 217, 1995.
- Kunz, R. F., e Lakshminarayana, B., Three-Dimensional Navier-Stokes Computation of Turbomachinery Flows Using a Explicit Numerical Procedure and a Coupled k-ε Turbulence Model, Journal of Turbomachinery, Vol. 114, 627-642, 1992.
- Michael, R., Ruith, R., e Kelecy, F. J., Mapping the Eckardt Centrifugal Compressor, Fluent News, Spring, 2004.
- Orzag, S. A., Yakhot, V., Flannery, W. S., Boysan, F., Choudhury, D., Marusewski, J., e Patel, B., Renormalization Group Modeling and Turbulence Simulations, Near-Wall turbulent Flows, Elsevier Science Publisher, 1993.
- Sarkar, S., and Balakrishnan, L., Application of a Reynolds-Stress Turbulence Model to the Compressible Shear Layer, ICASE Report 90-18, NASA CR 182002, 1990.
- Tang, J., Computational Analysis and Optimization of Real Gas Flow in Small Centrifugal Compressors, Lappeeranta University of Technology, Finlândia, 2006.
- Versteeg, H. K., e Malalasekera, M., An introduction to computational fluid dynamics, The Finite Volume Method, Ed. Wiley, New York, EUA, 1995.
- Yakhot, V., e Orzag, S. A., Renormalization Group of Turbulence. Basic Theory, J. Sci. Comput., Vol. 1, 3-51, 1986.
- Yuan, Z. X., Saniei, N. e Yan, X. T., Turbulent Heat Transfer on the Stationary Disk in a Rotor-Stator System, Elsevier Science, Int. J. of Heat and Mass Transfer., Vol. 46, 2207-2218, 2003.
- Wang, Y., and Komori, S., Simulation of the Subsonic Flow in a High-Speed Centrifugal Compressor Impeller by the Pressure-Based Method, ImechE, Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol. 212, Part A, 269-287, 1998.

7. TERMO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis pelo material incluso neste trabalho.

CONTROLE DE ESCOAMENTO EM UM DIFUSOR A PARTIR DE EXCITAÇÕES PERIÓDICAS

Átila Antunes França Barbosa, atila_barbosa@yahoo.com.br

Bruno Henrique de Sena e Oliveira, bhsena@gmail.com

Marcelo Machado Bariani, marcelombariani@hotmail.com

Marcello Augusto Faraco de Medeiros, marcello@sc.usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (EESC-USP)

Avenida Trabalhador São-carlense, 400, Centro, CEP: 13560-970

São Carlos, São Paulo, Brasil

Abstract: *Este projeto visa estudar uma forma de controle da separação da camada limite, que é o controle de escoamento a partir de excitações periódicas, diferindo dos tradicionais métodos atualmente empregados na aviação, como por exemplo, o emprego de slots, wing fences e geradores de vórtices.*

Dentre as vantagens do uso de excitação periódicas no controle de escoamento, pode-se citar: grande eficiência no atraso da separação da camada limite, permitindo coeficientes de sustentação maiores e redução do arrasto; considerável diminuição de peso quando confrontado a vários métodos convencionais, a possibilidade de modificações de carregamentos sem produzir esforços excessivos aos componentes estruturais do avião e a possibilidade de desligamento do sistema.

O objetivo deste trabalho é aprofundar o conhecimento sobre essa forma de controle de escoamento, sendo empregado para tal fim um instrumental específico. Foi construído um mini-túnel com um difusor na saída e as excitações foram aplicadas paralelamente ao escoamento, junto a uma das paredes do difusor. O efeito do jato sintético no escoamento e foi medido por meio de um tubo de Pitot ligado a um sistema de aquisição de dados.

Keywords: *camada limite, controle de escoamento, excitações periódicas, excitação hidrodinâmica, jatos sintéticos, transição.*

1. INTRODUÇÃO

A separação da camada limite é geralmente relacionada ao descolamento do fluido da superfície sólida, causado por certos fatores, como por exemplo, um gradiente adverso de pressão severo, analisado por Simpson (1989), ou uma aberração geométrica, como relatado por Bradshaw e Wong (1972). A separação está quase sempre associada à depreciação de alguns parâmetros aerodinâmicos, incluindo perdas de sustentação e aumento do arrasto.

O controle dessa separação por excitação periódicas apresenta importância significativa em áreas relacionadas à engenharia, em campos como mecânico e aeroespacial, por isso vem sendo amplamente estudado nas últimas décadas. Por exemplo, o controle de separação da camada limite de escoamento externo foi estudado por Béra *et al* (2000) para cilindros, e por Seifert *et al* (1993) e MacManus e Magill (1997) para asas. Nos últimos casos, o controle aplicado próximo à parede proporcionou um atraso na separação da camada limite e um aumento da sustentação.

Quando o fluxo é controlado por meio de oscilações periódicas, estas podem ser obtidas através de fendas bi-dimensionais por onde atuam equipamentos acústicos/alto-falantes (Béra *et al*, 2003), pistões, sistema de válvulas ou por atuadores piezelétricos acoplados a diafragmas (Pack e Seifert, 1999 e Smith e Glezer, 2002). Além disso, perturbações no escoamento também podem ser geradas por atuadores montados sobre a superfície analisada, como é o caso dos fliperons (Greenblatt e Wygnanski, 2000).

As excitações periódicas aceleram e regulam a formação de estruturas coerentes, principalmente quando o escoamento principal é instável, transferindo quantidade de momento linear (momentum) através da camada de mistura, como observado por Oster *et al* (1978) e Browand e Ho (1983). O coeficiente de momentum ($C\mu$) para uma configuração de fenda bi-dimensional é definido de acordo com a Eq. (1):

$$C\mu = \rho_j U_j^2 G / 0.5 \rho_\infty U_\infty^2 L, \quad (1)$$

onde ρ é a densidade do ar, U é a velocidade do jato, j refere-se ao jato 2D promovido pela excitação, ∞ indica o escoamento vindo do duto, G é a largura da fenda por onde é inserida a excitação e L é o comprimento do corpo tomado em consideração, como a corda de um flap ou o comprimento da parede do difusor.

Em aplicações específicas em aerofólios, alguns experimentos mostraram que as excitações periódicas podem atrasar a separação da camada limite, fazendo com que a variação do coeficiente de sustentação máximo (ΔC_{Lmax}) aumente em até 120%, e que a variação do coeficiente de sustentação (ΔC_L) após o estol seja elevado em 240%, como pode ser observado por meio dos resultados obtidos por Smith *et al* (1998) e Amitay *et al* (1998).

O presente trabalho busca a análise das modificações que excitações periódicas proporcionam a um escoamento, mais especificamente a avaliação do comportamento de um difusor bi-dimensional de grande ângulo. Os atuadores não adicionam massa de maneira significativa ao escoamento, pois caso isso ocorresse estaria sendo produzido um mecanismo semelhante ao de sucção/sopro, o qual não é de interesse deste estudo.

Dentre as vantagens do uso de excitação periódica no controle de escoamento, pode-se citar: grande eficiência no retardo da separação da camada limite, permitindo coeficientes de sustentação mais altos e menor do arrasto; considerável diminuição de peso quando confrontado a vários métodos convencionais, a possibilidade de modificações de carregamentos sem produzir esforços excessivos aos componentes estruturais do avião, a possibilidade de desligamento do sistema e maior eficiência ao ser comparado a sistemas de sucção/sopro uniforme.

2. APARATO EXPERIMENTAL

2.1 Instalações do duto

Para realização do experimento foi montado um duto em MDF com comprimento igual a 1450 mm, seção interna retangular de altura 190 mm e largura 25 mm. Na entrada do duto está acoplada uma contração, que apresenta na saída uma seção com as mesmas dimensões internas do duto, e na sua entrada uma seção quadrada com lado de 120 mm. Neste ponto está instalada uma ventoinha, responsável por produzir o escoamento.

Na saída do duto foi montado um difusor com ângulo de abertura variável, mostrado na Fig. 1. Os componentes fixos aos eixos de rotação, em destaque na Fig. 1, podem girar, promovendo a mudança do ângulo do difusor. Já todas as outras estruturas que aparecem na Fig. 1 são fixas às paredes superior e inferior do duto.

As paredes representadas em cinza na Fig. 1 têm a mesma altura da seção interna do duto, 190 mm, e comprimento total igual a 53 mm, sendo que a circunferência possui raio igual a 7,5 mm (detalhes na Fig. 2).

Para realização das medidas dos ângulos de abertura do difusor foi instalado sobre a parede superior do duto um conjunto de transferidores, mostrados na Fig. 3, ligados diretamente aos eixos de rotação.

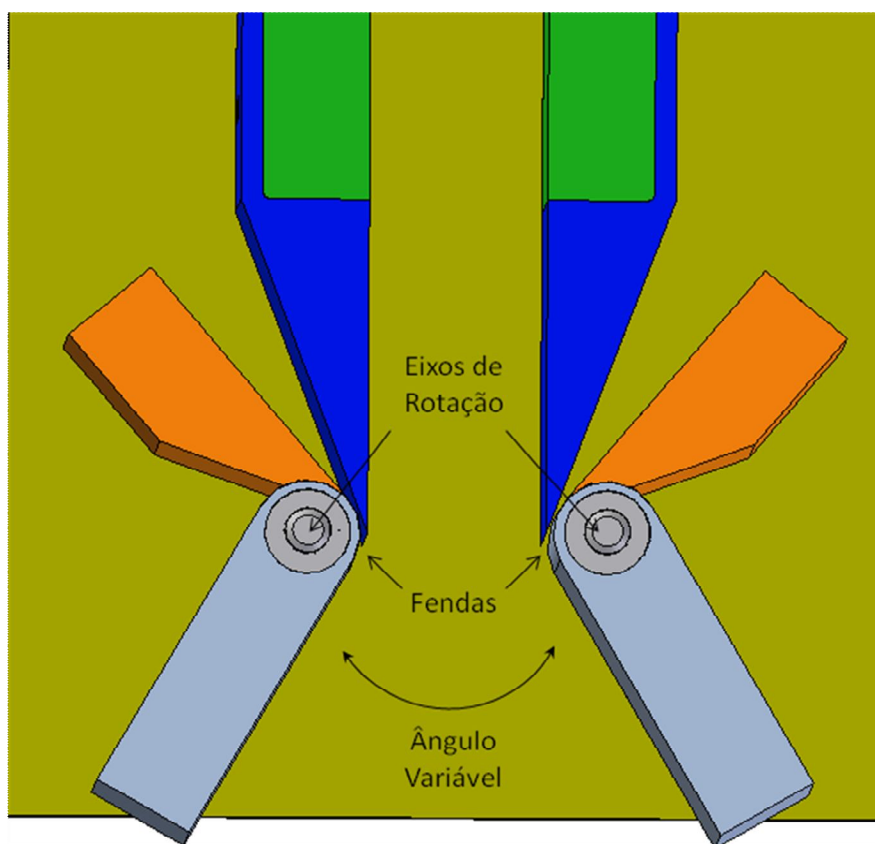


Figura 1: Difusor de Geometria Variável (corte com vista superior)

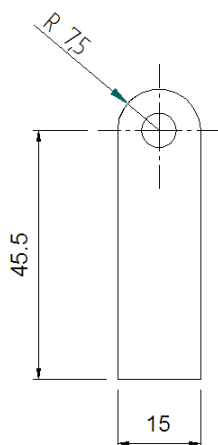


Figura 2: Vista superior da parede do difusor (dimensões em mm)

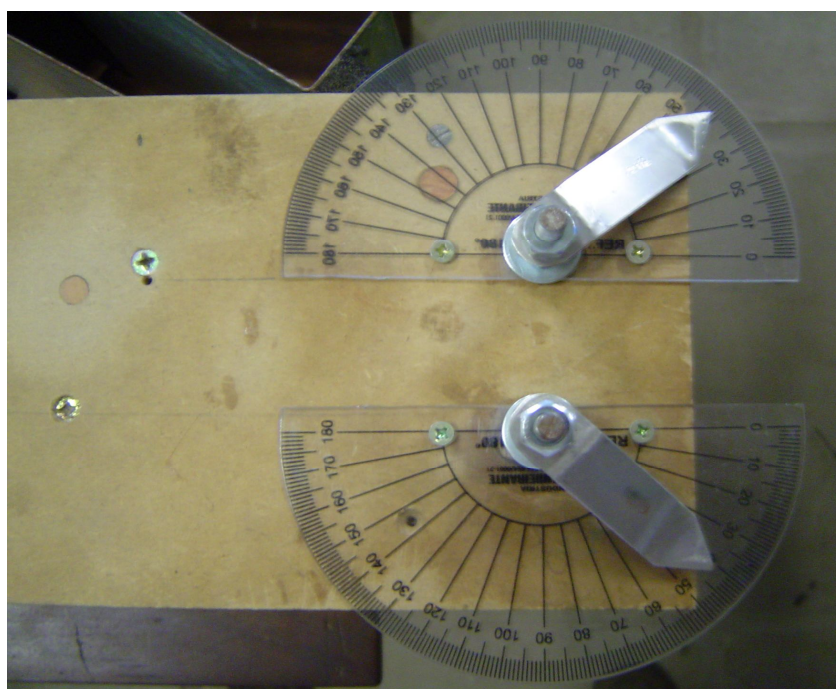


Figura 3: Transferidores usados para medição do ângulo de abertura do difusor

Em ambos os lados da porção final do duto, existe uma fenda, destacadas na Fig. 1, ao longo de toda altura das paredes laterais, com largura de 1 mm. Em uma destas fendas está instalado um canal, mostrado na Fig. 3, por onde são inseridas as excitações periódicas senoidais, geradas a partir de um subwoofer. A frequência de excitação reduzida F^+ , descrita na Eq. (2), será escolhida de modo que seu valor seja próximo de 1, já que nesse caso obtém-se a frequência reduzida ótima, de acordo com Greenblatt e Wynanski (2000), proporcionando a maior perturbação ao escoamento do duto principal

$$F^+ = X_{te} f_e / U_\infty, \quad (2)$$

onde X_{te} é a distância do atuador ao bordo de fuga da parede do flap, neste caso a parede do difusor, f_e é a frequência de excitação e U_∞ é a velocidade do escoamento do duto principal.

As perturbações produzidas pelas excitações periódicas serão adicionadas ao escoamento na direção tangencial ao escoamento principal, pois assim proporcionam maior eficácia na atuação, de acordo com Pack e Seifert (1999)

Os perfis de velocidade do escoamento foram medidos por meio de um tubo de Pitot, em diferentes pontos da saída do difusor, com o auxílio de um posicionador, construído no laboratório, controlado por meio de um circuito eletrônico e por um programa computacional montados neste projeto.

3. RESULTADOS E INTERPRETAÇÕES

As excitações utilizadas no experimento foram geradas pelo movimento do diafragma do alto-falante em sua câmara, ao qual era aplicado um sinal senoidal de tensão. As excitações eram, portanto, senoidais no domínio do tempo. Efetuaram-se varreduras nos casos de jato sem excitação ou excitado nas frequências 50 Hz, 100 Hz ou 202 Hz, sendo que em todas as medições a abertura do difusor foi mantida fixa, com meio-ângulo igual a 45°.

A Tab.1 contém, para cada caso, os valores de pressão atmosférica (P_{atm}), temperatura (T), densidade (ρ) e vazão (Q).

Tabela 1: Pressão atmosférica, temperatura, densidade e vazão.

Frequência (Hz)	P_{atm} (kPa)	T(K)	ρ (kg/m ³)	Q (x 10 ⁻² m ³ /s)
Sem excitação	91,7	301	1,07	2,0
50	91,9	301	1,07	2,6
100	91,7	301	1,07	3,1
202	91,7	299	1,07	2,8

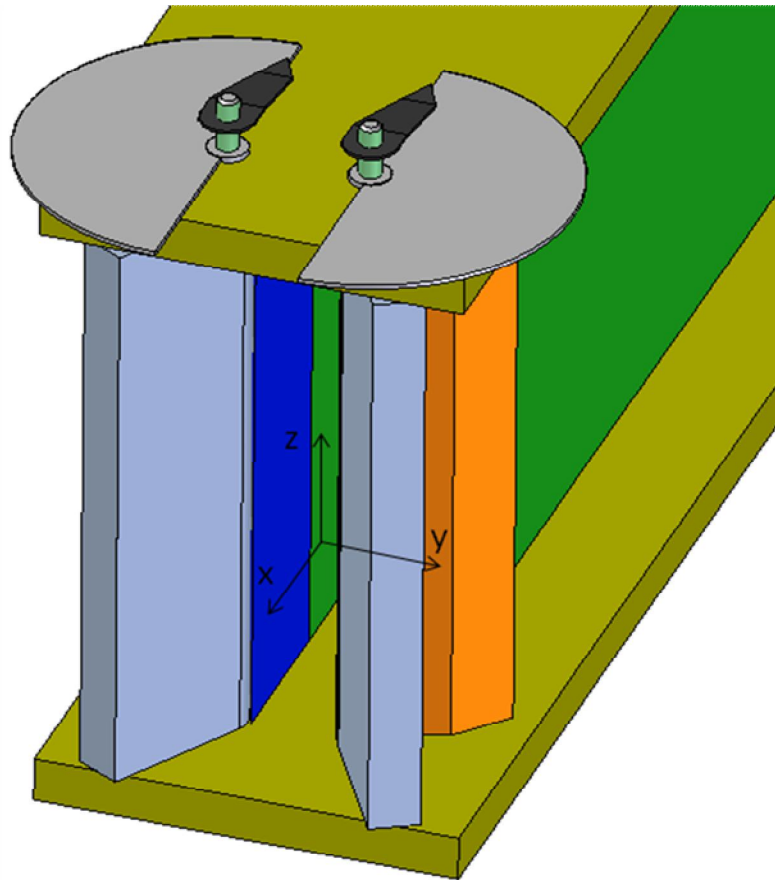


Figura 4: Saída do duto, em destaque o sistema de coordenadas adotado no experimento

A Fig. 5 exibe os perfis de velocidade obtidos nas medições de velocidade. Os valores de y (coordenadas destacadas na Fig. 4) foram adimensionalizados dividindo-os por $y_t = 25$ mm, a largura do duto, enquanto a velocidade foi dividida pela velocidade máxima, U_{max} , igual a 4,286 m/s.

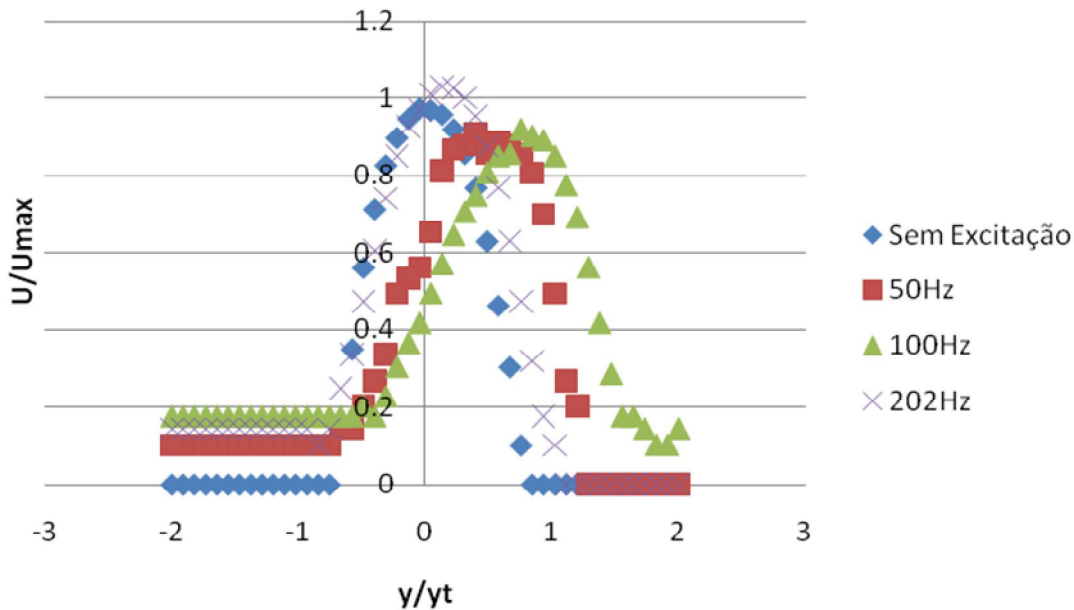


Figura 5: Perfis de velocidade do jato

Comparando-se os perfis de velocidade obtidos para os casos “Sem excitação”, “50 Hz” e “100 Hz” nota-se evidente mudança da velocidade do escoamento: ao se excitar o jato, mediram-se velocidades maiores, nos pontos próximos à região de excitação para os mesmos pontos (valores de y/yt), que no escoamento não-excitado. A introdução de excitação a 202 Hz, porém, resultou em discreta alteração das velocidades. Além disso, nos três casos os jatos sintéticos promoveram a vetorização do escoamento principal para o lado onde a excitação era inserida.

Tabela 2. Frequências reduzidas equivalentes, para as frequências usadas no experimento

Frequência de Excitação	Frequência Reduzida
50 Hz	0.53
100 Hz	1.06
202 Hz	2.14

Pode-se perceber, pela Tab. 3, a consistência do modelo escolhido, já que a frequência reduzida mais efetiva é aquela mais próxima de 1, e em 2 ela já perde eficiência, de acordo com Nishri e Wynanski (1998).

Greenblatt e Wynanski (2000) concluíram que a quantidade de movimento inserida no escoamento com as excitações desempenha importante papel na eficácia da vetorização. Esta quantidade de movimento é composta por uma parcela média e uma oscilante no tempo. A primeira, também chamada de “permanente”, é obtida a partir da média temporal da velocidade dos sopros e sucções constituintes da excitação. Obtém-se a parcela oscilante, ou “oscilatória”, a partir da RMS da componente oscilatória da excitação.

É preciso lembrar que tubos de Pitot apresentam grande imprecisão ao medirem velocidades de escoamentos desalinhados em mais de 20° com a direção axial do tubo. Neste experimento, em que o meio ângulo do difusor é de 45° e constata-se vetorização do jato, as medidas de velocidade não são de precisão confiáveis. Contudo, as diferenças de velocidade encontradas, associadas à visualização do escoamento da saída do duto, são suficientes ao convencimento sobre a existência da vetorização.

De acordo com a Tab. 1, a quantidade de movimento do escoamento sofreu alteração de até 55% ao se excitar o jato. Sabe-se que diferentes configurações do escoamento em difusores acarretam diferentes vazões de escoamento, mas a imprecisão das medidas de velocidade não permite atribuir a variação de vazão somente aos efeitos decorrentes da excitação do escoamento.

Foram fixadas tiras de fitas adesivas na saída das fendas com o objetivo de, vendado-as, verificar que se a vetorização do jato não era causada pela excitação acústica do escoamento. Foi empregada uma frequência de excitação igual a 100Hz, sob as mesmas condições ambientes da excitação de 100Hz com as fendas desobstruídas.

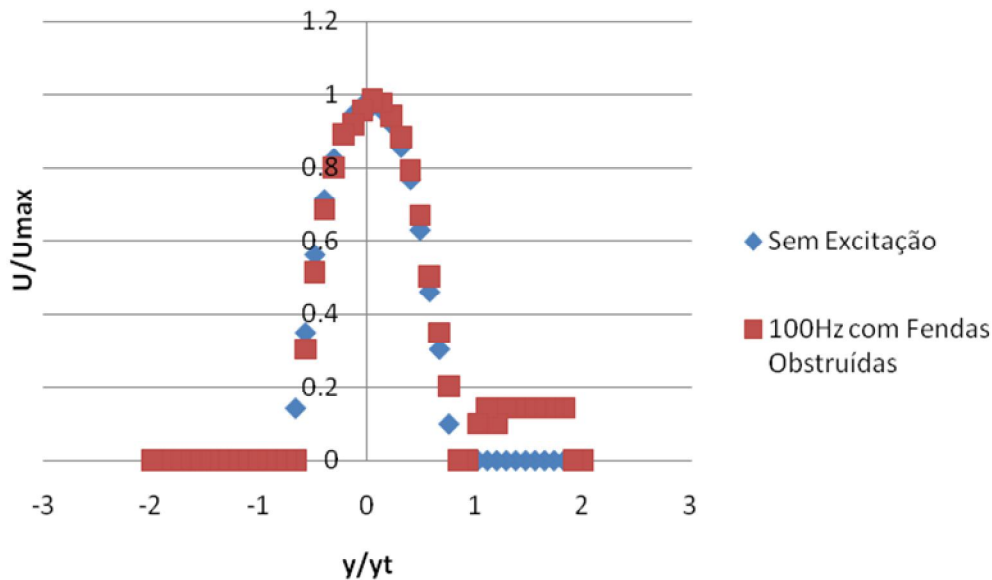


Figura 6: Comparação dos perfis de velocidade do jato sem excitação e a 100Hz com as fendas obstruídas

Ao se analisar a Fig. 6, pode-se perceber que o perfil de velocidades do escoamento praticamente não sofreu alteração quando a frequência das excitações periódicas foi de 100Hz e as fendas foram cobertas por fitas. Isso mostra que os jatos periódicos são responsáveis pela mudança de velocidade do escoamento do duto principal.

4. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de prestar agradecimento ao Dr. Igor Braga de Paula e aos técnicos do Departamento de Materiais, Automobilística e Aeronáutica da EESC-USP.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Amitay, M., Smith, B. L., Glezer, A., 1998, "Aerodynamic Flow Control Using Synthetic Jet Technology", AIAA Paper 98-0208, 36th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Janeiro 12-15, 1998.
- Béra, J. C., Michard, M., Sunyach, M., e Comte-Bellot, G., 2000, "Changing Lift and Drag by Jet Oscillation: Experiments on Circular Cylinder with Turbulent Separation", European Journal of Mechanics B-Fluids, Vol. 19, pp. 575-595.
- Béra, J. C., Ben Chiekh, M., Michard, M., Comte-Bellot, G., e Sunyach, M., 2003, "Control of a Plane Jet by Fluidic Wall Pulsing", AIAA Journal, vol. 41, No. 5, pp. 972-975.
- Bradshaw, P., e Wong, F. Y. F., "The Reattachment and Relaxation of a Turbulent Shear Layer", Journal Fluid Mechanics Part 1 1972;52:113-35.
- Browand, F.K., Ho, C. M., 1983, "The Mixing Layer: An Example of Quasi Two-Dimensional Turbulence", Journal de Mecanique.
- Freund, J. B., e Moin, P., 2000, "Jet Mixing Enhancement by High-Amplitude Fluidic Actuation", AIAA Journal, Vol. 38, No. 10, pp. 1863-1870.
- Greenblatt D., Wygnanski I.J., Outubro 2000, "The Control of Flow Separation by Periodic Excitation", Progress in Aerospace Sciences, 36(7): 487-545.
- MacManus, K., e Magill, J., Julho 1997, "Airfoil Performance Enhancement Using Pulsed Jet Separation Control", AIAA Paper 97-1971
- Nishri B., Wygnanski I., 1998, "Effects of Periodic Excitation on Turbulent Separation on a Flap", AIAA Journal, vol. 36, No. 4, pp. 547-556.
- Oster, D., Wygnanski, I., Dziomba, B., Fieldler, H., 1978, "The Effect of Initial Conditions on the Two-Dimensional, Turbulent Mixing Layer", In: Fiedler H, editor. Structure and mechanics of turbulence. Lecture Notes in Physics, vol. 75. Berlin: Springer, 1978, p. 48-64.
- Pack, L. G., e Seifert, A., 1999, "Periodic Excitation for Jet Vectoring and Enhanced Spreading", AIAA Paper 99-0672
- Seifert, A., Bachar, T., Koss, D., Shepsheplovich, M., e Wygnanski, L., 1993, "Oscillation Blowing: Tool to Delay Boundary-Layer Separation", AIAA Journal, Vol. 31, No. 11, pp. 2052-2060
- Smith, B. L., e Glezer, A., 2002, "Jet Vectoring Using Syntetic Jets", Journal of Fluid Mechanics, vol. 458, pp. 1-34.

Smith, D., Amitay, M., Kibens, V., Parekh, D., Glezer A., 1998, "Modification of lifting body aerodynamics using synthetic jet actuators", AIAA Paper 98-0209, 36th Aerospace Sciences Meeting Exhibit, Reno, NV, Janeiro 12-15 1998.

Simpson, R. L., "Aspects of Turbulent Boundary Layer Separation", Progress in Aerospace Sciences, 1996; 32(5):457-521.

6. TERMO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações contidas neste trabalho.

REYNOLDS AVERAGE NAVIER-STOKES SIMULATION OF HIGHLY ANISOTROPIC TURBULENCE STRUCTURES

André Luiz Tenório Rezende, arezende@aluno.puc-rio.br

Luiz Eduardo Bittencourt Sampaio, luizebs@puc-rio.br

Angela Ourivio Nieckele, nieckele@puc-rio.br

Department of Mechanical Engineering, PUC/Rio, 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Abstract. A deeper understanding of the limitations of RANS methodology is gained through a series of numerical simulations of the incompressible flow around a thin flat plate of infinite wingspan at small incidences. In this flow, a thin recirculation zone with highly anisotropic turbulent structures is formed close to the leading edge after boundary layer separation. The importance of capturing anisotropy is thoroughly examined and quantitatively accessed in this paper, through a number of simulations employing several RANS approaches with different levels of anisotropy representation, ranging from the κ - ω SST 2-equation model, to the more complex Reynolds Stress Tensor Model (RSM). Because two equation RANS models, such as the κ - ω SST, assumes isotropic modeling of the Reynolds tensor, they fail to reproduce some important features of this particular flow. To account for the anisotropy, the Reynolds Stress Tensor Model (RSM) solves an additional set of transport equations for the Reynolds stress tensor, which provides better results for both first and second order statistics, at the expense of increased computational cost and convergence difficulties. Intermediate alternatives that attempt to better represent anisotropy without a specific transport equation for the Reynolds tensor, such as v^2f , are also presented to provide a broader perspective on how much is gained by the different levels of anisotropy representation.

Keywords: flat plate, shallow incidence, RANS, LES, reattachment.

1. INTRODUCTION

Turbulent numerical simulations with the Reynolds Averaging Navier-Stokes methodology (RANS) present three main inherent weaknesses. The first one relates to its steady state regime, in which every transient evolution is sumarely suppressed from the simulation and left to be modeled by transport equations involving a lot of heuristic assumptions, not rarely leading to unphysical behaviors. The second weakness regards its inability to capture three dimensional vortex breakdown, whose role in turbulent evolution is well know and too important to be discarded. In fact, for a flow with a homogeneous direction in the statistical sense, like an airfoil with an infinite wingspan, even if a three dimensional mesh is employed, RANS simulations will never be able to predict different evolutions for each of the cross-sections, simply because it is a steady state methodology which only deals with statistical fields. Since this kind of flow is statistically homogeneous in one direction, say, the wingspan, every cross-section of the geometry will have the same resulting field from RANS. Therefore, with traditional assumptions that relates transport of momentum and other physical quantities to the gradient of the fields, no variable can be transported in the wingspan direction, and no vortex breakdown can be correctly captured. A third weakness inherent to many RANS models is related to the Boussinesq hypotheses, by which the Reynolds stress tensor is supposed aligned with the strain rate by means of a turbulent viscosity. In two dimensional flows, it can be mathematically shown that this implies that, discounting the homogeneous direction elements, the remaining Reynolds stress is isotropic. This latter issue means that those RANS models based on the Boussinesq hypotheses are not expected to correctly predict situations involving flows with strong anisotropy.

The first and second of the above mentioned weakness can be only overcome if a transient formulation of the RANS equations is employed, which is known in the literature as Unsteady Reynolds Averaging Navier-Stokes methodology (URANS). Very often, however, the dissipation levels provided by the modelling are too high to allow the development of transient structures, and URANS reverts to traditional RANS converging to a steady state field solution.

The third of the above mentioned weakness is overcome by a class of models known as Reynolds Stress Models, in which, instead of the Boussinesq hypothesis, a transport equation for the Reynolds stress tensor is derived, which at least in principle allows the correct prediction of turbulent anisotropies. Some intermediate models, like the v^2f from Durbin (1991), still assumes a turbulent effective viscosity, but use different components of the velocity fluctuations to calculate how much turbulent mixing should be added to the original equations. Although in this latter case no improvement is expected regarding the limitations to capture anisotropic structures, Durbin claims that at least the correct near-wall damping, which is directly influenced by the near-wall anisotropy of fluctuations, can be better represented.

The goal of this work is to isolate and understand the implications of each of these inherent limitations presented by RANS methodology. In order to do so, we chose the incompressible flow over a thin flat plate at small incidence as the test case, which is a very challenging scenario for turbulence modelling with its strong anisotropies.

The mesh for RANS solutions investigated here was chosen after a careful convergence study so that it is fine enough to resolve near wall structures, with the maximum value of y^+ equal to 1.

Three different levels of RANS modelling were tested and compared to both LES and experimental data available in the literature: firstly, the simple two equation k - ω SST model was employed to help understand the limitations of this

basic and traditional model; secondly, an intermediate step towards complete Reynolds Stress Model (RSM) was investigated, using Durbin's v^2f model; finally the complete RSM from (Launder, 1989) was tested to give an idea about what can ultimately be achieved before breaking the barrier of 2D steady-state simulations to invest in a more expensive transient or even 3D simulation.

2. TEST CASE –FLOW OVER A THIN FLAT PLATE

The understanding of the flow around thin flat plate at shallow incidence can help in the design of airfoils and sails (Cyr, Newman, 1996), as well as flexible wing-based micro air vehicles (Lian and Shyy, 2005). The flow around an inclined flat plate with a sharp leading edge, as shown in Fig. 1, results in a long and thin bubble, denominated “thin aerofoil bubble” (Gault, 1957). At zero incidence angle, the stream is laminar and attached on both sides, generating zero lift (assuming equal surface profiles). If the plate has an incidence angle, the stagnation point moves to the inferior surface. The boundary layer around the leading edge is very thin, and it is expected to separate immediately, due to the flow direction change. The fixed separation point leads to the hypothesis that the flow will be insensitive to a change in Reynolds number, as long as laminar to turbulent shear-layer transition occurs soon after separation. According to experimental data (Crompton, 2001) this happens for Reynolds numbers above 10^5 .

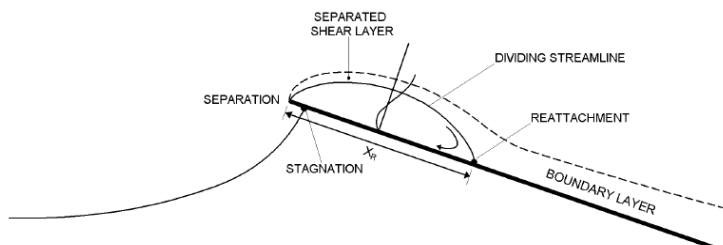


Figure 1. Simplified model of a thin aerofoil separation bubble.

The thin aerofoil bubble created on a plate with a sharp leading edge is characterized by a flow separation at the leading edge with a consequent reattachment to the upper surface at a point which moves gradually downstream with increasing incidence. If the incidence angle is sufficiently small (usually smaller than 5 degrees), the flow reattaches. As shown in Fig. 1, there is a dividing streamline which demarcates the bubble from the outer flow and which rejoins the surface at the reattachment point. For angles greater than 5 degrees, there is no reattachment point, and the bubble enlarges downstream into the wake (Newman and Tse, 1992).

Subsequent to separation, the lack of a wall viscous damping and the intrinsic instability of the curved streamlines make the shear layer suffer a quick transition to turbulent regime very close to the leading edge. The turbulent shear layer thickens rapidly and has a high entrainment rate; it then reattaches further downstream where the streamlines bifurcate. One branch goes back towards the leading edge to feed the shear layer. The resultant backflow reduces the pressure at the surface and in turn helps to bend the shear layer back to the reattachment point. If the chord is long enough to allow a reattachment, the other branch is driven downstream in the form of an attached turbulent boundary layer until it reaches the trailing edge.

From an academic point of view, this flow configuration provides an interesting and challenging test case where several aspects of turbulence modelling and numerical schemes can be examined. Because of its rich variety of important turbulent phenomena, specially its strongly anisotropic structures, several traditional turbulence modelling fail to predict even the simpler first order velocity statistics, pressure coefficients, and critical characteristics such as the reattachment length. In some ways, it can be considered the external version of the classic backward facing step benchmark test case (Choi, Moin, 1994). In fact, both test cases present a very well-defined point of separation, determined by a sharp edge in the geometry from where a stream of vortices are shed, a principal recirculating structure, and not rarely further separations and reattachments are observed in the mean velocity field, in the form of secondary recirculation bubbles. However, the level of turbulence anisotropy that can be obtained in the flow around thin flat plate is not achievable by simple backward facing step configuration. Added to the larger computational domain, which requires several compromises in the mesh design to obtain correct representation of structures of different sizes while keeping the total computational cost feasible, this external version of the backward facing step can be considered a lot more challenging and an important tool for validate and develop better turbulence modelling approaches.

This complex flow around a plate at the shallow incidence has been experimentally investigated by Crompton (2001). Detailed velocity and turbulence statistics were measured in wind tunnel for the leading edge bubble with the use of Laser Doppler Anemometry (LDV) for inclination angles of the flat plate varying from 1 to 5 degrees with a Reynolds number chord of 2.13×10^5 . Following the work of Crompton, numerical studies based on Reynolds Average Navier-Stokes methodology (RANS) with the $\kappa-\omega$ and SST models were developed by Collie (2005). Sampaio et al. (2006a, 2006b) examined the same configuration employing the expensive Large-Eddy Simulations. The mesh for LES (Sampaio et al., 2006a, 2006b) had a maximum value of y^+ equal to 10, in order to keep computational costs down.

Notwithstanding this small relaxation regarding general recommendations for LES, the results were accurate enough to serve as a basis for the present numerical study.

2. MATHEMATICAL MODEL

The Reynolds-averaged approach is based on decomposing the velocity as $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ where \mathbf{u} is the average velocity vector and \mathbf{u}' the velocity vector fluctuation. The average continuity and momentum equation (RANS), for a steady state incompressible flow is given by

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (-\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) \quad (1)$$

where $\bar{\mathbf{u}}$ is the mean velocity vector, ρ is the density, $\nu = \mu/\rho$ is the cinematic viscosity, μ is the molecular viscosity, p is the pressure. Equation (1) has the same form of the Navier-Stokes equation, but now it has an additional term, the turbulent Reynolds stress term, $-\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}$, representing the influence of the fluctuation on the average flow. In order to close Eq. (1), the turbulent Reynolds stress must be determined. It can be modeled based on the Boussinesq hypothesis, where the turbulent stress is obtained through an analogy with Stokes law, i.e., the stress is proportional to the deformation rate,

$$-\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} = \nu_t (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}})^T - \frac{2}{3} \kappa \delta \quad (2)$$

where κ is the turbulent kinetic energy and ν_t is the turbulence viscosity, which is defined in accordance with the models, or $-\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}$ is directly determined through the solution of its conservation equations.

2.1. SST k - ω MODEL

The Shear-Stress Transport (SST) κ - ω model (Menter, 2003) model was proposed for aeronautical flows simulations with strong adverse pressure gradients and separation with the best behavior of the κ - ε and κ - ω models. For boundary layers flows, the κ - ω model is superior to the κ - ε model in the solution of the viscous near-wall region, and has been successful in problems involving adverse pressure gradients. Nevertheless, the κ - ω model requires a non-zero boundary condition on ω for non-turbulent free-stream, and the calculated flow is very sensitive to the value specified (Menter, 1992). It has also been shown (Cazalbou *et al* , 1993) that the κ - ε model does not suffer this deficiency.

The SST model blends the robust and precise formulation of the κ - ω model close to walls with the free-stream independence of the κ - ε model outside the boundary layer. To accomplish this, the κ - ε model is written in terms of ω . Then the standard κ - ω model and the transformed κ - ε model are both multiplied by a blending function and both models are added together. This blending function F_1 is zero (leading to the standard κ - ω model) at the inner edge of a turbulent boundary layer and blend to a unitary value (corresponding to the standard κ - ε model) at the outer edge of the layer.

The turbulent eddy viscosity is formulated as follows:

$$\nu_t = \frac{\kappa / \omega}{\max(1 ; S F_2 / (0.31 \omega))} ; S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) ; F_2 = \tanh \left(\Phi^2 \right) ; \Phi = \max \left(\frac{2 \sqrt{\kappa}}{0.09 \omega y} ; \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right) \quad (3)$$

where $S = (2 S_{ij} S_{ij})^{0.5}$ is the modulus of the mean rate-of-strain tensor S_{ij} , and F_2 is the blending function for the turbulent eddy viscosity in the SST model. The turbulent kinetic energy κ and specific dissipation rate ω of the SST model (Menter, 2003) can be determined by the solution of the respective conservation equation, where the set of closure constants for the SST model ϕ are calculated using a blend between the constants ϕ_1 of the standard κ - ω and ϕ_2 of the κ - ε model as $\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2$.

2.2. THE v^2 -f MODEL

As mentioned before, the Boussinesq hypothesis is expected to fail wherever the flow turbulence presents high levels of anisotropy. In this context, near-wall regions always present a challenge since the impermeable condition imposes stronger damping to the wall-normal component of the second order fluctuations in comparison to the others. Two alternatives that take into account this near-wall anisotropy are possible. One is to completely abandon the Boussinesq hypothesis and try to predict directly the complete Reynolds tensor. Another idea consists of keeping the

isotropic viscosity assumption, but using some information about the anisotropy when deriving an expression to calculate the turbulent viscosity. This latter possibility still implies that the resulting tensor is isotropic but at least the turbulent viscosity is not tied to the isotropic component, but captures the correct anisotropy development as one approaches the wall.

Durbin (1991) has explored this latter idea by using, in addition to the traditional equations for the kinetic energy κ and dissipation rate ε , a new equation for an imaginary turbulent normal stress, $\overline{v'^2}$ and an elliptic equation for a field f to account for the pressure wall-reflection.

$$\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_k} \right] + \kappa f - 6 \frac{\overline{v'^2}}{\kappa} \varepsilon \quad (4)$$

$$L^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} - f = \frac{C_1}{T} \left(\frac{\overline{v'^2}}{\kappa} - \frac{2}{3} \right) - 2 C_2 C_\mu \frac{\overline{v'^2}}{\kappa} T S^2 - \frac{1}{T} \left(6 \frac{\overline{v'^2}}{\kappa} - \frac{2}{3} \right) \quad (5)$$

The time scale T and length scale L are given by:

$$T = \max \left(\frac{\kappa}{\varepsilon}, 6 \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right) \quad ; \quad L = C_L \max \left(\frac{\kappa^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right) \quad (6)$$

Finally, after a modification proposed Sveningsson and Davidson, aiming to guarantee that $\overline{v'^2} < 2/3 \kappa$ and to improve numerical stability, the viscosity is given by

$$\mu_t = \min \left(\rho c_{\mu,ke} \frac{\kappa^2}{\varepsilon}, \rho c_{\mu,v2f} \overline{v'^2} T \right) \quad (7)$$

2.3. THE REYNOLDS STRESS MODEL (RSM) MODEL

Abandoning the isotropic eddy-viscosity hypothesis, the RSM closes the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations by solving transport equations for the Reynolds stresses, together with an equation for the dissipation rate. This means that five additional transport equations are required in 2D simulations. The Reynolds stress transport equation can be derived from the Navier-Stokes equation as

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right] + P_{ij} + \Psi_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon ; \quad (8)$$

where

$$P_{ij} = - \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \quad (9)$$

P_{ij} is the stress production, Ψ_{ij} is pressure strain, which needs modeling and ε is the dissipation, obtained by the solution of its conservation equation, like the traditional κ - ε model.

3. RESULTS

The thin flat plate proposed by Crompton (2000) was modeled with the geometry described in Fig. 2. The plate has a chord length c of 160 mm and a span of 800 mm giving an aspect ratio of 5, which is sufficient to assume nominally two-dimensional flow.

The reattachment length was found by Crompton (2000) to be independent of Reynolds number for \mathbf{Re} above 10^5 , where \mathbf{Re} is defined as $\mathbf{Re} = U_\infty c / \nu$, U_∞ is the free stream velocity, and c the chord length. The wind tunnel investigation was carried at $\mathbf{Re} = 2.13 \times 10^5$ and this Reynolds number is used to compare the turbulence models and

the experiments. Attack angles, $\alpha = 1$ to 5 degrees, are available in experimental data in 1 degree intervals. At inclination of 5 degrees the flow is separated for the majority of the length of the plate. The LDV measurements for the mean velocity and a few turbulent quantities over the plate are available at Crompton's study (2000).

Figure 3 shows the computational domain used in simulations, which was defined based on the work of Collie (2005). At the inlet, the Cartesian components of velocity are set according to the angle of attack and the turbulence intensity of the freestream defined as

$$\zeta = \frac{1}{3} \frac{(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})}{U_\infty^2} = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{U_\infty^2} \quad (10)$$

where z is set as 0.05%, as measured in wind tunnel (Crompton, 2000). Constant pressure equal to the freestream p_∞ was set at the outlet.



Figure 2. Thin flat plate dimensions.

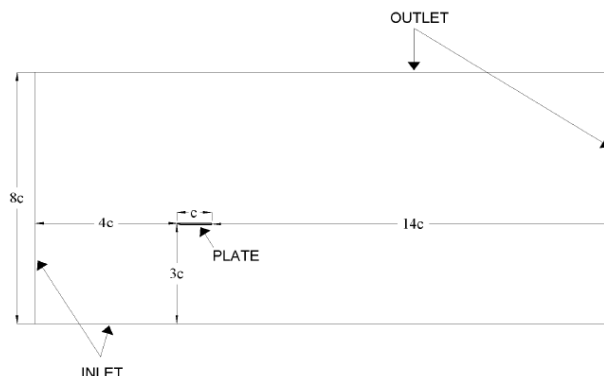


Figure 3. Domain details.

The mesh was created in the software GAMBIT with 1.5×10^5 cells, a slightly larger number of points than employed by Collie (2005), based on a grid convergence study performed by him. The distance of first node above the plate was designed as $6.25 \times 10^{-5} c$ (c is the length of the chord) to guarantee $y^+ = (\tau_s/\rho)^{0.5} y/\nu$ around 1, which is the value indicated for both RANS models selected, where τ_s is the wall shear stress.

The flow field was determined with the commercial software Fluent (2006) for models $\kappa-\omega$ SST and RSM and with the open source FOAM for the v^2-f model. Both codes are based in Finite Volume Method. The QUICK scheme (Leonard, 1979) was employed in all cases to discretize the governing equations. The pressure-velocity coupling was handled by the SIMPLE algorithm. The system of algebraic equation was solved with the Multigrid method (Hutchinson and Raithby, 1986). The problem was considered converged when the maximum residue of all equations was smaller than 10^{-6} .

3.1. Mean velocities profiles

Due to the abrupt geometry at the main extremity, a long and thin bubble is created at the leading edge just after the separation of the boundary layer. If the inclination angle is positive, the stagnation point will be located below the surface of the plate and due to the high inertial forces (high Reynolds number) the particles do not follow the abrupt curvature of the extremity and separation occurs. The separated shear layer is unstable and transition rapidly occurs. After transition, a rapid development of the shear layer occurs due the high rate of turbulence entrainment, which bends the streamlines toward the surface of the plate at the reattachment point X_R . Now, due to the favorable pressure gradient existent between the larger pressure point in the reattachment point and the minimum pressure point close to the bubble center, the portion of the flow that goes back to the leading edge suffers a relaminarization process. The boundary layer of this portion of the flow moves forward to the leading edge becoming again laminar and ready to suffer a second separation, generating a secondary recirculation bubble, since there is another adverse pressure gradient at the minimum pressure point in the center of the bubble to the leading edge. This second very small bubble is very hard to be predicted, and it was not captured by any RANS models.

The numerical prediction of the reattachment lengths (X_R) obtained with the different turbulence models are presented in Table 1. The results obtained by Collie (2005) with the $\kappa-\omega$ and SST models employing the CFX software (Ansys, 2007) are also presented in the same table. The SST, which is formed by a blending of the $\kappa-\omega$ model with the $\kappa-\varepsilon$ model, provided a better result. The present SST model predictions differ from Collie's results by approximately 2%, due to more refined mesh than the Collie's mesh, as well as software's implementations. The v^2-f model over predicts the experimental reattachment length and RSM model under predicts this value. The LES (Sampaio et al., 2006a, 2006b) methodology was able to predict a reattachment length with excellent agreement with experimental data, in spite of the coarse mesh employed for a LES model.

Table 1 – Normalized reattachment lengths (X_R) and respective errors.

	Experimental Crompton (2000)	SST	RSM	v^2 -f	κ - ω (Collie, 2005)	SST (Collie, 2005)	Sampaio et al. (2006a)
X_R / c	0.14	0.147	0.116	0.183	0.184	0.149	0.139
error		5.40%	17.14 %	31%	24%	5.80%	0.40%

The mean velocities profiles obtained with κ - ω SST , v^2 -f and RSM models are compared with the experimental data of Crompton (2000) at four stations in Figs. 4. The first two stations are located inside the bubble, while the third and fourth stations are outside the bubble. The results obtained with the SST model by Collie (2005) were very similar to the present SST results and are omitted for clarity reason. LES results obtained by Sampaio et al. (2006a, 2006b) are also included in Fig. 4.

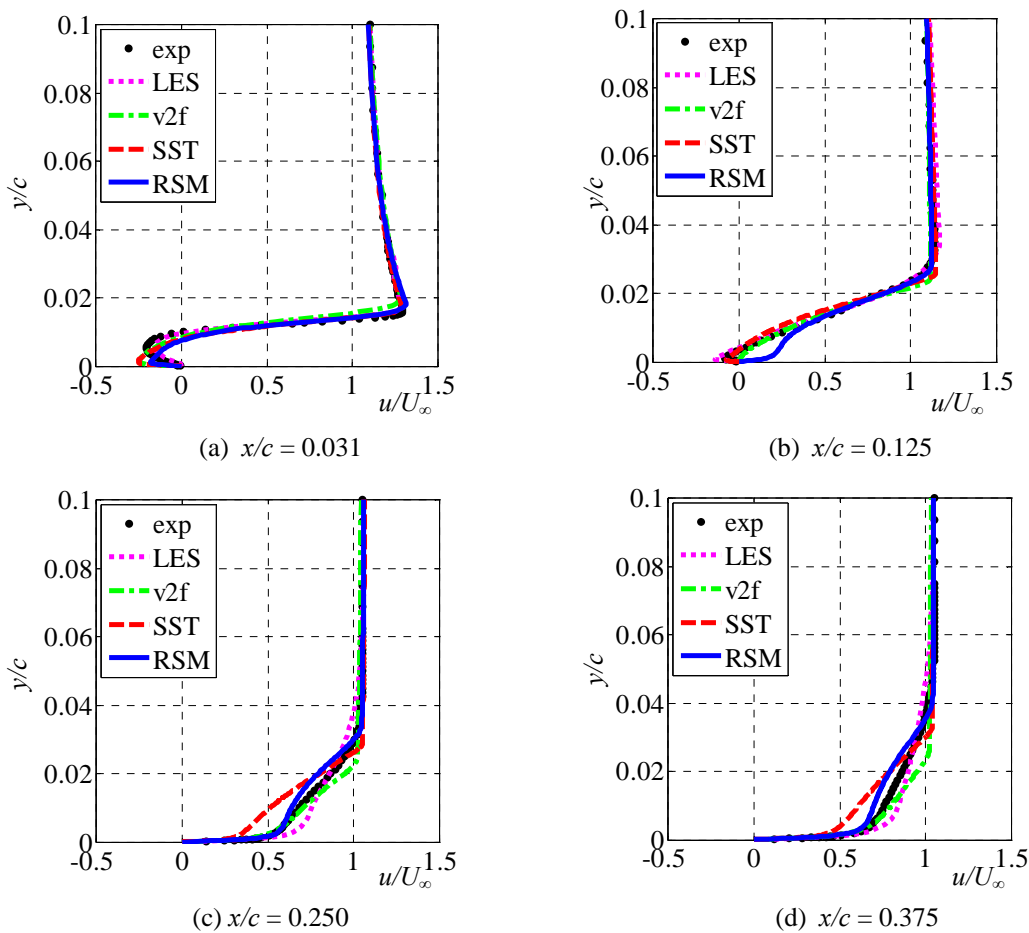


Figure 4. Velocities profiles for incidence angle $\theta = 1^\circ$.

The reversed flow in the leading edge bubble experiences relaminarisation and the boundary layer begins to show laminar features. The velocity profiles, in the two initial stations ($x/c = 0.031 ; 0.125$) of Fig. 4, which are inside the bubble, show that the experimental data has a more laminar profile in comparison with the prediction of the RANS turbulence models, which experience a sharp increase in velocity over the near-wall region. To simulate the process of relaminarization an appropriate transition model is required which is not provided by the RANS models investigated, consequently these models predicted greater velocity gradient in this wall region. On the other hand, the LES results showed a good agreement with experimental data for the two first stations inside the bubble (Figs. 4a and 4b). However, the agreement deteriorates at station 3, outside the bubble (Fig. 4c), where the velocity recovery is slower, while the RANS models predicted a faster recovery. Downstream from the bubble, it also seems that there is too much slipping in the RSM simulation, as if the layers of fluid adjacent to the wall experience less friction than the above layers. The result is a distortion of the profile, where the near wall layer gets a bit of more acceleration compared to other models. Collie (2005) attributes the discrepancies between the turbulence models and experimental results to the influence of wind tunnel in the boundary layer, however, this assessment is difficult to quantify. Sampaio et al (2006a) attributed the discrepancy of the LES model with the experimental data at this station to the mesh refinement. The present paper prefers to explain the discrepancies of the RANS models to their inability to capture the anisotropy of flow near the wall.

3.2. Pressure Distributions

The pressure distribution is analyzed through the pressure coefficient defined as

$$C_p = (p_\infty - p) / (0.5 \rho U_\infty^2) \tag{11}$$

where p is the static pressure, p_∞ and U_∞ are the freestream pressure and velocity.

Figure 5 presents the variation of the pressure coefficient along the plate for $\theta = 1^\circ$. Again the RANS models $\kappa-\omega$ SST, v^2-f and RSM are compared with the experimental data. These results confirm the discussion of the previous section, i.e., the turbulence models overpredicted the velocity magnitude near the wall, therefore, as expected the pressure distribution is underpredicted. In Figure 5, the LES results by Sampaio et al. (2006a, 2006b) were also included. It is worth noticing that the pressure coefficient was almost perfectly predicted by Large-Eddy Simulations. None of the RANS models were able to correctly capture the formation of the recirculation zone, with a distinguished suction right inside this region. Apparently, all RANS presented the same sort of intrinsic weakness that resulted in a minimum of pressure too close to the leading edge, followed by a rapidly drop in the pressure coefficient, which should otherwise be sustained a bit longer. All RANS models also underpredicted the pressure coefficient downstream of the reattachment point, where the LES was quite good.

In the interior of the thin airfoil bubble the pressure is mainly determined by the shear layer curvature, in other words, stronger streamline curvature will lead to smaller pressure. Due to the difficulty of the turbulence models to predict with accuracy the transition position and resolution of the secondary bubble, these models demonstrate an inferior and flatter suction peak. These results encourage the investigation of these higher angles with LES, in spite of being much more expensive.

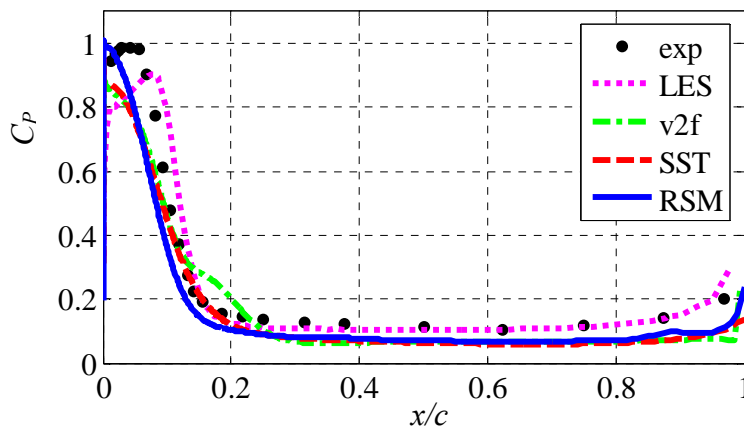


Figure 5. Pressure Coefficient for angle of attack 1°

3.3. Second order statistics

Turbulence is known to exert significant influence over development of downstream flow, most notably when separation is imminent. Although it is not the case in this particular study because the plate is flat, in future simulations one may be interested in simulating curved airfoils which may be prone to stall. In that case, the correct prediction of turbulent fluctuations is of paramount importance and for this reason we also present the main results for the component $\overline{u'u'}$.

Figure 5 presents the component $\overline{u'u'}$ for the same four stations located along the plate. It is clear that both LES and RSM were satisfactorily accurate, compared to the other models. Although the curve tendency at the first station and its quick changes in derivative near the wall were not correctly captured by RSM, it can be said that the general behavior, magnitude of the peaks and other aspects were reasonably well predicted, even if compared to much more expensive LES. In fact, in the other three stations, RSM results seems even superior to LES.

For turbulent boundary layers the SST model uses standard $\kappa-\omega$ in the near-wall region and then blends to the standard $\kappa-\varepsilon$ model across the outer region of boundary layer. Nevertheless inside the thin airfoil bubble the SST model blends $\kappa-\varepsilon$ across the inner region of the bubble so that the ε -equation is solved across the shear layer. Therefore it appears that the ε -equation predicts a lower dissipation of turbulence which leads an over prediction of turbulence in the separated shear layer. Thus the increase of turbulence is a direct result of the ε -equation which actually improves SST results. This effect is partially compensating for the model's inability to predict the increase in the turbulence entrainment.

The performance of v^2-f was a little disappointing. As a more expensive and convergence sensitive model, one would expect it to represent a clear improvement when compared to the $\kappa-\omega$ SST model, which was never the case.

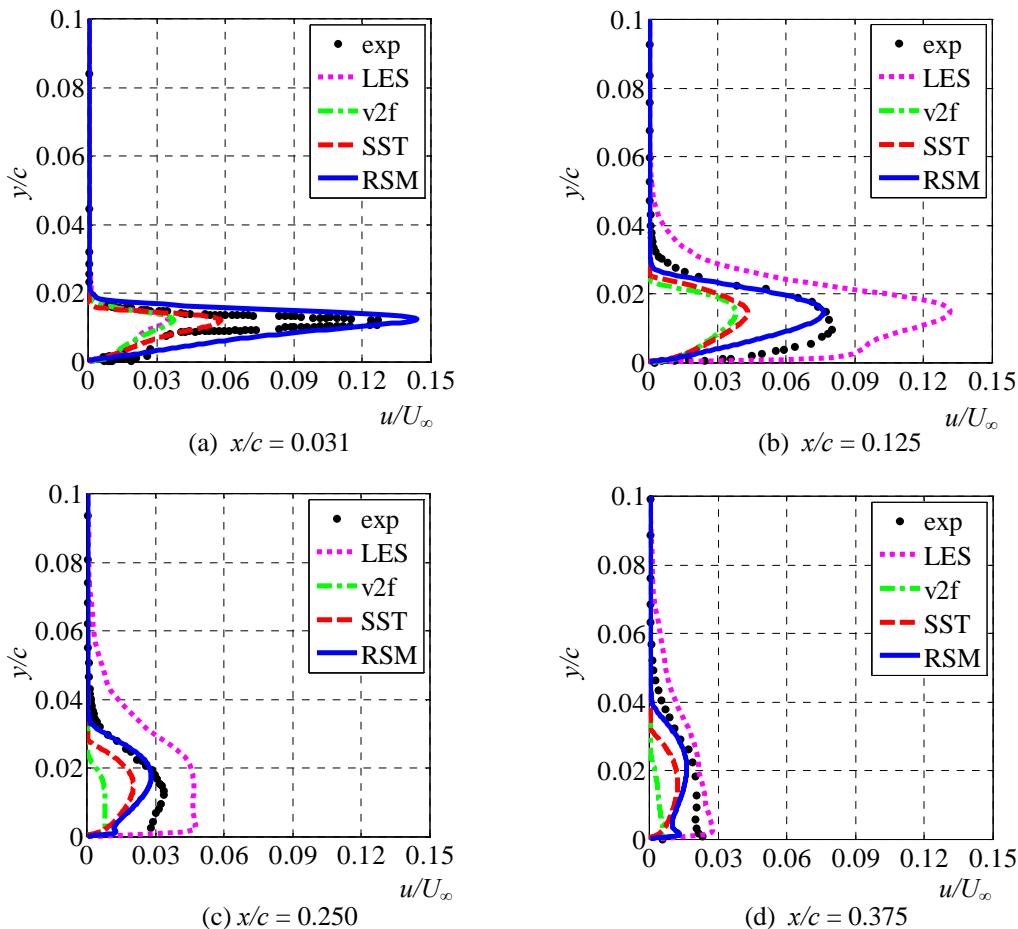


Figure 6. Reynolds stress tensor, component $\overline{u'u'}$

4. CONCLUSION

In the present work, the turbulence models of SST (Menter, 1994), v^2 -f (Durbin, 1991) and RSM (Launder, 1989) were applied to determine the incompressible flow over a flat plate with a sharp leading edge, with small inclination angles. The results were compared with experimental data of Crompton (2000) and LES simulations by Sampaio et al. (2006a, 2006b).

The mean profiles velocities presented reasonable agreement with the experimental results; however the details of the recirculating bubble were underpredicted in size and over predicted in magnitude. The LES model prediction was superior in relation to the pressure distribution for $\theta=1^\circ$, as well as the second order statistics.

No RANS model showed a clear advantage over the others, the only exception being the RSM, for the specific case of second order turbulence, where the model presented very good results. This is by no coincidence, as the original idea was to try to predict and follow the evolutions of the tensor. That said, it is not clear that the additional costs involved in the RSM simulations, not to mention the difficulties to get a converged solution, did pay off in the end. In fact, the quality of the predictions of second order statistics did not translate directly towards improvements of quantities of practical engineering interest, like first order statistics reattachment length, Strouhal number, etc.

Durbin's v^2 -f could correspond to the high expectations around it, fed by the claims that it is an intermediate model that tries to make use of some information about anisotropy, without incurring in the higher costs associated with a full RSM transport equation. The performance of the model was surprisingly inferior to the SST model for instance, and at a considerable higher cost despite claims that it is a cheap model. Although it is true that it does not need a new set of six equations, one for each of the Reynolds tensor components, it actually requires two additional equations compared to traditional κ - ω , one of which is of elliptic nature.

Overall, among RANS models and considering cost-accuracy compromises, results from the SST were better. No significant and clear advantage is brought by the use of more expensive models, unless one is really interested in second order statistics.

The difficulty to capture the entrainment of the separated shear layer, encourage the investigation of the problem with more demanding models such as LES and DNS.

It seems that not much can be done in this limited context of 2D steady state simulations, and if one really needs

more accurate results, one of these constraints must be broken. Potential improvements maybe obtained by either transient simulation or three dimensional one, as have been demonstrated by the LES results.

5. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge the support awarded to this research by the Brazilian Research Council, CNPq.

6. REFERENCES

- ANSYS CFX-Solver Theory Guide, v. 10, 2006, Ansys INC.
- Cazalbou, J.B., Spalart, P.R., Bradshaw, P., 1993, "On the Behavior of 2-Equation Models at the Edge of a Turbulent Region", *Physics of Fluids*, Vol. 6, No. 5, pp. 1797-1804.
- Choi, H., and Moin, P., 1994, Effects of the computational time step on numerical solutions of turbulent flow, *Journal of Computational Physics*, Vol. 113, pp. 1-4;
- Collie, S., 2005, "Application of CFD to Two-Dimensional Downwind Sail Flows", PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering Science of the University of Auckland, New Zealand.
- Crompton, M. J.; Barret, R. V., 2000, "Investigation of the Separation Bubble Formed Behind the Sharp Leading Edge of a Flat Plate at Incidence". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G-Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 214, No. G3, pp. 157-176.
- Crompton, M., 2001, "The Thin Airfoil Leading Edge Separation Bubble", PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering University of Bristol.
- Cyr S, Newman BG, 1996, "Flow past two-dimensional membrane aerofoils with rear separation", *Journal Of Wind Engineering And Industrial Aerodynamics*, Vol. 63 (1-3): Pp.1-16.
- Durbin, P. A., 1991, "Near-Wall Turbulence Closure Without Damping Functions," *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 3, No.1, pp. 1-13.
- Sveningsson, A. and Davidson, L., 2003, "Assessment of realizability constraints and boundary conditions in v2f turbulence models", *Turbulence Heat and Mass Transfer*, Vol 4, pp. 585-592.
- Fluent User's Guide, v. 6.2, 2006, Fluent Inc., New Hampshire.
- Gault, D. E., 1957, An investigation at low speed of the flow over a simulated flat plate at small angles of attack using pitot static and hot-wire probes, Technical Report TN-3876, NACA.
- Hutchinson, B. R., and Raithby, G.D., 1986, "A Multgrid Method Based on the Additive Correction Strategy", *Numerical Heat Transfer*, vol. 9, pp.511-537.
- Launder, B.E., 1989, "Second-Moment Closure: Present and Future?", *International Journal Heat Fluid Flow*, Vol. 10, No. 4, pp. 282-300.
- Leonard, B.P. 1979, "A Stable Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.19, pp. 59-88.
- Lian YS, Shyy W, 2005, "Numerical simulations of membrane wing aerodynamics for micro air vehicle applications", *Journal Of Aircraft* Vol. 42 (4): pp. 865-873.
- Menter, F. R., 1992, "Influence of Freestream Values on $k-\omega$ Turbulence Model Predictions", *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 6, pp. 1657-1659.
- Menter, F. R., 1994, "Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications", *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 8, pp. 1598-1605.
- Menter, F. R., Kuntz, M., Langtry, R., 2003, "Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model", *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, pp. 625-632.
- Newman Bg, Tse Mc, 1992, "Incompressible-Flow Past A Flat-Plate Aerofoil With Leading-Edge Separation Bubble", *Aeronautical Journal* Vol. 96, No. 952, pp. 57-64.
- Launder, B.E., 1989, "Second-Moment Closure: Present... and Future?", *Inter. J. Heat Fluid Flow* Vol. 10, No. 4, pp. 282-300.
- Rezende, A.L.T. and Nieckele, A. O., 2007, "Prediction of the Flow Over a Thin Flat Plate at Shallow Incidence", *Proceedings of the 19th International Congress of Mechanical Engineering – COBEM 2007*.
- Sampaio, L.E.B., Nieckele, A. O., Gerritsen, M. and Collie, S., 2006a, "Numerical Simulations Of The Long Recirculation Bubbles Formed In Incompressible Aerodynamic Flows Over Thin Flat Plates At Shallow Incidence", *Proceedings of the 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering -- ENCIT 2006*, Paper CIT06-0278
- Sampaio, L.E.B. Nieckele, A. O., Gerritsen, M. and Collie, S., 2006b, "Large Eddy Simulations of the Long Recirculation Bubbles Formed in Thin Flat Plates at Shallow Incidence", *Proceedings of the 5th Spring School of Transition and Turbulence, EPTT2006*, Paper ETT06-15.

7. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

FLOW VISUALIZATION IN BANKS OF CYLINDERS OF TRIANGULAR ARRANGEMENT IN A WATER CHANNEL

A. V. de Paula, vagtinski@mecanica.ufrgs.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PROMEC
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS
Rua Sarmento Leite, 425.
90050-170 Porto Alegre, RS, Brasil

L. A. M. Endres, endres@iph.ufrgs.br

Instituto de Pesquisas Hidráulicas – IPH
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
91501-970 Porto Alegre, RS, Brasil

S. V. Möller, svmoller@ufrgs.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PROMEC
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS
Rua Sarmento Leite, 425.
90050-170 Porto Alegre, RS, Brasil

Abstract. *The present work shows the technique used in the turbulent flow visualization of banks of cylinders of triangular arrangement, with the purpose of verifying the presence or not the bistable characteristic. Cylinder arrangements submitted to turbulent cross flow are very usual in several engineering applications, as in heat exchangers, transmission lines and pipelines. Bistability occurs in flows over sets of bluff bodies forming a flip-flopping wake characterized by a biased flow switching at irregular intervals. As the bistability can represent an additional source of dynamic instabilities, a study concerning this phenomenon is very important. The visualizations were performed in a closed circuit water channel. The tube banks, compound for up to 9 cylinders of 60 mm of diameter and 300 mm height are disposed up to 2 rows, with 5 or 4 cylinders each. The aspect ratio (p/d) chosen was of 1.6, where “ p ” is the pitch or the distance between the centers of adjacent cylinders and “ d ” the diameter. Results for Reynolds numbers of 7.5×10^3 and 1.5×10^4 will be shown, for tube banks with 1 and 2 rows.*

Keywords: *flow visualization, turbulent flow, tube banks, bistable flow.*

1. INTRODUCTION

In many engineering applications a very common configuration are circular cylinders nearly disposed, like heat exchangers, pipelines and transmission lines. Tube banks are the most used configuration for the analysis of the phenomena that occur in various arrangement types.

According to Zdravkovich and Stonebanks (1988) the leading feature of flow-induced vibration in tube banks is the randomness of dynamic responses of tubes, and even if the tubes are all of equal size, have the same dynamic characteristics, are arranged in regular equidistant rows and are subjected to an uniform steady flow the dynamic response of tubes is non-uniform and random.

As flow induced vibration and structure-fluid interaction are very dependent of the arrangement or configuration of the cylinders (side-by-side or tandem), new studies are necessary to improve its understanding.

Flow visualizations techniques are indispensable to aid in the comprehension of the phenomena that are measured in laboratory.

Ziada (2006) presents a flow visualization study about the vorticity shedding, acoustic resonance and turbulence excitations in tube bundles in triangular arrangements of cylinders at various Reynolds numbers and pitch-to-diameter ratios.

Alam *et al.* (2005) present a flow visualization study to the determination of flow configurations and fluid forces acting on two staggered circular cylinders of equal diameter in cross-flow.

2. THE BISTABLE EFFECT

Bistable flow is characterized by a floppy and random phenomenon that change the flow mode, as their present in circular cylinders placed side-by-side submitted to a turbulent cross flow.

As bistability has been found at two side-by-side cylinders classical geometry, and more recently at aligning tubes geometry, the triangular geometry was chosen, because of its large utilization in many engineering applications, and a need of new information about this phenomenon, that can be an addition excitation mechanism on the tubes.

Olinto (2005) determined experimentally the presence of biased and bistable flow mode of two cylinders placed in a side-by-side arrangement in a water channel.

According Sumner *et al.* (1999), depending on distances between the centers of the cylinders, called pitch (p), different flow behaviors can be found for different pitch-to-diameter ratios p/d . At intermediate pitch ratios ($1.2 < p/d < 2.0$) the flow is characterized by a wide near-wake behind a cylinder and a narrow near-wake behind the other, as shown in Fig. 1a and Fig. 1b. This phenomenon generates two dominant vortex-shedding frequencies, each one associated with a wake: the narrow wake is associated with a higher frequency and the wide wake with a lower one.

Trough the gap, flow is biased towards the cylinder, and has a narrow wake. Bistable flow is characterized by switch of this gap flow, from one side to other at irregular time intervals. According to previous studies, this pattern is independent of Reynolds number, and it is not associated to cylinders misalignment or external influences, what suggest an intrinsically flow feature.

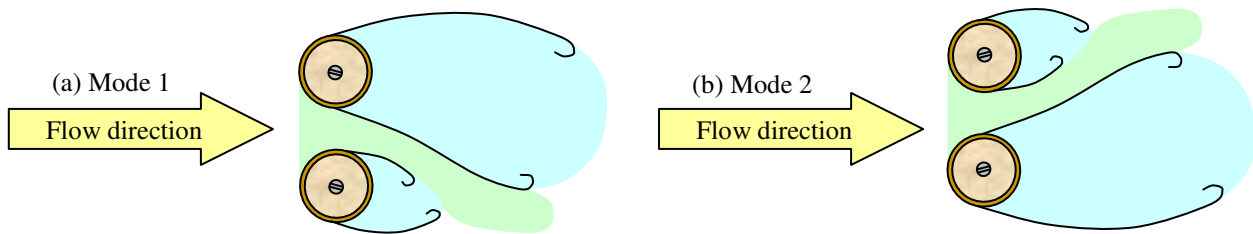


Figure 1. Bistability scheme for (a) mode 1 and (b) mode 2.

3. OBJECTIVES

The purpose of the present paper is to describe the experimental technique applied in the flow visualizations in banks of cylinders of triangular arrangement in a water channel, to identify or not the presence of the bistable effect. The aspect ratio chosen was of 1.6.

4. THE EXPERIMENTAL TECHNIQUE

The flow visualizations were performed in the closed circuit water channel of Hydraulic Research Institute of Federal University of Rio Grande do Sul (Fig. 2). As can be seen, the closed circuit water channel is compound by a settling chamber with a honeycomb that uniformes the flow, a nozzle, a long open channel (with 10 m upstream and 20 m downstream the test section) with constant cross section of 0,5 m of length by 0,6 m height, a lock gage that controls the level of water, and a discharge circuit.

In the lateral of the test section there is a glass wall, where some features of the flow and the experiments can be observed. The maximum possible work height is 0.5 m that is controlled through the flow rate, by a set of valves in the feeding pipeline, and by the lock gage placed in the discharge. The values of the flow rate are reading by an electromagnetic meter. The water height is controlled trough 8 level meters (three upstream and five downstream the test section).

The feeding system is provided by a pump, controlled by a frequency inverter, and it takes water from a buried tank, of about 600,000 liters, by a pipeline of 0.25 m of diameter. The system flow rate can vary from 0,6 l/s until a maximum of 220 l/s, that results in velocities from 3×10^{-3} m/s until 1,1 m/s, with a water level of 40 cm in the test section.

To avoid that some undesirable effects happen, due the fact that the flow is of free surface, and can present a severe velocities gradient, a visualization section was mounted inside the test section (Fig. 3). This visualization section is compound of acrylic plates (two sides, a base and a ceiling). The sides are at 475 mm far one to other, and have 340 mm of height by 1 m of length. The base is 1 m length and is at 40 mm far from the bottom of the channel, and provides the support of the cylinders (that are rigidly attached to this plate). The ceiling is 1 m length, is at 340 mm of the bottom of the channel, and the water level ever passes 30 mm though it. This means that the water level is ever of 380 mm in the test section.



Figure 2. Closed circuit water channel of Hydraulic Research Institute of Federal University of Rio Grande do Sul.

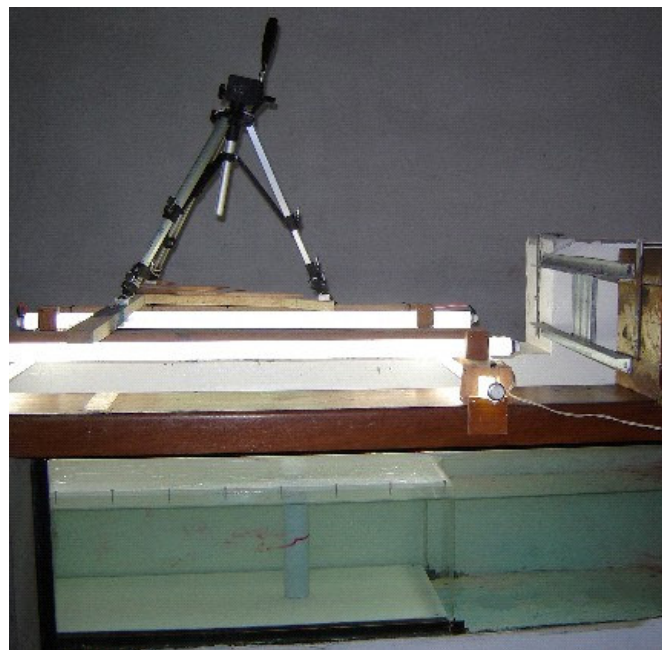


Figure 3. Visualization section mounted inside the test section.

The cylinders are building with commercial PVC tubes, with 60 mm of diameter, and are covered by a very fine film of white plastic, also made of PVC. This covering adds more contrast to the obtained movies, instead the original coloration of the cylinders, which are brown.

In the interior of each cylinder, there are six hoses of nylon, with 2 mm of diameter, distributed from the following mode: 2 hoses at 60 mm below the ceiling plate of acrylic, 2 hoses at the middle plane of the visualization section (at 150 mm from the base or the ceiling plate) and 2 hoses at 60 mm above the base plate of acrylic. These positions will be called of $z_1 = 60$ mm, $z_2 = 150$ mm and $z_3 = 240$ mm, respectively. Each one of the exits of these pairs of hoses have an inclination of 10° with the horizontal plane (one hose in relation to another). So, visualizations can be performed in these three planes, with different ink colors.

The complete tube bank is composed by 9 cylinders: 5 in the first row and 4 in the second one (Fig. 4a).

In each raw there is a special cylinder, with an inclined mirror and built for observe the angle that the ink flow that exits from the neighbor cylinder performs when it passes through the gap. This special cylinder can be moved from above to below trough a steel cable and it returns with aid of a spring (Fig. 4b).

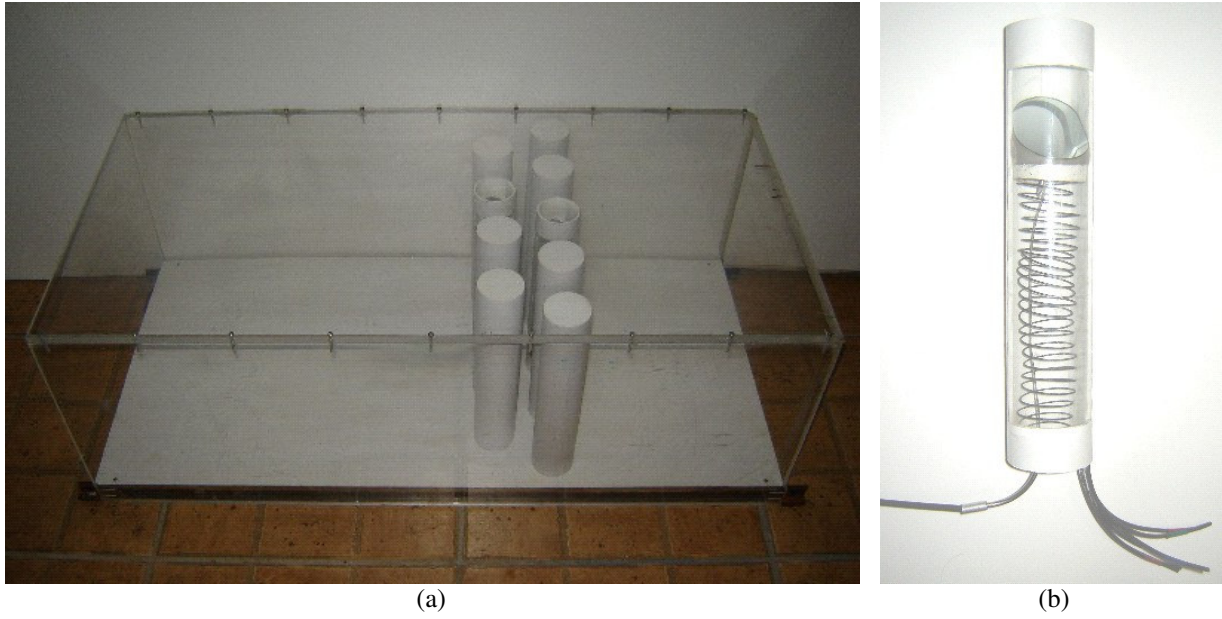


Figure 4. (a) The complete tube bank. (b) The special cylinder with an inclined mirror.

An ink distribution system was mounted to provide an adequate ink injection in the cylinders (Fig. 5a). It consists of three ink tanks, of red, green and blue ink color (referent to the inferior plane, middle plane and top plane of visualization, respectively) with a volume about 2 liters, that distribute the ink to 30 registers that control the ink distributions to the cylinders (each 2 registers control the ink distribution of one row of cylinders). From these registers, the ink flows through hoses of 8 mm of diameter until the bottom of the channel, and is connected to the base plate of acrylic.

The base plate hides a complex system of ink distribution, which redistributes the ink that came from the hoses to connectors (Fig. 5b). These connectors complete the union ink system distribution-cylinder. Finally, the base plate is covered by a fine white plate of PVC, with 1 mm thickness. This way, the camera can film the flow in a vertical plan, without perceive the ink distribution that happens below this plate. The only features that the camera films are the cylinders and the ink, that sweeps the periphery of the cylinders, from upstream to downstream.

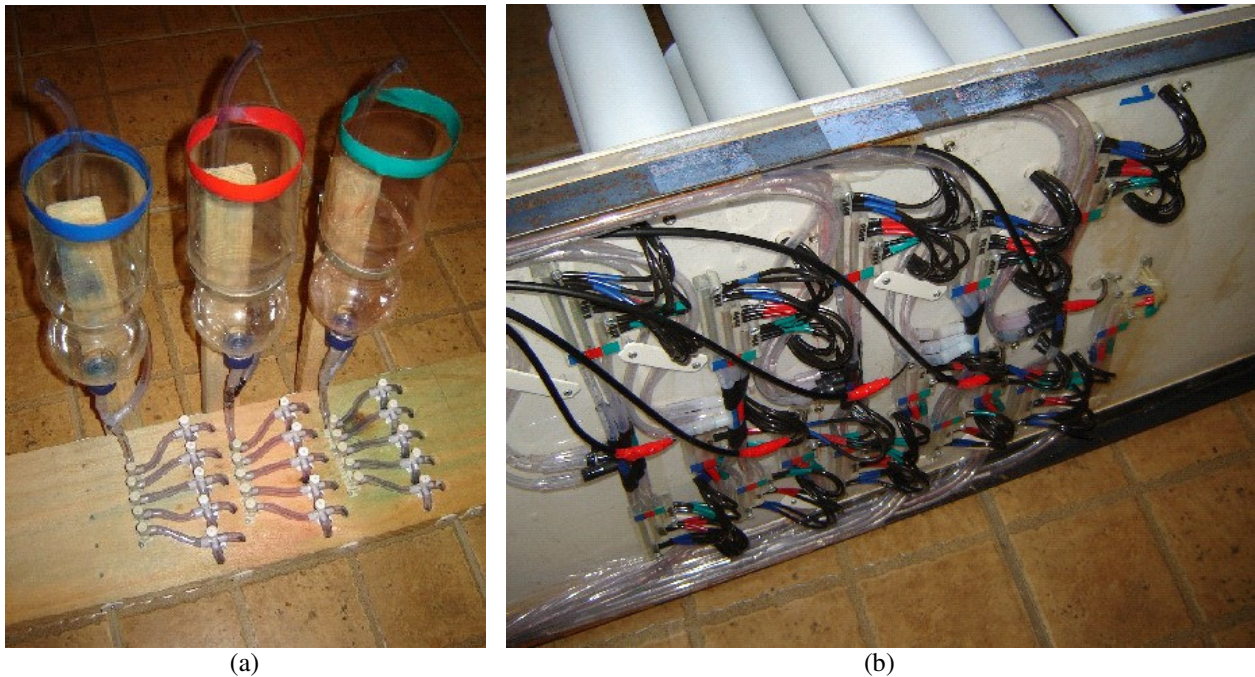


Figure 5. (a) Ink distribution system of the cylinders. (b) Detail of the base plate.

A hot film probe (type DANTEC 55R42), were used to measured the velocity of flow by means of the DANTEC *StreamLine* constant hot-film anemometry system to determine the profiles velocity of the cross visualization section.

A 12 bits data acquisition board (NATIONAL AT-MIO-16E-10) with ISA interface was used to convert the analogical signal to digital series. The mean error of the flow velocity determination with a hot wire was lesser than 12%.

The profiles velocities were obtained inside of the visualization section, in a vertical plane placed 50 mm upstream this end. Figure 6 shows the profiles velocity for flow rate values of 10, 30 and 50 l/s. These results are viewed from an upstream position.

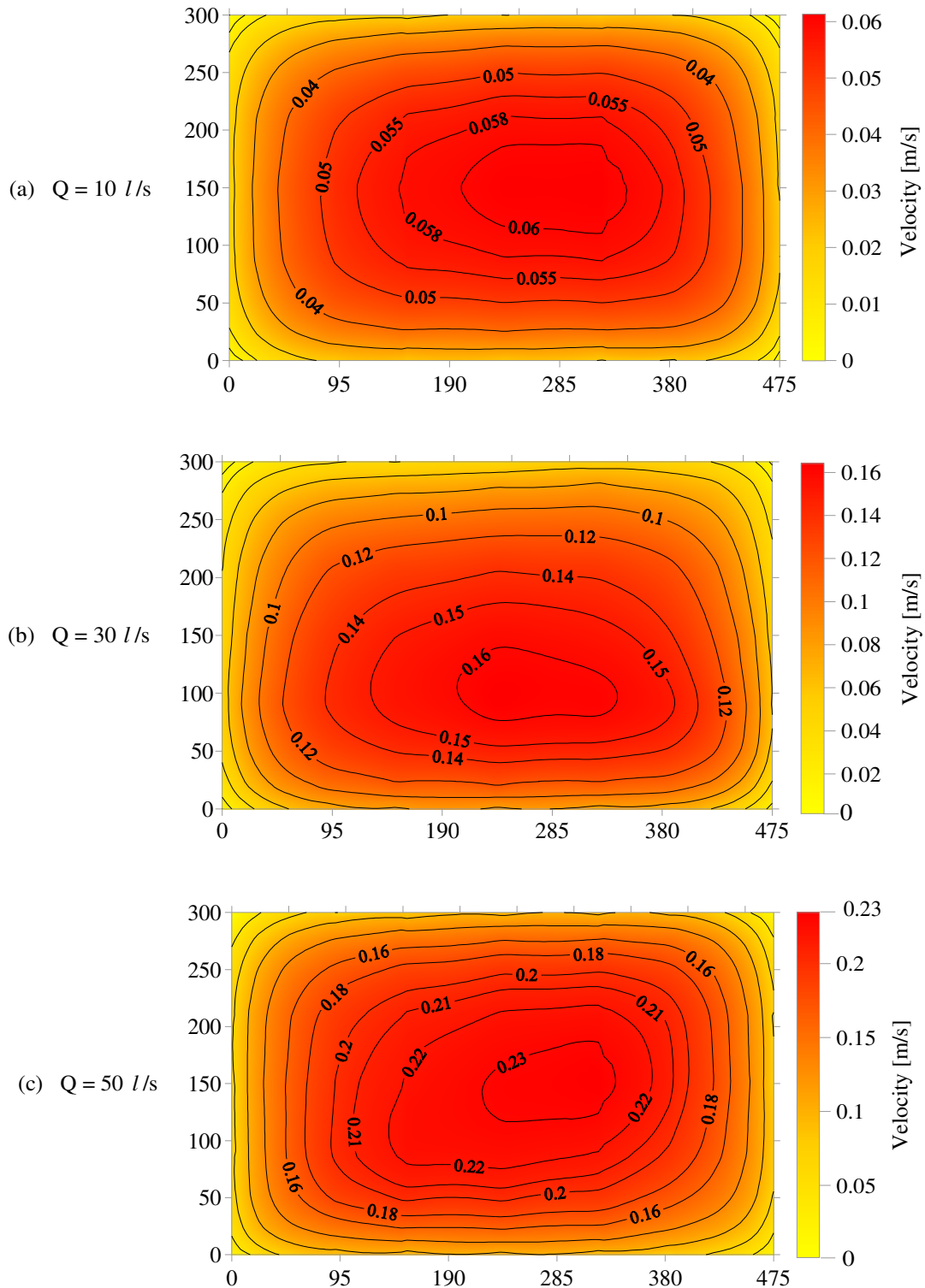


Figure 6. Profiles velocity of the visualization section for flow rate values “Q” of (a) 10 l/s, (b) 30 l/s and (c) 50 l/s.

As can be seen from these profiles velocity, the flow presents some velocity distribution asymmetries. Chow (1959) explains that this is the case for prismatic channels, where the flow is in fact three-dimensional, and in spiral. This movement can be originated for small perturbations in the inlet of the channel.

The registers of the visualizations were performed with a digital camera, placed above the visualization section that allows that movies with a resolution of 640 x 480 pixels at 30 frames per second can be done.

5. RESULTS

The results of the flow visualizations are presented through static pictures, obtained from takes of the movies.

All the Reynolds numbers for the experiments were calculated with the percolation velocity. This is the mean velocity of the tube bank in a top view, and depends on a reference velocity and the areas of the bank tubes and the cylinders (in a top view). For flow rates of 10 l/s, 30 l/s, 50 l/s, the mean velocities, calculated by the multiplication of the velocity by the area element are of 0.059 m/s, 0.156 m/s and 0.232 m/s, respectively.

Endres and Möller (2001) present a more complete study of the use of this parameter in tube-bank flow analysis.

In all visualizations, the flow direction is from the left to right side.

5.1. A single cylinder

In order to verify if the purpose technique produces reliable results, a preliminary test was performed. It consists in the flow visualization around a single circular cylinder, at various Reynolds numbers. The results were compared with the schematic regimes of vortex shedding characterized by Blevins (1990), and are shown in Fig. 7.

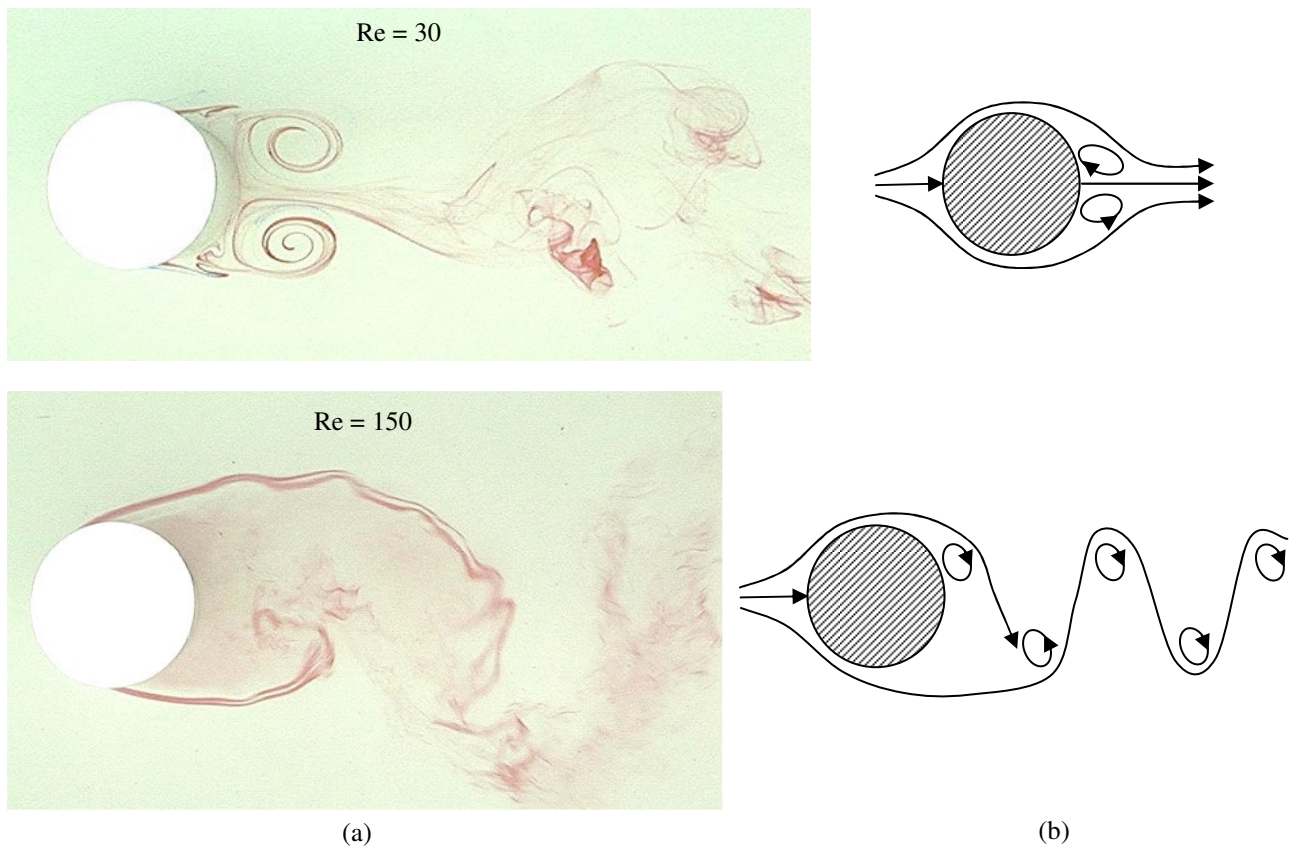


Figure 7. Flow visualization around a single circular cylinder, at various Reynolds numbers (a), in comparison with schematic regimes of vortex shedding (b).

5.2. Two cylinders side-by-side

Figure 8 shows the results of the flow visualization for two cylinders side-by-side with $p/D=1.26$ and Fig. 9 shows the results for $p/d=1.6$.

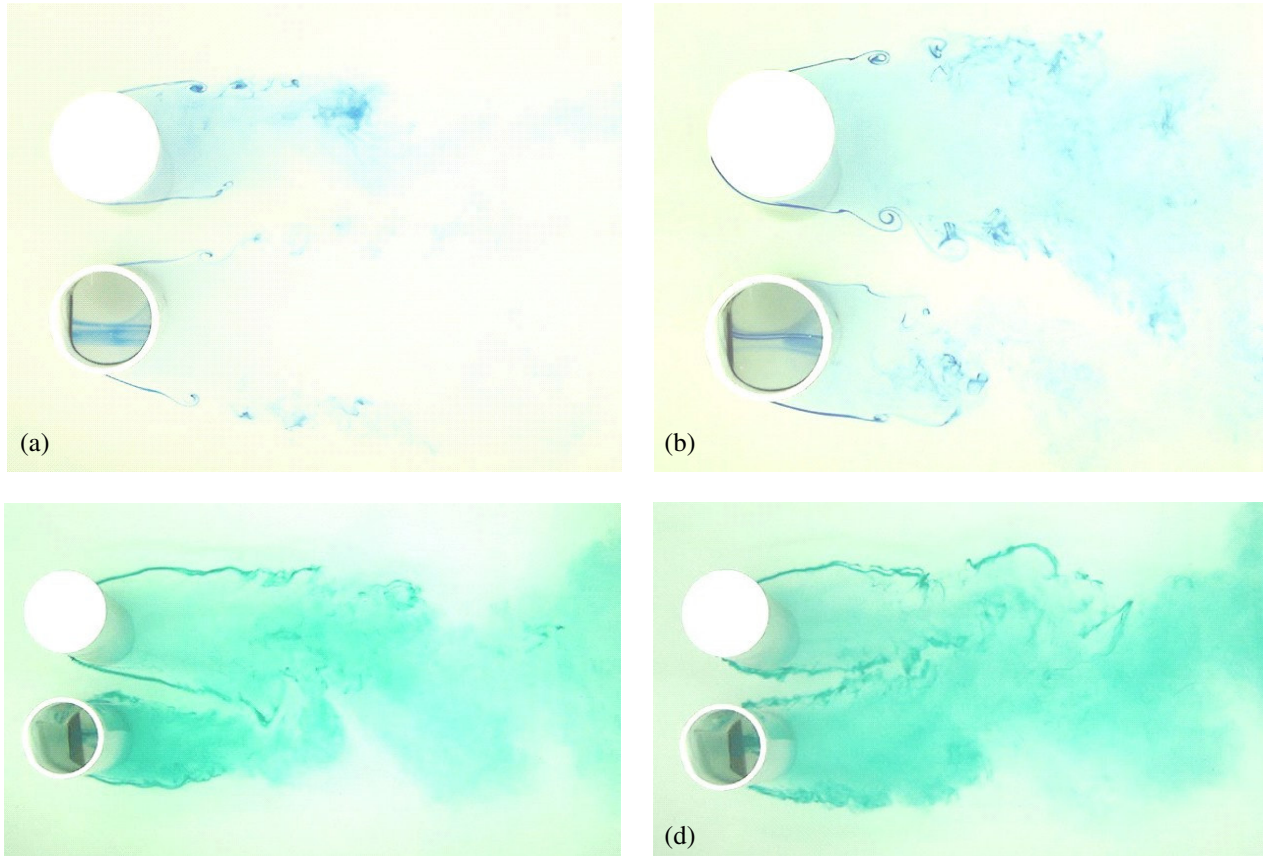


Figure 8. Flow visualization for two cylinders side-by-side with $p/d=1.6$. Reynolds number 7500: (a) Mode 1 and (b) Mode 2. Reynolds number 15000: (c) Mode 1 and (d) Mode 2

From these results is possible to verify the presence of biased and bistable flow mode of two cylinders placed in a side-by-side arrangement. This is the same pattern flow show in the Fig. 1. The time between two changing modes is irregular and to capture this phenomenon the camera must be acquire images for a long period of time (more than 2 minute). Similar results were found for the middle plane ($z_2 = 150$ mm).

The analysis of the results of the flow visualizations consist in to detect patterns of the flow based in the ink deflection when it passes through the gaps between the cylinders. Knowing where the ink is deflected is possible to identify the possible patterns of the flow and the bistable effect by the presence of a wide near-wake behind a cylinder and a narrow near-wake behind the other that change with the time.

The quantity of ink that is injected in each tape of the cylinders is practically the same; so, the narrow near-wakes present a bigger concentration or contrast of their colors than the wide near-wakes, because they have lesser area for the same quantity of ink.

5.3. One row of cylinders

Figure 10 shows the results of the flow visualization for one row of cylinders, at Reynolds number of 7500 and 15000 (Figs. 10a and 10b, respectively), for $p/d=1.6$. The pattern found for this case is illustrated in Fig. 11, and agreed with one of the regimes found by Zdravkovich (1997) and Olinto (2005). No other patterns were obtained for the other two planes ($z_1 = 60$ mm and $z_2 = 150$ mm).

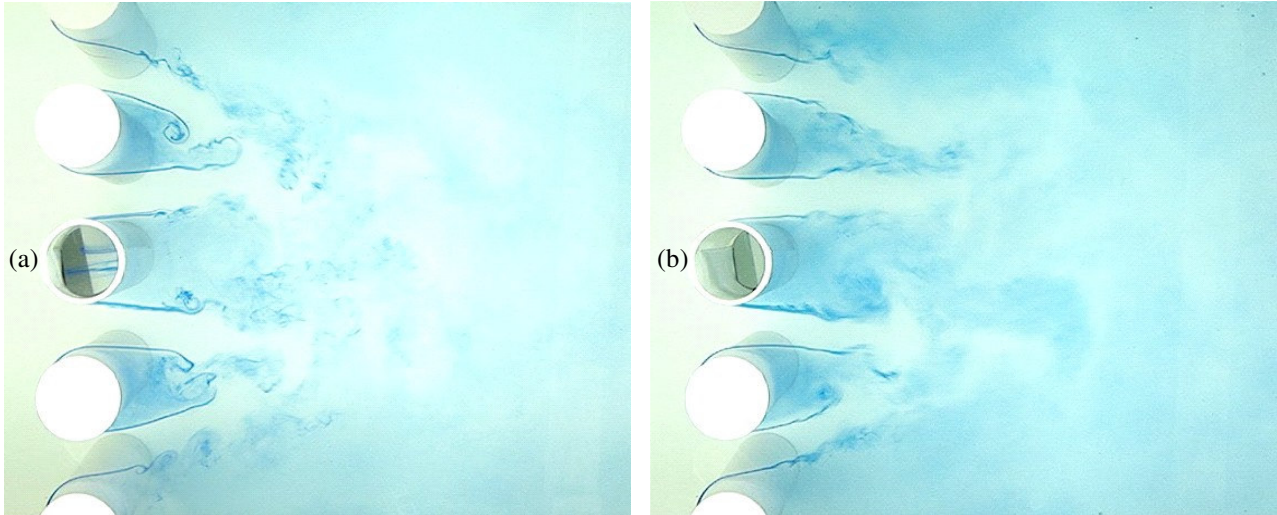


Figure 10. Flow visualization for one row of cylinders for $p/d=1.6$: (a) $Re = 7500$ and (b) $Re = 15000$.

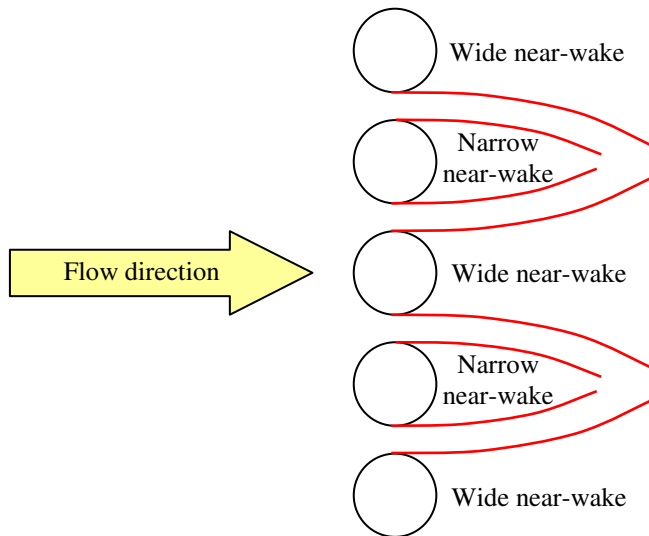


Figure 11. Flow pattern for one row of cylinders and $p/d=1.6$ at $Re = 7500$ and $Re = 15000$.

For all the visualizations, the flow near of the lateral wall was not used in the identification of the patterns.

One interesting topic about the analysis of the purpose technique is about the view of the flow deflection by the inclined mirror. Depending on the position of the camera, the angle of the ink flow shown by the mirror will be misunderstanding. To emphasize one special feature of the flow, as the vortex street, the focus of the camera can be directed not perpendicularly to the cylinder with the mirror and this can cause this misunderstanding result.

Figure 12a shows a zoom of the inclined mirror of the Fig. 10a, where two traces of ink are present. The ink trace indicated as A is deriving from the neighbor cylinder, and that indicated as B is deriving from the own cylinder with the mirror. As the camera is not focused at the cylinder with the mirror, these two traces appear. One way to solve this inconvenient is to direct the camera at the cylinder with the mirror and turn of the ink distribution to this cylinder. Fig. 12b and Fig. 12c show the results when using this technique, where the flow is basically bi-dimensional.

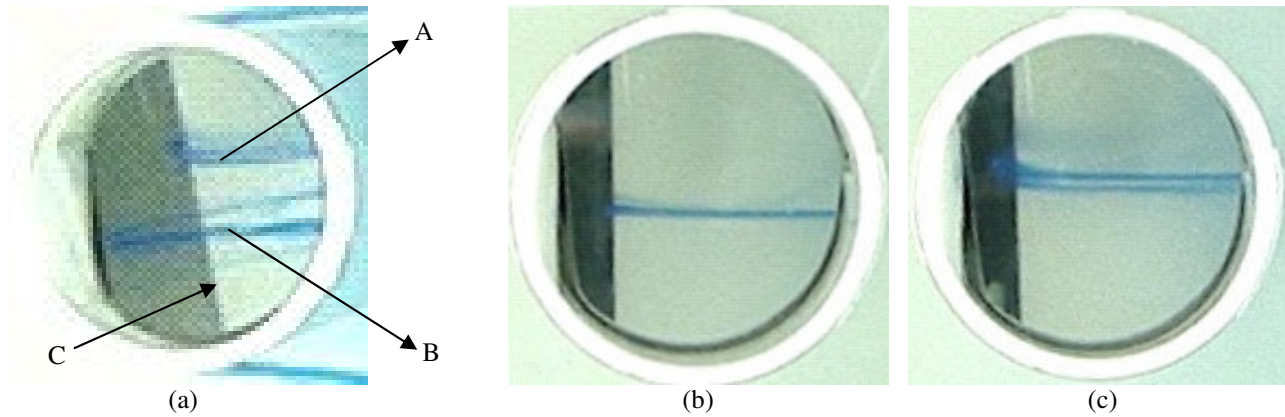


Figure 12. View trough the inclined mirror of the ink flow of the neighbor cylinder. Same case of Fig. 10.

From the Fig. 12a is also possible to see one another important topic. The view of the neighbor cylinder is softly inclined by the left (detail C). Due to the fact that the flow present pressure fluctuations, sometimes the ink flow that emanates from one of the ink tapes is completely deflected to only one side of the cylinders, making impossible the visualization in the remainder side. This way, the affected cylinder is softly rotated to a side that solve this problem (Fig. 13), previously the visualization, but, if this cylinder was that with the mirror, the neighbor one will also present an inclined appear in the mirror, and this not meaning that they or the mirror are not align.

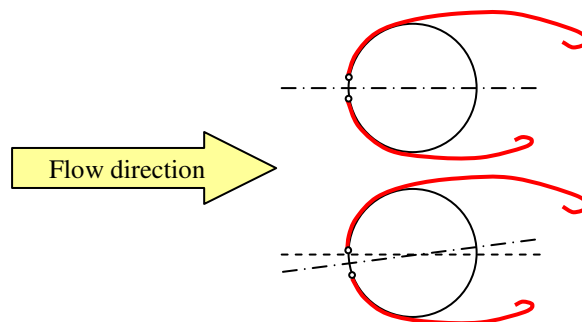


Figure 13. Detail of the rotation of the cylinders to avoid that the ink flow can be completely deflected to only one side.

Figure 14a and Fig. 14b show a view trough the glass window of the water channel, for one row of cylinders and $p/d=1.6$ at $Re = 7500$ and $Re = 15000$, respectively, where is possible to see all the three planes of ink injection in the cylinders by the side. From these pictures the flow is basically bi-dimensional next to the cylinders, but downstream them the flow acquire a three-dimensional characteristic.

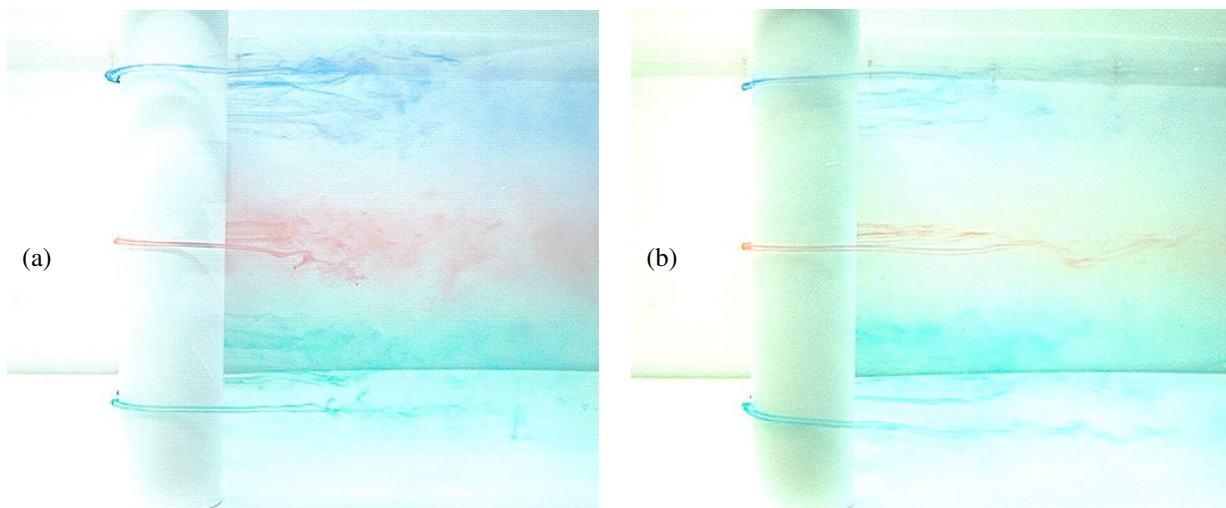


Figure 14. Lateral view of the cylinders trough the glass window of the channel: (a) $Re = 7500$ and (b) $Re = 15000$.

5.4. Two rows of cylinders

Figure 15 shows the results of the flow visualization for two row of cylinders, at Reynolds number of 7500 and 15000 (Figs. 15a and 15b, respectively), for $p/d=1.6$.

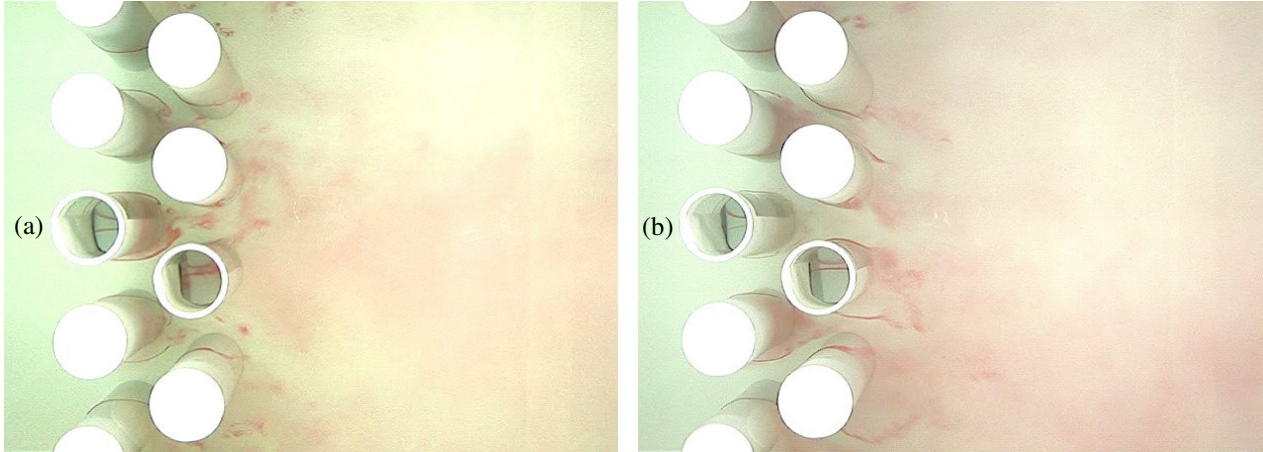


Figure 15. Flow visualization for two row of cylinders for $p/d=1.6$: (a) $Re = 7500$ and (b) $Re = 15000$.

From the Fig. 15a, the cylinder with the mirror in the second row presents a wide near-wake, and the pattern presented by this case is shown in Fig. 16a. For Fig. 15b, the both cylinders of the middle of the second row present a narrow near-wake deflected to the right side (down side in the paper). The pattern presented by this case is shown in Fig. 16b.

Similar results were obtained for the other planes of ink injection ($z_1 = 60$ mm and $z_3 = 240$ mm).

No bistable effect was detected for this configuration until the present moment.

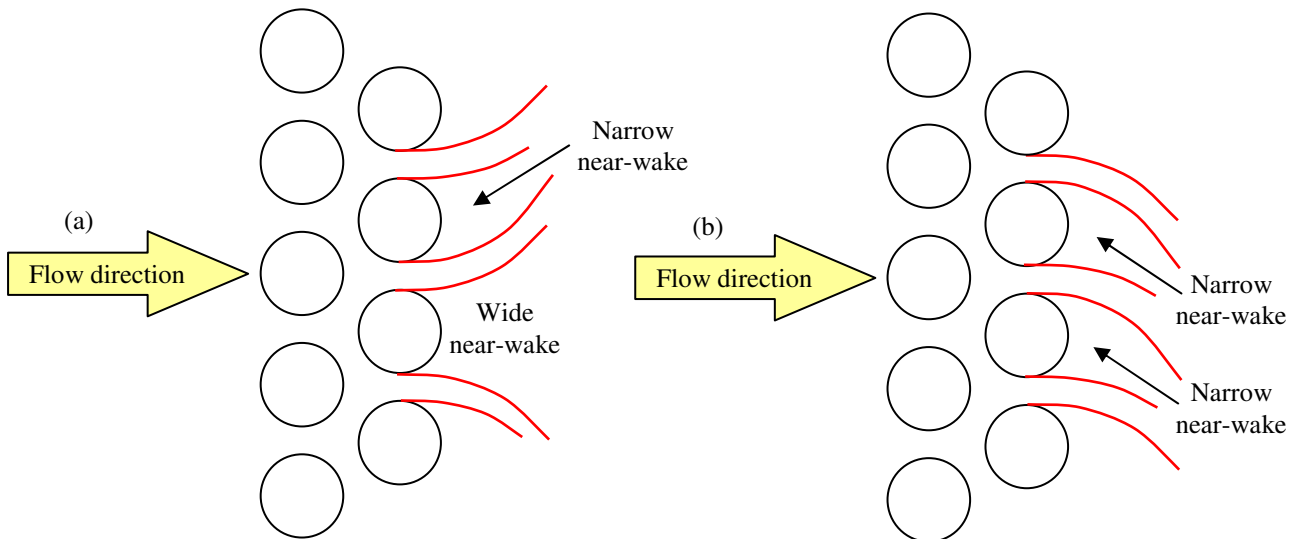


Figure 16. Flow pattern for two row of cylinders and $p/d=1.6$. (a) $Re = 7500$ and (b) $Re = 15000$.

5.5. Three rows of cylinders

Preliminary tests were performed to detect the flow mode of three rows of cylinders. As the flow that emanates from the first two rows of cylinders reaches the third one and produces a distortion of the ink flow, this prevent each one of the ink tapes of the 3rd row to flow though the periphery of the cylinders, causing a disorder in the ink flow.

So, in the actual stage of the work, after the 3rd row of cylinders, the angular position of the ink tapes does not allow that the bistable effect could be identified.

6. CONCLUSIONS

In this work is described in details the experimental technique used to visualize the bistable effect in banks of cylinders of triangular arrangement.

As could be seen from the results, the bistable effect is clearly visible in the case for 2 cylinders side-by-side ($p/D = 1.6$).

Due to the fact that the flow that emanates from the first two rows of cylinders reaches the third one and produces a distortion of the ink flow, this prevent each one of the ink tapes of the 3rd row to flow though the periphery of the cylinders, causing a disorder in the ink flow. So, in the actual stage of the work, after the 3rd row of cylinders, the angular position of the ink tapes does not allow that the bistable effect could be identified.

Although, this work is in the beginning, and some more changes may be done to improve better results, like add other ink tapes in distinct angular positions of the periphery of the cylinders, to allow that the effects that happen after the 3rd row can be visible. Also, the mirror apparatus can be change to avoid that the relative position of the camera can present dubious interpretation of the results of the flow angle that in the gaps.

New visualizations will be performed to trying to overcome these difficulties and also for the fourth and fifths rows of cylinders. One another pitch-to-diameter ratios p/d will be studied (1.26), and this results will be compared with that found through hot wire anemometry technique in aerodynamic channel.

7. REFERENCES

- Alam, M.M., Sakamoto, H. and Zhou, Y.,2005, "Determination of flow configurations and fluid forces acting on two staggered circular cylinders of equal diameter in cross-flow", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 21, pp. 363-394
- Blevins, R.D.,1990, "Flow-Induced Vibration", Van Nostrand Reinhold, Second Edition, New York.
- Chow, V.T.,1959, "Open Channel Hydraulics", McGraw-Hill Book Company, Nova York
- Endres, L.A.M. and Möller, S.V.,2001, "Looking for Correct Dimensionless Parameters for Tube-Bank Flow Analysis", *Journal of Fluids and Structures*, Vol.15, pp.737-750.
- Olinto, C.R.,2005, "Experimental Study Of The Characteristics of the Turbulent Flow in the First Rows of Tube Banks" (in Portuguese) D. Eng. Dissert., PROMEC, Federal Univ. of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil, 120 p.
- Sumner, D., Wong, S.S.T., Price, S.J. and Païdoussis, M.P.,1999, "Fluid Behaviour of Side-by-side Ccircular Cylinders in Steady Cross-flow", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 3, pp. 309-338.
- Zdravkovich, M. M.,1997, "Flow around circular cylinders - Volume 2: Applications", Oxford Universit Press Inc., New York, United States, 589 p.
- Zdravkovich, M. M. and Stonebanks, K. L.,2000, "Intrinsically Non-Uniform and Metastable Flow in a Behind Tube Arrays", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 4, pp. 305-319.
- Ziada, S.,2006, "Vorticity Shedding and Acoustic Resonance in Tube Bundles", *Journal of the Brazilian Society of Mechanic Sciences and Engineering*, Vol. XXVIII, pp. 186-199.

8. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

HISTERESE NO CONTROLE DE ESCOAMENTO USANDO JATOS SINTÉTICOS

Bruno Henrique de Sena e Oliveira, bhsena@gmail.com

Marcello Augusto Faraco de Medeiros, Marcello@sc.usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos,
Av. Trabalhador São-carlense, 400, Pq Arnold Schimidt
São Carlos - SP, CEP 13566-590

Abstract. *O controle de escoamento é um campo de pesquisa moderno. O uso de excitações periódicas pode ser aplicado para atrasar a separação da camada limite, permitindo coeficientes de sustentação maiores, e também pode ser usado para a diminuição do arrasto. Esse projeto visa estudar a histerese nesse sistema quando aplicado em um difusor com excitações periódicas acústicas, sem a adição de massa ao sistema. A metodologia nesse projeto é fundamentalmente experimental. Foi construído um túnel com dois difusores na saída e as excitações serão aplicadas paralelamente ao escoamento, junto a um dos difusores. O efeito do jato sintético será medido por meio de anemometria de fio quente ligado a um sistema de aquisição transiente de dados.*

Palavras - chave: *Camada Limite, Jatos Sintéticos, Excitações Periódicas, Transição, Excitação Hidrodinâmica.*

1. INTRODUÇÃO

Em aerodinâmica, a separação da camada limite está quase sempre associada a perdas de algum tipo, como diminuição da sustentação e aumento do arrasto, portanto um dos objetivos da engenharia aeronáutica é retardar essa separação, ou evitá-la completamente. Existem muitos meios propostos para o controle da camada limite (“boundary layer control” - BLC), mas as excitações periódicas vêm se destacando entre eles por oferecer grandes resultados mesmo com atuadores leves, e devido à versatilidade de se poder ligar ou desligar o sistema de acordo com a conveniência. Esse estudo se limita ao trabalho com excitações hidrodinâmicas, que se mostram muito promissoras (Greenblatt e Wygnanski, 2000). Dentro das excitações periódicas há vários tipos de atuadores, como pequenos “flaps” mecânicos, mas estudaremos os atuadores acústicos pela facilidade maior de projeto.

O mecanismo que governa esse sistema, embora não seja conhecido completamente, se baseia na aceleração da criação das estruturas grandes e coerentes (“Large Coherent Structures” - LCSs) que transportam momento pelo escoamento, na camada de mistura (“mixing layer”). Esse método é comprovadamente mais eficiente que o sopro contínuo, que adiciona momento diretamente na camada limite, mesmo com coeficientes de momento 10 vezes menores (Greenblatt e Wygnanski, 2000).

O desenvolvimento dessa tecnologia não só nos permitirá aumentar o coeficiente de sustentação e diminuir o de arrasto das aeronaves, mas também nos permitirá manipulá-los, abrindo portas para usá-los, além de como dispositivos hiper-sustentadores, como dispositivos de controle do avião, podendo chegar a substituir os ailerons, por exemplo. Fora isso, aumentando o coeficiente de sustentação, essa tecnologia permite aumentar a carga útil do avião, tornando-o mais eficiente.

Para entendermos melhor essa tecnologia, o estudo da histerese nesse sistema é fundamental, já que, com o estudo do tempo de resposta, ou seja, do tempo que leva para a camada limite aderir à asa a partir do começo das excitações, poderemos verificar a viabilidade desse sistema, visto que para uso no controle da aeronave esse é um tópico essencial. Além disso, esse estudo nos permitirá aperfeiçoar o sistema, evitando gastos dispensáveis de energia, pois a energia necessária para aderir a camada limite à asa provavelmente é maior do que a energia necessária para mantê-la aderida.

2. EXPERIMENTO

Esse trabalho é de natureza essencialmente experimental. Para isso foi escolhido o uso de um túnel de vento com difusores, principalmente pela facilidade de construção e de aquisição dos dados, já que uma varredura unidimensional das velocidades na saída nos dará informação com a qualidade necessária, mas de fácil interpretação.

2.1. Aparato Experimental

Para estudar o efeito dos atuadores foi construído um túnel de 1,5 m de comprimento, 19 cm de altura e 2,5 cm de largura. O bocal foi montado baseado no de outro trabalho (Béra e al. 2003), o aparato ficando como o ilustrado pela seguinte figura:

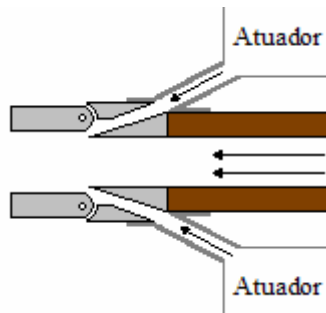


Figura 1. Esquema da saída do túnel

Os bocais na saída do escoamento são móveis, e a saída dos atuadores mede cerca de 2 mm de espessura. Nesse projeto, no entanto, apenas um atuador será usado. O atuador se trata de um *Subwoofer* que, ao ser ligado em uma onda senoidal irá alternadamente soprar e sugar o ar de forma que assim atingiremos uma excitação periódica sem a adição de massa ao sistema. Para a aquisição dos dados serão usados anemômetros de fio quente, presos em um posicionador eletromecânico que nos permitirá fazer uma varredura do perfil do escoamento. Tanto o atuador quanto o anemômetro estarão ligados a um sistema de aquisição de dados transientes que nos permitirá fazer leituras precisas da resposta do escoamento a diversas condições de excitação.

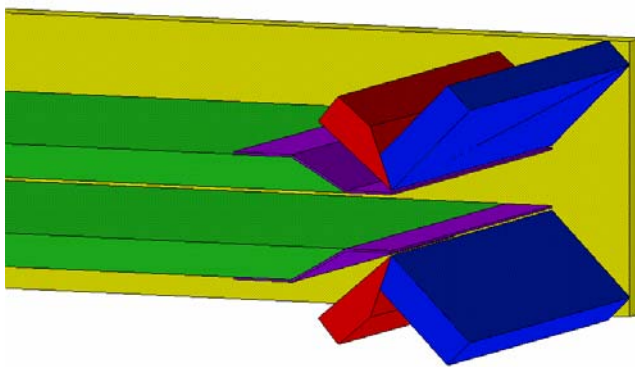


Figura 2. Desenho em CAD de esquema da saída do túnel

2.2. Metodologia

Serão feitas diversas medidas usando esse aparato. Primeiramente serão feitas medidas básicas para verificar a efetividade do efeito do sistema de excitação. Depois serão realizados testes para determinação da frequência ótima do sistema, para que seja usado nos outros testes. Serão em seguida realizados testes para verificar o ângulo do difusor para o qual a camada limite se separa, e até quando o sistema é efetivo para promover o recolamento dela.

De acordo com a literatura (Greenblatt e Wygnanski, 2000), espera-se que a frequência reduzida ótima fique em torno de 1, para a seguinte equação:

$$F^+ = X_{te} f_e / U_\infty$$

Sendo que X_{te} é a distância do atuador ao bordo de fuga do flap, f_e é a frequência de excitação e U_∞ é a velocidade do escoamento no túnel.

Após a determinação dessas características do sistema, serão feitas as medidas que testarão a histerese no sistema, com a entrada de rampa e a subsequente rampa decrescente para podermos verificar a existência de alguma histerese no bocal. Também mediremos a resposta transiente do sistema a uma entrada rampa e a uma entrada “rampa invertida”,

cortando a excitação e vendo os efeitos imediatos na direção da deflexão do escoamento. Essas rampas serão bem lentas para que possamos verificar os efeitos em cada etapa.

2.3. Resultados e Discussão

Foram realizadas medidas simples, usando instrumentação básica, de regime permanente para verificar a efetividade do sistema (fig. 3), com os difusores instalados a 45° . Usando um tubo de pitot conseguimos verificar a deflexão e desenhar a variação da efetividade do sistema com a mudança da frequência.

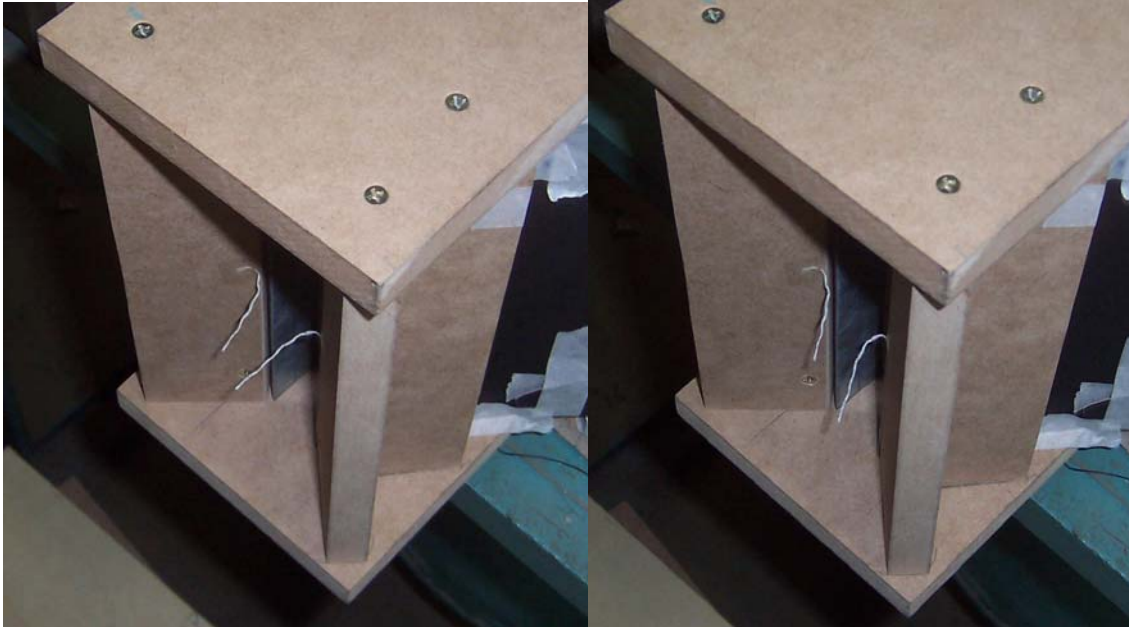


Figura 3. Mudança na direção do escoamento como resultado da excitação

À partir das medições foi construído o seguinte gráfico:

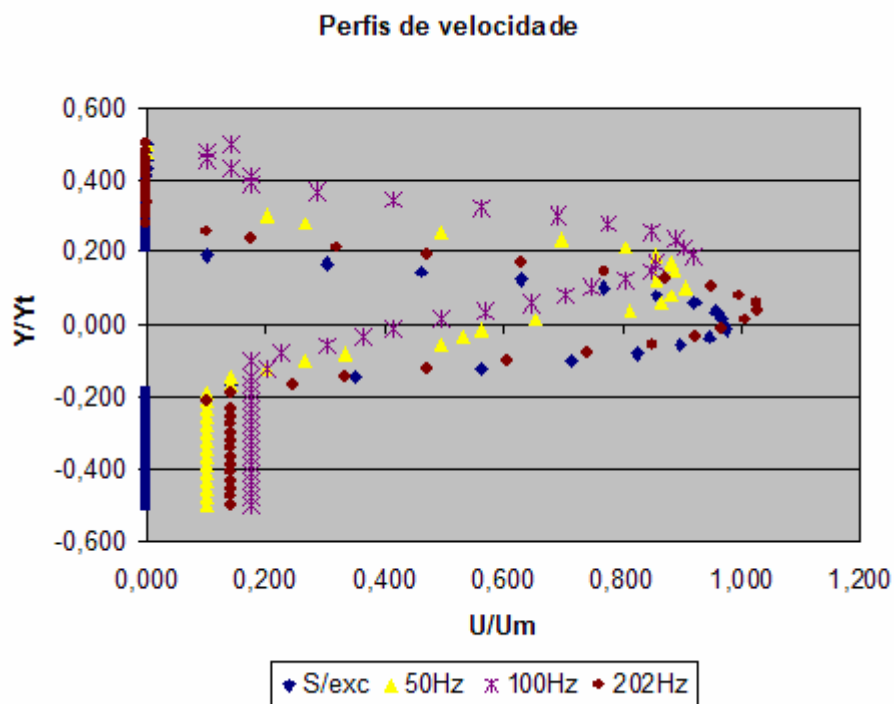


Figura 4. Perfis de velocidade para diferentes frequências de excitação

Sendo que a velocidade do túnel era de 4,3 m/s, podemos calcular as frequências reduzidas equivalentes:

Tabela 1. Frequências reduzidas equivalentes, para as frequências usadas no experimento:

Frequência de Excitação	Frequência Reduzida
50 Hz	0.53
100 Hz	1.06
202 Hz	2.14

Vemos a consistência do modelo escolhido, já que vemos que a frequência reduzida mais efetiva é aquela mais próxima de 1, e em 2 ela já perde eficiência (Nishri e Wygnanski, 1998). Tendo garantido a validade do modelo, podemos aplicar os testes já mencionados e medir a histerese.

Esperamos, depois de interpretação dos dados obtidos, encontrar uma resposta imediata aos estímulos, assim como à rampa, já que comandando o sistema que permite o recolamento da camada limite estão as LCSs, que, espera-se, respondam imediatamente aos estímulos (Greenblatt e al., 1999).

3. RECONHECIMENTOS

Esse projeto foi realizado no Laboratório de Aerodinâmica Experimental da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo. Tivemos a ajuda de todos os professores e técnicos, sempre prontos a ajudar. Agradecimentos em especial a Igor Braga que nos ajudou bastante com a instrumentação e Átila Barbosa, que nos ajudou com a construção do aparato. Por último, gostaria de agradecer ao Marcelo Bariani que, além de construir parte do túnel, coletou os dados utilizados para validar o sistema.

4. REFERÊNCIAS

- Béra, J. C., Ben Chiekh, M., Michard, M., Comte-Bellot, G., e Sunyach, M., "Control of a Plane Jet by Fluidic Wall Pulsing", AIAA Journal, vol. 41, No. 5, 2003, pp. 972-975;
- Greenblatt D., Wygnanski I.J., "The control of flow separation by periodic excitation", Progress in Aerospace Sciences, 36(7): 487-545, Outubro 2000;
- Mello, H. C. M., Catalano, F. M., Souza, L. F. (2007). "Numerical Study of Synthetic Jet Actuator Effects in Boundary Layers" *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol XXIX, No. 1, pp. 34-41;
- Hsiao F.B., Liu C. F., Shyu J. Y., "Control of wall-separated flow by internal acoustic excitation". AIAA J 1990;28(8):1440-6;
- Huang L. S., Maestrello L., Bryant T. D. "Separation control over airfoils at high angles of attack by sound emanating from the surface". AIAA Paper 87-1261, 1987;
- Erk P., Graichen K., Fernholz H. H. "Separation control on an airfoil using strong acoustic perturbations." *Euromech Colloquium 361 – Active control of Turbulent Shear Flows*, Berlin, 17-19 March 1997;
- Smith, B.L., Glezer, A., "Jet Vectoring Using Synthetic Jets", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 458, 2002, pp. 1-34;
- Freund, J. B., Moin, P., "Jet Mixing Enhancement by High-Amplitude Fluidic Actuation", AIAA Journal, vol. 38, No. 10, 2000, pp. 1863-1870;
- Kwong A. H. M., Downing A. P., "Active Boundary Layer Control in Diffusers", AIAA Journal, vol. 32, No. 12, 1994, pp. 2409-2414;
- Seifert A., Darabi A., Wygnanski, I., "Delay of Airfoil Stall by Periodic Excitation", AIAA Journal, vol. 33, No. 4, 1996, pp. 691-698.
- Nishri B., Wygnanski I. "Effects of Periodic Excitation on turbulent separation on a Flap", AIAA Journal, vol. 36, No. 4, pp. 547-556.
- Greenblatt D., Darabi A., Nishri B., Wygnanski I., "Some factors affecting stall control with particular emphasis on dynamic stall", AIAA Paper 99-3504, 30th AIAA Fluid Dynamic Conference, Norfolk, VA, 28 June-July 1999.

5. RESPONSIBILITY NOTICE

Os autores são os únicos responsáveis pelo material impresso nesse paper.

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM PAR DE CILINDROS DE BASE QUADRADA DISPOSTOS EM DIFERENTES ARRANJOS GEOMÉTRICOS

Vinicius Souza Morais, vinicius.souza.morais@gmail.com

Sérgio Said Mansur, mansur@dem.feis.unesp.br

UNESP Ilha Solteira, Depto de Engenharia Mecânica, Av. Brasil Centro 56, Ilha Solteira, SP, 15385-000.

Rubens Campregher, rubenscamp@dal.ca

Dalhousie University, 1360 Barrington St., Halifax, NS, B3J 2X4, Canada.

Resumo. Quando um fluido escoar em torno de um corpo sólido, uma região perturbada surge ao seu redor. A extensão desta região e a magnitude das instabilidades ali presentes dependem das propriedades do escoamento incidente e vários outros fatores, tais como a forma geométrica, a orientação e as dimensões do obstáculo. Em inúmeras situações de interesse prático, dois ou mais corpos são colocados suficientemente próximos uns dos outros, de tal forma que o escoamento em torno de cada um deles interfere no movimento do fluido ao redor dos corpos adjacentes. Este trabalho apresenta um estudo numérico do escoamento na esteira de um par de cilindros de base quadrada, afastados entre si de uma distância d , e dispostos de maneira que a linha imaginária que une os centros dos dois corpos forme diferentes ângulos θ com a direção do escoamento. Para cada arranjo considerado, a influência do número de Reynolds sobre o número de Strouhal e as alterações na estrutura do escoamento é investigada. Como ferramenta de trabalho, foi utilizado o programa de computacional próprio, que resolve as equações de Navier-Stokes 2D em coordenadas cartesianas, empregando o método volumes finitos. As simulações foram realizadas para números de Reynolds inferiores a 1000, sem a presença de bloqueio sólido. Os resultados das simulações foram comparados com informações experimentais e dados de outros autores, apresentando razoável concordância.

Palavras-chave: Simulação numérica, escoamento externo, agrupamento de cilindros, cilindro quadrado.

1. INTRODUÇÃO

Apesar de constituir um problema clássico da mecânica dos fluidos, o escoamento ao redor de corpos cilíndricos ainda representa um tema de forte apelo científico, uma vez que muitos dos mecanismos presentes neste tipo de escoamento permanecem, ainda hoje, mal compreendidos. Além disso, pela frequência com que ocorre em diferentes campos da engenharia, este tipo de escoamento apresenta, também, considerável interesse tecnológico. De fato, diversas estruturas empregadas em situações práticas atuam como cilindros imersos num escoamento. Por exemplo, pilares de pontes da engenharia civil; tirantes e longarinas de asas da engenharia aeronáutica; cabos de transmissão da engenharia de infra-estrutura elétrica; elementos externos de automóveis da engenharia automotiva; linhas de ancoragem da engenharia naval; plataformas e tubulações da engenharia *offshore*; dentre muitas outras.

Em muitas aplicações, dois ou mais cilindros encontram-se suficientemente próximos uns dos outros, de modo que o escoamento ao redor de um deles interfere significativamente no movimento do fluido em torno dos demais – Zdravkovich (1977), Zdravkovich (1987). A configuração assumida pelo escoamento depende de diferentes fatores, dentre os quais se incluem as propriedades do escoamento incidente, bem como a forma da seção transversal dos cilindros e disposição geométrica dos corpos sólidos dentro do arranjo. Ao longo das últimas décadas, vários trabalhos que tratam desta classe de problema têm sido publicados, com nítida predominância de estudos envolvendo pares de cilindros circulares posicionados em *tandem* ou *side-by-side* – Zdravkovich (1987), Kim & Flynn (1995), Ng et al. (1997), Sumner et al. (1999), Zhou et al. (2000), Meneghini et al. (2001), Itoh & Himeno (2002), Alam et al. (2003), Jester e Kallinderis (2003), Xu & Zhou (2004), Alam & Sakamoto (2005), Wang & Zhou (2005), Carmo & Meneghini (2006), Deng et al. (2006), Papaioannou et al. (2006), Alam & Zhou (2007), entre vários outros. Artigos envolvendo agrupamento de cilindros com seção transversal não circular são bem mais escassos na literatura, sobretudo quando números de Reynolds relativamente baixos são considerados. Dentre os poucos trabalhos que tratam especificamente de arranjos de cilindros de base quadrada, incluem-se Sakamoto et al. (1987), Luo et al. (1999), Lankadasu & Vengadesan (2007) e Suqin et al. (2000).

O presente trabalho é dedicado à investigação numérica do escoamento ao redor de dois cilindros quadrados separados de uma distância fixa $2d$, dispostos de diferentes maneiras, um em relação ao outro, como representado na Fig. 1. Simulações 2D foram realizadas para números de Reynolds moderados, na faixa de 50 a 1000, com diferentes valores do ângulo θ . Em termos geométricos, os dois casos extremos são representados pelo arranjo *tandem*, onde $\theta = 0^\circ$, e pelo *side-by-side*, onde $\theta = 90^\circ$.

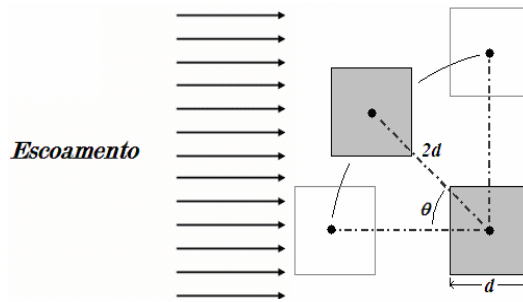


Figura 1. Definição geométrica o problema estudado no presente trabalho.

É interessante observar que, de acordo com Monkewitz and Nguyen (1987), a aproximação 2D representa adequadamente as principais propriedades do escoamento em torno de corpos rombudos, uma vez que as instabilidades primárias na esteira são essencialmente 2D. Entretanto, estudos experimentais empreendidos por Szepessy and Bearman (1992) mostram que tratamentos bidimensionais, em geral, superestimam as características flutuantes do escoamento. Isto faz sentido, posto que alguns importantes mecanismos dissipativos que caracterizam os escoamentos turbulentos e transicionais só podem ser representados diretamente em três dimensões. Por outro lado, é bem sabido que simulações 2D com malhas suficientemente refinadas são capazes de produzir melhores resultados que cálculos 3D que empregam malhas grosseiras. Assim, na indisponibilidade de recursos computacionais apropriados à realização de simulações 3D, cálculos 2D permanecem, ainda, um importante instrumento de análise de escoamentos em torno de corpos rombudos.

2. ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS

Sakamoto et al. (1987) descrevem três diferentes regimes de escoamento ao redor de um par de cilindros quadrados em *tandem*, quais sejam: a) regime de corpo único, onde os cilindros são posicionados suficientemente próximos um do outro, de modo que uma só esteira é gerada a jusante do segundo cilindro; b) regime síncrono, onde os vórtices se desprendem de ambos os cilindros de maneira sincronizada e; c) regime de esteira dupla, onde o espaçamento entre os cilindros é relativamente grande, com a formação de esteiras independentes atrás de ambos os corpos. Estas três configurações estão ilustradas na Fig. 2.

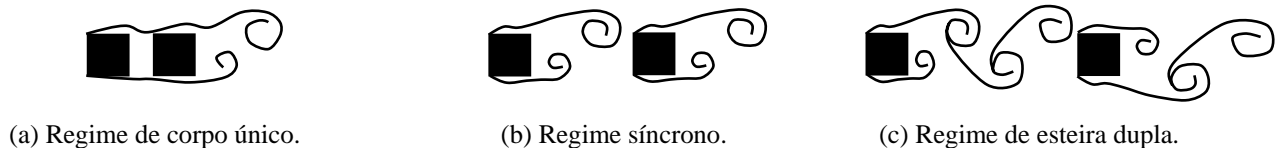


Figura 2. Regimes de escoamento em torno de dois cilindros de base quadrada em *tandem* ($\theta = 0^\circ$).

Como mostra o estudo de Williansom (1985), a sincronização da emissão de vórtices entre as duas esteiras pode ocorrer, também, quando o arranjo entre os cilindros é do tipo *side-by-side*. Neste caso, o autor mostra, ainda, através de visualizações de escoamento, que o desprendimento de vórtices pode ocorrer em fase ou em antifase, como ilustrado na Fig. 3.

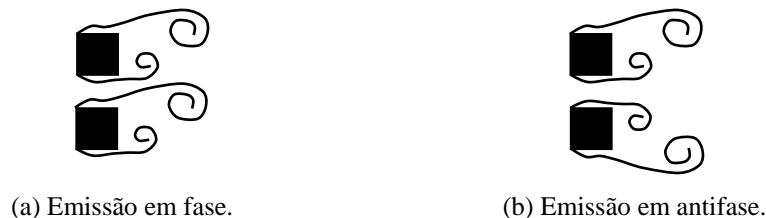


Figura 3. Emissão alternada de vórtices na esteira de dois corpos rombudos em arranjo *side-by-side* ($\theta = 90^\circ$).

Na região da esteira, uma forte interação entre os vórtices acontece, atribuindo grande complexidade ao escoamento. Em particular, as três situações representadas na Fig. 4 merecem especial consideração: a) a formação de dipolos, quando duas estruturas turbilhonares contra-rotativas se aproximam; b) o emparelhamento de vórtices, caracterizada pela interação entre estruturas com circulação de mesmo sinal e; c) a distensão (*tearing*), que se dá quando uma pequena estrutura turbilhonar se interpõe entre duas outras de maiores dimensões, girando no mesmo sentido.

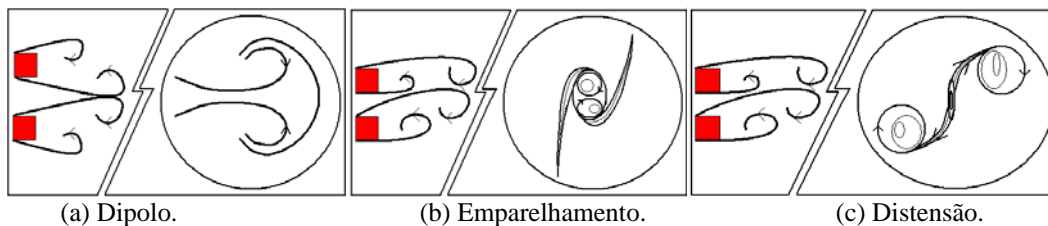


Figura 4. Interação entre estruturas turbilhonares.

3. EQUAÇÕES GOVERNANTES E PROCEDIMENTO NUMÉRICO

De maneira geral, o escoamento isotérmico, incompressível e não permanente de um fluido newtoniano pode ser matematicamente bem representado pelas equações de conservação da massa e de Navier-Stokes, escritas na forma indicial cartesiana respectivamente como:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2}$$

onde ρ representa a massa específica do fluido, ν sua viscosidade cinemática, t é o tempo, x as coordenadas espaciais, u as componentes do vetor velocidade e p a pressão.

No presente trabalho, tais equações foram resolvidas com a ajuda de um código computacional próprio, escrito em linguagem FORTRAN90, que se baseia no método dos volumes finitos. O esquema de diferenças centrais foi utilizado para representar os fluxos difusivos das equações de transporte, enquanto que, para o tratamento dos termos advectivos, empregou-se o esquema QUICK consistente, proposto por Hayase et.al. (1992), a partir de uma adaptação do esquema QUICK desenvolvido originalmente por Leonard (1979). O método SIMPLEX foi escolhido para o acoplamento pressão velocidade e uma formulação totalmente implícita foi adotada para todas as variáveis, o que leva à resolução de um sistema linear, realizada com a ajuda do algoritmo de Thomas (TDMA).

Como mostrado na Fig. 5, o domínio computacional é composto por uma malha bidimensional não uniforme, mais refinada na região ocupada pelos cilindros. Suas dimensões foram definidas após uma exaustiva etapa de testes preliminares, realizados com o objetivo de garantir a independência dos resultados com relação à malha utilizada. As condições de contorno foram prescritas da maneira como segue: a) escoamento uniforme com velocidade U_∞ na entrada do domínio; b) escoamento plenamente desenvolvido na saída ($\partial u / \partial x = 0$) e; c) corrente não perturbada nas fronteiras superior e inferior ($\partial u / \partial y = 0$). Além disso, para simular a presença dos cilindros no interior do domínio de cálculo, viscosidade da ordem de 10^{30} foi imposta dentro das regiões por eles delimitadas. Como discutido por Patankar (1980), este artifício permite prescrever, de forma indireta, as condições de impermeabilidade e não deslizamento sobre as faces dos cilindros. Sondas numéricas, ajustadas para capturar a evolução temporal dos sinais de velocidade e de pressão, foram posicionadas em diferentes pontos do domínio.

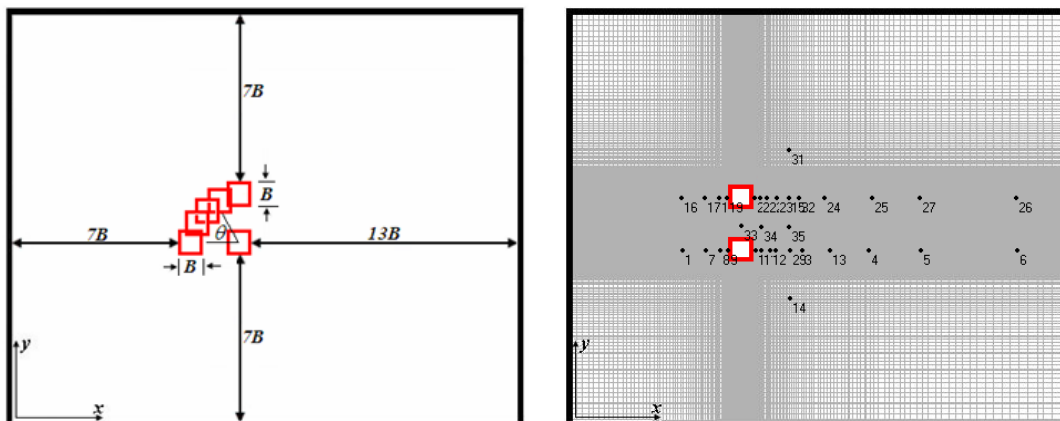


Figura 5. Domínio de cálculo para diferentes ângulos θ e malha computacional para $\theta = 90^\circ$.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As primeiras simulações foram realizadas para as duas configurações geométricas extremas, quais sejam, $\theta = 0^\circ$ (arranjo *tandem*) e $\theta = 90^\circ$ (arranjo *side-by-side*). Em seguida, escoamentos ao redor de arranjos com diferentes ângulos θ foram considerados. Os resultados são aqui apresentados nesta mesma seqüência.

A Fig. 6 mostra os mapas de isovorticidade obtidos para o arranjo *tandem*, com $Re = 100$ e $Re = 500$, depois de atingido o regime estatisticamente permanente. Os mapas de isovorticidade mostram que a configuração da esteira é bastante estável e, para este arranjo e esta distância entre cilindros, o regime de escoamento de corpo único predomina. Pode-se observar também que, com o aumento do número de Reynolds, a formação dos vórtices alternados ocorre a uma distância cada vez menor à jusante do segundo corpo, aumentando a frequência de emissão de vórtices. Para baixos números de Reynolds, apenas a oscilação periódica da esteira é observada próximo à base do segundo cilindro.

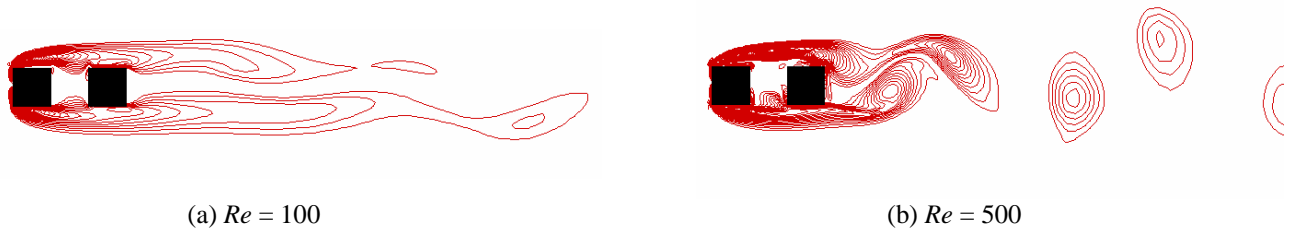


Figura 6. Mapas de isovorticidade para o escoamento em regime estatisticamente permanente em torno de dois cilindros posicionados em configuração *tandem* ($\theta = 0^\circ$).

A Fig. 7 apresenta, para $Re = 500$, o sinal temporal da componente vertical da velocidade (v), captado por uma sonda posicionada a jusante do segundo cilindro, juntamente com sua correspondente transformada de Fourier (FFT). Neste caso, a frequência de emissão de vórtices na esteira é de aproximadamente 10,9 Hz, resultando em um número de Strouhal de 0,155.

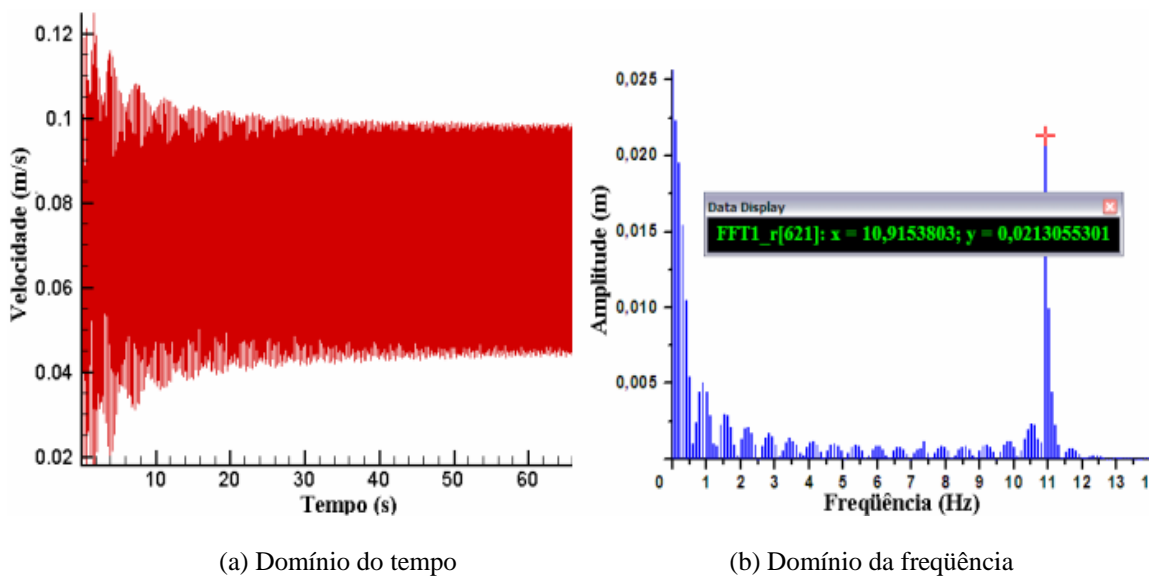


Figura 7. Evolução temporal da componente vertical da velocidade (v) a jusante do segundo cilindro para a configuração *tandem* ($\theta = 0^\circ$) e respectiva FFT, para $Re = 500$.

O mesmo procedimento foi adotado na determinação do número de Strouhal para outros valores de Reynolds, na faixa de 50 a 1000. Os resultados são apresentados na Fig. 8, onde são confrontados com os dados experimentais de Duarte (2001), obtidos em um túnel hidrodinâmico para o mesmo arranjo das simulações, e com dados de Lindquist (2000), obtidos numa campanha de ensaios conduzida nesse mesmo equipamento, mas para um cilindro de base retangular com razão de aspecto 3:1.

Estes resultados mostram que a curva de Strouhal apresenta um comportamento monotonicamente crescente até $Re = 500$, estabilizando-se, a partir de então, em 0,155. A comparação com os resultados de Duarte (2001) e

Lindquist (2000) permite observar que, para baixos números de Reynolds ($Re < 100$), os três resultados são muito próximos. É provável que isto ocorra porque, neste regime de escoamento, o fluido confinado no espaço entre os cilindros pouco se movimenta e o escoamento em torno do arranjo de cilindros quadrados acontece como se fosse ao redor de um único cilindro retangular. Para números de Reynolds mais elevados, diferenças que chegam a 20% podem ser observadas entre os resultados numéricos e experimentais, indicando que efeitos tridimensionais, não considerados nas simulações numéricas, possam estar presentes nos ensaios experimentais.

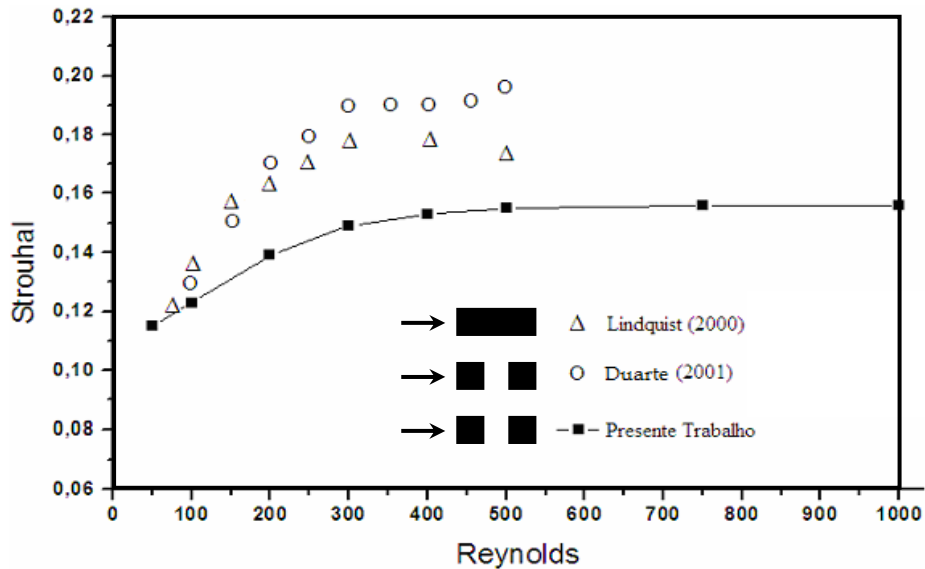


Figura 8. Curva de Strouhal vs Reynolds para cilindro retangular com razão de forma 3:1 e dois cilindros quadrados em formação *tandem* ($\theta = 0^\circ$).

A Fig. 9 mostra, para dois diferentes números de Reynolds, 100 e 500, os mapas de isovorticidade obtidos em regime estatisticamente estabelecido para o arranjo *side-by-side*. Neste caso, pode-se observar que, para $Re = 100$, o desprendimento de vórtices se dá em antifase, embora o sincronismo não seja perfeito. Para $Re = 500$, pode-se observar que as esteiras produzidas por cada um dos cilindros apresentam larguras bastante distintas. Em comparação com os resultados apresentados na Fig. 6, pode-se constatar que, para um mesmo número de Reynolds, a esteira gerada em arranjo *side-by-side* é significativamente mais complexa, caracterizando-se pela intensa interação entre estruturas turbilhonares, com emparelhamentos, estiramentos e formação de dipolos. Além disso, como relatado por Alam & Sakamoto (2005), entre outros autores, este tipo de escoamento pode caracterizar-se pela biestabilidade da esteira.

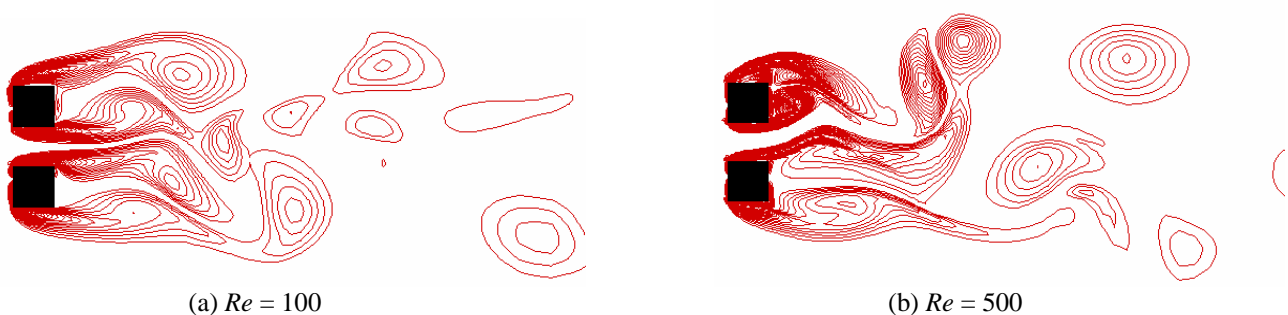


Figura 9. Mapas de isovorticidade para o escoamento em regime estatisticamente permanente em torno de dois cilindros posicionados em configuração *side-by-side* ($\theta = 90^\circ$).

Os sinais de velocidade registrados pela sonda 14 (Fig. 5), para $Re = 500$, podem ser observados na Fig.10, enquanto o gráfico da Fig. 11 permite observar o comportamento do número de Strouhal em função do número de Reynolds. Comparando-se os resultados das simulações com os dados experimentais de Fogal (2002), observa-se que, embora sejam encontradas discrepâncias de até 16% entre eles, as duas curvas apresentam a mesma tendência, com um pico no número de Strouhal por volta de $Re = 100$.

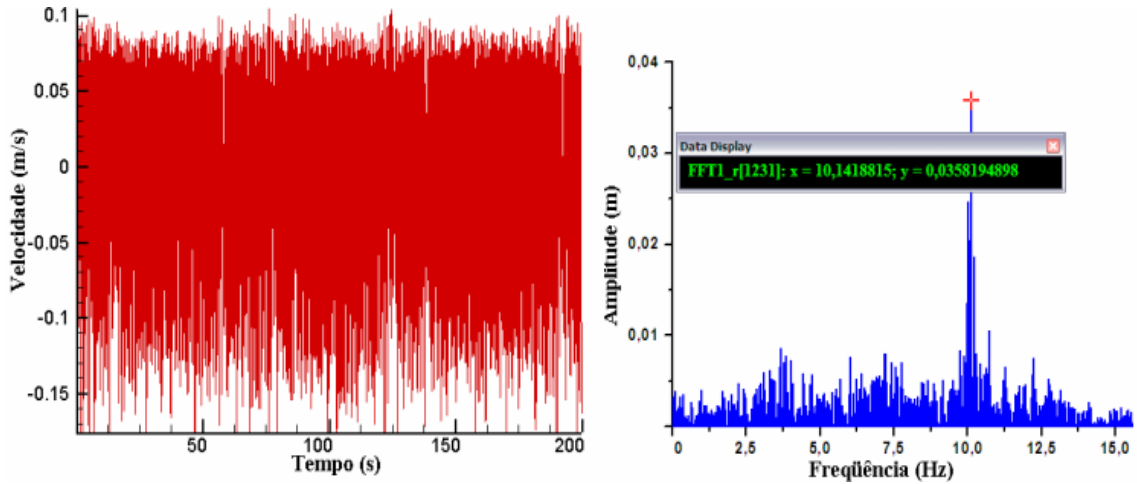


Figura 10. Evolução temporal da componente vertical da velocidade (v) a jusante dos cilindros em configuração *side-by-side* ($\theta = 90^\circ$) e respectiva FFT, para $Re = 500$.

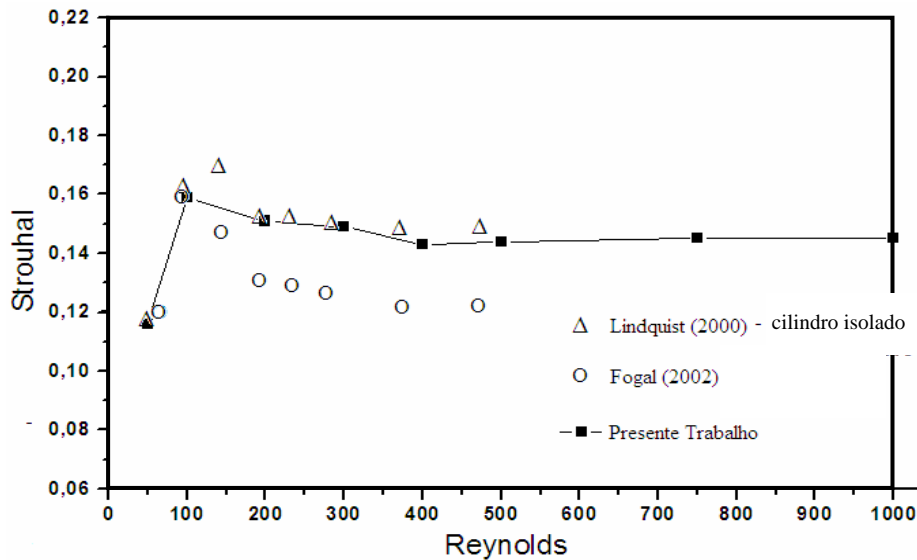


Figura 11. Curva de Strouhal vs Reynolds para um cilindro isolado e dois cilindros quadrados em formação *side-by-side* ($\theta = 90^\circ$).

Para os arranjos intermediários, $0^\circ < \theta < 90^\circ$, o escoamento torna-se ainda mais assimétrico, e as frequências de emissão de vórtices dos dois cilindros são bastante diferentes. Nestes casos, aliás, o número de Strouhal passa a variar consideravelmente, segundo a posição na onde o sinal de velocidades é coletado, indicando perda de estabilidade da esteira.

A Fig. 12, 13 e 14 mostram os mapas de isovorticidade num instante qualquer depois de atingido o regime estatisticamente permanente, para ângulos $\theta = 22,5^\circ$, 45° , $67,5^\circ$, respectivamente, em dois diferentes números de Reynolds, 100 e 500.

Para $\theta = 22,5^\circ$, Fig. 12, observa-se que a formação da esteira inferior do cilindro 1 é inibida e o escoamento é desviado para a parte superior do cilindro 2. Assim, a interação entre estruturas turbilhonares no entorno dos cilindros torna-se ainda mais complexa, favorecendo sobretudo a formação de dipolos e o estiramento de vórtices a jusante do conjunto. Além disso, de tempos em tempos, observa-se uma interrupção brusca dos vórtices emitidos na parte superior do cilindro 2, devido a uma queda periódica de pressão na base do cilindro 1. À medida que o número de Reynolds cresce, o tamanho dos vórtices na esteira próxima diminuem, aumentando a frequência de emissão do cilindro 2. Simulações complementares mostraram que, na faixa $0^\circ < \theta < 22,5^\circ$, a interferência dos vórtices provenientes do cilindro 1 sobre o escoamento na parte inferior do cilindro 2 diminui em intensidade, na proporção em que o ângulo entre os corpos aumenta, qualquer que seja o número de Reynolds considerado.

As imagens da Fig. 13 mostram que, para $\theta = 45^\circ$, a emissão de vórtices na parte inferior do cilindro 1 volta a acontecer, ainda que de maneira razoavelmente tímida. Aumentando-se o ângulo para $67,5^\circ$, Fig. 14, as duas esteiras podem ser novamente distinguidas.

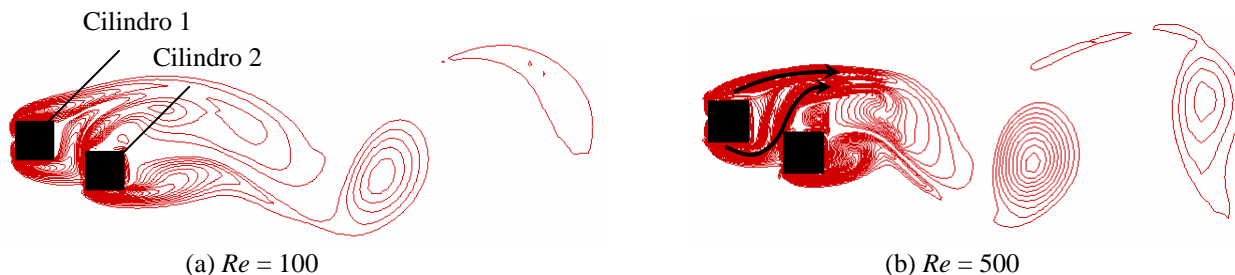


Figura 12. Mapas de isovorticidade para o escoamento em regime estatisticamente permanente em torno de dois cilindros posicionados com um ângulo $\theta = 22,5^\circ$.

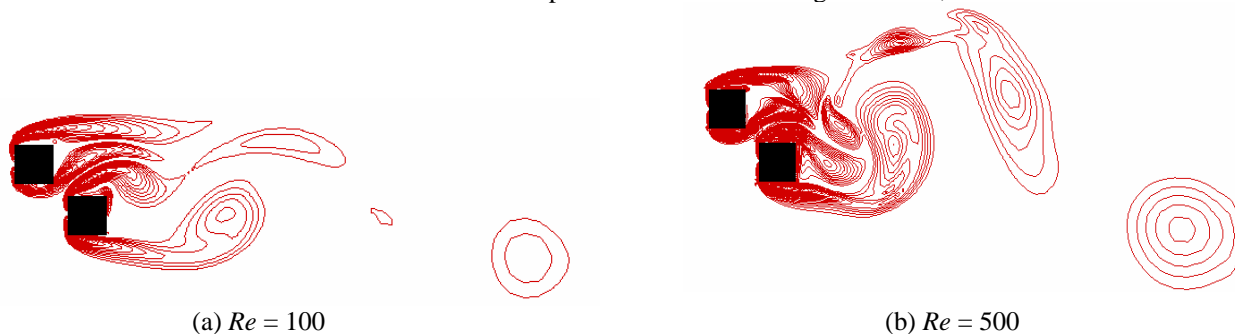


Figura 13. Mapas de isovorticidade para o escoamento em regime estatisticamente permanente em torno de dois cilindros posicionados com um ângulo $\theta = 45^\circ$.

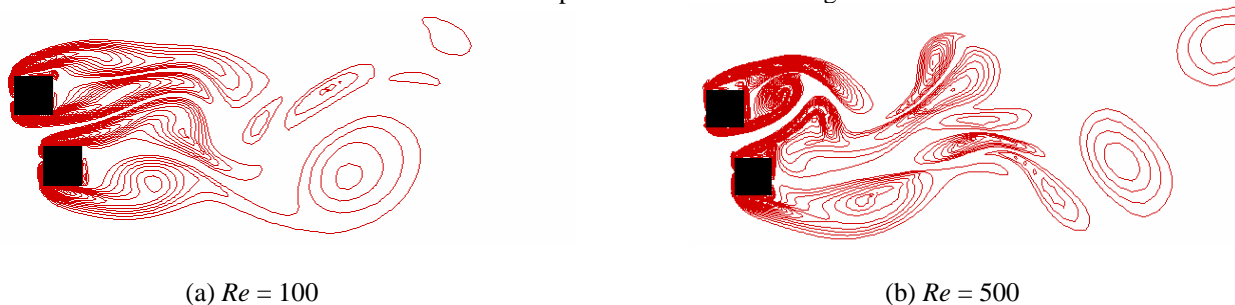


Figura 14. Mapas de isovorticidade para o escoamento em regime estatisticamente permanente em torno de dois cilindros posicionados com um ângulo $\theta = 67,5^\circ$.

Simulações realizadas para $20^\circ < \theta < 40^\circ$ e $Re = 500$ permitiram identificar que o desvio da esteira inferior do cilindro 1 para a região superior do cilindro 2 ocorre entre $\theta = 28^\circ$ e $\theta = 31^\circ$, como mostra a Fig. 15. Fixando-se o ângulo θ em 30° e variando-se o número de Reynolds, pôde-se observar que o aumento da velocidade do escoamento acentua o descolamento da camada limite nos bordos de ataque do cilindro 1. Com isto, diminui o desvio do escoamento para a parte superior do cilindro 2, resultando em uma esteira mais larga.

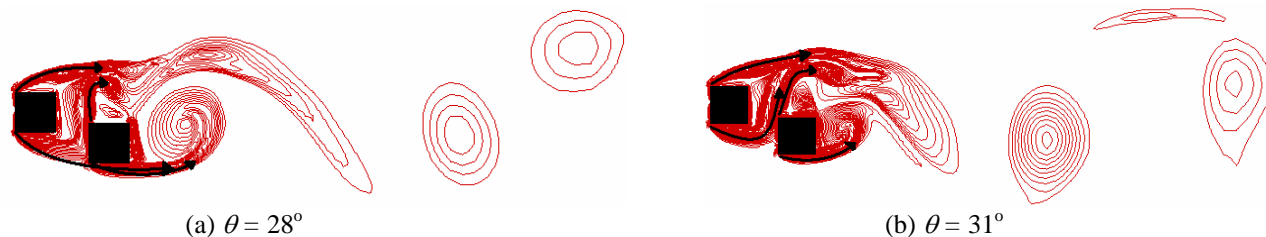


Figura 15. Mapas de isovorticidade para o escoamento em regime estatisticamente permanente a $Re = 500$, em torno de arranjos de cilindros com diferentes ângulos θ .

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi apresentado um estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros de base quadrada dispostos em diferentes arranjos geométricos, para números de Reynolds inferiores a 1000, desconsiderando-se o efeito do bloqueio sólido. Além das curvas de Strouhal *vs* Reynolds, gráficos de velocidade e frequência também foram apresentados, bem como imagens do escoamento para as várias angulações, que revelam diferentes padrões de escoamento.

Os resultados obtidos indicam que, à medida o ângulo entre os cilindros aumenta, as esteiras tornam-se assimétricas e ganham complexidade, favorecendo as interações entre estruturas turbilhonares. As simulações realizadas para arranjos intermediários ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) mostram que, a partir de um determinado ângulo θ , diminui sensivelmente a interferência direta da esteira à jusante do primeiro cilindro 1 na formação de vórtices junto à face inferior do cilindro 2.

No que tange à sincronização da emissão dos vórtices, observou-se que, o aumento da angulação entre os corpos pode desencadear o processo de migração das esteiras do modo em fase para o modo antifase, independentemente do número de Reynolds.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores expressam seus agradecimentos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP e à Fundação para o Desenvolvimento da UNESP – FUNDUNESP, pelo apoio concedido à realização deste trabalho.

7. REFERÊNCIAS

- Alam, M.M., Moriya, M., Takai, K., Sakamoto, H., 2003, "Fluctuating fluid forces acting on two circular cylinders in a tandem arrangement at a subcritical Reynolds number", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol.91, pp.139-154.
- Alam, M.M., Sakamoto, H., 2005, "Investigation of Strouhal frequencies of two staggered bluff bodies and detection of multistable flow by wavelets", *Journal of Fluids and Structures*, vol.20, pp.425-449.
- Alam, M.M., Zhou, Y., 2007, "Dependence of Strouhal number, drag and lift on the ratio of cylinder diameters in a two-tandem cylinder wake", *Proc. 16th Australasian Fluid Mechanics Conference*, Gold Coast, Australia, pp.750-757.
- Carmo, B.S., Meneghini, J.R., 2006, "Numerical investigation of the flow around two circular cylinders in tandem", *Journal of Fluids and Structures*, vol.22, pp.979-988.
- Deng, J., Ren, A.L., Zou, J.F., Shao, X.M., 2006, "Three-dimensional flow around two circular cylinders in tandem arrangement", *Fluid Dynamics Research*, vol.38, pp.386-404.
- Duarte, M., 2001, "Estudo experimental do escoamento ao redor de arranjos de cilindros retangulares", Relatório Científico FAPESP, UNESP, Ilha Solteira.
- Fogal, M.L.F., 2002, "Estudo experimental do escoamento ao redor de cilindros retangulares posicionados em linha", Relatório Científico FAPESP, UNESP, Ilha Solteira.
- Hayase, T., Humphrey, J.A.C., Greif, R., 1992, "A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures", *Journal of Computational Physics*, vol.98, pp.108-118.
- Itoh, Y., Himeno, R., 2002, "Numerical simulation of three-dimensional flow around two circular cylinders in tandem arrangement", *RIKEN Review*, vol. 48, pp.3-6.
- Jester, W., Kallinderis, Y., 2003, "Numerical study of incompressible flow about fixed cylinder pairs", *Journal of Fluids and Structures*, vol.17, pp.561-577.
- Kim, T., Flynn, M.R., 1995, "Numerical simulation of air flow around multiple objects using the discrete vortex method", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol.56, pp.213-234.
- Lankadasu, A., Vengadesan, S., 2007, "Interference effect of two equal-sized square cylinders in tandem arrangement: with planar shear flow", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Published online in www.interscience.wiley.com, pp.1-17.
- Leonard, B.P., 1979, "A stable and accurate convective modeling proceed based on quadratic upstream interpolation", *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, vol.19, pp.59-97.
- Lindquist, C., 2000, "Estudo experimental do escoamento ao redor de cilindros de base quadrada e retangular", Dissertação de Mestrado, UNESP, Ilha Solteira.
- Luo, S.C., Li, L.L., Shah, D.A., 1999, "Aerodynamic stability of the downstream of two tandem square-section cylinders", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol.79, pp.79-103.
- Meneghini, J.R., Saltara, F., Siqueira, C.L.R., Ferrari Jr., J.A., 2001, "Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements", *Journal of Fluids and Structures*, vol.15, pp.327-350.
- Monkewitz, P.A., Nguyen, L.N., 1987, "Absolute instability in the near-wake of two-dimensional bluff bodies", *Journal of Fluids and Structures*, vol.1, pp.165-184.

- Ng, C.W., Cheng, V.S.Y., Ko, N.W.M., 1997, "Numerical study of vortex interactions behind two circular cylinders in bistable flow regime", *Fluid Dynamics Research*, vol.19, pp.379-409.
- Papioannou, G.V., Yue, D.K.P., Triantafyllou, M.S., Karniadakis, G.E., 2006, "Three-dimensionality effects in flow around two tandem cylinders", *Journal of Fluid Mechanics*, vol.558, pp.387-413.
- Patankar, S.V., 1980, "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemisphere Publishing Co., New York, 1980.
- Sakamoto, H., Haniu, H., Obata, Y., 1987, "Fluctuating forces acting on two square prisms in a tandem arrangement" *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol.26, pp.85-103.
- Sumner, D., Price, S.J., Paidoussis, M.P., 1999, "Tandem cylinders in impulsively started flow", *Journal of Fluids and Structures*, vol.13, pp.955-965.
- Suqin, C., Ming, G., Ziping, H., 2000, "Numerical computation of the flow around two square cylinders arranged side-by-side", *Applied Mathematics and Mechanics*, vol.21, pp.147-164.
- Szepessy, S., Bearman, P.W., 1992, "Aspect ratio and endplate effects on vortex shedding from a circular cylinder", *Journal of Fluid Mechanics*, vol.234, pp.191-217.
- Wang, Z.J., Zhou, Y., 2005, "Vortex interactions in a two side-by-side cylinder near-wake", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol.26, pp.362-377.
- Williamson, C.H.K., 1985, "Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies", *Journal of Fluid Mechanics*, vol.159, pp.1-18.
- Xu, G., Zhou, Y., 2004, "Strouhal numbers in the wake of two inline cylinders" *Experiments in Fluids*, vol.37, pp.248-256.
- Zdravkovich, M.M., 1977, "Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements" *Journal of Fluids Engineering (ASME)*, vol.99, pp.618-633.
- Zdravkovich, M.M., 1987, "The effect of interference between circular cylinders in cross flow", *Journal of Fluids and Structures*, vol.1, pp.239-261.
- Zhou, Y., So, R.M.C., Liu, M.H., Zhang, H.J., 2000, "Complex turbulent wakes generated by two and three side-by-side cylinders", *International Journal of Heat and Fluid Flow*. vol.21, pp.125-133.

Constructing the dependence of the Reynolds stress tensor on kinematic tensors from DNS data

Roney L. Thompson, rthompson@mec.uff.br

Grupo de Escoamento de Fluidos Complexos - LMTA - PGMEC, Department of Mechanical Engineering, Universidade Federal Fluminense, Rua Passo da Pátria 156, Niteroi, RJ 24210-240, Brazil

Laurent Thais, laurent.thais@polytech.lille.fr

Gilmar Mompean, gilmar.mompean@polytech.lille.fr

Université des Science et Technologies de Lille, Polytech'Lille Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR-CNRS 8107 Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Abstract. *Turbulent models provide closure equations that relate the Reynolds stress with kinematic tensors. Nowadays, not only experimental but DNS data can be a source of testing the closure equations proposed. In the present work we apply decomposition theorems using DNS data to decouple the Reynolds stress into parts that are correlated and uncorrelated to certain kinematic tensors for two problems: the channel flow and the flow through a square duct. In particular we have conducted three approaches. The first one extracts from the anisotropic Reynolds stress tensor (\mathbf{b}) the part that is proportional to the strain rate tensor, \mathbf{D} . The second approach extracts from \mathbf{b} the part of the Reynolds stress that is in-phase (coaxial) with the strain rate. The third one, expresses the out-of-phase part as a function of a non-persistence-of-straining tensor $\mathbf{D} \cdot (\mathbf{W} - \Omega^{\mathbf{D}}) - (\mathbf{W} - \Omega^{\mathbf{D}}) \cdot \mathbf{D}$, where \mathbf{W} is the vorticity tensor and $\Omega^{\mathbf{D}}$ is another skew-symmetric tensor related to the rotation of the eigenvectors of \mathbf{D} . In this article, appropriate norms are used to quantify how consistent are such hypothesis depending on the region of the flow domain. The results show that the tensorial form of the Boussinesq hypothesis is not a good assumption even for the channel flow far from the wall. Besides that, the set of tensor basis composed by \mathbf{D} , \mathbf{D}^2 and $\mathbf{D} \cdot (\mathbf{W} - \Omega^{\mathbf{D}}) - (\mathbf{W} - \Omega^{\mathbf{D}}) \cdot \mathbf{D}$ is able to describe well the anisotropic Reynolds stress but further investigation is needed to construct the scalar coefficients of this new general tensorial formulation.*

Keywords: *Reynolds stress, DNS, channel flow, square duct, tensor decomposition, Boussinesq hypothesis*

1. INTRODUCTION

In the contemporaneous perspective, there are mainly four approaches to attack a turbulent flow problem. Three that are numerical, namely RANS, LES, and DNS and the fourth which is experimental. When Newtonian fluids are the subject of interest, DNS and experimental results are more related to the each other, although its obvious difference of approaches. This happens because RANS and LES provide huge backbones of turbulence models while in DNS and experiments there is no need to model the fluid and its interaction with turbulence.

The problem with DNS and experimental approaches is their cost. They can be extremely expensive. DNS requires a hardware capacity and memory that turns prohibitive its use in complex flows. To run an experiment is also very expensive and to change from an experiment to another in order to solve a new problem is not comparable to run a new simulation with a turbulent model. Therefore, RANS and LES are used to solve engineering problems and DNS and experimental analysis can help to formulate more accurate RANS and LES models.

The idea of the present work is to apply tensor decomposition theorems, presented in Thompson (2008) in order to have guidelines to construct RANS models. Generally speaking they decompose a tensor \mathcal{V} with respect to another one, \mathcal{U} , in a part which is in-phase and another out-of-phase with respect to this second tensor. These decompositions are better explained in section 2. Next, we show how to construct normalized indices used here to quantify how DNS data fits the hypotheses considered related to an specified tensor basis.

Those ideas are applied to two cases: the channel flow and the flow through a square duct.

2. THEORETICAL ANALYSIS

2.1 Decomposition of a tensor with respect to another

2.1.1 General

Let us consider two second order tensors \mathcal{U} and \mathcal{V} . There is a family of decompositions of tensor \mathcal{V} with respect to \mathcal{U} that is relevant in the present analysis. This family of decompositions decompose \mathcal{V} into two additive parts as

$$\mathcal{V} = P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} + \tilde{P}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \quad (1)$$

that enjoy the following properties

- i) $P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ and $\tilde{P}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ are orthogonal¹.
- ii) \mathcal{U} and $P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ are coaxial²
- iii) \mathcal{U} and $\tilde{P}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ are orthogonal.

If \mathcal{U} and \mathcal{V} were first order tensors, there would be an unique pair $\{P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}, \tilde{P}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\}$ that could satisfy properties (i)-(iii). Since \mathcal{U} and \mathcal{V} are second order tensors, these properties do not decompose \mathcal{V} in an unique manner. Essentially this happens because it is possible for a tensor to commute with and be orthogonal to a second tensor at the same time. A simple example that can illustrate this fact is the pair rate-of-strain tensor, \mathbf{D} , and the identity tensor, \mathbf{I} for the case of an incompressible fluid. The identity tensor commutes with any other tensor and $\text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{I}) = \text{tr}\mathbf{D} = 0$. Therefore, to construct the family of decompositions indicated, we can start from splitting tensor \mathcal{V} into three parts as

$$\mathcal{V} = \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^+} + \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^\pm} + \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^-} \quad (2)$$

where $\varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^+}$ is a part of \mathcal{V} that commutes with, but is not orthogonal to \mathcal{U} , $\varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^\pm}$ commutes with and is orthogonal to \mathcal{U} , and $\varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^-}$ does not commute with but is orthogonal to \mathcal{U} . To enjoy the properties listed above, it can be shown that the quantities $\{P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}, \tilde{P}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\}$ obey the following relations

$$\varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^+} \subseteq P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \subseteq \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^+} + \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^\pm} \quad (3)$$

$$\varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^-} \subseteq \tilde{P}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \subseteq \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^-} + \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^\pm} \quad (4)$$

In other words, uniqueness of the decomposition depends on a criterion of inclusion of tensor $\varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^\pm}$, or parts of it, in each group $P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ or $\tilde{P}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$. The two extreme cases of this decomposition constitute the basis of the present analysis and are explored next.

2.1.2 Decoupling a tensor into a proportional and an orthogonal parts

In the scope of the present work, where turbulence modelling is considered, the analysis is carried out with the particular case where \mathcal{U} and \mathcal{V} are symmetric tensors. This is justified by the symmetry of the Reynolds stress and the kinematics tensors that compose the basis used to represent it. The first possible decomposition considered is when

$$P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^{\perp}} \equiv \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^+} \quad (5)$$

$$\tilde{P}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^\perp} \equiv \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^\pm} + \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^-} \quad (6)$$

where $\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^+}$ and $\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}^{\perp}}$ are, respectively the orthogonal and the non-orthogonal parts of \mathcal{V} related to \mathcal{U} .

This form of partition was employed by (e.g. Rajagopal and Srinivasa (2005)). Since every tensor commutes with itself, \mathcal{U} is part of the basis of tensors that are coaxial to itself. In other words we can write \mathcal{V} as

$$\mathcal{V} = \varsigma \mathcal{U} + \mathcal{W} \quad (7)$$

Besides that, \mathcal{U} is a symmetric non-zero tensor and, therefore, it cannot be orthogonal to itself ($\text{tr}\mathcal{U}^2 \neq 0$). On the other hand, we can choose ς in such a way that \mathcal{W} is orthogonal to \mathcal{U} . If we take the inner product of Eq.(7) with respect to tensor \mathcal{U} and impose $\text{tr}(\mathcal{W} \cdot \mathcal{U}) = 0$ we have that

$$\varsigma = \frac{\text{tr}(\mathcal{V} \cdot \mathcal{U})}{\text{tr}(\mathcal{U} \cdot \mathcal{U})} = \frac{\mathcal{V} : \mathcal{U}}{\mathcal{U} : \mathcal{U}} \quad (8)$$

In the case of this decomposition, $P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ is the part of \mathcal{V} that is proportional to \mathcal{U} or $P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \varsigma \mathcal{U}$.

2.1.3 Decoupling a tensor into a coaxial and an orthogonal parts

In Thompson (2008) a decomposition theorem was presented. Here we give a particular aspect of it as follows. Let us consider two second order symmetric tensors \mathcal{U} and \mathcal{V} . Let us call $e_i^{\mathcal{U}}$ and $\lambda_i^{\mathcal{U}}$ the (real) unit eigenvectors and eigenvalues of tensor \mathcal{U} , respectively. Let us define a fourth order tensor $\mathbf{1}^{\mathcal{U}\mathcal{U}}$ as

$$\mathbf{1}^{\mathcal{U}\mathcal{U}} = \sum_{k=1}^3 e_k^{\mathcal{U}} e_k^{\mathcal{U}} e_k^{\mathcal{U}} e_k^{\mathcal{U}} \quad (9)$$

¹Two tensors \mathbf{A} and \mathbf{B} are orthogonal if (and only if) $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T) = 0$, where tr is the trace operator and the superscript T denotes transposition.

²Two tensors are coaxial if (and only if) they share the same eigenvectors. This condition is satisfied if (and only if) they commute.

and a decomposition of tensor \mathcal{V} , such that

$$\mathcal{V} = \Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} + \tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \quad (10)$$

where

$$\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \mathbf{1}^{\mathcal{U}\mathcal{U}} : \mathcal{V} \quad (11)$$

$$\tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = (\mathbf{1}^{\delta\delta} - \mathbf{1}^{\mathcal{U}\mathcal{U}}) : \mathcal{V} \quad (12)$$

and $\mathbf{1}^{\delta\delta}$ is the fourth order identity tensor that when applied to any second order tensor maps this tensor to itself, as follows

$$\mathbf{1}^{\delta\delta} : \mathbf{B} = \mathbf{B} \quad (13)$$

In this case, from Eqs.(3) and (4) we can identify

$$\mathbf{P}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}+} + \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}\pm} \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}-} \quad (15)$$

Then, the decomposition given by Eqs.(10), (11), and (12) have, besides properties (i)-(iii), the following ones

- $\mathcal{U} : \mathcal{V} = \mathcal{U} : \Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$
- $\tilde{\Xi}[\mathcal{U}, \mathcal{V}] = \tilde{\Xi}[\mathcal{U}, \tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}]$

where the second order tensor-valued function $\tilde{\Xi}[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ denotes the Lie product between any two second order tensors, defined as

$$\tilde{\Xi}[\mathcal{U}, \mathcal{V}] \equiv \mathcal{U} \cdot \mathcal{V} - \mathcal{V} \cdot \mathcal{U} \quad (16)$$

In a matrix form Eq.(10) is written as

$$[\mathcal{V}^{\mathcal{U}}] = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{11}^{\mathcal{U}} & \mathcal{V}_{12}^{\mathcal{U}} & \mathcal{V}_{13}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{V}_{21}^{\mathcal{U}} & \mathcal{V}_{22}^{\mathcal{U}} & \mathcal{V}_{23}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{V}_{31}^{\mathcal{U}} & \mathcal{V}_{32}^{\mathcal{U}} & \mathcal{V}_{33}^{\mathcal{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{11}^{\mathcal{U}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_{22}^{\mathcal{U}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{V}_{33}^{\mathcal{U}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{V}_{12}^{\mathcal{U}} & \mathcal{V}_{13}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{V}_{21}^{\mathcal{U}} & 0 & \mathcal{V}_{23}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{V}_{31}^{\mathcal{U}} & \mathcal{V}_{32}^{\mathcal{U}} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Because of the above properties, tensors $\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ and $\tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ were called (Thompson (2008)) the *in-phase* and *out-of-phase* parts of \mathcal{V} with respect to \mathcal{U} . The following properties are important in the present context

1. When tensors \mathcal{U} and \mathcal{V} commute, $\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \mathcal{V}$ and $\tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \mathbf{0}$.
2. When $\mathcal{V} = \mathbf{A}^S \cdot \mathbf{B}^W - \mathbf{B}^W \cdot \mathbf{A}^S$, where \mathbf{A}^S is symmetric tensor which commutes with \mathcal{U} and \mathbf{B}^W is skew-symmetric, $\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \mathbf{0}$ and $\tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \mathcal{V}$.

It is worth noting that since $\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ and $\tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ are orthogonal (or uncorrelated), the norm of \mathcal{V} , $\|\mathcal{V}\| = \sqrt{\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}^T}$ is given by

$$\sqrt{\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}^T} = \sqrt{(\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} + \tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}) \cdot (\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} + \tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}})^T} = \sqrt{\|\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\|^2 + \|\tilde{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\|^2} \quad (18)$$

A normalized parameter that measures how tensor \mathcal{V} is in-phase with tensor \mathcal{U} can be constructed by the relation

$$\hat{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{\|\Phi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\|}{\|\mathcal{V}\|} \right) \quad (19)$$

$\hat{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \in [0, 1]$, where $\hat{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = 0$ being the case where \mathcal{U} and \mathcal{V} are uncorrelated and $\hat{\Phi}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = 1$ when \mathcal{U} and \mathcal{V} are coaxial, i.e. share the same eigenvectors.

2.2 The three approaches of the present analysis

2.2.1 Boussinesq hypothesis

The Reynolds stress tensor, \mathbf{R} , is defined through

$$\mathbf{R} = \overline{u'_i u'_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (20)$$

where u'_i are fluctuations of the i -component of the velocity and the overline, $\overline{(\)}$ indicates the average operation. The Boussinesq hypothesis (Boussinesq (1877)), is based on the the assumption that the turbulent shear stress is linearly dependent on the velocity gradient. Therefore the structure of the relation between molecular shear stress and kinematics is maintained for the turbulent shear stress. Hence, for a 2-D cartesian flow where x is the coordinate along the wall and y is orthogonal to this wall

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{\partial U}{\partial y} \quad (21)$$

where ν_T is a "turbulent viscosity".

The generalization of this hypothesis was done by Komolgorov (1942). Let us considered tensor \mathbf{b} , the anisotropic Reynolds stress defined as

$$\mathbf{b} = - \left(\mathbf{R} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{R} \mathbf{I} \right) \quad (22)$$

Therefore, a tensor version of Eq.(21) can be written as

$$\mathbf{b} = 2\nu_T \mathbf{D} \quad (23)$$

where \mathbf{D} is the symmetric part of the mean velocity gradient. Let us suppose we have obtained the Reynolds stress (and therefore \mathbf{b}) from a DNS or experimental data. Let us suppose this same source has provided us with some kinematic information such as the velocity profile. Therefore, one can calculate \mathbf{D} . How can we test if Eq.(23) holds? Or, what is a better approach, how can we quantify how Eq.(23) adheres to the data in a general flow? And how can we obtain ν_T ?

The approach used here, in this first analysis is to decompose tensor \mathbf{b} into a tensor which is proportional to \mathbf{D} and a tensor which is orthogonal to \mathbf{D} , \mathbf{D}^\perp . Hence,

$$\mathbf{b} = \alpha \mathbf{D} + \beta \mathbf{D}^\perp \quad (24)$$

If we take the inner product of Eq.(24) with respect to \mathbf{D} and impose that $\text{tr}(\mathbf{D}^\perp \cdot \mathbf{D}) = 0$, we have that

$$\alpha = \frac{\text{tr}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{D})}{\text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})} \quad (25)$$

Therefore, α is the best scalar that can be related to the turbulent viscosity defined by Eq.(23). The idea here is to present this scalar in the usual dimensionless form (C_μ) where the kinetic energy and dissipation are used to compose a quantity with the viscosity dimension. Therefore

$$\alpha = 2C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (26)$$

An important index of the present analysis is a global measure of how important is the term $\alpha \mathbf{D}$ when compared to \mathbf{b} , in other words, how Komolgorov's Eq.(23) can fit DNS or experimental data.

Based on Eq. (19), this parameter, $index_I$, is given by

$$index_I = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{\text{tr}(\alpha^2 \mathbf{D}^2)}{\text{tr} \mathbf{b}^2}} \right) \quad (27)$$

and, by construction, $index_I$ is a normalized parameter ($index_I \in [0, 1]$)

2.2.2 How \mathbf{D} can explain the Reynolds stress

The second approach is to use the other extreme case of the in-phase-out-of-phase concept discussed previously: the decomposition of the Reynolds stress into a part which is coaxial to \mathbf{D} , Φ_b^D , and another which is orthogonal to \mathbf{D} , $\tilde{\Phi}_b^D$. Mathematically, this is represented by

$$\mathbf{b} = \Phi_b^D + \tilde{\Phi}_b^D \quad (28)$$

The in-phase part, Φ_b^D , is the part of the Reynolds stress that can be explained by \mathbf{D} . In other words, if the only information we had about kinematics were tensor \mathbf{D} , Φ_b^D is the largest part of the Reynolds stress that could be modelled. Therefore, Φ_b^D captures a larger part of \mathbf{b} than $\alpha\mathbf{D}$ where α is given by Eq.(25). As discussed previously, Φ_b^D can be written as an isotropic function of \mathbf{D} . Using dimensionless quantities for the coefficients, we have that

$$\Phi_b^D = C_I k \mathbf{1} + C_D \frac{k^2}{\epsilon} \mathbf{D} + C_{D^2} \frac{k^3}{\epsilon^2} \mathbf{D}^2 \quad (29)$$

Since b is traceless we have, in general, that

$$3C_I k + C_D \frac{k^2}{\epsilon} \text{tr} \mathbf{D} + C_{D^2} \frac{k^3}{\epsilon^2} \text{tr} \mathbf{D}^2 = 0 \quad (30)$$

For incompressible fluids

$$3C_I k + C_{D^2} \frac{k^3}{\epsilon^2} \text{tr} \mathbf{D}^2 = 0 \quad (31)$$

We can also construct a global index, $index_{II}$, to measure the importance of Φ_b^D on \mathbf{b} , as in Thompson (2008)

$$index_{II} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{\text{tr} \left[\left(\Phi_b^D \right)^2 \right]}{\text{tr} \mathbf{b}^2}} \right) \quad (32)$$

and $index_{II}$ is also a normalized parameter not less than $index_I$ ($0 \leq index_I \leq index_{II} \leq 1$) since it captures the total influence of \mathbf{D} on the Reynolds stress and not only its linear influence. In fact, from the Cayley-Hamilton theorem, it can be shown that Φ_b^D is of the following form

$$\Phi_b^D = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{D} + \alpha_2 \mathbf{D}^2 \quad (33)$$

2.2.3 Third approach

This approach comes from identifying an important tensor basis that is orthogonal to \mathbf{D} that can be used to explain the Reynolds stress: the tensor $\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}$. Where \mathbf{W} is the vorticity tensor, the skew-symmetric part of the mean velocity gradient and the overline indicates that this tensor is computed relative to the Ω^D , the rotation of the eigenvectors of \mathbf{D} , defined through

$$\Omega^D \equiv \dot{\mathbf{e}}_k^D \mathbf{e}_k^D \quad (34)$$

where \mathbf{e}_k^D are normalized eigenvectors of \mathbf{D} . This symmetric traceless tensor was called by Thompson and Souza Mendes (2005) the persistence-of-straining tensor and appears on representation tensor theorems that represent a general isotropic symmetric tensor as a function of \mathbf{D} and $\overline{\mathbf{W}}$. As shown by Thompson (2008) this tensor captures the first (infinitesimal linear) tendency of a generic flow to depart from a general extensional kinematic, an extensional motion which is not necessarily a motion with constant stretch history. Obtaining tensor $\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}$ can be a difficult task since from the definition of Ω^D given by Eq.(34) the rate of change of the eigenvectors of \mathbf{D} have to be calculated. This difficulty has sometime made some researchers to use tensor $\mathbf{D} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{D}$ instead, although this tensor is non-objective, i.e. depend on the chosen frame of reference.

Here we have used a simpler approach, based on the decomposition, defined by Eq.(28), of the time derivative of \mathbf{D} with respect to \mathbf{D} . Therefore,

$$\dot{\mathbf{D}} = \Phi_{\mathbf{D}}^D + \tilde{\Phi}_{\mathbf{D}}^D \quad (35)$$

As shown by Thompson (2008),

$$\Phi_{\mathbf{D}}^D = D' \quad (36)$$

where D' is the natural convected time derivative of \mathbf{D} and

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{D}}^D = - (D \cdot \Omega^D - \Omega^D \cdot D) \quad (37)$$

Therefore, if we apply the decomposition defined by Eq.(28) and find $\tilde{\Phi}_D^D$, we can find the persistence-of-straining tensor through

$$\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} + \tilde{\Phi}_D^D \quad (38)$$

This approach is more interesting not only because it comes from a calculation of $\dot{\mathbf{D}}$ but also because Ω^D is not always uniquely determined although $\mathbf{D} \cdot \Omega^D - \Omega^D \cdot \mathbf{D}$ is, as discussed by Huilgol (1979).

Since $\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}$ is orthogonal to \mathbf{D} , it is a subset of $\tilde{\Phi}_b^D$. In other words, the decomposition stated by Eq.(28) can be written in another form as

$$\mathbf{b} = \Phi_b^D + \xi (\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}) + \tilde{\Phi}_b^D \Big|_c \quad (39)$$

where $\tilde{\Phi}_b^D \Big|_c = \tilde{\Phi}_b^D - \xi (\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D})$ is mutually orthogonal to \mathbf{D} and $\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}$. The determination of ξ follows the same lines as Eq.(25) or

$$\xi = \frac{\text{tr} \left[\tilde{\Phi}_b^D \cdot (\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}) \right]}{\text{tr} \left[(\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D})^2 \right]} \quad (40)$$

Having found ξ we are able to define a third index, $index_{III}$ as

$$index_{III} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{\text{tr} \left[\left(\Phi_b^D + \xi (\mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}) \right)^2 \right]}{\text{tr} \mathbf{b}^2}} \right) \quad (41)$$

and $0 \leq index_I \leq index_{II} \leq index_{III} \leq 1$

3. DNS DATA

3.1 Channel flow

The channel flow direct numerical simulations (DNS) were conducted in a rectangular channel at an imposed moderate zero-shear frictional Reynolds number $Re_\tau = 180$, corresponding to a Newtonian bulk Reynolds number $Re_{bulk} = 2800$ based on the channel half-height h . The channel size is $L_x = 4\pi h$, $L_y = 2h$, $L_z = 4/3\pi h$. In the homogeneous directions, these amount to $L_{x+} \simeq 2300$ and $L_{y+} \simeq 750$ in wall units.

The DNS grid has $128 \times 129 \times 128$ points in the respective streamwise, wall-normal, and spanwise directions, i.e. $\Delta x_+ \simeq 17$ and $\Delta z_+ \simeq 6$ in the homogeneous directions. The grid in the wall-normal direction has a tanh distribution such that $0.2 \leq \Delta y_+ \leq 7$ and incorporates about 20 points in the first 10 wall units, which is enough to resolve the smallest turbulent structures in the near wall region. The time step used on this grid is $\Delta t = 0.001 h/u_{ave}$.

The numerical code which was developed for the present study is a direct extrapolation of the code described in detail by Tejada-Martínez and Grosch (2007). The code uses the Message Passing Interface protocol following the same parallel structure presented by Winters et al. (2004). Only a brief description will be given below. The momentum equations are solved with a hybrid spectral finite-difference scheme. A two-dimensional Fourier-spectral discretization is used in the homogeneous directions (x, z) whereas 6-th order compact finite difference formulí are used in the wall-normal direction y (Lele Carpenter (1992)), downgraded to 5-th order at the first two boundary points (Carpenter (1993)). The time advancement of the solution consisted of the second order time-accurate pressure correction scheme on a non-staggered grid analyzed by Armfield and Street (2000). This procedure uses the implicit mid-point trapezoidal rule for viscous terms and the explicit second-order accurate Adams-Bashforth rule for advection. Furthermore, the three half rule is used for de-aliasing all the non-linear terms, along each one of the periodic directions.

3.2 Square duct

The basic flow statistics of the turbulent flow through a straight duct of square cross section at low Reynolds number are available through a number of independent direct simulations of this bounded flow Huser and Biringen (1993), Gavrilakis (1992), Gavrilakis, S. (1993). There is good qualitative agreement in the statistics extracted from these simulations, thus enabling the study of the duct flow with some confidence. The simulation database that will be used in this paper is that obtained by Gavrilakis in Ref. Gavrilakis, S. (1993). Briefly, the main characteristics of the simulation are as follows. For spatial approximation of the Navier-Stokes equations, a mixed Fourier and finite difference approximation scheme is used.

The flow variables are expanded into discrete Fourier series along the homogeneous streamwise direction (x), Figure 8, whereas second-order centered difference approximations are used for the inhomogeneous directions (y, z). The disparate convergence properties of the two types of numerical approximation are partly offset by the unavoidable use of the largest grid spacing along the streamwise (Fourier) direction. This arises from the need to employ a relatively long domain in the streamwise direction in order to secure sufficient decorrelation of the turbulent field. The time marching method is based on the second-order Adams-Bashforth scheme for all terms of the equations of motion. This allows the resolution of all convective and viscous time scales carried by the simulation and ensures that time stepping errors are negligible. The Reynolds number based on the mean flow velocity, \overline{U}_m , (the overbar will henceforth be used to denote the ensemble average which in the case of the simulation is assumed to be equivalent to streamwise, time and octant averaging), and the duct hydraulic diameter is 4800. Additional data on the simulation are given in table 1.

4. PRELIMINARY RESULTS

4.1 Channel flow

4.1.1 General

Before doing our specific analysis, we have first compared our mean results with the data basis of Moser et al. (1999) and found a very good agreement between the data of that basis and the data obtained with the present approach. In the present work we use a more complete data basis including all components of the Reynolds stress and the mean velocity gradient tensors.

Another general result is the production over dissipation ($\frac{P}{\epsilon}$) as a function of position in wall units. This is presented on Fig.(1). There is a peak where the dissipation is minimum at $y^+ \approx 15$. We can also see what it seems to be a beginning of plateau where production and dissipation reach an equilibrium in the range of $y^+ \in [50, 100]$ where $\frac{P}{\epsilon} \approx 0.84$. After $y^+ \approx 100$, the power of the flow, due to its low Reynolds number makes the production to diminish its strength till the center of the channel where there is no production.

4.1.2 Analysis of the Boussinesq hypothesis

The result concerning a dimensionless viscosity coefficient, C_μ , as stated by Eq.(25) is shown in Fig.(2). The peak of this graph corresponds to a value $C_\mu \approx 0.215$ at $y^+ \approx 50$. After that, C_μ decreases monotonically till a value around 0.09 near the center of the channel. Figure (3) shows the profile of $index_I$, the importance of αD on the Reynolds stress tensor, as given by Eq.(27). We can see that the maximum value is less than 0.44. There is a large part of the domain, $y^+ \in [60, 150]$, in which the $index_I$ is around this value.

4.1.3 Analysis considering the complete influence of tensor D

The dimensionless coefficients that appear in Eq.(29) are shown in Fig.(6). We can see that they have an almost constant behavior in the range $y^+ \in [50, 150]$.

The global parameter $index_{II}$ is depicted in Fig.(4). The increase in the capability of explanation of the anisotropic Reynolds stress tensor by tensor D stated by Eq.(29) in comparison with its linear form given by Eq.(24) is patent since $index_{II} \approx 0.9$ all over the domain.

4.1.4 Analysis adding the tensor basis $D \cdot \overline{W} - \overline{W} \cdot D$

When tensor $D \cdot \overline{W} - \overline{W} \cdot D$, which is orthogonal to D , is added to the kinematic tensor basis, the whole Reynolds stress tensor is captured. This is shown in Fig.(7), where $index_{III} \approx 1.0$ all over the domain.

4.2 Square duct

4.2.1 General

We show some preliminaries results concerning the flow through a square duct. The geometry of this flow is explained in Fig.(8).

The field of production over dissipation is shown in Fig.(10). We can see that greater values of this quantities are located near the wall, where turbulent dissipation is minimum and the lower values are concentrated near the diagonal line that communicates the corner to the center of duct. We can see that there is a large portion of the domain, labelled with a green, where the value of production over dissipation is around unity. The result of the middle of the square duct are in accordance to what is found for the channel flow with the same level of Reynolds number.

4.2.2 Analysis of the Boussinesq hypothesis

The field of the dimensionless viscosity coefficient, C_μ defined by Eq.(25), in the square duct domain is depicted in Fig.(11). Here, as in the case of production over dissipation, we see that the result of the middle of the square duct are in accordance to what is found for the channel flow with the same level of Reynolds number. The portion of the domain where $C_\mu \approx 0.9$ is coincident to the equilibrium value between production and dissipation.

It is interesting to see the field of *indexI*, a quantification of the part of the anisotropic Reynolds stress tensor that is linear with the rate-of-strain tensor, \mathbf{D} . Figure (12) shows this field. We can see that there is no part of the domain where the value of this quantity is above 0.5. This result is an indication of the poorness predictability of the Boussinesq hypothesis.

5. FINAL REMARKS

We have performed some tensorial filtering on DNS data for the turbulent flow in a channel and in a square duct. We have shown for the channel flow that the tensorial basis composed by \mathbf{D} , \mathbf{D}^2 and $\mathbf{D} \cdot (\mathbf{W} - \Omega^D) - (\mathbf{W} - \Omega^D) \cdot \mathbf{D}$ is able to fully describe the anisotropic Reynolds stress tensor, \mathbf{b} . On the parts of the domain where which are favorable, the Boussinesq hypothesis leads to a prediction of only half of the total Reynolds stress, which turns out to be a poor hypothesis. However, when an anisotropy is introduced and the Reynolds stress is written as an isotropic function of \mathbf{D} then the ability of prediction increases significantly.

The general results obtained with the square duct geometry are in accordance to the one obtained with the channel flow if we compute the values in the middle section of the square.

Further investigation is needed. The next step is to apply the fully approach to the square duct.

6. ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to acknowledge CNPq, CNRS, and FAPERJ for financial support.

7. REFERENCES

- Armfield, S., Street, R., 2000. Fractional step methods for the navier-stokes equations on non-staggered grids. ANZIAM J. 42(E), C134–C156.
- Boussinesq, M., 1877. Essai sur la the'orie des eaux courantes. Imprimerie Nationale, Paris XXIII.
- Carpenter, M., 1992. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. J. Comp. Phys. 103(1), 16–42.
- Carpenter, M., 1993. The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite-difference schemes. J. Comp. Phys. 108(2), 272–295.
- Gavrilakis, S., 1992. Numerical simulation of low-reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. J. Fluid Mech. 244, 101–116.
- Gavrilakis, S., 1993. Turbulent velocity structures derived from pod analyses. Institut de Machines Hydrauliques et de Mécanique des Fluides, École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Report T-93-30, C134–C156.
- Huilgol, R. R., 1979. Viscoelastic fluid theories based on the left cauchy-green tensor history. Rheol. Acta 18, 451–455.
- Huser, A., Biringen, S., 1993. Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct. J. Fluid Mech. 257, 65–77.
- Moser, R., Kim, J., Mansour, N., 1999. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $re_\tau = 590$. Physics of Fluids. 11(4), 943–945.
- Rajagopal, K., Srinivasa, A., 2005. On the nature of constraints for continua undergoing dissipative processes. Proc. R. Soc. Lond. A 461, 2785–2795.
- Tejada-Martínez, A., Grosch, C., 2007. Langmuir turbulence in shallow water: part ii. large eddy simulations. J. Fluid Mech. 576, 63–108.
- Thompson, R. L., 2008. Some perspectives on the dynamic history of a material element. Int. J. Engng. Sci 46, 524–549.
- Thompson, R. L., Souza Mendes, P. R., 2005. Persistence of straining and flow classification. Int. J. Engng. Sci 43 (1-2), 79–105.

Winters, K., MacKinnon, J., Mills, B., 2004. A spectral model for process studies of rotating, density-stratified flows. *J. of Atmospheric and Oceanic Technology*. 21(1), 69–94.

8. Responsibility notice

The author(s) is (are) the only responsible for the printed material included in this paper

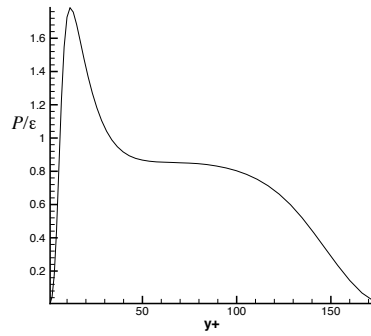


Figure 1. Production over dissipation.

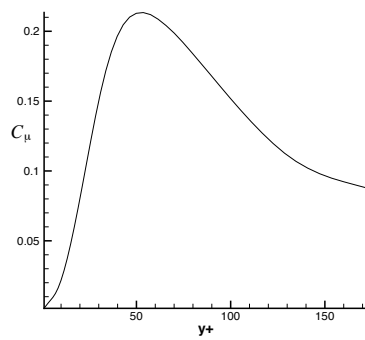


Figure 2. Coefficient C_μ .

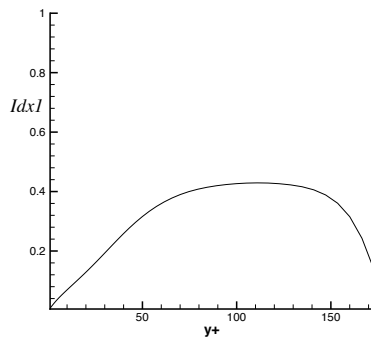


Figure 3. Index I. A normalized measure of how the Boussinesq hypothesis adheres to the DNS data.

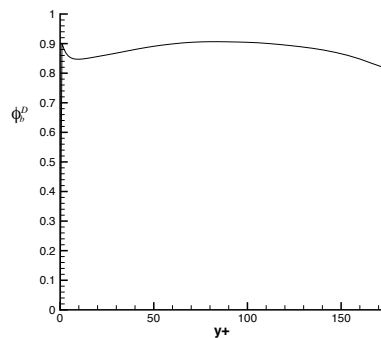


Figure 4. Index II. A normalized measure of how the rate-of-strain tensor can explain the Reynolds stress tensor

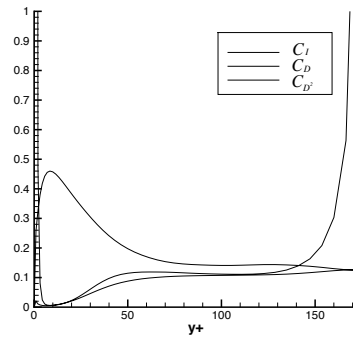


Figure 5. Coefficients of the basis 1, D , and D^2 non-dimensionalized by the kinetic energy and dissipation

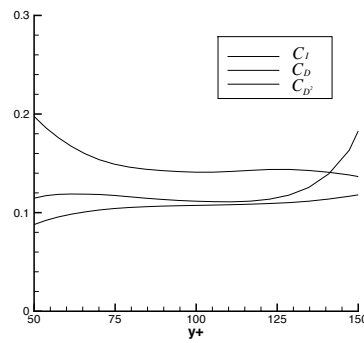


Figure 6. Coefficients of the basis 1, D , and D^2 non-dimensionalized by the kinetic energy and dissipation.

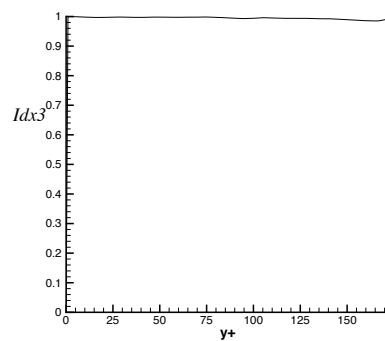


Figure 7. Index III. A normalized measure including the non-persistence-of-straining tensor to the kinematic basis of tensors that can explain the Reynolds stress tensor.

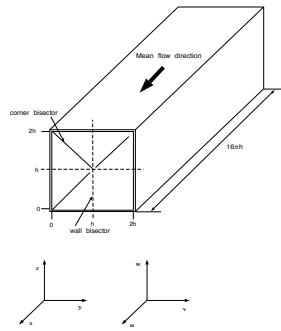


Figure 8. Geometry and coordinate system.

$Re = \bar{U}_m 2h/\nu$	4800
$Re^+ = u_\tau 2h/\nu$	320
Domain size in x,y,z	$16\pi h \times 2h \times 2h$
Grid size	$768(x) \times 127(y) \times 127(z)$
Resolution in ν/u_τ units	10.5 in x ; 0.48-4.6 in y and z
Length of flow sample	$4.4 h/u_\tau$
\bar{U}_o/\bar{U}_m	1.33
Friction factor	0.036
$\langle k \rangle / u_\tau^2$	2.2
Maximum Re_λ	205
Centerline Re_λ	32
Minimum Kolmogoroff scale	$1.5 \nu/u_\tau$

Table 1. Numerical and physical parameters of the simulation : \bar{U}_o , mean centerline velocity; \bar{U}_m , bulk velocity; u_τ , average friction velocity over the duct perimeter; $\langle k \rangle$, volume and time averaged turbulent kinetic energy; λ , Taylor microscale based on the streamwise velocity u.

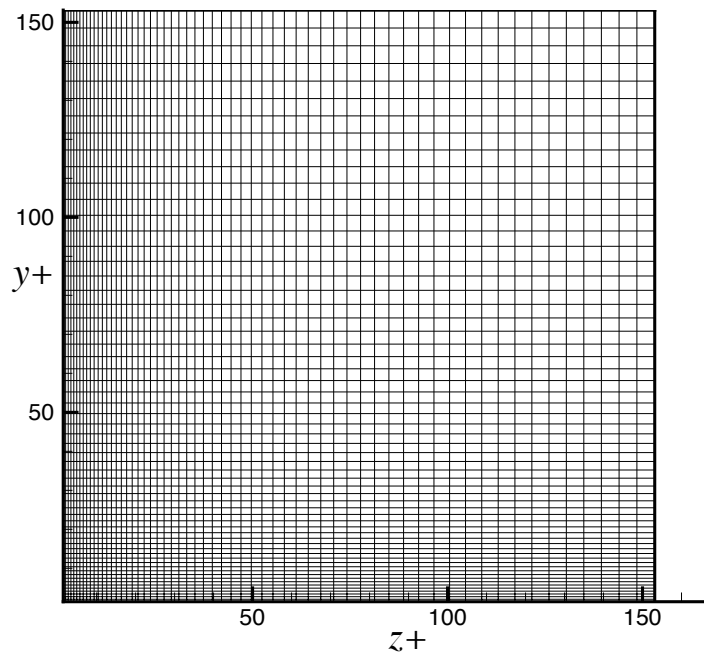


Figure 9. Grid of the square duct.

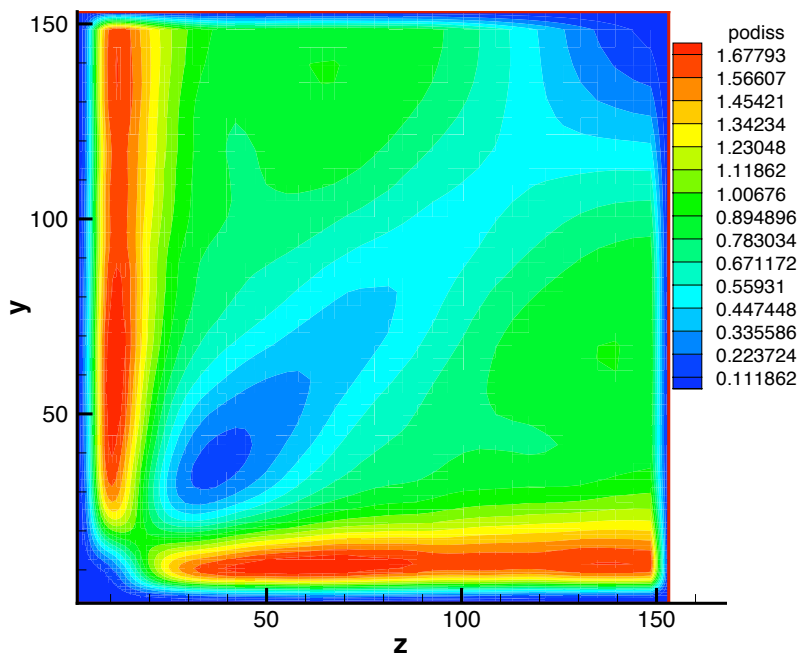


Figure 10. Production over dissipation on the square duct.

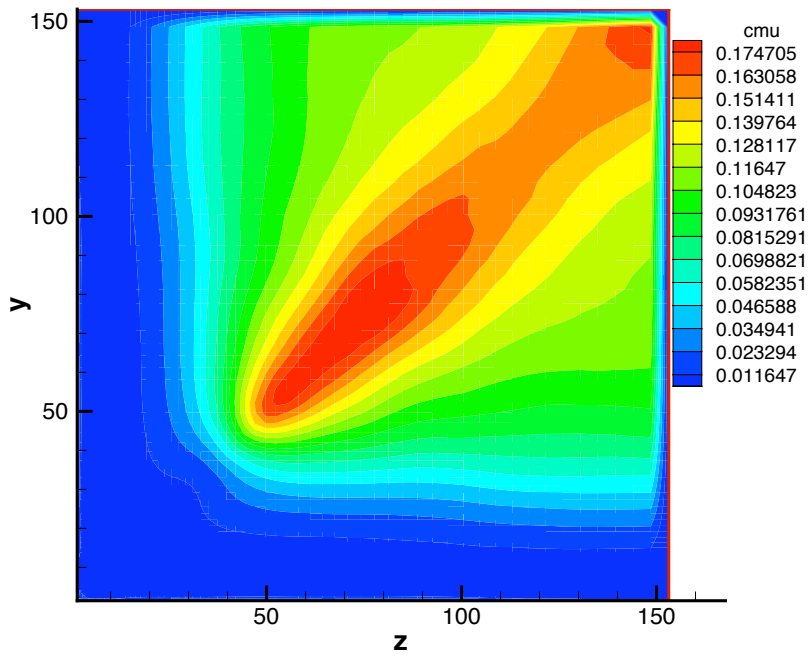


Figure 11. Dimensionless viscosity coefficient on the square duct.

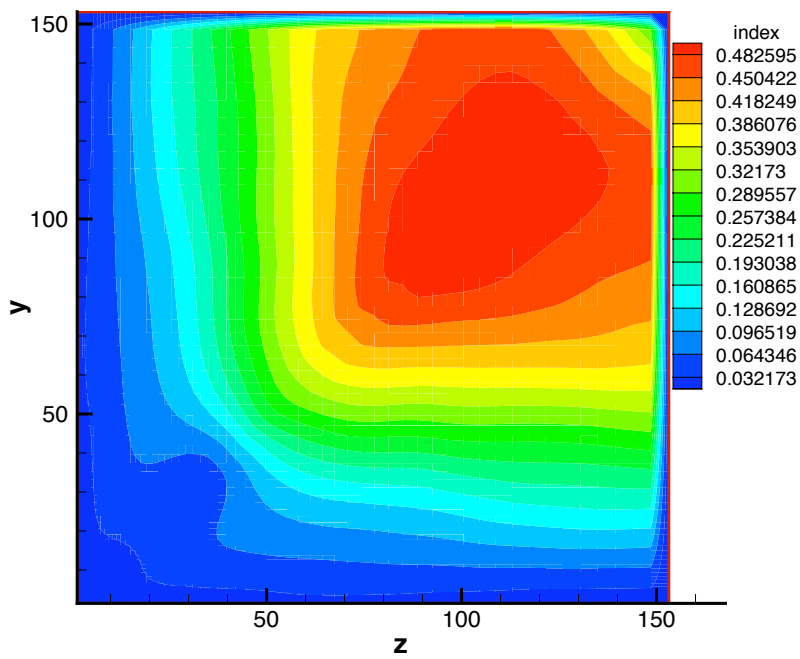


Figure 12. Index I, a measure of how consistent is the hypothesis that the anisotropic Reynolds stress is a linear function of the rate-of-strain tensor on the domain of a square duct.

DIRECT COMPUTATION OF INCOMPRESSIBLE TURBULENT FREE SURFACE FLOW USING A NEW HIGH ORDER UPWIND SCHEME

Rafael Alves Bonfim de Queiroz, bonfim@icmc.usp.br

Fernando Akira Kurokawa, kurokawa@icmc.usp.br

Valdemir Garcia Ferreira, pvgf@icmc.usp.br

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - SME-ICMC-USP; Av. Trabalhador São-Carlense, 400 - Centro; Caixa Postal: 668 - CEP: 13560-970 - São Carlos - SP; Fone: 55 (16) 3373-9700 - Fax: 55 (16) 3371-2238

Abstract. *In this paper we apply a new high order bounded convection scheme for direct computation of 2D and 3D incompressible turbulent free surface flows. The full Navier-Stokes equations are solved by using the finite difference methodology on a staggered grid system. The numerical method is an adaptation of the SMAC methodology for calculating free surface fluid flows at high Reynolds numbers. The method is first verified/validated in two flows, namely: a 2D turbulent free jet impinging onto flat surface and the 2D/3D broken dam. The method is then employed to simulate a 2D jet penetrating a quiescent fluid from an entry port beneath the free surface, a 2D sluice gate and a 3D circular hydraulic jump.*

Keywords: *Free surface flow, upwinding, finite difference method, incompressible turbulent fluid flow*

1. INTRODUCTION

Concerning investigations of complex free surface flows, considerable progress has currently done in the application of both finite difference method and high order upwinding (see, for example, Ferreira et al. (2004, 2007, 2008), Castelo et al. (2000) and Tomé et al. (2000)). In particular, in the present study, a new high order boundedness upwind advection scheme, called TOPUS (Third-Order Polynomial Upwind Scheme), is applied in an attempt of simulating 2D and 3D incompressible turbulent free surface flows for “almost” direct numerical simulation technique (Wilcox, 1993; Leonard, 1995).

The basic idea underlying the TOPUS scheme, which is the only modeling used in this work, is to derive a fourth degree polynomial using the recommendations of Leonard (1988). More generally, in uniform grids, this scheme determines a family of third order accurate polynomial upwinding for computing predominantly convective flows. The derivation of the scheme is based on NVD (Normalized Variable Diagram) restrictions of Leonard (1988), and the TVD (Total Variation Diminishing) constraints of Harten (1983). Consequently, it satisfies the CBC (Convection-Boundedness Criterion) of Gaskell and Lau (1988).

For direct computation of free surface flows, the full Navier-Stokes equations are solved by using the finite difference methodology on a staggered grid system, and the numerical procedure is an adaptation of the explicit SMAC (Simplified Marker-And-Cell) methodology of Amsden and Harlow (1970) for calculating free surface fluid flows at high Reynolds numbers. The calculations are performed using the 2D and 3D versions of the Freeflow simulation system of Castelo et al. (2000). Numerical experiments confirm the ability of the TOPUS scheme in solving complex free surface flows.

We describe the fundamental equations and the numerical method in Section 2. In Section 3, the mathematical formulation of the TOPUS scheme is outlined. In Section 4, two 2D/3D numerical examples are performed for the verification/validation of the present numerical method. Three applications are investigated in Section 5. Conclusions are presented in Section 6.

2. FUNDAMENTAL EQUATIONS AND THE NUMERICAL METHOD

2.1 Full Navier-Stokes equations

The general mathematical equations that model transient Newtonian incompressible flows are Navier-Stokes and mass conservation equations, which in conservative and non-dimensional forms, these equations can be written, respectively, as

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

where the velocity \mathbf{u} is the vector consisting of the velocity components, the pressure p is a scalar, and \mathbf{g} is the gravitational acceleration ($|\mathbf{g}| = 9,81 \text{ m/s}^2$). The non-dimensional parameters $Re = (LU)/\nu$ and $Fr = U/(\sqrt{L|\mathbf{g}|})$ are, respectively, the Reynolds and Froude numbers, in which L is length scale and U is characteristic velocity. ν is kinematic viscosity

coefficient (constant) of the fluid. Together with appropriate boundary and initial conditions, the Eqs. (1) and (2) are solved by using the finite difference method implemented in the 2D and 3D versions of the Freeflow code of Castelo et al. (2000). This code uses an explicit version of the SMAC method originally proposed by Amsden and Harlow (1970). The details of the discretization procedure have been presented by Ferreira et al. (2004, 2007).

2.2 Initial and boundary conditions

Equations (1) and (2) are coupled non-linear PDEs and are sufficient, in principle, to solve for the unknowns \mathbf{u} and p when appropriate initial and boundary conditions are specified. For initial conditions, a Dirichlet condition is used for all variables. There are four types of boundaries to be considered, namely: inlet, outlet, solid walls and free surfaces. At the inlet section, the velocity is known. At the outlet section, homogeneous Neumann (fully developed flow) conditions are specified for all variables. On the solid walls, it is assumed that the fluid adheres to (no slip) or slips at (free slip) the solid surface. The appropriate free-surface boundary conditions are the vanishing of the normal and tangential stresses which, in the absence of surface tension, are (see Ferreira et al. (2004, 2007) for details)

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{m1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{m2} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (5)$$

where \mathbf{n} is the local unit normal vector, external to the free surface, and $\mathbf{m1}$ and $\mathbf{m2}$ are the local tangent vectors to the free surface. The viscous stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ is given by

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (6)$$

where \mathbf{I} is identity tensor, μ is dynamic viscosity coefficient, and \mathbf{D} is tensor of deformations average

$$\mathbf{D} = 0.5 ((\nabla\mathbf{u}) + (\nabla\mathbf{u})^T). \quad (7)$$

2.3 Numerical method

The PDEs (1) and (2) have been solved numerically by using the staggered grid finite difference methodology, presented by Tomé et al. (2000). An important factor in the choice of the spatial differencing strategy, a topic of this paper, is the order of accuracy. In the present study, the diffusion terms have been approximated by second order central differencing, while for the advection terms the TOPUS scheme is used. Details of the scheme will be presented in the next subsection. The Poisson equation (see Eq. (12)) is discretized using the usual five-point Laplacian operator, and the associated symmetric linear system is solved by the conjugate-gradient method. The complete numerical algorithm is summarized below.

When calculating the tilde velocity, $\tilde{\mathbf{u}}$, we employ an adaptive time stepping procedure to compute the maximum permissible time step.

In this work, the Eqs. (1) and (2) are discretized in time by using the explicit Euler method, giving the system

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + \delta t \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^{(n)} - \nabla p^{(n)} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^{(n)} \right\}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n)} = 0, \quad (9)$$

where δt is the time step. The solution procedure for solving Eqs. (8) and (9) can be accomplished by means of the fractional step procedures, first suggested by Chorin (1968), called projection methods. The basic idea behind this approach is to use the Eq. (8) to solve for an intermediate velocity field $\tilde{\mathbf{u}}$ that is not required to be divergence-free, that is,

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(n)} + \delta t \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^{(n)} - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^{(n)} \right\}, \quad (10)$$

where $\tilde{p} = p^{(n)}$ is a tentative pressure. Then, using Helmholtz-Hodge theory (Hodge, 1952; Denaro, 2003), this intermediate velocity vector field is projected to ensure mass balance and obtain a gradient field ψ , that is,

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(n)} + \nabla \psi. \quad (11)$$

By applying the divergence in Eq. (11) and using Eq. (9), one obtains the following Poisson equation for ψ

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}. \quad (12)$$

For the computational approach, it is supposed that, at a given time $t = t_0$, the solenoidal-velocity field $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$ is known and suitable boundary conditions for the velocity and pressure are given. The updated velocity field $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, at $t = t_0 + \delta t$, is calculated by the following sequence of the steps:

STEP 1: Update the variables on the boundaries: the conditions on inlets, outlets and rigid walls are discussed in subsection 2.2 in the case 3D, the velocity field at the free surface is explicitly computed using the following equations

$$\frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x m_{1x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_y m_{1y} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} n_z m_{1z} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (n_y m_{1x} + n_x m_{1y}) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (n_z m_{1x} + n_x m_{1z}) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) (n_z m_{1y} + n_y m_{1z}) \right] = 0, \quad (13)$$

and

$$\frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x m_{2x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_y m_{2y} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} n_z m_{2z} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (n_y m_{2x} + n_x m_{2y}) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (n_z m_{2x} + n_x m_{2z}) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) (n_z m_{2y} + n_y m_{2z}) \right] = 0, \quad (14)$$

where $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ is the local unit normal vector, external to the free surface, and $\mathbf{m1} = (m_{1x}, m_{1y}, m_{1z})$ and $\mathbf{m2} = (m_{2x}, m_{2y}, m_{2z})$ are the local tangent vectors to the free surface. The pressure field is explicitly computed using the following equation

$$-p + \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial x} n_x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} n_y^2 + \frac{\partial w}{\partial z} n_z^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x n_y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_x n_z + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_y n_z \right] = 0; \quad (15)$$

STEP 2: Calculate the auxiliary velocity field from Eq. (10);

STEP 3: Solve the Poisson equation (12) for potential function ψ . The appropriate boundary conditions for this equation are homogeneous Dirichlet-type on the outlets and homogeneous Neumann-type on the fixed boundaries and inlets;

STEP 4: Compute the velocity field from (11);

STEP 5: Compute the pressure. It can be shown that the pressure is given by

$$p(\mathbf{x}, t) = \tilde{p}(\mathbf{x}, t) + \frac{\psi(\mathbf{x}, t)}{\delta t}; \quad (16)$$

STEP 6: Update the positions of the marker particles. This step involves moving the marker particles to their new positions. These are virtual particles (without mass, volume, or other properties), whose coordinates are stored and updated at the end of each computational cycle by solving the ordinary differential equation $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ by Euler's method. This provides a discrete particle, convected in a Lagrangian manner, with its new coordinates, allowing us to determine whether or not it has moved into a new computational cell, or if it has left the containment region through an outlet boundary. And go back to the **STEP 1**.

3. TOPUS SCHEME FOR CONVECTIVE TERMS DISCRETIZATION

Various monotone upwind polynomial schemes into the CBC region passing through the three critical points $O(0, 0)$, $Q(0.5, 0.75)$ and $P(1, 1)$ (see Fig. 2) and that satisfy the CBC restriction of Gaskell and Lau (1988) have been appeared in the literature. Zhu (1992), for instance, proposed a quadratic fit called HPLA (Hybrid - Linear Parabolic Approximation) scheme also known as Harmonic by van Leer (1977). While different authors (Pascau and Perez, 1995; Choi, Nam and Cho, 1995; Zhou, Davidson and Olsson, 1995; Zijlema, 1996) have adopted a cubic polynomial (under a variety of names and tangential to QUICK at $\hat{\phi}_U = 0.5$) that was referred as SMARTER by Waterson and Deconinck (2007). However, the SMARTER scheme violates the monotonicity preservation condition of Sweby (1984), because the CBC is weaker, and more flexible, than Sweby's TVD criterion (Zijlema, 1996). In addition, a majority of these scheme is not entirely contained in the Harten's TVD region (Harten, 1983).

In this context, the philosophy of the TOPUS scheme is to define a fourth degree polynomial that passes through the O , Q and P critical points, that is tangential to the QUICK and that contains a free parameter α in its formulation. In short, in NV the general TOPUS scheme can be defined as

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \alpha \hat{\phi}_U^4 + (-2\alpha + 1) \hat{\phi}_U^3 + \left(\frac{5\alpha-10}{4}\right) \hat{\phi}_U^2 + \left(\frac{-\alpha+10}{4}\right) \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0, 1]; \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0, 1]; \end{cases} \quad (17)$$

where $\alpha \in [-2, 2]$ ensures that the TOPUS scheme satisfies the CBC criterion. In original variables, this new scheme can be rewritten as (see Fig. 1)

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_R + (\phi_D - \phi_R) \left[\alpha \hat{\phi}_U^4 + (-2\alpha + 1) \hat{\phi}_U^3 + \left(\frac{5\alpha-10}{4}\right) \hat{\phi}_U^2 + \left(\frac{-\alpha+10}{4}\right) \hat{\phi}_U \right], & \hat{\phi}_U \in [0, 1]; \\ \phi_U, & \hat{\phi}_U \notin [0, 1]; \end{cases} \quad (18)$$

where $\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$ is the NV of Leonard (1988). The neighboring nodes D (Downstream), U (Upstream) and R (Remote-upstream) of a f face are defined according to V_f at this face.

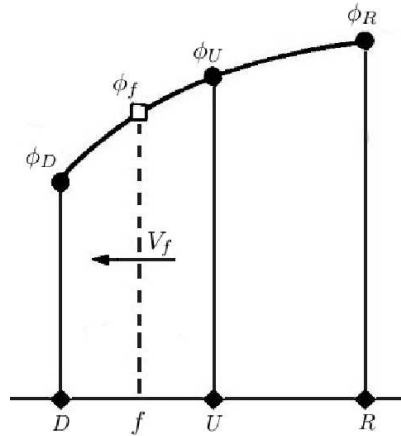


Figure 1. Original variables.

In the case of $\alpha = 2$, it can be shown that TOPUS is entirely contained in the TVD region of Harten (1983) (see Fig. 2) and it is given by

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2\hat{\phi}_U^4 - 3\hat{\phi}_U^3 + 2\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0, 1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (19)$$

In this work, the TOPUS will be used with $\alpha = 2$. If $\alpha = 0$, then TOPUS corresponds to the SMARTER scheme of Waterson and Deconinck. It is important to inform to the reader that the TOPUS scheme is a generalization of the upwind polynomial scheme (“Esquema II”) constructed by Queiroz et al. (2007).

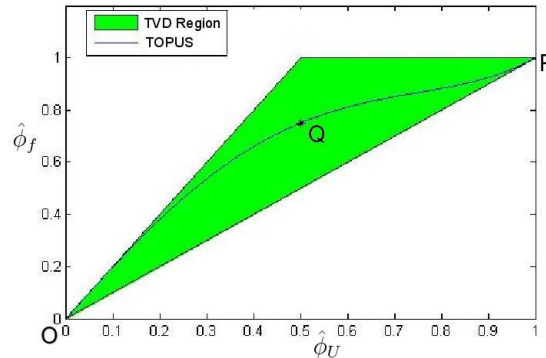


Figure 2. TOPUS with $\alpha = 2$ in the region TVD.

For the spatial advection terms of Navier-Stokes equations, the application of this scheme is as follow. For simplicity, only the discretization of the nonlinear terms in u -component of the 3D Navier-Stokes equations will be presented. The discretization of the other nonlinear term is made in a similar manner. In position $(i + \frac{1}{2}, j, k)$ of the 3D mesh, this term can be approximated by the following conservative scheme (in this example, the f face corresponds to the $i + \frac{1}{2}$ in Fig. 1):

$$\left(\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} \approx \frac{\bar{u}_{i+1,j,k}u_{i+1,j,k} - \bar{u}_{i,j,k}u_{i,j,k}}{\delta x} + \frac{\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \bar{v}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}{\delta y} + \frac{\bar{w}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}u_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \bar{w}_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}u_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{\delta z},$$

where the advection velocities $\bar{u}_{i+1,j,k}$, $\bar{u}_{i,j,k}$, $\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}$, $\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}$, $\bar{w}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}$ and $\bar{w}_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}$ are obtained by averaging. For instance, $\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}$ is approximate by

$$\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \approx 0.5 \left(v_{i,j-\frac{1}{2},k} + v_{i+1,j-\frac{1}{2},k} \right).$$

The velocities $u_{i,j,k}$ and $u_{i+1,j,k}$ are calculated (the other velocities follow similar procedures) by:

- If $\bar{u}_{i,j,k} > 0$ and $\hat{u}_{i-\frac{1}{2},j,k} = \frac{u_{i-\frac{1}{2},j,k} - u_{i-\frac{3}{2},j,k}}{u_{i+\frac{1}{2},j,k} - u_{i-\frac{3}{2},j,k}}$, then

$$u_{i,j,k} = \begin{cases} u_{i-\frac{3}{2},j,k} + (u_{i+\frac{1}{2},j,k} - u_{i-\frac{3}{2},j,k}) \left[2\hat{u}_{i-\frac{1}{2},j,k}^4 - 3\hat{u}_{i-\frac{1}{2},j,k}^3 + 2\hat{u}_{i-\frac{1}{2},j,k} \right], & \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j,k} \in [0, 1]; \\ u_{i-\frac{1}{2},j,k}, & \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j,k} \notin [0, 1]; \end{cases}$$

- If $\bar{u}_{i,j,k} \leq 0$ and $\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k} - u_{i+\frac{3}{2},j,k}}{u_{i-\frac{1}{2},j,k} - u_{i+\frac{3}{2},j,k}}$, then

$$u_{i,j,k} = \begin{cases} u_{i+\frac{3}{2},j,k} + (u_{i-\frac{1}{2},j,k} - u_{i+\frac{3}{2},j,k}) \left[2\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k}^4 - 3\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k}^3 + 2\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} \right], & \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} \in [0, 1]; \\ u_{i+\frac{1}{2},j,k}, & \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} \notin [0, 1]; \end{cases}$$

- If $\bar{u}_{i+1,j,k} > 0$ and $\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k} - u_{i-\frac{1}{2},j,k}}{u_{i+\frac{3}{2},j,k} - u_{i-\frac{1}{2},j,k}}$, then

$$u_{i+1,j,k} = \begin{cases} u_{i-\frac{1}{2},j,k} + (u_{i+\frac{3}{2},j,k} - u_{i-\frac{1}{2},j,k}) \left[2\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k}^4 - 3\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k}^3 + 2\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} \right], & \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} \in [0, 1]; \\ u_{i+\frac{1}{2},j,k}, & \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} \notin [0, 1]; \end{cases}$$

- If $\bar{u}_{i+1,j,k} \leq 0$ and $\hat{u}_{i+\frac{3}{2},j,k} = \frac{u_{i+\frac{3}{2},j,k} - u_{i+\frac{5}{2},j,k}}{u_{i+\frac{1}{2},j,k} - u_{i+\frac{5}{2},j,k}}$, then

$$u_{i+1,j,k} = \begin{cases} u_{i+\frac{5}{2},j,k} + (u_{i+\frac{1}{2},j,k} - u_{i+\frac{5}{2},j,k}) \left[2\hat{u}_{i+\frac{3}{2},j,k}^4 - 3\hat{u}_{i+\frac{3}{2},j,k}^3 + 2\hat{u}_{i+\frac{3}{2},j,k} \right], & \hat{u}_{i+\frac{3}{2},j,k} \in [0, 1]; \\ u_{i+\frac{3}{2},j,k}, & \hat{u}_{i+\frac{3}{2},j,k} \notin [0, 1]. \end{cases}$$

4. NUMERICAL EXPERIMENTS

The validity of the present numerical method in simulating 2D/3D high Reynolds incompressible turbulent flows is assessed in this section. Verification is made against a turbulent jet impinging onto a flat surface and validation is made against the broken dam problem. These problems were selected because there exist analytical and experimental data available in the literature.

4.1 Turbulent free jet impinging onto a rigid wall

The first result is a 2D jet impinging normally onto flat surface at high Reynolds number. This free surface flow in turbulent regime has been chosen as a representative test bed because there is (see Watson (1964)) an analytical solution for the total thickness of the fluid layer flowing on the flat rigid wall. It is difficult to simulate because the free surface boundary conditions must be specified on an arbitrarily moving boundary (see an illustration in Fig. 3).

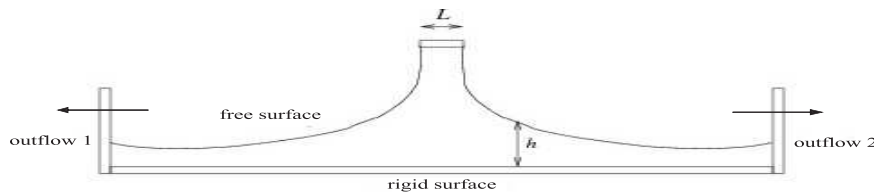


Figure 3. Configuration of a free jet impinging onto a rigid surface.

The Freeflow code, equipped with TOPUS scheme, run this problem at Reynolds number 5.0×10^4 , which was based on the maximum velocity $U_{max} = 1.0$ m/s and diameter of the inlet $L = 0.01$ m. Three meshes were used, namely: the coarse mesh 200×50 ($\delta_x = \delta_y = 0.001$ m); the medium mesh 400×100 ($\delta_x = \delta_y = 0.0005$ m); and the fine mesh 800×200 ($\delta_x = \delta_y = 0.00025$ m) computational cells. By using these meshes, a comparison was made between the free surface height (the total thickness of the layer), obtained from numerical method and from the analytical viscous solution of Watson (1964). This is displayed in Fig. 4. One can see from this figure that the numerical results on fine mesh are generally in good agreement with the analytical solution, displaying small differences in some regions of the flow. We believe that most of this difference may be attributed to insufficient grid points used near the rigid wall.

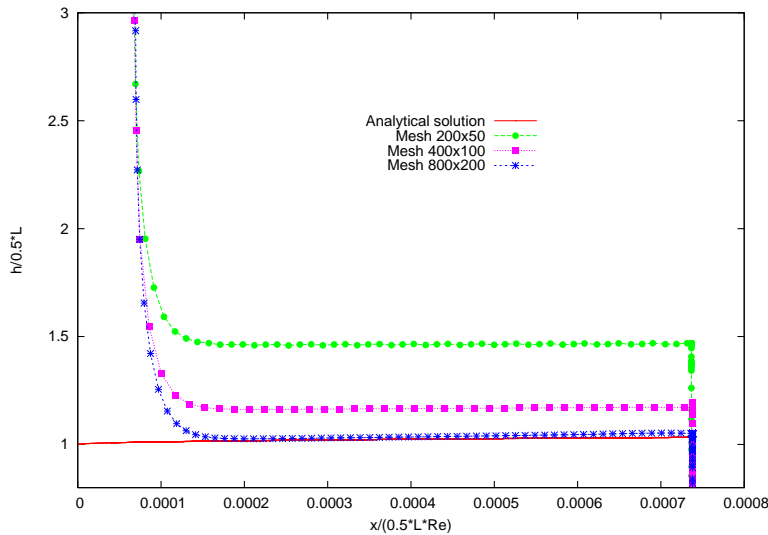


Figure 4. Comparison on three meshes between numerical solution and analytical solution of Watson (1964).

4.2 Broken dam problem

Results are presented now for the collapse of a column of water onto a horizontal wall for 2D and 3D cases. This free surface flow problem was first studied experimentally in detail by Martin and Moyce (1952), and more recently by Koshizuka and Oka (1996) to investigate the spreading velocity and the falling rate of water columns. By using the TOPUS scheme implemented into the 2D and 3D versions of the Freeflow of Castelo et al. (2000), we performed a simulation of this unsteady free surface flow. The geometry used is a fluid column ($a = 0.05m$ wide and $2a = 0.1m$ high) in 2D case and a fluid block ($\mathbf{b} = 0.05m$ length, $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$ wide and $\mathbf{c} = 2\mathbf{b}$ high) in 3D case, both in hydrostatic equilibrium and confined between walls. At the beginning, a wall is instantaneously removed and the fluid is subject to vertical gravity and is free to flow out along a rigid horizontal wall. In order to compare with the experimental data given by Martin and Moyce (1952) and Koshizuka and Oka (1996), the free-slip boundary condition was used to correctly model the flow at walls. The Reynolds number based on the characteristic length $L = 2a$ and the characteristic velocity $U = \sqrt{L|\mathbf{g}|}$ was $Re \approx LU/\nu = 99 \times 10^3$ ($|\mathbf{g}| = 9.81ms^{-2}$). The meshes used in this problem were: 150×75 ($\delta_x = \delta_y = 0.002m$) computational cells in the 2D case; and $150 \times 50 \times 75$ ($\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0.002m$) computational cells in the 3D case.

Figure 5 shows the 2D/3D numerical results and experimental data for the position of the fluid front (X_{max}) versus time (the 3D numerical results were obtained by a cutting plane at position $y = 0.05m$). As shown in this figure, both 2D and 3D calculations agree fairly well with the experimental data specially in the comparison with the results of Martin and Moyce, giving confidence in the numerical solutions,

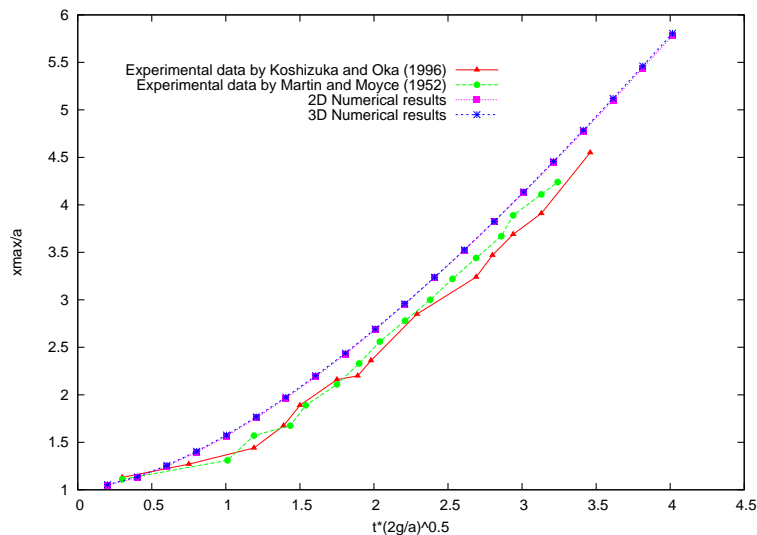


Figure 5. Comparison between present computations and experimental data for the surge front position X_{max} versus non dimensional time.

The pressure field obtained at, respectively, $t = 0.05s$, $t = 0.10s$, $t = 0.15s$ and $t = 0.20s$ is presented in Fig. 6.

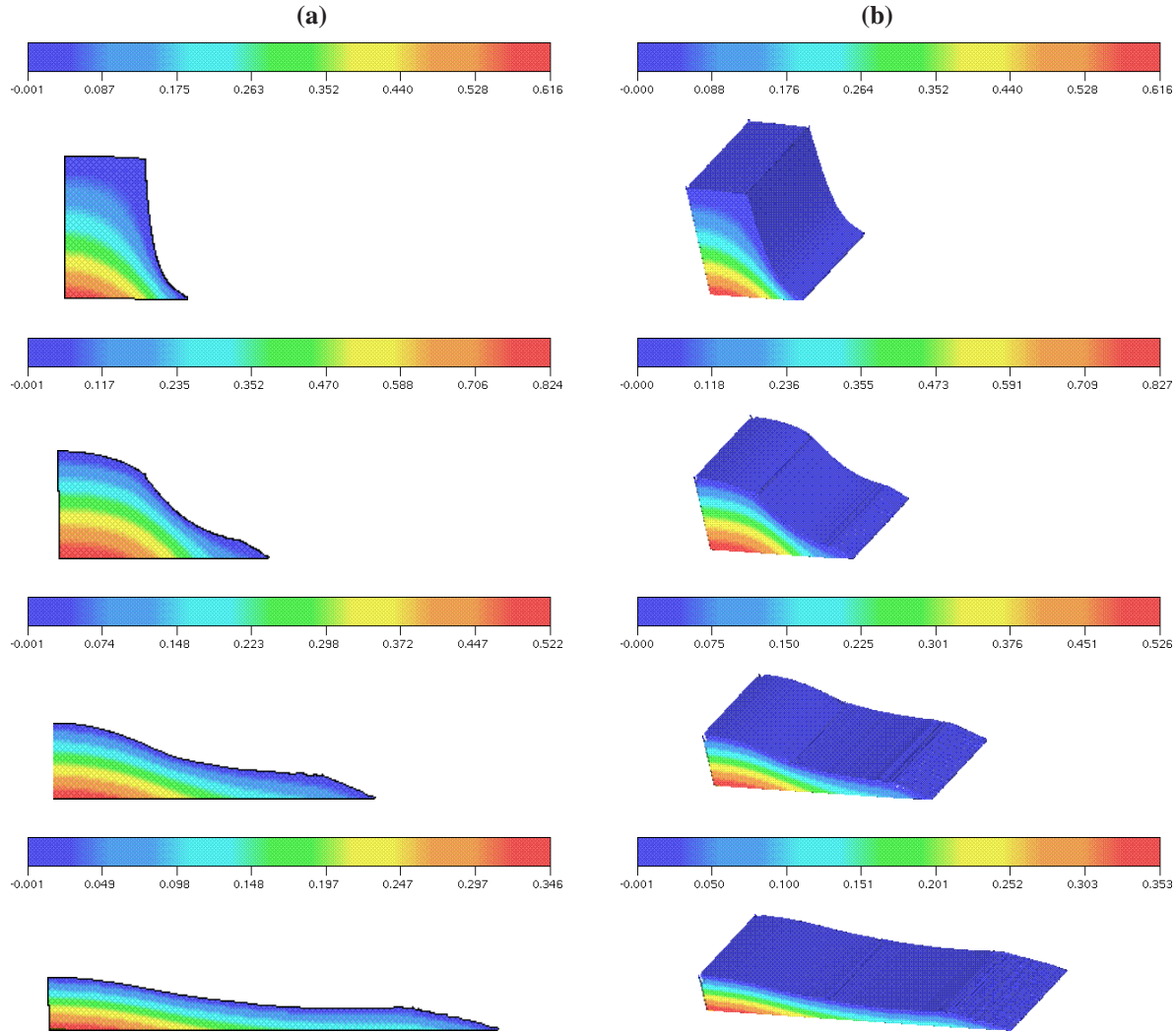


Figure 6. Pressure contours of the free surface in different times for the broken dam flow: (a) 2D case; (b) 3D case.

5. 2D/3D APPLICATIONS

In the following, three applications involving turbulent flow regime are investigated.

5.1 Sluice gate

In order to show that the numerical method presented in this work can, in fact, capture large scale structures, we present the simulation of another type of broken dam flow (see Harlow (1965)), which corresponds to a strong free surface motion generated by a sluice gate. This problem is generally used as a model to study flows in hydraulic structures, where the effects of the free surface, turbulence fluctuations and pressure distribution are usually required to be determined (Sankaranarayanan and Suresh Rao, 1996; Mouaze, Murzyn and Chaplin, 2005). The parameters employed in our simulation are the same as that for the collapse of fluid column for the 2D case (subsection 4.2). The numerical solution using the TOPUS scheme is shown in Fig. 7. From this figure is visible the formation of coherent structures (large-scale vortical) on the flow. Particularly, this figure depicts the interaction of these large structures (large eddies) with the free surface.

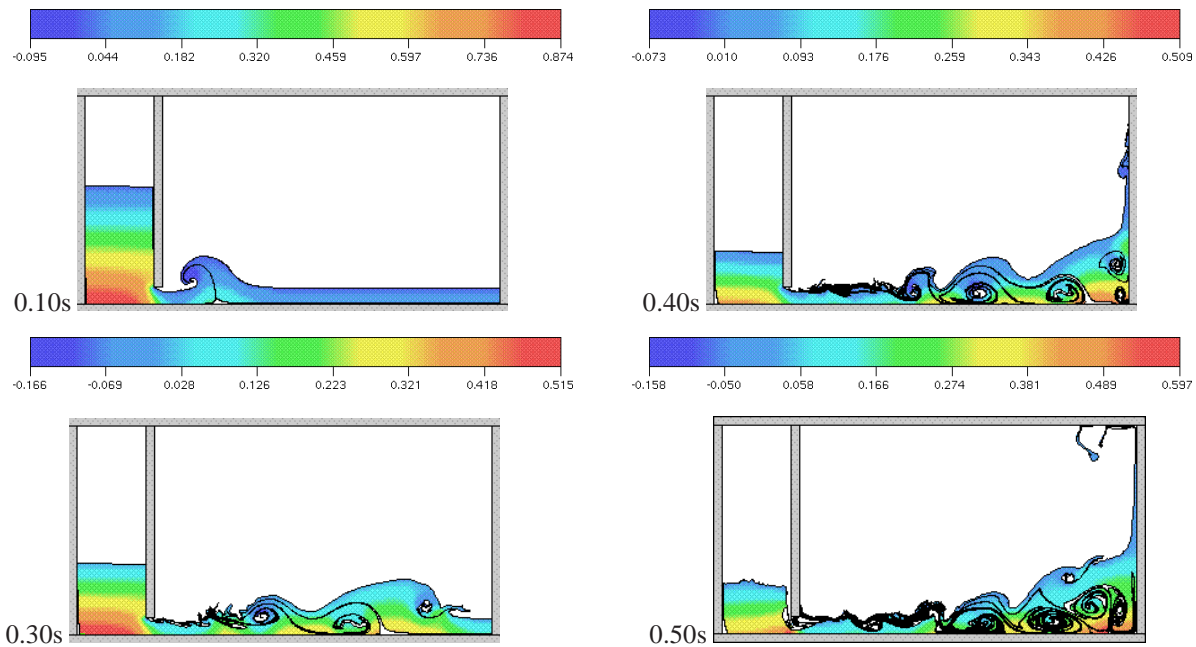


Figure 7. Numerical simulation of the sluice gate, showing large eddies and their interaction with the free surface.

5.2 Horizontal jet penetrating a quiescent fluid

In this section, we apply the numerical method for the direct computation of another turbulent free surface flow. The problem consists of a horizontal jet penetrating a quiescent fluid from an entry port at depth H beneath the free surface. The geometrical configuration and parameters for this flow are shown in Fig. 8. In this numerical simulation, the associated Reynolds and Froude numbers are $Re = DU_0/\nu = 5.0 \times 10^4$ and $Fr = U_0/\sqrt{gD} \approx 12.77$, respectively. The mesh used was 100×100 computational cells ($\delta x = \delta y = 0.010$ m) and $H = 6.0$ m.

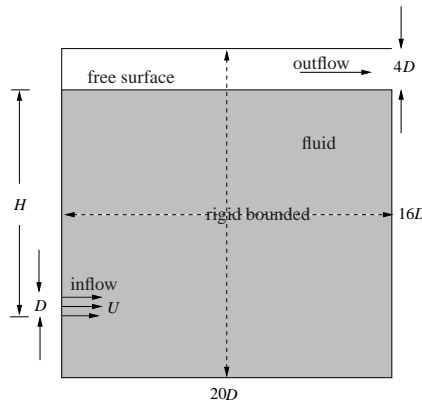


Figure 8. Geometry and parameters for flow of a penetrating planar jet in a pool: $U = 2.0 \text{ ms}^{-1}$ and $D = 0.05$ m.

The development of pressure and velocities distributions, together with the free surface elevation at various times, are presented in Fig. 9. One can see from these figures that the interaction with the free surface occurs only at the later stages of the flow development. Initially, one can observe the growth of the instability of the boundary layers between the jet and the stagnant fluid and, subsequently, the formation of a pair of counter-rotating eddies. Later on the first pair of eddies propagates towards the free surface. The flow obtained in this simulation is an unsteady flow with some small scale structures, in which the effect of the free surface is larger. Furthermore, the result obtained in this simulation should be interpreted as representing the two-dimensional motion of one realization occurring at scales greater than the discretization scale. In other words, both the free surface position and the pressure fields computed here may be regarded as the deterministic motion at these larger scales. Turbulent flow simulations using the direct numerical simulation technique have been performed by other authors, but are mostly restricted to very low Froude numbers. The ability to perform simulations for high value of the Froude number is a distinct advantage of the present numerical method.

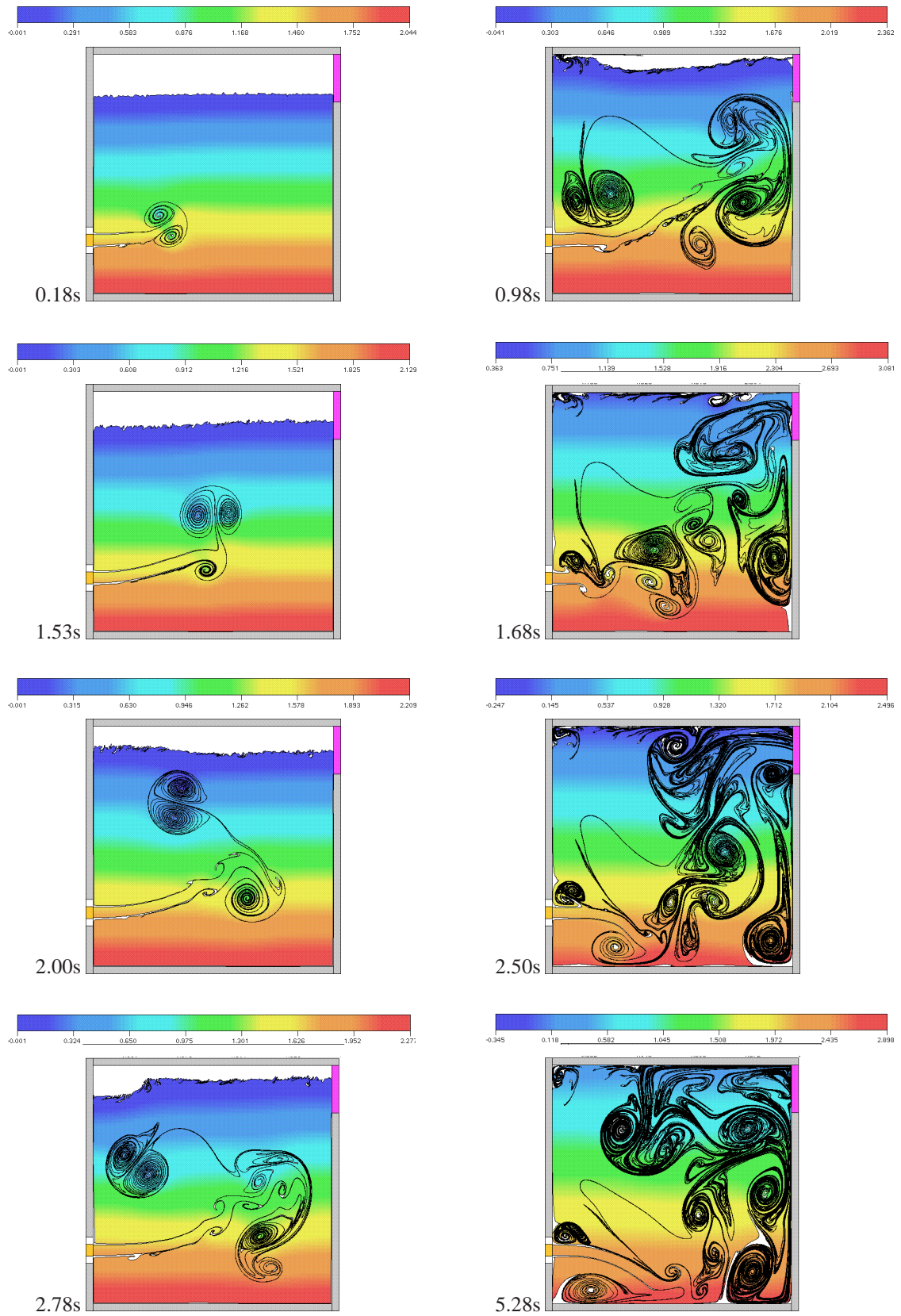


Figure 9. Evolution of the pressure contours of a jet in a fluid portion.

5.3 Turbulent circular jump

The circular hydraulic jump may arise when a free jet of water falling vertically at moderate Reynolds number strikes a horizontal rigid surface. Fluid is spread radially in a thin layer, until reaching a radius (sudden discontinuity) at which the layer depth increases abruptly. A better understanding of the phenomenon and the instabilities, at least in its turbulent form, is of commercial interest, since jet impingement is often used in cooling systems and the flow of the fluid beyond the jump can degrade the efficiency of the system. Probably, the first author to study the influence of fluid viscosity on the jump radius was Watson (1964). A 3D turbulent hydraulic jump constitutes an excellent test for validating codes based on front tracking techniques. In order to simulate this complex free surface flow, the Reynolds number based on the maximum velocity $U_{max} = 1.0$ m/s and diameter of the inlet ($L = 0.05$ m) was 1.0×10^3 . The mesh used was $120 \times 120 \times 10$ computational cells. Figure 10 shows a qualitative comparison between the experimental results of Ellegaard et al. (1996) (on the left) and the results obtained with our numerical method (on the right). One can clearly see from this figure that our numerical method captured the complete physical mechanism in this flow.

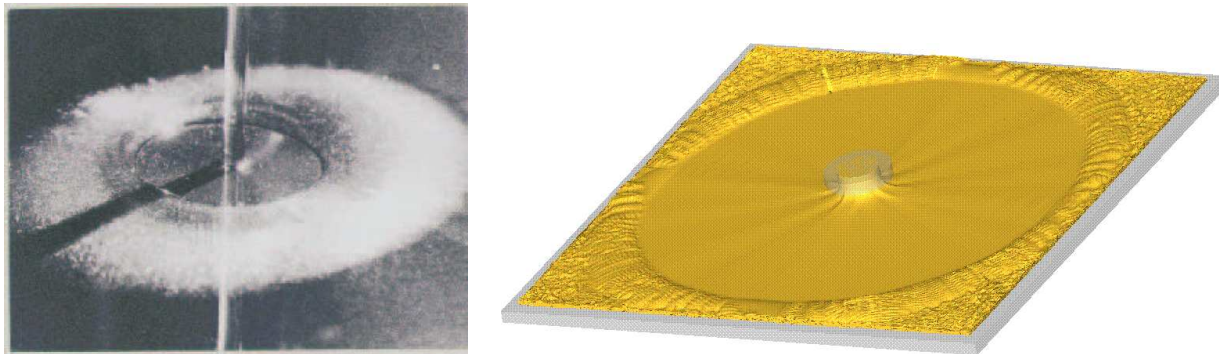


Figure 10. 3D qualitative comparison between the experimental and numerical results for a turbulent hydraulic jump.

6. CONCLUSION

A new high order polynomial upwind scheme (called TOPUS) has been applied for the direct computation of incompressible turbulent free surface flows. It has been implemented into the finite-difference Freeflow simulation system on staggered grid system. Two test cases has been solved and compared with existing experimental and analytical data. In general, the numerical simulation results demonstrated good agreement. Three complex free surface flow problems were also simulated, namely: a sluice gate, a horizontal jet penetrating a quiescent fluid from an entry port beneath the free surface and the circular hydraulic jump. The results for these flows shown to be consistent with the physical phenomena. Future work will be devoted to the application of the TOPUS scheme in compressible and non-Newtonian incompressible flows.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

This research work was supported by the *FAPESP* under Grants 04/16064-9, 05/51458-0, 06/05910-1 and *CNPq* under Grant 304201/05-7.

8. REFERENCES

- Amsden, A.A. and Harlow, F.H., 1970, "A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 6, pp. 322.
- Castelo, A., Tomé, M.F., McKee, S., Cuminato, J.A. and Cesar, C.N.L., 2000, "Freeflow: an integrated simulation system for three-dimensional free surface flows", *Comput. Visualization in Science*, Vol. 2, pp. 1-12.
- Choi, S.K., Nam, H.Y. and Cho, M., 1995, "A comparison of higher-order bounded convection schemes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 121, No. 281-301.
- Chorin, A., 1968, "Numerical solution of the Navier-Stokes equations", *Mathematics of Computation*, Vol. 22, pp. 745-762.
- Denaro, F.M., 2003, "On the applications of the Helmholtz-Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 43, pp. 43-69.
- Ellegaard, C., Hansen, A.E., Haaning, A., and Bohr, T., 1996, "Experimental results on flow separation and transitions in the circular hydraulic jump", *Physica Scripta*, Vol. T67, pp. 105-110.

- Ferreira, V.G., Mangiavacchi, N., Tomé, M.F., Castelo, A., Cuminato, J.A. and Mckee, S., 2004, "Numerical simulation of turbulent free surface flow with two-equation $k - \epsilon$ eddy-viscosity models", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 44, pp. 347-375.
- Ferreira, V.G., Oishi, C.M., Kurokawa, F.A., Kaibara, M.K., Cuminato, J.A, Castelo, A., Mangiavacchi, N., Tomé, M.F. and McKee, S., 2007, "A combination of implicit and adaptative upwind tools for the numerical solution of incompressible free surface flows", *Communication in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 419-445.
- Ferreira, V.G., Kurokawa, F.A., Queiroz, R.A.B, Kaibara, M.K., Oishi, C.M, Cuminato, J.A, Castelo, A., Tomé, M.F. and Mckee, S., 2008, "An Assessment of a high-order finite difference upwind scheme for the simulation of convection-diffusion problems", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, In Press.
- Ferziger, J.H., Perić, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, ISBN 3-540-65373-2, 1999.
- Gaskell, P.H. and Lau, A.K.C., 1988, "Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, pp. 617-641.
- Harten, A., 1983, "High resolution schemes for conservation laws", *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, pp. 357-393.
- Hodge, W.V.D., 1952, "The Theory and Applications of Harmonic Integrals", Cambridge University Press, Cambridge.
- Koshizuka, S. and Oka, Y., 1996, "Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluids", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, pp. 421-434.
- Leonard, A., 1995, *Direct numerical simulation*, In T. Gatski (ed.), *Turbulence and its Simulation*, Springer, New York.
- Leonard, B.P., 1988, "Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, pp. 1291-1318.
- Martin, J. and Moyce, W., 1952, "An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plate", *Philosophical Transactions of Royal Society of London, series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 244, pp. 312-324.
- Mouaze, D., Murzyn, F. and Chaplin J.R., 2005, "Free surface length scale estimation in hydraulics jumps", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 127, pp. 1191-1193.
- Pascau, A. and Perez, C., 1995, "A well-behaved scheme to model strong convection in a general transport equation", *International Journal of Heat & Fluid Flow*, Vol.5, pp. 75-87.
- Queiroz, R.A.B., Ferreira, V.G. and Kurokawa, F.A., 2007, "Desenvolvimento e aplicação de esquemas upwind de terceira ordem para transporte convectivo", XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - XXX CNMAC, Florianópolis - SC.
- Sankaranarayanan, S. and Suresh Rao, H., 1996, "Finite element analysis of free surface flow through gates", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, pp. 375-392.
- Sweby, P.K., 1984, "High resolution scheme using flux limiters for hyperbolic conservation laws", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 21, pp. 995-1011.
- Tomé, M.F., Castelo, A., Murakami, J., Cuminato, J. A., Minghim, R., Oliveira, M.C.F, Mangiavacchi, N. and Mckee, S., 2000, "Numerical simulation of axisymmetric free surface flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 157, pp. 441-472.
- van Leer, B., 1977, "Towards the ultimate conservative difference scheme", *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, pp. 276.
- Waterson, N. P. and Deconinck, H., 2007, "Design principles for bounded higher-order convection schemes - a unified approach", *Journal of Computational Physics*, Vol. 224, pp. 182-207.
- Watson, E.J., 1964, "The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 20, pp. 481-499.
- Wilcox, D.C., 1993, *Turbulence modeling for CFD*, DCW Industries, Inc, California, 1993.
- Zhou, G., Davidson, L. and Olsson, E., 1995, "Transonic inviscid/turbulent airfoil flow simulations using a pressure-based method with high order schemes", *Lecture Notes in Physics*, Vol. 453.
- Zhu, J., 1992, "On the higher-order bounded discretization schemes for finite volume computations of incompressible flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 98, pp. 345.
- Zijlema, M., 1996, "On the construction of a third-order accurate monotone convection scheme with application to turbulent flows in general domains", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, pp. 619-641.

9. Responsibility notice

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

Airfoil Optimization for Business Aircraft

Rafael Fernandes de Oliveira, rafael.fernandes.oliveira@usp.br

Ricardo Maiko Uehoka Entz, ricardo.entz@usp.br

Luiz Guilherme Noujain Corrêa, luiz.guilherme.correa@usp.br

Anselmo Eduardo Jorge Cortellazzi Filho, cortelazi@gmail.com

Rodrigo Polan Domingues, rodrigo.domingues@usp.br

Bruno Giovaneti de Macedo, brunogmacedo@terra.com.br

Marcello Augusto Faraco de Medeiros, marcello@sc.usp.br

Department of Materials, Aeronautics and Automobile Engineering

Engineering School of São Carlos - University of São Paulo

Abstract - This work describes part of the development of a Multidisciplinary and Multiobjective Optimization Framework for the conceptual design and optimization of a business aircraft, through the use of probabilistic and gradient-based algorithms. This framework is capable of estimating many parameters of an aircraft, based on semi-empirical algorithms for Weight Estimation, in-house codes for Performance and Mission Analysis, and Commercial and Open-Source software for evaluation of important characteristics of each aircraft, such as Aerodynamics, Propulsion and Static and Dynamic Stability Derivatives. Specifically, this paper presents the work done in this framework regarding airfoil optimization. This optimization takes place by changing the airfoil geometry, and can improve parameters such as lift, drag, efficiency, transition point, among others.

Keywords: Aircraft Design, Airfoil Design, Multiobjective Optimization, Multidisciplinary Optimization, Genetic Algorithm

1 INTRODUCTION

The process of designing an aircraft is generally divided into three main phases: *conceptual*, *preliminary*, and *detail* design. Each phase has its own unique characteristics, involving aerodynamic, propulsion and structural design, and influence on the final product. It has been shown that the final cost of the aircraft is usually locked in the first two phases of this design process.

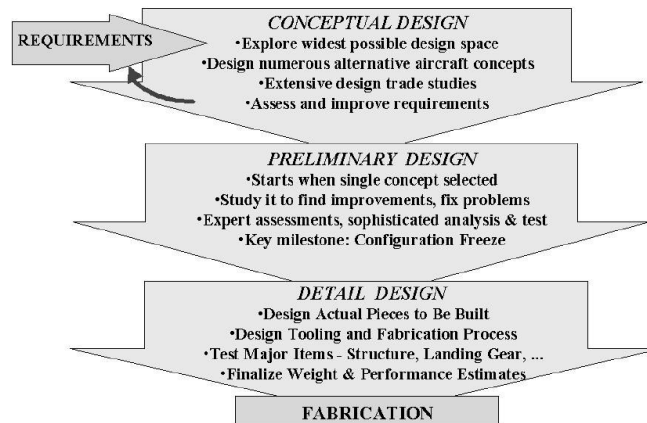


Figure 1 - Three Phases of Aircraft Design, from Raymer⁽¹⁾

During the phase of Conceptual and Preliminary Design of a new airplane, there is a crescent need of software tools that helps the designer to achieve a good aircraft configuration with good confidence. Many separated tools exist to analyze each sub-area of aircraft design, such as Aerodynamics, Structures, Performance and Weight, among others. But an integrated tool, that provides analysis in many of these sub-areas are rare, and generally restricted to aircraft manufacturers. Examples of such tools are *Piano* from Lissys Ltd⁽²⁾, *Advanced Aircraft Analysis* from DARCorp⁽³⁾, and *RDS Aircraft Design and Analysis* from

Raymer⁽⁴⁾. The aim of the project being conducted in our university is to develop a similar project framework, but including more advanced and flexible optimization techniques.

1.1 History of Multidisciplinary Optimization in Aircraft Design

Usually, the design process in an aeronautic industry starts with some feasible aircrafts, based on historical data, which are then sent to different teams. Each team will be in charge of developing, improving and judging one design, in a parallel process: Then, the “best” design is sent to groups that will analyze each specific area of the process, such as aerodynamics, propulsion or structures. The aerodynamics engineers would select the shape of the fuselage and wing, and next the structural experts would have to fit their design within the specified shape. If some problem was found, the design process was stopped and reversed, until the final aircraft layout was considered good within some constraints (from the authorities regulations, such as FAA’s FAR 25) and requirements, generally performance-related, such as maximum speed, maximum aerodynamic efficiency, maximum range and minimum structural weight, and economic-related, such as direct and indirect operational costs, maintenance characteristics, and so forth.

1.2 Genetic Optimization in Aircraft Design

The Genetic Algorithm is applied in aeronautic engineering usually by associating each chromosome to a specific parameter of the final aircraft, in a bit-string variable that will represent the value of the parameter within a feasible range. Members of a randomly generated starting population are then analyzed and evaluated, giving each one a value of fitness, based on their performance and economic results. Reproduction occurs by crossing their genes pair-wise, and then the next generation is again evaluated as to fitness. The process continues until the population all resembles each other or the fitness is no longer improving (or the computational time is exceeded). This is presumed to represent an optimum.

2 AERODYNAMIC ANALYSIS AND OPTIMIZATION

In order to optimize an aircraft, most of time is spent in reducing the drag penalty of the process of generating lift. The effects of reducing drag appear directly in many optimization goals, such as fuel consumption, noise and NO_x generation, and indirectly in others, such as cargo and passengers capacity vs. range and direct operational costs.

Before the optimization methods could be chosen, a careful study on how to calculate the aerodynamic properties of an airfoil has to be carried out. Unlike classical projects, modern optimization methods may require hundreds of burdensome iterations to converge, and this specificity conducts the criteria to choose the method.

For aeronautical purposes, there are basically two types of codes used in computational fluid dynamics. The first, namely Panel Methods, is widely used for cases where steady, potential-flow is representative. Panel Methods use Biot-Savart equations to find intensities of vortices and sources based on no-penetration boundary conditions to describe surfaces.

XFOIL, a well known code for airfoil parameters estimation, uses a linear-vorticity stream function panel method for the inviscid calculations. Karman-Tsien corrections are available, allowing subsonic compressibility corrections. Integral boundary layer formulation and e^n transition model are used, allowing reasonably accurate prediction of the drag by calculating the wake momentum thickness downstream the airfoil.

The second type of method finds an approximate solution for Navier-Stokes equations. This method has a potential of providing accurate results for turbulent, non-stationary or compressible flow. Problems in this method appear when it is considered that they are computationally onerous, making it unviable for complex simulations. Most of the approaches rely on turbulence models to simplify the solutions, with the drawback of sometimes compromising the accuracy (and sometimes physical validity) of the solution.

Given the necessity of evaluating a great number of airfoil geometries, XFOIL was chosen as the most suitable code for optimization methods.

2.1 Airfoil Optimization

Fuel consumption is a critical item to be optimized in any kind of airplane design, not only because the reduction in Direct Operational Cost (of which fuel represents more than 33% excluding ownership costs - Figure 2) and the increase in fuel prices (

Figure 3), but also because future aircrafts will have to follow strict regulations regarding NO_x and CO_2 emissions (Figure 4). This reduction of fuel consumption is usually accomplished by either minimizing drag or by improving engine efficiency. Choosing an efficient airfoil one of the most effective ways of improving aerodynamic efficiency and reduce drag.

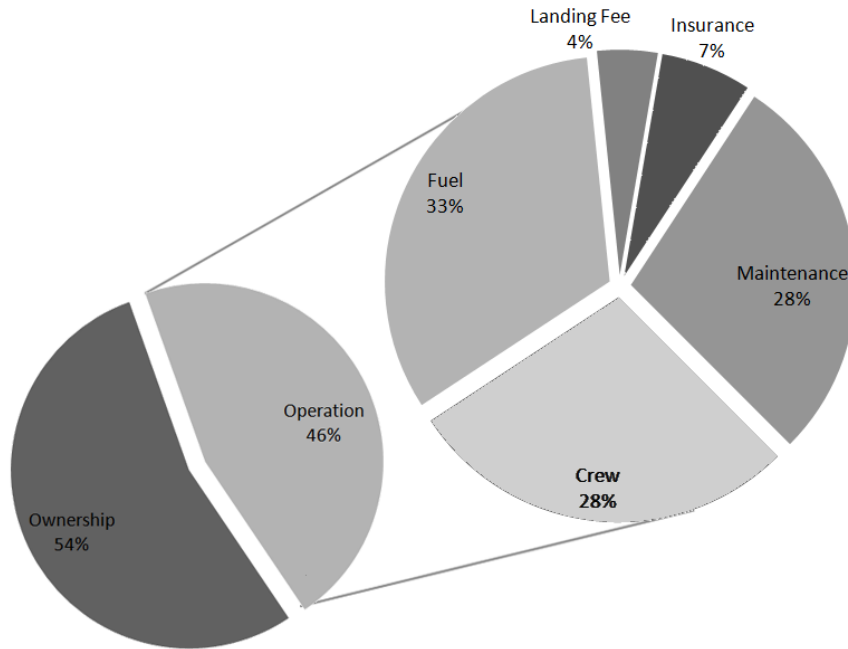


Figure 2 - Direct Operating Cost (DOC) Breakdown for a Regional Jet

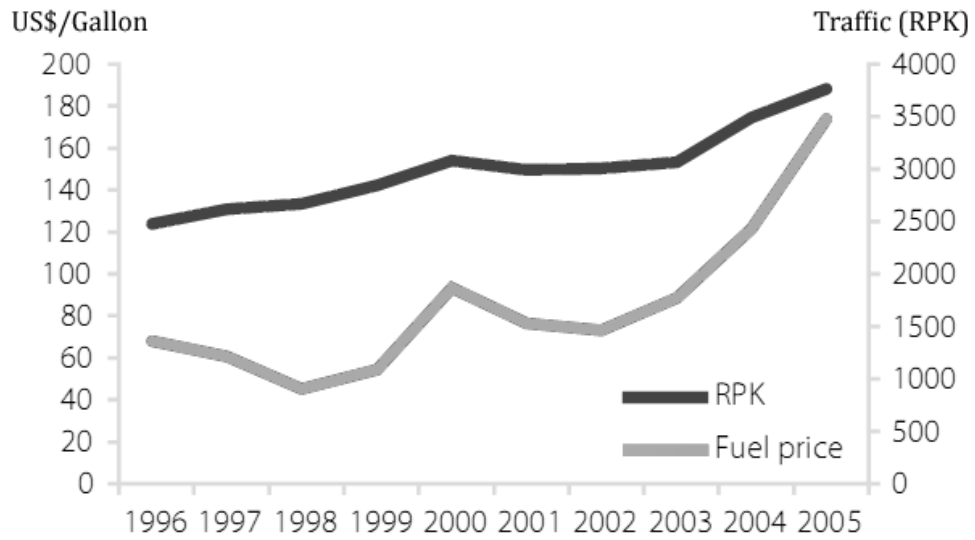


Figure 3 - Traffic is increasing despite the fuel price growing up



Figure 4 - Aviation Commitment for Reduction in Environmental Impact

One of the most difficult tasks in any kind of optimization is to define a consistent set of objectives and constraints. The quantification of fitness in this work has aimed in having an efficient airfoil for a regional jet airplane, where cruise drag is critical for costs saving. Besides, a high lift-to-drag ratio in flight conditions is desirable, as well as increasing the critical Mach number, to avoid formation of shock waves that increase significantly the drag during cruise flight.

2.1.1 Classic versus Modern Airfoil Optimization Techniques

Inverse methods for airfoil design have been used for many years for airfoil projects and optimization. One of the most prominent codes was developed by Eppler (1980) and allows the determination of potential-flow field, or at least some of its properties, for a given boundary-layer development.

With these codes, it is possible to obtain the shape of an airfoil for a given inviscid pressure distribution (Drela and Youngren, 2001). Using an adequate distribution, a laminar boundary layer and a high critical Mach number can be obtained, maximizing airfoil performance.

However, it is difficult to specify the boundaries of a laminar bucket or fulfill the criteria of an intricate fitness function based only on pressure distribution. Modern optimization methods, either mathematical (i.e. gradients methods) or biomorphic (i.e. genetic algorithms), can be a valuable approach for problems with a big number of constraints and complicated fitness functions. Unlike the inverse method, modern methods are usually automated, so that there is no need of vast knowledge on the behavior of the problem, making implementation easier.

The obvious drawback of this approach is that it requires solid knowledge on potentialities and limitations of the methods. However, the possibilities of finding better and solutions for a given problem have made it extremely popular.

Although three-dimensional effects, as induced drag and wing-fuselage interaction, are not considered in an airfoil optimization, an adequate aerodynamic section represents a consistent step towards the efficiency of the airplane design.

3 OPTIMIZATION METHODS

3.1 Genetic Algorithm

The genetic algorithm is implemented in this framework by the use of bit-string or real-value chromosomes, each one attached to a specific parameter of the aircraft or the airfoil. The population is initialized by selecting an initial guess, and by setting a random variation of each parameter.

After the full fitness evaluation, the population is then given the chance of evolution, by applying crossover and mutation operators, each one driven by a probability. The selection schema consists of four different methods: the classic *fitness proportionate selection* and *tournament selection*, and the Raymer⁽¹⁾ suggested *Breeder Pool* (like the tournament selection, but applied only to some percentage of the best individuals) and *Killer Queen* (selection of the best individual, and further extreme mutation).

3.2 Levenberg-Marquardt Algorithm

The Levenberg–Marquardt Algorithm (or LMA) is a well-known nonlinear optimization method that provides numerical solutions to the problem of minimizing a function. It is a pseudo-second order method, partially derived from the gradient descent and conjugate gradient methods, that estimates the Hessian Matrix using a sum of the outer products of the gradients of the objective function.

The LMA interpolates between the Gauss-Newton algorithm (GNA) and the method of gradient descent. The LMA is more robust than the GNA, which means that in many cases it finds a solution even if it starts very far off the final minimum. On the other hand, for well-behaved functions and reasonable starting parameters, the LMA tends to be a bit slower than the GNA.

The LMA is a very popular curve-fitting algorithm used in many software applications for solving generic curve-fitting problems.

3.3 Simulated annealing technique

Simulated Annealing (or SA) is a global probabilistic optimization meta-algorithm, often used when the search space is discrete. Each step of the SA algorithm replaces the current solution by a random nearby solution, chosen with a probability that depends on the difference between the corresponding function values and on a global *temperature* parameter, which is gradually decreased during the process. The dependency is such that the current solution changes almost randomly when the temperature is large, but as its value decreases, the probability of accepting a worse solution goes to zero. The allowance for accepting worse solutions provides the method a way of not becoming stuck at local minima.

4 AIRFOIL OPTIMIZATION RESULTS

4.1 Fitness Criteria

One of the biggest challenges in airfoil optimization is to find a criterion that can best lead to a truly representative airfoil. The aim was an optimized airfoil for regional airplanes, from 50 to 70 passengers. A good fitness function for this kind of airplane will have some kind of restrictions, that will heavily penalize that airfoil, and other that will give some kind of score, so that the airfoils could be compared.

One of the best well known equations in aircraft performance is the Breguet formula for range.

$$R = \frac{V}{SFC} \frac{L}{D} \ln \left(\frac{W_{to}}{W_{to} - W_{cr}} \right) \quad (1)$$

This formula calculates the range(R) for a given velocity (V), specific fuel consumption (SFC), the parameter Lift to drag (L/D) and the variation of the airplane mass. So, for a given range, the higher the L/D the lowest will be the fuel consumption. Reduction in fuel consumption is desired, not only because it reduces the aircraft flight cost but also it minimizes the environmental impact. In order to give higher grades to airfoils that have higher L/D and low drag, two formulas were set as follow:

$$F_1 = \int_{C_L=0.7 \cdot C_{L_{M\dot{a}x}} - 0.05}^{C_L=0.7 \cdot C_{L_{M\dot{a}x}} + 0.05} \frac{C_L}{C_D} (C_L) \partial C_L \quad F_2 = \frac{M_{Critical}^3}{\int_{C_L=0.4}^{C_L=0.6} C_D(C_L) \partial C_L} \quad (2) \text{ and } (3)$$

F_1 will represent the cruise part of the flight. It considers the $M_{critical}$ as compressibility heavily affects this part of the flight. Moreover, we used another integral, this time for C_D , through a region of the C_L that is believed for cruise. This integral divides the $M_{critical}$ because the lower the value of C_D calculated the best is aircraft performance.

F_2 will find the airfoil with the best performance (L/D) near the maximum C_L range. An integral is employed to make this optimization act on an operation region of the airfoil and not on a single point, which can lead to results that are not practical. For example, if an airfoil is optimized for a single point, just it may have very poor performance in other conditions due to abrupt changes in the characteristics of the boundary layer.

Regional jets usually have greater periods of climb and descend than cruise. During takeoff and climb, a great amount of fuel is consumed. For regional jets this can represent up to 50% of the flight fuel consumption. In order to optimize this part of the flight, high C_{Lmax} is needed, so a minimum C_{Lmax} of 1.8 was set. If the airfoil doesn't achieve this C_{Lmax} , it will be disqualified. The following criterion is evaluated for Mach = 0.

$$F_3 = \begin{cases} 1, C_{l_{max}} \geq 1.8 \\ 0, C_{l_{max}} < 1.8 \end{cases} \quad (4)$$

Due to structural issues, the airfoil was set to have a minimum of 15% of maximum thickness, so that the inertia of the wing spars and the volume in the wing fuel tanks are reasonable. If the algorithm produces an airfoil that has less than 15% of maximum thickness, there will be a penalization as follows:

$$F_4 = 0.5^{100|t/c-0.15|}, t/c < 0.15 \quad (5)$$

In order to achieve good flight performance, it is almost certain that a laminar flow airfoil will have a good score. This kind of airfoil may have a great C_m that is undesirable, because of the large tail volume needed to stabilize the airplane. So, a maximum $|C_m| = 0.15$ is set. If the airfoil has a greater value it will be penalized as follow:

$$F_5 = \begin{cases} 1, if \max(|C_M|) < 0.15 \\ 0.25^{100-(\max(|C_M|)-0.15)}, otherwise \end{cases} \quad (6)$$

The final score to the airfoil is calculated as:

$$F = \prod_{n=1}^5 F_n \quad (7)$$

4.2 Optimization Methodology

4.2.1 Airfoil Parametric Modification by the use of Genetic Algorithms

In this technique, the airfoil is modified by changing its camber and thickness through the use of special functions, shown in Figure 5 and Figure 6, and equations (12) through (19). These functions have the property of changing specific points of the normalized airfoil coordinates, without disrupting its continuity. The final airfoil coordinates are given by the sum of each function weighed by the genetic information of each chromosome, as in equations (8), (9), (10) and (11).

$$Y_{Camber}^{Initial}(x) = \frac{1}{2} \cdot Y_{Upper}^{Initial}(x) + \frac{1}{2} \cdot Y_{Lower}^{Initial}(x) \quad (8)$$

$$Thk^{Initial}(x) = Y_{Upper}^{Initial}(x) - Y_{Lower}^{Initial}(x) \quad (9)$$

$$Y_{Upper}^{New}(x) = Y_{Camber}^{Initial}(x) + \sum C_i F_i + \frac{Thk(x)}{2} \cdot \sum C_j (1 - F_j) \quad (10)$$

$$Y_{Lower}^{New}(x) = Y_{Camber}^{Initial}(x) + \sum C_i F_i - \frac{Thk(x)}{2} \cdot \sum C_j (1 - F_j) \quad (11)$$

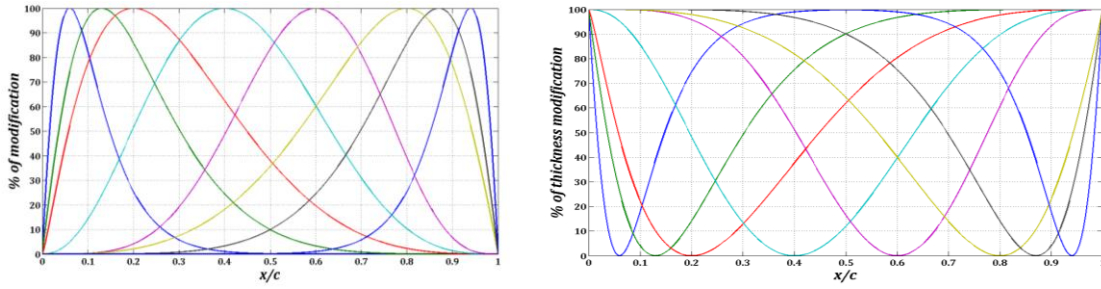


Figure 5 - Airfoil Modifying Functions

$$F_1 = \sin(\pi \cdot (1 - x)^{11.2023}) \tag{12}$$

$$F_2 = \sin(\pi \cdot (1 - x)^{4.9773}) \tag{13}$$

$$F_3 = \sin^3(\pi \cdot x^{0.4307}) \tag{14}$$

$$F_4 = \sin^3(\pi \cdot x^{0.7565}) \tag{15}$$

$$F_5 = \sin^3(\pi \cdot x^{1.3569}) \tag{16}$$

$$F_6 = \sin^3(\pi \cdot x^{3.1063}) \tag{17}$$

$$F_7 = \sin(\pi \cdot x^{4.9773}) \tag{18}$$

$$F_8 = \sin(\pi \cdot x^{11.2023}) \tag{19}$$

The initial setup of the genetic algorithm was based on the NACA 64A415 airfoil, which has appeared, in a preliminary analysis, as the best airfoil in a database of more than 10^3 airfoils, regarding the established fitness function. The algorithm was run until convergence was achieved, and then it was re-initialized with the new airfoil, so the modifying process could be redone. This iteration continued for four times, and improvements in the order of 50% could be found, with a final count of approximately 10^4 different airfoil evaluations.

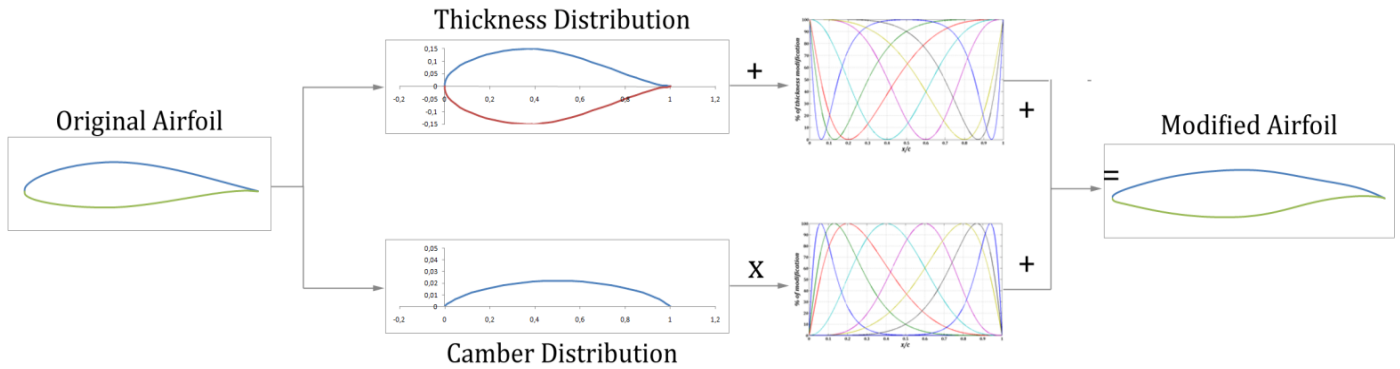


Figure 6 – Breakdown of the process of Parametric Airfoil Modification

4.2.2 Levenberg-Marquardt Algorithm

In spite of the discontinuities, non-convergences and local minima that can greatly affect the final results, this method has proven quite efficient for touchups, when changes are small enough to avoid problems with inherent-to-the-problem discontinuities in the fitness function. Improvements in the order of 2% were achieved with this method. The main advantage of this algorithm is the number of iterations required for this improvement. While genetic algorithms created improved features in a quasi-stochastic manner, LM accelerated these modifications.

The improvements of this algorithm were mainly based on improving the camber position, so that the laminar-turbulent transition could be retarded (Schlichting, 1955), thus reducing drag. Some changes in the leading edge radius and maximum thickness position could improve the effect cited above.

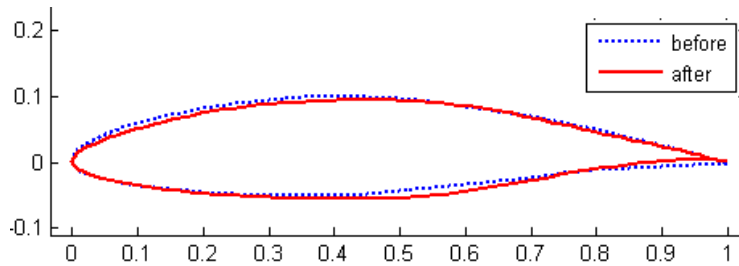


Figure 7 - Airfoil before and after passing the LM algorithm

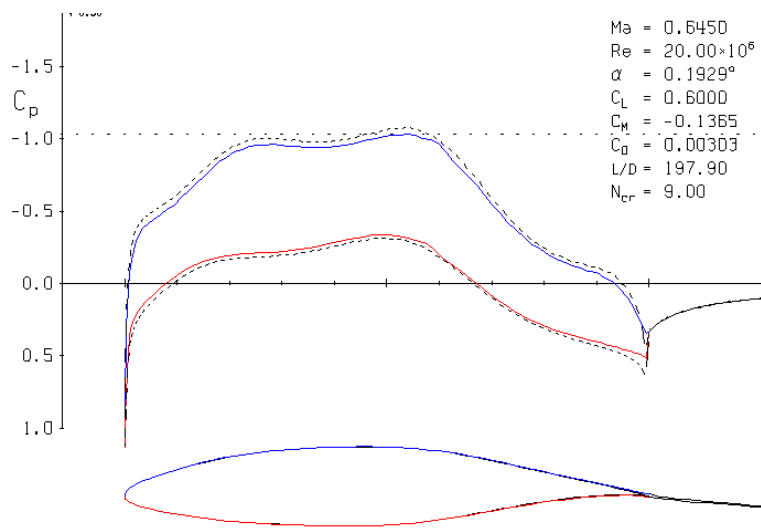


Figure 8 - Pressure distribution for $C_L=0.6$

From Figure 8, it is possible to infer that the algorithms heads toward a flat pressure distribution from 20% to 60% of the chord, both on the upper and on the lower surface.

4.2.3 Simulated annealing Algorithm

The airfoil obtained with Levenberg-Marquardt algorithm was then submitted to the simulated annealing technique. As LM just changed geometric parameters, the simulated annealing code was conceived especially to change directly the pressure distribution, giving the airfoil its final shape. The results were fairly satisfactory given that some improvement could be achieved with little iteration (producing improvements of 12% in less than 50 iterations.).

After the initial changes, some results proved to be result of XFOil imprecision on calculations. A closer look on the process revealed that direct modifications in the pressure distribution created numerical instability in XFOil. An austere version of the XFOil post-processing routine was needed. The new routine calculated the same airfoil three times, each with random panel refinements and compared the results, if the error was above 1% the routine was repeated up to three times, so that the results could be trusted.

An interesting characteristic produced by this method is the unusual shape of the airfoil near its trailing edge.

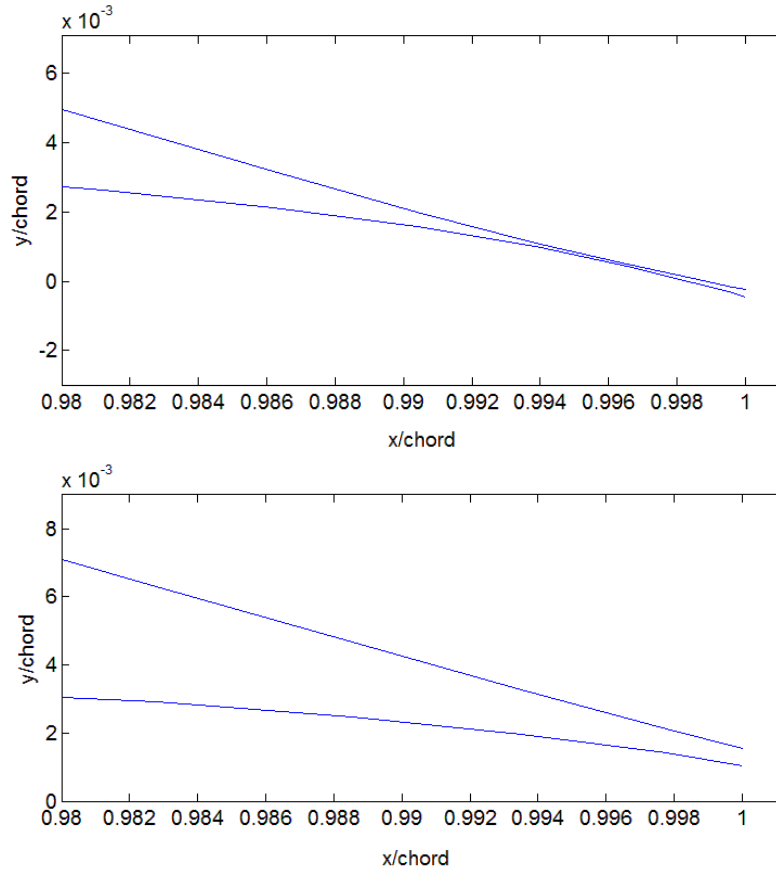


Figure 9 - Trailing edge device (above) and trailing edge with device omitted (below)

This geometry is a result of cumulative changes in the pressure distribution made by the algorithm. Its size (less than 1% of the chord) masks its importance in the optimization. This shape can affect greatly the angle of attack needed for a given C_L , it affects the pressure distribution and can retard the laminar-turbulent transition. If this geometry is omitted, the performance of the airfoil sharply drops about 5%. Some changes in the geometry were tried, with no success for this airfoil, but with a great potential for adjusting the laminar bucket position in other laminar airfoils.

The accumulated changes in the airfoils also produced bumps that needed to be smoothed between iterations so that convergence could be improved.

The evolution of the airfoils performance is shown below:

Table 1 - Evolution of the Airfoil Fitness

Airfoil	Mcr	F1	F2	Fitness
Original Airfoil (NACA 64A415)	0,631	14,23	315,80	4493,83
First Iteration - Parametric Genetic Optimization	0,647	14,85	358,92	5329,96
Second Iteration - Parametric Genetic Optimization	0,649	13,12	419,84	5508,30
Third Iteration - Parametric Genetic Optimization	0,655	13,37	435,27	5819,56
Fourth Iteration - Parametric Genetic Optimization	0,661	12,87	520,81	6702,81
Optimized Airfoil without trailing edge device Levenberg-Marquardt Algorithm	0,669	12,94	571,84	7399,61
Optimized Airfoil with trailing edge device Simulated Annealing Technique	0,668	13,07	574,38	7507,15

Confirming the tendency of flattening the pressure distribution, the final airfoil presents a very flat C_p near $C_L=0.6$, as shown in Figure 10

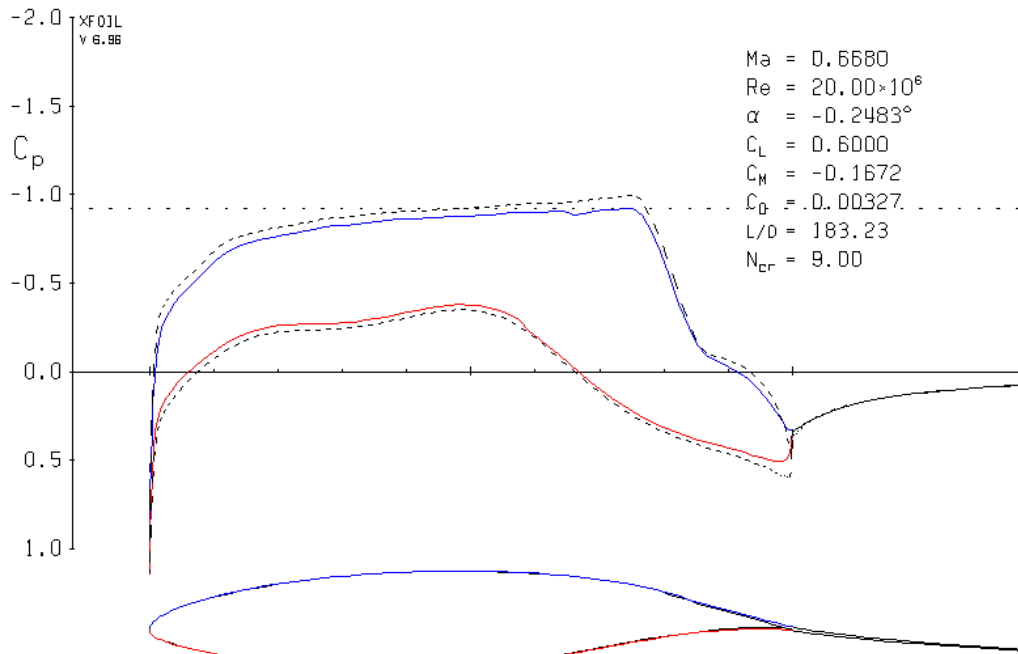


Figure 10 - Pressure distribution of the optimized airfoil

The behavior of the boundary layer, as expected by the characteristics of the pressure distribution, is predominantly laminar in a reasonable part of the airfoil that is a solution for minimizing the drag, as can be seen in Figure 11, a plot of the transition point versus lift coefficient:

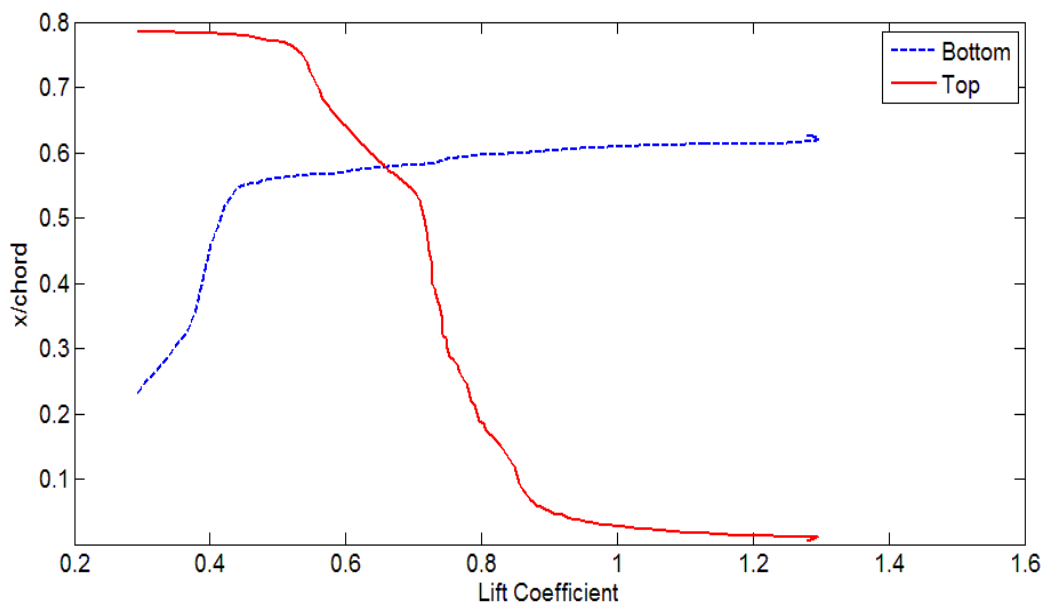


Figure 11 - Transition point versus lift coefficient of the optimized airfoil

The transition point on the upper surface is near 80% of the chord up to lift coefficients between 0.5 and 0.6, which is a very good behavior for a laminar airfoil. This characteristic is dominant from very early stages of the genetic algorithm, showing that

the fitness is improved mainly with drag reduction. A quite surprising point is the reduction of drag (given a lift coefficient) when Mach number is increased. This can be caused by the changes in pressure due to compressibility corrections, bringing the transition point aft. Actually, by analyzing the polar curve of the airfoil:

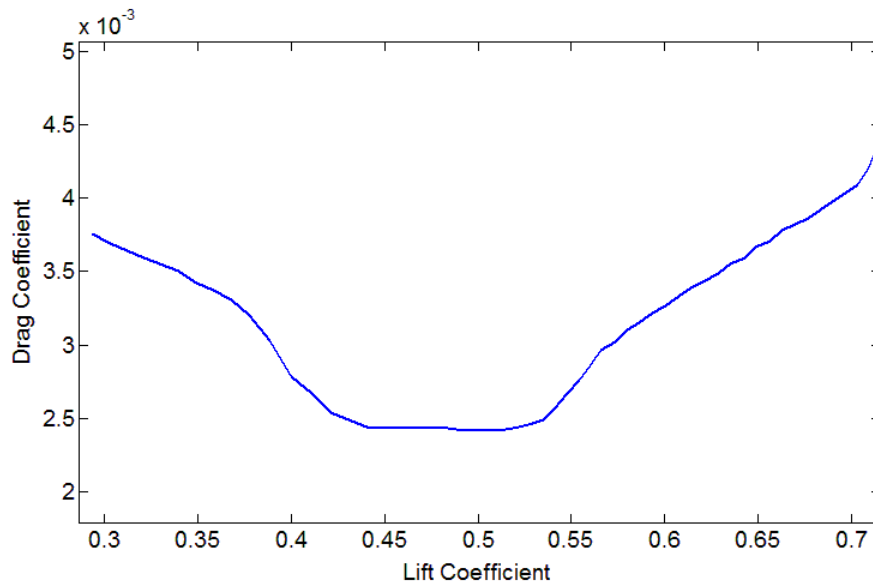


Figure 12 - Polar curve of the airfoil at $M_{Critical}$

One can see the preeminent laminar bucket on the region defined by F_1 . This characteristic too appeared early in genetic optimization, but the simulated annealing algorithm fine tuned the placement of the bucket, so that the fitness could be maximized. Another important point is the width of the laminar bucket that probably can be changed to some degree, according to the fitness function.

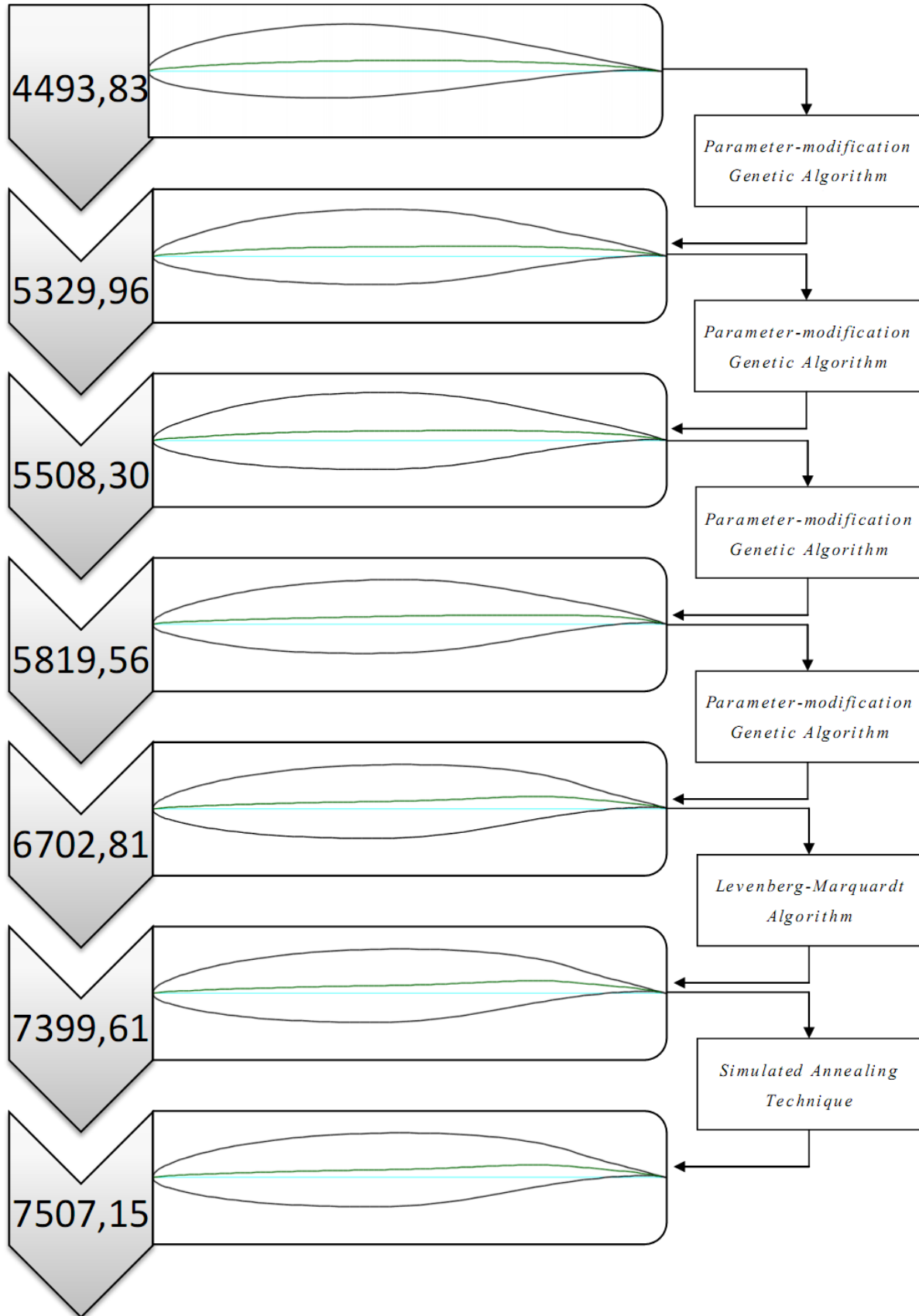


Figure 13 - Airfoil Optimization: Sequence of Results

5 CONCLUSIONS

The optimization results were fairly satisfactory and are likely to generate a class of reasonable airfoils for regional jets. Some specificities of each project, however, must be considered before the airfoil can be implemented, and some validation of the results using wind tunnels is highly recommended.

Perhaps, the most important result of this work is the analysis of several airfoil optimization techniques, which may also be employed for wing and aircraft optimization as a whole, given an efficient and representative parameterization.

A proposal for classifying the algorithms is based on the variations it can implement. Genetic algorithms using modification functions can be used either to choose better airfoils for refined optimization methods discussed above, or to validate the concept of the fitness function. A procedure for optimization is suggested:

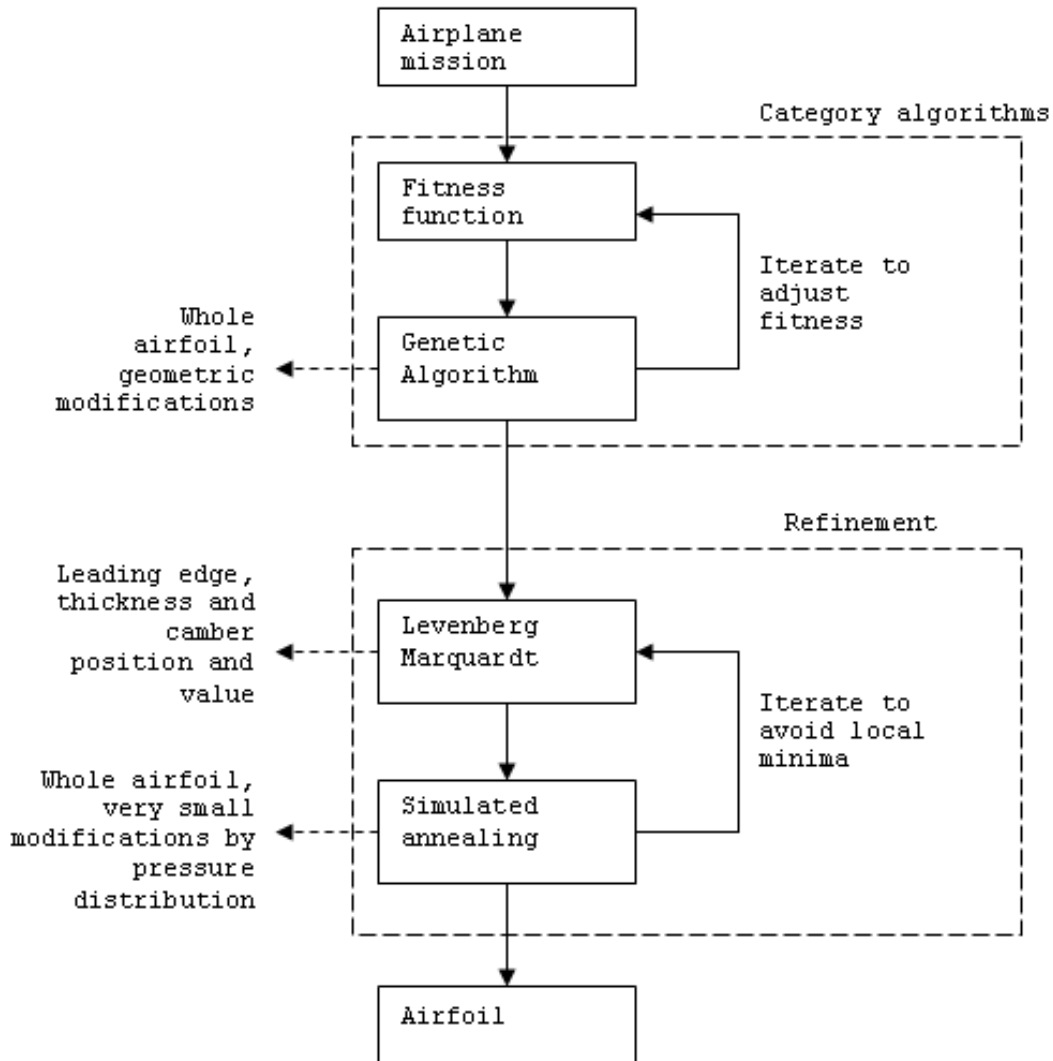


Figure 14 - Proposed optimization procedure

The algorithms themselves are of secondary importance for this very problem, their choice in this work can even be contested, but were adopted owing to ease of implementation and, sometimes, iteration speed. However, the procedure as a whole, with the guidelines on where to make changes, appears to be valid, and is then recommended by the authors.

6 REFERENCES

1. **Raymer, Daniel P.** *Enhancing Aircraft Conceptual Design Using Multidisciplinary Optimization*. Department of Aeronautics, Kungliga Tekniska Högskolan - Royal Institute of Technology. 2002. Doctoral Thesis.
2. **Lissys Ltd.** *PIANO - Project Interactive Analysis and Optimization*.
3. **DARCorporation Ltd.** *Advanced Aircraft Analysis*.
4. **Raymer, Daniel P.** *RDS Aircraft Design and Analysis*.
5. **Lissys Ltd.** *PIANO - Project Interactive Analysis and Optimisation*.
6. **Bernstein, Alexander V., et al.** Fast Aerodynamic Model for Design Technology. *West-East High Speed Flow Field Conference*. 2007.
7. **Désidéri, Jean-Antoine and Janka, Ales.** Multilevel Shape Parametrization for Aerodynamic Optimization - Application to Drag and Noise Reduction of Transonic/Supersonic Business Jet. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. 2004.
8. **Martínez-Val, Rodrigo and Pérez, Emilio.** Teaching Airplane Design: A Multi-Level Approach. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 1996.
9. **Regis, André Luiz Delegado and Mattos, Bento Silva de.** Wing Structural Weight Evolution with the Cruise Mach Number of a Commercial Transport Aircraft. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 2004.
10. **Rodriguez, David L. and Sturdza, Peter.** A Rapid Geometry Engine for Preliminary Aircraft Design. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 2006.
11. **Zipfel, Peter H.** *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. s.l. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2000. ISBN 1 56347 456 5.
12. **Raymer, D. P.** *Aircraft Design: A Conceptual Approach*. s.l. : AIAA Educational Series, 2002.
13. **Wintzer, Mathias, Sturdza, Peter and Kroo, Ilan.** Conceptual Design of Conventional and Oblique Wing Configurations for Small Supersonic Aircraft. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 2006.
14. **Torenbeek, E.** *Synthesis of Subsonic Airplane Design*. s.l. : Kluwer Academic Publishers, 1982.
15. **Drela, Mark.** *XFOIL 6.24 Software Manual*.
16. **Benson, Tom.** *EngineSim 1.7a Software Manual*. s.l. : NASA Glenn Research Center.
17. **Federal Aviation Administration.** *Federal Aviation Regulations - Part 25 - Airworthiness Standarts: Transport Category Airplanes*. 2008.
18. **Lyrio, J Allan Antunes, et al.** Wing and Airfoil Optimized Design of Transport Aircraft. *11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT 2006*. 2006.
19. **Lutz, Th., Würz, W. and Wagner, S.** *Numerical Optimization and Wing Tunnel Testing of Low Reynolds Number Airfoil*. Institute for Aerodynamics and Gas Dynamics, University of Stuttgart. Stuttgart - Germany : s.n., 201.
20. **Oliveira, Rafael Fernandes, Abdalla, Álvaro Martins and Belo, Eduardo Morgado.** *Genetic Optimization Applied in Conceptual and Preliminary Aircraft Design*. s.l. : SAE Brasil, 2008. SAE 2008-36-0198.

7 RESPONSIBILITY NOTICE

The author(s) is (are) the only responsible for the printed material included in this paper.

SYMMETRY PRESERVING ADVECTIVE REGULARIZATION (SPAR) MODELLING OF TURBULENT FLOWS USING NON-STRUCTURED MESHES ON PARALLEL COMPUTERS

Oriol Lehmkuhl, oriol@cttc.upc.edu

Ricard Borell, ricarbd@cttc.upc.edu

Guillem Colomer, guillem@cttc.upc.edu

TermoFluids S.L. C/Magi Colet 8, 08204 Sabadell, Spain. e-mail: termofluids@yahoo.es

C.D. Pérez Segarra, segarra@cttc.upc.edu

Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC), Technical University of Catalonia, ETSEIAT. C/Colom 11, 08222 Terrassa, Spain. e-mail: cttc@cttc.upc.edu

***Abstract.** In the companion paper, a summary of the work carried out in Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC) in the area of DNS (Direct Numerical Simulation) is presented. This paper deals with the continuation along two different lines:*

- (i) Implementation of a parallel code for DNS-LES of turbulent flows using non-structured meshes. To do so, the symmetry preserving discretization formulation has been extended to non-structured collocated meshes and an efficient Poisson solver has been developed. The resulting code allows to solve problems up to 32 million nodes on a conventional PC cluster with 50 processors.*
- (ii) Implementation and extension of the SPAR method to non-structured meshes for the modelling of turbulent flows.*

Using this formulation and modelling, some numerical simulations of a circular cylinder flow for a Reynolds number of 3900 will be presented, together with a detailed validation using our numerical results and experimental results.

Keywords: DNS, parallel computing, Poisson equation, turbulence modelling of complex flows, unstructured non-dissipative discretization

1. INTRODUCTION

Traditionally turbulence modelling of industrial flows in complex geometries have been solved using RANS models and unstructured meshes based solvers. The lack of precision of RANS models in these situations and the increase of computer power together with the emergence of new high-efficiency sparse parallel algorithms, make the use of more accurate turbulent models such as Large Eddy Simulation models (LES) possible

LES models have been tested under cartesian and body-fitted discretization schemes and simplified boundary conditions. Unfortunately, these models have not been widely tested under complex 3D situations and the discretization of LES under unstructured meshes remains an open problem.

The most widely used LES model under unstructured meshes is the Smagorinsky model. In this model, the proportionality factor C_S in the SGS stresses is a constant value that must be specified priori to a simulation. The weak point of this model is that is not suitable to use a constant that is not really a single universal constant. This model is also always dissipative and cannot account for backscatter. Dynamics models, which are capable of removing some of drawbacks of the Smagorinsky model, are suitable alternatives. Under unstructured meshes, the weak point of Dynamics models is the numerical instability associated with the negative values and large variations of the C_S coefficient. Traditionally to avoid numerical instabilities, spatial averaging in homogeneous directions are performed on C_S . This is not possible under complex geometries.

Recently, relevant improvements on turbulence modelling based on symmetry-preserving regularization models for the convective (non-linear) terms have been developed. They basically alter the convective terms to reduce the production of small scales of motion by means of vortex-stretching, preserving all inviscid invariants exactly. To do so, symmetries and conservation properties of the convective terms are exactly preserved. This requirement yields a novel class of regularizations that restrain the convective production of smaller and smaller scales of motion by means of vortex stretching in an unconditional stable manner, meaning that the velocity can not blow up in the energy-norm (in 2D also: enstrophy-norm). The numerical algorithm used to solve the governing equations must also preserve the symmetry and conservation properties too. Up to now, they have been successfully tested for a differentially heated cavity at high Rayleigh (Ra) numbers using staggered meshes [Trias et al., 2006a]. At this stage, results using regularization models in relatively com-

plex geometries under general unstructured meshes are of extreme importance for further progress. The main idea behind this is to assess the validity of turbulence models in more realistic configurations, understand their limitations and finally improve them. Therefore, this is really a crucial issue since turbulence modelling is an essential tool for engineering applications.

The paper is organised as follows. In section 2, we present a symmetry preserving discretization of Navier Stokes equations on general unstructured meshes. Some direct algorithms for the solution of Poisson equation on Parallel computers are presented and tested in section 3. In section 4, the symmetry preserving advective regularization modelling, our choice of the filter, and numerical discretization are explained. The results are discussed in section 5.

2. SYMMETRY PRESERVING DISCRETIZATION OF NAVIER-STOKES EQUATION ON GENERAL UNSTRUCTURED MESHES

2.1 Discrete Navier-Stokes equations

The finite volume discretization of the Navier-Stokes and continuity equations on an arbitrary mesh can be written as

$$\rho\Omega_s \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} + \mathbf{C}(\mathbf{u}_s) \mathbf{u}_s + \mathbf{D}\mathbf{u}_s + \Omega_s \mathbf{G}\mathbf{p}_c = \mathbf{0}_s \quad (1)$$

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_s = \mathbf{0}_c \quad (2)$$

where $\mathbf{u}_s \in \mathbb{R}^m$ and $\mathbf{p}_c \in \mathbb{R}^n$ are the velocities vectors and pressure respectively. The matrix $\Omega_s \in \mathbb{R}^{m \times m}$ is a diagonal matrix of velocity cell control volumes. The matrices $\mathbf{C}(\mathbf{u}_s)$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ are the convective and diffusive operators respectively. Note the \mathbf{u}_s -dependence of the convective operator (non-linear operator). Finally, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ represents the discrete gradient operator, and the matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ is the divergence operator.

Up to now, no assumption about the grid (structured/unstructured) or the location (centred/staggered) of the discrete variables on such mesh have been considered yet. Hence, this discrete operator representation is generic and fits for almost all the existing spatial discretization based on a finite volume (finite differences and finite elements also) formulation.

The conservative nature of the Navier-Stokes equations is intimately tied up with the symmetries of the differential operators. In the following sections, we will see that retaining the symmetry properties of the continuous operators when discretizing equations is necessary in order to exactly conserve the inviscid invariants in a discrete sense. It is examined how such symmetries constrain the choice of the variable arrangement (staggered or collocated) and the operators discretization.

2.2 Kinetic energy conservation

The global discrete energy is defined as

$$\|\mathbf{u}_h\|^2 \equiv \mathbf{u}_h^* \Omega_h \mathbf{u}_h \quad (3)$$

The evolution equation of $\|\mathbf{u}_h\|^2$ can be obtained by left-multiplying Eq.(1) by \mathbf{u}_h^* and summing the resulting expression with its conjugate transpose

$$\rho\Omega_s \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_h\|^2 = -\mathbf{u}_h^* (\mathbf{C}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{C}^*(\mathbf{u}_h)) \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^* (\mathbf{D} + \mathbf{D}^*) \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^* \Omega_h \mathbf{G}_h \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_h^* \mathbf{G}_h^* \Omega_h \mathbf{u}_h \quad (4)$$

In absence of diffusion, that is $\mathbf{D} = 0$, the global kinetic energy $\|\mathbf{u}_h\|^2$ is conserved if both the convective and pressure terms vanish (for any \mathbf{u}_h , $\mathbf{M}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{0}_h$) in the discrete energy equation, i.e.,

$$\mathbf{u}_h^* (\mathbf{C}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{C}^*(\mathbf{u}_h)) \mathbf{u}_h = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_h^* \Omega_h \mathbf{G}_h \mathbf{p}_h + \mathbf{p}_h^* \mathbf{G}_h^* \Omega_h \mathbf{u}_h = 0 \quad (6)$$

These conservation properties are held if and only if the discrete convective operator is skew-symmetric and if the negative conjugate transpose of the discrete gradient operator is exactly equal to the divergence operator.

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}_h) = -\mathbf{C}^*(\mathbf{u}_h) \quad (7)$$

$$-(\Omega_h \mathbf{G}_h)^* = \mathbf{M}_h \quad (8)$$

Therefore, if the convective and gradient operators are properly chosen, the global kinetic energy equation (4) reduces to:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_h\|^2 = -\mathbf{u}_h^* (\mathbf{D} + \mathbf{D}^*) \mathbf{u}_h \quad (9)$$

As the diffusive terms must be strictly dissipative,

$$\mathbf{u}_h^* (\mathbf{D} + \mathbf{D}^*) \mathbf{u}_h \geq 0, \quad \forall \mathbf{u}_h \quad (10)$$

and, therefore, the diffusive operator, \mathbf{D} , must be symmetric and positive-definite.

2.3 Solving the pressure-velocity coupling. Checkerboard problem

In order to simplify the notation, spatially discrete momentum equation (1) can be rewritten as

$$\frac{d\mathbf{u}_c}{dt} = \mathbf{R}(\mathbf{u}_c) - \mathbf{G}_c \mathbf{p}_c \quad (11)$$

where $\mathbf{R}(\mathbf{u}_c)$ represents the right-hand-side terms of the momentum equation except for the pressure gradient,

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_c) \equiv -\mathbf{C}(\mathbf{u}_s) \mathbf{u}_c - \mathbf{D}\mathbf{u}_c \quad (12)$$

For the temporal discretization, a central difference scheme is used for the time derivative term, a fully explicit second-order one-leg scheme [Verstappen and Veldman, 2003] for $\mathbf{R}(\mathbf{u}_c)$ and a first-order backward Euler scheme for the pressure-gradient term. Incompressibility constraint is treated implicit. Thus, we obtain the fully-discretized Navier-Stokes equations

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_s^{n+1} = \mathbf{0} \quad (13)$$

$$\frac{(\beta + 1/2) \mathbf{u}_c^{n+1} - 2\beta \mathbf{u}_c^n + (\beta - 1/2) \mathbf{u}_c^{n-1}}{\Delta t} = \mathbf{R}((1 + \beta) \mathbf{u}_c^n - \beta \mathbf{u}_c^{n-1}) - \mathbf{G}_c \mathbf{p}_c^{n+1} \quad (14)$$

where the parameter β is computed each time-step to adapt the linear stability domain of the time-integration scheme to the instantaneous flow conditions in order to use the maximum Δt possible. For further details about the time-integration method, the reader is referred to [Trias et al., 2007].

To solve the velocity-pressure coupling, a classical fractional step projection method [Chorin, 1968, Yanenko, 1971] is used. In the projection methods, solutions of the unsteady Navier-Stokes equations are obtained by first time-advancing the velocity field \mathbf{u}_c without regard for its solenoidality constraint (13), then recovering the proper solenoidal velocity field, \mathbf{u}_c^{n+1} ($\mathbf{M}\mathbf{u}_s^{n+1} = \mathbf{0}$). This projection is derived from the Helmholtz-Hodge vector decomposition theorem [Chorin, 1993], whereby the velocity \mathbf{u}_s^{n+1} can be uniquely decomposed into a solenoidal vector, \mathbf{u}_s^p , and a curl-free vector, expressed as the gradient of a scalar field, $\mathbf{G}\mathbf{p}_c$. This decomposition is written as:

$$\mathbf{u}_s^p = \mathbf{u}_s^{n+1} + \mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}}_c \quad (15)$$

where $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{3n \times n}$ is the staggered gradient operator which is related with the divergence operator:

$$\mathbf{G} \equiv -\Omega_s^{-1} \mathbf{M}^* \quad (16)$$

and \mathbf{u}_s^p is related with the cell-centred predictor velocity \mathbf{u}_c^p via

$$\mathbf{u}_s^p = \Gamma_{c \rightarrow s} \mathbf{u}_c^p \quad (17)$$

which is subsequently given by:

$$\mathbf{u}_c^p = \frac{2\beta\mathbf{u}_c^n - (\beta - 1/2)\mathbf{u}_c^{n-1}}{\beta + 1/2} + \frac{\Delta t}{\beta + 1/2} \mathbf{R}((1 + \beta)\mathbf{u}_c^n - \beta\mathbf{u}_c^{n-1}) \quad (18)$$

and the pseudo-pressure is $\tilde{\mathbf{p}}_c = \Delta t / (\beta + 1/2) \mathbf{p}_c^{n+1}$. Taking the divergence of (15) yields a discrete Poisson equation for $\tilde{\mathbf{p}}_c$:

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_s^p = \mathbf{M}\mathbf{u}_s^{n+1} + \mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{p}_c^{n+1} \longrightarrow \mathbf{M}\mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}}_c = \mathbf{M}\mathbf{u}_s^p \quad (19)$$

Finally, using the definition of G (Eq. 16) previous equation becomes

$$\mathbf{L}\mathbf{p}_c = \mathbf{M}\mathbf{u}_s^p \quad (20)$$

where discrete laplacian operator $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is by construction a symmetric positive definite matrix

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{M}\Omega_s^{-1}\mathbf{M}^* \quad (21)$$

Once the solution is obtained, \mathbf{u}_s^{n+1} results from the correction

$$\mathbf{u}_s^{n+1} = \mathbf{u}_s^p - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}}_c \quad (22)$$

Finally, cell-centred velocity at the next time step, \mathbf{u}_c^{n+1} is related to \mathbf{u}_s^{n+1} via a linear shift interpolation

$$\mathbf{u}_c^{n+1} \equiv \Gamma_{s \rightarrow c} \mathbf{u}_s^{n+1} \quad (23)$$

using a linear shift transformation $\Gamma_{c \rightarrow s} \in \mathbb{R}^{3n \times m}$.

In summary, the algorithm for the integration of each time-step is:

1. Evaluate $\mathbf{R}((1 + \beta)\mathbf{u}_c^n - \beta\mathbf{u}_c^{n-1})$.
2. Evaluate the predictor velocity \mathbf{u}_s^p from Eq.(18, 15).
3. Evaluate $\mathbf{M}\mathbf{u}_s^p$ and solve the discrete Poisson (19) equation.
4. Obtain the new velocity field with Eq.(22).

It is well-known that due to stability reasons explicit temporal schemes introduce severe restrictions on the time-step, while implicit discretization would improve the overall stability. However, the use of implicit methods in turbulent flows using DNS gives computational costs rather high compared to those of explicit methods. This is because of the underlying restrictions to time-step that are required to fully resolve all temporal scales in the NS equations [Xin and Le Quéré, 1995, Soria et al., 2004, Verstappen and Veldman, 2003]. Therefore, we have only considered the explicit method in the view of the lower computational costs.

2.3.1 Constraints on the shift operator $\Gamma_{c \rightarrow s}$

According to previous expressions and staggered gradient definition (Eq. 16), cell-centred discrete gradient operator results

$$\mathbf{G}_c = \Gamma_{s \rightarrow c} \Omega_s^{-1} \mathbf{M}^* \quad (24)$$

Therefore, face-to-cell shift operator $\Gamma_{s \rightarrow c}$ is restricted by (16)

$$(\Omega_{3c} \Gamma_{s \rightarrow c} \Omega_s^{-1} \mathbf{M}^*)^* = \mathbf{M} \Gamma_{c \rightarrow s} \longrightarrow \Gamma_{s \rightarrow c} = \Omega_{3c}^{-1} \Gamma_{c \rightarrow s}^* \Omega_s \quad (25)$$

2.3.2 How the cell-center predictor velocity \mathbf{u}_c^p is corrected. Origin of checkerboard problem.

Once the cell-center predictor velocity field is calculated by (18)

$$\mathbf{u}_c^{n+1} = \mathbf{u}_c^p - \Gamma_{s \rightarrow c} \Omega_s^{-1} \mathbf{M}^* \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M} \Gamma_{c \rightarrow s} \mathbf{u}_c^p \quad (26)$$

introducing definition of face-to-cell operator (25)

$$\mathbf{u}_c^{n+1} = \mathbf{u}_c^p - \Omega_{3c}^{-1} \Gamma_{c \rightarrow s}^* \mathbf{M}^* \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M} \Gamma_{c \rightarrow s} \mathbf{u}_c^p \quad (27)$$

$$= (\mathbf{I} - \Omega_{3c}^{-1} \mathbf{P}) \mathbf{u}_c^p \quad (28)$$

where matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ is, by construction, symmetric positive definite.

The origin of checkerboard problem is related with the unrealistic components of cell-centred velocity field which projection matrix cannot eliminate,

$$\mathbf{u}_c^{CB} = (\mathbf{I} - \Omega_{3c}^{-1} \mathbf{P}) \mathbf{u}_c^{CB} \quad (29)$$

that means that \mathbf{u}_c^{CB} lies in the kernel of \mathbf{P} matrix

$$\mathbf{u}_c^{CB} \in \text{Ker}(\mathbf{P}) \quad (30)$$

Hence, those velocity components that lie on the kernel of matrix \mathbf{P} cannot be corrected. The most common way to tackle this problem is to slightly modify matrix \mathbf{P} . Such modifications are generally introduced in the divergence operator \mathbf{M} as in the traditionally used Rhie and Chow [Rhie and Chow, 1983]. Our approach is to change the equation (24) with a Least Squares gradient reconstruction method. Doing so, the properties of matrix \mathbf{P} are slightly changed and the system is conditioned without any modification in the convective operator like in the Rhie and Chow technique [Rhie and Chow, 1983].

3. EFFICIENTS DIRECT ALGORITHMS FOR THE SOLUTION OF POISSON EQUATION USING GENERAL UNSTRUCTURED MESHES ON PARALLEL COMPUTERS

On the context of the time-accurate LES and DNS simulations, the Poisson equation which arises from the incompressibility constraint, which has to be solved at least once at each time step, is usually the main bottleneck from a parallel point of view. In these circumstances, it is important to use efficient and scalable algorithms for the solution of the Poisson equation on a wide range of parallel systems.

There are different factors that can affect the efficiency of a parallel algorithm. However, considering the limited communication capacity of PC clusters, one of the major factors that contributes to the degradation of the efficiency of the parallel implementation is the overhead due to the exchange of data among the different processors.

In order to overcome this problem, some variants of the Schur complement algorithm to unstructured meshes and general sparse matrices have been developed. The algorithm can be divided in two parts: setup and solve. If the matrix system does not change, the setup does not have to be repeated when the rhs changes. In the numerical algorithm used to solve the pressure-velocity coupling (section 2.3), the Poisson equation remains constant from one iteration to another, only the right hand term (rht) changes. Commonly the number of time steps is very large, therefore it is suitable to spend long time on the setup process if the solve time is reduced.

As a result of the discretization, the linear system of equations to be solved is:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (31)$$

where \mathbf{A} is an $n \times n$ sparse matrix, symmetric and positive definite.

It is necessary to divide the problem into p parts, being p the number of processors used on the iterations. A partition of the unknowns set \mathcal{Y} is carried out. After this process an unknowns subset \mathcal{Y}_i , called *local* unknowns, and the corresponding equations are assigned to each processor. Some equations may link variables of different processors making exchange of data between them necessary.

A good distribution of data between processors is a crucial point for the efficiency of the parallel algorithms. Some characteristics that are required for the partition are: 1) similar size of the partition elements $\mathcal{Y}_0, \dots, \mathcal{Y}_{p-1}$ to ensure load balance; 2) minimum size of communication load. The partition is carried out by means of a graph partitioner such as METIS [G.Karypis and V.Kumar, 1998] applied to the adjacency graph of matrix \mathbf{A} . METIS minimises the communication costs (edge-cuts) and balances the computational load (number of vertices for subgraph).

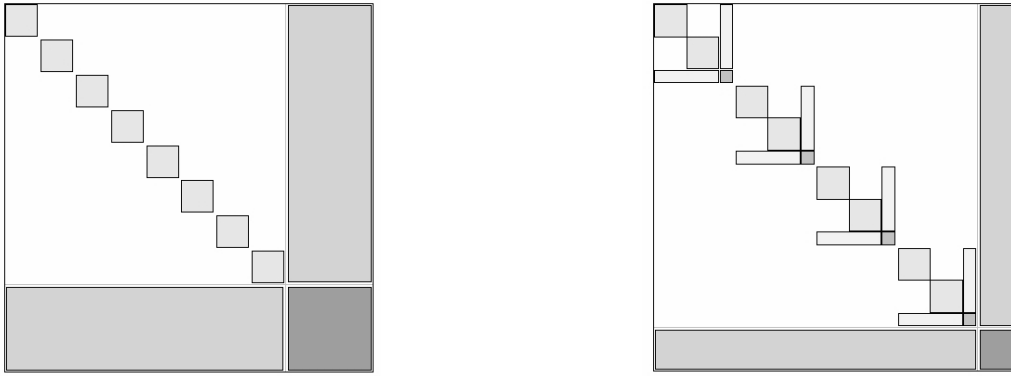


Figure 1. Left: Block distribution of system matrix after Schur Decomposition reordering. Right: Block distribution of system matrix after 2-level Schur Decomposition reordering.

3.1 Schur Complement Decomposition

The main idea of Schur complement methods is to decompose the initial system of equations into *internal* and *interface* systems, verifying that the internal equations do not link variables of different processors. As a consequence, the internal equations are separated from the distributed system and solved by each processor independently.

First of all, a set of independent subsets of unknowns is evaluated $\mathcal{D} := \{\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_{p-1}\}$. This means that any variables of two different subsets are not coupled by the system equations. The unknowns belonging to these subsets are here named *internal* variables $\mathcal{U} := \bigcup_{i \in \{0, \dots, p-1\}} \mathcal{U}_i$. If \mathcal{D} was a partition of the unknowns set the system is diagonalisable by blocks. However, in general a subset of unknowns, named *interface* unknowns \mathcal{S} , is necessary to decouple the internal subsets.

There are different options to choose the internal and interface sets. One option is to determine the interface variables as the local variables that are coupled with variables of other processors. This option is convenient because the interface can be determined locally by each processor, but the global size of the interface set is not minimal. In this work it is tried to reduce the global size of interface variables in order to reduce the complexity of the interface system. A partition $\{\mathcal{Y}_0, \dots, \mathcal{Y}_{p-1}\}$ of the unknowns set is computed using a software such as METIS. Then, if two variables of different processors are coupled the variable that belongs to the processor of higher rang is fixed as interface variable, while the other is maintained as internal variable. After this process each processor has a subset of interface variables \mathcal{S}_i and internal variables \mathcal{U}_i , $\mathcal{Y}_i = \mathcal{S}_i \sqcup \mathcal{U}_i$, and each internal set is uncoupled form the others. However, the sizes of the interface subsets $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_{p-1}$ can be very different. Thus, it has been developed an algorithm to balance the interface variables. The main step of this algorithm is switch an interface variable of one processor to internal variable and the variables of other processors couplet with this to interface variables.

Therefore, reordering the variables in a proper way the system matrix has the following block structure (see left part of Fig. (1)):

$$\begin{bmatrix} A_{\mathcal{U}_0} & 0 & \cdots & 0 & F_{\mathcal{U}_0} \\ 0 & A_{\mathcal{U}_1} & \cdots & 0 & F_{\mathcal{U}_1} \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{\mathcal{U}_{p-1}} & F_{\mathcal{U}_{p-1}} \\ E_{\mathcal{U}_0} & E_{\mathcal{U}_1} & \cdots & E_{\mathcal{U}_{p-1}} & A_{\mathcal{S}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{U}_0} \\ x_{\mathcal{U}_1} \\ \vdots \\ x_{\mathcal{U}_{p-1}} \\ x_{\mathcal{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{\mathcal{U}_0} \\ b_{\mathcal{U}_1} \\ \vdots \\ b_{\mathcal{U}_{p-1}} \\ b_{\mathcal{S}} \end{bmatrix} \quad (32)$$

where $A_{\mathcal{K}}$ are the linear dependences between variables in the set \mathcal{K} , $F_i \in \mathcal{U}_i \times \mathcal{S}$ the linear dependences between internal and interface variables and $E_{\mathcal{U}_i} = F_{\mathcal{U}_i}^T$. Gaussian elimination is applied to (32) and the *Schur Complement* matrix is derived:

$$C = A_{\mathcal{S}} - \sum_{i=0}^{p-1} E_{\mathcal{U}_i} A_{\mathcal{U}_i}^{-1} F_{\mathcal{U}_i} \quad (33)$$

On the solution stage the internal systems are solved twice: the first time to obtain the new rht for the interface variables $b'_{\mathcal{S}} = b_{\mathcal{S}} - \sum_{i=0}^{p-1} E_{\mathcal{U}_i} A_{\mathcal{U}_i}^{-1} b_{\mathcal{U}_i}$, and the second time, after the Schur complement system $Cx_{\mathcal{S}} = b'_{\mathcal{S}}$ is solved, to obtain the inner values $A_{\mathcal{U}_i} x_{\mathcal{U}_i} = b_{\mathcal{U}_i} - F_{\mathcal{U}_i} \cdot x_{\mathcal{S}}$.

The different algorithms proposed are based on Schur complement decomposition methods depending on the solvers used for the interface and internal systems. In this paper sparse Cholesky factorisation is used for the internal systems

and, for the interface system, two options are used depending on the characteristics of the case: CG preconditioned via a Sparse Approximation of the Inverse (SAI) or a complete explicit evaluation of the inverse of Schur complement matrix. In the first option the solution method is direct for the internal variables and iterative for the interface variables, while the second option gives a totally direct method.

3.2 A multilevel approach

The principal restriction for the use of these methods with a large number of computers is the growth of the interface subset \mathcal{S} , and the *Schur Complement* system, when the number of computers is increased. On the other hand the *internal* variables size decreases with the number of processors. The main goal of this work is to reduce the load of the interface system to extend the use of the Direct Schur Decomposition Method to bigger systems and a larger number of processors. To do so, a multilevel approach is considered.

The multilevel decomposition is carried out using METIS software recursively. The *internal* and *interface* subsets obtained on the first decomposition are named $\mathcal{U}_{l_0} := \bigcup_{i \in \{0, \dots, p_{l_0}-1\}} \mathcal{U}_{l_0, i}$ and \mathcal{S}_{l_0} . On a second level, the subsets $\mathcal{U}_{l_0, i}$ are decomposed again and this process is continued up to the last level. The independent subsets obtained on the last level of decomposition are assigned one to each processor. Therefore, all processors have a subset of interior variables corresponding to the last level, and part of the interface variables of each level.

As an example, in the right part of Figure 1, it is represented the block structure of a two level decomposition, the *internal* subsets of the first level are decomposed into two subsets. The matrix system is:

$$\begin{bmatrix} A_{\mathcal{U}_{l_0,0}} & 0 & \cdots & 0 & F_{\mathcal{U}_{l_0,0}} \\ 0 & A_{\mathcal{U}_{l_0,1}} & \cdots & 0 & F_{\mathcal{U}_{l_0,1}} \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{\mathcal{U}_{l_0, \frac{p}{2}-1}} & F_{\mathcal{U}_{l_0, \frac{p}{2}-1}} \\ E_{\mathcal{U}_{l_0,0}} & E_{\mathcal{U}_{l_0,1}} & \cdots & E_{\mathcal{U}_{l_0, \frac{p}{2}-1}} & A_{\mathcal{S}_{l_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{U}_{l_0,0}} \\ x_{\mathcal{U}_{l_0,1}} \\ \vdots \\ x_{\mathcal{U}_{l_0, \frac{p}{2}-1}} \\ x_{\mathcal{S}_{l_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{\mathcal{U}_{l_0,0}} \\ b_{\mathcal{U}_{l_0,1}} \\ \vdots \\ b_{\mathcal{U}_{l_0, \frac{p}{2}-1}} \\ b_{\mathcal{S}_{l_0}} \end{bmatrix} \quad (34)$$

where

$$A_{\mathcal{U}_{l_0, i}} = \begin{bmatrix} A_{\mathcal{U}_{l_1, 2i}} & 0 & F_{\mathcal{U}_{l_1, 2i}} \\ 0 & A_{\mathcal{U}_{l_1, 2i+1}} & F_{\mathcal{U}_{l_1, 2i+1}} \\ E_{\mathcal{U}_{l_1, 2i}} & E_{\mathcal{U}_{l_1, 2i+1}} & A_{\mathcal{S}_{l_1, i}} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Gaussian Decomposition is applied to systems 34 and 35, and the following *Schur Complement* matrices are derived:

$$C_{\mathcal{U}_{l_0}} = A_{\mathcal{S}_{l_0}} - \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-1} E_{\mathcal{U}_{l_0, i}} A_{\mathcal{U}_{l_0, i}}^{-1} F_{\mathcal{U}_{l_0, i}} \quad C_{\mathcal{U}_{l_1}} = A_{\mathcal{S}_{l_1, i}} - \sum_{j=0}^1 E_{\mathcal{U}_{l_1, i, j}} A_{\mathcal{U}_{l_1, i, j}}^{-1} F_{\mathcal{U}_{l_1, i, j}} \quad (36)$$

As it is described on the previous section, the *internal* systems of the first level, with matrices $A_{\mathcal{U}_{l_0, i}}$ are solved twice. These systems are decomposed in an other level, so this implies that the *internal* systems and the *Schur Complement* systems of the second level, with matrices $A_{\mathcal{S}_{l_1, i}}$ and $C_{\mathcal{U}_{l_1}}$, are solved four times and two times respectively.

3.3 Fourier-Schur decomposition

When, as in the simulation of a flow around cylinder, the domain of the problem is constructed by the extrusion of a 2-dimensional geometry, if the mesh has a uniform step on the spanwise direction and periodic boundary conditions are used, Fourier diagonalization can be applied to the initial matrix. As a result of this, the problem is decoupled by planes. This reduces dramatically the RAM memory requirements and the arithmetical complexity of the algorithm.

The parallelisation is done on two-levels. On the spanwise direction by partitioning the set of planes [Trias et al., 2006b], and on each plane using parallel Schur decomposition method to obtain a solution. After Fourier diagonalization, the matrices of the planes have the same sparcity pattern, in fact they only differ on the diagonal elements. Thus, the pattern of the processors communication episodes on the solution of each plane are equal so they can be carried out together. This improves the speed up of the algorithm because on the same communication episode data for different planes is transferred at the same time.

In figure 2, the speed up for Direct Schur and Fourier-Schur decomposition solvers is presented. The systems solved are the velocity coupling Poisson equation (section 2.3), discretized in a 1 million triangular cells 2D mesh, and the same mesh extruded on 16 planes. These tests have been performed in JFF cluster, in the CTTC center. The components of this cluster are: Intel Core2 Duo E6700 (2'67 Ghz) nodes linked with a 1 Gb/s Ethernet. The results show that grouping the communication episodes of the different planes improves highly the speed up of the method.

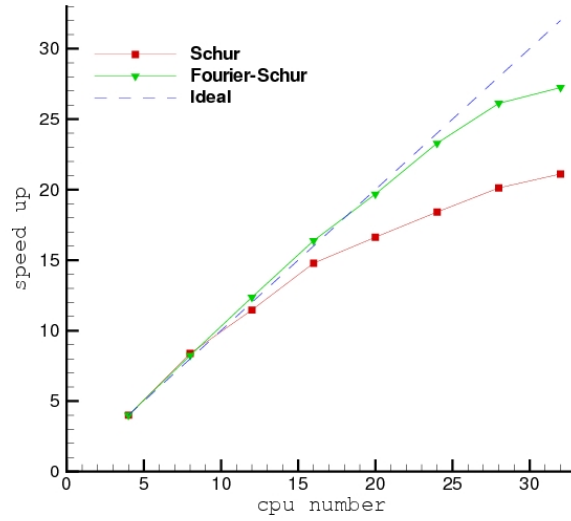


Figure 2. Speed up for Schur and Fourier-Schur solvers in a 2-dimensional 1 million mesh and a 16 million extruded mesh respectively

4. SYMMETRY PRESERVING ADVECTIVE REGULARIZATION MODELLING OF TURBULENT FLOWS ON GENERAL UNSTRUCTURED MESHES

In the quest for a correct modelling of Navier Stokes equations, they can be filtered spatially as in Large Eddy Simulation (LES). Doing so, the filtered non-linear convective term must be modelled,

$$\rho\Omega_s \frac{d\overline{\mathbf{u}}_s}{dt} + \mathbf{C}(\overline{\mathbf{u}}_s) \overline{\mathbf{u}}_s + \mathbf{D}\overline{\mathbf{u}}_s + \mathbf{G}\overline{\mathbf{p}}_c = \mathbf{C}(\overline{\mathbf{u}}_s) \overline{\mathbf{u}}_s - \overline{\mathbf{C}(\mathbf{u}_s) \mathbf{u}_s} \approx model(\overline{\mathbf{u}}_s) \quad (37)$$

where the filtered velocity is denoted by $\overline{\mathbf{u}}_s$. An appropriate model is hard to accomplish for several reasons. In practice, closure models are often based on phenomenological arguments that cannot be derived formally from the Navier Stokes equations. As a result, this methodology usually has severe numerical instabilities (these difficulties are more relevant under non-structured discretization), and is not the best alternative for turbulence modelling of engineering applications.

Recently, relevant improvements on turbulence modelling based on symmetry-preserving regularization models for the convective ($model(\overline{\mathbf{u}}_s)$ in Eq. (37)) term have been developed. They basically alter the convective terms to reduce the production of small scales of motion by means of vortex-stretching preserving all inviscid invariants exactly. To do so, symmetries and conservation properties of the convective terms are exactly preserved. This requirement yields a novel class of regularizations that restrain the convective production of smaller and smaller scales of motion by means of vortex stretching in an unconditional stable manner, meaning that the velocity can not blow up in the energy-norm (in 2D also: enstrophy-norm). Up to now, they have been successfully tested for a channel flow at different Reynolds numbers [Verstappen, 2007] and a differentially heated cavity at high Rayleigh numbers [Trias et al., 2006a] using staggered meshes. As a first step in application of the symmetry preserving advective regularization modelling under unstructured and collocated meshes, the approximation C4 is tested for a flow over a circular cylinder at $Re = 3900$ (see section 5).

4.1 \mathcal{C}_4 Regularization modelling

In general, Eq. (37) relates the approximation given by the regularization modelling (see Eq. (39)) one-to-one to LES-models if the filter is invertible. The approximation \mathcal{C}_n may be seen in relationship to the approximate deconvolution method. If argument u of $\overline{\mathcal{C}}(u, u)$ is replaced by the following approximate deconvolution of the filtered velocity field: $\hat{u} = \hat{F}^{-1}\overline{u} \approx u$, where \hat{F}^{-1} approximates the inverse of the filter $Fu = \overline{u}$. The approximate of the inverse can be constructed by truncating the formal series expansion of the inverse. In our case,

$$\rho\Omega_s \frac{d\hat{u}}{dt} + \hat{F}^{-1}F\mathcal{C}(\hat{u}, \hat{u}) + \mathbf{D}\hat{u} + \Delta\hat{p} = 0 \quad (38)$$

if we take $\hat{u} = u$, $\hat{p} = p$, and $\mathcal{C}_n(u, u) = \hat{F}^{-1}FC(\hat{u}, \hat{u})$, it is mathematically evident that any direct modification of the convective term in the Navier-Stokes equation is implicitly related to an approximate deconvolution operator. From a physical point of view, however, not all, but only some modifications constitute a proper approximate model.

We restrict ourselves to the \mathcal{C}_4 approximation [Verstappen, 2007]: the convective term in the Navier-Stokes equations is then replaced by the following $\mathcal{O}(\Delta_k^4)$ -accurate smooth approximation $\mathcal{C}_4(u, v)$ given by

$$\mathcal{C}_4(u, v) = \mathcal{C}(\bar{u}, \bar{v}) + \overline{\mathcal{C}(\bar{u}, v')} + \overline{\mathcal{C}(u', \bar{v})} \quad (39)$$

where a prime indicates the residual of the filter, e.g. $u' = u - \bar{u}$ and $\overline{(\cdot)}$ represents a symmetric linear filter with filter length Δ_k . Two filters are used in conjunction with the \mathcal{C}_4 approximation: a differential Helmholtz filter and a second order Gaussian filter.

The first one, is based on the elliptic differential operator:

$$G^{-1}\bar{u} = (1 - \alpha_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2})\bar{u} = u \quad (40)$$

where G is the transfer function of the filter. Fixing α_k as an isotropic case ($\alpha_k = \alpha$), Eq. (40), becomes the inverse operator of the differential (or Helmholtz) filter, proposed by Germano [Germano, 1986]. The second filter is a nonuniform Laplace filter based in a Gaussian filter, which is always self-adjoint [Vreman, 2004]. The second term in the Taylor expansion of $G u$ for a Gaussian convolution filter is the Laplace operator [Germano, 1986]:

$$G u = (1 + \frac{1}{24} \frac{\partial}{\partial} (\Delta_k^2 \frac{\partial}{\partial x_k})) u = \bar{u} \quad (41)$$

This filter is normalised, conservative and also self-adjoint. Notice that both the elliptic filter and the gaussian filter, are discretized in an identical manner than the diffusive term in Navier-Stokes equations. In both filters the grid cutting length is evaluated using Deardorff's proposal [Sagaut, 2001]. This method is the most widely used today. It consists of evaluating the cutoff length as the cube root of the volume Ω of the filtering cell. Introducing the ratio $e = \Delta_k / \Delta_i$, where Δ_k is the filter cutoff length and Δ_i is the grid cutting length, our final turbulence model only contains one parameter (e). For further details about filters properties and how to construct them the reader is referred to [Vreman, 2004, Verstappen, 2007, Sagaut and Grohens, 1999].

5. FLOW AROUND A CIRCULAR CYLINDER AT $Re = 3900$

Flow around cylindrical structures is of relevance for many practical applications e.g. bridge piers, chimneys, towers, antennae, wires, etc. Knowledge about flow-related unsteady loading of such structures is crucial for hydro and aerodynamic control and design. Two-dimensional calculations have been routine for a long time and are often used to validate numerical techniques and computer codes. However, it has been recognised that at Reynolds numbers higher than 250, two-dimensional calculations yield incorrect values of flow parameters such as the drag coefficient or Strouhal number. Three-dimensional effects are important at these Reynolds numbers, and three dimensional calculations are needed for accurate predictions of flow statistics.

With the aim of a correct numerical validation of the presented formulation, some simulations of a flow past a circular cylinder for a Reynolds number of 3900 are presented, together with a detailed validation using experimental data from Lourenco and Shih [Kravchenko and Moin, 1996]. The computational domain to be simulated is a rectangular box of dimensions $[-4D, 20D], [-4D, 4D], [0, \pi D]$ with a circular cylinder of a diameter D at $(0, 0, 0)$. At the inflow $(u, v, w) = (1, 0, 0)$ is prescribed. Periodic boundary conditions are used for the spanwise direction, being Fourier used transformed in this direction. [Trias et al., 2006b]. At all other boundaries, pressure based conditions are used (outflow boundaries).

Two different grids are used to evaluate the accuracy of the symmetry preserving formulation. The first one is a coarse grid of 160.000 Control Volumes (CV) and the last one a medium sized grid of 1.5 M CV. In order to solve the Eq. 19 a Fourier decomposition method is used (see section 3.3). For the first case only 2 CPU's are used, in the last one 22 CPU's of the cluster JFF at the CTTC center are needed.

The study has been divided in two blocks. First, only the accuracy and stability of the symmetry preserving discretization under non-structured meshes are evaluated. To do so, two simulations using the coarse and fine grids have been carried out without the aid of regularization modelling. In the second part of the study, the accuracy of the regularization modelling is tested. For this case, only the coarse mesh is used.

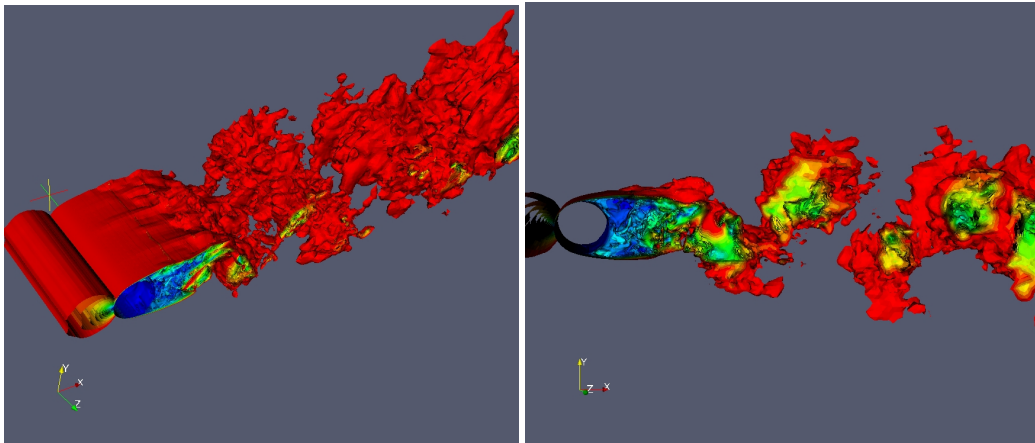


Figure 3. Instantaneous velocity magnitude ($\|\mathbf{u}\|/U_{inf}$) isosurfaces in the near wake of a flow over a circular cylinder: 15 countours from 0.9 to 0

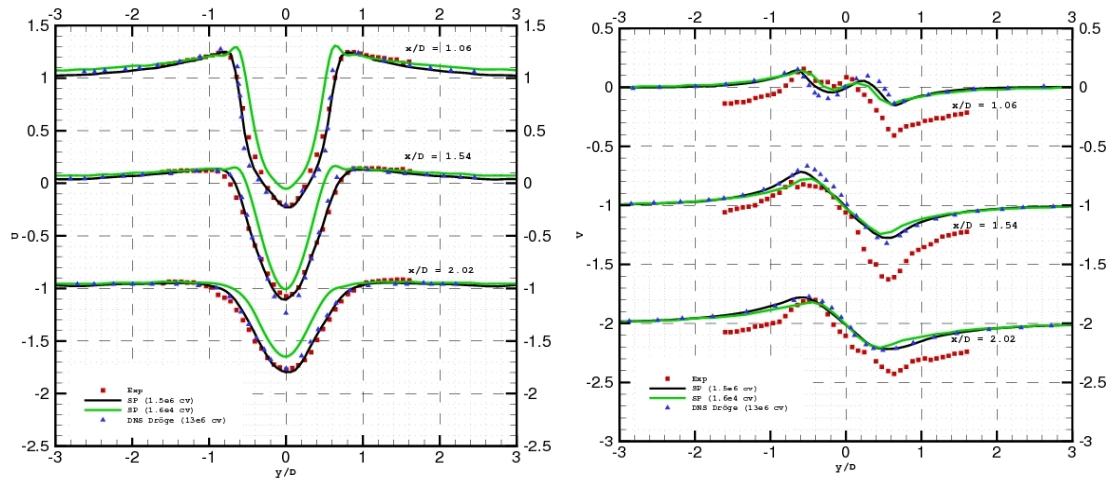


Figure 4. Streamwise velocity (Left) and cross-flow velocity (Right) at three locations in the wake of a circular cylinder.
 □: Experimental Data, ▲: DNS data, black line: fine mesh, green line: coarse mesh

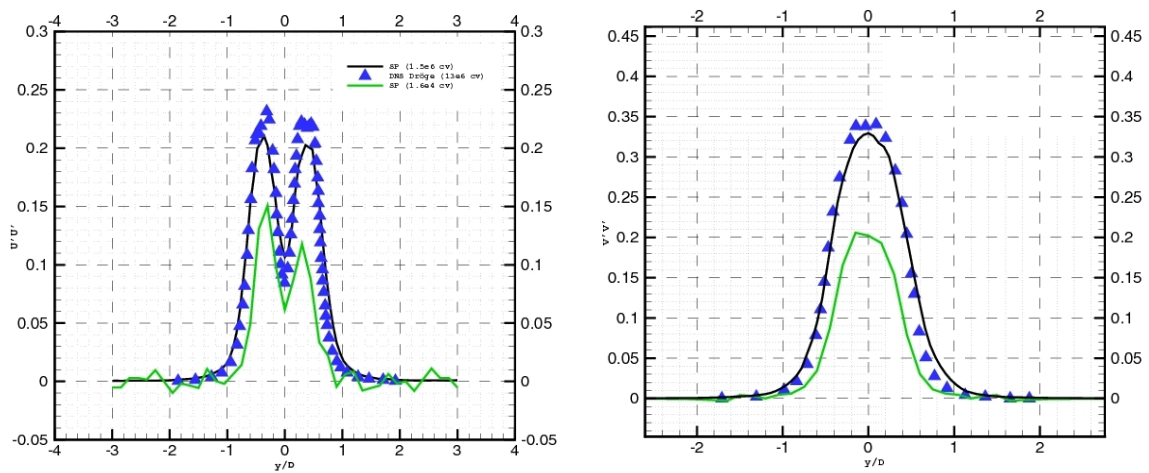


Figure 5. Comparison of the Reynolds stresses at 1.54D behind the cylinder. See the caption Fig. 4

5.1 Testing the symmetry preserving discretization

Coutours of instantaneous velocity magnitude ($\|\mathbf{u}\|/U_{inf}$) isosurfaces of the fine grid are shown in Fig. 3, where the development of the Karman vortex street can be clearly seen. The vortices arising from the instabilities of the shear layers mix in the primary Karman vortex before propagating downstream, which is consistent with the observations of Chyu and Rockwell [Chyu and Rockwall, 1996] in their PIV experiments and with numerical experiments from Kravchenko and Moin [Kravchenko and Moin, 1996].

In Fig. 4 streamwise velocity and cross-flow velocity at three different locations in the wake of a circular cylinder is plotted together with experimental data from Lourenco and Shih [Kravchenko and Moin, 1996] and DNS data from [Dröge, 2007]. Rather good agreement is obtained for the current results and the DNS data. Even for the simulation with the coarse mesh the results are reasonable good. It should be kept in mind that the used meshes are really coarse compared with the cutting cell mesh from the DNS simulation (which is over 13 M CV [Dröge, 2007]), and no SGS model is used.

The presented results all describe the mean flow, which is steady in the time. However, the variation of the flow is important and the Reynolds stresses are mostly used to quantify the fluctuations of the flow. In Fig. 5 some comparison of Reynolds stresses at 1.54D behind the cylinder between different meshes and the DNS data is showed. There is a good agreement with DNS data for the fine grid, but in this case the coarse does not perform well. It is important to remark that the results of the fine mesh (which is similar in size to the one used for LES simulations [Kravchenko and Moin, 1996]), are excellent taking into account that not SGS model is used.

5.2 Testing the regularization modelling

Two different simulation have been performed in order to test the regularization modelling on general unstructured meshes. The first one using the Gaussian filter (see Eq. 41) with a filter ratio $e = 1$, and the second one using the Helmholtz filter (see Eq. 40) with a filter ratio $e = 4$. As a first remark, we have observed that the stability of the Gaussian filter is restricted by the filter ratio, in this aspect the Helmholtz filter seems to be less dependent. This is the reason for the lower value of the filter ratio e used for the Gaussian filter.

In Fig. 6, streamwise velocity and cross-flow velocity at three different locations in the wake of a circular cylinder are plotted together with DNS data from [Dröge, 2007]. A good agreement with the reference data is observed for the simulation using the Helmholtz filter. The simulation using the Gaussian filter does not perform badly, but it seems to be in worst agreement than those with the Helmholtz filter. Second-order statistics are shown in Fig. 7. As in the first-order statistics, the simulation using the Helmholtz filter agree well with the reference data. But for this kind of statistics, the Gaussian filter seems to be inaccurate.

As a conclusion, the simulation using Helmholtz filter and the 160.000 CV mesh is in good agreement with DNS data from [Dröge, 2007]. These results are excellent taking into account that this case has been solved traditionally using 1.5-2.5 M CV meshes, e.g., the numerical studies by Kravchenko and Moin which were performed using a conventional Dynamic LES model [Kravchenko and Moin, 1996].

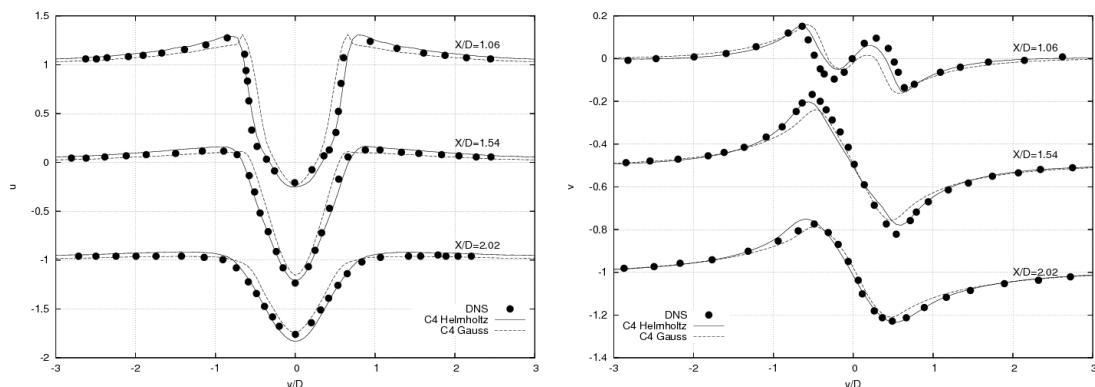


Figure 6. Streamwise velocity (Left) and cross-flow velocity (Right) at three locations in the wake of a circular cylinder. Comparison between DNS data and results from regularization modelling.

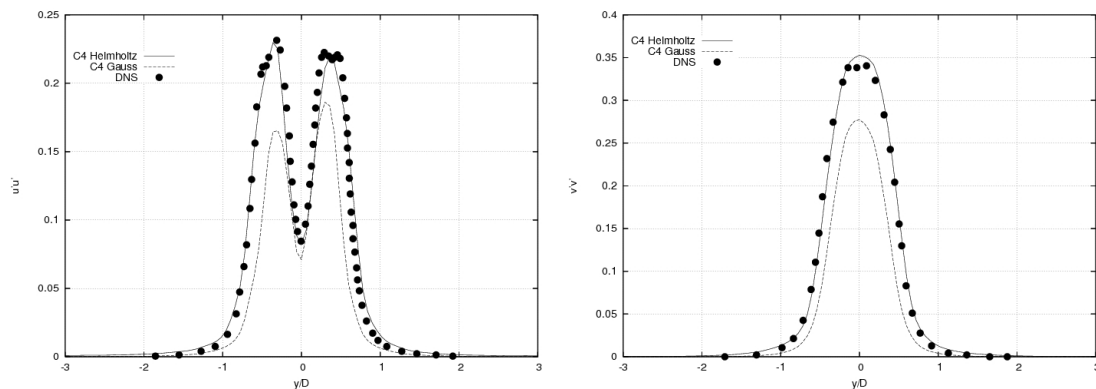


Figure 7. Comparison of the Reynolds stresses at 1.54D behind the cylinder

6. CONCLUSIONS

In this paper a numerical approach for an accurate simulation of Navier-Stokes equations under turbulent complex flows has been presented. As a first step, the symmetry preserving discretization methodology has been extended to non-structured meshes. In section 3, some direct algorithms for the solution of Poisson equation using parallel computers have been discussed and tested. After this, the regularization turbulence modelling has been described giving special attention to the different filters to be used. Finally, using this formulation and modelling, some numerical simulations of a circular cylinder flow for a Reynolds number of 3900 have also been presented. A detailed validation using our numerical results together with experimental and DNS results from the literature have been also presented. As a conclusion, overall good agreement between regularization modelling using a 160.000 CV mesh and reference data have been observed for both first- and second-order statistics.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been financially supported by the Ministerio de Educación y Ciencia, Secretaría de Estado de Universidad e Investigación, Spain (Research project ENE-2006-14247).

8. REFERENCES

- Chorin, A. J. (1968). Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 22:745–762.
- Chorin, A. J. (1993). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag.
- Chyu, C. K. and Rockwall, D. (1996). Near-wake structure of an oscillating cylinder: Effect of controlled shear-layer vortices. *J. Fluid Mech.*, 322:21.
- Dröge, M. (2007). *Cartesian Grid Methods for Turbulent Flow Simulation in Complex Geometries*. PhD thesis, University of Groningen, Department of Mathematics and Computing Science.
- Germano, M. (1986). Differential filters for large eddy numerical simulation of turbulent flows. *Physics of Fluids*, 29(6):1755–1758.
- G.Karypis and V.Kumar (1998). MeTIS: A software package for partitioning unstructured graphs, partitioning meshes and computing fill-reducing ordering of sparse matrixes.
- Kravchenko, A. G. and Moin, P. (1996). Numerical studies of flow over a circular cylinder at $Re_D = 3900$. *Physic of Fluids*, 12:403–417.
- Rhie, C. M. and Chow, W. L. (1983). Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 21:1525–1532.
- Sagaut, P. (2001). *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer-Verlag.
- Sagaut, P. and Grohens, R. (1999). Discrete Filters for Large Eddy Simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31:1195–1220.
- Soria, M., Trias, F. X., Pérez-Segarra, C. D., and Oliva, A. (2004). Direct numerical simulation of a three-dimensional natural-convection flow in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *Numerical Heat Transfer, part A*, 45:649–673.
- Trias, F. X., Soria, M., Oliva, A., and Pérez-Segarra, C. D. (2007). Direct numerical simulations of two- and three-dimensional turbulent natural convection flows in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *Journal of Fluid Mechanics*, 586:259–293.
- Trias, F. X., Soria, M., Oliva, A., and Verstappen, R. W. C. P. (2006a). Regularization models for the simulation of turbulence in a differentially heated cavity. In *Proceedings of the European Computational Fluid Dynamics Conference*

(*ECCOMAS CFD 2006*), Egmond aan Zee, The Netherlands.

- Trias, F. X., Soria, M., Pérez-Segarra, C. D., and Oliva, A. (2006b). A Direct Schur-Fourier Decomposition for the Efficient Solution of High-Order Poisson Equations on Loosely Coupled Parallel Computers. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 13:303–326.
- Verstappen, R. (2007). On restraining the production of small scales of motion in a turbulent channel flow. *Computers and Fluids*, Available online.
- Verstappen, R. W. C. P. and Veldman, A. E. P. (2003). Symmetry-Preserving Discretization of Turbulent Flow. *Journal of Computational Physics*, 187:343–368.
- Vreman, A. W. (2004). The adjoint filter operator in large-eddy simulation of turbulent flow. *Physics of Fluids*, 16:2012–2022.
- Xin, S. and Le Quéré, P. (1995). Direct numerical simulations of two-dimensional chaotic natural convection in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *Journal of Fluid Mechanics*, 304:87–118.
- Yanenko, N. N. (1971). *The Method of Fractional Steps*. Springer-Verlag.

FLOW AROUND A CIRCULAR CYLINDER NEAR A WALL IN A CHANNEL FLOW FOR LOW REYNOLDS NUMBER

Marcelo de Araujo Vitola, vitola@peno.coppe.ufrj.br

LabOceano-COPPE/UFRJ, Centro de Tecnologia Bloco C 203, Cidade Universitaria, Rio de Janeiro-RJ, Caixa Postal 68508, CEP:21941-972

Edith Beatriz Camaño Schettini, bcamano@iph.ufrgs.br

Instituto de Pesquisas Hidráulicas-UFRGS, Av. Bento Gonçalves 9500, Porto Alegre-RS, Caixa Postal 15029, CEP 91501-970

Jorge Hugo Silvestrini, jorgehs@pucrs.br

Departamento de Engenharia Mecânica e Mecatrônica-PUCRS, Av. Ipiranga 6681 Prédio 30 Sala 272, Porto Alegre-RS, CEP: 90619-900

Abstract. *The flow around a circular cylinder near a wall in a channel flow has a quite different behavior compared with the unbounded case. The last one has been studied quite a lot, both numerically, experimentally and analytically. Two main features differs the unbounded case and the flow near a wall in a channel: i) the confinement effect induced by the channel wall and ii) the shear in the incoming flow. In the present work this two effects have been studied numerically considering the two and three-dimensional configuration. The numerical model integrates the time-dependent non-dimensional Navier-Stokes equation considering an incompressible and Newtonian fluid. The solver was implemented in a finite difference scheme, using sixth-order compact centered scheme for spatial derivative, while the temporal integration was performed with an explicit third-order low-storage Runge-Kutta method. The no-slip boundary condition for the channel wall and for the cylinder were modeled using the immersed boundary method based on the feedback formulation. Numerical simulations were performed for $Re_D = 300$ and for the range of $0.4 \leq G \leq 2.5$, where Re_D and G are the cylinder Reynolds number and the non-dimensional gap ratio, respectively. The two-dimensional results have shown a reduction of the Strouhal number with the gap ratio and the suppression of vortex shedding below a critical gap ratio. The vortex suppression was also confirmed in the analysis of vorticity fields. It has also been observed that the asymmetry on the incoming flow produces a reduction of the mean and rms drag coefficient with the gap reduction. The mean lift coefficient changes its signal with the reduction of the distance between the cylinder and the wall, from a attraction force to a repulsive one. The vortex shedding suppression was associated with the variation of the local Reynolds number. Three-dimensional simulations were performed only for $G = 2.5; 0.8$ and 0.5 . The results indicated a delay in the development of stream-wise vortices, with the suppression of these structures below the critical gap.*

Keywords: *Circular Cylinder; Near wall; Channel Flow; Vortex Suppression*

1. INTRODUCTION

The flow around an isolate circular cylinder has been widely studied in the last decades, both theoretically, experimentally and numerically. Much of these previous works have been focused on the flow around an isolated cylinder placed in a uniform flow, where the main influence parameters are the Reynolds number, turbulence intensity, aspect ratio, blockage and roughness of the cylinder surface. However, in many different practical application in engineer the cylinder is near another structure or a wall, as the flow around a pipeline near the seabed, a group of riser in an offshore facility and in heat exchangers. The presence of other structure near the cylinder affects the vortex shedding process, the development of the near wake, as well, modify the forces acting upon the cylinder.

The flow around a circular cylinder near a plane wall is a particular case of the problem described previously. This kind of flow is complex due the increase of the governing parameters. Beyond the parameters which control the flow around an isolate circular cylinder, this kind of flow is also affected by the boundary layer characteristics (the boundary layer thickness and the velocity gradient), the cylinder position in respect to the boundary layer thickness and the distance between the cylinder and the wall.

In the last decades some research have been developed with the main objective of understanding the influence of these parameters in the vortex shedding process and in the forces acting upon the cylinder (Bearman and Zdravkovich, 1978; Grass et al., 1984; Zdravkovich, 1985; Taniguchi and Miyakoshi, 1990; Lei et al, 1999; Lei et al., 2000; Price et al., 2000). The main feature observed is the vortex shedding suppression as the gap ratio is reduce below a critical value, although Price et al. (2000) still have some doubts about this phenomenon. Others divergent aspects related to the vortex shedding suppression are: the value of critical gap, the physical mechanism which induce it and the behavior of the vertical force acting on the cylinder. Most of the earlier works agree that the vertical force tend to push the cylinder away from the wall. However experimental results obtained by Zdravkovich (1985) have shown that the vertical force behavior is directly related with the boundary layer characteristics.

The present work aims to study the influence of the asymmetry blockage, due the wall presence, in the vortex shedding process from a circular cylinder, as well as the modification observed in the cylinder wake and the forces acting on it, for a set of reduced parameters. The flow configuration is presented in section 2, while the mathematical formulation and the numerical method are described in section 3. Numerical results for two-dimensional and three-dimensional simulations are presented and discussed in section 4. The main conclusions of the present work are presented in section 5.

2. FLOW CONFIGURATION AND PARAMETERS

The flow around a circular cylinder of diameter D in a channel, with rectilinear and parallel walls separated by a distance $2H$ are considered in a Cartesian frame of reference (x, y, z) . The horizontal and vertical axis (x and y) are oriented along the bottom and the inlet of the channel, while the cylinder axis is set normal to the xy plane (Fig. 1). The cylinder position in the channel is defined by the minimal distance between the cylinder surface and the nearest wall (G), referred as the gap ratio (G/D), and the distance from the inlet boundary (X_C). At the inflow section of the channel a parabolic mean velocity profile is imposed between the walls, defined as

$$U(y) = U_{max} \left[1 - \left(\frac{y - 0.5H}{0.5H} \right)^2 \right] \quad (1)$$

where U_{max} is the maximum mean flow velocity. In this flow configuration four non-dimensional parameters are important, one associated with the channel defined as the channel Reynolds number ($Re_C = \bar{U}H/\nu$, where the \bar{U} is the mean channel velocity) and three associated with the cylinder: the blockage ratio ($B = D/2H$), the gap ratio (G/D) and the cylinder Reynolds number ($Re_D = \bar{U}D/\nu$).

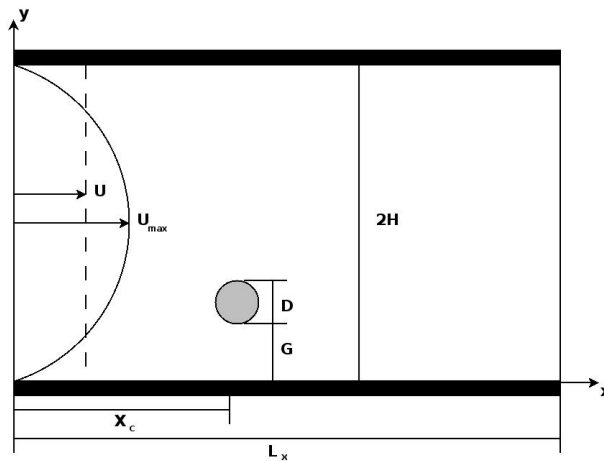


Figure 1. Schematic view of the flow configuration.

In the present paper, the channel Reynolds number adopted was in the laminar regime according the stability theory ($Re_C \approx 1200$). The blockage used have little or no influence in the flow ($B \approx 8\%$) and the cylinder Reynolds number used was selected after the three-dimensional transition of the flow observed in the case of an isolated circular cylinder ($Re_D = 300$). All these previous parameters were set constant for all the simulation in the present work. Two-dimensional simulations have been carried for gap ratio from 0.4 to 2.5, while three-dimensional simulations have been done for selected gaps ratios ($G = 2.5, 0.8$ and 0.5) based on the results of the $2D$ results.

3. NUMERICAL METHODOLOGY

3.1 Governing equations

The governing equations for unsteady incompressible and Newtonian fluid are the Navier-Stokes and mass conservation equations. These equations written in a non-dimensional forms in Cartesian coordinate system can be written as:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

where $p(\mathbf{x}, t)$ is the modified pressure field; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ and $\omega(\mathbf{x}, t)$ are the velocity and the vorticity fields, respectively; $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ is an external force field, used to represent the cylinder and the channel walls and Re is the Reynolds number, based on the cylinder diameter (D) and the mean average velocity of the inlet velocity profile (\bar{U}). These set of equations were directly solved in a non-staggered uniform mesh.

3.2 Numerical Method

The differential equations 2 and 3 were solved using the finite difference methods. All spatial derivatives were evaluated using a compact difference scheme (Lele, 1992). A sixth-order formulation was used for all interior mesh point. Near of the inflow and outflow boundaries, a single sided compact schemes of third/fourth order were employed for x -derivative. The temporal integration of the Navier-Stokes equation (Eq. 2) were performed using a fractional time step method. A third-order low-storage Runge-Kutta method was used to evaluated the temporal derivative (Williamson, 1980), while a Poisson equation for the pressure was solved to ensured the incompressibility equation (Eq. 3). For all the simulation, free-slip boundary condition were used at $y = 0$ and H and a periodic boundary condition was applied in the z -direction for $3D$ cases.

The outflow boundary condition ($x = L_x$) was defined solving a simplified convection equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

where U_c is an approximation of the velocity convection of the main structures. This equation was choose to ensure that any disturbance created by the vortex shedding leaves the computational domain with minimum reflection. In this work the value of the mean velocity at the outflow boundary U_c was estimated at each sub-time step.

The no-slip boundary condition over the circular cylinder surface and the channels wall were imposed using the immersed boundary method. Since the pioneer work of Peskin (1972) different formulations have been proposed to represent the immersed boundary, all then add an external force field to the Navier-Stokes equation, the main different between then is how the force is calculate and add to the Navier-Stoke equation. The virtual boundary method proposed by Goldstein et al. (1993) have been adopted in the present work, where the forcing term is given as

$$\mathbf{f} = \left\{ \alpha \int_0^t [\mathbf{u} - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{t})] dt + \beta [\mathbf{u} - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{t})] \right\} \quad (5)$$

where t is the time, x_s is cylinder coordinate; \mathbf{u}_s is the cylinder velocity; α and β are negative constants, which need to be adjusted depending on the flow case. More details about the numerical code can be found in Lardeau et al. (2002) or in Silvestrini (2002) and about the immersed boundary method in Lamballais (2002).

For all $2D$ simulations, no perturbation was superposed to the mean inflow velocity. On the other hand, for $3D$ simulations a weak white noise ($\pm 1\%$) was superposed in all directions to accelerate the transition process.

4. RESULTS

4.1 Two-Dimensional Simulations

Two-dimensional simulations were performed to test the influence of the gap (G) reduction in the vortex shedding process, the near-wake structures and the forces acting on the cylinder. All the simulations were done with the same set of computational parameters: computational domain of $19D \times 12D$ with the cylinder located at $Xc = 8D$ from the inlet boundary; an uniform grid with $\Delta x = \Delta y = D/32$; virtual boundary parameters $\alpha = -10.000$ and $\beta = -100$; time step $\Delta t = 0.0121$ and simulation were done for a non-dimensional period of $T \approx 300$. This set of parameter were chosen based on previous numerical validations of the numerical methodology presented by Vitola et al.(2005) for an uniform flow around an isolated circular cylinder.

4.1.1 Vorticity Fields

The vorticity field for the unsteady periodic vortex shedding regime for six different gap ratio values are shown in Fig. 2. All the figures were obtained at the end of each simulation. The darker color indicate negative vorticity (blue) while the lighter one indicate positive vorticity (red). For all the gap ratio greater than 0.4 the vortex shedding can be identified. The wake structures are analogous to the classical von Kármán vortex street with some remarkable difference induced by the asymmetric blockage and the shear of the incoming flow. The vorticity fields also shows that the gap reduction deflect the wake away from the wall, which consequently affect the force acting on the cylinder, as will be discussed in sec. 4.1.4

Figure 2a shows that presence of the cylinder near the wall induce the development of a boundary-layer of negative vorticity on the wall. Although the positive vorticity shed from the lower side of the cylinder has a week interaction with the wall vorticity. During the shedding process this lower vortices is stretched between two consecutive negative vortices

shed from the upper side of the cylinder. The resulting structure resemble more a vorticity sheet than a vortices. Similar structures have been found in the wake of an isolate circular cylinder immersed in an uniform shear flow (Vitola, 2005), as consequence these structures were associated with the shear present in the upcoming flow and not with the blockage induced by the wall presence.

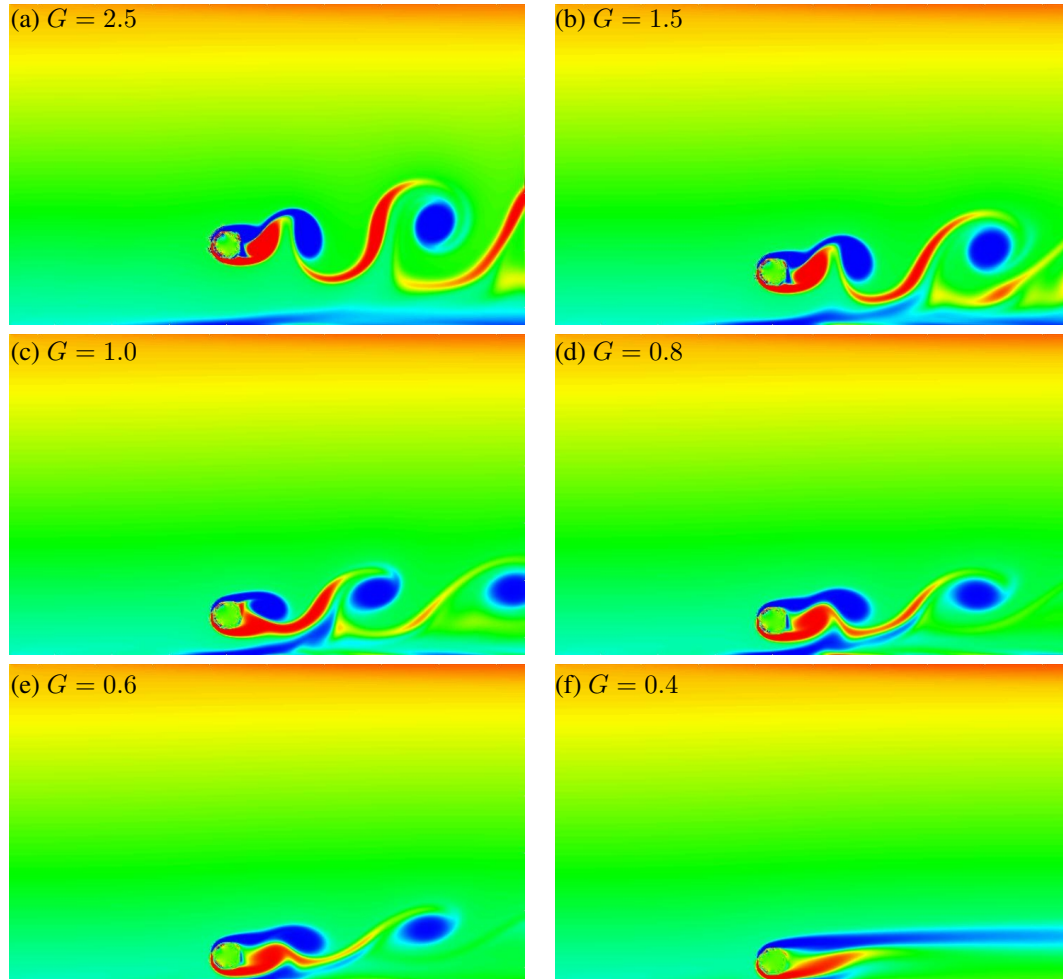


Figure 2. Instantaneous vorticity fields for different gap ratios ($Re_D = 300$, negative vorticity is blue and positive vorticity is red).

Reducing more the gap ratio it intensify the flow between the cylinder and the wall, which increase the wall vorticity sheet and the interaction between it and the vortices shed from the cylinder. At gap ratio 1.5 (Fig. 2b) it is possible to observe the detachment of wall vorticity as consequence of this interaction. The detach point is displaced upstream with the gap reduction, resulting in a stronger deformation of the inner vortices (Fig. 2c). The roll-up process of the lower vortices is delayed (Fig. 2d) and the its intensity is reduced (Fig. 2e). The vortex shedding suppression is observed for gap ratio lower than 0.4 (Fig. 2f).

4.1.2 Mean Fields

The mean flow velocity and the Reynolds stress components fields are reported in Fig. 3, for three selected gaps values. For $G = 2.5$ the mean streamlines field resemble the flow around an isolate cylinder with an almost symmetric bubble in the near wake. Gap reduction breakout this symmetry and a slight deflection of the mean streamlines away from the wall can be observed. This agree with previous observation of the instantaneous vorticity field of the wake. The front stagnation point deflects in the same direction of the mean wake velocity field. These changes observed in the mean velocity fields modify the pressure distribution around the cylinder, resulting in changes of the forces acting upon the cylinder (See sec. 4.1.4). It is also observed in Fig. 3a the development of a recirculation bubble on the near wall, consequence of the detachment of wall vorticity observed in the instantaneous vorticity fields (Fig. 2). The recirculation bubble growth and displace downstream with the gap reduction.

The mean Reynolds stress fields are shown in Fig. 3b – d. They seems to be more sensible to the presence of the wall,

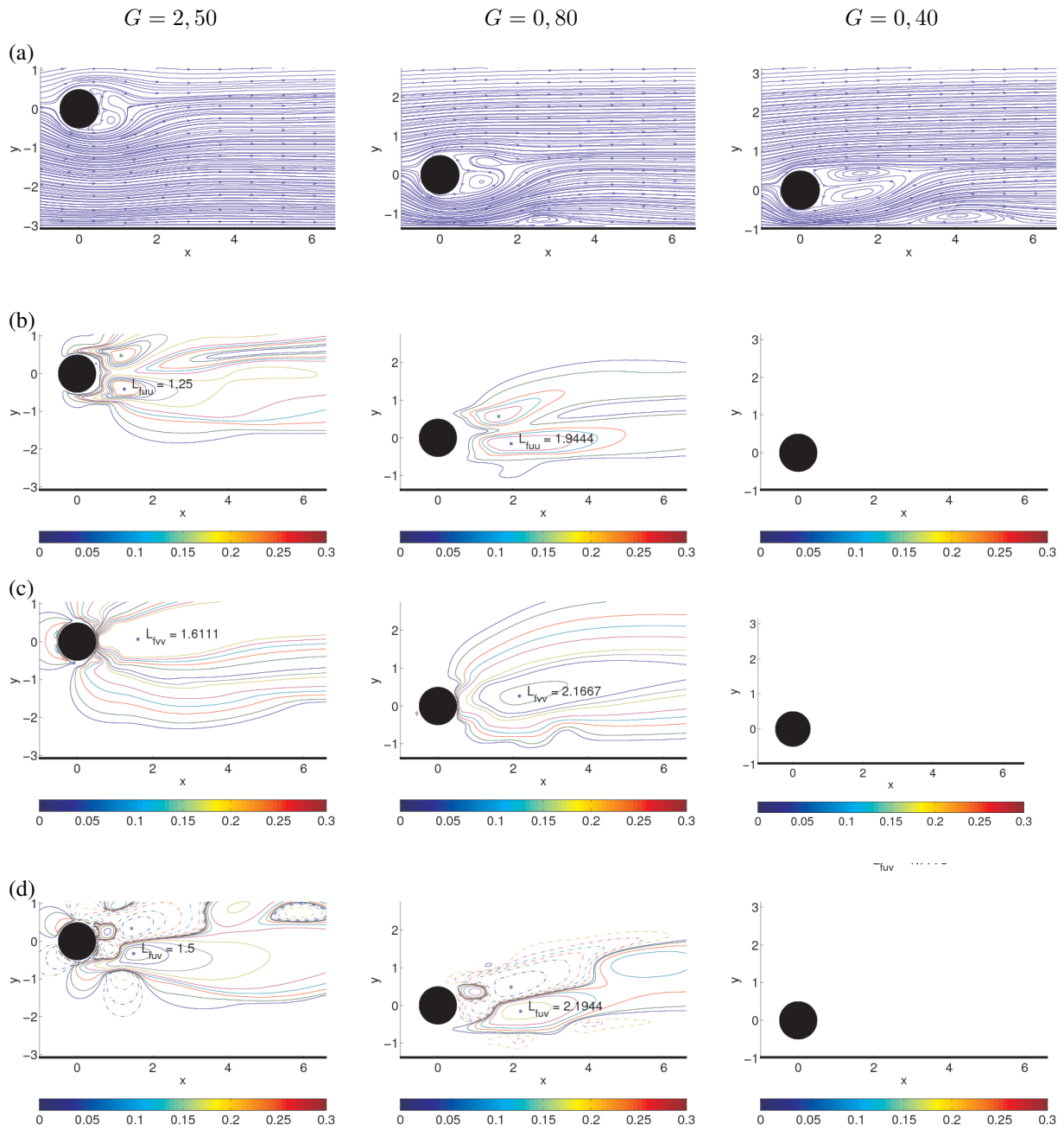


Figure 3. Mean velocity fields and mean Reynolds stress components for chosen gap ratio. (a) mean velocity field; (b) $\langle u'u' \rangle$ Reynolds stress component (isolines 0,005 – 0,30 step 0,005); (c) $\langle v'v' \rangle$ Reynolds stress component (isolines 0,05 – 0,60 step 0,05); (d) $\langle u'v' \rangle$ Reynolds stress component (isolines 0,05 – 0,60 step 0,05).

once the deflection of the wake is observed for $G = 2.5$. For gap ratio less than 0.4 no structures were observed with intensity greater than 0.05, indicating the vortex shedding suppression.

The mean Reynolds stress fields are frequently used to define the formation length, this is defined based on the location of the maximum value of these parameters. A wide dispersion of this parameter is frequently observed in the literature for the uniform flow around an isolate cylinder. This observation is consequence that each variable represents different physical process. In the present work the choose of variable used to define the formation length is more complicate due the lost of wake symmetry caused by wall proximity. The results obtained for the formation length using each of the mean stress Reynolds fields are shown in Fig.3b – d. It is possible to observe the dispersion of value obtained depending on the variable choose. For $G = 2.5$ the formation length range is from 1.25 to 1.61, while for gap 0.8 it is from 1.94 to 2.19. Based on this results and in the wake asymmetry, the results indicate that the use of the mean vertical Reynolds stress component to define the formation length is the best choose, once it has one possible maximum value which avoid misunderstood in the definition of this parameter.

4.1.3 Strouhal Number

The influence of the gap ratio reduction in the vortex shedding frequency is shown in the Fig. 4. The results indicate that the vortex shedding decrease with the gap ratio reduction, consequence of the interaction between the inner vortices shed from the cylinder and the wall vorticity. This retard the vortices interaction increasing the formation period. For gap ratio lower than a value between 0.5 and 0.6, defined as the critical gap, the Strouhal number is null indicating the vortex shedding suppression. This result agree with the instantaneous vorticity fields presented in the previous section.

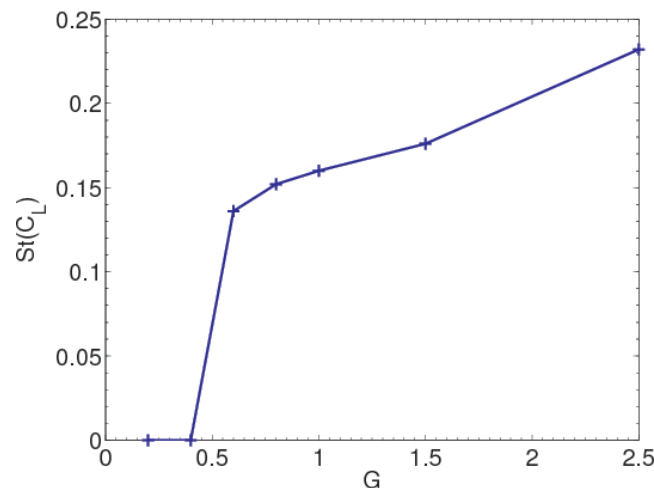


Figure 4. Strouhal number (St) function of the gap ratio (G).

4.1.4 Hydrodynamic Coefficients

The forces acting on the cylinder were calculated by integration of the pressure and the shear stress over a control volume around the circular cylinder. The velocity gradient of the upcoming flow and the presence of the wall modifies the pressure distribution on the cylinder, as consequence of flow symmetry lost. The drag and lift forces are also influenced by the Reynolds number. Nevertheless, in the present work only the influence of the gap ratio was studied, the Reynolds number is held constant for all simulations ($Re_D = 300$).

The mean and the fluctuation drag coefficient ($C_D = F_D / \frac{1}{2} \rho U D$, where U is the channel mean velocity and D the cylinder diameter) are shown in Fig. 5 as a function of the gap ratio. Both parameter has the same behavior, they decrease with the gap ratio reduction. The minimum value of the mean drag is 0.5 and occur at $G = 0.2$. The drag coefficient fluctuation are null for gap ratio less the 0.4, it is consequence of the vortex shedding suppression.

The variation of the mean lift and its fluctuation ($C_L = F_L / \frac{1}{2} \rho U D$, where U is the channel mean velocity and D the cylinder diameter) are shown in Fig. 6. The mean lift changes its sign with the gap reduction. It has a positive value for gap ratio lower than 0.5 and negative greater values than this. These results suggest the existence of competition of two process which result in a positive and a negative mean lift value.

Results presented by Vitola (2005) for an uniform shear flow around an isolate circular cylinder have indicated that a positive shear flow, as the one present in the lower channel wall, tend to induce a negative lift force. This force tend to shift the cylinder toward the low velocity, i.e. toward the near wall in the present case. On the other hand, results by the same researcher for the case of a cylinder near a moving wall tend to induce a positive mean lift force induced by the

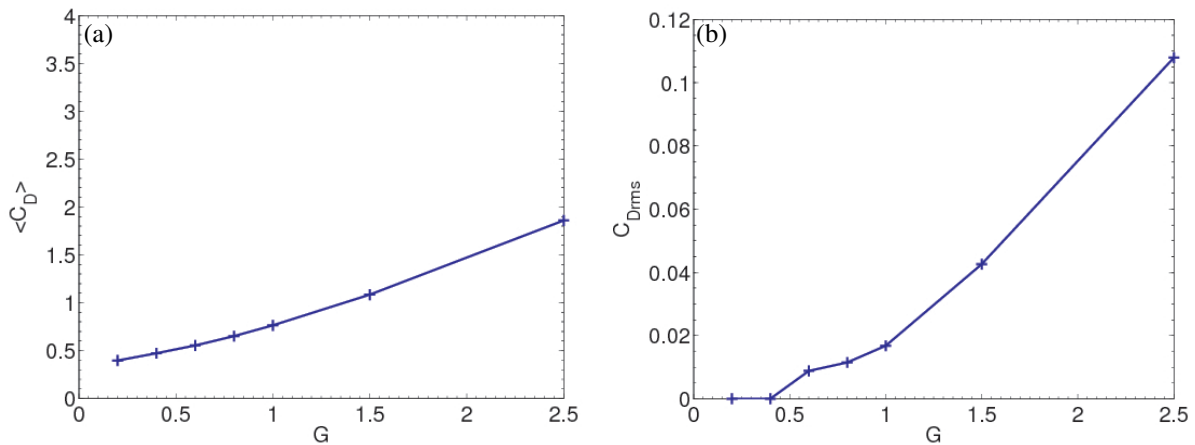


Figure 5. Drag coefficient variation with the gap ratio (G). (a) Mean value; (b) Fluctuation value.

wall blockage. Using these observation it is possible to suggest that for gap ratio greater than 0.4 the shear present in the incoming flow control the lift forces while for smaller gap ratios the blockage is the main process. The lift fluctuation has the same behavior as the drag fluctuation, both decrease with the gap ratio reduction and suppress for gap ratio less than 0.4.

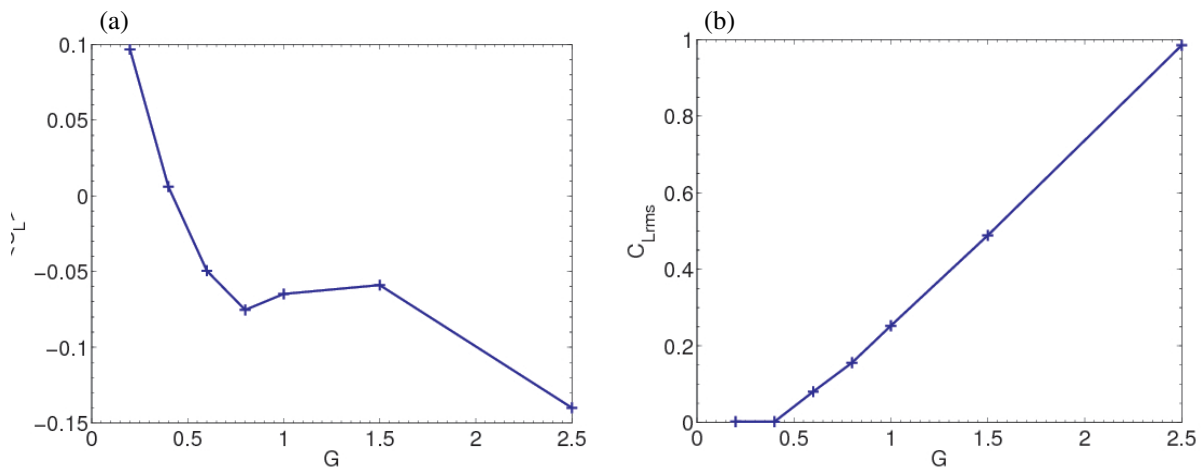


Figure 6. Lift coefficient variation with the gap ratio (G). (a) Mean value; (b) Fluctuation value.

A more appropriate analysis of the variation of the mean drag and lift coefficient can be obtained analyzing these coefficients based on the cylinder velocity ($C_{D_{cyl}} = C_D/U_{cyl}^2$, where U_{cyl} is the velocity at the center of the cylinder far upstream), once these parameters normally depends on the cylinder Reynolds number. Figure 7a shows different behavior of the mean drag coefficient when compared with results presented in Fig. 5a. The mean drag value based on cylinder velocity increase with the gap reduction. This behavior can be explained analyzing the variation of the local cylinder Reynolds number, which is $Re_{D_{cyl}} \approx 300$ at $G = 2.5$ and reduce to $Re_{D_{cyl}} \approx 45$ at $G = 0.4$. The Reynolds number reduction increase the influence of the viscous term of drag force, which explain the behavior observed for the mean drag. The use of local velocity change the intensity of the mean lift coefficient, but do not affects its behavior observed previously in Fig. 6a.

4.2 Three-Dimensional Simulations

Three-dimensional simulations were performed for three cases of gap ratio based on results presented in section 4.1. These simulations aim to test the influence of the gap reduction in the development of three-dimensional structures in the near wake. All the simulations were performed with the same set of computational parameters: computational domain of $19D \times 12D \times 4D$ with the cylinder located at $X_c = 8D$ from the inlet boundary; an uniform grid with $\Delta x = \Delta y = D/16$; virtual boundary parameters $\alpha = -100.00$ and $\beta = -100$; time step $\Delta t = 0.0121$ and the simulations were done for a non-dimensional period of $T \approx 150$. All three-dimensional simulations were initialized using two-dimensional results and a small white noise ($\pm 1\%$) was superposed to accelerate the transition process.

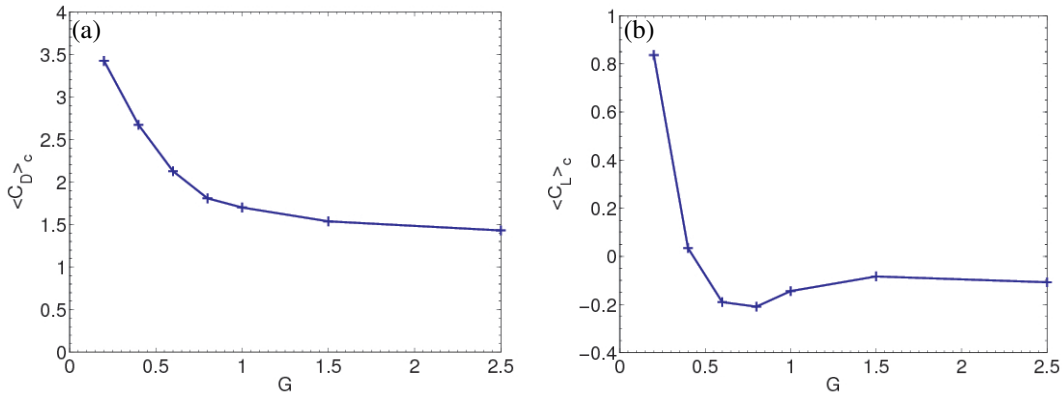


Figure 7. Variation of the drag and lift coefficients based on local velocity function of the gap ratio(G). (a) Mean drag and (b) Mean lift.

All the presented simulations were done for cylinder Reynolds number greater than the critical value for vortex shedding ($Re_D > 47$) considering an isolate one. A summary of the main parameter for the selected gaps ratios are presented in Tab. 1, where can be observed that the gap ratio reduction decrease the local Reynolds number ($Re_{D_{cyl}}$) at the center, top and bottom of the cylinder, but increase the shear parameter ($\beta_l = K \frac{D}{U_c}$, where U_c is the velocity at the center of the cylinder and K is the velocity gradient given by $\frac{\partial U}{\partial y}$). It is also possible to observe that for $G > 0.8$ the local Reynolds number is greater than the critical value found for the development of three-dimensional structure in the case of an isolate cylinder.

Table 1. Main parameters for the select gap ratio (G).

G	$Re_{D_{cyl}}$ (bottom)	$Re_{D_{cyl}}$ (center)	$Re_{D_{cyl}}$ (top)	β_l
2,50	298	339	374	0,22
0,80	110	173	228	0,69
0,50	72	139	198	0,91

4.2.1 Vorticity Fields

The temporal development of three-dimensional wake structures can be evaluated indirectly using the temporal evolution of the axial enstrophy (Z_{\perp}) or directly analyzing the instantaneously field of Q criterion. The axial enstrophy is defined as

$$Z_{\perp}(t) = \frac{1}{2}(\|\omega_x(t)\|_2^2 + \|\omega_y(t)\|_2^2) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \omega_x(x, y, z, t) dx dy dz + \int_{\Omega} \omega_y(x, y, z, t) dx dy dz \right) \quad (7)$$

where $\|\omega_x(t)\|_2^2$ and $\|\omega_y(t)\|_2^2$ are the two-dimensional L2 norm of the streamwise and transverse vorticity, respectively. This parameter indicate the amount of vorticity outside the xy plane, representing amount of three-dimensional structures present in the wake, while for two-dimensional cases it is null.

The temporal axial enstrophy evolution for the select gap ratio are shown in Fig. 8. It is possible to identified three different regions in Fig. 8b. The limits for each region is shown in Tab. 2. In the first region the enstrophy is null, indicating the absence of any three-dimensional structure in the cylinder wake. After some time it is possible to observe an exponential growth of the enstrophy, this is associated with the growth of three-dimensional instability and the development of the streamwise structures. Finally in region III the enstrophy reach an almost constant value, which indicate the saturation of the instability and the flow is completely developed. The same behavior is observed for $G = 2.5$ and 0.8, while for $G = 0.5$ the enstrophy is null during all the simulation, suggesting a 2D flow.

A strong variation of the axial enstrophy can be see in Fig. 8a for $T > 40$ (Region III of Fig. 8b) for $G = 2.5$. This indicate that even after the transition has finished the amount of streamwise structures present in the wake variate with time. Figure 8 also shows that gap reduction attenuate the amount of three-dimensional structure present in the wake for

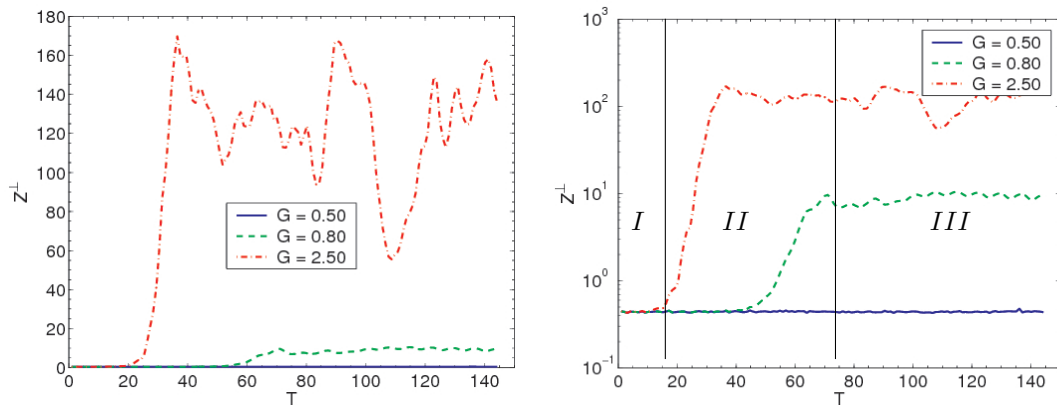


Figure 8. Temporal axial enstrophy evolution ($Re = 300$).

$G = 0.8$, due the reduction of the enstrophy intensity and the delay in the instabilities growth, and for $G = 0.5$ they are completely absent.

Table 2. Region limits observed during temporal evolution of axial enstrophy.

Region	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$G = 2,5$	$T < 15$	$15 < T < 35$	$T > 35$
$G = 0,8$	$T < 40$	$40 < T < 70$	$T > 70$
$G = 0,5$	$T > 145$	-----	-----

A critical aspect to analyze three-dimensional results is how to identify three-dimensional structures. Different methods have been used, as isosurface of vorticity, Q criterion or λ criterion (Dubief and Delcayre,2000). In the present work, the Q criterion was chosen and is given by

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

The temporal evolution of the three-dimensional structures for $G = 2.5$; 0.8 and 0.5 are shown in Fig. 9 for a top view of $Q = 0.1$. The isosurfaces of Q are colored using the streamwise component of the vorticity, where positive vorticity are indicated by the darker color (blue) and negative vorticity by the lighter color (red).

Results for $G = 2.5$ (Fig. 9a) shows a two-dimensional structures for $T = 10$ and 15 , although it is possible to observe the streamwise vorticity impress on the Kármán vortices. For $G = 0.8$ (Fig. 9b) the two-dimensional structures are observed for a longer period ($T = 10 - 45$) and the appearance of streamwise vorticity is delayed. Instantaneous field for $G = 2.5$ (Fig. 9a) and 0.8 (Fig. 9b) in region *II* shows the spanwise deformation of the Kármán vortices and the development of streamwise structures $T = 15 - 30$ and $T = 45 - 90$, respectively. Three-dimensional structures are fully developed for $G = 2.5$ at $T > 30$, while for $G = 0.8$ it is possible to observe the deformation of two-dimensional structures in the spanwise direction and a only a few small streamwise structures for $T > 60$. For $G = 0.5$ (Fig. 9c) no evidence of transition from two to three-dimensional flow is observed for the total period of the simulation.

Once all the simulation was initialized using two-dimensional velocity fields and have the same white noise superposed on it, the delay in the development of streamwise vorticity observed in Fig. 9 for $G = 0.8$ and the suppression got $G = 0.5$ was associated with the reduction of the local Reynolds number as was shown in Tab. 2.

5. CONCLUSION

The flow around a circular cylinder placed near the inferior wall of a plane channel, has been studied numerically using DNS and immersed boundary methods for different distance between the cylinder and the near wall. Two and three-dimensional configuration have been studied for Reynolds number 300 (based on cylinder diameter) corresponding to the vortex shedding regime and after the appearance of three-dimensional structures for an isolate circular cylinder. The Reynolds number used allowed to investigate the influence of the near wall in the vortex shedding and in the development of three-dimensional instabilities.

The two-dimensional results has shown a reduction of the Strouhal number with the gap ratio reduction, caused by the interaction of the inner vorticity shed from the cylinder and the wall vorticity. The continuum reduction of the gap result in the vortex shedding suppression for gaps lower than 0.4 . The asymmetry flow induced by the near wall also affects the mean drag and lift coefficients. The behavior of the mean drag is influenced by the velocity used for obtain

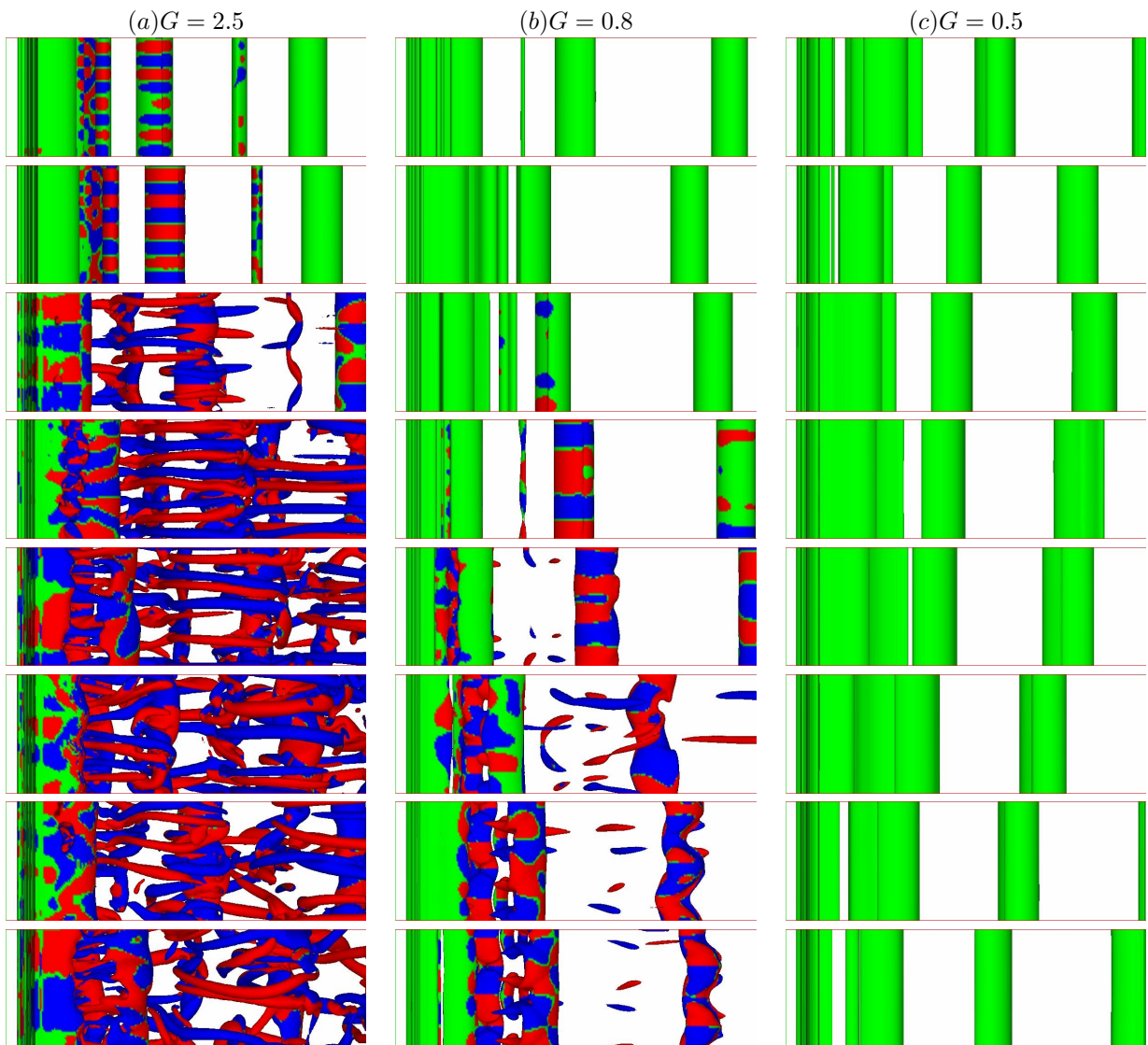


Figure 9. Temporal evolution of instantaneous field of Q criterion. (Top view of isosurfaces of $Q = 0, 1$; Temporal variation from top to bottom - $T = 10, 15, 30, 45, 60, 90, 120$ and 142).

the drag coefficient. Using the velocity at the center of the cylinder this coefficient increase with the gap reduction. The results for the lift coefficient indicate the competition of two different process, which have been identified as the shear of the upcoming flow and the blockage induced by the near wall. For gap ratio greater than 0.4 the shear seems to be the dominant process, while for lower gaps the blockage start to dominate the flow. The two-dimensional results have also demonstrated the influence of the criterion used to define the formation length, and indicated that the used of the value obtained based on the $\langle v'v' \rangle$ stress Reynolds component to define this parameter could reduce the dispersion observed in the literature, once it avoid the misunderstood of the maximum location.

The three-dimensional results has shown that the gap reduction delay the transition from two to three-dimensional flow and completely suppress then for gap ratio lower than 0.5. This was also related with the local Reynolds number reduction.

6. ACKNOWLEDGMENTS

Calculations were carried out at the NETT-IPH. This study was supported by the CNPq.

7. REFERENCES

- Peskin, C.S., 1972, "Flow patterns around valves: a digital computer method for solving the equation of motion." PhD thesis. Physiol., Albert Einstein Coll. Med., Univ. Microfilms. 378:72-30.
- Bearman, P.W. and Zdravkovich, M.M., 1978, "Flow around a circular cylinder near a plane boundary", J. Fluid Mech., Vol. 89, No. 1, pp. 33-47.
- Grass, A., et al, 1984, "The influence of boundary layer velocity gradients and bed proximity on vortex shedding from a free spanning pipeline", J. Energy Resources Technology, Vol. 106, pp. 70-78.
- Zdravkovich, M.M., 1985, "Forces on a circular cylinder near a plane wall", Applied Ocean Research, Vol. 7, N. 4, pp. 197-201.
- Taniguchi, S and Miyakoshi, K., 1990, "Fluctuating fluid forces acting on a circular cylinder and interference with a plane wall", Experiments in Fluids, Vol. 9, pp. 197-204.
- Lei, C.L., Cheng, L. and Kavanagh, K., 1999, "Re-examination of the effect of a plane boundary on force and vortex shedding of a circular cylinder". Journal of Wind Eng. and Ind. Aerody., Vol. 80, pp. 263-286.
- Lei, C.L., et al., 2000, "Vortex shedding suppression for flow over a circular cylinder near a plane boundary", Ocean Engineering, Vol. 27, pp. 1109-1127.
- Price, S. et al, 2000, "Flow visualization around a circular cylinder near to a plane wall", J. of Fluid and Struc., Vol. 16, No. 2, pp. 175-191.
- Lele, S.K., 1992, "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution", J. Comp. Phys., Vol. 103, pp. 16-42.
- Williamson, J.H., 1980, "Low-storage Runge-Kutta schemes", J. Comp. Phys., Vol. 25, pp. 48-56.
- Goldstein, D, Handler, R. and Sirovich, L., 1993, "Modeling a no-slip boundary condition with an external force field", J. Comp. Phys., Vol. 105, pp. 354-466.
- Lardeau, S., Lamballais, E. and Bonnet, J, 2002, J. Turbulence, Vol. 3, pp.28.
- Silvestrini, J. and Lamballais, E., 2002, "Direct Numerical Simulation of Wakes with Virtual Cylinders", Int. J. Comp. Fluid Dynamics, Vol. 16, No. 4, pp. 305-314.
- Lamballais, E. and Silvestrini, J., 2002, "Direct Numerical Simulation of Interactions between a mixing Layer and a Wake around a Cylinder", J. Turbulence, Vol. 3, No. 28, pp. 1-21.
- Vitola, M.A., 2005, "Influência de um contorno plano sobre o desprendimento de vórtices ao redor de um cilindro circular", Tese de Doutorado
- Vitola, M.A, Schettini, E.B.C. and Silvestrini, J.H., 2005, "Three-dimensional wake structures of free planar shear flow around horizontal cylinder", DLES V, Poiter-França.
- Dubief, Y. and Delcayre, F., 2000, "On choerent-cortex identification in turbulence", Journal of Turbulence, Vol. 1, No. 011.

8. Responsibility notice

The author(s) is (are) the only responsible for the printed material included in this paper.

DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOWS USING LOW COST PARALLEL COMPUTERS AND SUPERCOMPUTERS

M.Soria, manel@cttc.upc.edu

X.Trias, xavi@cttc.upc.edu

A.Oliva, oliva@cttc.upc.edu

Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC), Technical University of Catalonia ETSEIAT, C/ Colom 11, 08222 Terrassa, Spain

Abstract. *In this paper, a summary of the work carried out by the Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC) in the area of DNS (Direct Numerical Simulation) of turbulent flows using low-cost parallel computers (such as PC clusters) and then on supercomputers is presented. The goal of the work has been to be able to use low-cost hardware for the simulation of turbulent and transition flows with DNS and/or LES methods. Discretizations based on finite control volumes have been chosen (and not spectral methods or other approaches restricted to special geometries). Both decisions were taken in order to be able to use such tools for industrial applications, where low-cost computing and arbitrary geometries are mandatory. To do so, the work was focused in three areas:*

- *The development of efficient parallel algorithms for the solution of the Poisson equations on low cost, loosely coupled parallel computers. Most of this paper is devoted to the description of these algorithms.*
- *The implementation of symmetry-preserving fourth-order numerical schemes, allowing a good description of the physics of the flow preserving all the inviscid invariants exactly even on coarse meshes.*
- *The enhancement of time-integration methods, allowing to keep them unconditionally stable using larger time steps than standard integration methods.*

The resulting codes were used for DNS of natural convection flows in a low cost cluster. Then, a supercomputer and sufficient computing time was available, so the code was adapted to be able to use a large number of processors (up to 1024 CPUs). The methods presented here are extended to more realistic geometries, using non-structured meshes on the companion paper, where SPAR (Symmetry-Preserving Advective Regularization) method to model turbulent flows is described.

Keywords: *DNS, parallel computing, Poisson equation, turbulent natural convection*

1. INTRODUCTION

Due to the limitations of current sequential processors, that most likely won't be overcome in next years, parallel computers are already a crucial tool for Computational Fluid Dynamics (CFD). In this paper, a summary of the work carried out to develop and implement new algorithms for Direct Numerical Simulation (DNS) and Large Eddy Simulation (LES) in Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC) is presented.

Initially (about 1999) the work was oriented to the use of low cost parallel computers such as PC clusters for DNS. At that time, the emergence of the Beowulf clusters was identified as a very good opportunity, as they provided very high computing power at a low cost. However, it was a problem: their slow network, and specially their high latency, caused standard parallel algorithms to perform poorly.

To avoid this problem, an algorithm allowing to solve the Poisson equation with a single message was developed. First the method was restricted to two-dimensional problems and structured meshes [Soria et al., 2002]. Then, it was extended to three-dimensional problems, with one periodic direction, but allowing arbitrary mesh concentrations and boundary conditions [Soria et al., 2003]. The next step was to extend the algorithm to allow the solution of fourth order Poisson equations, with 19 diagonals, still with a single message [Trias et al., 2005]. Then, a supercomputer was made available so the algorithm was combined with a Krlov solver and extended to be able to run efficiently with hundreds of processoors [Gorobets et al.,], with several messages per iteration.

The long term goal was to develop a code suitable for general geometries, so finite control volumes methods were used instead of other formulations more suitable for DNS. The algorithms and codes described here are the foundation for the TermoFluids general purpose CFD code, described in the companion paper.

1.1 Governing equations and numerical aspects

In this paper, we restrict our attention to the behaviour of a fluid incompressible, Newtonian and of constant physical properties. To account for the density variations, the Boussinesq approximation is used. Thermal radiation is neglected.

Under these assumptions, and without using any turbulence model, the governing equations are

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla T + \alpha \nabla^2 T\end{aligned}\quad (1)$$

Where the body force \mathbf{f} is $g\beta(T - T_0)$. Governing equations (1) are discretized on a staggered grid in space by second- and fourth-order spectro-consistent schemes by [Verstappen and Veldman, 1997, Verstappen and Veldman, 1998, Verstappen and Veldman, 2003]. Following the same notation, the symmetry-preserving discretization of the Navier-Stokes equations becomes

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_h = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\mathbf{\Omega} \frac{d\mathbf{u}_h}{dt} = -\mathbf{C}(\mathbf{u}_h) \mathbf{u}_h + \mathbf{D}\mathbf{u}_h + \mathbf{f}_h - \mathbf{M}^t \mathbf{p}_h \quad (3)$$

where \mathbf{u}_h stands for the discrete velocity vector, $\mathbf{\Omega}$ is a positive-definite diagonal matrix representing the sizes of the control volumes, the convective coefficient matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u}_h)$ is skew-symmetric, the discrete diffusive operator \mathbf{D} is a symmetric negative-definite matrix and \mathbf{M} is the discrete divergence operator. The discrete gradient operator is the transpose of the discrete divergence multiplied by a diagonal scaling $\mathbf{G} = -\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{M}$. Such discretization preserves the underlying symmetry properties of the continuous differential operators. These global discrete operator properties ensure both stability and that the global kinetic-energy balance is exactly satisfied even for coarse meshes if incompressibility constraint is accomplished. Therefore, kinetic energy is not systematically damped by the discrete convective term or does not need to be damped explicitly to ensure the stability of the method. This is a crucial point because an artificial dissipation would interfere with the subtle balance between convective transport and physical dissipation, especially at the smallest scales of motion. Energy transport equation is also discretized using a spectro-consistent scheme.

The main difficulty of the incompressible Navier-Stokes system, from a parallel computing point of view, is the Poisson equation that arises from the mass conservation equation, even using an explicit time integration scheme. In a standard explicit time integration method (that here is used for clarity, but in next paragraphs is reconsidered to increase stability), momentum equation can be written as $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - \frac{1}{\rho} \nabla p$, where \mathbf{R} is the right-hand-side terms of the momentum equation except the pressure gradient. For the temporal discretization, a central difference is used for the time derivative term, a fully explicit second order Adams-Bashforth scheme for \mathbf{R} and an implicit first-order Euler scheme for pressure-gradient term and mass-conservation equation. Assuming a constant time-step, we obtain:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} \mathbf{R}^n - \frac{1}{2} \mathbf{R}^{n-1} - \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (5)$$

The unknown velocity \mathbf{u}^{n+1} is isolated from Eq. (38) to obtain:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^p - \nabla \tilde{p} \quad (6)$$

Where the predictor velocity \mathbf{u}^p is:

$$\mathbf{u}^p = \mathbf{u}^n + \Delta t \left[\frac{3}{2} \mathbf{R}^n - \frac{1}{2} \mathbf{R}^{n-1} \right] \quad (7)$$

and the pseudo-pressure is $\tilde{p} = \frac{\Delta t}{\rho} p^{n+1}$. To determinate \tilde{p} , Eq. (39) is imposed:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^p - \nabla \cdot (\nabla \tilde{p}) = 0 \quad (8)$$

Combining gradient and divergence operators, we obtain the well-known Poisson equation :

$$\nabla^2 \tilde{p} = \nabla \cdot \mathbf{u}^p \quad (9)$$

The algorithm for the integration of each time step is: (i) Evaluate $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}(\mathbf{u}^n)$. (ii) Evaluate \mathbf{u}^p from Eq. (7). (iii) Evaluate $\nabla \cdot \mathbf{u}^p$ and solve the discrete Poisson equation using DSFD. (iv) Obtain the new velocity field with Eq. (6).

1.2 Parallel computational fluid dynamics methodologies

Different methodologies have been used to parallelize Navier-Stokes solvers, such as *Functional de-composition* [A.J.Lewis and A.D.Brent, 1993] or *Domain decomposition in time* [G.Horton,]. However, *Spatial domain decomposition* [M.Schafer, 1991] is the standard approach and the method used in this work. The domain to be solved is divided into a number of blocks or subdomains, assigned to different processors. This method is specially interesting for totally explicit algorithms, as the only data to be exchanged are the *internal boundary values* that each processor needs from its neighbors to proceed to next time step. However, for the case of totally or partially implicit methods, such as the fractional step method used here or SIMPLEC [Patankar, 1980, Doormal and G.D.Raithby, 1984], the main problem of the domain decomposition approach is that parallel algorithms must be used to solve the linear equation systems. This tends to be the main bottleneck of the algorithms. The implicit spatial decomposition methods can again be classified in *Schwartz methods* [Tang, 1987], where the subdomains overlap and in *Schur methods*, where they are separated by an interface that is treated implicitly.

As aforementioned, the main problem is the Poisson equation. When implicit formulations are used for momentum and energy equations, their associated discrete systems are easily solved. But this is not the case of the incompressibility constraint, no matter what numerical method is used to solve it, as can be seen from a physical argument. As sound velocity c is $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T}$, incompressibility ($\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$) is equivalent to assume that sound waves propagate at infinite velocity. There may be local changes affecting instantaneously all the domain for each time step, even if it is small. This long-range coupling is an inconvenient for loosely coupled computers, where the communications have a high cost.

However, for the case of incompressible flows, a very important property the Poisson equation is that its matrix A remains constant during all the fluid flow simulation. This is, our problem is not to solve a single system but actually to solve for each of the x_i in the sequence:

$$Ax_i = b_i \quad i = 1 \cdots M \quad (10)$$

where x_i are the pressure correction vectors, b_i are the mass imbalance vectors and M is the product of the number of time steps and the number of iterations per time step. For time-accurate problems, M is a large number, that can be in the order of 10^7 in turbulent natural convection problems.

Thus, the hypothesis that has been used to develop the algorithm proposed here is that any reasonable amount of computing time can be spent in a *pre-processing* stage, where only matrix A is used, if then it allows us to reduce substantially the cost of each of the M solutions. A similar approach is used in [R.A.W.M.Henkes, 1990] to solve the pressure correction equations of a SIMPLE algorithm with a sequential Choleski decomposition. The data generated in the pre-processing stage is saved and reused for other simulations with the same mesh.

2. EFFICIENT PARALLEL POISSON SOLVERS FOR DIFFERENT ARCHITECTURES

2.1 Direct Schur Decomposition method (DSD)

Here, we derive a variant of SC algorithm, specific for the solution of pressure-correction equation on loosely-coupled parallel computers. The algorithm is described using two-dimensional problems and second order discretizations for clarity.

The linear equation system to be solved is denoted as:

$$Ax = b \quad (11)$$

Where A is a non-singular pentadiagonal matrix. The unknowns in vector x are partitioned into a family of P subsets, called *inner domains*, that are labeled from 0 to $P - 1$ (to follow the MPI convention), plus one *interface*, labeled s . The interface s is defined so that for any pair of subsets p_1 and p_2 , no unknown of p_1 is directly coupled with any unknown of p_2 , but only to its own unknowns and to s . According to this decomposition, x can be reordered and splitted into $P + 1$ sub-vectors:

$$x = [x_0, x_1, \cdots, x_{P-1}, x_s]^t \quad (12)$$

and the system (11) can be expressed using block matrices as:

$$\begin{bmatrix} A_{0,0} & 0 & \cdots & 0 & A_{0,s} \\ 0 & A_{1,1} & \cdots & 0 & A_{1,s} \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{P-1,P-1} & A_{P-1,s} \\ A_{s,0} & A_{s,1} & \cdots & A_{s,P-1} & A_{s,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{P-1} \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{P-1} \\ b_s \end{bmatrix} \quad (13)$$

Let \hat{N}_p be the number of *inner* unknowns of subset p and N_s the number of unknowns of the interface s . The sizes and structures of the sub-matrices in Eq. (13) are: $A_{0,0} \cdots A_{P-1,P-1}$ are sparse matrices with \hat{N}_p rows and columns, that express the coupling of the inner unknowns of processor p . They are pentadiagonal (heptadiagonal for three dimensional problems) if a structured mesh is used. $A_{0,s} \cdots A_{P-1,s}$ are sparse matrices with \hat{N}_p rows and N_s columns that express the coupling of inner unknowns of processor p with the interface unknowns. $A_{s,0} \cdots A_{s,P-1}$ are sparse matrices with N_s rows and \hat{N}_p columns that express the coupling of interface unknowns with inner unknowns of processor p . $A_{s,s}$ is a sparse square matrix with N_s rows that expresses the coupling of the interface unknowns.

In a parallel implementation of SC, to generate the P inner domains and the interface, a conventional non-overlapping domain decomposition is done and then the interface nodes are selected and treated separately. Each processor owns an inner domain x_p plus a part of the interface x_s , except processor $p = 5$, that owns no interface nodes.

For the solution of the reordered system, the interface unknowns are isolated using block Gaussian elimination. With this method, system (13) is transformed to:

$$\begin{bmatrix} A_{0,0} & 0 & \cdots & 0 & A_{0,s} \\ 0 & A_{1,1} & \cdots & 0 & A_{1,s} \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{P-1,P-1} & A_{P-1,s} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{A}_{s,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{P-1} \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{P-1} \\ \tilde{b}_s \end{bmatrix} \quad (14)$$

The last block equation, involving only unknowns in x_s , is the *interface equation*:

$$\tilde{A}_{s,s}x_s = \tilde{b}_s \quad (15)$$

where

$$\tilde{A}_{s,s} = A_{s,s} - \sum_{p=0}^{P-1} A_{s,p}A_{p,p}^{-1}A_{p,s} \quad (16)$$

and

$$\tilde{b}_s = b_s - \sum_{p=0}^{P-1} A_{s,p}A_{p,p}^{-1}b_p \quad (17)$$

Therefore, the interface equation (15) can be used to solve exactly x_s *before the inner domains*. Once x_s is known, each of the x_p can be determined independently by its owner p , solving its original equation, from Eq. (14):

$$A_{p,p}x_p = b_p - A_{p,s}x_s \quad (18)$$

Before solving Eq. (15), $\tilde{A}_{s,s}$ and \tilde{b}_s must be evaluated. This not immediate as both involve $A_{p,p}^{-1}$ and its explicit computation is not possible. Consider the evaluation of $\tilde{A}_{s,s}$. Eq. (16) is rewritten as $\tilde{A}_{s,s} = A_{s,s} - \sum_{p=0}^{P-1} \tilde{A}_{s,s}^p$. Each of the terms $\tilde{A}_{s,s}^p = A_{s,p}A_{p,p}^{-1}A_{p,s}$ is the contribution from processor p to $\tilde{A}_{s,s}$. To evaluate $\tilde{A}_{s,s}^p$ we proceed column by column, solving t from $A_{p,p}t = [A_{p,s}]_c$, and then evaluating column c as $[\tilde{A}_{s,s}^p]_c = A_{s,p}t$. When the contribution of each processor is available, they are added and the result subtracted from $A_{s,s}$, to obtain $\tilde{A}_{s,s}$. The evaluation of \tilde{b}_s is carried out in a similar way.

The algorithm proposed here is divided into two stages (i) **Preprocessing**, to be called just once per matrix A and (ii) **Solution** of x_i for a given b_i .

Preprocessing of A

The preprocessing algorithm is used to evaluate data that depends only on A and thus can be used for all the b_i . In this work, direct algorithms are used to solve all the equation systems. This is possible as we can afford a long preprocessing stage, that is then reused for M different right-hand-side terms. Equations involving matrix $A_{p,p}$ are solved with a band-LU decomposition [W.H.Press et al., 1992], but this method can not be used for the dense interface matrix $\tilde{A}_{s,s}$.

The solution of the interface equation is one of the key aspects for the efficiency of the SC algorithm. In the implementation proposed here, an algorithm based on the distributed evaluation and storage of $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$ is employed. To begin its description, assume that $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$ could be evaluated and made available to all the processors. Each of them would use it only to perform the matrix-vector products $x_s = \tilde{A}_{s,s}^{-1}\tilde{b}_s$. After the (fast) computation of x_s with this expression, processor p would proceed to the solution of its inner unknowns x_p using Eq. (18).

However, to solve its inner unknowns, p does not need all the components of x_s , but only the values that are directly coupled with its inner area. As processor p only needs a subset of the components of x_s , it actually does not need all the matrix $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$, but only the rows that are necessary for the evaluation of the components of $x_s = \tilde{A}_{s,s}^{-1} \tilde{b}_s$ directly coupled with its inner nodes. Hence, we must evaluate $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$ by rows.

Each column c of $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$ can be obtained solving the equation $\tilde{A}_{s,s} \left[\tilde{A}_{s,s}^{-1} \right]_c = e_c$. In order to evaluate a row of $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$, the previous identity is applied to $\tilde{A}_{s,s}^t$, and the inverse and transpose operators are permuted. The equations to be solved are $\tilde{A}_{s,s}^t \left[\tilde{A}_{s,s}^{-1} \right]^r = e_r$. Each processor only solves for the rows that it needs, using the LU decomposition of $\tilde{A}_{s,s}$, that is discarded after the preprocessing stage. The operations described in previous paragraphs are summarized in the following parallel algorithm:

```

Preprocessing of A {
  P.1-Form  $A_{s,s}$  matrix :
    for  $r = 1 \rightarrow N_s$  {
      if (owner(r) = me) form  $[A_{s,s}]^r$ 
    }
    send my rows of  $A_{s,s}$  to the other processors
    for  $q = 1 \rightarrow P - 1$  {
      if ( $q \neq$  me) receive rows of  $A_{s,s}$  owned by  $q$ 
    }
  P.2-Form  $A_{p,s}$  matrix
  P.3-Form  $A_{s,p}$  matrix
  P.4-Form  $A_{p,p}$  matrix and evaluate its LU decomposition
  P.5-Evaluate  $\tilde{A}_{s,s}$  :
    for  $c = 1 \rightarrow N_s$  {
      if  $[A_{p,s}]_c \neq 0$  evaluate  $\left[ \tilde{A}_{s,s}^p \right]_c$ 
    }
     $T \leftarrow \sum_{p=0}^{P-1} \tilde{A}_{s,s}^p$  (all-reduce operation)
     $\tilde{A}_{s,s} \leftarrow A_{s,s} - T$ 
  P.6-Evaluate and store the LU decomposition of  $\tilde{A}_{s,s}^t$ 
  P.7-Evaluate the required subset of the rows of  $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$ 
    for  $r = 1 \rightarrow N_s$  {
      if I need component  $r$  of  $x_s$  {
        solve for  $t$  in  $\tilde{A}_{s,s}^t t = e_r$ , using the LU dec. of  $\tilde{A}_{s,s}^t$ 
         $\left[ \tilde{A}_{s,s}^{-1} \right]^r \leftarrow t$  (store  $t$  as the row  $r$  of  $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$ )
      }
    }
}
    
```

The method proposed to treat the interface equation is even more efficient in terms of CPU than a replicated full storage of $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$ in each processor, since each of them only has to perform a part of the matrix-vector product to be able to obtain its inner nodes x_p .

Solution of $Ax = b$

After the completion of the pre-processing stage, the solution of each pressure-correction is done in three steps: (i) Evaluation of right-hand-side of interface equation (that can not be evaluated during preprocessing as it depends on b) (ii) Solution of interface nodes and (iii) Solution of the inner domains.

Solution of $Ax = b$ {

- S.1-Evaluate $\tilde{b}_s = b_s - \sum_{p=0}^{P-1} \tilde{b}_s^p$:
 - S.1.1-Solve $A_{p,p}t = b_p$
using the pre-evaluated LU dec. of $A_{p,p}$ (step P.4)
 - S.1.2-Evaluate $\tilde{b}_s^p \leftarrow A_{s,p}t$
 - S.1.3-Evaluate $\tilde{b}_s \leftarrow \sum_{p=0}^{P-1} \tilde{b}_s^p$ (all-reduce operation)
 - S.1.4-Evaluate $\tilde{b}_s \leftarrow b_s - \tilde{b}_s$
- S.2-Solve the interface nodes x_s from $\tilde{A}_{s,s}x_s = \tilde{b}_s$:
 - S.2.1-Evaluate $x_s = \tilde{A}_{s,s}^{-1}\tilde{b}_s$ where needed
using the required subset of $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$ rows (evaluated in P.7)
- S.3-Solve the inner nodes x_p from $A_{p,p}x_p = b_p - A_{p,s}x_s$:
 - S.3.1-Evaluate $t = b_p - A_{p,s}x_s$
 - S.3.2-Solve $A_{p,p}x_p = t$
using the pre-evaluated LU dec. of $A_{p,p}$ (step P.4)

}

In order to save RAM memory and CPU time, it is important to store matrices $A_{s,p}$, $A_{p,s}$ and $\tilde{A}_{s,s}^{-1}$ as sparse. In our implementation, a data structure oriented to do fast matrix-vector products is used (as it is needed in step S.2.1). For each row the non-null columns and its indices are stored. In the particular case of a sequential execution ($P = 1$) there are no interface nodes so a totally different algorithm has to be used. In our implementation, a conventional (sequential) band-LU decomposition is used. Thus, each processor has to solve just once all the domain.

As can be seen in Figure 1, the algorithm scales very well even in a PC cluster with a poor network. The results were obtained in a cluster with 900MHz processors and a conventional 100 Mbits/s network. More implementation details, as well as an estimation of the RAM memory needed are given in [Soria et al., 2002].

2.2 Direct Schur Fourier Decomposition method (DSFD)

The previous DSD can in principle be used for three-dimensional problems. However, the RAM memory needed to do so is too large and does not decrease with the number of processors, even for a fixed problem size.

To avoid this problem, the DSD method was complemented with a standard Fourier decomposition, that allows to break the three dimensional problem into a family of two-dimensional problems that can be solved independently, still with a single message.

Consider a structured three-dimensional mesh, with $N = N_x \times N_y \times N_z$ discretization nodes. After a second order discretization of the Poisson equation using finite control volumes or differences, the linear equation to be solved is:

$$A^{3d}x^{3d} = b^{3d} \quad (19)$$

where A^{3d} is an hepta-diagonal matrix, with N rows and columns, that remains constant during all the simulation and x^{3d} and b^{3d} are the unknown and right-hand-side vectors respectively. Each of the N equations can be expressed as:

$$a_{i,j,k}^p x_{i,j,k}^p + \sum_{nb} a_{i,j,k}^{nb} x_{i,j,k}^{nb} = b_{i,j,k} \quad (20)$$

where p refers to the node (i, j, k) , the superscript nb refers to a neighbour of node p and the summation has to be extended to all the neighbours, b, s, w, e, n, t .

Due to the use of the Fourier decomposition method, DSFD can only be applied to situations satisfying two conditions: (i) At least in one direction (x in our case) the mesh is uniform. (ii) The coefficients of the discrete Poisson equation should be equal for all the planes, i.e., $a_{i,j,k}^{nb} = a_{j,k}^{nb}$. In practice, the first condition restricts DSFD to flows without boundary layers in one of the three axis, such as for instance flows with one periodic direction. Periodicity is of interest for LES/DNS applications so it has been imposed here in addition to the two previous conditions.

The domain is decomposed into P subdomains assigned to the different processors, but only in the two directions where the mesh is non-uniform.

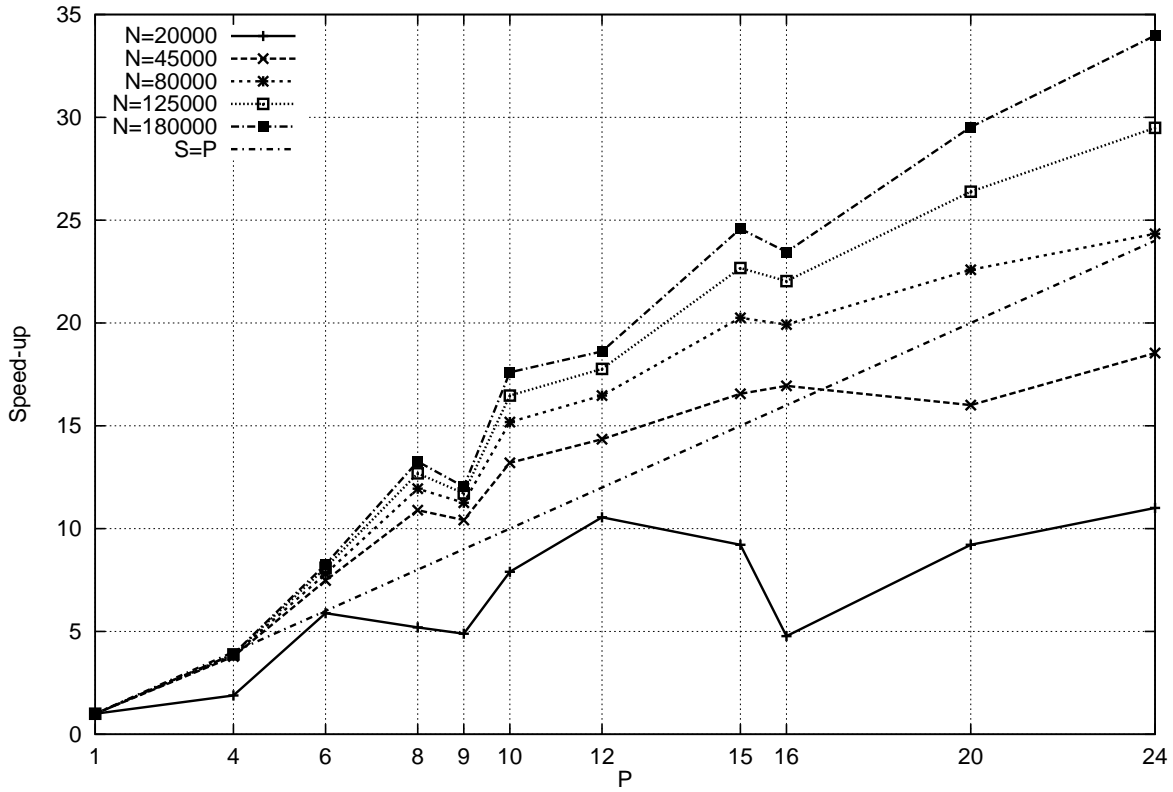


Figure 1. Speed-up of the SC algorithm in a PC cluster with 100 Mbit/s network.

Fourier decomposition

Methods based on discrete Fourier transform are a well-known and very efficient technique to solve certain types of linear equations [Hockney, 1965, P.N.Swarztrauber, 1977]. Vectors x^{3d} and b^{3d} are divided into $N_y N_z$ subvectors with N_x components each, such as:

$$x^{3d} = [x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{j,k}, \dots, x_{N_y, N_z}]^t \quad (21)$$

Where $x_{j,k} = [x_{1,j,k}, x_{2,j,k}, \dots, x_{N_x, j,k}]^t$. With this partition, Eq. (19) can be expressed as a block equation:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1}^p & A_{1,1}^n & \dots & A_{1,1}^t \\ A_{2,1}^s & A_{2,1}^p & A_{2,1}^n & \dots & A_{2,1}^t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j,k}^b & \dots & A_{j,k}^s & A_{j,k}^p & A_{j,k}^n & \dots & A_{j,k}^t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N_y, N_z}^b & \dots & A_{N_y, N_z}^s & A_{N_y, N_z}^p & A_{N_y, N_z}^n & \dots & A_{N_y, N_z}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{j,k} \\ \vdots \\ x_{N_y, N_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{j,k} \\ \vdots \\ b_{N_y, N_z} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Where (under the previous assumptions) $A_{j,k}^n$, $A_{j,k}^s$, $A_{j,k}^t$ and $A_{j,k}^b$ are diagonal matrices with N_x columns and rows such as:

$$A_{j,k}^n = a_{j,k}^n I \quad (23)$$

and $A_{j,k}^p$ are circulant [P.J.Davis, 1994] tridiagonal matrices of the form:

$$A_{j,k}^p = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & & & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & & \\ & & \ddots & & \\ \alpha & & & \alpha & \beta \end{bmatrix} \quad (24)$$

where $\alpha = a_{j,k}^w = a_{j,k}^e$ (as the mesh is uniform in x), and $\beta = a_{j,k}^p$. Eq. (22) can be expressed as:

$$A_{j,k}^b x_{j,k-1} + A_{j,k}^s x_{j-1,k} + A_{j,k}^p x_{j,k} + A_{j,k}^n x_{j+1,k} + A_{j,k}^t x_{j,k+1} = b_{j,k} \quad (25)$$

where the indices j and k range from $1 \cdots N_y$ and $1 \cdots N_z$ respectively, and the terms that correspond to non-existent block vectors (outside the domain) should be eliminated.

All the circulant matrices of order N_x (and, in particular, all the $A_{j,k}^p$) have the same base of eigenvectors. Following the terminology of [P.N.Swarztrauber, 1977], we denote the matrix whose columns are the eigenvectors of $A_{j,k}^p$ as Q . The product $x = Q\bar{x}$ is an inverse Fourier transform that can be evaluated as:

$$x_i = \frac{1}{2}\bar{x}_1 + \sum_{\nu=1}^{\frac{N_x}{2}-1} \left(\bar{x}_{2\nu} \cos\left(\nu i \frac{2\pi}{N_x}\right) + \bar{x}_{2\nu+1} \sin\left(\nu i \frac{2\pi}{N_x}\right) \right) + \frac{1}{2}\bar{x}_{N_x} (-1)^i \quad i = 1 \cdots N_x \quad (26)$$

and the product $\bar{x} = Q^{-1}x$ as:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{2}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} x_i \\ \bar{x}_{2\nu} &= \frac{2}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} x_i \cos\left(\nu i \frac{2\pi}{N_x}\right) \quad \nu = 1 \cdots \frac{N_x}{2} - 1 \\ \bar{x}_{2\nu+1} &= \frac{2}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} x_i \sin\left(\nu i \frac{2\pi}{N_x}\right) \quad \nu = 1 \cdots \frac{N_x}{2} - 1 \\ \bar{x}_{N_x} &= \sum_{i=1}^{N_x} x_i (-1)^i \end{aligned} \quad (27)$$

As all matrices $A_{j,k}^p$ have the same eigenvectors, all them have tridiagonal form in the same base:

$$Q^{-1}A_{j,k}^pQ = \lambda_{j,k} \quad (28)$$

Where $\lambda_{j,k}$ is a diagonal matrix whose elements depend on α and β (and therefore on j, k):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \beta + 2\alpha \\ \lambda_{2\nu} &= \lambda_{2\nu+1} = -4\alpha \sin^2\left(\frac{\nu\pi}{N_x}\right) + \beta + 2\alpha \quad \nu = 1 \cdots \frac{N_x}{2} - 1 \\ \lambda_{N_x} &= \beta - 2\alpha \end{aligned} \quad (29)$$

The previous relations will allow us to decompose the hepta-diagonal Eq.(19) into a set of N_x independent penta-diagonal equations. To do so, Eq.(25) is premultiplied by Q^{-1} and the subvectors $x_{j,k}$ are expressed as $Q\bar{x}_{j,k}$. After these operations, the $A_{j,k}^p$ matrices become diagonal while the $A_{j,k}^{nb}$ matrices, that are the identity multiplied by a scalar, are not affected (e.g., $Q^{-1}a_{j,k}^nIQ = a_{j,k}^nI$). The resulting expression is:

$$A_{j,k}^b \bar{x}_{j,k-1} + A_{j,k}^s \bar{x}_{j-1,k} + \lambda_{j,k} \bar{x}_{j,k} + A_{j,k}^n \bar{x}_{j+1,k} + A_{j,k}^t \bar{x}_{j,k+1} = \bar{b}_{j,k} \quad (30)$$

This expression, like Eq.(25), is a block penta-diagonal equation with $N_y N_z$ unknowns, each of them with N_x components. But in Eq.(30), as the non-diagonal entries of matrices $A_{j,k}^p$ have been eliminated, unknown $x_{i,j,k}$ is only coupled with unknowns in the same plane i . Therefore, selecting the i component of the $N_y N_z$ block equations, we obtain a penta-diagonal scalar equation system that can be expressed as:

$$a_{j,k}^b \bar{x}_{i,j,k-1} + a_{j,k}^s \bar{x}_{i,j-1,k} + \bar{a}_{i,j,k}^p \bar{x}_{i,j,k} + a_{j,k}^n \bar{x}_{i,j+1,k} + a_{j,k}^t \bar{x}_{i,j,k+1} = \bar{b}_{i,j,k} \quad (31)$$

where the term of the main diagonal is the i entry of diagonal matrix $\lambda_{j,k}$,

$$\bar{a}_{i,j,k}^p = \lambda_{i,j,k} \quad (32)$$

Eq.(31) can be expressed more compactly as:

$$\bar{A}_i \bar{x}_i = \bar{b}_i \quad i = 1 \cdots N_x \quad (33)$$

Where \bar{A}_i is a penta-diagonal matrix associated with the transformed equation for plane i . In summary, the operations to be performed to solve the equation system are: (i) Calculate the $N_y N_z$ transformed right-hand-side sub-vectors, $\bar{b}_{j,k} = Q^{-1}b$. (ii) Solve the N_x decoupled penta-diagonal equation systems $\bar{A}_i \bar{x}_i = \bar{b}_i$. (iii) Carry out the antitransformation of the $N_y N_z$ solution sub-vectors $\bar{x}_{j,k} = Q^{-1}x_{j,k}$.

Matrix-vector product has a N^2 operation count, so for a general transformation, the cost of the first and third operations would grow with $N_x^2 N_y N_z$. However, in our case they can be carried out using FFT algorithm that has roughly a linear operation count [W.H.Press et al., 1992]. Therefore, their cost grows only with $N_x N_y N_z$ and it is small compared with the solution of the N_x decoupled linear systems. For the case of a mesh uniform in all the directions, the diagonalization operation could be used again in order to solve each penta-diagonal equation, reducing it to tridiagonal form and then to N scalar equations.

In our implementation, the solution of each penta-diagonal system is carried out by all the processors with the previously described DSD. Another option is to assign the solution of a set of penta-diagonal systems to each processor, or to combine both methods, decomposing the domain in the three directions. The later approach was used to scale the method to a large number of processors, as described in next sections.

In [Soria et al., 2003], some implementation details are discussed. It is possible to combine the messages of all the planes into a single large message, saving latency time. The inversion of the very large dense matrices in the pre-processing stage is an important issue, that we solved writing a parallel block LU decomposition subroutine.

2.3 Extension to fourth order discretizations

After the first DNS simulations [Soria et al., 2004] carried out with the previous algorithm, the formulation was extended to fourth order discretization. This is a relevant issue, not only in terms of the accuracy of the code, but also for its computational implications. Given an order of discretization for convective, viscous and pressure gradient terms, to satisfy exactly the kinetic energy balance, the Poisson equation must also be solved with the same order of accuracy and using a coherent discrete Laplacian operator (i.e., the product of the discrete divergence and gradient operators [Verstappen and Veldman, 1998, Verstappen and Veldman, 2003]). The extension of the DSFD solver to fourth order schemes was a challenging problem.

Let us briefly outline those aspects concerning the discretization of the Poisson equation (42) that are relevant in our context. For simplicity, in this section we shall restrict to bidimensional discretizations of Poisson equation. The systematic procedure for calculating Laplace operator discretization formulas considered here for any numerical order, given by Vasilyev [Vasilyev, 2000], leads to the following generic stencil structure

$$\left[\begin{array}{cccccccc} & & & & a^{t_M} & & & \\ & & & & \vdots & & & \\ & & & & a^{t_2} & & & \\ & & & & a^{t_1} & & & \\ a^{s_M} & \dots & a^{s_2} & a^{s_1} & a^p & a^{n_1} & a^{n_2} & \dots & a^{n_M} \\ & & & & a^{b_1} & & & & \\ & & & & a^{b_2} & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & a^{b_M} & & & & \end{array} \right] \quad (34)$$

Obviously, near the boundary points the stencils have to be modified. The discretization at these points is not constructed to minimize the local truncation error. Instead, it is properly modified without violating the underlying symmetry properties of the Laplace operator [Verstappen and Veldman, 2003]. The stencil size M required for the schemes under consideration is related with the order of accuracy of the discrete differential operator o by

$$M = o - 1 \quad (35)$$

As an example, the second-order scheme ($M = 1$) is the well-known five-point approximation of the Laplacian partial differential operator, and the fourth-order ($M = 3$) counterpart in a uniform spacing mesh denoted by h is

$$\frac{1}{684h^2} \left[\begin{array}{cccccc} & & & 1 & & \\ & & & -54 & & \\ & & & 783 & & \\ 1 & -54 & 783 & -2920 & 783 & -54 & 1 \\ & & & 783 & & \\ & & & -54 & & \\ & & & 1 & & \end{array} \right] \quad (36)$$

Discretization of the right-hand-side terms is also carried out using a symmetry-preserving scheme by Verstappen and Veldman [Verstappen and Veldman, 2003]. More details about the numerical method and discretization are given in [Soria et al., 2004]. Exact stencil connections and theoretical properties of this family of schemes are further considered in [Verstappen and Veldman, 1998, Verstappen and Veldman, 2003, Vasilyev, 2000, Morinishi et al., 1998].

The matrices with wider stencil are also diagonalized with a Fourier method and then each of the planes is solved with DS, as before. The interface is wider and therefore the size of the Schur matrices is larger. Overall, the computational cost is significantly larger but this is compensated by the superior accuracy of the fourth order schemes.

2.4 Time-integration method used to increase stability

An enhancement of the standard Adams-Bashforth scheme allows to increase the time step preserving the stability. This small change in the code allows to save a factor of about two, assuming of course that the time step needed to integrate accurately the NS equations is larger than the stability of the Adams-Bashforth scheme. In order to simplify the notation, momentum equation can again be rewritten as

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - \nabla p \quad (37)$$

where $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ represents the right-hand-side terms of the momentum equation except for the pressure gradient. For the temporal discretization, a central difference scheme is used for the time derivative term, a fully explicit second-order one-leg scheme proposed by [Verstappen and Veldman, 2003] for $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ and a first-order backward Euler scheme for the pressure-gradient term. Incompressibility constraint is treated implicit. Thus, we obtain the semi-discretized Navier-Stokes equations

$$\frac{(\beta + 1/2) \mathbf{u}^{n+1} - 2\beta \mathbf{u}^n + (\beta - 1/2) \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} = \mathbf{R}((1 + \beta) \mathbf{u}^n - \beta \mathbf{u}^{n-1}) - \nabla p^{n+1} \quad (38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (39)$$

where the parameter β is computed each time step to adapt the linear stability domain of the time-integration scheme to the instantaneous flow conditions in order to use the maximum Δt possible. Therefore, we look for stability domains which include eigenvalues $\lambda = x + iy$. As \mathbf{D} is a symmetric and negative-definite matrix the real part x is negative and its values can be bounded by means of the Gershgorin circle theorem. The skew-symmetry of the $\mathbf{C}(\mathbf{u}_h)$ discrete operator also allows us to bound the imaginary part y in the same way. Once eigenvalues are bounded it is easy to compute the β value that better fits the linear stability domain. In all the DNS carried out here, the time step required for this dynamic scheme has been more than two times greater, that is twice cheaper, than the standard second-order Adams-Bashforth ($\beta = 1/2$) scheme. In practice, we choose the time step such that the time-integration becomes unstable when the selected time step is enlarged by 10%.

To solve the velocity-pressure coupling we use a classical fractional step projection method [Chorin, 1968, Yanenko, 1971]. In the projection methods, solutions of the unsteady NS equations are obtained by first time-advancing the velocity field \mathbf{u} without regard for its solenoidality constraint (39), then recovering the proper solenoidal velocity field, \mathbf{u}^{n+1} ($\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$). This projection is derived from the well-known Helmholtz-Hodge vector decomposition theorem [Chorin, 1993], whereby the velocity \mathbf{u}^{n+1} can be uniquely decomposed into a solenoidal vector, \mathbf{u}^p , and a curl-free vector, expressed as the gradient of a scalar field, $\nabla \tilde{p}$. This decomposition is written as

$$\mathbf{u}^p = \mathbf{u}^{n+1} + \nabla \tilde{p} \quad (40)$$

where the predictor velocity \mathbf{u}^p is

$$\mathbf{u}^p = \frac{2\beta \mathbf{u}^n - (\beta - 1/2) \mathbf{u}^{n-1}}{\beta + 1/2} + \frac{\Delta t}{\beta + 1/2} \mathbf{R}((1 + \beta) \mathbf{u}^n - \beta \mathbf{u}^{n-1}) \quad (41)$$

and the pseudo-pressure is $\tilde{p} = \Delta t / (\beta + 1/2) p^{n+1}$. Taking the divergence of (40) yields a Poisson equation for \tilde{p}

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^p = \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \nabla \cdot (\nabla \tilde{p}) \longrightarrow \nabla^2 \tilde{p} = \nabla \cdot \mathbf{u}^p \quad (42)$$

2.5 Krylov Schur Fourier Decomposition method (KSFD) and current work

DSFD algorithm, that is very efficient on PC clusters, can not be used for an arbitrarily large number of processors and problem size, mainly due to the RAM memory requirements [Trias et al., 2005]. The size of the interface, that grows fast with the number of processors, even if the mesh size is fixed, limits the DSFD solver scalability.

On the other hand, the computer systems with a large number of processors are actually designed for scientific computing (unlikely low cost clusters) and have a fast network. To adapt the code to this situation, a new version of the solver, named Krylov-Schur-Fourier Decomposition (KSFD) was developed [Gorobets et al.,]. It is based on three ideas:

- Fourier decomposition is also used to uncouple the original 3D Poisson equation into a set of 2D planes. Then, each 2D problem is solved using a Conjugated Gradient (CG) method, instead of a direct Schur method as in DSFD. For each plane, the CG algorithm is preconditioned by solver that divides the problem into a family of *blocks*. Each block is solved using a direct method. If the block is as large as the full domain, then the preconditioner is actually a direct solver, so DSFD is recovered. At the other end, if a block is just a scalar, the preconditioner is a Jacobi method. If each block is smaller than the area assigned to a processor then a LU method is used. If it is larger, then a group of processors cooperate to solve the problem using the previously described DSD.
- The condition number of each plane equation is totally different. This is discussed in detail in [Gorobets et al.,], but as an overview, the general trend is that the convergence rate increases with the plane number, being the first actually a singular equation. So not all the planes need to be solved with the same block size. For the first plane, we use a direct Schur method while for the last planes a small block size is enough.
- On a supercomputer, parallel FFT can be computed without wasting too much time, so the domain can be decomposed in the three directions. As the cost and block size are different for each plane, to avoid a load imbalance problem, the planes are assigned alternatively to different processors.

The KSFD approach also allows to tune the block size for different problems sizes and different computer architectures. As an illustrative result of its performance, the speedup obtained is presented in Figure 2.

All the experience in parallel solvers for structured meshes has been used in the design and implementation of the code TermoFluids, for non-structured meshes, that is described in the companion paper. However, structured meshes -when can be used- have clear advantages so our DNS code is now being extended to problems bounded by six planes or with internal obstacles.

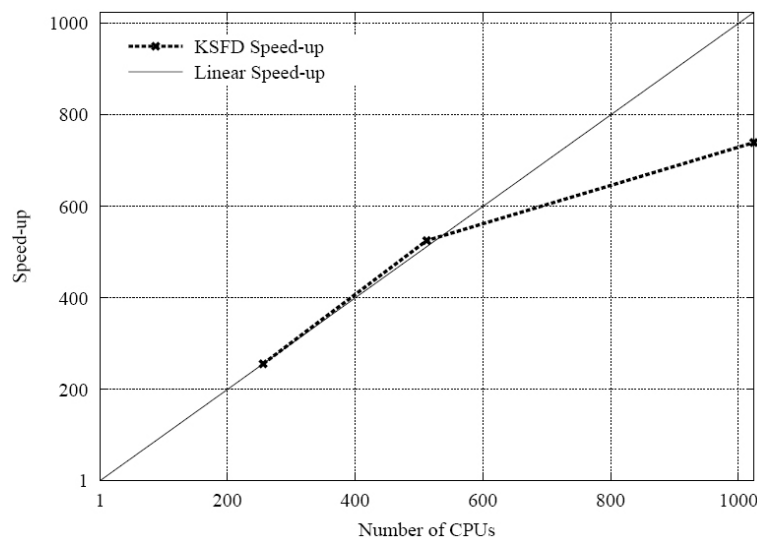


Figure 2. Speed-up of the KSFD algorithm in a supercomputer, up to 1024 nodes.

3. ILLUSTRATIVE RESULTS: DNS OF TURBULENT NATURAL CONVECTION FLOWS

The natural convection of air inside a closed cavity heated from the side was selected to carry out the first DNS simulations with the code developed. The first results [Soria et al., 2004], for $Ra = 6.4 \times 10^8$ were obtained in a low cost PC cluster in 2003. Different meshes, up to 3.1 million control volumes were used and a integration period of more than one million time steps. The previous studies [Xin and Le Quéré, 1995] of turbulent flows in this configuration assumed a two-dimensional behaviour. Later, after the code was extended to fourth order discretizations, Ra number was increased up to 10^{10} , still on a PC cluster [Trias et al., 2006].

With the KSFD method previously described, the supercomputer Marenostrum in Barcelona could be used to extend the problem to $Ra = 10^{11}$, using a 111 million nodes mesh and 512 processors.

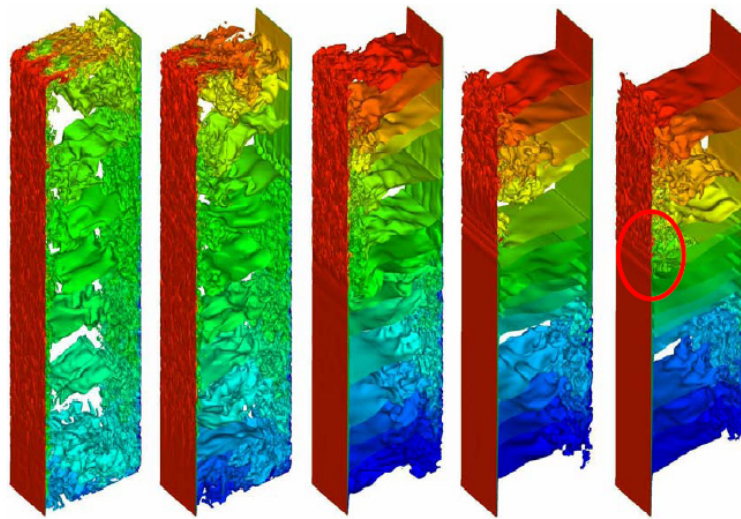


Figure 3. Instantaneous temperature fields for the thermal driven cavity problem, with $Ra = 10^{11}$

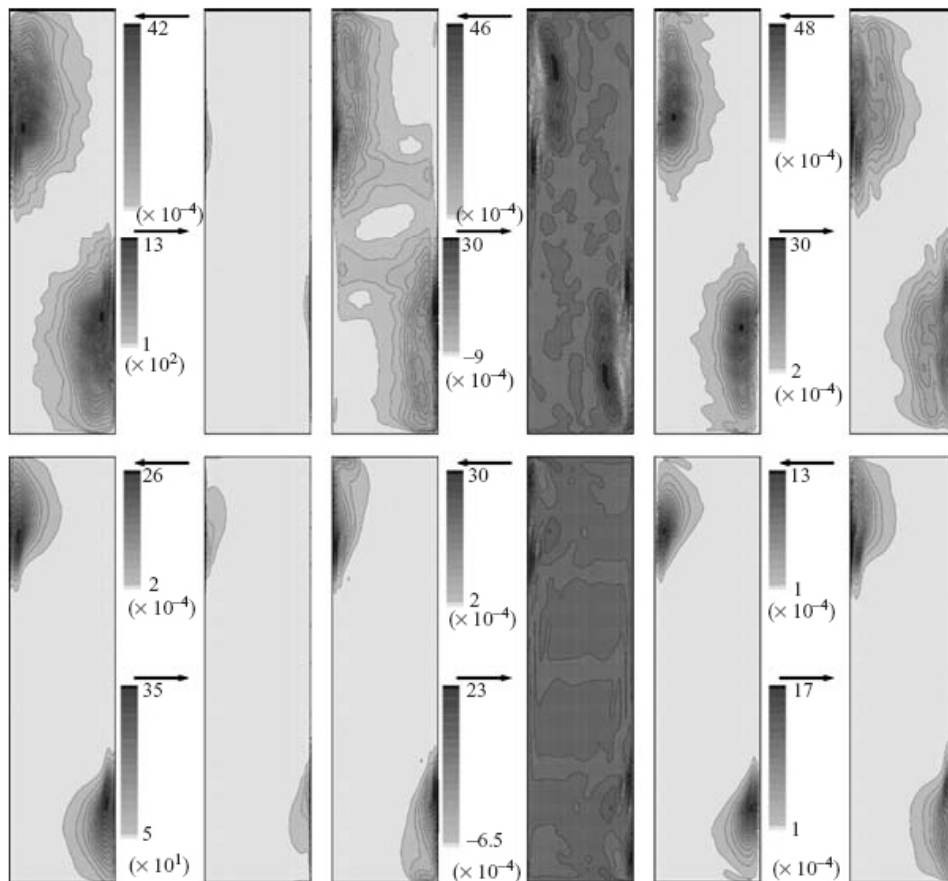


Figure 4. Second-order statistics at $Ra = 6.4 \times 10^{10}$, from left to right: k , $\epsilon\nu$, $\overline{T'T'}$, $\overline{u_3T'}$, $\overline{u_2u_2'}$ and $\overline{u_3u_3'}$. Top: Two-dimensional simulations. Bottom: Three-dimensional simulations.

4. CONCLUSIONS

Due to its long-distance coupling, the solution of the Poisson equation can be the main problem for the parallelization of a LES/DNS code, either with structured or unstructured meshes. Here, a family of algorithms aimed to solve this problem has been presented. Each parallel computer architecture has its limitation, and the algorithms here described can be used from small clusters of less than 10 processors to large supercomputers with 512-1024 processors. The method allows to solve flows confined by four planes, but its main limitation is the geometry. The current work is addressed to solve this problem on structured meshes and to apply the main ideas of this method to non-structured meshes (see the companion paper).

Also, the authors want to stress the importance of a good (stable) time integration method, allowing to increase the time step. A variant of the Adams-Bashford is presented, that in practice allows to save more than one half of all the computational time.

5. ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been partially supported financially through the Ministerio de Educación y Ciencia Español with the Research project ENE-2007-67185.

6. REFERENCES

- A.J.Lewis and A.D.Brent (1993). A Comparison of Coarse and Fine Grain Parallelization Strategies for the Simple Pressure Correction Algorithm. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 16:891–914.
- Chorin, A. J. (1968). Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 22:745–762.
- Chorin, A. J. (1993). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag.
- Doormal, J. and G.D.Raithby (1984). Enhancements of the SIMPLE method for Predicting Incompressible Fluid Flows. *Numerical Heat Transfer*, 7:147–163.
- G.Horton. TIPSII - A Time-Parallel SIMPLE-Based Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations. pages 243–256.
- Gorobets, A., F.X.Trias, M.Soria, and A.Oliva. A scalable Krylov-Schur-Fourier Decomposition for the efficient solution of high-order Poisson equation on parallel systems from small clusters to supercomputers. *Submitted to Computers and Fluids*.
- Hockney, R. W. (1965). A Fast Direct Solution of Poisson's Equation Using Fourier Analysis. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 12:95–113.
- Morinishi, Y., Lund, T., Vasilyev, O., and Moin (1998). Fully Conservative Higher Order Finite Difference Schemes for Incompressible Flow. *Journal of Computational Physics*, 143:90–124.
- M.Schafer (1991). M.Schafer, Parallel Algorithms for the Numerical Simulation of Three-Dimensional Natural Convection. *Applied Numerical Mathematics*, 7:347–365.
- Patankar, S. V. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company.
- P.J.Davis (1994). *Circulant Matrices*. Chelsea Publishing, New York.
- P.N.Swarztrauber (1977). The Methods of Cyclic Reduction, Fourier Analysis and the FACR Algorithm for the Discrete Solution of Poisson's Equation on a Rectangle. *SIAM Review*, 19:490–501.
- R.A.W.M.Henkes (1990). Natural Convection Boundary Layers. *Ph.D. thesis, University of Technology, Delft*.
- Soria, M., Pérez-Segarra, C. D., and A.Oliva (2003). A Direct Schur-Fourier Decomposition for the Solution of the Three-Dimensional Poisson Equation of Incompressible Flow Problems Using Loosely Parallel Computers. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 43:467–488.
- Soria, M., Pérez-Segarra, C. D., and Oliva, A. (2002). A Direct Parallel Algorithm for the Efficient Solution of the Pressure-Correction Equation of Incompressible Flow Problems Using Loosely Coupled Computers. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 41:117–138.
- Soria, M., Trias, F. X., Pérez-Segarra, C. D., and Oliva, A. (2004). Direct numerical simulation of a three-dimensional natural-convection flow in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *Numerical Heat Transfer, part A*, 45:649–673.
- Tang, W.-P. (1987). Schwarz Splitting and Template Operators. *Ph.D. thesis, Stanford University*.
- Trias, F. X., Soria, M., Oliva, A., and Pérez-Segarra, C. D. (2006). Direct numerical simulations of two- and three-dimensional turbulent natural convection flows in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *Journal of Fluid Mechanics*, submitted.
- Trias, F. X., Soria, M., Pérez-Segarra, C. D., and Oliva, A. (2005). A Direct Schur-Fourier Decomposition for the Efficient Solution of High-Order Poisson Equations on Loosely Coupled Parallel Computers. *Numerical Linear Algebra with Applications*, page (published online).

- Vasilyev, O. V. (2000). High Order Finite Difference Schemes on Non-uniform Meshes with Good Conservation Properties. *Journal of Computational Physics*, 157:746–761.
- Verstappen, R. and Veldman, A. (1997). Direct Numerical simulation of turbulence at lower costs. *Journal of Engineering Mathematics*, 32:143–159.
- Verstappen, R. W. C. P. and Veldman, A. E. P. (1998). Spectro-consistent discretization of Navier-Stokes: a challenge to RANS and LES. *Journal of Engineering Mathematics*, 34:163–179.
- Verstappen, R. W. C. P. and Veldman, A. E. P. (2003). Symmetry-Preserving Discretization of Turbulent Flow. *Journal of Computational Physics*, 187:343–368.
- W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling, and B.P.Flannery (1992). *Numerical Recipes in C. The art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Xin, S. and Le Quéré, P. (1995). Direct numerical simulations of two-dimensional chaotic natural convection in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *Journal of Fluid Mechanics*, 304:87–118.
- Yanenko, N. N. (1971). *The Method of Fractional Steps*. Springer-Verlag.

7. Responsibility notice

The author(s) is (are) the only responsible for the printed material included in this paper.

PERFORMANCE OF THE REYNOLDS STRESS MODEL (RSM) IN THE PREDICTION OF THE HEAT TRANSFER OF AN IMPINGING JET

D. I. Maldonado, dimt@aluno.puc-rio.br

A. O. Nieckele, nieckele@puc-rio.br

Dept. Engenharia Mecânica – Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, PUC/Rio
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea, 22453-900, Rio de Janeiro – RJ – Brasil

Abstract. *Impinging jet is an efficient mechanism to enhance wall heat transfer (also mass transfer); therefore, it is widely used in engineering applications. The flow field of an impinging jet presents a complex flow phenomenon, with the presence of a potential core, stagnation region, shear layer and wall jet. Due to the flow complexity it is an excellent problem to evaluate turbulence models. In the present work, a numerical study was carried out using the finite-volume method. Due to the anisotropic characteristics of an impinging jet, the Reynolds Stress Model (RSM) was selected to predict this type of flow. The current research is concerned with the evaluation of the heat transfer of an impinging jet. The results obtained are compared with available experimental data, and reasonable agreement was obtained for the mean quantities.*

Key-words: Impinging air jet, turbulence model, Nusselt number

1. INTRODUCTION

Impinging jets configurations are commonly used in numerous industrial applications such as drying of tissue, paper, textiles, and photographic films and cooling of high power density electronic components, because of their highly favorable heat and mass transfer characteristics.

The flow field of an impinging jet comprises three distinctive flow regions, namely a free jet region, a deflection region (or stagnation region) and a wall jet region. For high inlet-to-wall distances, the free jet region has three zones: the potential core zone, the developing zone and the fully developed zone (Viskanta, 1993). These regions are shown in Fig. (1). A shear layer is created due to the velocity difference between the potential core of the jet and the ambient fluid. Commonly this shear layer is the source of the turbulence in the jet; however, since in the present case, the inlet-to-wall distance is so short, there is not enough gap for mixing to happen with the surrounding fluid. As a result, the flow field in the vicinity of the stagnation point has low turbulence intensity. In the free jet region, the mean shear strain is zero and the production of kinetic energy is exclusively due to the normal straining. As the flow approaches the wall, the centerline velocity decreases to zero at the stagnation point. Moreover, the proximity of the solid boundary causes the deflection of the jet and a strong streamline curvature region is observed. Downstream the stagnation point, a wall jet evolves along the wall. Turbulence energy is increased due to the mean shear strain which dominates in the near-wall region.

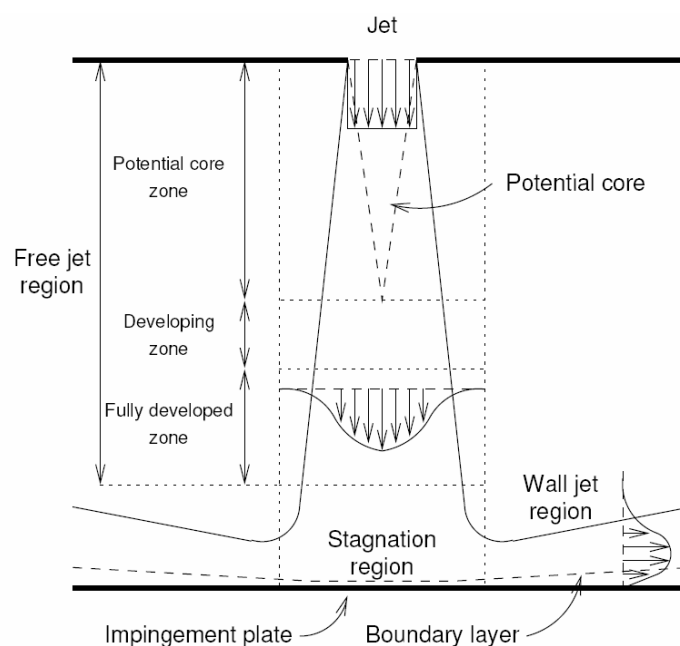


Figure 1. Flow regions of an axis-symmetric impinging jet.

The axi-symmetric impinging jet is a challenging case for turbulence models validation as well as measurements techniques, due to the flow characteristics described. This is evidenced by the great number of publications concerning experimental, theoretical and numerical analysis for this configuration.

Heat transfer rates in case of impinging jets are affected by various parameters like Reynolds number, nozzle-to-plate spacing (H/D), Prandtl number, target plate inclination, confinement of the jet, nozzle geometry, curvature of target plate, roughness of the target plate and turbulence intensity at the nozzle exit.

This technique is very attractive and cost-effective because it can increase heat flux significantly near the stagnation point; and the wall heat transfer change noticeably if H/D is smaller than approximately 0.5 (Behnia *et al.*, 1999).

A careful literature revision has been presented by both Martin (1977) and Downs & James (1987). They included discussions on the influence of various parameters that control the heat transfer rate, such as the Reynolds number, nozzle-to-plate spacing and jet turbulent intensity.

Lyttle and Webb (1994) have studied the effect of very low nozzle plate spacing ($H/D < 1$) on the local heat transfer distribution on a plate impinged by a circular air jet, by using an infrared thermal imaging system for temperature measurement. The velocity was measured by a Laser-Doppler Velocimetry (LDV) system. They found that in the acceleration range of the nozzle plate spacing ($H/D < 0.25$), maximum Nusselt number shifts from the stagnation point to the point of secondary peak with the effect being more pronounced at higher Reynolds number.

Huber and Viskanta (1994) found two secondary peaks for $H/D=0.25$ and a nozzle-diameter of 6.35 mm. These peaks occurred at approximately $r/D=0.7$ and 1.5. The inner peak was attributed to the fluid accelerating out of the stagnation region, thus thinning the local boundary layer, and to the influence of the shear-layer generated around the circumference of the jet. Chakroun *et al.* (1998) have studied the effect of surface roughness, in the form of cubes, on the heat transfer between impinging jets and flat plate. They have reported the heat transfer augmentation up to 8 to 28%. However their data reflects the average Nusselt number variation rather than local data because of the large thickness of the target plate used.

A detail experiment study of impinging jet hydrodynamics, with information on the main turbulent characteristics was presented in a paper by Cooper *et al.* (1993). They made hot-wire measurements of a fully developed circular impinging jet for nozzle-to-plate spacing within the range of $2 \leq H/D \leq 10$ and Reynolds numbers within the range of $23,000 \leq Re \leq 70,000$. Their results have been used for turbulence model assessment by, among others, Dianat *et al.* (1996) and Craft *et al.* (1993), who investigated the problem numerically, by employing a $\kappa-\omega$ eddy viscosity model. Very good predictions were obtained near the stagnation region of an impinging jet.

In 2002, Shi *et al.* studied the heat transfer of a turbulent jet flow, with several jet velocities and different nozzle-to-plate spacing (H/D), they proposed a computational study of impingement heat transfer under a turbulent slot jet, employing a $\kappa-\epsilon$ and RSM model, and they concluded that both models slightly over predicted the Nusselt number distributions under some conditions, the qualitative trends compared very well with the experimental trend in most cases. They noted that the turbulence length scale at the nozzle exit brings forth significant changes in the Nusselt number distribution by both the models, whereas the effect of turbulence intensity at the nozzle exit is more notable in case of only the RSM.

Nozaki *et al.* (2003) investigated experimentally the heat transfer characteristics of a swirling impinging jet, by combined particle image velocimetry (PIV) and laser-induced fluorescence (LIF) techniques for simultaneous measurement of velocity and temperature fields. Their study shows that the radial width of the jet stretches increases with swirl intensity, and that the stretching phenomenon contributes to the maximum local heat transfer coefficient. They also concluded that the dynamic behavior of recirculation zones, which is attributed to Swirl number S_w and impinging distance, mainly determines the turbulent heat transfer at the stagnation region.

A Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in plane impinging jet was studied by Hattori & Nagano (2004). It was found from the DNS results that the Nusselt number increases with a decrease in the distance H , similar to the experimental data. In addition, they concluded that for shorter distance cases, the second peak of the Nusselt number is observed away from the stagnation point, due to the increase in wall-normal turbulence intensities in the region away from the stagnation point.

Dejoan & Leschziner (2005) studied by means of large eddy simulation (LES) the mean-flow and turbulence properties of a plane wall jet, developing in a stagnant environment. The Reynolds number was 9,600 corresponding to well-resolved laser Doppler velocimetry and pulsed hot wire measurements of Eriksson *et al.* (2003). Profiles of velocity and turbulent Reynolds stresses in the self-similar region are presented and compared to experimental data. Good agreement is observed, in most respects, between the simulated flow and the corresponding experiment. This paper shows the decisive role played by turbulent transport in the interaction region, across which information is transmitted between the near-wall layer and the outer layer.

Hallqvist & Fuchs (2005) presented a study of the heat transfer of a turbulent swirling and non-swirling impinging jets, employing Large Eddy Simulation (LES) to determine flow and heat transfer characteristics. A nozzle-to-plate spacing $H/D = 2$ with Reynolds number of 23,800 and three Swirl numbers were considered. They concluded that the production of turbulence increases with swirl, and promotes better wall heat transfer. Abrantes (2005) investigated experimentally the same phenomena, adopting two nozzle-to-plate spacing $H/D=2$ and 6. The Reynolds number was 21,000 and three Swirl numbers 0, 0.3 and 0.5 were considered. The results indicated that circumferential components generate recirculation zones in the flow core, which significantly reduces the Nusselt number in the stagnation region.

An investigation employing CFD turbulent modeling of jet impingement and validation by particle image velocimetry and mass transfer measurements was published by Angioletti *et al.* (2005). They concluded that for higher Reynolds number, the agreement with the experimental data was improved by using κ - ε RNG or RSM turbulence models when simulating the flow field, whereas all models were largely inadequate in the heat exchange valuation.

Nakod *et al.* (2006) investigated a heat transfer augmentation between impinging circular air jet and flat plate using finned surfaces. The experimental parameters were the Reynolds number within the range of $6,500 \leq Re \leq 28,000$, based on the nozzle exit condition and jet to plate spacing of 0.5, 1 2 4 6 7 times the nozzle diameter. They concluded that the increase in heat transfer for finned surface may be because of the increase in the swirl, i.e., superposition of tangential velocity component onto the axial flow, which affects the turbulence characteristics of the flow and the decrease in the heat transfer coefficient at the top of the fins because of the increase in the heat transfer area.

Recently, Hadziabdic & Hanjalic (2007) used a Large Eddy Simulation (LES), in order to gain a better insight into flow, vortical and turbulence structure and their correlation with the local heat transfer in impinging flows. They employed a Reynolds number of 20,000 and the orifice-to-plate distance $H = 2D$. They concluded that a role of the periodic impact of large-scale eddies on the wall heat transfer is substantiated by the low level of stochastic turbulence and even negative production of the time-averaged turbulence kinetic energy around the stagnation point.

An interesting report about an analysis disagreement between numerically predicted and experimental heat transfer data of impinging jet was presented by Zhou *et al.* (2007). They applied a method of numerical simulation to investigate the effects of jet impinging plate thickness and its thermal conductivity on the local heat flux distribution along the impinging plate. The results show that these two factors have great effects on the heat flux distribution, and concluded that k - ε turbulent model dramatically over-predicts the impinging jet heat transfer in the stagnation region, because in the experimental research a real non-isoheat-flux is treated as an isoheat-flux boundary, which would result in underestimated Nusselt number value in the stagnation zone and an overestimated value outside.

Recently, experimental studies were carried by Alekseenko *et al.* (2007), and Kim & Giovannini (2007). In the first paper Alekseenko *et al.* presented an experimental study of an impinging jet with different swirl rates. They used a stereo PIV technique for your experimental study. The main emphasis of their work was the analysis of the influence of swirl rate on the flow structure. In their measurements, the Reynolds number was 8,900, the nozzle-to-plate distance was equal to three nozzle diameters and the swirl rate was varied from 0 to 1.0. They found that the magnitude of pressure diffusion decreased with the growth of the swirl rate, and concluded that swirling impinging jets had a spread rate and a more rapid decay in absolute velocity when compared to the non-swirling jet. In the second paper Kim & Giovannini presented an experimental study of turbulent round jet flow impinging on a square cylinder laid on a flat plate. The jet from a long round pipe was 75 pipe diameters (D) in length, the Reynolds number was 23,000, and the square cylinder characteristics were $(3D \times 3D \times 43D)$. Their measurements were performed using particle image velocimetry, flow visualization using fluorescent dye and infrared thermography. They investigated the turbulence statistics, observed the flow's topology, and demonstrated a three-dimensional recirculation after separating from the square cylinder. A secondary peak in heat transfer coefficient was observed, and its origin was attributed to very pronounced shear production coupled with the external turbulence coming from the free jet.

An investigation of turbulent impinging jet with constant heat flux surface was published this year by Isman *et al.* (2008), who employed a nozzle to plate spacing and Reynolds numbers in the ranges of $4 \leq H/D \leq 10$, and $4,000 \leq Re \leq 12,000$, respectively. They used a turbulent models based on Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) approach. They investigated the inlet turbulence intensity and heat flux boundary conditions effects on heat transfer and acceptable agreement with the measured values were obtained.

The present paper is part of on-going research regarding the flow characteristics of impinging jets. The objective of the present work is to evaluate the performance of the Reynolds Stress Model (RSM) in the characteristics prediction of the heat transfer process of an axisymmetric impinging jet on a plate, employing the commercial software Fluent, v.6.3. The mean velocity, Reynolds stresses profiles and heat transfer characteristics obtained are compared with available experimental and numerical data.

2. MATHEMATICAL MODELING

The Reynolds-averaged mass and momentum equations (RANS) were solved to determine the flow field. This approach is based on decomposing the velocity and temperature as $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ and $T = \bar{T} + T'$, where $\bar{\mathbf{u}}$ and \bar{T} are the average velocity vector and temperature; \mathbf{u}' and T' the velocity vector and temperature fluctuation. The average continuity, momentum and energy equation for a steady and incompressible flow is given by

$$\text{div } \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (1)$$

$$\text{div } (\rho \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = -\text{grad } p + \text{div } [\mu (\text{grad } \bar{\mathbf{u}} + (\text{grad } \bar{\mathbf{u}})^T)] + \text{div } (-\rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) \quad (2)$$

$$\text{div } (\rho \bar{\mathbf{u}} \bar{T}) = \text{div } \left[\frac{\mu}{Pr} \text{grad } \bar{T} \right] + \text{div } (-\rho \overline{\mathbf{u}' T'}) \quad (3)$$

where ρ is the density, μ is the molecular viscosity, Pr is the Prandtl number, p is the pressure. The momentum and energy equations presented have additional terms corresponding to the turbulent Reynolds stress term and the turbulent heat flux, $-\rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}$ and $-\rho \overline{\mathbf{u}' T'}$ respectively, representing the influence of the fluctuation on the average flow.

2.1. Reynolds Stress Model (RSM)

The Reynolds Stress Model, RSM (Gibson and Launder, 1978 & Launder *et al.* 1975) calculates all the components of the tensor $-\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}$ using their transport equation. The computing effort of this model is much higher than the eddy viscosity models; however, it is capable of predicting turbulent anisotropy, unlike the former models. The RSM transport equation is obtained from the Navier Stokes equation and can be written as

$$\text{div} (\rho \bar{\mathbf{u}} \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) = \text{div} [(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) (\text{grad } \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'})] + \mathbf{P} + \mathbf{\Pi} - \frac{2}{3} \rho \varepsilon \mathbf{I} \quad (4)$$

where \mathbf{I} is the identity matrix, \mathbf{P} is the stress production term and $\mathbf{\Pi}$ the pressure strain term are given by:

$$\mathbf{P} = -\rho [\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} \bullet (\text{grad } \bar{\mathbf{u}} + \text{grad } \bar{\mathbf{u}})^T] \quad (5)$$

$$\mathbf{\Pi} = -1.8 \rho \frac{\varepsilon}{\kappa} [\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} - \frac{2}{3} \kappa \mathbf{I}] - 0.6 [\mathbf{P} - \mathbf{C}] - \frac{2}{3} (P - C) \mathbf{I} \quad (6)$$

where $P = (1/2) \text{tr } \mathbf{P}$ and $C = (1/2) \text{tr } \mathbf{C}$, where \mathbf{C} is the convective term, and κ the energy kinetic, defined as

$$\mathbf{C} = \text{div} (\rho \bar{\mathbf{u}} \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) \quad \text{and} \quad \kappa = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}' \bullet \mathbf{u}'} \quad (7)$$

and ε , the dissipation rate of κ , is determined by the same ε equation of the standard κ - ε model. The turbulent viscosity is μ_t , and it is also the same as the turbulent viscosity of the κ - ε model:

$$\mu_t = \frac{\rho C_\mu \kappa^2}{\varepsilon} \quad \text{where} \quad C_\mu = 0.09. \quad (8)$$

3. PROBLEM SETUP

The computational domain was defined based on the experimental apparatus of Abrantes (2005), with nozzle-to-plate spacing ($H/D=2$). The length in the radial direction was set equal to $13D$, where D is the diameter of the inlet jet equal to 13 mm. The origin of the Cartesian coordinate system is located at the stagnation point. As already mentioned, it was assumed symmetry in the angular direction; therefore, the problem was modeled as two-dimensional.

The density and viscosity of air were taken as 1.225 kg/m^3 and $1.7894 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$, respectively. The Reynolds number based on the nozzle diameter, $D=13 \text{ mm}$, and average mean inlet jet velocity U_j

$$\text{Re} = \frac{\rho U_j D}{\mu} \quad (9)$$

was defined as 21,000. The inlet axial values of velocity and inlet kinetic energy κ_{in} were obtained from the experimental LDV data of Abrantes (2005). The inlet specific dissipation ω_{in} was obtained based on the turbulence length scale $l=0.07 D$ as $\omega_{in} = (\kappa_{in})^{0.5} / [l (C_\mu)^{0.25}]$.

Non slip condition was imposed at the plate boundary, where a constant heat flux $q_w = 1359.5 \text{ W/m}^2$ was imposed. At the symmetry axis, zero gradients were imposed to the axial velocity component and temperature, while the radial velocity is null. At all other boundaries, a pressure condition equal to 1 atm was considered, representing ambient far field condition, with the ambient temperature T_∞ equal to the mean jet temperature $T_j = 27.2 \text{ }^\circ\text{C}$.

4. NUMERICAL METHOD

The flow field was numerically obtained with the commercial software *FLUENT*, v6.3, which is based on the Finite Volume method (Patankar, 1980). The "QUICK" scheme was used for the convective fluxes as this reduces the numerical diffusion, and the SIMPLE algorithm was employed to resolve the pressure-velocity coupling. The solution was considered converged when the sum of the normalized residuals of all equations was smaller than 10^{-6} .

A non uniform mesh, refined in the region closer to the centerline of the jet, and in the region near the impinging wall, with 24,000 control volumes was generated with the *FLUENT* auxiliary tool *GAMBIT*. A grid independent solution was assured by comparing results obtained with a finer grid with 30,000 control volumes. It was observed differences between the solutions for the radial velocities inferior to 0.3%. The axial velocity profiles under the jet for these simulations were also in close agreement with each other.

The influence of the far field boundary condition was also investigated, and it was concluded that a larger computational domain was not necessary.

5. RESULTS

To evaluate the Reynolds Stress Model (RSM), the mean velocity and Reynolds stresses profiles are compared with available experimental data of Abrantes (2005), and results from the LES simulation of Hadziabdic (2007), in which nozzle-to-plate spacing is $H/D=2$.

Figure 2 presents a comparison of the normalized mean radial velocity v/U_j along the axial direction y/D , for several radial positions (r/D). To better visualize the results, the profiles are shown only near the flat plate. Away from it, the agreement between the prediction and experimental data was very good. Near the symmetry axis (small r/D), an increase in the peak of the radial velocity near the plate can be observed, but as one moves away from the axis, the velocity peak rapidly decays.

Figure 2a illustrates that the numerical predictions with the Reynolds Stress Model (RSM) model presented a good agreement with the LES prediction of Hadziabdic (2007). The turbulence models predictions show the same tendency as the experimental data, with the exception of the region near the symmetry axis ($r/D=0.5$), where the jet bends, and the agreement with the experimental data is poor. It can be seen that the mean radial velocity is over predicted for small r/D (Fig. 2a) and underpredicted as the boundary layer develops along the plate (larger r/D shown at Fig.2b). The agreement improves close to the plate as one move along it, due to the reduction of the velocity gradient. However for larger r/D , a higher jet spreading was obtained with the numerical model when compared to the experimental data, due to numerical diffusion.

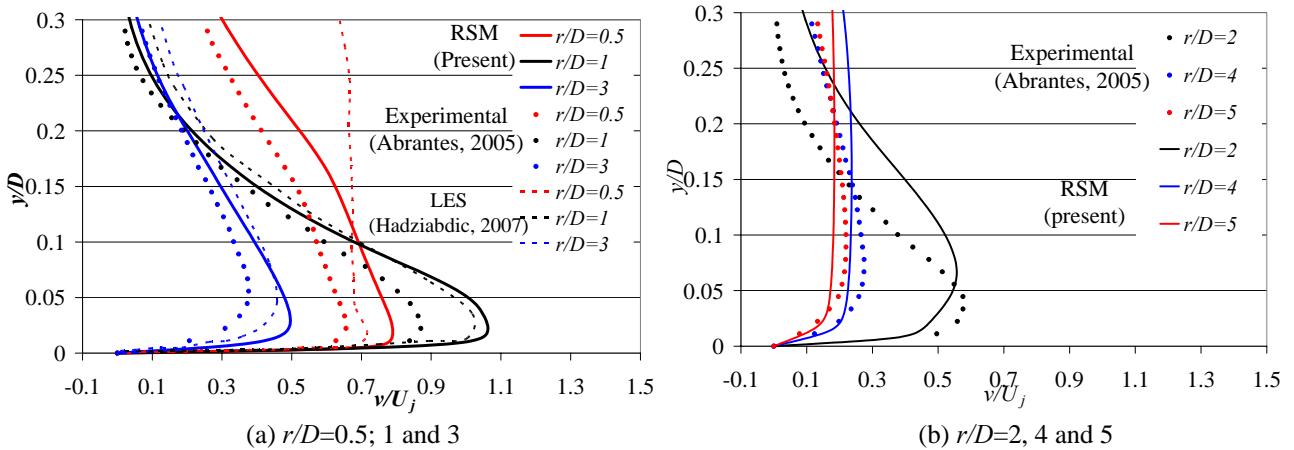


Figure 2. Mean radial velocity profiles.

The velocity and axial coordinate can be dimensionless with the help of the friction velocity v^* as

$$v^+ = \frac{\bar{v}}{v^*} \quad ; \quad y^+ = \frac{\rho v^* y}{\mu} \quad \text{where} \quad v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (10)$$

where τ_w is the shear stress at the wall.

Figure 3 presents the dimensionless mean radial velocity v^+ along the dimensionless axial direction y^+ , for several radial positions (r/D). It can be seen the linear velocity ($u^+=y^+$) behavior near the wall ($y^+ < 5$) and logarithmic relation between $5 < y^+ < 10$ indicating the fully turbulent region. After that, there is a decay of the velocity to zero. It can also be seen that as the flows develops along the flat plate (larger r/D position) the flow becomes similar, since the curve tend to collapse. In this figure a comparison between the RSM and the experimental data of Abrantes (2005) is also shown. Although the same tendency is observed, the similar velocity field is numerically obtained further downstream along the plate.

The Reynolds stress can be calculated from the solution of Eq. (4). The norm rms of the turbulent fluctuations are

$$\text{rms}(u') = \sqrt{u'^2} \quad ; \quad \text{rms}(v') = \sqrt{v'^2} \quad (11)$$

The norm rms of the radial and axial turbulent velocity fluctuation are presented in Figs. 4 and 5. Figure 4 illustrates a comparison of both turbulent velocities near the symmetry axis with the experimental data of Abrantes (2005) and the LES data of Hadziabdic (2007). Figure 5 presents the turbulent velocity components profile along the axial direction at several radial positions, with the experimental data de Abrantes (2005).

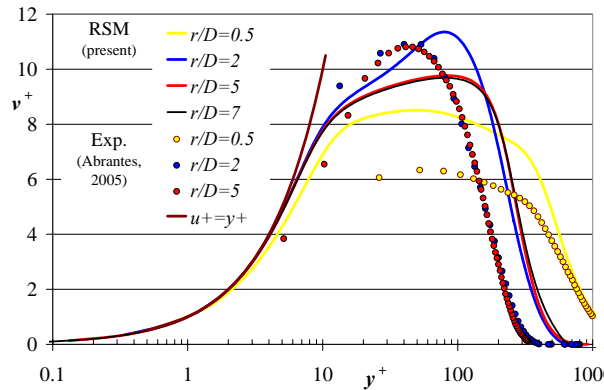
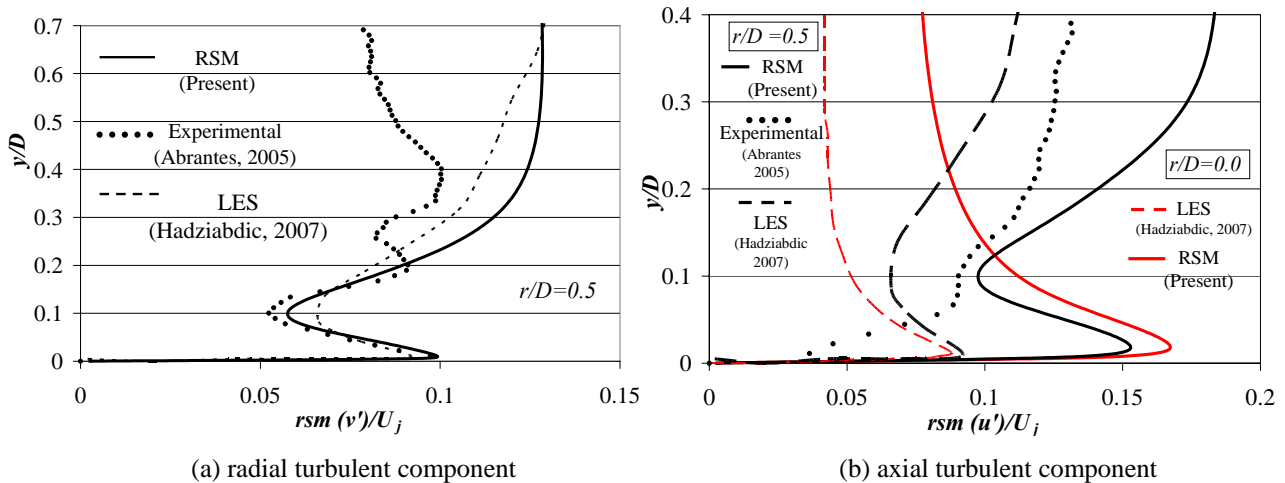


Figure 3. Mean velocity profile in wall units.

It can be seen in Fig. 4 that the velocity fluctuation near the plate is of the same order of magnitude in the radial and axial direction. Note that the RSM predictions have the same trend as the LES predictions, with a better agreement with the experimental data for the radial component than axial component. Close the plate, there is a clear peak of $rms(v')$, just after the axial jet has turned. In this region, the agreement with the experimental data is very good (Fig. 4a). For positions above $y/D=0.2$, both turbulent models present similar behavior, which are very different than the experimental one. At this radial coordinate, the flow is actually quite complex, with high fluctuations, that can explain the discrepancies between the results. Examining Fig. 4b, it can be observed that for the axial turbulent component, $rms(u')$, both turbulent model predicted similar trends. It can also be seen that the discrepancy with the experimental data for this component is larger very close to the wall, where a peak of $rms(u')$ is not present in the experimental data. Except for this region, qualitatively, the numerical prediction is reasonable, with RMS underestimating $rms(u')$ and LES over estimating.



(a) radial turbulent component (b) axial turbulent component
 Figure 4. Comparisons of turbulent velocities profiles at $r/D=0$ and $r/D=0.5$.

Figure 5 illustrates the variation of the axial and radial turbulent fluctuations along the axial direction at several radial positions. It is interesting to observe that both turbulent components increase near the wall as the radius increase up to $r/D=2$, and then decreases as the boundary layers develops along the plate. Far from the plate the turbulence decays to zero, as expected. The measured data of Abrantes (2005) illustrated in Fig. 5 shows lower levels of turbulent intensity in the region close to the wall, i.e., the RSM prediction overestimated the peak values of turbulent axial and radial profiles. Larger spreading is also observed, indicating that the model is too dissipative, but it is capable of capturing the main flow characteristics. The agreement of the peak values with the experimental data improves when r/D increases. It can be observed that the RSM was only able to predict a qualitative reasonable result, with large discrepancies in the maximum values. Note that the experimental data showed smaller axial velocity fluctuations in relation to the radial fluctuations, however, the RSM model predicted approximately the same order of magnitude of both fluctuations. The turbulent intensity is diffused towards the jet axis, and therefore the position of peak values of the turbulent axial velocity shifts to the centerline as the axial distance from the jet axis grows. Although the RSM model claims to be able to predict turbulence anisotropy, the discrepancies observed can be explained by the lack of the third dimension in the simulations.

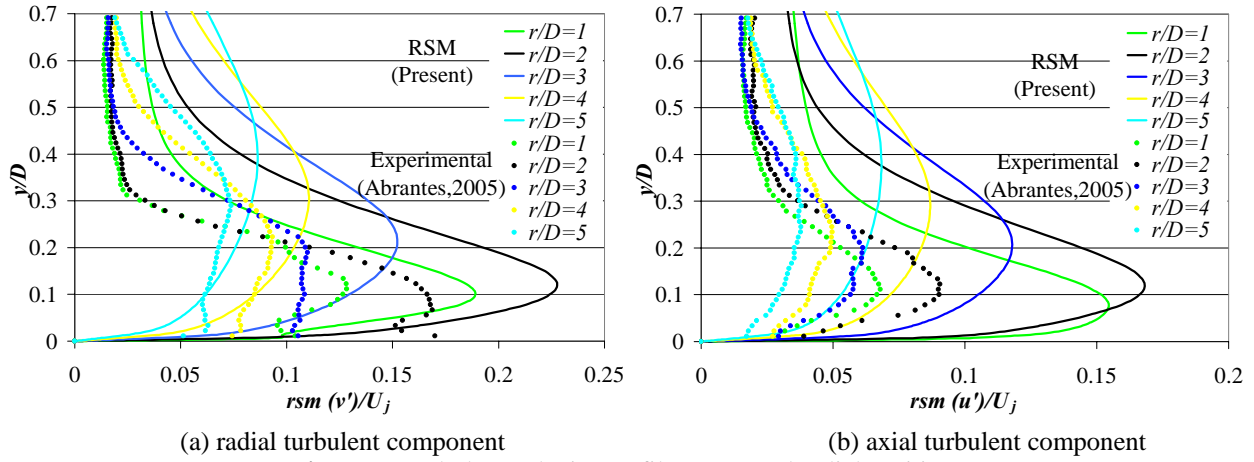


Figure 5. Turbulent velocity profiles at several radial positions.

The turbulent shear Reynolds stress $\overline{u'v'}/U_j^2$ profiles are presented in Fig. 6. Once again, it can be said that a qualitative agreement was obtained, but shear Reynolds stress was also over predicted.

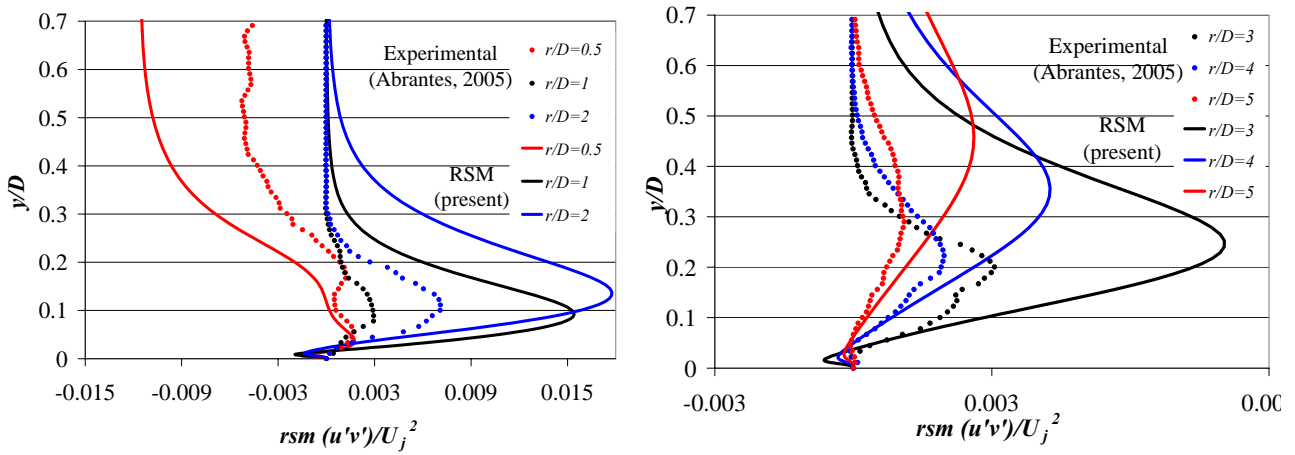


Figure 6. Turbulent shear Reynolds stress profiles.

The pressure and shear stress distribution along the plate can be dimensionalized as

$$C_p = \frac{P - P_{atm}}{\frac{1}{2} \rho U_j^2} \quad ; \quad C_\tau = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_j^2} \quad (12)$$

Figure 7 presents the pressure and shear stress coefficient (skin friction) along the wall. The high pressure corresponding to the stagnant pressure can be clearly seen at $r/D=0$. It decays smoothly and at $r/D \approx 1.5$, the pressure has already equated with the ambient pressure. The peak of the shear stress occurs in the deflection region, displaced from the axis, at r/D approximately equal to 0.7. After this position, it decays with a typical boundary layer behavior.

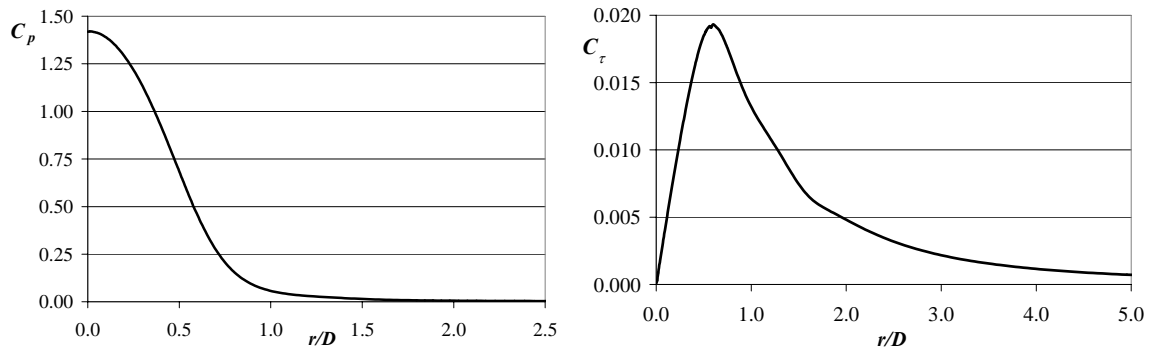
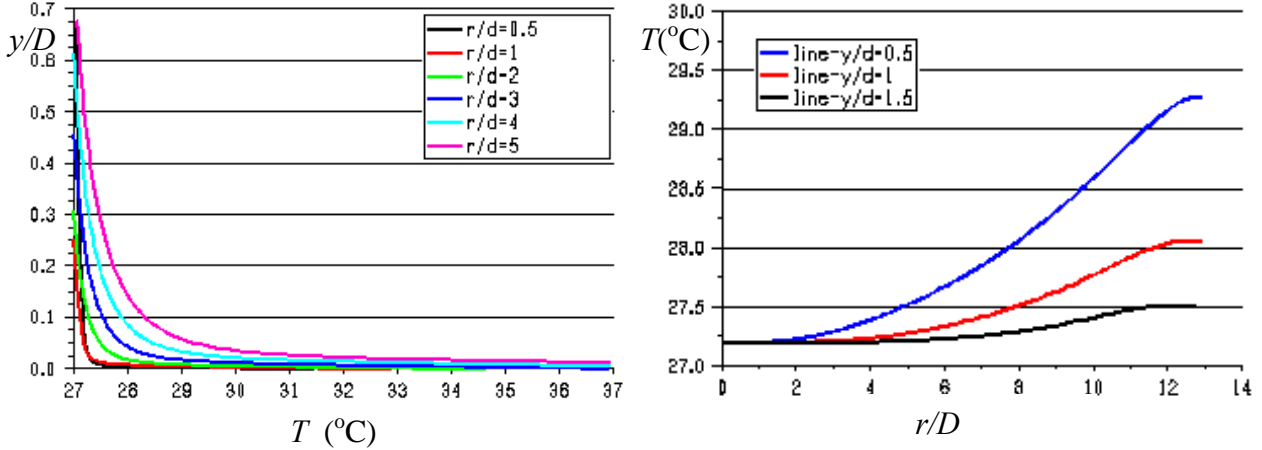


Figure 7. Pressure and shear stress coefficients along the wall.

The temperature distribution along the axial direction is illustrated at Fig. 8a at various r/D positions. The jet temperature remains approximately constant until it reaches the plate and due to the imposed heat flux it rapidly increases. A thermal boundary layer can be observed along the plate, with the maximum heat transfer at the stagnation point ($r/D=0$). Figure 8b shows the temperature profile along the radial direction at three axial positions. At the jet region $r/D < 0.5$, the temperature is approximately constant and equal to the jet temperature. As one moves away from the symmetry axis, due to the boundary layer formation along the plate, the air temperature increases, with higher values near the plate surface.



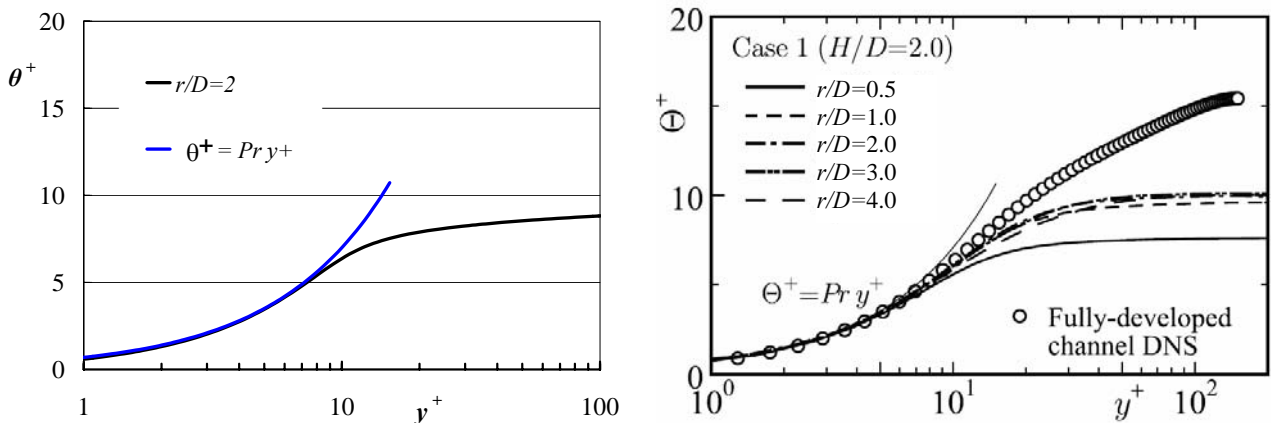
(a) Axial direction at different r/D positions (b) radial direction at different y/D positions

Figure 8. Temperature distribution.

The dimensionless temperature can be defined based on the heat flux and friction velocity as

$$\theta^+ = \frac{(T_w - T_p)}{\theta^*} \quad \text{where} \quad \theta^* = \frac{q_w}{\rho c_p v^*} \quad (13)$$

At Figure 9 the distribution of mean temperature in wall unit is presented, and this is compared with the direct numerical simulations (DNS) data of Hirofumi and Nagano (2004). The mean temperature obtained at the present work with RSM for the coordinate $r/D=2$ presented excellent agreement with the numerical simulation (DNS) of Hirofumi and Nagano (2004). It can also be observed that for both simulations for y^+ less than eight, the dimensionless temperature θ^+ varies linearly with the distance y^+ and it is proportional to Pr .



(a) RSM model, present

(b) DNS data (Hirofumi and Nagano, 2004).

Figure 9. Distribution of mean temperature in wall unit

The Nusselt number is defined as

$$Nu = \frac{h D}{k} = \frac{q_w D}{(T_j - T_s) k} \quad (14)$$

Figure 10 shows a comparison of the Nusselt number at the wall obtained with the RSM model with the experimental data of Abrantes (2005) and LES results of Hadziabdic and Hanjalic (2007). It can be observed that the LES prediction is superior to the RSM prediction, which overestimates the peak value at the stagnation point. A secondary peak can be seen at $r/D=2$. This local maximum has been observed by a number of previous works of jet impinging on a wall, when jet-to-plate spacing is relatively small ($H/D < 6$), and its origin has been extensively discussed (Baughn and Shimizu, 1989; Kim, 2007). The secondary peak can be associated with the region where the turbulent kinetic energy reaches a maximum, as shown in Fig. 11. The RSM model was able to predict the turbulent kinetic energy generation at $r/D \approx 2$, and for $r/D > 2$, both turbulence models predicted similar results.

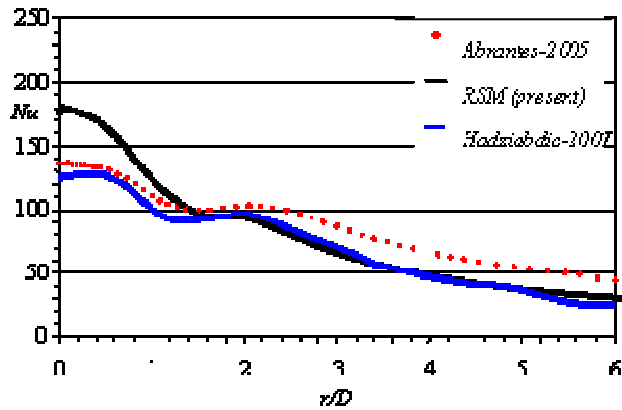


Figure 10. Distribution of Nusselt number at the wall.

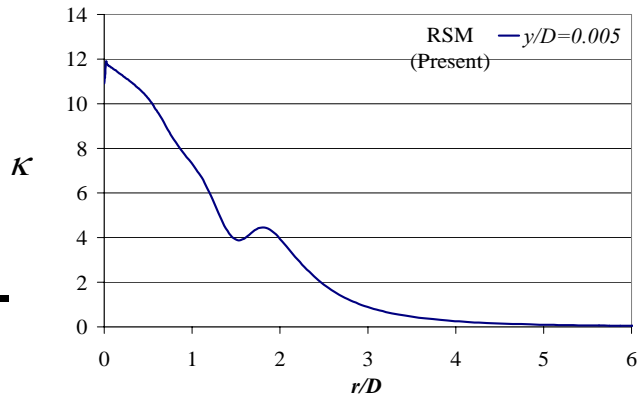


Figure 11. Distribution of turbulent kinetic energy at $y/D=0.005$.

Contours of turbulence kinetic energy obtained with the RSM model can be seen in Fig. 12a, while the LES results of Hadziabdic and Hanjalic (2007) is shown in Fig. 12b. The figures reveal that the main κ production occurs in the high-shear regions. The maximum κ occurs in the shear layer roughly half-way downstream from the jet exit, then decays in the deflection region, and recovers again in the wall jet region. In the jet core, however, there is not much activity. As already mentioned, the high levels of kinetic energy are responsible for the increase in the heat transfer.

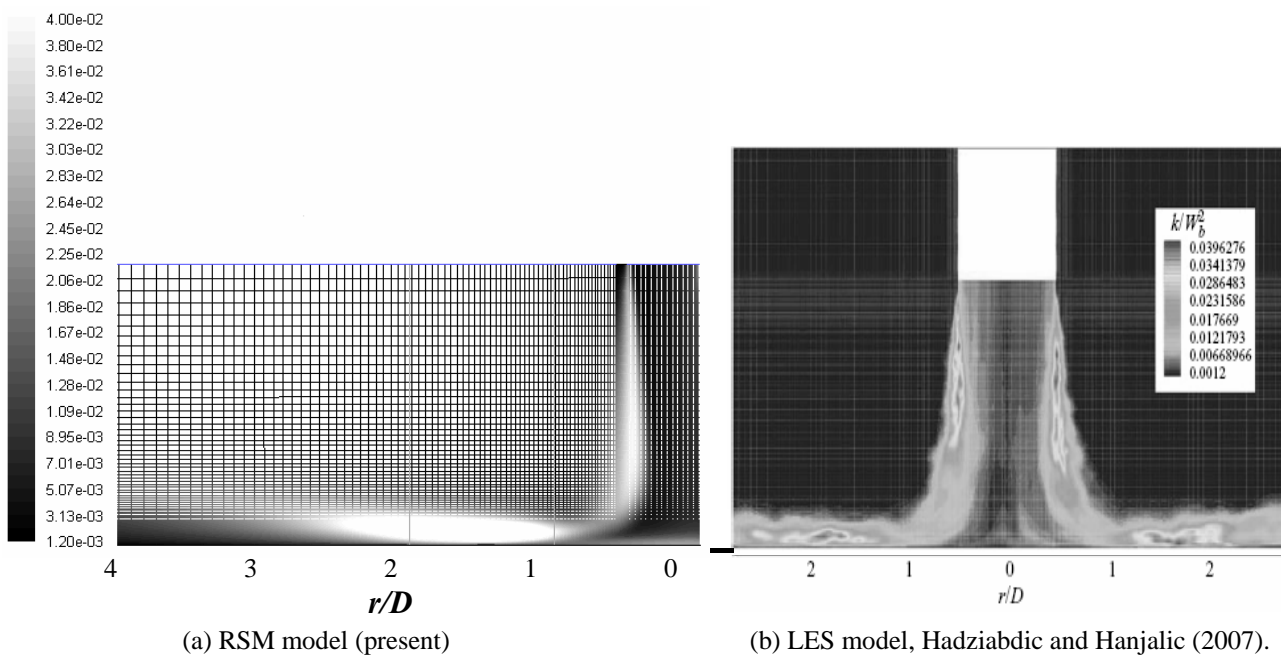


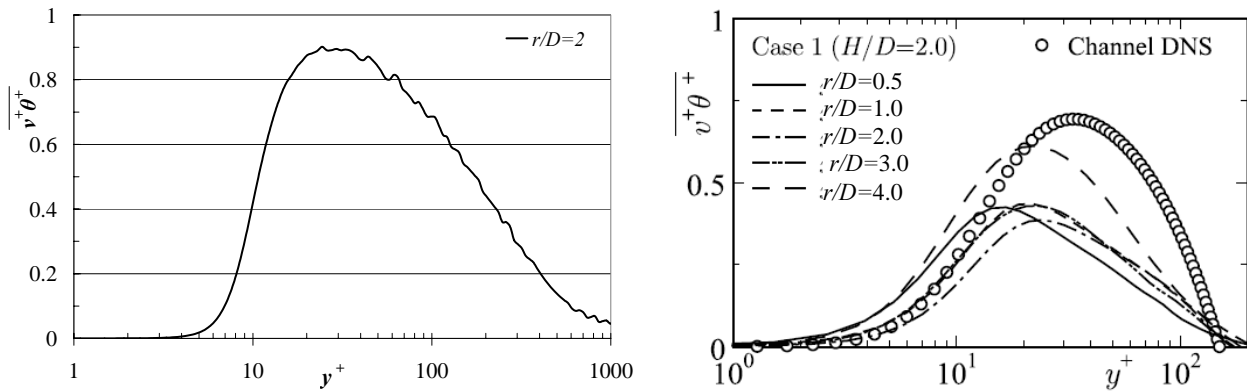
Figure 12. Contours of turbulence kinetic energy.

Figure 13a shows the distribution of wall-normal turbulent heat-flux in wall unit at the coordinate $r/D=2$, obtained with the RSM model, while Fig. 13b shows the DNS result of Hirofumi and Nagano (2004). A dimensionless wall-

normal turbulent heat-flux $\overline{v^+ \theta^+}$ with a friction velocity v^* and the temperature friction θ^* , can be calculated as:

$$\overline{v^+ \theta^+} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{dT}{dy} \quad ; \quad \text{where} \quad Pr_t = 0.85 \quad (15)$$

It can be seen a qualitatively agreement between the two solutions presented. The turbulent heat flux increases for $y^+ > 5$ and reaches a maximum at $y^+ \approx 30$. However, the RSM model predicted a sharper and higher wall-normal turbulent heat-flux, what explains why the Nusselt number predicted near the stagnation point is higher for the RSM model. The effect of a wall-normal turbulent heat-flux in the Nusselt number was investigated by Hirofumi and Nagano (2004), and they concluded that several parameters play a key role in the occurrence of the second peak of the local heat transfer rate (Nusselt number), such as the turbulent diffusion of both the wall-normal heat-flux and turbulence intensity, the production of the wall-normal heat-flux, and the pressure diffusion of the wall-normal turbulence intensity.



(a) RSM model, present. $H/D=2$.

(b) DNS data (Hirofumi and Nagano, 2004).

Figure 13. Distribution of wall-normal turbulent heat-flux in wall unit.

6. CONCLUSIONS

In this work, the RSM was tested to evaluate its performance in the prediction of the heat transfer of an impinging jet. A comparison with experimental data showed some discrepancies, although the qualitative results were reasonable. The RSM overestimated the peak values of mean velocity radial, turbulent radial velocity, turbulent axial velocity and turbulent shear Reynolds stress. The discrepancies can be attributed to the dissipation, leading to high levels of diffusion, especially in the axial momentum. The absence of the third component in the RSM modeling is also responsible for the discrepancies obtained.

It was observed that RSM overestimated a Nusselt number in the stagnation region. The occurrence of the second peak of the Nusselt number is associated with high levels turbulence kinetic energy, and it was reasonable predicted with both RSM and LES models.

Although the RSM overestimated several variables, the qualitative behavior was reasonable. The results obtained with the RSM model were also similar to LES and DNS predictions. Considering the reduced computational effort in relation to LES or DNS simulations, the quality of results can be considered acceptable, since the correct tendencies were predicted.

In general terms, this model RSM presented reasonable results in terms of low computational effort and quality of results, compared with experimental data.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors gratefully acknowledge the support awarded to this research by the Brazilian Research Council – CNPq.

8. REFERENCES

- Abrantes, J.K., 2005, “Estudo do Escoamento e Transferência de Calor em um Jato Espiralado Incidente”, Master’s Thesis, in portuguese, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-RJ.
- Alekseenko, S. V., Bilsky, A.V., Dulin, V. M. and Markovich, D. M., 2007, “Experimental study of an impinging jet with different swirl rates”, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 28, No. 6, pp. 1340-1359.

- Angioletti, M., Nino, E., and Ruocco, G., 2005, "CFD Turbulent Modelling of Jet Impinging and its Validation by Particle Image Velocimetry and Mass Transfer Measurements", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 44, pp. 349-356.
- Behnia, M., Parneix, S., Shabany, Y. and Durbin, P.A., 1999, "Numerical study of turbulent heat transfer in confined and unconfined impinging jets", *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 20, pp. 1-9.
- Chakroun, W.M., Abdel-Rahman, A.A., and Alfahed, S.F., 1998, "Heat Transfer Augmentation for Air Jet Impinged on a Rough Surface", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 18, pp. 1225-1241.
- Cooper, D., Jackson, D.C., Launder, B.E. and Liao, G.X., 1993, "Impinging jet studies for turbulence model assessment-I. Flow-field experiments", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 2675-2684.
- Craft, T.J., Graham, L.J.W. and Launder, B.E., 1993, "Impinging jet studies for turbulence model assessment-II. An examination of the performance of four turbulence models", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 2685-2697.
- Dejoan, A., and Leschziner, M., 2005, "Large eddy simulation of a plane turbulent wall jet", *Physics Fluids*, Vol. 17, 025102.
- Dianat, M., Fairweather, M. and Jones, W.P., 1996, "Predictions of axisymmetric and two-dimensional impinging turbulent jets", *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 530-538.
- Downs, S.J. and James, E.H., 1987, "Jet Impingement Heat Transfer – A Literature Survey", ASME, Paper no. 87 – HT-35.
- Eriksson, J., "Experimental studies of the plane turbulent wall jet", Ph. D. Thesis, Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, Stockholm, Sweden, 2003.
- Fluent Users Guide, 2008, Fluent Inc.
- Gibson, M.M., Launder, B.E., 1978, "Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer", *J. Fluid Mech.*, Vol. 86, pp. 491-511.
- Hadziabdic, M. and Hanjalic, K., 2007, "Vortical structures and heat transfer in a round impinging jet", *Journal Of Fluid Mechanics*, Vol. 596, pp. 221-260.
- Hallqvist, T. and Fuchs, L., 2005, "Numerical study of swirling and non-swirling annular impinging jets with heat transfer", 35th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Toronto, Ontario, Canada, 6-9 June. pp. 1-14.
- Hattori, H. and Nagano, Y., 2004, "Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in plane impinging jet", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 25, No. 5, pp. 749-758.
- Huber, A.M., Viskanta, R., 1994, "Convective Heat Transfer to a Confined Impinging Array of Air Jets With Spent Air Exists", *Transactions of the ASME*, Vol. 116, pp. 570-576.
- Isman, M. K., Pulat, E., Etemoglu, A. B. and Can, M., 2008, "Numerical Investigation of Turbulent Impinging Jet Cooling of a Constant Heat Flux Surface", *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 53, No. 10, pp. 1109 – 1132.
- Kim, N.S. and Giovannini, A., 2007, "Experimental study of turbulent round jet flow impinging on a square cylinder laid on a flat plate", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 28, No. 6, pp. 1327-1339.
- Launder, B.E., 1989, "Second-Moment Closure and its use in Modeling Turbulent Industrial Flows", *Int. Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 9, pp. 963-985.
- Launder, B.E., Reece, G.J., and Rodi, W., 1975, "Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure", *J. Fluid Mech.*, Vol. 68(3), pp. 537-566.
- Lytle, D., and Webb, B. W., 1994, "Air Jet Impinging Heat Transfer at Low Nozzle-Plate Spacings", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 1687-1697.
- Martin, H., 1977, "Heat and Mass Transfer between Impinging Gas Jets and Solid Surfaces", *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, Inc., New York, E.E.U.U, Vol. 13, pp. 1-60.
- Nakod, P.M., Prablu, S.V., and Vedula, R.P., 2006, "Heat Transfer Augmentation Between Impinging Circular Air Jet and Flat Plate using Finned Surfaces", 18th National & 7th ISHMT-ASME Heat and Mass Transfer Conference, January 4- 6, IIT Guwahati, India.
- Nozaki, A., Igarashi, Y. and Hishida, K., 2003, "Heat transfer mechanism of a swirling impinging jet in a stagnation region", *Heat Transfer – Asian Research*, Department of System Design Engineering, Keio University, Yokohama, Japan, Vol. 32, No. 8, pp. 663-673.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing, New York.
- Shi, Y., Ray, M.B., and Mujumdar, A.S., 2002, "Computational study of impingement heat transfer under a turbulent slot jet", *Industrial Engineering and Chemical Research*, Vol. 41, pp. 4643-4651.
- Viskanta, R., 1993, "Heat transfer to impinging isothermal gas and flame jets", *Exp. Thermal Fluid Sci.* Vol. 6, pp. 111-134.
- Zhou, P., Ye, L., Zhou, J., and Yang, Y., 2007 "Analysis of disagreement between numerically predicted and experimental heat transfer data of impinging jet", *Journal of Central South University of Technology*, Changsha, China. Vol. 13, pp. 486-490.

9. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

EXPERIMENTOS EM TÚNEL DE VENTO DA CAMADA LIMITE INTERNA NO CENTRO DE LANÇAMENTO DE ALCÂNTARA

Luciana Bassi Marinho Pires, luciana.bassi@cptec.inpe.br

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)
Avenida dos Astronautas, 1.758 – Jardim da Granja
CEP: 12227-010 – São José dos Campos – SP – Brasil

Ana Cristina Avelar, anacristina@iae.cta.br

Instituto de Aeronáutica e Espaço (CTA/IAE-ALA)
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acácias
CEP: 12228-904 – São José dos Campos – SP – Brasil

Roberto da Motta Girardi, girardi@ita.br

Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acácias
CEP: 12228-904 – São José dos Campos – SP – Brasil

Gilberto Fisch, gfisch@iae.cta.br

Instituto de Aeronáutica e Espaço (CTA/IAE-ACA)
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acácias
CEP: 12228-901 – São José dos Campos – SP – Brasil

Resumo. A Camada Limite Interna (CLI) é um importante processo físico, associado ao movimento do ar atmosférico, que ocorre devido a mudança da rugosidade da superfície. No Centro de Lançamento de Alcântara (CLA) ocorre a formação de uma CLI, causada por uma falésia com um desnível de 40 m. A 150 m a jusante desta falésia localiza-se a Torre Móvel de Integração (TMI) do CLA, com 50 m de altura. Esta situação foi simulada no Túnel de Vento (TV) aeronáutico que está instalado no Laboratório Kwein Lien Feng do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), junto ao Comando Geral de Tecnologia Aeroespacial (CTA). O TV é um modelo convencional aberto, subsônico, com seção de testes quadrada (465 mm x 465 mm), comprimento de 1200 mm e potência de 30 hp, gerando ventos de até 33m/s. As características do escoamento foram determinadas utilizando-se a técnica de Velocimetria por Imagens de Partículas ("Particle Image Velocimetry" - PIV). Foram realizados experimentos com inclinações de 45°, 70°, 90°, 110° e 135° devido à forma irregular das falésias e com ventos de diversas direções atingindo a falésia. Os resultados mostram que a CLI atinge a TMI a uma altura aproximada de 15 m para a falésia de 90°, 11 m para a falésia de 135° e 19 m para a falésia de 45°, mas já fora da região de recirculação do escoamento.

Keywords: Velocimetria por Imagem de Partículas, Perfil de Vento, Vorticidade, Torre Móvel de Integração

1. INTRODUÇÃO

A região do Centro de Lançamento de Alcântara (CLA), de onde são lançados os foguetes brasileiros, localiza-se a jusante de uma falésia, conforme a Fig. 1. O vento, inicialmente em equilíbrio com a superfície oceânica, interage com a vegetação arbustiva de altura média igual a 3 m existente a jusante da falésia, modificando-se, com a formação de uma Camada Limite Interna (CLI), fatos que afetam, por exemplo, a ascensão vertical dos foguetes (Fisch, 1999).

De acordo com dados observacionais e experimentais realizados sobre condições de estabilidade neutra, o crescimento da altura da CLI segue a seguinte lei de potência:

$$\frac{\delta}{z_{o2}} = a_{CLI} \cdot \left(\frac{x}{z_{o2}} \right)^{b_{CLI}} \quad (1)$$

onde x (em m) é a distância à montante da falésia e z_{o2} é o comprimento da rugosidade aerodinâmica (m). Os valores adimensionais da constante empírica a estão entre 0,35 e 0,75 e b entre 0,1 (superfícies lisas) e 0,4 (áreas urbanas) (Arya, 2001). Atualmente, a_i depende também da definição da altura da CLI. O topo da CLI pode ser definido como o nível onde a velocidade média do vento, o fluxo turbulento, ou a variação da velocidade alcança uma fração específica (0,90-0,99) do valor de equilíbrio da corrente (Arya, 2001). Algumas vezes, a_{CLI} é parametrizada em função das rugosidades anterior e posterior a este ponto de descontinuidade (Stull, 1988):

$$a_{CLI} = 0.75 + 0.03 \ln \left(\frac{z_{o2}}{z_{o1}} \right) \quad (2)$$

onde z_{o1} é o comprimento da rugosidade aerodinâmica a jusante.



Figura 1. Falésia de Alcântara junto ao CLA.

Estudos teóricos, numéricos e experimentais da CLI em condições atmosféricas neutras foram realizados por Pendergrass e Arya (1984), que compararam a simulação de duas (rural e urbana) camadas limite (CL) sobre superfícies homogêneas com uma CLI desenvolvida sobre uma mudança de rugosidade na superfície que foi caracterizada por diferentes leis de potência, cisalhamento da velocidade na corrente livre e altura da CL para o parâmetro rugosidade, onde a evolução da altura da CLI foi identificada. A variação da altura da CLI com a distância x da localização da mudança de rugosidade é bem descrita pela fórmula de Elliot (Eq.1), com $b = 0.8$ e $a \cong 0.35$. Sempreviva *et al.*, (1990) descreveram o problema do desenvolvimento da CLI para grandes distâncias usando as leis de arraste para estimar o vento superficial. Este estudo foi realizado durante dois anos com quatro mastros meteorológicos de 30 m, espaçados de 0 a 30 km no interior da costa norte da Dinamarca. Källstrand e Smedman (1997) apresentaram uma comparação de medidas aéreas realizadas na parte sul da costa leste da Suécia com várias estimativas de modelos para a altura da CLI, concluindo que a maioria dos modelos superestima a altura da CLI, e obtendo resultados razoáveis para a costa e piores para longas distâncias (em torno de 15 km). Finalmente, Savelyev e Taylor (2005) apresentaram um resumo de fórmulas para obtenção da CLI. A Figura 2 mostra o desenvolvimento esquemático da CLI vindo de uma superfície lisa (por exemplo, oceano) para uma superfície rugosa (por exemplo, continental).

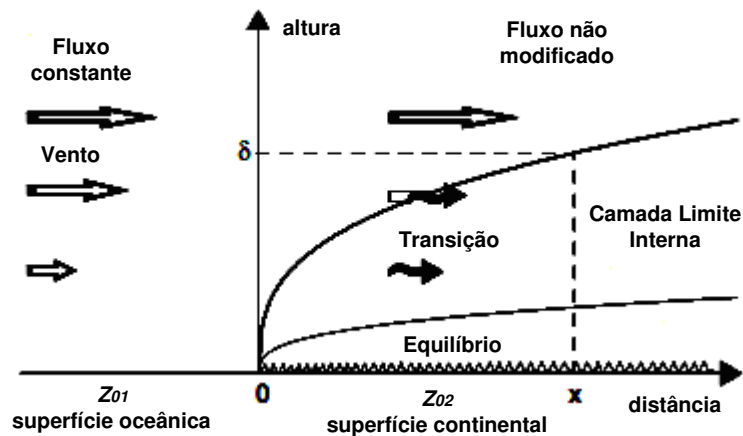


Figura 2. CLI formada a partir da mudança de uma superfície lisa para uma rugosa. (adaptado de Savelyev e Taylor, 2005).

Embora os dados de vento sejam usualmente coletados em estações meteorológicas, medições adicionais ou estimativas são requeridas para obtenção de dados detalhados do vento em certas localizações. Em geral, as características do vento são divididas em quatro grupos: os perfis verticais do vento, a velocidade média, a intensidade turbulenta e espectro da turbulência (Liu, 1990). Johnson (1993), por exemplo, faz uma compilação completa nos principais elementos climáticos dos campos de lançamentos de foguetes nos Estados Unidos. Kwon *et al.* (2003) realizaram estudos experimentais num túnel de vento para estudar as condições atmosféricas da ilha de Oenaro-Do,

onde o Centro Espacial da Coréia do Sul (Naro Space Center) está sendo construído. Em relação ao vento, o conhecimento de sua estrutura vertical (perfis médios e rajadas de vento) é importante, pois os foguetes são projetados e construídos para suportarem uma determinada carga pela ação do vento, além do fato de que, a trajetória, o controle e a guiagem dos mesmos, são determinados pelo perfil de vento próximo à superfície.

O objetivo desse trabalho é analisar através de experimentos realizados em túnel de vento, a altura da CLI formada no CLA e também os campos de vorticidade formados com a incidência de ventos de 35° e 55°, e sua influência na Torre Móvel de Integração (TMI), de onde os foguetes são lançados.

2. LOCALIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO

O Centro de Lançamento de Alcântara (CLA) localiza-se na costa litorânea do Maranhão, com coordenadas geográficas de 2°19' de latitude sul e 44°22' W de longitude oeste, 40 m de altitude e distante 30 km em linha reta, da cidade de São Luiz. Nele são lançados os foguetes brasileiros, tais como o Veículo Lançador de Satélite (VLS) e os de Sondagens (SONDA II, SONDA III, VSB30 e VS40). A Figura 3 mostra a respectiva localização do CLA e da TMI.



Figura 3. Localização do CLA e da TMI.

O CLA possui características típicas de uma região de rugosidade abrupta: superfícies lisas próximas às superfícies rugosas. Próximo a esta região, sobre a rampa de lançamento de foguetes do CLA, encontra-se a TMI, que sofre fortemente a influência desses fatores. Esta rampa situa-se cerca de 150 m da costa. Neste caso, os foguetes colocados à rampa sofrem a influência de forte turbulência, devido à influência do perfil ou do cisalhamento do vento. O vento, inicialmente em equilíbrio com a superfície oceânica, interage com a vegetação arbustiva, modificando-se. Aumentando ainda mais a complexidade desta situação, ocorre o deslocamento vertical do nível zero da superfície, devido às falésias (Fisch, 1999).

3. METODOLOGIA

Os experimentos foram realizados em um dos túneis de vento instalado no Laboratório Prof. Kwein Lien Feng no Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA. Este túnel foi construído pela *Plint & Partners LDD Whokingham Bershire England* (Serial nº TE 44/5065), e é um modelo convencional de circuito aberto, subsônico. A seção de testes desse túnel é quadrada (465 mm x 465 mm) com comprimento de 1200 mm. Para esse experimento foi utilizado um canal para prolongar a seção de testes. O escoamento atmosférico é simulado por ventiladores elétricos com a potência de 30 hp (22 kW). A velocidade máxima atingida pelo vento gerado no túnel é de até 33 m/s, equivalente a aproximadamente 120 km/h.

Os dispositivos usados para a formação de um perfil atmosférico típico foram: inserção de agulhas, de uma tela (5 x 5 mm) e de um tapete de feltro para ajuste fino. O perfil atmosférico se formou a partir da distância de 1420 mm da tela, formando uma CL com altura aproximada de 200 mm. A Figura 4 mostra um esquema do aparato experimental usado.

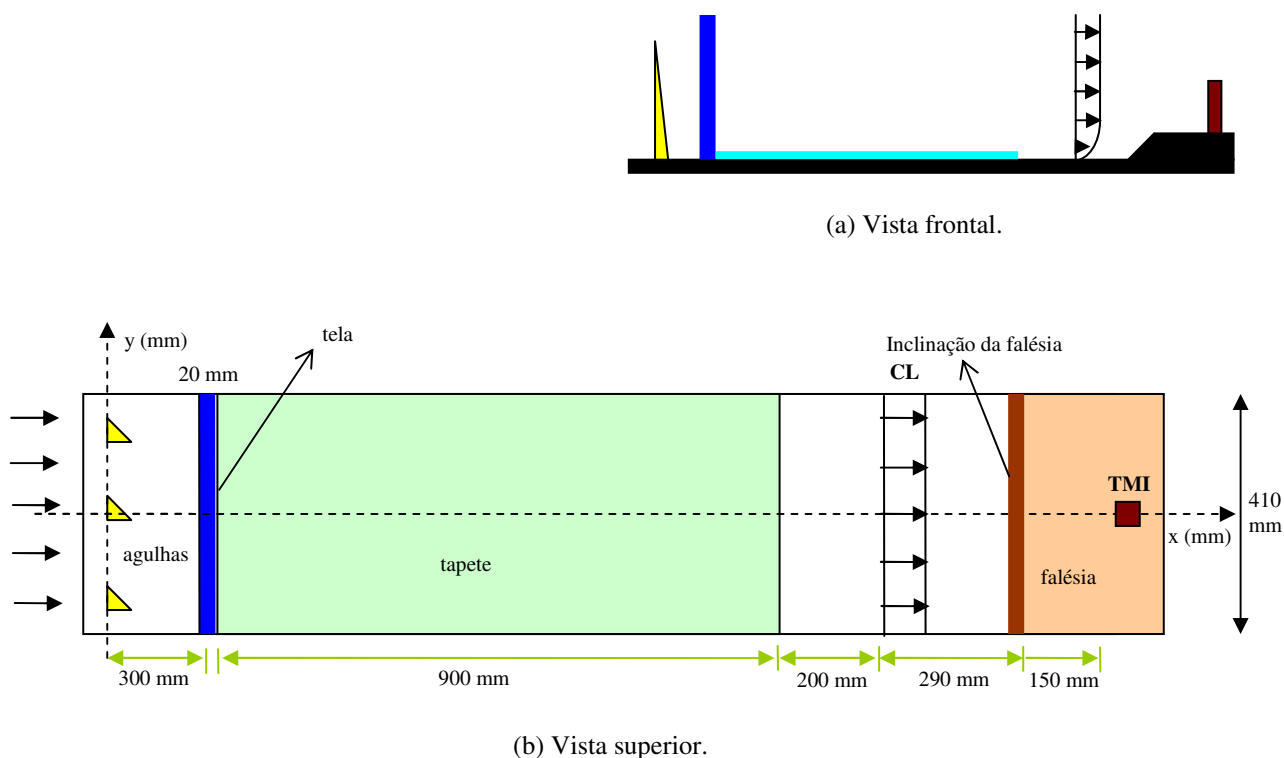
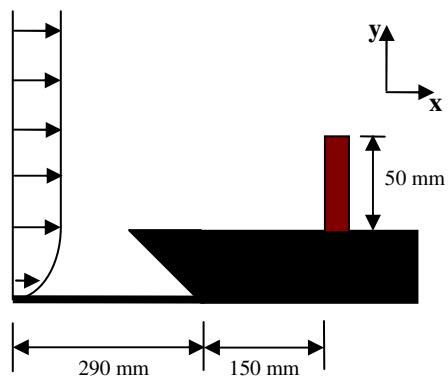


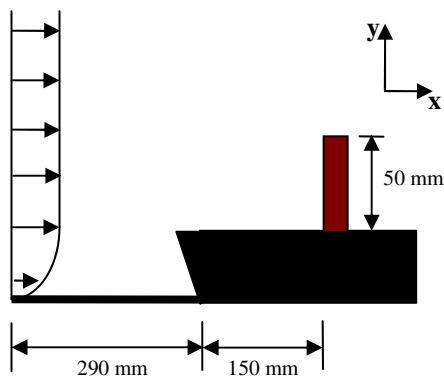
Figura 4. Esquema do aparato experimental usado para o ensaio da CL e da região do CLA.

A Figura 5 apresenta as dimensões dos modelos usados para simular o CLA e a TMI (representado por um bloco de madeira de dimensões de 10 x 10 x 50 mm). Como a falésia é irregular em sua estrutura vertical, foram realizados experimentos com inclinações de 45° (Fig. 5a), 70° (Fig. 5b), 90° (Fig. 5c), 110° (Fig. 5d) e 135° (Fig. 5e). Para representar a influência da direção do vento no desenvolvimento da CLI, o modelo foi girado em 45° e 35° (conforme vistas frontal e superior da Fig. 6) que representam respectivamente as direções predominantes do vento de 45° e 55°. Estes valores de direção do vento foram obtidos das características observacionais do local, medidos com uma Torre Anemométrica (TA). Maiores detalhes podem ser obtidos em Roballo e Fisch (2008).

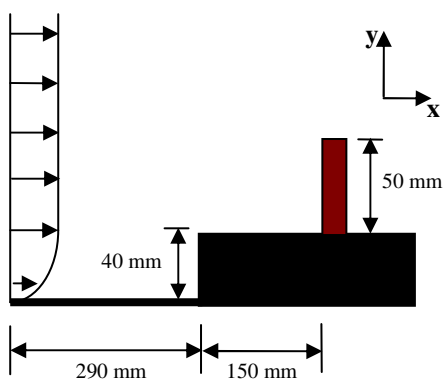
A velocidade máxima, obtida nesse túnel de vento e utilizada nesse trabalho, ficou entre 27 e 30 m/s, correspondendo a um número de Reynolds baseado na altura da falésia de 40m, variando entre 7,2 a 8 x 10⁴. Na atmosfera o Re é basicamente da ordem de 10⁶ e 10⁷, sendo que em Alcântara ele fica em torno de 1,6 a 2,6 x 10⁷ a uma altura de 200 m.



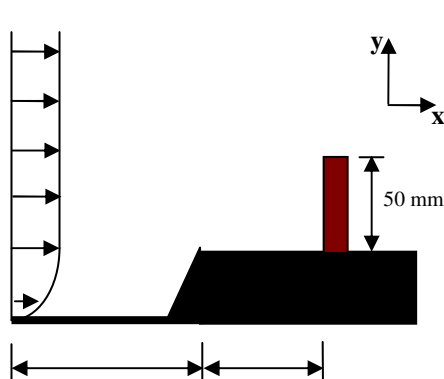
a) ângulo de inclinação da falésia = 45°.



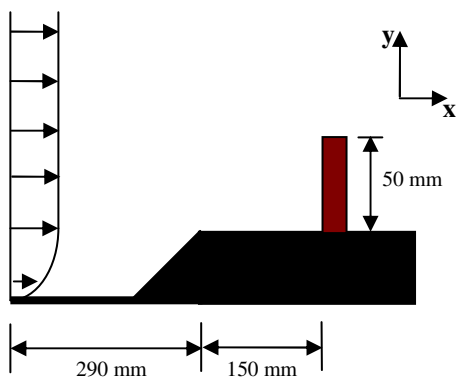
b) ângulo de inclinação da falésia = 70°.



c) ângulo de inclinação da falésia = 90°.



d) ângulo de inclinação da falésia = 110°.



e) ângulo de inclinação da falésia = 135°.

Figura 5. Dimensões e representação esquemática dos modelos ensaiados no túnel de vento.

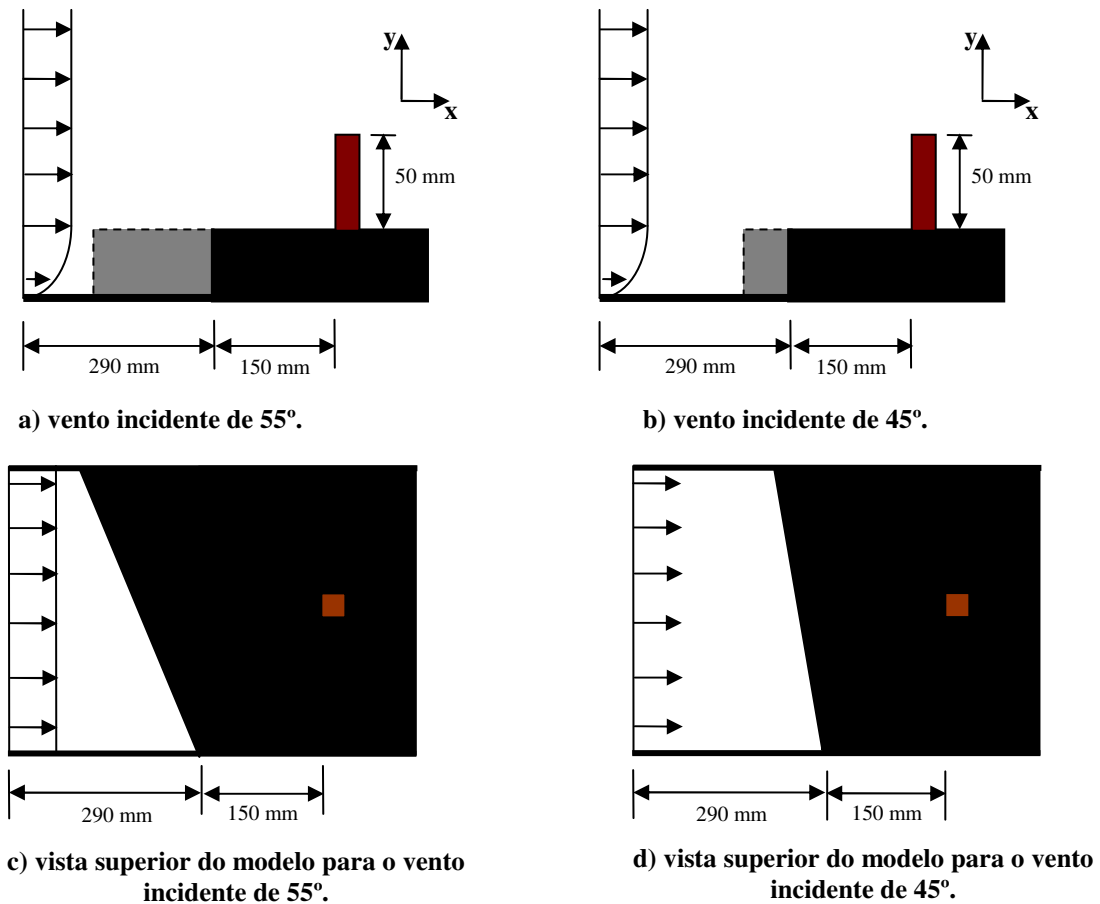


Figura 6. Vistas frontal e superior dos modelos ensaiados para representar a direção do vento.

Campos de velocidade média do escoamento foram obtidos utilizando-se um sistema PIV bidimensional. O sistema PIV consiste de um sistema de iluminação e um sistema de aquisição de imagens. O sistema de iluminação utilizado é composto por um laser pulsado New Wave Nd-YAG 200 mJ com duas cavidades e frequência de emissão de 15 Hz cada, e um sistema óptico. Um plano laser vertical foi criado utilizando-se um braço articulado (Fig. 7) e um conjunto de lentes com ajuste de espessura do plano laser. As imagens foram adquiridas utilizando-se uma câmera digital HiSense 4M (fabricada por Hamamatsu Photonics, Inc) com lentes Nikkor f# 2.8 e distância focal de 60 mm. A câmera e a fonte do laser foram fixadas num sistema de posicionamento de três eixos.

Para a realização das medidas com PIV, os modelos foram pintados de preto fosco, para minimizar as reflexões do laser, que interferem nas medidas. Para evitar acidentes causados por reflexões do laser e para minimizar a influência da luz ambiente nas medidas, a região do aparato experimental foi isolada, conforme mostrado na Fig. 8.

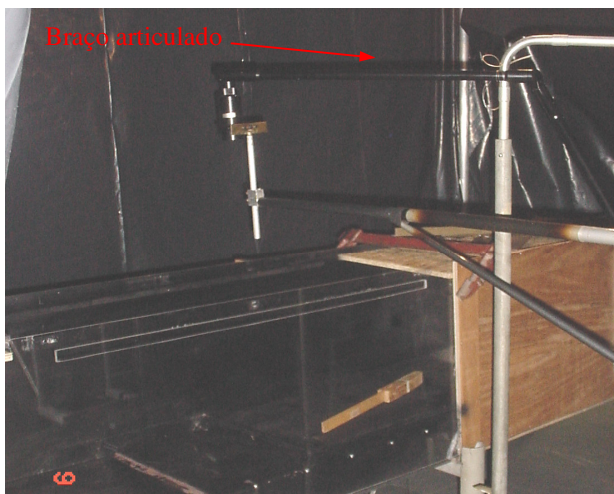


Figura 7. Seção de teste e braço articulado.



Figura 8. Gerador de partículas e aparato experimental.

4. RESULTADOS

A Figura 9 mostra uma comparação entre a altura da CLI, gerada pelo experimento no túnel de vento, com $Re = 7,2 \times 10^4$, em relação à altura da falésia (40 m), e com vento incidente perpendicular a falésia, e a altura obtida de uma simulação numérica realizada por Pires *et al.* (2007). Nesta simulação considerou-se um modelo DNS, com escoamento bi-dimensional, formulação vorticidade-velocidade para as equações do movimento (Navier-Stokes), foi assumido um esquema compacto de diferenças finitas de alta ordem para a discretização espacial, um esquema de integração temporal realizado com o método Runge-Kutta de 4ª ordem e a falésia de 40 m especificada através do método de fronteiras imersas. O mesmo valor de Re foi utilizado na simulação ($Re = 7,2 \times 10^4$) e a altura da CLI foi determinada encontrando a posição onde $\partial\omega_y/\partial z \cong 0$, onde nota-se uma boa concordância dos resultados, assegurando a precisão do experimento.

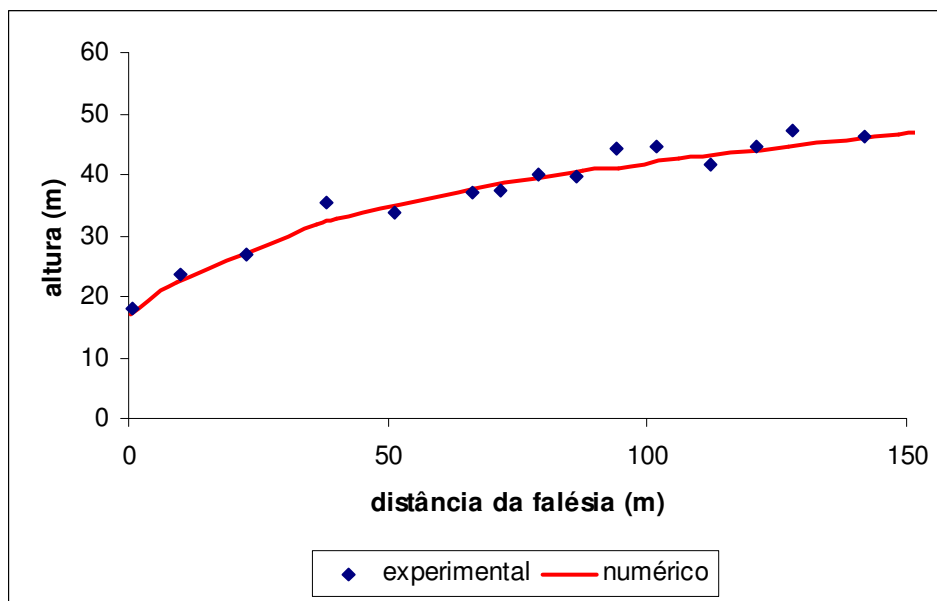
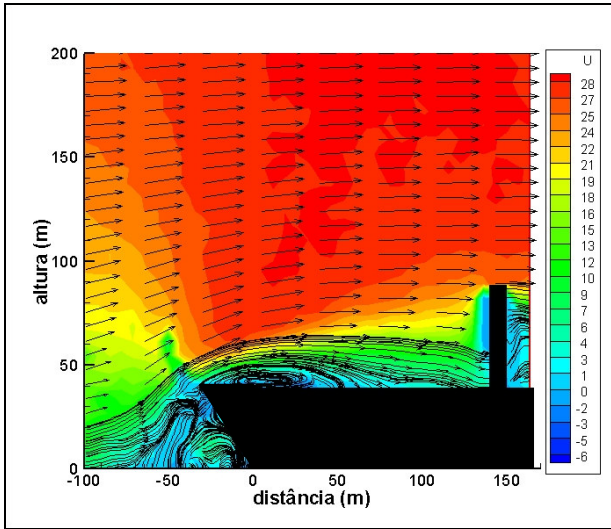


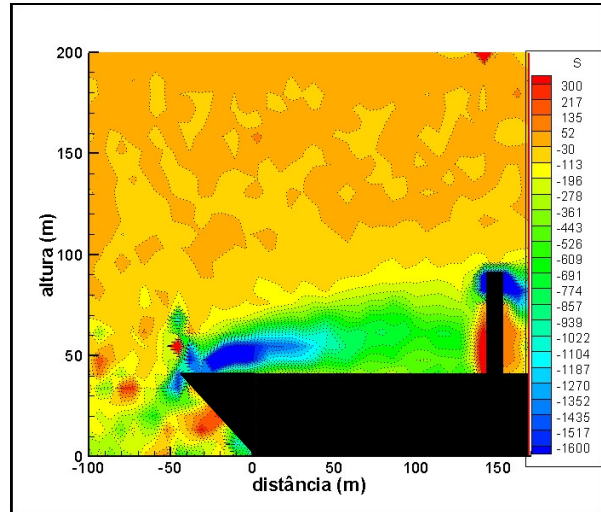
Figura 9. Comparação entre os resultados obtidos numérica e experimentalmente.

A Figura 10 mostra o perfil de vento e a vorticidade instantâneas obtidas no túnel de vento para diversas inclinações da falésia. Nota-se que, com as inclinações menores que 90° (Fig. 10a e 10b) há a formação de vórtices embaixo da falésia o que causa um aumento na altura da CLI. Através dos gráficos de vorticidade (Fig. 10f a 10j) nota-se que para a inclinação de 45° , tem-se uma altura máxima da CLI igual a 54 m próximo à 100 m de distância da falésia. Para a inclinação de 70° , a altura máxima da CLI é de 41 m próxima a $x = 100$ m. Para as inclinações maiores que 90° (Fig. 10i e 10j) notou-se uma atenuação na altura da CLI. Para a inclinação de 110° a altura máxima da CLI está em $x = 85$ m e é de 33 m de altura. Para a inclinação de 135° a altura máxima da CLI é de 25 m e está na posição $x = 40$ m. Nota-se que, quanto maior a inclinação da falésia, menor é a altura da CLI incidente na TMI. Para a falésia com ângulo de 45° ela incide a uma altura de 54 m e para o ângulo de 135° a altura da CLI na TMI é de 20 m. Através dos gráficos de perfil de vento (Fig. 10a a 10e) também é possível notar a formação de vórtices ferradura após a passagem do escoamento pela TMI.

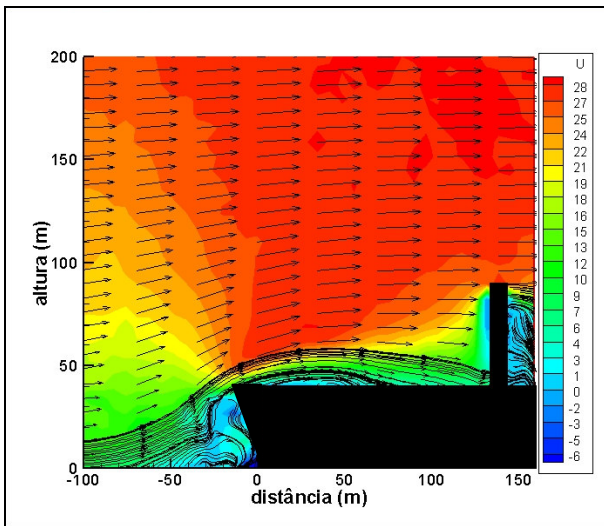
Nas Figuras 10f a 10j nota-se uma vorticidade de -1600 a 300 s^{-1} para um $Re = 7.5 \times 10^4$. A vorticidade negativa está associada a uma rotação horária da partícula e a positiva a uma rotação anti-horária. Para todos os casos uma vorticidade igual a 300 s^{-1} é gerada pelo escoamento ao atingir a TMI e uma vorticidade negativa (-1600 s^{-1}) é gerada logo acima da falésia e da TMI. Para os ângulos maiores que 90° (Figs. 10i e 10j) a vorticidade negativa é mais extensa, porém, mais baixa e para os ângulos menores que 90° (Figs. 11a e 11b) ela é mais concentrada até os 50 m de distância.



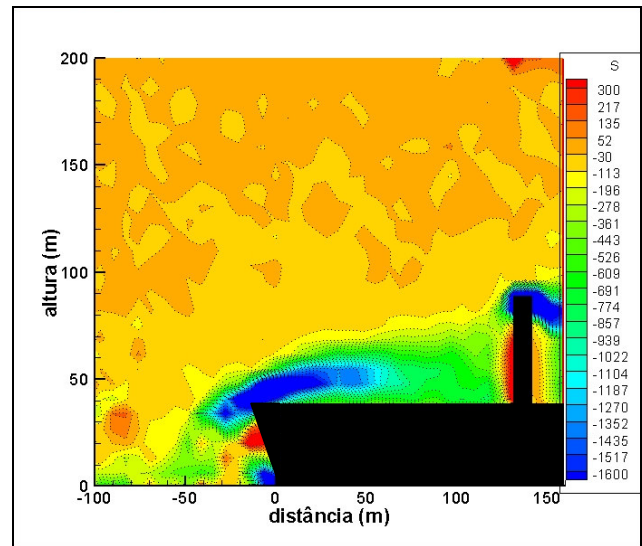
a) linha de corrente para falésia com inclinação de 45°.



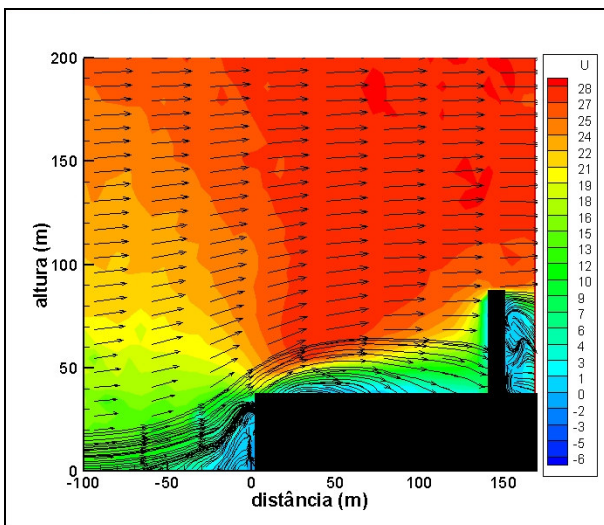
f) vorticidade para falésia com inclinação de 45°.



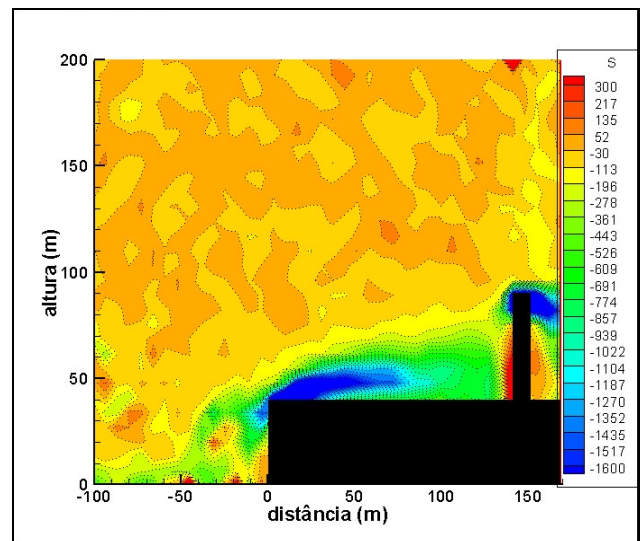
b) linha de corrente para falésia com inclinação de 70°.



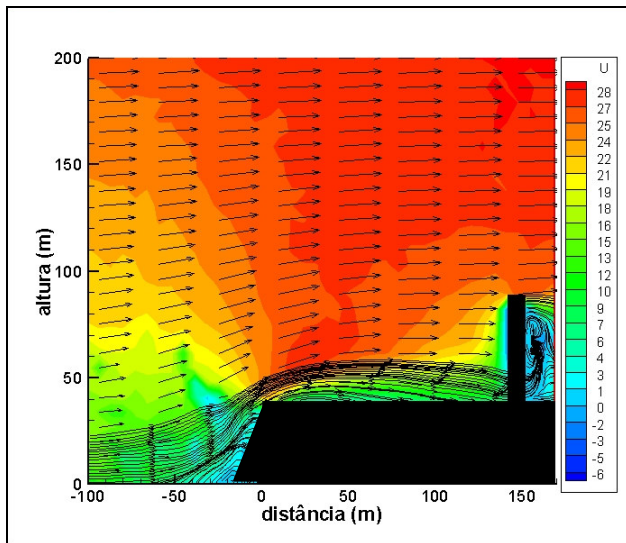
g) vorticidade para falésia com inclinação de 70°.



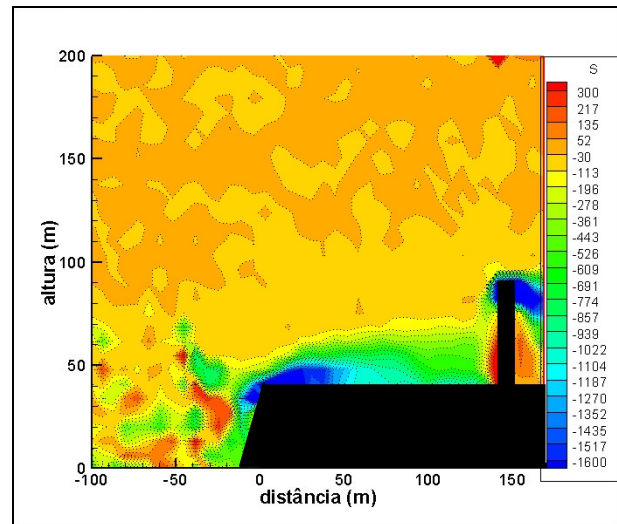
c) linha de corrente para falésia com inclinação de 90°.



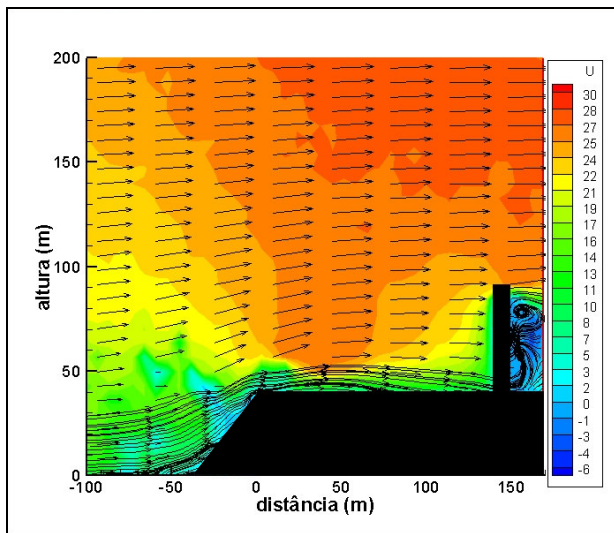
h) vorticidade para falésia com inclinação de 90°.



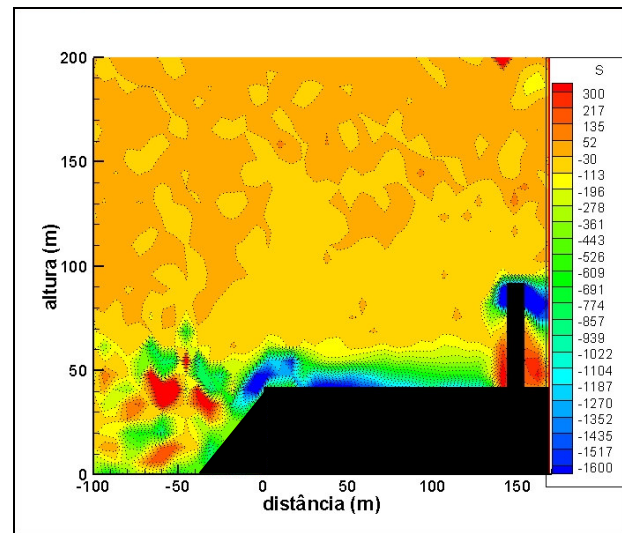
d) linha de corrente para falésia com inclinação de 110°.



i) vorticidade para falésia com inclinação de 110°.



e) linha de corrente para falésia com inclinação de 135°.

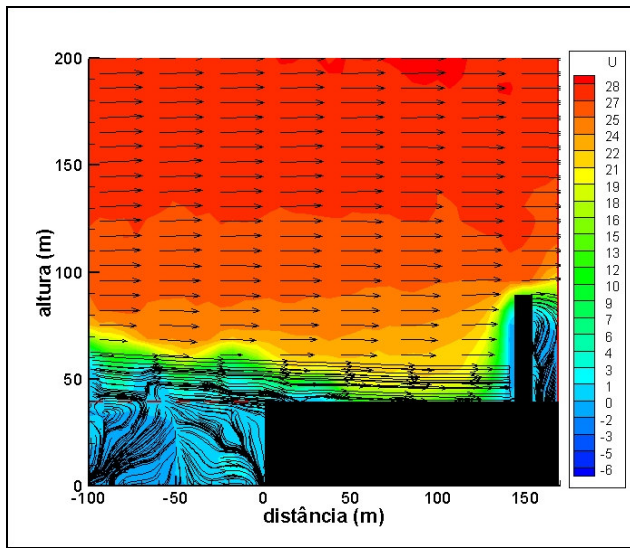


j) vorticidade para falésia com inclinação de 135°.

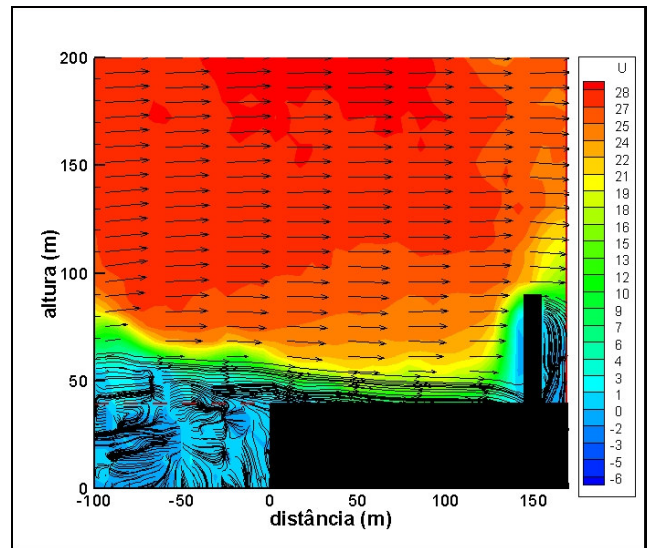
Figura 10. Perfis de vento e linhas de corrente para diversos ângulos de inclinação da falésia.

Fisch (1999) realizou um estudo sobre a turbulência atmosférica no CLA através de análises relativas ao perfil de velocidade do vento, ventos máximos, intensidade turbulenta, picos de rajadas e amplitudes máximas e instantâneas, utilizando dados coletados em uma torre anemométrica de 70m de altura, com sensores de velocidade e direção do vento em seis níveis, respectivamente, 6,0, 10,0, 16,3, 28,5, 43,0 e 70,0 m. Os resultados mostraram que os ventos são mais intensos na época seca (valores típicos entre $5,0 \text{ m.s}^{-1}$ a uma altura de 6m e $9,0 \text{ m.s}^{-1}$ a uma altura de 70m), uma vez que ocorre o acoplamento dos ventos alíseos com circulação de brisa marítima. Já na época chuvosa o CLA apresenta valores típicos de velocidade que variam de $3,0 \text{ m.s}^{-1}$ a uma altura de 6m a $5,0 \text{ m.s}^{-1}$ a uma altura de 70 m.

As Figuras 11 e 12 apresentam simulações do vento incidindo na falésia do CLA com as direções do vento predominantes de 45° e 55°. Nota-se que, quase não há diferença entre o perfil do vento incidente de 45° (Fig. 11a) e do vento de 55° (Fig. 11b). Em ambos os casos a CLI parece não atingir a TMI. Entretanto, através da Fig. 12, nota-se que a vorticidade que atinge a TMI é maior no caso do vento incidente de 55° que é de 300 s^{-1} , enquanto que para o vento de 45° a vorticidade é de 50 s^{-1} .

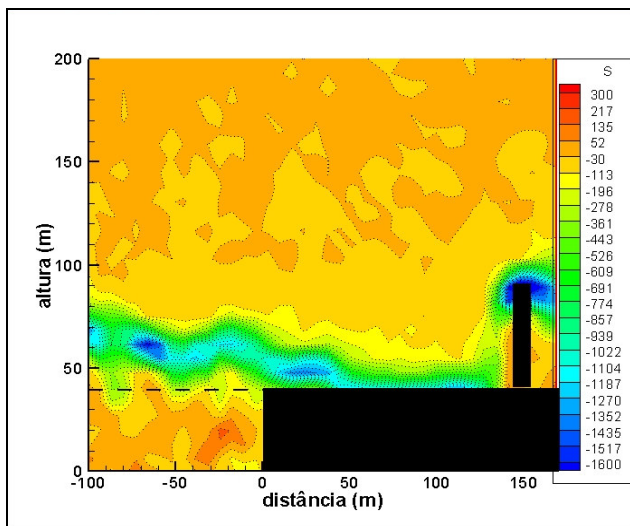


a) vento incidente de 45°

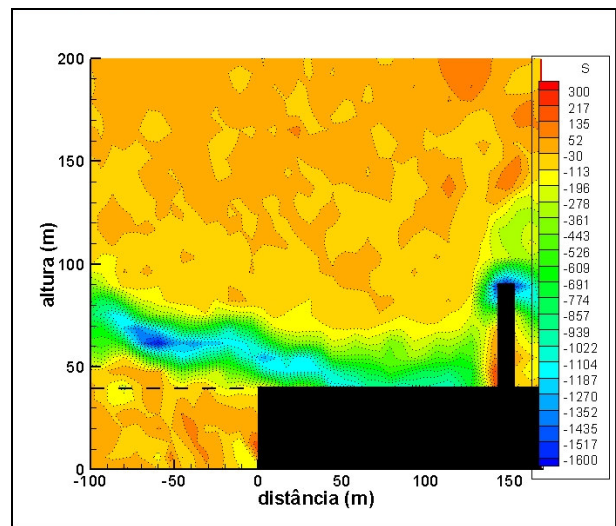


b) vento incidente de 55°

Figura 11. Perfis do vento e linhas de corrente para os ventos incidentes de 45° e 55°.



a) vento incidente de 45°



b) vento incidente de 55°

Figura 12. Campos de vorticidade para as direções predominante do vento de 45° e 55°.

5. CONCLUSÕES

A CLI atinge a TMI quando o vento incidente é perpendicular a falésia para todos os ângulos de inclinação da falésia. Entretanto, na distância correspondente a TMI (de $x = 150$ m sobre a falésia), a CLI já se encontra com uma altura menor por já estar saindo da zona de recirculação. Os diferentes ângulos de inclinação da falésia não afetam a intensidade da vorticidade, que ficou entre -1600 e 300 s^{-1} em todos os casos; entretanto, causam alterações na altura da CLI, influenciando a região de recirculação. Nota-se para o caso de 90° , uma região de recirculação menor com uma altura de CLI mais rasa. No caso das inclinações com ângulos menores que 90° essa região de recirculação se torna mais extensa e a CLI mais alta (de aproximadamente 30 m) e no caso dos ângulos de inclinação maiores que 90° a bolha de recirculação continua extensa, mas com uma diminuição na altura da CLI.

A análise da influência da direção predominante mostrou que a vorticidade na TMI é um pouco maior (vorticidade igual a 300 s^{-1}) para a direção de 55° do que para a direção de 45° (vorticidade igual a 50 s^{-1}), isto se deve a uma incidência maior dos ventos sobre a TMI para esse ângulo.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos técnicos Rogério Banhara e José Ricardo de Oliveira, da Divisão de Aerodinâmica do IAE, pelo apoio à realização dos experimentos. L. B. M. Pires agradece ao CNPq por sua bolsa de doutorado, e G. Fisch agradece ao suporte do CNPq pela bolsa de Produtividade de Pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

- Arya, S. P., 2001, "Introduction to Micrometeorology", Second Edition. Elsevier ISE, 420 p.
- Fisch, G., 1999, "Características do Perfil Vertical do Vento no Centro de Lançamento de Foguetes de Alcântara (CLA)", Revista Brasileira de Meteorologia, Vol.14, No.1, pp. 11-21.
- Jonhson, D.L., 1993, "Terrestrial Environment (climatic) criteria guidelines for use in aerospace vehicle development", (NASA TM 4511), Huntsville., 472 p.
- Källstrand, B. e Smedman, A. S., 1997, "A Case Study of the Near-Neutral Coastal Internal Boundary-Layer Growth: Aircraft Measurements compared with Different Model Estimates", Boundary Layer Meteorology, Vol. 85, pp. 1-33.
- Kwon, K. J., Lee, J. Y., Sung, B., 2003, "PIV Measurements on the boundary Layer Flow around Naro Space Center", Proceedings of the 5th International Symposium on Particle Image Velocimetry, Busan, Korea, pp. 22-24.
- Liu, H., 1990, "Wind Engineering – A Handbook for Structural Engineers", Prentice.
- Pendergrass, W. e Arya, S. P., 1984, "Dispersion in Neutral Boundary Layer over a Step Change in Surface Roughness – I. Mean Flow and Turbulence Structure", Atmospheric Environment, Vol. 18, pp. 1267-1279.
- Pires, L. B. M., Souza, L. F., Fisch, G. e Gielow, R., 2007, "Análise da camada limite interna gerada sobre uma falésia para diferentes números de Reynolds", V Workshop Brasileiro de Micrometeorologia, Santa Maria, Brasil.
- Roballo, S. T., Girardi, R.M. e Fisch, G., 2008, "Escoamento Atmosférico no Centro de Lançamento de Alcântara (CLA): Parte I – Aspectos Observacionais", Revista Brasileira de Meteorologia (aceito para publicação).
- Savelyev, S. A. e Taylor, P. A., 2005, "Internal Boundary Layers:I. Height Formulae for Neutral and Diabatic Flows", Boundary Layer Meteorology, Vol. 115, pp. 1-25.
- Sempreviva, A. M., Larsen, S. E., Mortensen, N. G. e Troen, I., 1990, "Response of Neutral Boundary Layers to Change of Roughness", Boundary-Layer Meteorology, Vol. 50, pp. 205-225.
- Stull, R., 1988, "An Introduction to Boundary Layer Meteorology", Kluwer Academic Publishers, London.

8. NOTA DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis pelo material impresso nesse artigo.

Reduced order models for wake flows at low Reynolds numbers

Juan D'Adamo, jdadamo@fi.uba.ar

Laboratorio de Fluidodinámica, Facultad de Ingeniería UBA, Paseo Colón 850 - Ciudad de Buenos Aires - Argentina

Ada Cammilleri, cada@fi.uba.ar

Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería UBA, Paseo Colón 850 - Ciudad de Buenos Aires - Argentina

Guillermo Artana, gartana@fi.uba.ar

Laboratorio de Fluidodinámica, Facultad de Ingeniería UBA, Paseo Colón 850 - Ciudad de Buenos Aires - Argentina

Etienne, Mémin, memin@irisa.fr

IRISA, Université de Rennes 1, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

Abstract. *We present in this work a way to construct reduced order models (ROM) for wake flows at low Reynolds numbers, from Particle Image Velocimetry (PIV) data. The proper orthogonal decomposition method (POD) allows the extraction of a few number of functions or modes that describe the flow's velocity field. Galerkin projection of Navier Stokes equation onto these modes leads to obtain a system of ordinary non linear equations. The sole dimension reduction from Galerkin procedure does not assure the convergence and stability of solutions. Several methods have been proposed[13][3][9].to deal with this problem. On the other hand, recent studies on hydrodynamic stability in wake flows[2][20] suggest model modifications on the POD-Galerkin ROM. In this context we propose data assimilation and center manifold theory to achieve improvements for the POD-based ROM from PIV experimental data. The method is also validated with results on direct numerical simulations(DNS), free from experimental noise.*

Keywords: *Wake Flow, POD, Dynamical Systems, PIV*

1. INTRODUCTION

Reduced order models are widely used in fluid mechanics in order to represent the main dynamical behaviour of a flow. In this framework, a few number of modes can be enough to perform analysis, understanding and predictions for the different states of a given flow. Wake flows are particularly interesting in terms of academic and many industrial purposes and we will focus our study to this kind of flows. The flow around a cylinder has long been a benchmark problem concerning wake flows. In order to obtain such models, we remark two main approaches used nowadays.

Physical approaches rely on the Stuart-Landau equation, which has been widely used to model vortex shedding of the two dimensional wake of a cylinder at low Reynolds numbers ($Re < 150$). Landau's early studies for bluff body wakes(1944)[10] conducted to his proposition of an equation for the evolution of a non-stationary perturbation of a Navier-Stokes equations' steady solution. Later, Stuart (1958)[19] showed how to derive the Landau equation from the study of the stability of a given flow (parallel flows). The Stuart Landau model has since been confirmed by many experiments (Provansal *et al.* [16]; Goujon-Durand *et al.*[6]; Schumm *et al.*[17]; Albarède and Provansal [1]) and numerical simulations (Dusek *et al.*[5]; Zielinska and Wesfreid [24]).

On the other hand, empirical approaches consist in deriving modes from numerical or experimental

observations of an arbitrarily complex domain. The Karhunen-Loève decomposition (which is equivalent to POD) has proved to be an efficient tool to extract such empirical modes. It has been used by different authors (see for instance a review by Holmes *et al.*[8]) as a method to obtain approximate descriptions of the large scale or coherent structures in laminar and turbulent flows. Without any a priori hypothesis on the flow, the POD method provides a flow representation in terms of a linear combination of basis functions, or modes, ordered decreasingly by their kinetic energy content. Indeed, once the basis is obtained, a Galerkin projection is performed to reduce the order of Navier-Stokes equations. Previous works on the flow around a cylinder started with Deane *et al.*[4] and since then, many efforts have been performed in order to construct a control system of the POD low order model. Some drawbacks of this technique are the lack of stability and the lack of robustness of the model away from the flow observations.

In order to improve these aspects, we had proposed[3] a scheme based on data assimilation theory. Another method was presented by Kalb & Deane[9] which performs a linear correction on the dynamical systems coefficients, and it was tested on direct numerical simulation data and on the Lorenz system. On the other hand, Noack *et al.*[13] had pointed out that the error sources start solving the system directly obtained by the Galerkin projection. It is not possible to assure, a priori, the system's structural stability. Little perturbations on the equation system coefficients can produce qualitatively different solutions. For this reason, the authors proposed the POD-Galerkin reduction to the center manifold towards a normal form, a non linear equation which has a prototypical structure.

In the study of wake flows, POD modes can be interpreted as fluctuations that superpose to a stationary solution, a *base flow*, unstable, of the Navier Stokes equations. Noack *et al.* constructed their model from this hypothesis. However, in a recent work, Barkley[2] discuss the base flow nature and proposes to use directly the mean flow field. Indeed, regarding the Reynolds version of the Navier Stokes equations,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} = -\nabla\bar{p} + \frac{1}{Re}\nabla^2\bar{u} + \overline{u'\nabla u'} \quad (1)$$

the last term, the Reynolds stresses generated by the fluctuating field can be viewed as a forcing term. Then the mean flow corresponds to the base flow for the stability analysis of Eq. (1).

Thiria & Wesfreid [20]) subscribe Barkley hypothesis in a recent work on wake flow characterization. We remark the idea had also been suggested by the work of Triantafyllou *et al.*[21] on cylinder wake flows at Reynolds numbers up to 10^5 .

It is then in this context that we have reformulated the construction of a reduced order model. We apply our work not only over DNS data but on experimental PIV data. Additional techniques, as assimilation data, are used to produce robust and reliable systems. In section (2.) we present the equations that describe the mean dynamics of the wake flow problem; the data assimilation scheme is introduced in section (3.); in section (4.) we apply the center manifold reduction theory and normal forms to the POD-Galerkin system; lastly, we present applications of this method to experimental and numerical data and we discuss the results in section (6.).

2. POD-GALERKIN MODEL

The POD-Galerkin method has been extensively presented in many articles. The method foundations can be studied in Holmes *et al.*(1996). Let us review its main characteristics.

A flow field $u(x, t) \in L^2(\Omega)$, where Ω is a physical domain, can be represented in terms of basis

functions $\phi_i(x)$ and their temporal coefficients $a_i(t)$ such that:

$$u(x, t) = \sum_{i=0} a_i(t) \phi_i(x)$$

It is necessary to define an inner product as

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v dx$$

The modes $\phi(x)$, global and mutually orthogonal, are extracted from a set of observations $u(x, t_i)$ obtained experimentally or numerically, and they are optimal with respect to the average kinetic energy representation of the flow contained in Ω . The spatial modes inherit by construction properties of the flow such as its boundary conditions and, when we work with incompressible flows, they are also divergence-free.

When working on finite dimension, the modes identification reduces to solve the singular value decomposition (SVD) of a V matrix that represents in its columns the different snapshots of the velocity fields $u(x, t_i)$.

The Navier Stokes equations, and the incompressibility condition,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3)$$

are then reduced by means of a Galerkin projection onto the subspace generated by the first s vectors of the POD basis, $\{\phi_1 \dots \phi_s\}$. The ROM has the form:

$$\frac{da}{dt} = \dot{a} = \mathbb{M}(a) \quad (4)$$

where \mathbb{M} represents a nonlinear operator which is a polynomial that contains the projected Navier-Stokes terms and its boundary conditions. The projection produces the following terms:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \phi_k \right) &= \frac{da_k}{dt} \\ \left(\frac{1}{Re} \nabla^2 u, \phi_k \right) &= \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 u \phi_k dx \\ &= \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^s a_i \nabla^2 \phi_i \cdot \phi_k dx = \frac{1}{Re} \sum_{i=1}^s a_i \int_{\Omega} \nabla^2 \phi_i \cdot \phi_k dx \end{aligned} \quad (5)$$

$$(\nabla p, \phi_k) = \int_{\Omega} \nabla p \phi_k dx = \int_{\delta\Omega} (p \phi_k) \cdot dl \quad (6)$$

$$((u \cdot \nabla)u, \phi_k) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_i a_j \int_{\Omega} (\phi_i \cdot \nabla) \phi_j \cdot \phi_k dx \quad (7)$$

These can be included in a polynomial form on the temporal coefficients $a_1 \dots a_s$ for \mathbb{M} .

$$\dot{a} = F(a) = \sum_{k=1}^{N_m} c_k P_k \quad (8)$$

where P_k $k = 1 \dots N_m$ is a vector of all the monomials of different degrees in variables $a = (a_1, \dots a_s)$, and c_k are their corresponding coefficients. The number N_m depends on the number of

degrees and on the number of modes considered.

Equation (8) determines in general a dynamical system that in many cases may converge to erroneous states after a relative short time of integration. Indeed, different authors have observed that the predictions at long time may fail and that, for instance, models describing a cylinder wake flow, after a few cycles of vortex shedding may exhibit differences of phase and amplitudes with respect to empirical values, as pointed out by Kalb & Deane (2007). Holmes *et al.* (1996) had mentioned as possible responsible for this behaviour the following points:

- Neglect of the incidence of boundary or pressure terms in the computation of the dynamical system coefficients.
- Inaccurate estimation of derivatives of spatial modes that determine the dynamical system coefficients.
- The low-dimensional truncation produces loss of dissipation and energy transfer between the different scales of the flow and it only reproduces velocity fields which are close to the spatial structures averaged in the decomposition.

Concerning the pressure term, several authors have neglected the influence of the pressure term in wake flows arguing that this effect could be disregarded when large wake domains were considered. However, depending on the flow geometry and truncation level, neglecting this term could add uncertainty in the ability of the computed dynamical system to faithfully represent the actual flow dynamics. Noack *et al.* [14] proposed an additional quadratic term which is estimated solving Poisson equation. Another way to correct the model (8) is to apply the intrinsic stabilization algorithm developed by Kalb & Deane, which corrects the linear terms and is effective in situations where the pressure is adequately expressed by a linear model, i.e. channel flow.

The second point refers to the fact that the coefficients appearing in equation (8) involve spatial derivatives (eqs. 5,6,7). Using PIV data, the coefficients may be poorly determined. To avoid the direct estimation of these coefficients, Perret *et al.* [15] proposed a polynomial identification procedure which consists in writing *a priori* the ROM. Provided the temporal coefficients a_j and their time derivatives \dot{a}_j , we can derive from (8) a linear system, which may be solved by least mean square or singular value decomposition. It must be pointed out that estimating $\dot{a}(t_j)$ from traditional schemes of finite differences leads to important numerical errors, further amplified when working with experimental data. To deal with this problem, we perform a polynomial approximation for each a_j for every instant t_i . Consecutive time intervals allow to calculate $a_j(t_i) \simeq p_j(t)$, where p_j is a polynomial of degree n , and then, the derivatives are obtained analytically deriving $p_j(t)$. This idea was introduced by Maquet *et al.* [12] in a work on dynamical systems identification.

We had proposed [3] a method to work with experimental data improving the polynomial identification with an assimilation technique. Considering a noise $\delta(t)$ as the difference between the model prediction and an observations set, $\dot{a} = F(a) + \delta(t)$, it is minimized iteratively. The scheme does not deal with the system structural instability but it provides a way to work with noisy data.

Intentionally, we haven't already stated the degree of the function $F(a)$. We know that the physical model for the wake flow problem is represented by the Stuart-Landau equation (see, for instance [16]):

$$\frac{dA}{dt} = (\gamma + i\omega)A + (c_r + ic_i)|A|^2 A \quad (9)$$

and the vortex onset is described as a Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation (see [23]§3.1B for a definition) in agreement with experiments [16]. These reasons sustain the hypothesis of an equation of degree three that resumes the coherent structures behaviour. Furthermore this equation must be a

normal form ([23]§2.2) and Eq.(9) is simply a particular case of it.

A first approximation towards the solution of our systems consists in estimating Eq. (8) coefficients considering $F(a)$ as a polynomial of degree 2 in s temporal modes.

In agreement with Barkley's hypothesis, the fluctuations $a(t)$ are superposed to the mean flow, and the solution $a = 0$ corresponds to the solution of Reynolds equations

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\nabla \bar{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u} + \overline{u'u'} \quad (10)$$

where \bar{u} represents the mean velocity field and u' its fluctuations, such that $u' = \sum_j a_j \phi_j$. Then, $a = 0$ is an unstable fixed point in the system (8).

Once stated a degree and a number of modes for Eq. (8), its construction is affected by erroneous measurements. So, in next section, we present a new assimilation method to handle this problem.

3. ASSIMILATION SCHEME

This method considers the hypothesis of a *perfect* dynamical model, as in the bases for optimal control introduced by Lions[11]. This aspect differentiates it from a previous formulation presented in[3]. The context of the following development is within the theory of strong constraint data assimilation.

Let's regard \mathcal{V} , \mathcal{W} and \mathcal{I} as Hilbert spaces. The state of a dynamical system can be represented by the state variable a such that $a \in \mathcal{A}([t_0, t_f])$, where

$$\mathcal{A}([t_0, t_f]) = \{f/f \in L^2([t_0, t_f]; \mathcal{V}), \partial_t f \in L^2([t_0, t_f]; \mathcal{V}')\}.$$

Considering that the time evolution of a is determined by a nonlinear differential operator \mathbb{M} , we can study a new problem based on our previous dynamical system (8):

$$\left\| \begin{array}{l} \text{For } (w, \eta) \in (\mathcal{W}, \mathcal{I}) \text{ let's find } a \in \mathcal{A}([t_0, t_f]) \text{ such that:} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t a(t) + \mathbb{M}(a(t), w) = 0 \\ a(t_0) = a_0 + \eta \\ w = w_0 + \epsilon \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (11)$$

We can see that the dynamical system depends explicitly on two additional parameters, the initial condition perturbation η and the variation of the model coefficients ϵ .

Known an initial value for the model coefficients w_0 , we intend to force the system trajectory $a(t)$ to be developed within the phase space described by the measures Y . These measures Y may belong to a different space from the state space \mathcal{A} . In that case, an operator \mathbb{H} can be defined in order to compare them. To simplify the analysis we consider in what follows that $\mathbb{H} \equiv \mathbb{I}$.

We suppose that a depends continuously on w and η and that a is differentiable for all $t \in [t_0, t_f]$.

Defined a cost function $J : \mathcal{W} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, we can measure the distance from a given solution of (11) and the observations:

$$J(u, \eta) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \|Y - a(w, \eta, t)\|_R^2 dt + \frac{1}{2} \|\epsilon\|_N^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|_B^2 \quad (12)$$

The method's aim is then to find the control variable $w \in \mathcal{W}$ that minimizes the cost function J . The norms $\|\cdot\|_R$, $\|\cdot\|_N$ and $\|\cdot\|_B$ are respectively associated to the scalar products $\langle R\cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$, $\langle N\cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}}$ and $\langle B\cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{I}}$. R , N and B are definite positive symmetric endomorphisms. In practice, R , N and B are covariance matrix for the observations, model parameters and for the initialization respectively.

The cost function derivatives are obtained by differentiating (11) with respect to w and η . After differentiating (11) and integrating in order to estimate the cost function, an auxiliary, or *adjoint*,

variable is defined to simplify the estimation of the cost function gradient (see Appendix 8.). This variable is solution of the system:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Given } (w, \eta) \in (\mathcal{W}, \mathcal{I}), t_f > t_0, a(t) \text{ solution of (11), we must find} \\ \lambda \in \mathcal{A}(t_0, t_f) \text{ such that:} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \lambda(t) + (\partial_a \mathbb{M})^* \lambda(t) = Y - a \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\ \lambda(t_f) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (13)$$

We suppose that, given (w, η) , $t_f > t_0$ and $a \in \mathcal{A}$ solution of (11), a unique function $\lambda \in \mathcal{A}$ is a solution of equation (13) and it depends continuously on (w, η) .

To minimize J the following equations must be satisfied:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial w} &= N(w - w_0) + \int_{t_0}^{t_f} (\partial_w \mathbb{M})^* \lambda(t) dt = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \eta} &= -\lambda(t_0) + B(X(t_0) - X_0) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

We summarize the method in an algorithm:

Algorithm 1

1. From $(w, a(t_0))$ calculate in (11) $a(t) \forall t \in [t_0, t_f]$.
2. With the solution $a(t)$, the adjoint variable $\lambda(t)$ can be integrated backwards from (13). To optimize this calculation, a criteria to penalize unreliable measures can be included.
3. Control variables are updated in order to minimize the cost function J .
4. Steps 1 to 3 are repeated until a convergence criterion is met.

4. CENTER MANIFOLD REDUCTION

The center manifold theory is a rigorous mathematical technique used to reduce dynamical systems dimension. As we pointed out, a Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation must be described by our model for $a = 0$. We consider a bifurcation parameter $\mu = Re - Re_c$, where Reynolds critical number Re_c corresponds to the value of Re for the vortex shedding onset.

A linear change of coordinates (Real Jordan form) transforms the s -dimensional Eq. (8) into the form:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y, \mu) \\ \dot{y} = By + g(x, y, \mu) \end{cases} \quad (15)$$

where $x \in \mathbb{R}^c$ and $y \in \mathbb{R}^{u+e}$, for our problem $c = 2$ and $s = c + u + e$. We consider then

$$A = \begin{pmatrix} Real(\lambda) & -Imag(\lambda) \\ Imag(\lambda) & Real(\lambda) \end{pmatrix}$$

where $\lambda = \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ represents the eigenvalues of A and we suppose that B does not contain eigenvalues of zero real part.

In agreement with the Center Manifold theory (see i.e. Wiggins[23] §2.1) we know that the center manifold can be represented locally by:

$$\{(x, y)/y = h(x), h(0) = 0, Dh(0) = 0\} \quad (16)$$

and that, in such a case, the dynamics of Eq. (15) is determined by:

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x), \mu) \quad (17)$$

for $\|x\| < \delta$, sufficiently small. In our applications we consider $h(x) = p(x)$, a polynomial of degree 2 in $x \in \mathbb{R}^c$.

However, we cannot assure yet that the solution of Eq. (15) has the characteristic behaviour of a stable limit cycle, convergent towards the trajectory defined by the set $\{a_j(t_i)\}$. The polynomial $f(x)$ can be simplified depending on A eigenvalues. For this problem, when $\mu = 0$, these are a pair of conjugate complex of zero real part and the resulting normal form is

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \omega x_2 + (ax_1 - bx_2)(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = \omega x_1 + \alpha x_2 + (bx_1 + ax_2)(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (18)$$

without considering terms of degree equal or greater than 5. We verify that this equation is equivalent to Stuart-Landau (9), but we have obtained it from the nonlinear analysis of POD-Galerkin system. In polar coordinates, Eq. (18) has the form:

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r + ar^3 \\ \dot{\theta} = \omega + br^2 \end{cases} \quad (19)$$

The analysis of the dynamics of these equations, for the values of α and ω of our applications, confirms that the original system has in the origin an unstable focus and an asymptotically stable orbit.

5. EXPERIMENTAL SETUP

The physical experiments were conducted using a camera having a resolution of 640×480 pixels, $1/100s$ of inter-frame intervals. A green, 150-mW laser and a rotating polyhedric mirror were used to provide illumination of the test section.

The algorithms used in this work belong to GPIV software [22] which is under GNU General Public License. We have considered for our images a two-step grid refinement; hence the final interrogation window size is 16×16 pixels with 50% overlap.

Each experiment provided 1000 snapshots of PIV data with a window that enabled to observe the wake of a cylinder.

The Reynolds number considered was 80-125 for a cylinder of 20 mm in diameter. The flow configuration is represented in Figure 1(a), where we observe the mean flow streamlines. We watch through a window of 8 diameters length downstream the cylinder that contains the developing wake. The wind-tunnel section is $180 \times 180mm^2$, in order to prevent blockage and 3D effects. More detailed characteristics of the experimental set up may be consulted in a previous work [3].

This DNS of 2D cylinder flow was conducted for several Reynolds numbers from 60 to 140. The domain, illustrated in Figure 1(b) is $L_x/D = 19$ by $L_y/D = 12$ with a cartesian grid of resolution 1081×1081 . This assures that the grid step $dx \leq \eta$ where η is Kolmogorov dissipative scale, $\eta \sim \frac{D}{Re^{3/4}}$. Therefore, every scale of the flow is resolved and the discretization scheme verifies the necessary stability conditions. Further details are presented in [7].

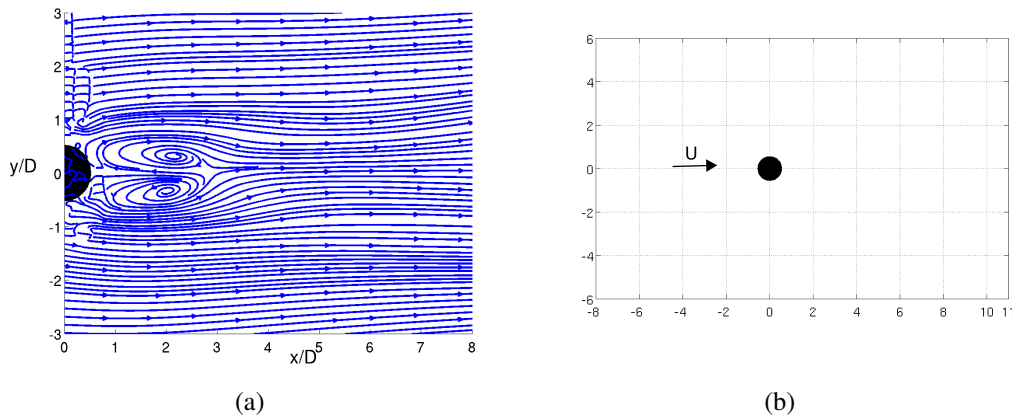


Figure 1. (a) Flow around a cylinder at $Re = 125$. Mean flow from PIV measures. (b) Scheme of a 1081×1081 cartesian grid for DNS.

6. RESULTS

We consider the mean flow as a base state under the forcing of fluctuations (Barkley [2]). We extract the POD modes by means of Sirovich's [18] Snapshots method.

The dynamical system is constructed, in a first step, from the polynomial identification scheme. We solve (8) minimizing the mean square error. In order to have reliable values for the temporal derivatives \dot{a}_i , we employed fourth grade polynomials to approximate the a_i on 10 points intervals.

We retain 4 fluctuating modes superposed to the mean flow for both cases: PIV and DNS data. In the first case, these modes concentrate around 85% of the total fluctuating kinetic energy; this value is around 98% for the second case. After the Galerkin projection onto POD modes, the direct solution of Eq.(8) gives a solution that rests close to the observations trajectory for a short time as it is shown in Figure 2.

On the other hand, applying the assimilation method, the system is corrected iteratively until

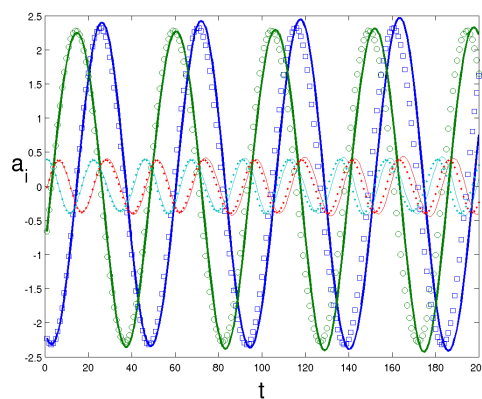


Figure 2. Lines: POD-Galerkin solution for 4 modes for DNS data, $Re = 110$. Symbols: observations.

the gap between its solution and the observations is significantly reduced (Figure 3). However, the assimilation works only to correct the model from the observations, it does not assure neither that the system attractor corresponds to a limit cycle nor the fixed point is an unstable focus. The method determines an approximation to $F(a)$ for the estimation of the center manifold.

Indeed, we obtain the eigenvalues of $\left. \frac{\partial F}{\partial a} \right|_0$ in order to find the center manifold. After the linear

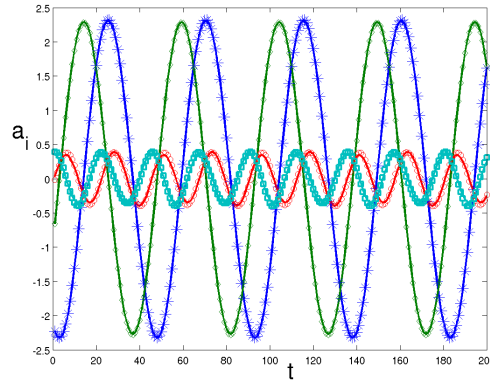


Figure 3. Lines: POD-Galerkin solution for 4 modes for DNS data, $Re = 110$. Symbols: observations.

change of coordinates, it results a system of 2 modes that describes the dynamics of the center manifold, and 2 modes that are left as quadratic functions of the first ones. From Eq. (19) the coefficients a and b are deduced for values of α and ω that corresponds to the system $\dot{a} = F(a)$ linearisation. These values are the same that those issued hydrodynamic stability of the flow (see i.e. [21]). Figure 4(a) shows the resulting phase portrait.

The real advantage of the normal form approach is shown when the initial condition is not close to

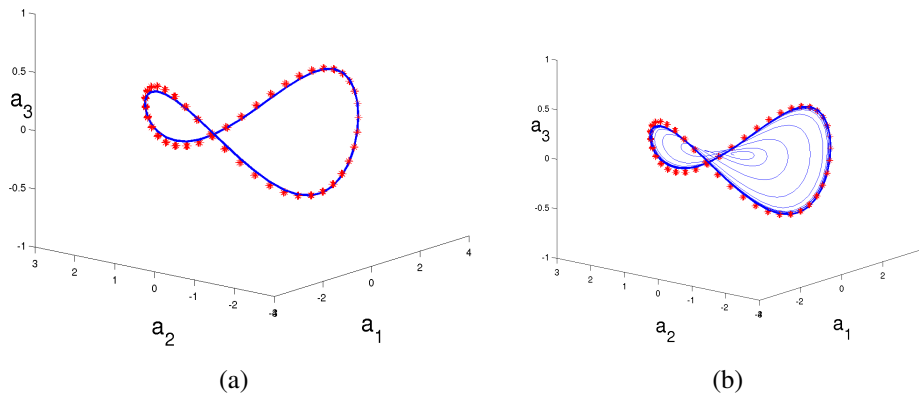


Figure 4. Phase Portraits. Lines: Solution for 4 modes for DNS data, $Re = 110$. Symbols: observations. (a) Initial condition issued from the observations. (b) Initial condition near $a = 0$

the empirical observations. In this case, a transient trajectory appears in order to lead the solution to its attractor. Figure 4(b) shows a solution starting on a point in the neighbourhood of the fixed point, that converges asymptotically towards the limit cycle.

Working with PIV data allows to check the method robustness. The noise introduced by the experimental measures is reduced by smoothing the data and next performing the assimilation. We proceed then to obtain the normal form which solution allows to reconstruct the POD modes as is illustrated in Figure 5.

The corresponding phase portrait (Figure 6(a)) allows to identify clearly the system dynamics. In Figure 6(b) different initial conditions points are used to remark that the system attractor is a

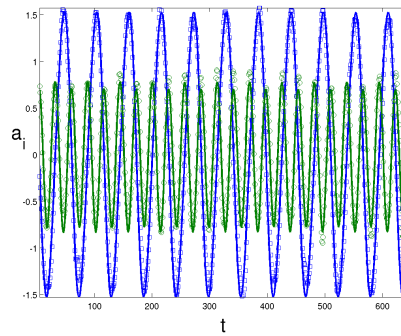


Figure 5. Time evolution of modes 2 & 3. Lines: solution from the normal form for PIV data, $Re = 120$. Symbols: observations.

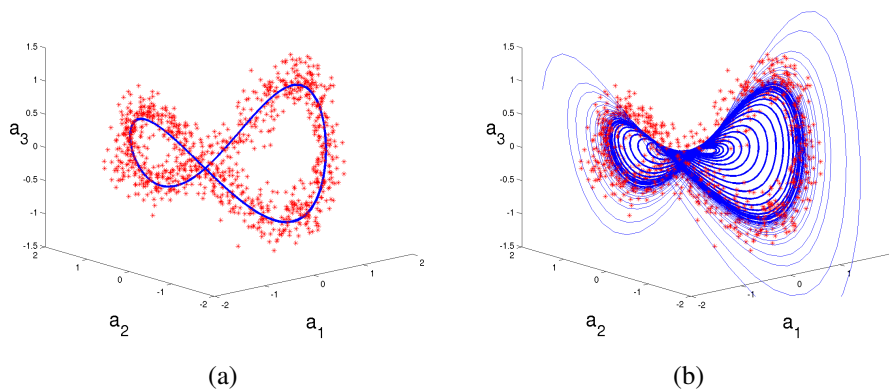


Figure 6. Phase Portrait. Lines: system solutions. Symbols: observations PIV data, $Re = 120$. (a) Initial condition issued from the observations. (b) Several initial conditions are useful to characterize the system attractor.

limit cycle and that it has the origin as an unstable focus. These points can be interpreted as instant perturbations to the flow, which recovers its dynamical equilibrium state afterwards.

7. CONCLUSIONS

From the benchmark of the flow around a cylinder problem, we proposed a method to improve the construction of reduced order models from experimental data, particularly PIV measures, and numerical data (DNS). As experimental data is subjected to many error sources, we developed a new data-assimilation scheme under the hypothesis of a perfect dynamical model. This technique corrects the polynomial identification method to retrieve the dynamical system coefficients which produce a solution that remains in a neighborhood of the realizations trajectory.

We included corrections to the system issued directly from the Galerkin projection onto the POD basis, to avoid its structural instability. A projection onto the center manifold of the system reduces the dimension dynamics and the final normal form of the equations. The robustness of the new formulation allows the dynamical system to describe even transient states which are not necessarily included in the realizations trajectory.

We applied the POD-assimilation ROM to a set of images corresponding to the flow around a cylinder at low Re numbers. The structures and dynamics were captured by POD and the ROM produced a solution that remained stable under perturbations. The method can be extended to general wake flows and we hope, in this sense, to contribute to future works on experimental active flow control.

8. APPENDIX: DERIVATION OF THE ADJOINT SYSTEM

8.1 Differentiated model

In order to calculate the cost function partial derivatives, respect to the control variables, the system (11) is derivated respect to (w, η) in the direction $(dw, d\eta)$. The following problem arises:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Given } (w, \eta) \in (\mathcal{W}, \mathcal{I}) \text{ and } X(t) \text{ solution of Eq. (11) and a perturbation} \\ (dw, d\eta) \in (\mathcal{W} \times \mathcal{I}), \text{ find } dX = \frac{\partial X}{\partial \epsilon} \delta \epsilon + \frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tal que:} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t dX(t) + \partial_X \mathbb{M}(X(t), w) dX(t) + \partial_w \mathbb{M}(X(t), w) dw = 0 \\ dX(t_0) = d\eta \\ dw = d\epsilon \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (20)$$

The linear tangent operators

$\partial_X \mathbb{M}(X(t), w) : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ and $\partial_w \mathbb{M}(X(t), w) : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$
are defined as the Gâteaux derivatives of the operator \mathbb{M} :

$$\begin{aligned} \partial_X \mathbb{M}(X(t), w) dX(t) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{M}(X(t) + \beta dX(t), w) - \mathbb{M}(X(t), w)}{\beta} \\ \partial_w \mathbb{M}(X(t), w) dw &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{M}(X(t), w + \beta dw) - \mathbb{M}(X(t), w)}{\beta} \end{aligned} \quad (21)$$

in the same way, the cost function (12) is derived with respect to (w, η) in the direction $(dw, d\eta)$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J}{\partial w}, dw \right\rangle_{\mathcal{U} \times \mathcal{W}'} &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle Y - \mathbb{H}(X), \partial_X \mathbb{H} \left(\frac{\partial X}{\partial w} dw \right) \right\rangle_R dt + \langle w - w_0, dw \rangle_N \\ \left\langle \frac{\partial J}{\partial \eta}, d\eta \right\rangle_{\mathcal{I}} &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle Y - \mathbb{H}(X), \partial_X \mathbb{H} \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta \right) \right\rangle_R dt + \langle X(t_0) - X_0, \delta \eta \rangle_B \end{aligned}$$

that is equivalent to

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J}{\partial w}, dw \right\rangle_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}'} &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_X \mathbb{H})^* R(Y - \mathbb{H}(X)), \left(\frac{\partial X}{\partial w} dw \right) \right\rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} dt + \langle N(w - w_0), dw \rangle_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} \\ \left\langle \frac{\partial J}{\partial \eta}, d\eta \right\rangle_{\mathcal{I}} &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_X \mathbb{H})^* R(Y - \mathbb{H}(X)), \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta \right) \right\rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} dt + \langle B(X(t_0) - X_0), \delta \eta \rangle_{\mathcal{I}} \end{aligned} \quad (22)$$

where $\partial_X \mathbb{H}^* : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{V}'$ is the adjoint operator of $\partial_X \mathbb{H}$ defined by:

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{O} \quad \langle \partial_X \mathbb{H} x, y \rangle_{\mathcal{O}} = \langle x, \partial_X \mathbb{H}^* y \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} \quad (23)$$

8.2 Adjoint Model

A way to estimate the gradients of the cost function is applying the differentiated model. In this manner, the model must be integrated as often as the number of dimensions of the control variable. Such a calculation may result inefficient when working with spaces of considerable dimensions.

Adjoint models allows the calculation in only one integration. To obtain the adjoint equation, the first equation of the system (20) is multiplied by an auxiliary (*adjoint*) variable $\lambda \in \mathcal{W}(t_0, t_f)$. Then

we integrate over $[t_0, t_f]$:

$$\int_{t_0}^{t_f} \langle \partial_t dX(t), \lambda(t) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} dt + \int_{t_0}^{t_f} \langle \partial_X \mathbb{M} dX(t), \lambda(t) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} dt + \int_{t_0}^{t_f} \langle \partial_u \mathbb{M} du, \lambda(t) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} dt = 0 \quad (24)$$

After integrating by parts the first term,

$$- \int_{t_0}^{t_f} \langle -\partial_t \lambda(t)(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t), dX(t) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} dt = \langle \lambda(t_f), dX(t_f) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} - \langle \lambda(t_0), du \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}'} + \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda(t), du \rangle_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}'} dt \quad (25)$$

The adjoint variable λ is defined then as the solution of the problem stated in Eq. (13).

9. REFERENCES

- P. Albarède and M. Provansal. Quasi-periodic cylinder wakes and the ginzburg-landau model. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 291(-1):191–222, 2006.
- D. Barkley. Linear analysis of the cylinder wake mean flow. *EPL (Europhysics Letters)*, 75(5):750–756, 2006.
- J. D’Adamo, N. Papadakis, E. Mémin, and G. Artana. Variational assimilation of pod low-order dynamical systems. *Journal of Turbulence*, 8(9):1–22, 2007.
- A.E. Deane, G. Karniadakis, and S. Orszag. Low-dimensional models for complex geometry flows: Application to grooved channels and circular cylinders. *Physics of Fluids A*, 3:2337–2354, 1991.
- Jan Dusek, P. Le Gal, and P. Fraunie. A numerical and theoretical study of the first hopf bifurcation in a cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 264(-1):59–80, 2006.
- S. Goujon Durand, J.E. Wesfreid, and P. Jenffer. Downstream evolution of the benard-von karman instability. *Physical Review E*, 50(1):303–313, 1994.
- A. Gronskis, J. D’Adamo, A. Cammilleri, G. Artana, and J. Silvestrini. Coupling mechanical rotation and ehd actuation in flow past a cylinder. *Journal of Electrostatics*, 66(1-2):pp. 1–7, 2008.
- P. Holmes, G. Berkooz, and J.L. Lumley. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press, 1996.
- V.L. Kalb and A.E. Deane. An intrinsic stabilization scheme for proper orthogonal decomposition based low-dimensional models. *Physics of Fluids*, 19:18, May 2007.
- L. Landau and E. Lifshitz. *Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics*, volume 6. Pergamon, 1987.
- J.L. Lions. *Optimal control of systems governed by PDEs*. Springer-Verlag, 1971.
- J. Maquet, C. Letellier, and L.A. Aguirre. Scalar modeling and analysis of a 3d biochemical reaction model. *Journal of Theoretical Biology*, 228(3):421–430, 2004.
- B. R. Noack, K. Afanasiev, M. Morzynski, G. Tadmor, and F. Thiele. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 497(-1):335–363, 2003.
- B. R. Noack, Paul Papas, and P. A. Monkewitz. The need for a pressure-term representation in empirical galerkin models of incompressible shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 523(-1):339–365, 2005.
- L. Perret, E. Collin, and J. Delville. Polynomial identification of pod based low-order dynamical system. *Journal of Turbulence*, 7(17):1–15, 2006.
- M. Provansal, C. Mathis, and L. Boyer. Bénard-von kármán instability: transient and forced regimes. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 182(-1):1–22, 2006.

- M. Schumm, E. Berger, and P. A. Monkewitz. Self-excited oscillations in the wake of two-dimensional bluff bodies and their control. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 271(-1):17–53, 2006.
- L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. *Quarterly of Appl. Math.*, XLV(3):561–82, 1987.
- J.T. Stuart. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. *Journal of Fluid Mechanics*, 4:1–21, 1958.
- B. Thiria and J.E. Wesfreid. Stability properties of forced wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, 579(-1):137–161, 2007.
- G. S. Triantafyllou, K. Kupfer, and A. Bers. Absolute instabilities and self-sustained oscillations in the wake of circular cylinders. *Phys. Rev. Lett.*, 59(17):1914–1917, Oct 1987.
- G. van der Graaf. Gpiv, open source software for particle image velocimetry. Available at <http://gpiv.sourceforge.net/>.
- S. Wiggins. *Introduction to applied Nonlinear Dynamics and Chaos*. Springer Verlag, 1990.
- B. J. Zielinska and J.E. Wesfreid. On the spatial structure of global modes in wake flow. *Physics of Fluids*, 7(6):1418–1424, 1995.

HYDRODYNAMIC STABILITY IN ELECTROCHEMICAL CELLS: THE NEUTRAL CURVE OF STATIONARY PERTURBATIONS

José Pontes – jopontes@metalmat.ufrj.br

Metallurgy and Materials Engineering Department – Federal University of Rio de Janeiro
P.O. Box 68505, Rio de Janeiro, RJ, 21941-972 Brazil

Norberto Mangiavacchi – norberto.mangiavacchi@gmail.com

Group of Environmental Studies of Hydropower Reservoirs (GESAR Group),
State University of Rio de Janeiro, R. Fonseca Telles 524, Rio de Janeiro, RJ, 20550-013 Brazil

Oswaldo E. Barcia – barcia@metalmat.ufrj.br

Institute of Chemistry – Federal University of Rio de Janeiro
P.O. Box 68505, Rio de Janeiro, RJ, 21941-972 Brazil

Oscar R. Mattos – omattos@metalmat.ufrj.br

Metallurgy and Materials Engineering Department – Federal University of Rio de Janeiro
P.O. Box 68505, Rio de Janeiro, RJ, 21941-972 Brazil

Bernard Tribollet – bt@cfr.jussieu.fr

UPR15 – CNRS, Laboratoire d'Interfaces et Systèmes Electrochimiques
4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Abstract. We review the key points concerning the linear stability of the classical von Kármán's solution of rotating disk flow, modified by the coupling, through the fluid viscosity, with concentration field of a chemical species. The results were recently published by Mangiavacchi et al. (Phys. Fluids, **19**: 114109, 2007) and refer to electrochemical cells employing iron rotating disk electrodes, which dissolve in the 1 M H₂SO₄ solution of the electrolyte. Polarization curves obtained in such cells present a current instability at the beginning of the region where the current is controlled by the hydrodynamics. The onset of the instability occurs in a range of potentials applied to the cell and disappear above and below this range. Dissolution of the iron electrode gives rise to a thin concentration boundary layer, with thickness of about 4% of the thickness of the hydrodynamic boundary layer. The concentration boundary layer increases the interfacial fluid viscosity, diminishes the diffusion coefficient and couples both fields, with a net result of affecting the hydrodynamic of the problem. Since the current is proportional to the interfacial concentration gradient of the chemical species responsible by the ions transport, the instability of the coupled fields can lead to the current instability observed in the experimental setups. This work presents the results of the linear stability analysis of the coupled fields. The results show that small increases of the interfacial viscosity result in a significant reduction of the stability of modes existing in similar configurations, but with constant viscosity fluids. Upon increasing the interfacial viscosity, a new unstable region emerges, in a range of Reynolds numbers much smaller than the lower limit of the unstable region previously known. Though the growth rate of modes in the previously known region is larger than the one of modes in the new region, the amplitude of the concentration unstable modes in this one is very large when compared to the amplitude of the associated hydrodynamic unstable modes. In addition concentration modes are always confined in a rather thin region, leading to the existence of large interfacial concentration gradient. Concentration modes in the new unstable region seem thus, to have a combination of properties sufficient to drive detectable current oscillations. The numerical experiments show that a progressive increase in the interfacial viscosity initially reduces the stability of the flow, but an increase beyond a certain limit restores the stability properties of constant viscosity flows.

Keywords: Rotating disk, Electrochemistry, Chemical Oscillations, Hydrodynamic Stability

1. POSING THE PROBLEM

The hydrodynamic field developed close to the axis of a large rotating disk belongs to the restricted class of problems admitting an analytical or semi-analytical similarity solution of the hydrodynamic equations. The angular velocity imposed to the fluid at the surface gives rise to a centrifugal effect and to a radial flow outwards. Continuity requires that the flow be replaced by an incoming one that approaches the disk. Close to the surface, the axial velocity of the incoming flow is reduced and the centrifugal effect appears. This is the region of the hydrodynamic boundary layer. The steady tri-dimensional solution of this flow was found by Von Kármán (1932) and is schematically shown in Fig. 1.

The boundary layer becomes unstable beyond a critical Reynolds number, which is the non-dimensional distance to the disk axis. The first stability studies of Von Kármán's solution are due to Smith (1946), who found the emergence of spirals as shown in Fig. 2. The pattern may turn with the disk angular velocity or other. When turning slower than the disk, the spirals arms tend to bend in the upstream direction. The pattern is "pulled" by the mean flow. Patterns bending downstream, or consisting of radial straight lines or either of circumferences are also possible. The coexistence of spirals bending in the up and the downstream directions was observed by Moisy (2004), in a setup of two counter rotating disks.

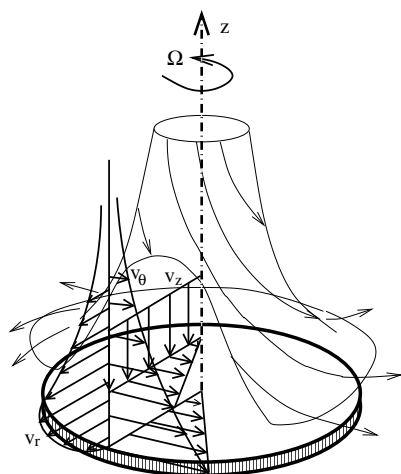


Figure 1. Von Kármán's flow close to the axis of a rotating disk.

Gregory *et al.* (1955) measured the critical Reynolds number beyond which Von Kármán's solution becomes unstable and proposed the first theoretical approach to the stability problem, not taking into account viscosity effects. Stability studies conducted after the eighties were mainly made in groups interested in the effect of a secondary cross flow, on the stability of a main one, as those found in swept wings. Rotating disk flow presents certain characteristics also found in swept wings. In such devices, the upstream flow is decomposed in a component perpendicular to the wing, responsible by the lift and in a cross component that anticipates the transition to turbulence. In rotating disk flow, a secondary radial flow appears in consequence of the imposed azimuthal velocity at the interface. Thanks to Von Kármán's exact solution and to the more controlled conditions found in rotating disks than in wings, rotating disks became a prototype to infer on the instabilization mechanisms occurring in swept wings. Malik (1986) evaluated the first neutral curve of perturbations turning with the angular velocity of the disk (stationary perturbations). The critical Reynolds number was found as 285.36. Lingwood (1995) extended Malik's results by considering non-stationary perturbations, turning with angular velocity different of the disk velocity and found critical Reynolds numbers on the order of 80. In addition, Lingwood addressed the absolute stability problem. The flow becomes

absolutely unstable when the a perturbation originated in a point is carried by the angular velocity of the flow and returns to the origin point before being completely damped and excites again the remaining perturbation at that point.

Stability studies conducted after 1990 focused on compressible fluid configurations, having in mind the fact that swept wings operate in the high subsonic regime.

The question of rotating disk flow stability appears also in electrochemical problems. Electrochemical cells employing a rotating disk electrode are widely used due to the relatively simple setup and to the fact that the mass flow at the electrode/electrolyte interface is independent of the radial position. The rate of transfer of ions is conveniently controlled by the the angular velocity imposed to the electrode. Figs. 3 and 4 shows the typical arrangement used at the Metallurgy and Materials Engineering Department of the Federal University of Rio de Janeiro, with three electrodes. The counter electrode consists of a platinum screen placed along the cell walls to assure an uniform distribution of the electric potential. Potentials are measured against the reference electrode. The working electrode consists of a 5 mm diameter iron rod covered with a 10 mm diameter resin cast, except in the base, through which the current flows. The electrode is coupled to a variable velocity electric motor. Typical electrode velocities range from 100 to 900 rpm.

Polarization curves experimentally obtained in the dissolution of iron electrodes in H_2SO_4 electrolytes present three regions (Barcia *et al.*, 1992). The first one occurs at relatively low over-voltages applied to the working electrode. The current is approximately proportional to the over-voltage and depends on the dissolution process. The current is not affected by transport phenomena occurring in the electrolyte, like the angular velocity imposed to the working electrode. Polarization curves show a second region, where the current depends on the applied over-voltage and also on the hydrodynamics, which is defined by the electrode angular velocity. By further increasing the over-voltage, a current plateau appears in the polarization curves, where the current depends only on the angular velocity of the electrode, and no longer, on the over-voltage. The over-voltage level of the plateau is proportional to $\Omega^{1/2}$. A current instability is observed experimentally in this plateau, appearing at a certain value of the applied over-voltage and being suppressed beyond a another one. The purpose of this work is to investigate a possible link between the stability of the hydrodynamic field and the current instability.

The hydrodynamic field at the base of the working electrode is approximated by Von Kármán's similarity solution. This hypothesis is justified by the thickness of the hydrodynamic boundary layer, which is proportional to $\Omega^{1/2}$, ranging from 0.5 to 1.3 mm, being thus one order of magnitude smaller than the 10 mm electrode diameter. Dissolution of the iron electrode gives raise to a Fe^{+2} ions concentration boundary layer. The ratio between the hydrodynamic and the concentration boundary layers is given by $\delta_h/\delta_c \approx 2 Sc^{1/3}$ (Levich, 1962), where Sc is the Schmidt number. Typical Schmidt numbers in electrochemical cells is 2000, resulting in concentration boundary layers with thicknesses of order of

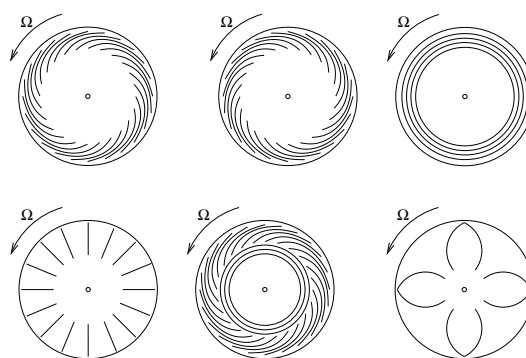


Figure 2. Possible perturbation patterns emerging after the first instability of von Kármán's solution.

4% of the thickness of the hydrodynamic one.

The work of Barcia *et al.*, (1992), concerning the anodic dissolution of iron electrodes in sulfuric acid aned, in particular, the current *plateau*, put in evidence, the existence of a viscosity gradient at the electrode/electrolyte interface. The athors assumed a viscosity profile depending on the axial coordinate z and obtained the steady concentration profile of the chemical species responsible by the current, using the Stokes-Einstein law, that postulates that the product of the diffusion coefficient by the electrolyte viscosity is constant.

Subsequently, Pontes *et al.* (2004) addressed the stability of the flow using the viscosity profile postulated by Barcia *et al.*, (1992). The results show an enlargement of the unstable range of wavenumbers, but the critical radius (Reynolds number) beyond which the flow becomes unstable was still larger than the radius of typical electrodes.

The present work addresses the question of whether the coupling, through the viscosity and the diffusion coefficients, of the concentration and the hydrodynamic fields, may lead to an instability at distances from the rotation axis comparable to the electrode radius. The cell current may be evaluated through the ions transfer at the electrode/electrolyte interface, which is due to two effects: ions concentration gradient ($i \propto dC/dz|_{z=0}$) and ions migration due to the electric field. Barcia *et al.* (1992) showed that the concentration gradient is the dominant effect, what leads to the conclusion that the current depends on the spatial distribution of a relevant chemical species, that in turn, depends on the hydrodynamic field. Instabilities of the hydrodynamic field and of the interfacial concentration gradient may thus be responsible for the current oscillations observed in the current *plateau*. However, Reynolds numbers attained in electrochemical cells are of order of 20 – 40, being thus clearly smaller than critical experimental values found in the literature and the theoretical values found by Malik and by Lingwood.

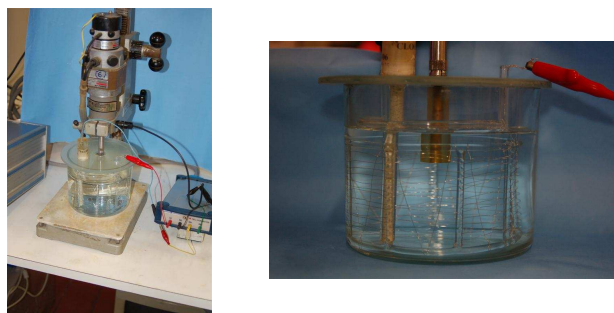


Figure 3. The electrochemical setup. On left: overview of the arrangement, showing the cell and the working electrode attached to the driving electric motor. On right: the cell, with the platinum counter-electrode disposed along the cell walls, the counter electrode and the working electrode at the center, driven by the electric motor.

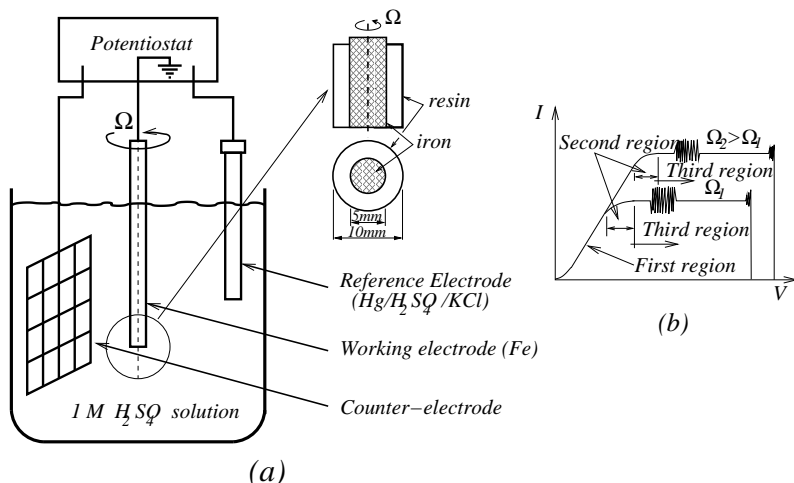


Figure 4. An electrochemical cell with a rotating disk electrode (a) and the polarization curve showing the three regions (b).

2. GOVERNING EQUATIONS

The problem is governed by the continuity and the Navier-Stokes equations, coupled through the viscosity, to the transport equation of the relevant chemical species. These equations, written in the frame attached to the surface of the rotating disk read:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{\rho} \text{div } \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

$$\frac{DC}{Dt} = \text{div}(\mathcal{D} \text{grad } C) \quad (3)$$

Three questions are posed: (a) if the the coupling changes the stability properties of the purely hydrodynamic field, reducing the critical Reynolds number to the range of values attained in electrochemical setups, (b) if possible oscillations of the interfacial concentration gradient are strong enough to drive the current oscillations experimentally observed and (c) what mechanisms lead to the suppression of the current instability beyond a certain over-voltage level. The results herein presented support a positive answer to the first question, suggest that the hydrodynamic instability of the coupled fields is strong enough to drive the current oscillation, but still do not explain the instability suppression.

where Ω is the angular velocity of the rotating disk electrode, \mathcal{C} and \mathcal{D} are, respectively, the concentration and the diffusion coefficient of the representative chemical species and τ is the viscous stress tensor for a Newtonian fluid with the viscosity depending on the concentration of the chemical species.

The evolution equations are rewritten in non-dimensional form. Variables having units of length or its reciprocal (radial and axial coordinates, perturbation wavenumber along the radial direction) are made non-dimensional with the length used to measure the thickness of the boundary layer, $(\nu_\infty/\Omega)^{1/2}$, where ν_∞ is the bulk viscosity of the fluid. Velocity components are divided by the local imposed azimuthal velocity $r_e\Omega$, pressure is divided by $\rho(r_e\Omega)^2$, viscosity is divided by the bulk viscosity, ν_∞ , time and the eigenvalue of the linearized problem are made non-dimensional with the time required by a particle, turning with the azimuthal velocity $r_e\Omega$, to move a distance equal to the reference length, $(\nu_\infty/\Omega)^{1/2}$. Here, r_e is the dimensional coordinate along the radial direction at which the stability analysis will be carried out. The non-dimensional concentration of the chemical species is defined by:

$$C = \frac{\mathcal{C} - \mathcal{C}_\infty}{\mathcal{C}_S - \mathcal{C}_\infty} \quad (4)$$

where \mathcal{C}_S and \mathcal{C}_∞ are, respectively, the concentration of the chemical species at the electrode surface and in the bulk. We define also the Reynolds and the Schmidt numbers by the relations:

$$R = r_e \left(\frac{\Omega}{\nu_\infty} \right)^{1/2} \quad \text{and} \quad Sc = \frac{\mathcal{D}_\infty}{\nu_\infty} \quad (5)$$

The Reynolds number may be seen as a non-dimensional distance to the disk axis. At this point, we assume that the viscosity depends on the non-dimensional concentration of the chemical species according to:

$$\nu = \nu_\infty \exp(mC) \quad (6)$$

where m is a non-dimensional parameter depending on the electrochemical characteristics of the system (electrode material, type of electrolyte, applied potential), but not on the concentration of the chemical species. In particular, this parameter defines the interface viscosity, given by $\nu = \nu_\infty \exp(m)$. This equation is based on a thermodynamic model proposed by Esteves *et al.* (2001). We also assume the Stokes-Einstein law:

$$\mathcal{D}\nu = \mathcal{D}_\infty \nu_\infty \quad (7)$$

where \mathcal{D}_∞ is the bulk diffusion coefficient. Using the bulk coefficients to rewrite Eqs. 7 and 6 in non-dimensional form, we obtain:

$$\mathcal{D}\nu = 1 \quad \text{and} \quad \nu = \exp(mC) \quad (8)$$

Equations 1 – 3 are rewritten as follows, in non-dimensional form:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} - \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times r \mathbf{e}_r) - \mathbf{grad} p + \frac{1}{R} \text{div } \tau \quad (10)$$

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{1}{RSc} \text{div}(\mathcal{D} \mathbf{grad} C) \quad (11)$$

A destabilizing potential of the coupling between the hydrodynamic and the chemical species fields can be seen in Eq. (11): the Reynolds number is amplified by the Schmidt number, which takes here the value $Sc = 2000$, typical for electrochemical cells.

3. THE BASE STATE

3.1 Base State Equations

The base state is the von Kármán similarity solution for a fluid with the viscosity depending on the concentration field, which is assumed to vary along the axial coordinate only.

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_r \\ \bar{v}_\theta \\ \bar{v}_z \\ \bar{p} \\ \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \Omega F(z) \\ r \Omega G(z) \\ (\nu_\infty \Omega)^{1/2} H(z) \\ \rho \nu_\infty \Omega P(z) \\ \mathcal{C}_\infty + (\mathcal{C}_S - \mathcal{C}_\infty) C(z) \end{pmatrix} \quad (12)$$

All variables in Eq. 12 are dimensional, except the axial dependent profiles, F , G , H , C and the axial coordinate z . Boundary conditions for F , G , H and P are $F = G = H = P = 0$ at the disk surface ($z = 0$), $F = H' = 0$ and $G' = -1$ as $z \rightarrow \infty$. The non-dimensional concentration profile, C , varies from 1, at $z = 0$, to 0, as $z \rightarrow \infty$.

Introducing Eq. 12 and the constitutive equations of the stress tensor of a Newtonian fluid with variable viscosity in Eqs. 1 – 3, together with Eqs. 6 and 7, we obtain the ordinary nonlinear system for the axial profiles F , G , H , P and C :

$$2F + H' = 0 \quad (13)$$

$$F^2 - (G + 1)^2 + HF' - \nu F'' - \nu' F' = 0 \quad (14)$$

$$2F(G + 1) + HG' - \nu G'' - \nu' G' = 0 \quad (15)$$

$$P' + HH' - \nu H'' - 2\nu' H' = 0 \quad (16)$$

$$Sc HC' - \frac{C''}{\nu} + \frac{\nu'}{\nu^2} C' = 0 \quad (17)$$

where prime denotes derivatives with respect to the non-dimensional axial coordinate z . The viscosity ν and its derivatives are written in non-dimensional form.

3.2 Evaluation of the Viscosity at the Electrode/Electrolyte Interface

Solving Eqs. 13 – 17 requires specification of two parameters: the bulk Schmidt number and the parameter m appearing in Eq. 6, which ultimately defines the electrolyte viscosity at the interface with the electrode. At this point, we assume that the limit current density at the interface is proportional to the concentration gradient of the relevant chemical species generated by the dissolution of the electrode. Ions migration due to the potential gradient is neglected. The current density is given by the relation (Barcia *et al.*, 1992):

$$\frac{i}{n\mathcal{F} \frac{1}{Sc} \frac{1}{\nu_0/\nu_\infty} (C_\infty - C_s) \sqrt{\nu_\infty \Omega}} = \left. \frac{dC}{dz} \right|_{z=0} \quad (18)$$

where i is expressed in A/cm^2 , n is the valence number of the chemical species ($n = 2$), $\mathcal{F} = 96500 C/mol$, is the Faraday constant, $C_s = 2.0 \times 10^{-3} mol/cm^3$ is the dimensional concentration of the species at the electrode interface (saturated condition), $C_\infty = 0 mol/cm^3$ and ν_0 is the fluid viscosity at the interface. The limit current density obtained experimentally is $i = 0.8810 A/cm^2$ at 900 rpm (Geraldo *et al.*, 1998).

An initial value is specified for m , Eqs. 13 – 17 are solved. The ratio ν_0/ν_∞ is evaluated and the non-dimensional normal derivative of the concentration at the interface, $dC/dz|_{z=0}$, is obtained from the profiles. These figures are introduced in Eq. 18, leading to a value for the current density. The value initially specified for m is corrected and the procedure is repeated until convergence to the experimental value of i is reached. At convergence we obtain $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$.

3.3 Base State Profiles

The non-dimensional velocity, concentration, viscosity and diffusion coefficient profiles, F , G , H , C , ν and \mathcal{D} , obtained for $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ and $Sc = 2000$ are shown in Fig. 5.

The thin concentration boundary layer, results in velocity profiles very close to the ones obtained for the constant viscosity case. In particular, we obtain $H = -0.88559$ far from the disk for the variable viscosity flow considered, a figure slightly different from the asymptotic value for the constant viscosity case, $H = -0.88447$. However, the derivatives of the velocity profiles are strongly affected inside the concentration boundary layer, as shown in Fig. 6.

4. STABILITY OF THE BASE STATE

4.1 Stability Equations

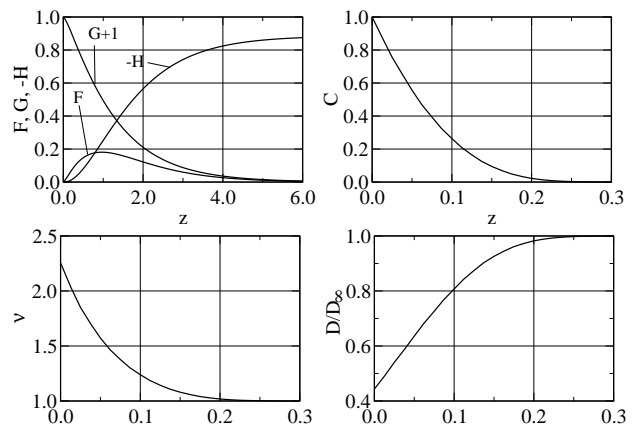


Figure 5. Stationary dimensionless velocity, concentration, viscosity and diffusion, profiles, F , G , H and C for $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ and $Sc = 2000$.

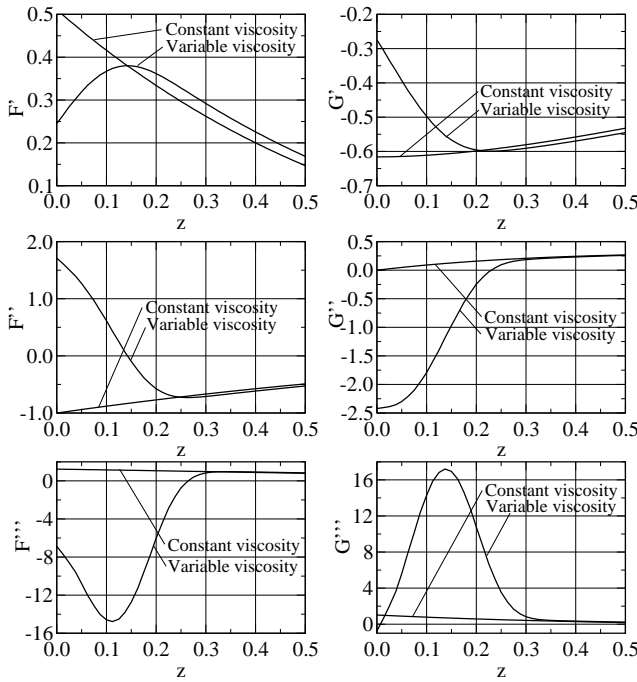


Figure 6. The first three derivatives of the non-dimensional velocity profiles, F and G , for the constant and variable viscosity cases, with $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ and $Sc = 2000$.

rithmic spiral, with the branches curved in the clockwise direction if β/α is positive and counter-clockwise, if negative. The structure turns counter-clockwise if $\Re(\omega)/\beta$ is positive and clockwise, if negative.

The base state and the perturbation variables are rewritten in non-dimensional form, introduced in Eqs. 9 – 11 and nonlinear terms are dropped. Perturbation variables are not, strictly speaking, separable since the resulting equations for the profiles f, g, h, π and c still contain the radial coordinate r . In order to overcome the problem it is necessary to make the *parallel flow* assumption, where it is assumed that variations of the above profiles are small as far as $\Delta r/r \ll 1$. This approximation holds whenever the stability analysis is carried sufficiently far from $r = 0$. If variations of the profiles with r are small, this coordinate can be assumed as constant. The non-dimensional constant r is the Reynolds number at which the stability analysis is carried. This is the parallel flow hypothesis. Adoption of this hypothesis in rotating disk flow (Malik *et al.*, 1981, Wilkinson and Malik, 1985, Lingwood, 1995) is made by replacing r by R .

To conclude, terms of order R^{-2} are dropped, leading to a generalized complex non-symmetric eigenvalue-eigenfunction problem in the form:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \eta \\ c \end{pmatrix} = \omega R \begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & B_{22} & \\ & & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \eta \\ c \end{pmatrix} \quad (20)$$

where $\eta = \alpha g - \beta f$, missing elements in the matrices are zero and the operators A_{ij} and B_{ij} are given by:

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{114}D^4 + a_{113}D^3 + a_{112}D^2 + a_{111}D + a_{110} & A_{12} &= a_{121}D + a_{120} \\ A_{13} &= a_{132}D^2 + a_{131}D + a_{130} & & \\ A_{21} &= a_{211}D + a_{210} & A_{22} &= a_{222}D^2 + a_{221}D + a_{220} & A_{23} &= a_{231}D + a_{230} \\ A_{31} &= a_{310} & A_{33} &= a_{332}D^2 + a_{331}D + a_{330} & & \\ B_{11} &= D^2 - \bar{\lambda}^2 & B_{22} &= 1 & B_{33} &= iSc \end{aligned}$$

where $D^n = d^n/dz^n$. By defining $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\bar{\alpha} = \alpha - i/R$ and $\bar{\lambda}^2 = \alpha\bar{\alpha} + \beta^2$ we obtain for the coefficients a_{ijk} :

$$\begin{aligned} a_{114} &= i\nu & a_{113} &= i(2\nu' - H) & a_{112} &= i\nu'' - i\nu(\lambda^2 + \bar{\lambda}^2) + R(\alpha F + \beta G) - i(H' + F) \\ a_{111} &= -i\nu'(\lambda^2 + \bar{\lambda}^2) + iH\bar{\lambda}^2 & & & & \\ a_{110} &= i\bar{\lambda}^2(\nu'' + \nu\lambda^2) - R(\alpha F + \beta G)\bar{\lambda}^2 - R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') + iH'\bar{\lambda}^2 & & & & \\ a_{121} &= 2(G + 1) & a_{120} &= 2G' & & \\ a_{132} &= R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma & a_{131} &= [2R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') + 6i\bar{\lambda}^2 F]\gamma + 2R(\bar{\alpha}F' + \beta G')\gamma' & & \end{aligned}$$

We turn now to the question of the stability of the base state with respect to small disturbances. The hydrodynamic and chemical fields are written as a sum of the base state plus a perturbation:

$$\begin{aligned} v_r &= \bar{v}_r + \tilde{v}_r \\ v_\theta &= \bar{v}_\theta + \tilde{v}_\theta \\ v_z &= \bar{v}_z + \tilde{v}_z \\ p &= \bar{p} + \tilde{p} \\ C_T &= \bar{C} + \tilde{C} \end{aligned}$$

where:

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_r \\ \tilde{v}_\theta \\ \tilde{v}_z \\ \tilde{p} \\ \tilde{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_e \Omega f \\ r_e \Omega g \\ r_e \Omega h \\ \rho \nu_\infty \Omega \pi \\ (C_s - C_\infty) c \end{pmatrix} \exp[i(\alpha r + \beta R \theta - \omega t)] + cc. \quad (19)$$

Here ω is a complex number, with $\Re(\omega)$ and $\Im(\omega)$ being, respectively, the frequency and the rate of growth of the perturbation. The functions f, g, h, π and c depend on the axial coordinate z and the parameters α and β are the components of the perturbation wave-vector along the radial and azimuthal directions. For a given time, the phase of the perturbation is constant along branches of a logarithmic spiral, with the branches curved in the clockwise direction if β/α is positive and counter-clockwise, if negative.

$$\begin{aligned}
 a_{130} &= [R\bar{\lambda}^2 (\alpha F' + \beta G') + R(\bar{\alpha}F'''' + \beta G''') + 4i\bar{\lambda}^2 F'] \gamma \\
 &\quad + [2R(\bar{\alpha}F'' + \beta G'') + 6i\bar{\lambda}^2 F] \gamma' + R(\bar{\alpha}F' + \beta G') \gamma'' \\
 a_{211} &= 2(G + 1) & a_{210} &= -iR(\alpha G' - \beta F') \\
 a_{222} &= i\nu & a_{221} &= i(\nu' - H) & a_{220} &= -i\nu\lambda^2 + R(\alpha F + \beta G) - iF \\
 a_{231} &= iR(\alpha G' - \beta F') \gamma & a_{230} &= iR[(\alpha G'' - \beta F'') \gamma + (\alpha G' - \beta F') \gamma'] \\
 a_{310} &= RScC' \\
 a_{332} &= -\frac{1}{\bar{\nu}} & a_{331} &= \frac{1}{\bar{\nu}} \left(\frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}} + \frac{1}{\bar{\nu}} C' \gamma + Sc\bar{\nu}H \right) \\
 a_{330} &= iRSc(\alpha F + \beta G) - \frac{1}{\bar{\nu}} \left\{ -\bar{\lambda}^2 + \frac{1}{\bar{\nu}} \left[\left(2\frac{\bar{\nu}'}{\bar{\nu}} \gamma - \gamma' \right) C' - \gamma C'' \right] \right\}
 \end{aligned}$$

where $\gamma = d\nu/dC$. Boundary conditions of the problem require non-slip flow, vanishing axial component of the velocity and saturation concentration of the chemical species at the electrode surface. These conditions are already fulfilled by the base-state and cannot be modified by the perturbation. In consequence we require $h = \eta = c = 0$ in $z = 0$. Moreover, continuity requires that $h' = 0$ at the interface. In $z \rightarrow \infty$ we require that the perturbation vanishes ($h = h' = \eta = c = 0$).

4.2 Stationary Neutral and Unstable Level Curves

The neutral stability curves for stationary disturbances [$\Re(\omega) = 0$], obtained by solving the eigenvalue-eigenfunction problem for $Sc = 2000$ and $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$, are presented in Fig. 7. This figure shows that the coupling enlarges the unstable region of constant viscosity fluids to a wider range of wave-numbers and to a critical Reynolds number of order of 50% of the critical wavenumber of constant viscosity fluids. Fig. 7 shows also the existence of a new family of much more unstable modes. Critical Reynolds numbers of this region are in the range of the ones attained in experimental setups. We refer to these new modes as *chemical* and to modes belonging to the former family as *hydrodynamic*.

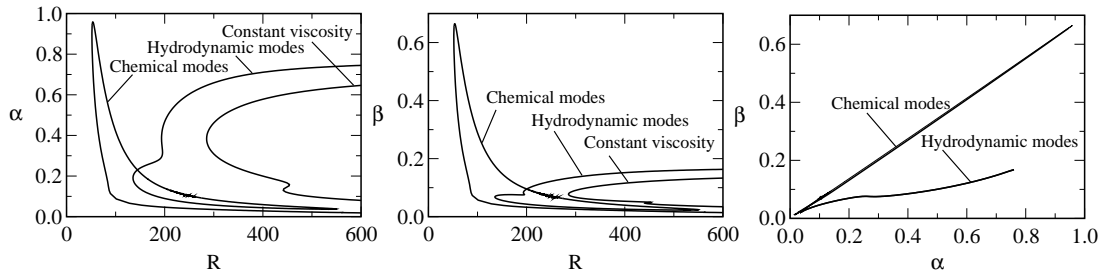


Figure 7. Neutral stability curves of stationary perturbations, in the $\alpha \times R$, $\beta \times R$ and $\alpha \times \beta$ planes.

The enlarged unstable hydrodynamic region suggests that modes inside this region might possibly have larger growth rates (ω_i) than unstable modes of constant viscosity fluids. Similarly, we could expect that the narrow region of unstable chemical modes could not allow for the existence of modes with large growth rates. This is the case, indeed. Figure (8) shows neutral and level curves evaluated for positive rates of growth for fluids with constant viscosity on left, for the unstable region of hydrodynamic and chemical modes at the center and right, respectively.

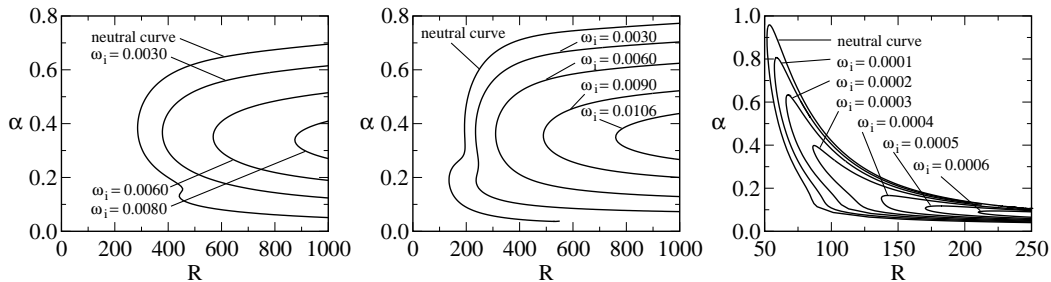


Figure 8. Neutral and level curves with positive growth rates (ω_i) of fluids with constant viscosity (on left) and in the unstable region of hydrodynamic (at the center) and chemical modes (on right) of the variable viscosity case.

An analysis of Fig. 8 shows that growth rates of hydrodynamic modes of variable viscosity fluids attain values up to 30% larger than in the case of constant viscosity case. However, growth rates of chemical modes are more than one order of magnitude smaller than those of hydrodynamic modes.

4.3 Marginally Stable Eigenmodes – Hydrodynamic and Chemical Unstable Regions

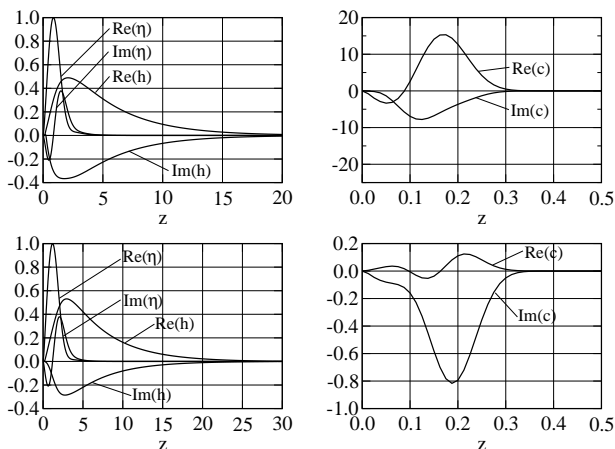


Figure 9. Real and imaginary parts of one modes on the neutral curve of the chemical region, at the point $R = 156.99$, $\alpha = 0.20124$, $\beta = 0.13767$, in the first row and of a mode on the neutral curve of the hydrodynamic region, at the point $R = 135.48$, $\alpha = 0.18726$, $\beta = 0.067182$ (second row).

viscosity stratification is responsible for the existence of the new chemical region of unstable modes, for the enlargement and reduction of the critical Reynolds number of the hydrodynamic region. The experiment was done by setting operators $A_{13} = A_{23} = 0$ in Eq. 20.

The authors also showed that a progressive increase of the interfacial viscosity results firstly, in a decrease of the overall stability, but, as the viscosity increases the destabilizing effect is inverted and the stability properties of constant viscosity fields are restored. The $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ is not the most unstable one. An increase by 5% of the interfacial viscosity enlarges the area of the unstable hydrodynamic region to practically its maximum. A narrow new unstable region already exists with a 2% increase in the interfacial viscosity, but with a critical Reynolds number of order of 1100. As the interfacial viscosity increases the area of the unstable chemical region increases and moves to inner radius. The area attains a maximum at $\nu_0/\nu_\infty \approx 1.5$. Further increasing the interfacial viscosity reduces the area of the unstable chemical region. The region disappears close to $\nu_0/\nu_\infty = 2.8$. New increases in the interfacial viscosity reduce the hydrodynamic unstable region to the one of constant viscosity fluids.

4.5 Effect of Variation of the Electrolyte Viscosity at the Interface with the Electrode

This section deals with the effect of variation of the electrolyte viscosity at the interface with the working electrode, a situation expected to occur by changing the over-voltage applied to the cell. The results are presented in Figs. 10 and 11.

Fig. 10 shows that the chemical region progressively moves to high Reynolds numbers and eventually disappears, as the constant viscosity condition is approached. The most unstable case does not occur for $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$. Curves plotted in the $R \times \beta$ are qualitatively similar. Fig. 11 show, in the left panels, the collapse of the chemical region as the ratio ν_0/ν_∞ increases. Right panels show the return of the neutral curve of the hydrodynamic region to the one of constant viscosity electrolytes.

5. NUMERICAL PROCEDURE

Building the neutral stability curves presented in this work was accomplished through the following procedure:

1. Solving the base state equations (Eqs. 13 – 17), given the value of the parameter m in Eq. 8;
2. Evaluation of the viscosity at the electrode/electrolyte interface, according to the procedure described in Sec. 3.2
3. Solving the generalized eigenvalue/eigenfunction problem given by Eq. 20, for a specified perturbation (specified wavevector components α and β), turning with the disk angular velocity, $\mathcal{R}(\omega) = 0$, at a given distance R , of the disk axis;
4. Solving the inverse problem of finding stationary the neutral curve in the three-dimensional parameter space ($\alpha \times \beta \times R$).

Despite of the low growth rate, unstable modes in the chemical region show a combination of properties that seem capable to drive the current oscillations observed in experimental setups. Fig. 9 shows the hydrodynamic and chemical concentration components of a mode on the neutral curve of the chemical region (first row) and on the neutral curve of hydrodynamic region (second row). The amplitude of the chemical component is of same order of the hydrodynamic components in the second case but significantly larger in the case of modes in the chemical region. In addition, the chemical component is always confined to a narrow region close to the interface, leading to high values of the interfacial concentration gradient. This gradient seems sufficiently strong to drive detectable current oscillations.

4.4 Effects of Decoupling the Transport of the Chemical Species and of Variation of the Interfacial Viscosity

Numerical experiments conducted by the authors Mangiacchi *et al.*, 2007 show that the coupling, and not the

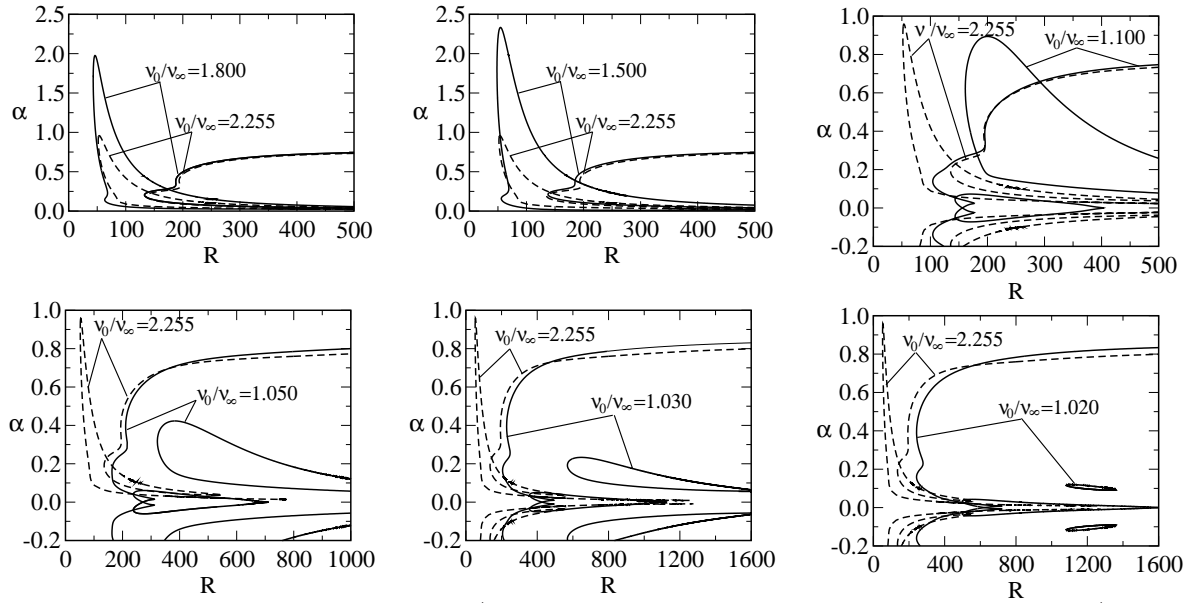


Figure 10. Collapse of the chemical region as $\nu_0/\nu_\infty \rightarrow 1$, in the $\alpha \times R$ plane. Dashed curves refer to $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$. Continuous lines refer to the neutral curves associated to a $\nu_0/\nu_\infty = 1.800$ in the upper left panel to $\nu_0/\nu_\infty = 1.020$ in the lower right one.

The base state equations are discretized by a finite differences method with space derivatives represented by second order approximations in a staggered grid with 2401 uniformly spaced points. A domain length up to $z = 30$ was adopted, in order to describe perturbations with long wavevector components α and β , since these perturbations go far beyond the base state boundary layer ($z = 6$).

The base state equations were solved by a Newton method: A first guess is assumed for the sought profiles and the residual of the right hand side of Eq. 13 – 17 is evaluated. The equations are linearized, a new estimation of the profiles is made and the process is repeated until the residual falls below a specified value.

Building the neutral curves requires finding the set of points $c(s) = (\alpha(s), \beta(s), R(s))$ that satisfy $F(c(s)) = 0$, where $F : R^3 \rightarrow R^2$ is given by $F = (\Im(\omega), \Re(\omega) - \omega_r)^T$. The neutral curves are built using a Predictor-Corrector Continuation method described by Allgower & Georg (1991). Here, for completeness, we will give a short description of the employed method:

1. The perturbation frequency ω_r is specified and an initial point c_0 , in the parameters space α, β, R is given. This point is not necessarily on the neutral curve;
2. This initial point is corrected using an inexact Newton iteration given by

$$c_i^{n+1} = c_i^n - F'(c_i^0)^+ F(c_i^n) \quad (21)$$

where $F'(c_0)^+$ is the pseudo-inverse of Moore-Penrose of the Jacobian of F . The Jacobian is computed numerically, using a finite difference approximation.

3. To obtain an initial estimate of the next point over the curve, a Predictor step is employed, based on the first order Euler method:

$$c_{i+1}^0 = c_i + h t(F'(c_i)) \quad (22)$$

where h is a suitable step size, and $t(F'(c_i))$ is the tangent vector to curve $c(s)$.

4. The value c_{i+1}^0 is corrected in a Corrector step using Eq. (21) iteratively until a satisfactorily converged value is obtained.
5. The generalized eigenvalue/eigenfunction problem required to evaluate $F(c(s))$ is solved numerically, using an inverse power method.

6. CONCLUSIONS

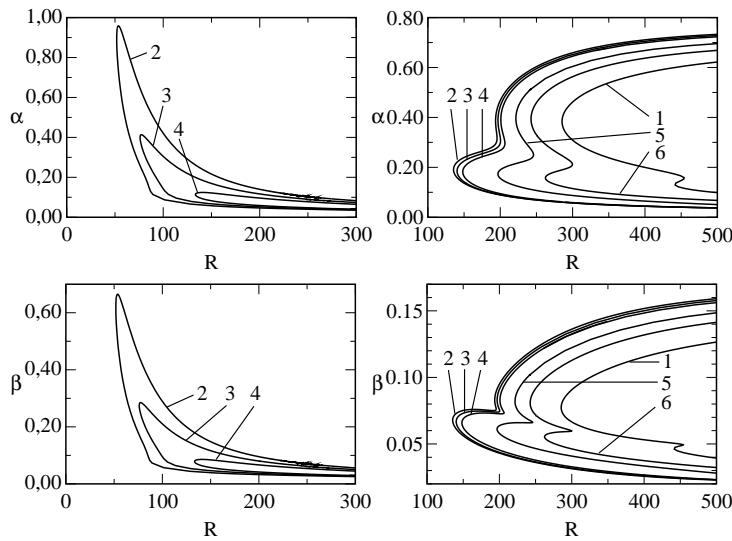


Figure 11. Collapse of the chemical region as $\nu_0/\nu_\infty \rightarrow \infty$, in the $\alpha \times R$ plane. Curves No. 2 to 6 refer to $\nu_0/\nu_\infty = 2.255, 2.5, 2.8, 5.0$ e 10.0 , respectively.

$\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ was obtained for the ratio between interface and bulk viscosities.

The base state was submitted to small perturbations modulated both in the radial and the azimuthal directions. The approach leads to a generalized non-symmetric eigenvalue-eigenfunction problem, real and imaginary parts of the eigenvalue being, respectively, the angular velocity of the perturbation, relative to the electrode angular velocity and the rate of growth of the perturbation. The eigenfunctions contain the description of the curl, vertical velocity and concentration of the perturbation mode. The real part of the eigenvalue was set to zero, namely, only perturbations turning with the angular velocity of the electrode were considered.

The resulting space parameter is three dimensional, with the radial and azimuthal wavevector components of the perturbation and the Reynolds number along the axis. The Reynolds number is a nondimensional distance from the axis. Space derivatives along the axial direction were discretized in a staggered mesh of uniformly spaced points, leading to an eigenvalue-eigenvector problem, solved by the inverse power method. The neutral stability curves were evaluated, to identify the boundaries between stable and unstable regions. Two unstable regions were identified. The first one, qualitatively similar to the unstable region of rotating disk flow with constant viscosity, is denoted as the *hydrodynamic region* of unstable modes. The range of unstable wavevector components in this region is considerably enlarged by the coupling. The critical Reynolds number is reduced to approximately 50% of the one of constant viscosity flows.

A new unstable region was identified in a limited range of Reynolds numbers, starting at values of the same order of those attained in the experimental setup, and disappearing beyond a certain distance from the axis. This region is denoted as the *chemical region* of unstable modes. Being narrower than the hydrodynamic region, the rate of growth of unstable modes in the chemical region is roughly 20 times smaller than the rate of growth of modes in the hydrodynamic region. Nevertheless modes in the chemical region are dominated by the concentration component, which holds an amplitude approximately 20 times larger than the amplitude of the hydrodynamic variables. In addition, the concentration component is confined to a thin layer close to the electrode surface, resulting in high concentration gradients at the electrolyte/electrode interface. The high amplitude and the high concentration gradients suggest that the instability of the coupled fields is sufficient to drive the detectable current oscillations experimentally observed.

The case where $\nu_0/\nu_\infty = 2.255$ is not the most unstable. The larger unstable regions were obtained for $\nu_0/\nu_\infty \approx 1.5$. Beyond this value the unstable area in the space parameter is reduced. The chemical region is the first one to be reduced, practically disappearing for $\nu_0/\nu_\infty > 2.8$. The unstable area of the hydrodynamic region is slightly affected up to this value but tends to the neutral curve of constant viscosity flows beyond that. The results suggest that an excessive raising of the interface viscosity leads to a thin viscous and stable region, that prevent oscillations of the concentration gradient and the current. The viscosity of the electrolyte remains practically constant in the remaining.

7. REFERENCES

- Allgower, E. and Georg, K., 1990, "Continuation Methods - An Introduction", Springer - Verlag, New York.
- Barcia, O. E., Mattos, O. R., and Tribollet, B., 1992, Anodic dissolution of iron in acid sulfate under mass transport control, "J. Electrochem. Soc.", Vol. 139, pp. 446–453.

This work addresses rotating disk flow stability in electrochemical cells, coupled, through the viscosity, to the transport of a chemical species responsible by the current in the cell. The constitutive equation relating the electrolyte viscosity to the concentration of the relevant species is based on a thermodynamic model proposed by Esteves *et al.* (2001) and the sole parameter appearing in the equation (m , in Eq. 18 was evaluated from experimental data obtained in our group. A Schmidt number $Sc = 2000$ was adopted, which is a typical value for subject setup. The classical Von Kármán's similarity solution was recalculated. The current is proportional to the concentration gradient of the relevant chemical species at the interface. The obtained interfacial gradient was inserted in Eq. 18 and checked against the experimental value of the current. The value of the parameter m was then changed until convergence was obtained. At converge, a value

- Esteves, M. J. C., Cardoso, M. J. E. M., and Barcia, E., 2001, A Debye-Hückel Model for Calculating the Viscosity of Binary Strong Electrolyte Solutions, "Ind. Eng. Chem. Res.", Vol. 40, pp. 5021–5028.
- Geraldo, A. B., Barcia, O. E., Mattos, O. R., Huet, F., and Tribollet, B., 1998, New results concerning the oscillations observed for the system iron-sulphuric acid, "Electrochim. Acta", Vol. 44, pp. 455–465.
- Gregory, N., Stuart, J. T., and Walker, W. S., 1955, On the Stability of Three-Dimensional Boundary Layers with Application to the Flow Due to a Rotating Disk, "Phil. Trans. Roy. Soc. London", Vol. A-248, pp. 155–199.
- Levich, V. G., 1962, "Physicochemical Hydrodynamics", Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Lingwood, R. J., 1995, Absolute instability of the boundary layer on a rotating disk, "J. Fluid Mech.", Vol. 299, pp. 17–33.
- Malik, M. R., 1986, The Neutral Curve for Stationary Disturbances in Rotating-disk Flow, "J. Fluid Mech.", Vol. 164, pp. 275–287.
- Malik, M. R., Wilkinson, and Orzag, S. A., 1981, Instability and Transition in a Rotating Disk, "AIAA J.", Vol. 19-9, pp. 1131–1138.
- Mangiavacchi, N., Pontes, J., Barcia, O. E., Mattos, O. E., and Tribollet, B., 2007, Rotating Disk Flow Stability in Electrochemical Cells: Effect of the Transport of A chemical Species, "Phys. Fluids", Vol. 19, pp. 114109.
- Moisy, F., Doaré, O., Passuto, T., Daube, O., and Rabaud, M., 2004, Experimental and Numerical Study of the Shear Layer Instability Between two counter-rotting Disks, "J. Fluid Mech.", Vol. 507, pp. 175–202.
- Pontes, J., Mangiavacchi, N., Conceição, A. R., Barcia, O. E., Mattos, O. E., and Tribollet, B., 2004, Rotating Disk Flow Stability in Electrochemical Cells: Effect of Viscosity Stratification, "Phys. Fluids", Vol. 16, No. 3, pp. 707–716.
- Smith, N., 1946, Exploratory Investigation of Laminar Boundary Layer Oscillations on a Rotating Disk, Technical Report TN-1227, NACA.
- Wilkinson, S. and Malik, M. R., 1985, Stability Experiments in the Flow Over a Rotating Disk, "AIAA J.", Vol. 23, pp. 588.

8. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

NOISE GENERATED BY TURBULENT FLOW THROUGH SHORT LENGTH TUBES

Abraham A. Janssen, a.a.janssen@student.utwente.nl

Department of Mechanical Engineering
University of Twente
7500 AE Enschede, The Netherlands

Andre Morriesen, andrem@polo.ufsc.br

Cesar J. Deschamps, deschamps@polo.ufsc.br

Arcanjo Lenzi, arcanjo@lva.ufsc.br

Department of Mechanical Engineering
Federal University of Santa Catarina
88040-900, Florianopolis, SC, Brazil

***Abstract.** Fluid flow through acoustic mufflers of refrigeration compressors is a complex phenomenon that has been investigated for many years due to its importance in the acoustic attenuation and energy efficiency. The present paper considers an experimental and numerical investigation of noise generated by turbulent flow through a short length of pipe, such as found in suction mufflers. The main interest is to analyze the influence of the flow entrance region on the outflow condition and the impact of this on the noise level. Acoustic measurements have been made with a far field microphone and a hot wire system has been used to characterize the flow field. Different length diameter ratios (L/D) have been tested and the corresponding sound pressure level spectra compared to that originated by a fully developed flow condition at the exit of the pipe. Numerical simulations of the turbulent flow through the pipe were carried out to complement the analysis.*

Keywords: aeroacoustics, jet flow, turbulence modeling.

1. INTRODUCTION

The suction muffler of refrigeration compressors plays an important role on the acoustic noise damping and also on the compressor energy efficiency. Energy optimization often involves a reduction of losses in the flow paths of the suction line, which can in many cases be obtained by increasing the cross-sectional area of internal tubes of the muffler. This, however, usually increases the sound power radiated from the inlet of the muffler. In order to reduce the noise, which originates from the suction valve movements, a detailed knowledge is required about the source and how the noise is transmitted through the muffler.

A number of methods have been proposed to analyze gas pulsations in suction and discharge mufflers. If the pulsation amplitude is small compared to the mean pressure, its behavior can be approximated by the acoustic theory (Elson and Soedel, 1974). In the case of large amplitudes, the non-linear partial differential equations governing the unsteady one-dimensional compressible flow have to be solved (McLaren et al, 1975). Pérez-Segarra et al. (1994) developed an unsteady one-dimensional model for the whole compressor using a finite volume technique and solved the fluid dynamics and heat transfer in a very detailed manner. A numerical analysis of fully developed pulsating flow through pipes was carried out by Ribas and Deschamps (2004) to investigate transient effects on the flow velocity profile and wall shear stress. Flow field results presented for different transient conditions showed that such transients affect the wall shear stress to such an extent that friction factor correlations developed for stationary condition are no longer valid. Examples of more complex analyses considering three dimensional muffler geometries are those presented by Choi et al. (2000) and Fagotti and Possamai (2000).

As far as the acoustics is concerned, there are basically three alternatives to characterize the performance of mufflers: i) transmission loss (TL); ii) noise reduction (NR) and iii) insertion loss (IL). Prasad and Crocker (1981) argue that the insertion loss is the most effective parameter to characterize the muffler, because TL and NR are independent of the source characteristics and, therefore, are unable to predict changes in the radiated sound power as a function of muffler design. In fact, when considering suction mufflers of hermetic compressors, a rigorous treatment of the acoustic transmission path must consist of the suction muffler, compressor cavity and compressor shell.

In the present study, a simplified approach is adopted to analyze the fluid flow and acoustics in a muffler geometry commonly adopted in reciprocating compressors (Fig. 1). The main focus is the noise generated in the short length tubes used to connect muffler volumes, considering a steady flow condition as a first step.

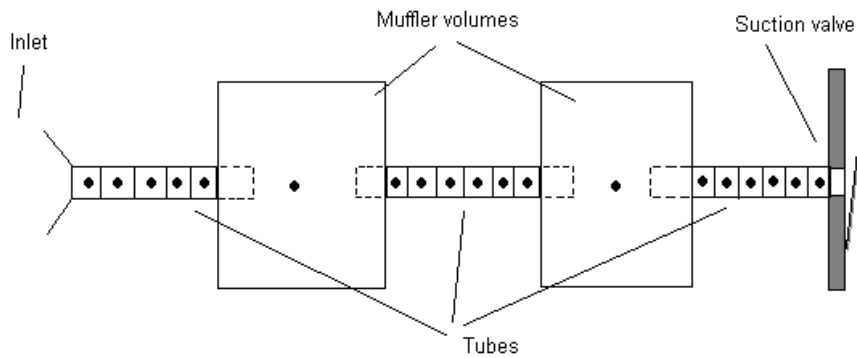


Figure 1: Simplified geometry of a suction muffler.

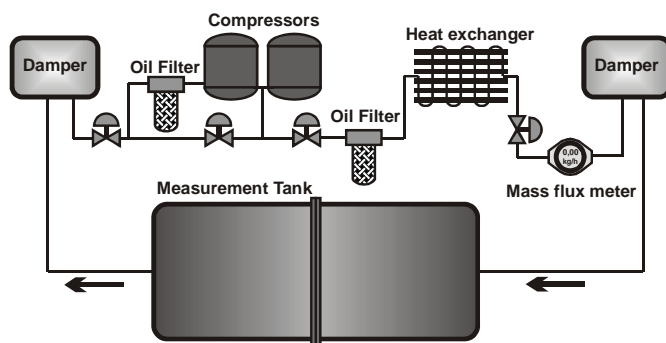
2. EXPERIMENTAL SETUP

The experimental measurements were carried out using the experimental setup illustrated in Fig. 2(a). Initially, air is compressed with the assistance of two compressors, EMBRACO type J. Then, after passing an oil filter and a heat exchanger, the gas mass flow rate is measured. In order to reduce any gas pulsation, a damper is adopted at the inlet of the measurement tank. An additional damper is placed for the case in which the fluid flow must be investigated in the opposite direction. Finally, a by-pass valve is used to avoid air supply to the tank when the compressors are switched on. As can be seen in Fig. 2(b), the measurement tank is split into two chambers, by using a metal plate, and an anechoic environment is created by covering the tank wall with foam. The tubes adopted in the investigation were made in glass, with an internal diameter of 6 mm and different lengths, as indicated in Tab. 1.

2.1. Measurement of acoustic pressure

Acoustic measurements were performed by using a Bruel & Kjaer Pulse system, equipped with a 3560C high-frequency module, and a 4189 ½ inch free-field microphone (Bruel & Kjaer, Norcross, GA) with a frequency response ranging from 6.3 Hz to 20 kHz. The acquisition frequency was set to 32 kHz. The microphones were positioned at the inlet and exit of the tube mounted in the splitting plate, according with the arrangement depicted in Fig. 3, with the assistance of a wire-frame. As can be noticed, special care was taken to place the microphones outside of the fluid flow stream, so that only the pressure level generated by the propagating acoustic wave is registered.

Since the compressor and any external noise may contribute to the acoustic measurement, the microphones were initially set to record acoustic pressure level generated by the compressors operating and without any flow in the test section, made it possible by opening the by-pass valve. Then, such sound pressure is subtracted from the data recorded when the tank is set to operate with flow (by-pass valve closed).



(a)



(b)

Figure 2: Experimental setup: (a) Schematic of the complete system; (b) Internal view of the tank.

Table 1: Tube lengths used in the measurements.

Tube	L [mm]	D _o [mm]	D _i [mm]	L/D _i
1	29	9	6	4.83
2	44	9	6	7.33
3	58	9	6	9.67

2.2 Velocity measurements

Measurements for velocity at the exit of the tubes were carried out with a Dantec Streamline 90N10 frame, composed by a CTA bridge and a single wire probe with a diameter of 5 μm. The probe was calibrated in a velocity range varying from 0.5 to 60 m/s through a polynomial equation of 4th order. For a good discretization of the velocity profile, 40 locations in the radial direction were adopted for the measurements. The turbulent intensity was found to be 5% for an average velocity of 40 m/s, leading to an acquisition time of 0.6 s required to characterize mean quantities. A sampling rate of 300 Hz was employed in all measurements. A positioning system composed by micrometric tables was used to accurately place the hot-wire sensor at the 40 measurement positions across the jet cross section.

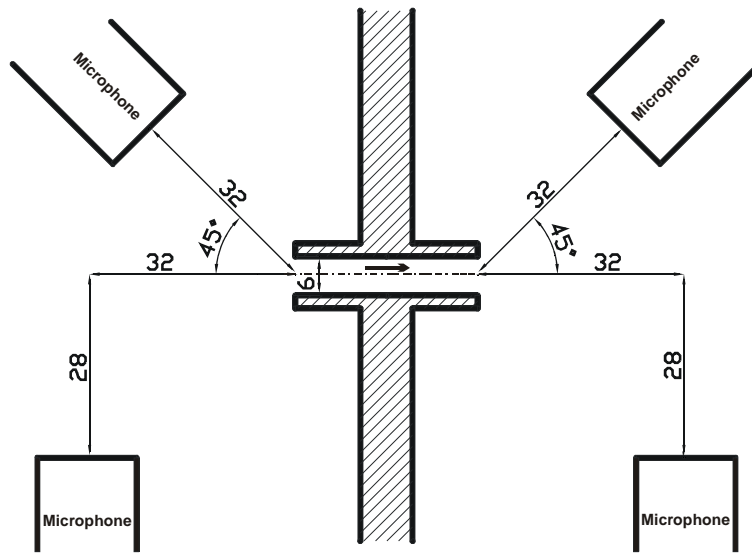


Figure 3: Positioning of microphones adopted for measurement of acoustic pressure level; dimensions in mm.

3. NUMERICAL ANALYSIS

The numerical solution of the turbulent flow through the tube involves a system of conservation equations for mass and momentum. By decomposing the variables in the Navier-Stokes equations into time-averaged variables plus fluctuating components and then averaging the resultant equations leads to a new set of equations known as Reynolds equations. For an isothermal and incompressible flow under the effect of no body force these equations (here in Cartesian tensor notation) are as follows:

Mass conservation,

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad (1)$$

Momentum conservation for the U_i component of velocity,

$$U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \overline{u_i u_j} \right] \quad . \quad (2)$$

The Reynolds stress tensor $\overline{u_i u_j}$ appearing in Eq. (2) is expressed through the concept of eddy viscosity ν_t :

$$\overline{u_i u_j} = -v_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad , \quad (3)$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta and the kinetic energy of the turbulent motion, k , is defined as $k = \overline{(u_i u_i)}/2$.

By far the most common choice for calculating v_t has been that in terms of the turbulence kinetic energy k and its rate of dissipation, ε , i.e.

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad . \quad (4)$$

The eddy viscosity was estimated by using the RNG k - ε model, which has been found to be adequate for this flow situation (Pereira *et al.*, 2007). The turbulence kinetic energy k and its dissipation ε appearing in Eq. (4) are obtained from the following transport equations:

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \alpha v_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + v_t S^2 - \varepsilon \quad , \quad (5)$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \alpha v_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_t S^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} - R \quad , \quad (6)$$

where the values of $C_{\varepsilon 1}$ and $C_{\varepsilon 2}$ are equal to 1.42 and 1.68, respectively. The inverse Prandtl number α for turbulent transport is given by the following relationship:

$$\left| \frac{\alpha - 1.3929}{\alpha_o - 1.3929} \right|^{0.6321} \left| \frac{\alpha + 2.3929}{\alpha_o + 2.3929} \right|^{0.3679} = \frac{v}{(v + v_t)} \quad , \quad (7)$$

with $\alpha_o = 1.0$.

A major outcome of the RNG theory is the rate of strain term, R , appearing in Eq. (6) and given by

$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta / \eta_o) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \quad , \quad (8)$$

where $\eta = S k / \varepsilon$, $\eta_o \approx 4.38$, $\beta = 0.012$ and $S^2 = 2 S_{ij} S_{ij}$ in which S_{ij} is the rate of strain tensor. In regions of small strain rate, the term R has a trend to increase v_t somewhat, but even in this case v_t still is typically smaller than its value returned by most k - ε models. In regions of elevated strain rate the sign of R becomes negative and v_t is considerably reduced. This feature of the RNG k - ε is probably the main reason for substantial improvements in the prediction of recirculating flow regions, as compared with other versions of k - ε model.

The computational model was developed with a commercial CFD code (Fluent Inc., 2006) based on the finite volume methodology. Grid refinement analyses were performed pursuing the best compromise between time simulation and solution accuracy. A second-order upwind scheme was adopted to interpolate the flow quantities, except for the turbulent quantities which were interpolated using the Power-Law scheme for numerical stability reasons. The coupling between the pressure and velocity fields was achieved with the SIMPLE scheme. The system of algebraic equations was solved with a segregated algorithm.

Initially, the solution domain was set to include the whole measurement tank but, in order to reduce the computational processing cost, it was decided to adopt just a small section of the flow field domain, as represented in Fig. 4. The resulting computational domain had a total of 54700 volumes. As can be seen, the axis-symmetric solution includes the tube and part of the splitting plate.

At the solid wall of the splitting plate, it was adopted an enhanced wall treatment, which accounts for non-equilibrium condition. As for the inlet boundary condition, a uniform velocity magnitude normal to surface was prescribed so as to provide the required mass flow rate. Nevertheless, because the inlet boundary is far from the tube inlet and its area is quite large when compared with the tube cross section area, a very small value for the velocity

magnitude was specified. For instance, for the mass flow rate of $3.0 \text{ m}^3/\text{h}$ the velocity magnitude prescribed at the domain inlet was 0.0465 m/s , whereas the mean velocity in the tube is approximately 30 m/s . At the outlet boundary, a convenient atmospheric pressure condition was adopted, allowing reverse flow to take place in regions where this was physically expected. At the inlet and outlet boundaries, turbulence intensity was prescribed to 5%, whereas turbulence length scale was specified with reference to the tube diameter.

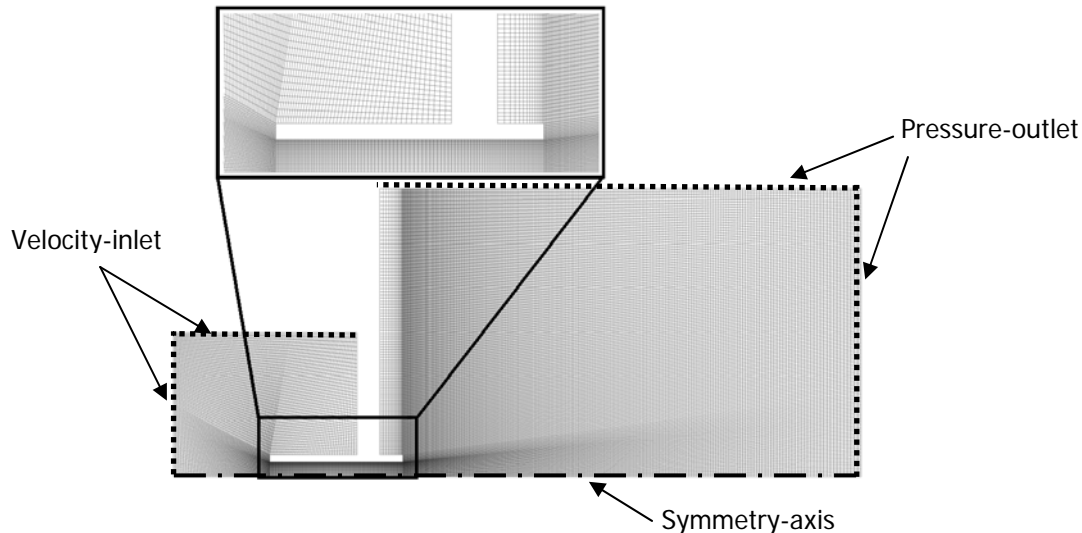


Figure 4: Computational domain and boundary conditions.

4. RESULTS

4.1. Flow field

The first step in the analysis was to compare the model predictions with experimental data obtained with the hot wire anemometry system. Figures 5 and 6 show results for velocity and turbulence intensity, respectively, at the exit cross section of the tube, considering $L = 29$ and 58 mm . As one should expect, the velocity magnitude at the tube axis ($r/D = 0$) is greater for the shorter tube, as a consequence of the smaller length available for the flow development. The overall agreement between numerical and experimental data is satisfactory.

On the other hand, the numerical model is seen to overestimate the turbulence intensity by approximately 2%, despite capturing the profile shape originated by each length of tube. It should be said, however, that the concept of eddy viscosity is not really adequate to model turbulent normal stresses, especially in flow situations in which turbulence anisotropy is present.

Based on the comparisons between predictions and experimental data, it can be said that despite some discrepancies verified, there is clear evidence that the numerical model can successfully predict variations in the velocity profile stemmed by different tube lengths.

Figures 7 and 8 depict predictions for streamlines and turbulence intensity contours of the flow field of both tube lengths. An aspect that can also be noticed in Fig. 7 is the presence of a recirculating flow region at the entrance of the tube. Although not so noticeable, it can be seen that the recirculating region is slightly greater in the shorter tube, for which an explanation is not trivial. Figure 8 provides evidence that turbulence production at the inlet only takes place very near the tube entrance, since velocity gradients before such a region are quite small. It is also interesting to note that turbulence rises very sharply in the separated flow region at the entrance and, as well established in the literature, at the shear layer formed by the free jet exiting the tube.

In Figs. 9 and 10, numerical results for velocity and turbulence intensity profiles are shown for two cross sections: a) at the tube exit plane; b) across the jet, at a distance of one diameter downstream of the tube exit. It is possible to see that the velocity profiles are virtually the same in the jet for $r/D_i > 0.45$, despite some difference present at the exit cross section. This can be attributed to the high level of turbulence in the shear layer, which acts very effectively to momentum transfer in the cross section direction. However, because turbulence activity is much lower at the jet centre, both velocity profiles maintain virtually the same difference at $r/D_i = 0.0$. Fig. 10 suggests that turbulence intensity in the shear layer is dominated by the flow dynamics, with the intensity at the tube being of negligible importance. Despite some well known shortcomings of the current turbulence modelling, predictions of turbulence intensity are in line with expected levels.

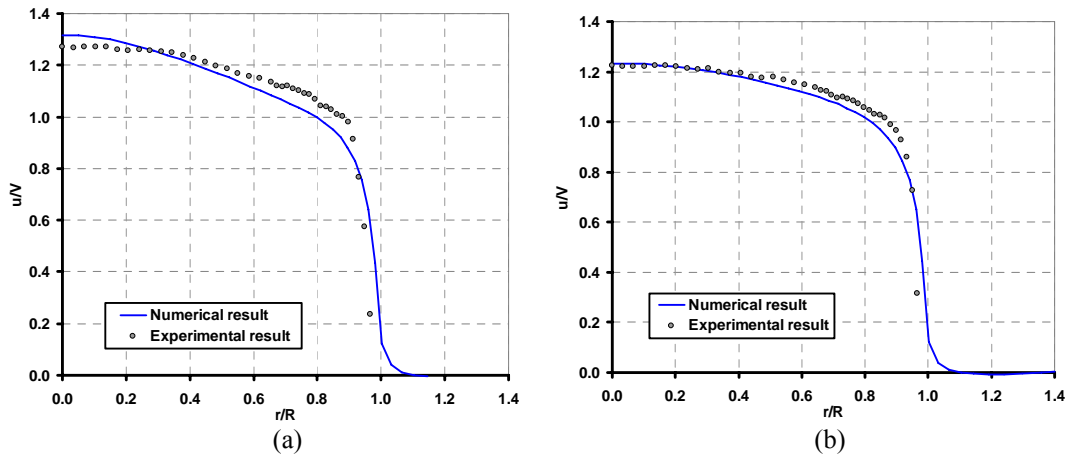


Figure 5: Comparison between experimental data and numerical predictions using $k-\epsilon$ for $D = 6$ [mm] and $Q = 3.0$ [m^3/hour]: (a) $L = 29$ [mm]; (b) $L = 58$ [mm].

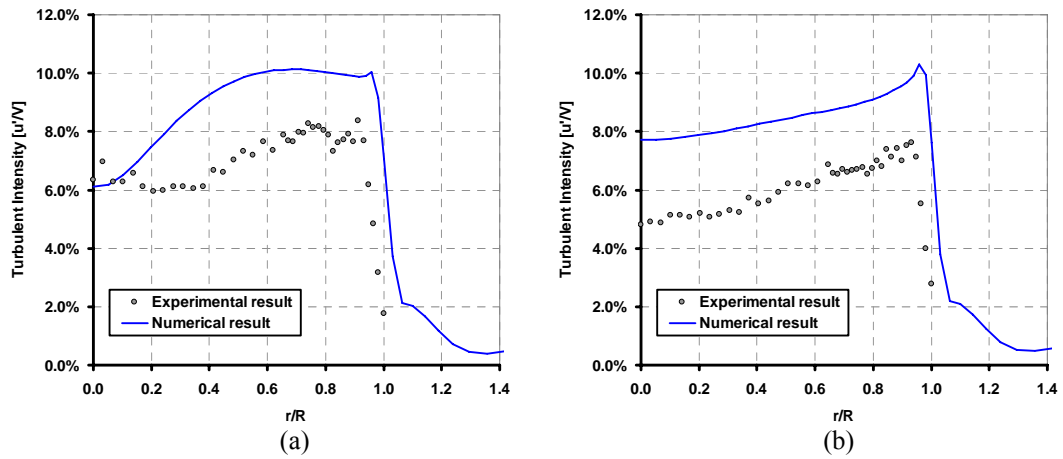


Figure 6: Comparison between experimental data and numerical predictions for turbulent intensity using $k-\epsilon$ in a flow with $Q = 3.0$ [m^3/h] in a tube with $D = 6$ [mm]: (a) $L = 29$ [mm]; (b) $L = 58$ [mm].

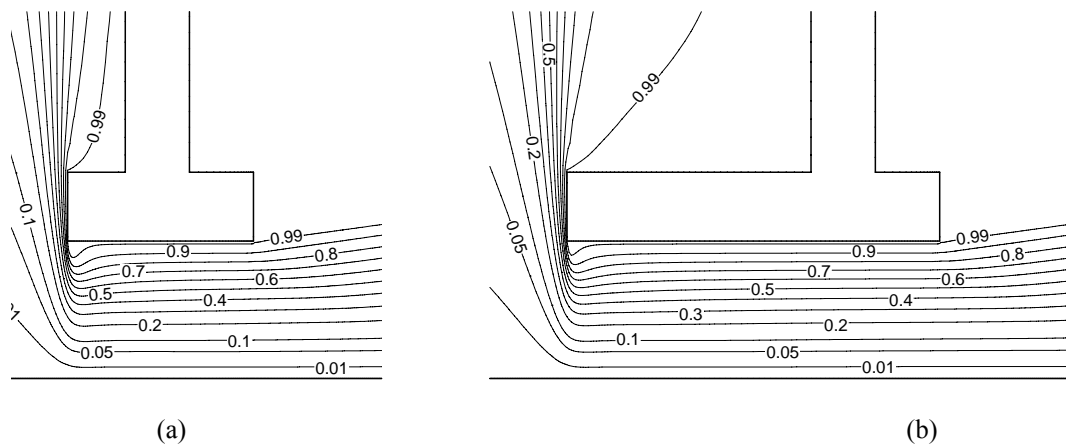


Figure 7: Streamline of the velocity field for 2D $k-\epsilon$: $L = 29$ and 58 mm; $D = 6$ mm; $Q = 3.0$ m^3/h .

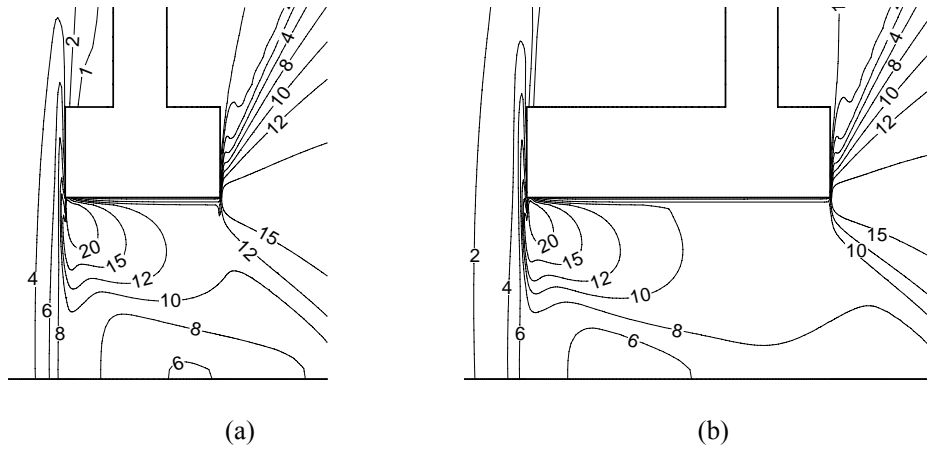


Figure 8: Numerical results for contours of turbulent intensity: (a) $L = 29$ mm; (b) $L = 58$ mm.

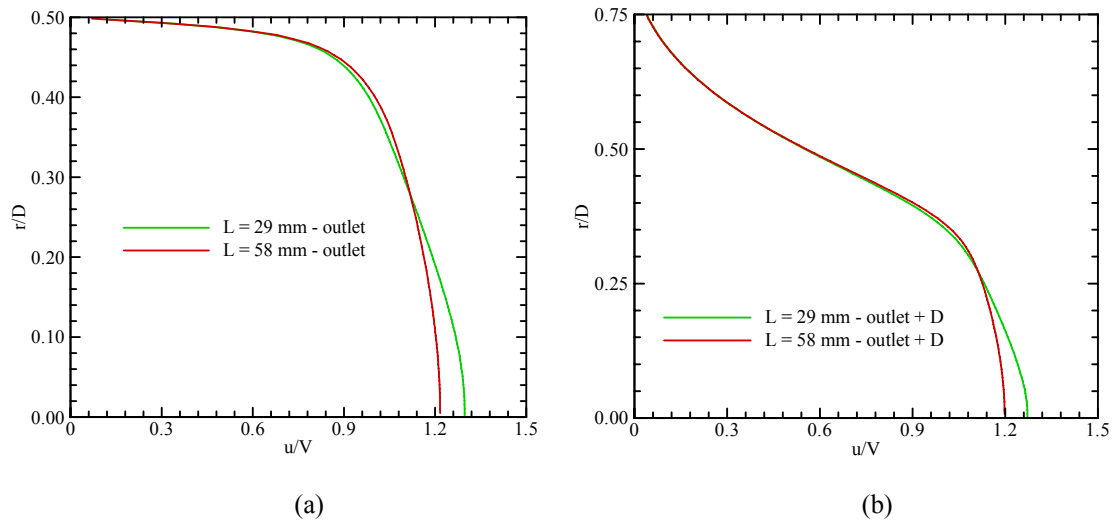


Figure 9: Numerical results for velocity profiles:
 (a) tube exit cross section; (b) jet flow, one diameter downstream from the tube exit.

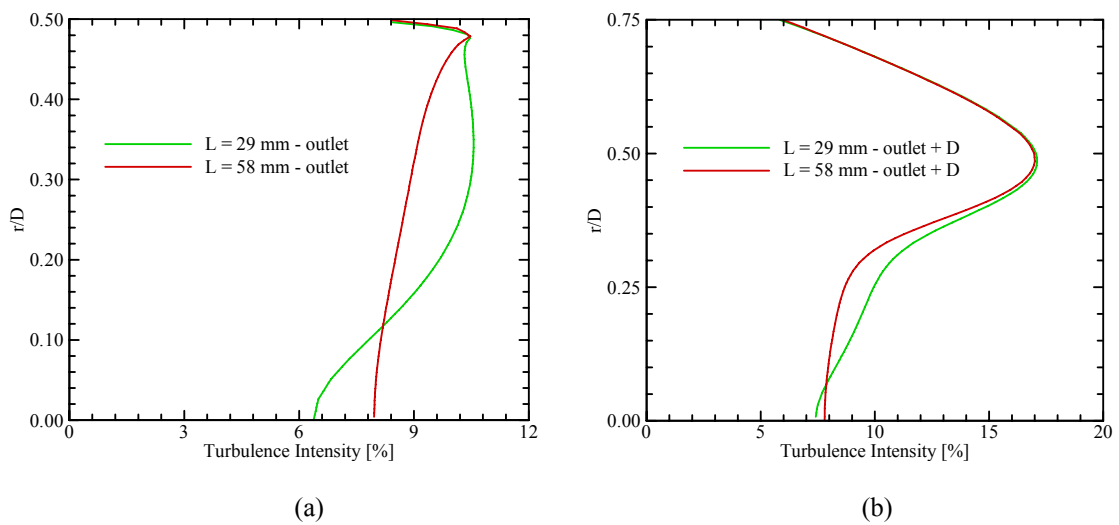


Figure 10: Numerical results for turbulence intensity profiles:
 (a) tube exit cross section; (b) jet flow, one diameter downstream from the tube exit.

4.2. Acoustic field

Acoustic measurements were carried out with a free field microphone for different length diameter ratios (L/D). Figure 11 shows experimental data for acoustic pressure level measured on both chambers formed by the splitting plate, as explained in section 2, for a flow rate $Q = 3.0 \text{ m}^3/\text{h}$ and with the microphone angle $\theta = 90^\circ$. Chamber 1 faces the inlet of the tube, whereas chamber 2 is exposed to the jet flow.

The first interesting feature to notice is the presence of well defined resonances in the spectra registered for both chambers. Such resonances are associated with the tube length and can be predicted analytically according to the following equation (Blackstock, 2000):

$$f_n = \frac{c_0}{\lambda_n} = n \frac{c_0}{2L'} \quad (9)$$

in which c_0 is the sound velocity at the stagnation temperature and λ_n is the wavelength of the n th harmonic. The effective tube length L' is greater than the geometric length L , because of fluid flow inertia effects that appear at both tube ends, and can be evaluated from:

$$L' = L + \Delta L = L + 0.6133D \quad (10)$$

Table 2 summarizes values for the fundamental resonances and its harmonics, considering different tube lengths. As can be seen, the estimates closely for the fundamental resonance frequencies agree with the measurements. In particular for the greater tube length ($L = 58 \text{ mm}$), the first harmonic is also predicted by Eq. (9) is also in agreement with the experimental data. Such resonances must be generated by some source, which in this situation is represented by the wide range of turbulence scales present in the flow.

Table 2: Estimates for resonance frequencies as a function of tube length.

L [mm]	L' [mm]	D [mm]	L/D	Q [m^3/h]	U_0 [mm]	Re (10^3)	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
58	61.7	6	9.67	3	29.5	9.93	2780	5512	8341
44	47.7	6	7.33	3	29.5	9.93	3597	7194	10791
29	32.7	6	4.83	3	29.5	9.93	5248	10496	15744

The resonance frequencies are seen to have the largest contribution in the noise level for frequencies higher than 2 kHz, reaching up to 45 dB, depending on the length of the tube. The measurements at chamber 1 show that the intensity of fundamental resonances becomes stronger as the tube is shorter. A possible cause of this phenomenon could be the smaller fluid inertia in the shorter tube, which therefore is not so effective to dampen resonance sources in the flow. It should be noticed that, in opposition to chamber 1, resonances measured in chamber 2 have amplitudes very close to each other. In addition to that, the resonances are not so sharply marked and, in fact, some smearing is observed. Although the physical explanation of both aspects is not an easy task, it can be argued that they are probably linked to the influence of turbulence scales as the acoustic wave propagates throughout the jet flow before reaching the microphone.

For frequencies lower than 2 kHz, Fig. 11 shows that the noise level is much stronger in chamber 2, providing evidence that this difference is originated by the jet flow. Generation of acoustic noise by turbulence is usually accounted for in applications with Mach numbers much higher than that occurring in the present flow situation ($M \cong 0.08$). Nevertheless, Fig. 11 shows that turbulence generates noise levels up to 55 dB at low frequencies and, therefore, can be a significant noise source within the compressor.

As can be seen in Fig. 11, with the exception of resonances, the noise levels observed for different tube lengths are not structurally different from each other. This is an indication that the entrance flow region, in which turbulence intensity is very high, has a negligible effect on the turbulence in the jet and, as a consequence, on the noise generated.

Based on numerical predictions for the flow field such as that presented in section 4.1, a Broadband Noise Source (BNS) model could be adopted to identify regions that generate most of the noise. Unlike other methods that require transient solutions for the fluid flow, BNS models need only quantities that can be easily provided by typical RANS models, such as mean velocity field, turbulent kinetic energy and its dissipation rate. However, though BNS models are attractive as design tools, they do not provide any tonal noise information or noise spectra at receiver locations. Instead, such models should be considered only as a convenient way to estimate for the radiated noise at the source location. Unfortunately, the problem here considered is characterized by resonances, making it difficult to apply this type of approach.

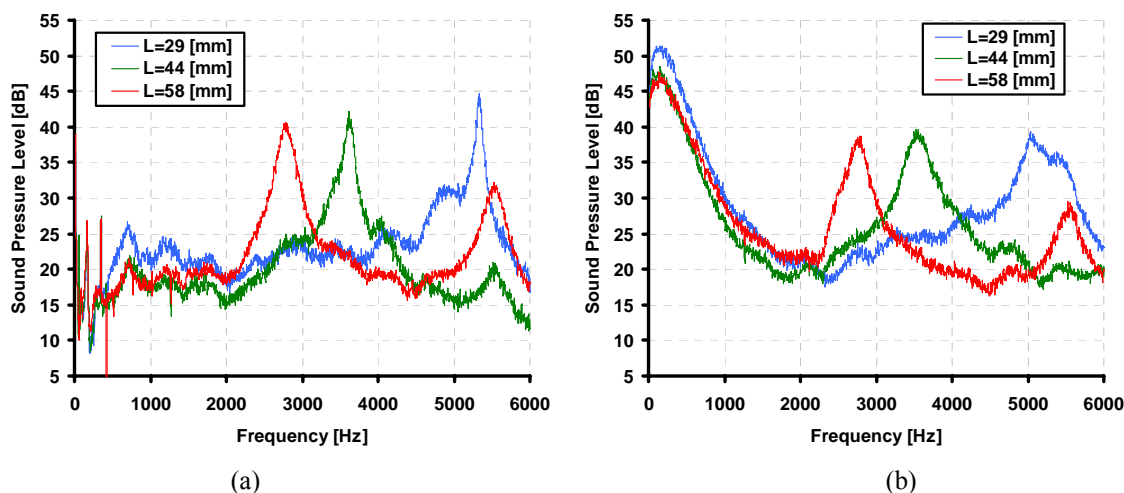


Figure 11: Experimental data for acoustic pressure level ($x = 32$ mm; $y = 26$ mm; $\theta = 90^\circ$; $Q = 3.0$ m³/h):
(a) chamber 1; (b) chamber 2.

5. CONCLUSIONS

The present paper considered an experimental and numerical investigation of noise generated by turbulent flow through short length tubes, such as found in suction mufflers of reciprocating compressors employed for refrigeration purpose. The main interest of the study was to analyze the influence of the flow entrance region on the outflow condition and its impact on the noise level. In most applications, the effect of noise being generated by turbulence is only accounted for Mach numbers much higher than that in the present case ($M \cong 0.08$). However, it has been verified that even for such low speed flow turbulence generates noise levels up to 55 dB for low frequencies and, therefore, it can be a significant noise source within the compressor. The noise levels measured for different tube lengths are not structurally different from each other, which means that the entrance flow region is of minor importance. The resonance frequencies of the tubes are seen to have the largest contribution in the noise level for frequencies higher than 2 kHz, reaching up to 45 dB, depending on the length of the tube.

6. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors thank the financial support from CNPq (Brazilian Research Council).

7. REFERENCES

- Choi, J.K., Joo, J.M., Oh, S.K., Park, S.W., "Smart Suction Muffler Design for a Reciprocating Compressor", Proc. Compressor Engineering Conference at Purdue, West Lafayette, Indiana, USA, p. 619-626, 2000.
- Elson, J.P. and Soedel, W., "Simulation of the Interaction of Compressor Valves with Acoustic Back Pressures in Long Discharge Lines", Journal of Sound and Vibration, v.34, n.2, pp. 211-220, 1974.
- Maclaren, J.F.T., Tramschek, A.B., Sanjines, A. and Pastrana, O.F. "A Comparison of Numerical Solutions of the Unsteady Flow Equations Applied to reciprocating Compressor Systems", Journal of Mechanical Engineering Science, v. 17, n. 5, pp. 271-279, 1975.
- Pérez-Segarra, C.D., Escanes, F. and Oliva, A., "Numerical Study of the Thermal and Fluid-Dynamic Behaviour of Reciprocating Compressors", Proc. Int. Comp. Engng. Conf. at Purdue, West Lafayette, USA, pp. 145-150, 1994.
- Fagotti, F., Possamai, F. C., 2000, "Using Computational Fluid Dynamics as a Compressor Design Tool", Proc. Int.Compressor Engng. Conf. at Purdue, pp. 137-144.
- Fluent Inc., 2006, "FLUENT User's Guide", v. 6.2.16, Lebanon/NH, USA.
- Pereira, E.L.L; Deschamps, C.J.; Ribas Jr, F.A., 2007, "Performance Analysis of Reciprocating Compressors through CFD Simulation", Proc. Int. Conf. Compressors and their Systems, London, p. 309-318.
- Ribas Jr, F.A., Deschamps, C.J., 2004, "Friction Factor under Transient Flow Condition", Proc. 2004 International Compressor Engineering Conference at Purdue, West Lafayette, p. 1-8.
- Prasad, M.G. and Crocker, M.J.,1981, "Insertion Loss Studies on Models of Automotive Exhaust Systems", J. Acoust. Soc. Am., vol. 70, no. 5: pp. 1339-1344.

8. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

ESTUDO NUMÉRICO TRIDIMENSIONAL TRANSIENTE DA FORMAÇÃO DE CLUSTERS E ESTRUTURAS DE VÓRTICES EM UM LEITO FLUIDIZADO CIRCULANTE TURBULENTO – MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE CENTRO DE VÓRTICES

Ivan Carlos Georg

SINMEC – Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor
Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina
Caixa postal 476
88040-900 Florianópolis, SC, Brazil
ivan@sinmec.ufsc.br

Ricardo V. P. Rezende

SINMEC – Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor
Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina
Caixa postal 476
88040-900 Florianópolis, SC, Brazil
ricardo@sinmec.ufsc.br

Clovis R. Maliska

SINMEC – Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor
Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina
Caixa postal 476
88040-900 Florianópolis, SC, Brazil
maliska@sinmec.ufsc.br

Abstract O escoamento gás-sólido turbulento em um leito fluidizado circulante turbulento é estudado utilizando-se modelo matemático tridimensional transiente, com refino de malha e temporal adequado para capturar as estruturas de aglomerados de partículas (clusters e strands) encontrados na chamada meso-escala. Um modelo sub-malha (**LES**) foi utilizado para a fase gás e sólido de forma a resolver as escalas envolvidas no escoamento gás-sólido. Os resultados são estudados utilizando-se técnicas de centro de vórtices com o objetivo de associar as estruturas de aglomerados com as estruturas rotativas presentes no escoamento gás-sólido. Estabeleceu-se que as estruturas de clusters estão associadas a alta taxa de deformação e os strands a estruturas de vórtices contra-rotativos estirando-se.

Keywords: two-phase gas-solid flow, turbulence, fluidized bed, clusters, sub-grid models, vortex core methods.

1. INTRODUÇÃO

Reatores de craqueamento catalítico em leito fluidizado apresentam uma distribuição de sólidos não homogênea, com regiões de alta e baixa concentração de sólidos. A formação de aglomerados de partículas (*clusters*), e sua influência nas taxas de reação e fluido dinâmica são de difícil abordagem matemática, pelo fato de encontrar-se campos de velocidade, tensões, cinética química e distribuição de temperatura diferenciadas em cada uma das regiões do reator, Georg (2005).

Há ainda os aspectos associados às diferentes escalas espaciais e temporais em que estas estruturas denominadas clusters encontram-se, exigindo desta forma um estudo de escala adequado com a finalidade de captá-los e desta forma caracterizá-los.

Estas estruturas ocorrem na chamada meso-escala e tem dimensões típicas de 50 a 100 diâmetros de partícula, o que corresponde a poucos milímetros. Meso-escala significa, neste contexto, a escala entre a micro-escala, que corresponde à dimensão de uma partícula, e a macro escala, que corresponde à dimensão lateral do reator. Estas estruturas presentes na meso-escala são constantemente formadas e destruídas, Agrawal et al. (2001). Este processo leva a flutuações locais persistentes na concentração de sólidos e na velocidade relativa entre o gás e os sólidos. Em termos de média temporal, estas flutuações levam a uma distribuição não uniforme da concentração de sólidos na macro escala, por exemplo junto às paredes do reator, maior do que no centro. Esta não uniformidade gera um fluxo descendente de partículas junto às paredes, aumentando o tempo de residência e diminuindo a eficiência. Os padrões de não uniformidade variam consideravelmente com a mudança de escala, segundo apontam Kunni e Levespiel (1991). Este fato é de importância fundamental quando da extrapolação de dados de reatores piloto para reatores industriais. Os padrões fluidodinâmicos têm um papel fundamental no escalonamento e no projeto de unidades industriais. Por este e outros motivos, há um grande interesse no melhor entendimento da origem destas estruturas e como elas levam às não uniformidades observadas na macro escala.

A complexidade do escoamento gás-sólido em um leito fluidizado tem gerado nas últimas duas décadas um intenso estudo por parte de grupos de pesquisa ao redor do mundo, com o objetivo de desvendar a fenomenologia e entender os mecanismos físicos presentes neste tipo de escoamento, caracterizado por um comportamento não homogêneo, resultado da intensa interação partícula-partícula e fluido-partícula (Jackson, 2000). Muitas correlações são utilizadas com sucesso na predição da performance de um reator de craqueamento catalítico em leito fluidizado com certos arranjos padrões, mas não podem ser utilizadas por exemplo, para prever o efeito das modificações do ângulo de entrada da alimentação, comparando diferentes configurações. Questões como estas, a princípio, poderiam ser resolvidas utilizando códigos computacionais onde seja possível resolver as equações que descrevem a dinâmica do processo.

Estas equações podem ser formuladas em diferentes níveis de detalhamento. No nível mais fundamental o movimento de todo o sistema é determinado pelas equações de Newton do movimento para a translação e rotação de cada partícula, e as equações de Navier-Stokes e continuidade, sendo satisfeitas em cada ponto do fluido, Jackson (2000). Estas são acopladas por condições de não deslizamento entre o sólido e o fluido nas fronteiras do sólido, e o fluido deve ainda satisfazer a condição de não deslizamento nas paredes do domínio em estudo. Simulações neste nível de detalhamento tem sido realizadas com sucesso, contudo para um pequeno número de partículas, não representativo do problema encontrado na escala industrial.

Em um segundo nível de detalhamento, substitui-se a velocidade do fluido em cada ponto por sua média, tomada sobre um domínio grande o suficiente para conter muitas partículas, mas ainda pequeno comparado com a região ocupada por toda a mistura. A força exercida pelo fluido em cada partícula é então relacionada com a velocidade relativa da partícula ou do conjunto de partículas, usando correlações empíricas. As equações de Newton do movimento são então resolvidas para cada partícula separadamente, levando em conta as colisões diretas entre partículas. Este procedimento é referido com “*discrete particle modelling*”, resultando em uma demanda computacional menor que a necessária no primeiro nível de detalhamento. Alguns exemplos da utilização deste nível de detalhamento para a solução do escoamento gás-sólido são encontrados em Tsuji et al. (1993) e Hoomans et al. (1996).

Em um terceiro nível de detalhamento a velocidade do fluido e da partícula são promediadas sobre o domínio espacial local. Há então dois campos médios locais de velocidades, \mathbf{u} e \mathbf{v} , para o fluido e para a partícula respectivamente. Cada uma delas é definida para todos os pontos no espaço, resultando em equações semelhantes às equações do movimento escritas para dois fluidos imaginários capazes de se interpenetrar, de forma que todos os pontos são ocupados simultaneamente por ambos os fluidos, Jackson (2000). Neste nível de detalhamento o modelo é referido como: “*two fluid model*” – modelo de dois fluidos. Neste tipo de modelo as equações diferenciais parciais são acopladas e devem ser resolvidas numericamente, contudo demandando um esforço computacional menor que os anteriores. O modelo de dois fluidos exige a formulação de leis que representem os mecanismos de transferência na interface entre os “dois fluidos”, gerando assim um problema de fechamento das equações, semelhante ao encontrado na modelagem da turbulência. Estes termos, que representam a interação entre estes dois fluidos, têm importância significativa na predição neste nível de detalhamento.

A abordagem do presente trabalho encontra-se no terceiro nível de detalhamento, o chamado modelo de dois fluidos. Utilizou-se os resultados numéricos reportados por Georg (2005) e Georg et al. (2007) para o escoamento gás-sólido em um leito fluidizado circulante turbulento com o objetivo de relacionar as estruturas de vórtices com as estruturas de aglomerados de partículas encontrados na chamada meso-escala.

2. FORMAÇÃO E DESTRUIÇÃO DE CLUSTERS EM ESCOAMENTOS GÁS-SÓLIDO

Trabalhos recentes tem apontado para a importância fundamental do conhecimento da influência dos chamados clusters, (ver por exemplo Wylie et al. 2000 e Glasser et al. (1998)), nos padrões de escoamento em leitos fluidizados. As não uniformidades podem introduzir no escoamento das partículas caminhos preferenciais, bem como o retorno destas, que usualmente ocorre junto às paredes do reator de craqueamento catalítico em leito fluidizado.

O escoamento gás-sólido em um leito fluidizado caracteriza-se pela presença de estruturas em diferentes escalas espaciais e temporais. A macro-escala confunde-se com as dimensões do reator, com dimensões da ordem de centímetros para metro. A meso-escala é a região onde encontram-se os clusters e *strands* (estruturas de aglomerados afilados com orientação na direção do escoamento), com dimensões típicas variando da ordem de milímetros para centímetros. A micro-escala corresponde à dimensão de uma partícula com dimensões da ordem de micro metro.

Os caminhos preferenciais e a formação de clusters de partículas ocorrem na meso-escala, influenciando significativamente os padrões de escoamento. As estruturas formadas nesta escala tem uma ordem de grandeza de 10 a 50 diâmetros de partículas e foram objeto de estudo de vários autores, que serão mencionados no decorrer da apresentação do texto.

Diferentes regimes de fluidização são possíveis de ocorrer, promovendo diferentes características fluidodinâmicas, e desta forma diferentes propriedades e mecanismos de transferência. Quando a força gravitacional é balanceada pela força de arrasto média resultado do escoamento do gás, o estado de fluidização é chamado de “fluidização mínima”. A velocidade de gás onde as bolhas começam a aparecer é chamada de velocidade de bolha mínima. As bolhas de gás determinam o comportamento do sistema fluidizado, e são responsáveis pela agitação dos sólidos. O regime turbulento

apresenta-se com bolhas em regime intermediário ao de bolhas, tendendo para um regime ou outro associado à grande instabilidade destes sistemas, apresentando a formação de clusters e caminhos preferenciais. De forma geral, o regime turbulento é caracterizado por uma região com escoamento do tipo bolhas na base do leito fluidizado com alta concentração de partículas e com uma região com formação de clusters e strands na região intermediária e superior do leito com baixa concentração de partículas. Em regiões de baixa concentração de partículas a influência das tensões do gás são pronunciadas, e o livre caminho médio entre as partículas é grande; desta forma o choque entre partículas tem uma probabilidade menor de ocorrer. O oposto ocorre em regiões densas. Segundo Agrawal et al. (2000), embora as forças de atração entre partículas possam dar origem a aglomerados de partículas, isto parece não ser o fator dominante para a sua formação. As estruturas não uniformes presentes neste tipo de escoamento estariam associadas a instabilidades locais e a presença das paredes não é requerida para a formação de clusters. Desta forma, clusters estariam associados com o movimento relativo entre o gás e as partículas, a dissipação da energia fluante das partículas por colisões inelásticas e ao amortecimento viscoso.

Glasser et al. (1998) estenderam a análise de estabilidade realizada por Anderson e Jackson (1968), Anderson (1995), Glasser et al. (1997) levando em conta todos os regimes encontrados em escoamentos gás-sólido. Encontraram para cada valor de fração de sólidos que o estado de fluidização uniforme é mais instável a ondas caminhando verticalmente, não tendo nenhuma estrutura horizontal. A perda de estabilidade destas ondas verticais para perturbações transversas dão origem a ondas tendo uma estrutura lateral da mesma forma, não importando se o leito é denso ou diluído. A estrutura das soluções apresenta não uniformidades laterais e verticais nos campos de velocidade e de fração de sólidos. A transição do regime de bolhas para o de clusters se dá suavemente. Este trabalho apresentou como conclusão que as bolhas no regime denso e clusters em sistemas diluídos formam-se pelo mesmo mecanismo, e que as equações do modelo de dois fluidos com leis constitutivas simples são capazes de representar a formação destas estruturas. Estas estruturas apareceriam devido interações entre a inércia associada com a fase partícula, gravidade e força de arrasto. Fisicamente, esta rota particular de formação de clusters estaria associada a velocidade relativa entre as partículas e o gás (Glasser et al. 1998). O trabalho de Glasser et al. (1998) é importante, pois aponta para a capacidade do modelo de dois fluidos, sem a utilização da teoria cinética granular, de captar as estruturas de aglomerados de partículas, decorrentes apenas de efeitos fluido dinâmicos.

Wylie e Koch (2000) realizaram estudo sobre a formação de clusters argumentando que estas estruturas seriam advindas de efeitos associados às tensões viscosas no gás. Desta forma a formação de clusters estaria associada a um mecanismo dissipativo. De fato, na presença de interações fluidodinâmicas entre as partículas, a dissipação viscosa é maior quando as partículas estão próximas umas das outras, gerando assim um “congelamento” das partículas, causando o aparecimento de aglomerados. Este fenômeno é eminentemente local, como afirmam Wylie e Koch (2000).

Partículas com número de Stokes suficientemente grande não são afetadas pelas tensões viscosas. Estas transladam com muito pouca perda de energia entre uma colisão e outra, como resultado as partículas tendem a uma configuração de distribuição de velocidades Maxwelliana. Quando o número de Stokes decresce, as partículas são afetadas pelas tensões viscosas e são possíveis dois mecanismos de formação de clusters segundo Wylie e Koch (2000): na escala microscópica, ou seja, na ordem de grandeza de partículas individuais, a formação de clusters ocorreria segundo interações fluidodinâmicas de pequenos grupos de partículas. Se uma partícula encontra-se na região próxima de uma ou mais partículas, ela experimentará um aumento no arrasto viscoso, existindo assim a possibilidade desta partícula ser arrastada com maior frequência do que se estivesse isolada; na escala macroscópica, a dependência estaria na taxa da dissipação viscosa. A energia será dissipada mais rapidamente em regiões de alta fração volumétrica, levando a um decréscimo da velocidade de flutuação das partículas e pressão nestas regiões. Isto levará a um escoamento que irá aumentar a fração de sólidos. As instabilidades macroscópicas e microscópicas são similares, a questão é se a descrição no continuum é válida na escala em que a formação de clusters ocorre, segundo Wylie e Koch (2000).

Outro mecanismo para explicar a formação de clusters está associado aos mecanismos de turbulência e à formação de vórtices, Georg (2005). O efeito da presença de uma partícula em um escoamento tende a deformar as linhas de corrente do fluido. Quando um aglomerado de partículas encontra-se em uma determinada região, espera-se que a taxa de deformação sofrida pelo fluido seja maior em comparação quando não há partícula. Locais onde há alta taxa de deformação são locais de baixa vorticidade. Desta forma, espera-se que as partículas aglomerem-se na região externa de um vórtice, onde as taxas de deformação são maiores, deixando o centro do vórtice praticamente sem a presença de partículas ou diminuída.

Se uma partícula tem dimensão menor que as menores escalas de Kolmogorov, ou seja, a partícula tem dimensão característica menor que as escalas dissipativas, esta partícula sofre apenas efeitos difusivos. Quando esta partícula encontra um vórtice, a tendência será seguir o caminho do vórtice. Agora, imagine que há outras partículas e estas entram em contato com este vórtice. As partículas começam a aglomerar no interior do vórtice, até que a dimensão característica do cluster chegue na ordem de grandeza ou acima da ordem de grandeza do vórtice. Quando o cluster tem dimensão característica maior que o vórtice, este se “quebra”, ou dissipa sua energia, destruindo o vórtice e o aglomerado de partículas. Desta forma, os tempos de formação e destruição estariam associados ao tempo característico de um determinado vórtice e associados a probabilidade de choque com outros vórtices. Este fenômeno é local. Este mecanismo de formação de aglomerados associados aos vórtices é chamado de “concentração preferencial” (Eaton e Fessler, 1994). Os estudos numéricos associados com a chamada concentração preferencial, em sua maioria, foram

realizados utilizando simulação numérica direta (Eaton e Fessler, 1994; Yang e Lei 1998; Fessler e Eaton 1999; Ahmed e Elghobashi, (2000)).

Como as partículas tendem a modificar a turbulência da fase contínua, os trabalhos que se referem a concentração preferencial e a modulação da turbulência se confundem, haja vista que os clusters são aglomerados de partículas e, é natural pensar que estes aglomerados modifiquem sensivelmente a estrutura turbulenta. Yang e Lei (1998) discutem a necessidade da utilização da simulação numérica direta para captar estas estruturas e demonstram que a utilização do LES é suficiente para tanto.

Ahmed e Elghobashi (2000), usando DNS, demonstram que o aparecimento destas estruturas está associado ao fenômeno de estiramento de tubos de vórtices longitudinais. Os clusters em sua maioria, no que se refere aos escoamentos em leito fluidizado turbulento, apresentam-se com forma esférica ou bandas densas e estiras na direção vertical, chamadas de strands. Estas estruturas de vórtices longitudinais decorrem do emparelhamento de estruturas turbilhonares contra-rotativas, no caso do escoamento gás-sólido, como iremos apresentar mais a frente. Pelo fato de que em um leito fluidizado a velocidade vertical ser de algumas ordens de grandeza maior do que a horizontal, a tendência destes vórtices emparelhados é estirarem-se na direção vertical. O gás escoando através das partículas tende a acelerar quando da diminuição da área efetiva para escoar. Estas estruturas longitudinais tem diâmetro da ordem de grandeza das escalas de Kolmogorov, e na direção vertical da ordem de grandeza da escala de Taylor até as maiores escalas.

Quando uma estrutura coerente, um vórtice, encontra uma contração, a tendência é que a vorticidade seja amplificada, conservando assim a quantidade de movimento angular. Se o elemento de fluido é estirado então a área da seção e momento de inércia tornam-se menores. O componente angular da velocidade na direção do estiramento deve aumentar de forma a conservar a quantidade de movimento angular (Tennekes e Lumley, 1987).

Quando a vorticidade encontra-se em um campo deformado ela é estirada. Com base na conservação do momento angular, espera-se que a vorticidade na direção da taxa de deformação positiva seja amplificada, enquanto na direção oposta (taxa de deformação negativa) a vorticidade será atenuada. O estiramento de vórtices envolve troca de energia, pelo fato que a taxa de deformação realiza trabalho sobre os vórtices que são estirados, segundo Tennekes e Lumley (1987).

É de consenso na literatura (Ahmed e Elghobashi, 2000) que regiões de altas taxas de produção de turbulência são comprimidas entre tubos de vórtices longitudinais contra-rotativos. Quanto maior a vorticidade dos tubos de vórtices longitudinais, maior a taxa de produção. As partículas sólidas modificam o alinhamento do vetor vorticidade com o eixo dos tubos de vórtices longitudinais. Aumentando o alinhamento entre o vetor vorticidade e o eixo dos tubos de vórtices longitudinais, a vorticidade é aumentada, o que causa o aumento nas taxas de produção segundo Ahmed e Elghobashi (2000).

Partículas pequenas mantêm-se nos vórtices, com suas trajetórias alinhadas com as trajetórias dos elementos de fluido, mas com inércia maior. Desta forma as estruturas turbilhonares mantêm sua vorticidade inicial por um tempo maior. Clusters de partículas, escapam das estruturas turbilhonares. O arraste da partícula cria um torque no fluido, contrário à rotação do vórtice, aumentando a taxa de decaimento de vorticidade, assim a energia cinética turbulenta diminui. Neste contexto, espera-se que em regiões externas a vórtices encontrem-se aglomerados de partículas e estruturas de vórtices contra-rotativos estirando-se estejam associados com as estruturas de strands.

3. VISUALIZAÇÃO 3D DE ESTRUTURAS DE CLUSTERS E VÓRTICES

Os resultados apresentados a seguir referem-se a resultados reportados por Georg (2005). Os resultados referem-se a um leito fluidizado turbulento com as seguintes dimensões $20 \times 20 \times 200 \text{ cm}^3$. A resolução da malha computacional utilizada foi de $0,625 \times 0,625 \times 1,33$ e o diâmetro das partículas de $120 \text{ }\mu\text{m}$. Com esta resolução e diâmetro de partículas tem-se em cada volume elementar $52 \times 52 \times 110$ partículas. Desta forma, para as propriedades da fase gás utilizadas na simulação e tomando a velocidade superficial do gás de 1 m/s , e a dimensão lateral do reator como base, tem-se o número de Reynolds das grandes escalas da ordem de 14000. Desta forma o comprimento das menores escalas da turbulência é da ordem de $0,015 \text{ cm}$. Observa-se que o valor do comprimento das menores escalas é maior que o diâmetro da partícula. As partículas utilizadas tem diâmetro menor que as menores escalas, indicando que estas, vistas como partículas individuais, terão o comportamento de um escalar passivo nesta escala. Contudo, o volume elementar da malha utilizada é 42 vezes maior que as menores escalas da turbulência. A escala de tempo característica das menores escalas é da ordem de $0,002$ segundos e o passo de tempo utilizado foi de 1×10^{-3} segundo.

Observa-se que a malha utilizada não resolve as menores escalas da turbulência, contudo é capaz de capturar aglomerados de partículas. Sendo assim, nesta escala a partícula, ou cluster, não comporta-se mais como um escalar passivo, podendo modificar a turbulência nas regiões de ocorrência de aglomerados. O número de Stokes para o conjunto de propriedades apresentados em Georg (2005) e Georg et al. (2007) é, $St = 0,55$, neste caso há maior tendência para formação de aglomerados de partículas, pois quando o tempo característico da partícula aproxima-se da escala do fluido, há tempo suficiente para as partículas se acomodarem. Se o número de Stokes for da ordem de 1, então o tempo de resposta é muito lento para seguir os vórtices das menores escalas, neste caso, a influência dos vórtices das grandes escalas é mais pronunciada, pois estes tem escalas de tempo aproximadamente equivalentes ao tempo de

resposta da partícula. Importante ressaltar que o tempo característico para o fluido foi tomado como o tempo característico das grandes escalas. Se tomarmos o tempo característico das menores escalas, 0,002 segundo, tem-se um número de Stokes da ordem de 55. Neste caso o número de Stokes é muito maior que a unidade, significando que as partículas não respondem ao movimento dos menores vórtices.

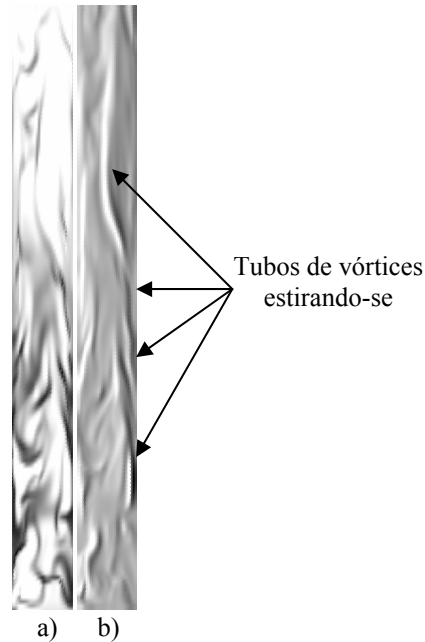


Figura 1. Campo de fração de sólido instantâneo (a) e componente da vorticidade (1/s) perpendicular ao plano (b).

À partir dos resultados numéricos obtidos por Georg (2005) para o tempo de 5,9 segundos (ver Fig. 1) serão apresentados iso superfícies de fração de sólido de forma que se possa visualizar as estruturas tridimensionais de aglomerados e bolhas de gás presentes no interior do leito fluidizado. A Fig. 1 apresenta comparação do campo de fração de sólido instantâneo no centro do leito fluidizado e a componente da vorticidade perpendicular ao plano. Tonalidades tendendo para o negro representam regiões ricas em sólido para o campo de fração de sólidos. Observa-se a presença de estruturas de tubos de vórtices contra-rotativos orientados na direção axial associados com estruturas de strands. Além das estruturas de tubos, observa-se que o campo de vorticidade mapeia regiões de alta concentração de partículas.

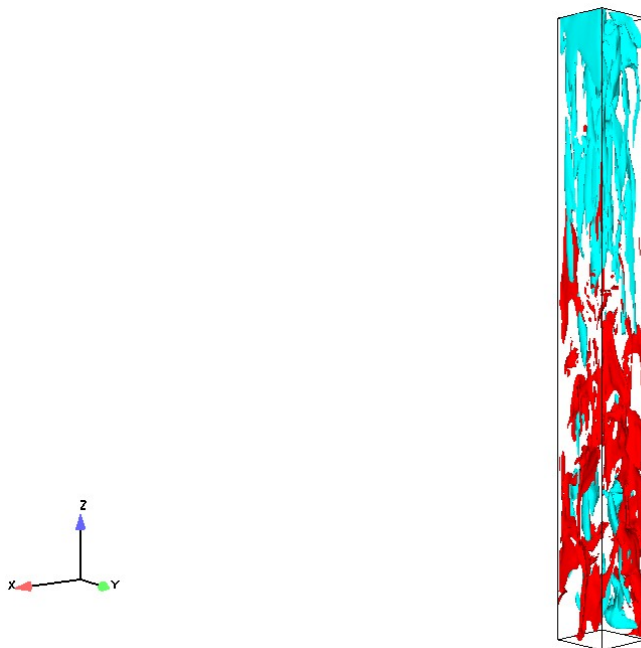


Figura 2. Iso superfícies instantâneas de fração de sólido 0,05 (azul-gás) e 0,58 (vermelho – sólidos)

Observa-se na Fig. 2 iso superfícies de fração de sólido de 0,05, representando estruturas de bolhas de gás e fração de sólido de 0,58 representando estruturas de aglomerados de partículas. Evidencia-se que a região próxima à base do leito é mais densa que a região superior, como esperado para o comportamento de um leito fluidizado turbulento. Observa-se que as bolhas de gás estão orientadas na direção axial Z do leito com exceção da região junto a base do leito, onde há recirculação. Poucas estruturas de bolhas são encontradas na região próxima à parede na região da base do leito, contudo as estruturas de aglomerados de partículas mostram-se acumuladas na região próxima a parede. Nos subitens a seguir serão apresentados resultados de identificação de estruturas rotativas utilizando diferentes técnicas de forma a demonstrar a interação entre aglomerados de partículas e strands com as estruturas de vórtices.

3.1. Técnicas de identificação de vórtices

Resultados tridimensionais são apresentados para o tempo de 5,9 segundos de iso superfícies de vorticidade, helicidade, estiramento de vórtice e fator Q, assim como resultados de centro de vórtices. O principal objetivo é identificar as estruturas de vórtices e associá-los as estruturas de clusters e strands. Nos resultados apresentados comparou-se os campos de fração de sólido e vorticidade para o centro do leito. Observa-se que o campo de vorticidade mapeia as regiões onde há presença de clusters e strands, mostrando assim uma íntima relação entre a formação de aglomerados de partículas e estruturas rotativas, tendo em vista que os clusters tendem a manter-se na região externa de um dado vórtice como descrito no item 2. As estruturas de strands estão associadas com tubos de vórtices contra-rotativos em processo de estiramento como pode ser observado nos resultados apresentados na Fig. 1, onde o pós-processamento foi realizado para um corte no centro do leito. Entretanto, pela análise visual bi-dimensional não é possível afirmar categoricamente a presença de um vórtice com base no pressuposto de que no local onde a vorticidade é máxima deve ser encontrado um vórtice. Um vórtice tem alta magnitude de vorticidade, mas o contrário não é sempre verdadeiro, Roth (2000). Ou seja, existindo regiões de alta magnitude de vorticidade não significa que um vórtice seja encontrado na região. Um exemplo característico é o escoamento sobre uma placa plana.

Isosuperfícies de magnitude de vorticidade são freqüentemente utilizadas para visualização de vórtices, contudo, a direção da vorticidade é perdida por esta técnica, Sadlo et al. (2004). Outro aspecto importante é o fato de que os campos de vorticidade na separam as zonas cisalhantes das puramente rotativas, o que resulta em uma sobre-estimação das estruturas rotativas. A grande dificuldade na identificação de vórtices é a falta de uma definição formal de vórtices segundo Roth (2000). A definição de Robinson (1991) freqüentemente citada é difícil de ser aplicada pois para que se possa checar a presença de um vórtice seguindo a definição, deve-se conhecer a priori o eixo central do vórtice, exatamente o que se procura determinar.

A seguir serão descritos vários métodos descritos na literatura para a identificação de estruturas rotativas e centro de vórtices, para então associá-los, se possível, às estruturas de clusters e strands. Estes métodos estão bem estabelecidos na literatura, Roth (2000). O objetivo aqui é, usando estas metodologias, entender um pouco melhor a estrutura e distribuição de vórtices e como estes interagem com as estruturas encontradas no escoamento gás-sólido em leito fluidizado.

Um número bem conhecido de critérios para a presença de vórtices, ou de forma geral, estruturas rotativas, são derivados imediatamente da equação de Navier-Stokes. Para um fluido incompressível a equação de Navier-Stokes é dada por

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{U} \quad (1)$$

onde o lado esquerdo da equação é a derivada material da velocidade, e ν é a viscosidade cinemática.

Aplicando-se os operadores divergente, rotacional e gradiente à Eq. (1) resulta em equações relevantes para a visualização de estruturas de vórtices. O operador divergente aplicado a Eq. (1) resulta na equação escalar,

$$\nabla \cdot \left(\frac{D\mathbf{U}}{Dt} \right) = -\frac{1}{\rho}\nabla^2 p \quad (2)$$

obtida fazendo-se uso da equação da continuidade $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$. Um valor positivo do Laplaciano da pressão é um bem conhecido indicador de vórtices, Sadlo et al. (2004), idêntico ao segundo invariante Q do tensor gradiente de velocidade. A Eq. (2) leva a uma interpretação intuitiva de regiões de baixa pressão.

Aplicando-se o operador rotacional na Eq. (1) obtém-se a equação da vorticidade

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

onde ω é a vorticidade. Esta equação descreve a variação da taxa de vorticidade pelo efeito do estiramento de vórtice e pela difusão da vorticidade, permitindo visualizar separadamente estes dois efeitos. Por sua vez, o operador gradiente aplicado na Eq. (1) resulta na equação matricial

$$\nabla \left(\frac{D\mathbf{U}}{Dt} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{U}. \quad (4)$$

A Eq. (4) é a base para o chamado critério lambda 2 (λ_2) para identificação de vórtices apresentado por Jeong e Hussain (1995). O Hessiano da pressão é uma matriz simétrica, desta forma tomando a parte simétrica da Eq. (4) obtém-se

$$\nabla \left(\frac{D\mathbf{S}}{Dt} \right) - \nu \nabla^2 \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla \nabla p \quad (5)$$

onde \mathbf{S} é a parte simétrica e $\mathbf{\Omega}$ a parte anti-simétrica da matriz $\nabla \mathbf{U}$. Depois de eliminar os termos que representam o estiramento irrotacional e os efeitos viscosos, o termo da pressão Hessiana (lado direito da Eq. (5)) é a matriz simétrica $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$. Se os três autovalores da matriz Hessiana são ordenados como $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, o critério para λ_2 é $\lambda_2 < 0$, o que significa que a função pressão tem curvatura positiva ao menos em duas direções ortogonais segundo Jeong et al. (1997). Através deste método é possível separar regiões decorrentes de cisalhamento e regiões que são puramente rotativas.

O método utilizado com maior frequência para visualização de estruturas rotativas é a helicidade, que é a projeção do vetor vorticidade sobre o vetor velocidade $(\nabla \times \mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}$. Desta forma, o componente da vorticidade perpendicular a velocidade é eliminado, contudo, este método não é invariante galileano. Os métodos chamados vortex core (centro de vórtices) foram utilizados na apresentação dos resultados que identificam os vórtices e são baseados no trabalho de Sujudi e Haines (1995), utilizando-se o software EnSight 8.0. Os centros de vórtices são propriedades inerentes do campo de velocidades e não dependem de qualquer escolha paramétrica, como é o caso de iso superfícies. O problema deste método é que o resultado contém apenas informação local, contudo, este método identifica a existência de um vórtice e seu centro com extrema precisão. A visualização do vórtice como estrutura tridimensional só é possível com o auxílio de linhas de corrente do vetor velocidade ou do vetor vorticidade, ou ainda com o auxílio de iso superfícies do fator Q positivo. De qualquer forma, todos os métodos citados acima dependem de alguma técnica de verificação, seja ela visual ou heurística. Importante ressaltar que não se pode esperar que um tubo de vórtice siga a linha central por um determinado período de tempo. Mesmo se a linha de corrente coincida com o centro do vórtice, esta deveria flutuar ao redor do centro, como ressaltam Sadlo et al. (2004).

Com o descrito no parágrafo acima, fica evidente a necessidade de utilizar os métodos citados acima em conjunto, com a finalidade de visualizar com precisão as estruturas de vórtices e tubos de vórtices e desta forma, se possível, associá-los com as estruturas de clusters e strands, o que será apresentado no próximo subitem.

3.2. Estruturas de clusters, strands, vorticidade, helicidade, estiramento de vórtice e fator Q

A Fig. 3 apresenta iso superfícies de vorticidade nas direções X, Y e Z. Observa-se nesta figura que as componentes X e Y da vorticidade tem maior contribuição para a formação de estruturas rotativas. As estruturas de vórtices na direção X concentram-se mais na região da parede, Fig. 3 a, enquanto as na direção Y, Fig. 3 b, apresentam-se como tubos contra-rotativos orientados na direção axial, ora próximo à parede ora na região central. A componente Z da vorticidade contribui pouco para a formação destas estruturas de tubos de vórtices, como é possível observar na Fig. 3 c.

À partir da Fig. 2, que apresenta iso superfícies de fração de sólido com valor 0,58 representando assim os clusters e strands, serão introduzidas para comparação as iso superfícies de vorticidade na direção X e Y com a finalidade de observar a interação entre clusters e strands com estruturas rotativas.

A Fig. 4 apresenta o plano central de fração de sólido (Fig. 1 a), **(o plano central é utilizado com o objetivo de auxiliar na visualização, como referencia)**. A região escolhida para o zoom apresenta a formação de strands orientados na direção axial Z e clusters atravessando a superfície do plano central, bem como clusters junto às paredes e na região central. A região escolhida é próxima ao centro do leito a partir de sua base.

Evidencia-se nos resultados apresentados na Fig. 5 que as iso superfícies de vorticidade na direção X envolvem as estruturas de strands. Ao fundo na Fig 5 a observa-se que o grande tubo observado no plano da Fig. 1 a é de fato uma estrutura rotativa que se estende na direção axial Z e atravessa o plano auxiliar de fração de sólido exatamente na posição em que observa-se a referida estrutura. O cluster central que atravessa o plano central não aparece envolto por estruturas rotativas de iso superfícies de vorticidade na direção X, Fig. 5 b.

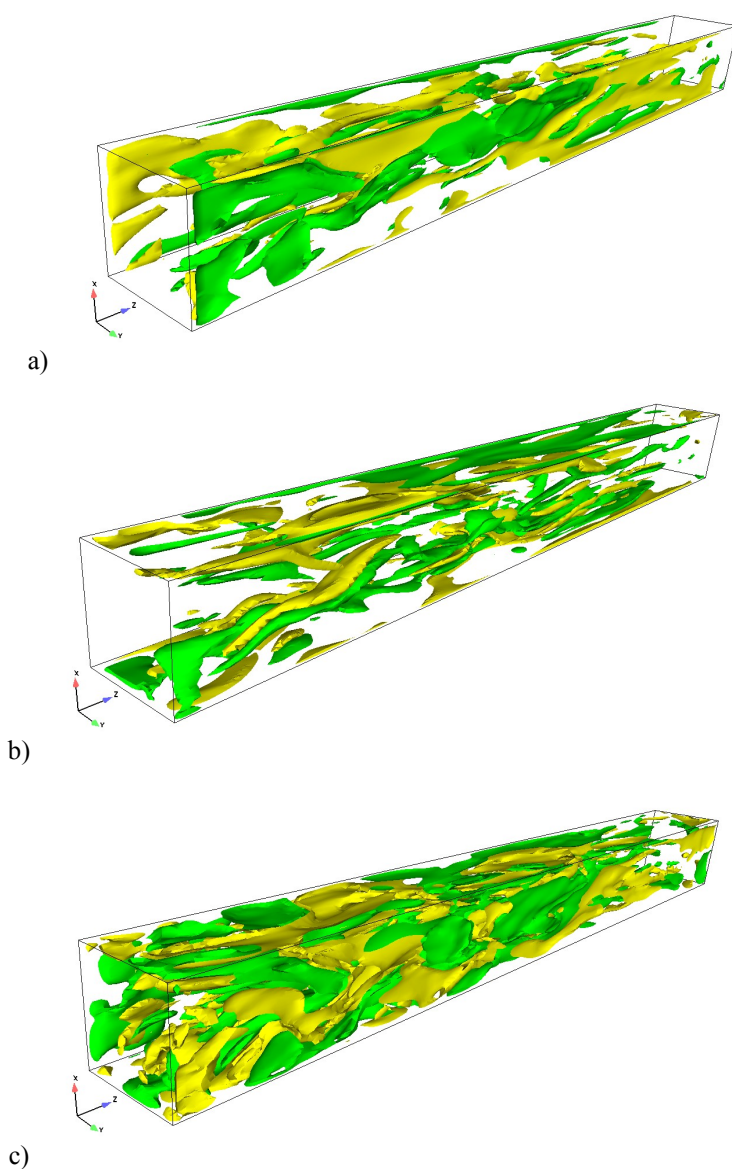


Figura 3. Iso superfícies de vorticidade; a) Componente da vorticidade na direção X com valor de (+/-) 150 (1/s); b) componente da vorticidade na direção Y com valor de (+/-) 150 (1/s); c) componente da vorticidade na direção Z com valor (+/-) 30 (1/s). Sentido horário de rotação está representado pela cor amarela.

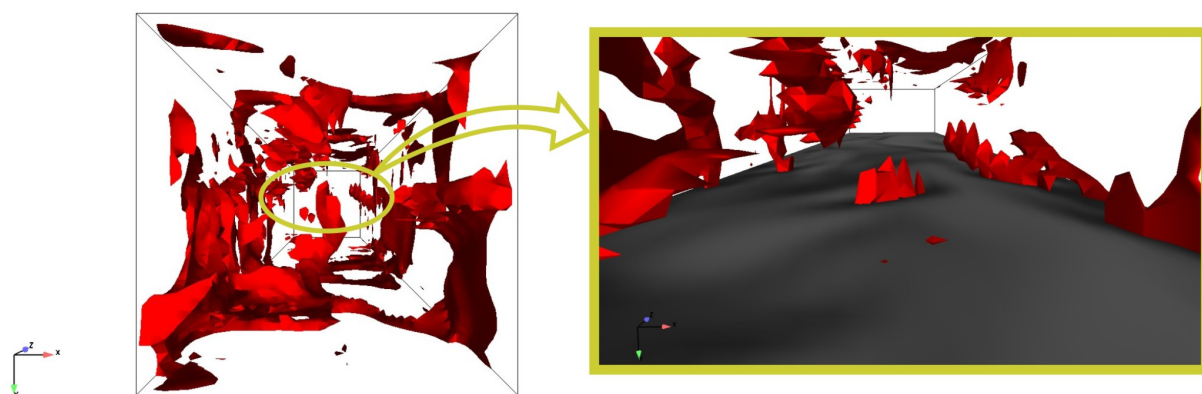
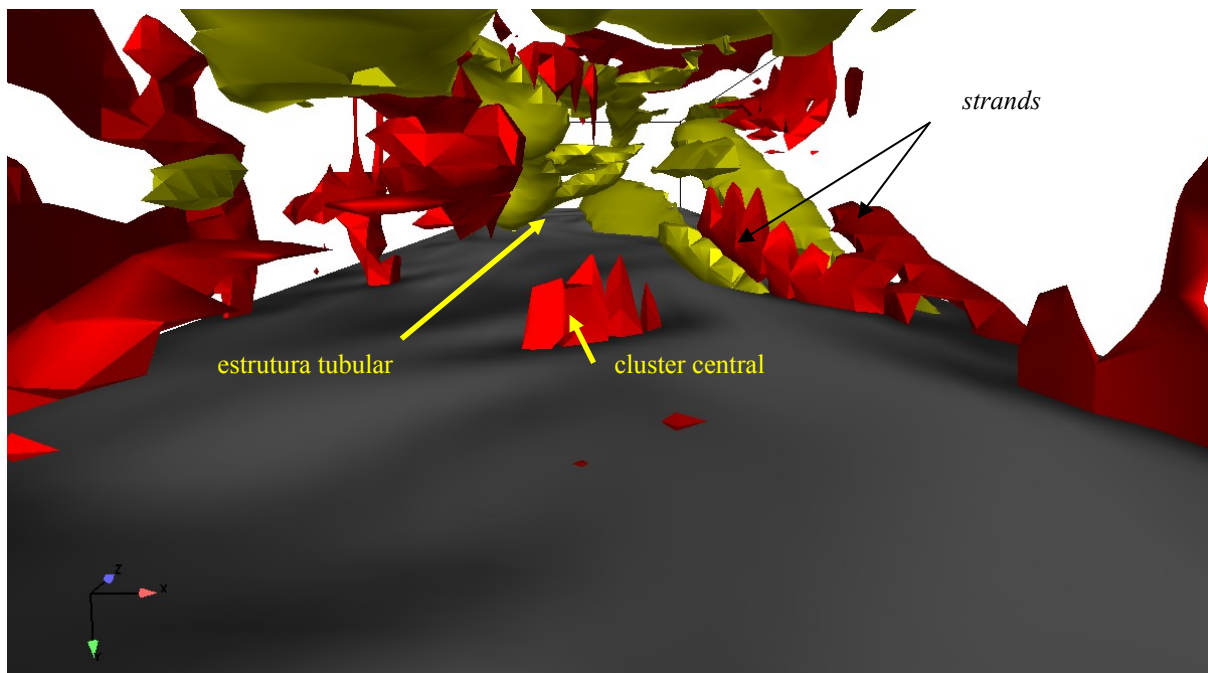
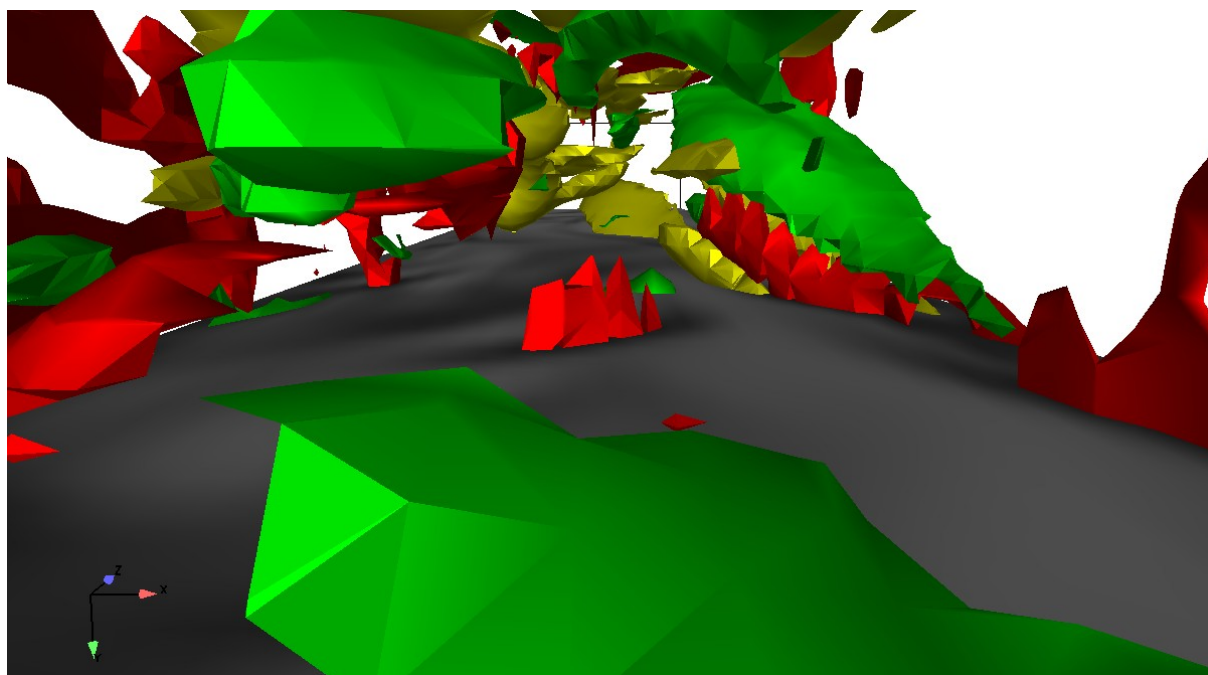


Figura 4. Vista frontal de iso superfícies de fração de sólido com o valor de 0,58, com zoom da região de interesse e inserção do plano central de fração de sólidos em tons de cinza.



a)

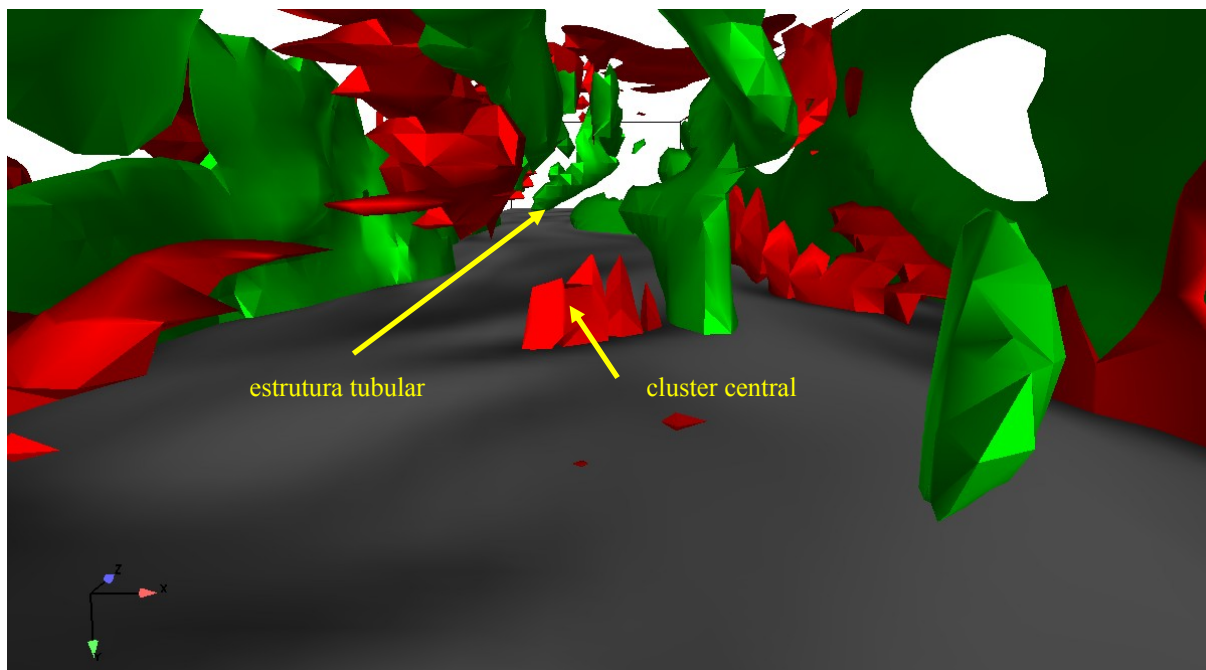


b)

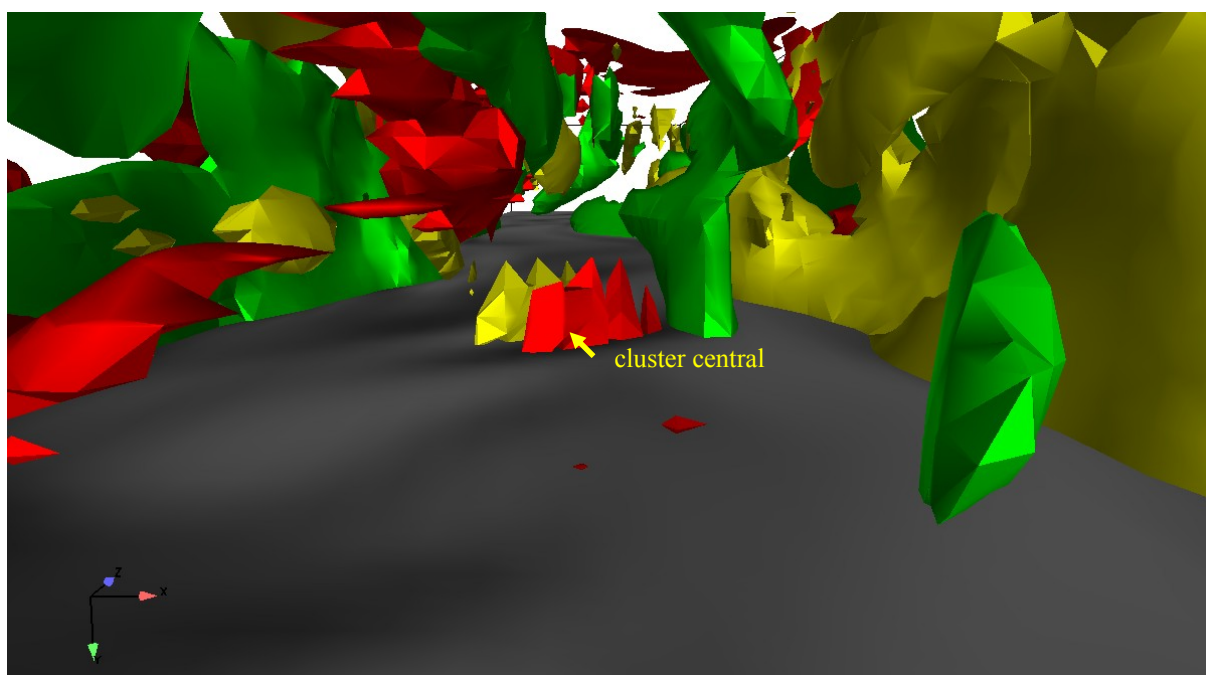
Figura 5. Zoom à partir da Fig. 4 de iso superfícies de fração de sólido (coloração avermelhada) e plano central de fração de sólido em tons de cinza; a) iso superfícies de vorticidade na direção X com valor de 150 (1/s) com rotação horária (coloração amarelada); b) iso superfícies de vorticidade na direção X com valor (+/-) 150 (1/s)

Outro aspecto importante a ressaltar é que os clusters presentes na parede não estão associados a estruturas rotativas com vorticidade na direção X neste zoom apresentado na Fig. 5, e para este valor de vorticidade (+/- 150 (1/s)). Como estamos interessados em valores máximos de vorticidade, que identificam ou deveriam identificar estruturas de vórtices sem a presença de partículas, valores abaixo do mencionado acima não serão apresentados. De fato os resultados apresentados nesta figura corroboram o mencionado anteriormente sobre a presença de clusters e ou strands na região mais externa de um determinado vórtice ou tubo de vórtices.

A Fig. 6 apresenta iso superfícies para vorticidade na direção Y da mesma forma que a apresentada para a Fig. 5 para a direção X. É possível observar na Fig. 6 a que o cluster central está associado com um vórtice que atravessa o plano auxiliar central. A Fig. 6 b mostra a presença de dois vórtices contra-rotativos associados com o cluster central.



a)



b)

Figura 6. Zoom à partir da Fig. 4 de iso superfícies de fração de sólido (coloração avermelhada) e plano central de fração de sólido em tons de cinza; a) iso superfícies de vorticidade na direção Y com valor de 150 (1/s) com rotação horária (coloração amarelada); b) iso superfícies de vorticidade Y com valor (+/-) 150 (1/s)

Nota-se que o cluster encontra-se na região externa a estes dois vórtices. A estrutura de strand está associada com um vórtice com rotação horária. Observa-se que a região junto a parede apresenta uma estrutura de vórtice, contudo sem estar associada a clusters. Na região mais ao fundo observa-se uma estrutura que inicia-se próximo ao tubo de vórtice mencionado anteriormente associado ao plano da Fig. 1 a. Esta estrutura será melhor observada com iso superfícies de estiramento de vórtices apresentados mais a frente.

Os resultados apresentados nas Figs. 5 e 6 para iso superfícies de vorticidade na direção X e Y mostram a íntima relação entre estruturas rotativas e clusters e strands. Contudo, como afirmado anteriormente, não é possível utilizar apenas a vorticidade como critério de identificação de vórtices. Técnicas mais precisas e adequadas devem ser utilizadas para auxiliar na visualização destas estruturas e localizá-las com maior precisão.

Para a identificação do centro de vórtices utilizou-se a técnica conhecida como vortex core. Esta técnica encontra-se implementada no software EnSight 8.0 o qual foi utilizado para a visualização dos resultados tridimensionais. O EnSight 8.0 cria segmentos de centro de vórtice a partir do tensor gradiente de velocidade de um escoamento tridimensional, como apresentado na Fig. 7. A técnica utilizada pelo EnSight 8.0 é baseada nos trabalhos de Sujudi e Haines (1995) e Haines e Kewrigh (2000). A técnica é linear e nodal, ou seja, é baseada na decomposição dos elementos finitos em tetraedros e então são resolvidas formas fechadas de equações para determinar o tensor gradiente de velocidade nos nós. Existem duas abordagens, uma baseada na análise de autovalores que usa uma classificação de autovalores e autovetores para determinar onde o centro do vórtice intercepta alguma face do tetraedro. A outra é baseada na vorticidade e utilizada para visualização no presente trabalho. Esta técnica utiliza o alinhamento da vorticidade e dos vetores velocidade para determinar os pontos de intersecção. A técnica baseada em autovalores pode encontrar centros de vórtices que não são vórtices, especialmente em problemas de camada limite. O método baseado em vorticidade não apresenta este problema, pois os componentes de tensão do tensor gradiente de velocidade foram removidos na formação do vetor vorticidade. Sendo assim, o método baseado na vorticidade produz centros de vórtices contínuos.

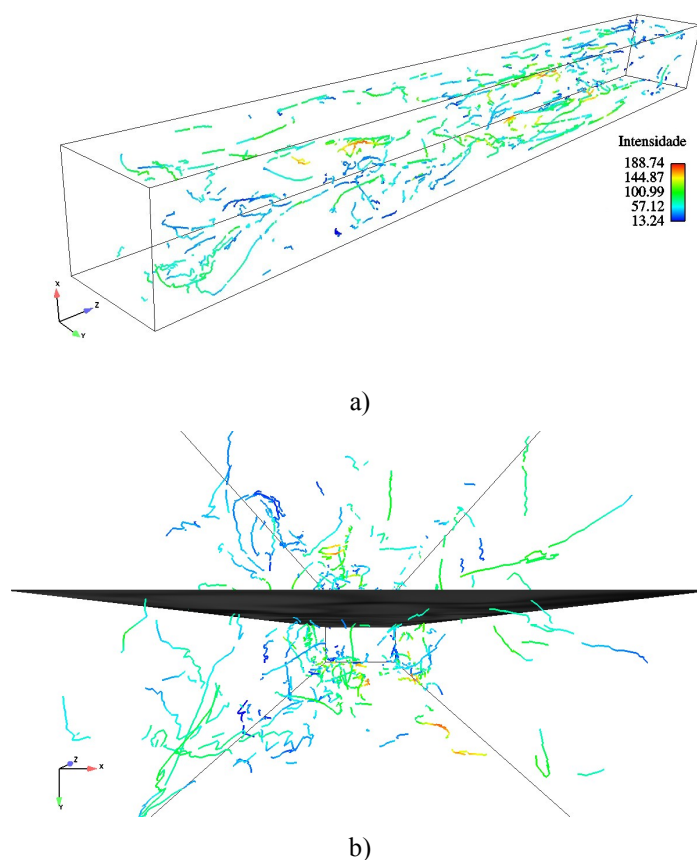


Figura 7. Centro de vórtices identificados com as técnicas descritas por Sujudi et al. (1995). As cores identificam a magnitude da vorticidade; a) vista lateral; b) vista frontal com o plano central de fração de sólidos (o plano central (Fig. 1a) é mostrado como auxiliar de visualização, neste caso para indicar que os centros de vórtices atravessam o plano central).

Os resultados para centro de vórtices encontrados são importantes, pois identificam com muita precisão e confiança a existência de vórtices e seus centros. Como a técnica está implementada em um software comercial, garante-se a independência dos resultados. A Fig. 7 apresenta os resultados para o centro de vórtice encontrados utilizando-se o método baseado na vorticidade. Não aplicou-se qualquer filtro nos resultados. Observa-se na vista lateral, Fig 7 a, a enorme complexidade encontrada no escoamento gás sólido em um leito fluidizado turbulento.

Evidencia-se a presença de inúmeros centros de vórtices sendo que a grande maioria de intensidade média. Importante observar que os centros de vórtices encontram-se em todas as regiões do leito, inclusive no centro. A Fig. 7 b apresenta uma vista frontal à partir da base do leito fluidizado com o plano central de fração de sólido. Observa-se que muitos centros de vórtice atravessam a superfície do plano central. Evidencia-se que os resultados obtidos utilizando-se o método do centro de vórtices resulta em informação local. Não é possível visualizar a forma dos vórtices. Uma das técnicas utilizadas para auxiliar na visualização de vórtices é a utilização de linhas de corrente do vetor velocidade. À partir dos centros de vórtices são geradas linhas de corrente do vetor velocidade e estes representam as estruturas espiraladas e sua direção, ver Fig. 8.

A Fig. 8 apresenta a vista frontal do centro de vórtices e linhas de corrente do vetor velocidade do sólido à partir do centro de vórtices. Observa-se a presença de estruturas rotativas representadas pelas trajetórias das linhas de corrente, espiralando-se em torno do centro de vórtices identificados, tanto na base do leito, Fig. 8 a, como na saída Fig. 8 b.

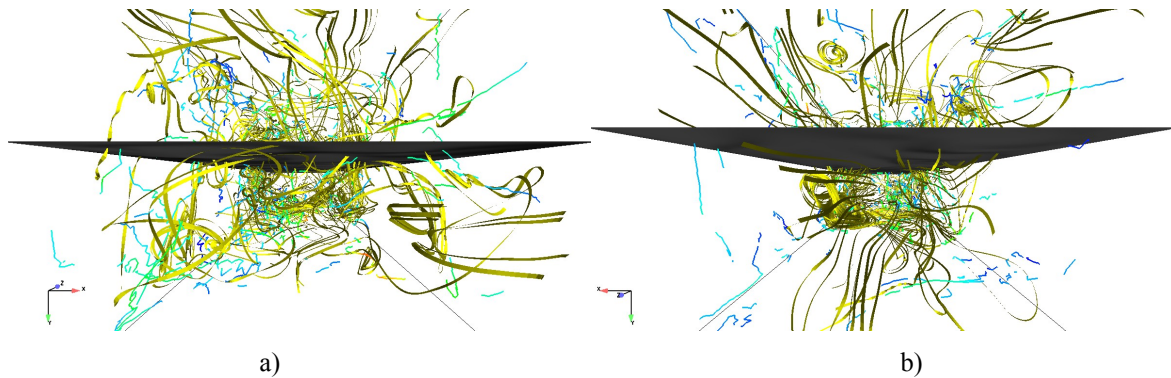


Figura 8. Centro de vórtices e linhas de corrente do vetor velocidade do sólido; a) vista frontal da base do leito; b) vista frontal da saída do leito, região superior

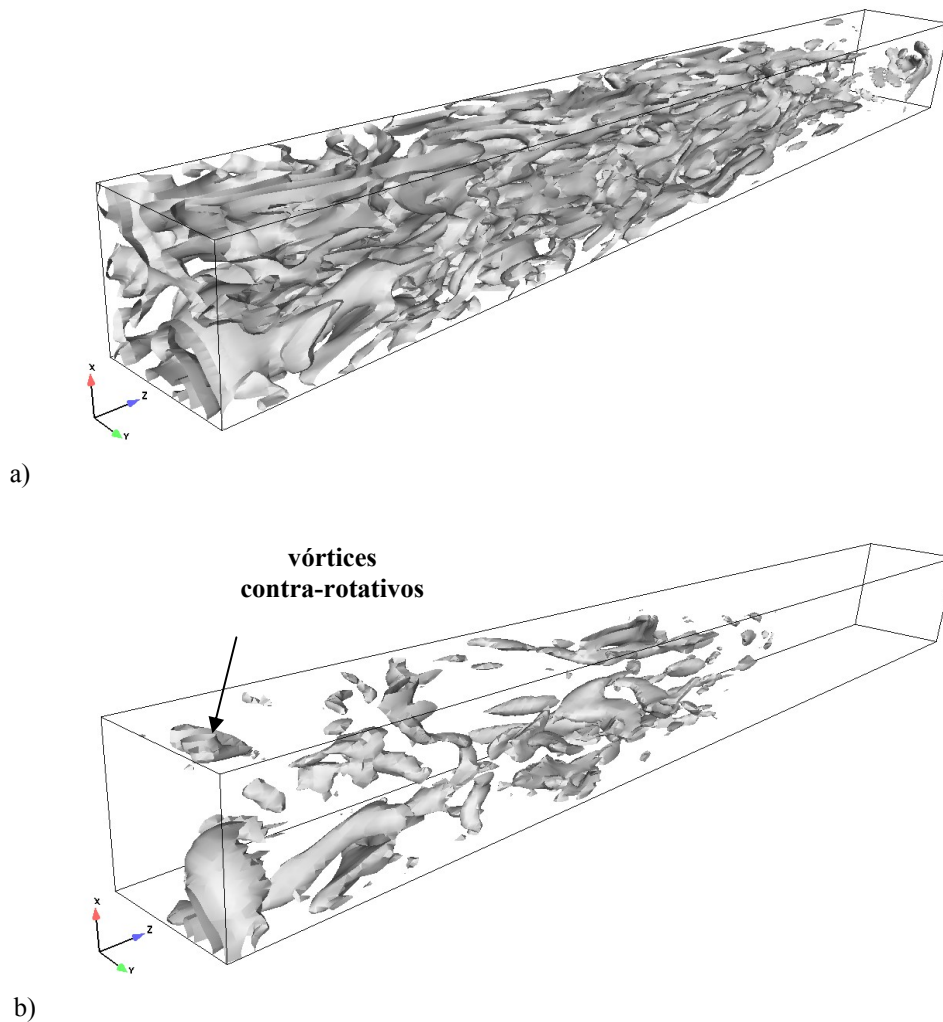


Figure 9. Iso superfícies de fator Q positivo, vista lateral; a) fator $Q = 1 \times 10^5$; b) 9×10^5

A Fig. 9 apresenta iso superfícies do fator Q positivo. Este fator descrito anteriormente, extrai dos dados numéricos regiões onde a rotação é predominante, fator $Q > 0$, e regiões onde predominam as taxas de deformação, fator $Q < 0$. Evidencia-se a enorme gama de estruturas turbilhonares, desde estruturas de pequeno porte até estruturas com grandes dimensões orientadas em sua grande maioria na direção axial Z, Fig. 9 a. A Fig. 9 b apresenta uma série de estruturas

rotativas e duas delas, apontadas pela seta na base do leito representam vórtices contra-rotativos que são visualizados em uma vista frontal na Fig. 10.

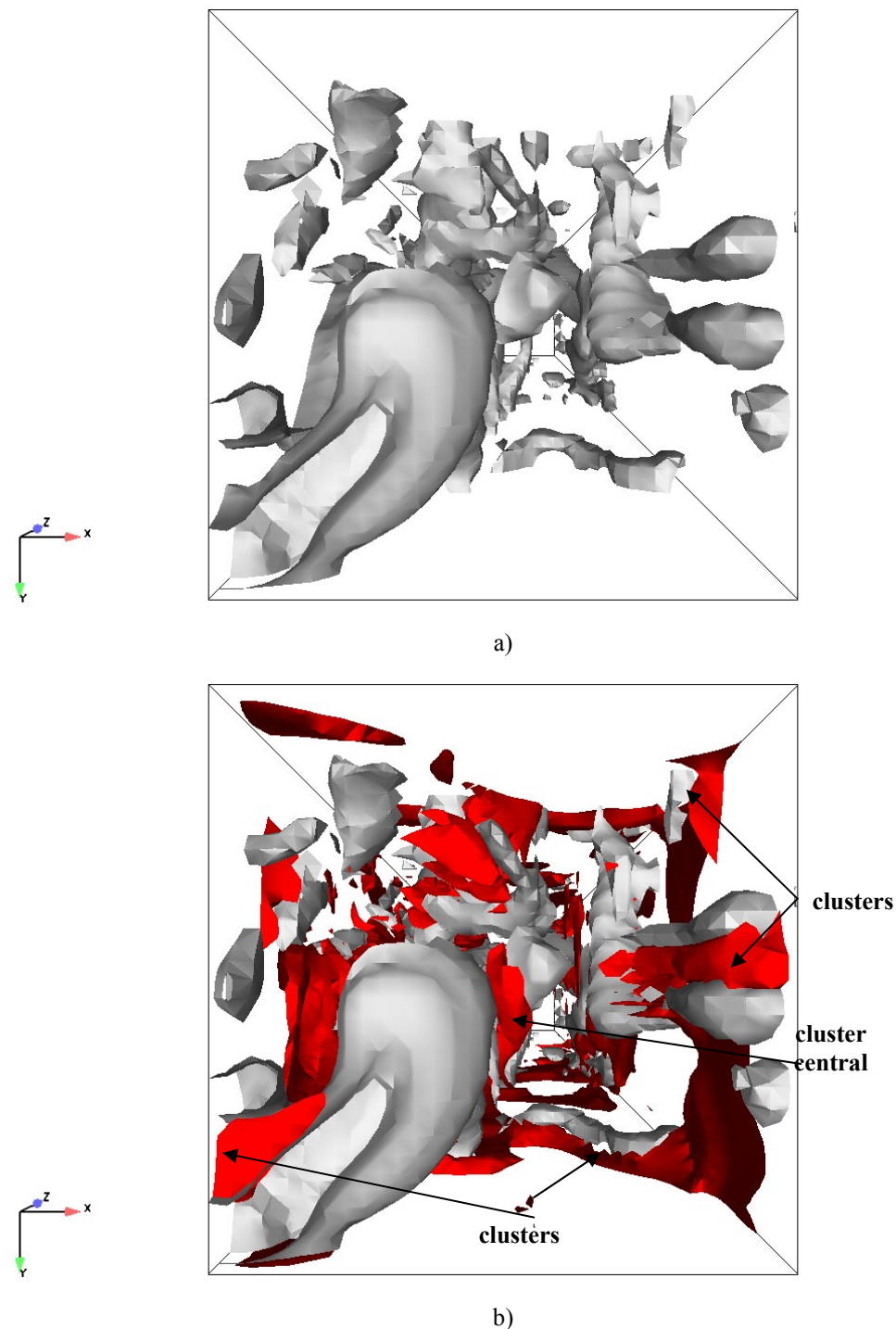


Figura 10. Iso superfícies do fator Q positivo, vista frontal da base do leito; a) fator $Q= 9 \times 10^5$; b) iso superfícies de fator Q e fração de sólido com valor 0,58.

Note que o fator Q positivo representa estruturas de fluido associadas apenas à rotação. Desta forma, é possível observar na Fig. 10 a e b que as estruturas rotativas encontram-se envoltas por porções de aglomerados de partículas. Estas estruturas são contra-rotativas e observa-se com muita nitidez que entre estas duas estruturas encontra-se uma estrutura de cluster junto à parede do reator. Observa-se que as estruturas de aglomerados mantêm-se na região externa dos vórtices identificados.

Tradicionalmente o mecanismo de estiramento de vórtices é caracterizado pelo primeiro termo Eq. (2), $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{U}$. Este termo é um vetor, mas não é invariante galileano, Fu et al. (2003). Fu et al. (2003) propuseram a representação do mecanismo de estiramento de vórtices que satisfaz o critério proposto por Jeong e Hussain (1995). A equação utilizada

por Fu et al. (2003) para representar o mecanismo de estiramento de vórtices foi o chamado parâmetro $\eta_4 = S_{ij} W_{ij}^2$. O mecanismo de estiramento de vórtice tem lugar quando $\eta_4 > 0$ e o relaxamento de vórtice quando $\eta_4 < 0$. A natureza tridimensional associada ao processo de estiramento de vortices faz do parâmetro η_4 um parâmetro chave na identificação de estruturas coerentes de grande escala, Fu et al. (2003). O fator Q também é apropriado para identificar vortices, contudo, como este fator existe inclusive em escoamentos bidimensionais que em geral não são escoamentos turbulentos, este parâmetro pode produzir informação não necessariamente relacionada a turbulência.

A Fig. 11 apresenta uma vista superior da região de saída do leito, onde encontra-se a estrutura de vórtice contra-rotativo estirando-se na direção axial observado na Fig. 1 b. O strand estirando-se é mostrado na Fig. 11 a, no plano central de fração de sólido. Evidencia-se na Fig. 119 b que a estrutura de cluster no plano está associada com um grande tubo de vórtice estirando-se. Observa-se que o tubo atravessa a superfície do plano central, e que o strand, indicado pelas flechas encontra-se na região externa a este tubo de vórtice.

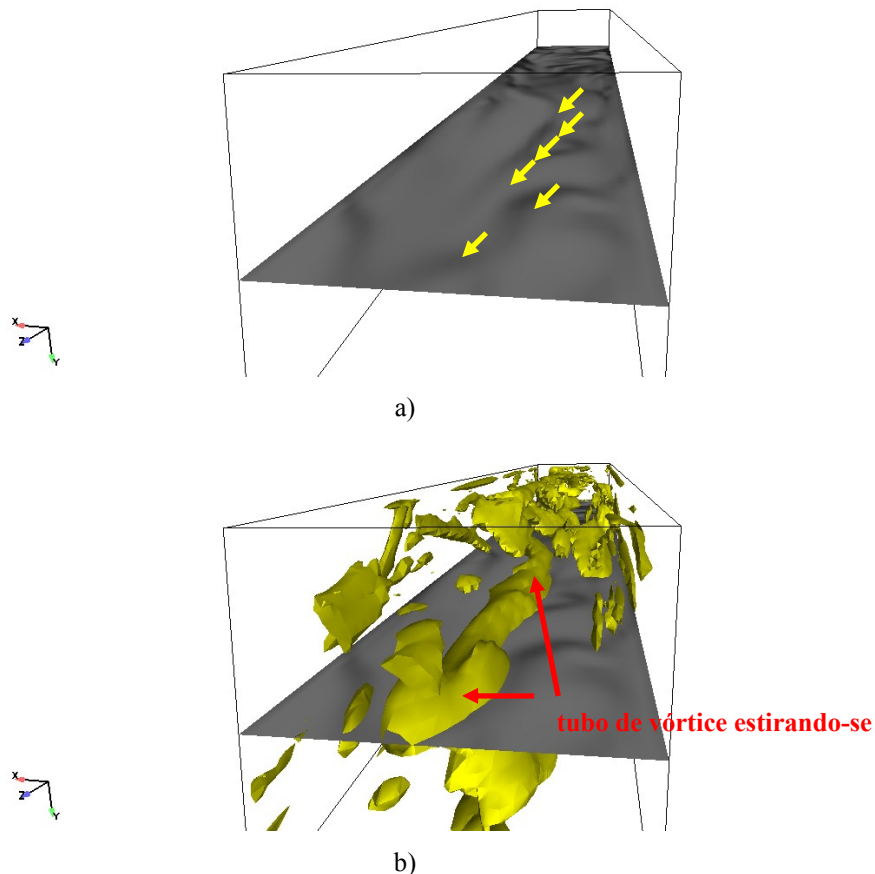


Figura 11. Vista da região superior do leito; a) plano central de fração de sólido em tons de cinza, setas indicam o strand; b) iso superfície de estiramento de vórtice com $\eta_4=6 \times 10^5$

Os resultados para helicidade são pouco reveladores no caso do escoamento gás-sólido em leito fluidizado. A exceção se faz quando as iso superfícies de fator Q são coloridas com a helicidade relativa, o que dá uma idéia muito precisa da orientação (horária ou anti-horária) de um dado vórtice (estes resultados não são apresentados neste trabalho para economia de espaço).

Neste contexto, espera-se que em regiões externas a vórtices encontrem-se aglomerados de partículas e estruturas de vórtices contra-rotativos estirando-se estejam associados com as estruturas de strands.

4. CONCLUSÕES

Apresentaram-se técnicas de visualização e determinação de estruturas de vórtices e centro de vórtices encontradas na literatura. Os resultados mostram a complexidade do escoamento gás-sólido em leito fluidizado turbulento evidenciando-se uma série de estruturas turbulentas, em sua grande maioria estruturas rotativas e contra-rotativas. Estas estruturas rotativas encontram-se associadas com estruturas de aglomerados de partículas (clusters) e strands. Observou-se que as estruturas de strands estão associadas com tubos de vórtices contra-rotativos estirando-se na direção axial, através do método de estiramento de vórtices. As estruturas de clusters estão associados com regiões do fluido com alta tensão (fator Q negativo).

A técnica de centro de vórtices auxiliou na identificação dos vórtices. O método baseado na helicidade não mostrou-se eficaz na visualização de estruturas rotativas, contudo pode ser utilizado como auxiliar na identificação das estruturas rotativas ou contra-rotativas associadas ao fator Q positivo.

O fator Q e o critério tem grande potencialidade para serem utilizados na identificação de estruturas de clusters e strands no escoamento gás-sólido em leito fluidizado turbulento. Um estudo paramétrico é necessário para a utilização destes critérios para a identificação de estruturas de clusters e strands, com a finalidade de otimizar sua utilização.

3. AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao auxílio institucional do PRH09 - ANP/MCT (Agência Nacional de Petróleo, Gás e Biocombustíveis e ao CNPq pela bolsa de pós doutorado e auxílio institucional.

4. REFERÊNCIAS

- Agrawal K., Loezos, P.N., Syanmlal, M., Sundaresan, S., 2001, "The role of meso-scale structures in rapid gas-solid flows", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 445, pp. 151-185.
- Ahmed, A.M. and Elghobashi, S., 2000, "On the mechanisms of modifying the structure of turbulent homogeneous shear flows by dispersed particles". *Physics of Fluids*, v. 12, n. 11, November.
- Anderson, T.B., Jackson, R., 1968, "Fluid Mechanical Description of Fluidized Beds". *I&EC Fundamentals*, v. 7, n. 1, pp. 12-21, February.
- Anderson, J.D. "Computational Fluid Dynamics: The basics with applications. Mechanical Engineering Series". McGraw-Hill, New York, 1995, apud, van Wachen, B. Derivation, implementation, and validation of computer simulation models for gas-solid fluidized beds. Ph.D. Thesis at Delft University of Technology, 2000.
- Eaton, J.K. and Fessler, J.R., 1994, "Preferential Concentration of Particles by Turbulence". *Int. J. Multiphase Flow*, v. 20, Suppl., pp. 169-209.
- Fu, S., Li, Q-B., Wang, M-H, 2003, Depicting vortex stretching and vortex relaxing mechanisms. *Chin. Phys. Lett.* Vol. 20, number 12, pp. 2195-2198.
- Georg, I. C., 2005, "Modelagem e simulação numérica tridimensional transiente do escoamento gás-sólido em um reator de craqueamento catalítico em leito fluidizado", Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.
- Georg, I. C., Maliska, C. R., Porto, L.M., 2007, "Evaluation of a sub-grid model in a turbulent circulating fluidized bed", *Proceedings of COBEM 2007*.
- Glasser, B.J., Kevrekidis, I.G. and Sundaresan, S., 1997, Fully developed traveling wave solutions and bubble formation in fluidized beds. *J. Fluid. Mech.*, v. 334, pp. 157-188.
- Glasser, B.J., Sundaresan, S., Kevrekidis, I.G., 1998, From Bubbles to Clusters in Fluidized Beds. *Physical Review Letters*, v. 81, pp. 1849-1852.
- Haines, R. Kenwright, D., 2000, On the velocity gradient tensor and fluid feature extraction. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pp. 1-10.
- Hoomans, B.P.B., Kuipers, J.A.M., Briels, W.J., van Swaaij, W.P.M., 1996, "Discrete particle simulation of a two-dimensional gas-fluidized bed: a hard sphere approach". *Chemical Engineering Science*, v. 51, p. 99 -118.
- Jackson, R., 2000, "The Dynamics of Fluidized Particles", Cambridge University Press, Cambridge Monographs on Mechanics.
- Jeon J., Hussain, F., 1995, On the identification of vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 285, pp. 193-208.
- Kunii, D., and Levenspiel, O. "Fluidization Engineering". Butterworth-Heinemann. USA, (1991).
- Robinson, S.K., 1991, Coherent motions in the turbulent boundary layer. In *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 23, pp. 601-639.
- Roth M., 2000, "Automatic extraction of vortex core lines and other line-type features for scientific visualization. PhD dissertation, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.
- Sadlo, F., Peikert, R., Parkinson, E., 2004, Vorticity based flow analysis and visualization for pelton turbine design optimization. *Proceedings of IEEE Visualization 2004*.
- Sujudi, D., Haines, R., 1995, Identification of swirling flow in 3D vector fields. Tech. Report, Dept. of Aeronautics and Astronautics, MIT, Cambridge, MA.
- Tennekes, H., & Lumley, J.L., 1987, *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Tsuji, Y., Kawaguchi, T., Tanaka, T., 1993, "Discrete particle simulation of two dimensional fluidized bed". *Powder Technology*, v. 77, pp. 79-87.
- Wylie, J.J., and Koch, D., 2000, "Particle clustering due hydrodynamics interactions". *Physics of Fluids*, v. 12, n. 5, pp. 964-970.
- Yang, Y.C., and Lei, U., 1998, "The role of the turbulent scales in the settling velocity of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence". *J. Fluid. Mech.*, v. 371, pp. 179-205, 1998.

NONLINEAR REGIME OF A SPANWISE MODULATED WAVETRAIN IN A PLANE POISEUILLE FLOW

Homero Ghioti da Silva, ghioti@dem.feis.unesp.br

Departamento de Engenharia Mecânica - Faculdade de Engenharia Mecânica de Ilha Solteira - Universidade Estadual Paulista, Brazil

Marcello Augusto faraco de Medeiros, marcello@sc.usp.br

Departamento de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automobilística - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, Brazil

Abstract. *This paper presents numerical and theoretical studies of the nonlinear regime of isolated spanwise modulated wavetrains in a plane Poiseuille flow. The initial amplitude of the wavetrains was sufficiently small, such as in natural transition or transition in practical situations. This physical problem is governed by incompressible three-dimensional Navier-Stokes equations that were written in a vorticity-velocity formulation. Numerical simulation was performed using a numerical scheme with mixed high-order of accuracy. In fact, for longitudinal and spanwise directions of the flow, the discretization of the equations were performed using pseudo-spectral methods. For the normal direction of the flow, mixed high-order compact finite difference schemes were used. The temporal integration was performed with a Runge-Kutta method of 4th order of accuracy except to mean flow distortion calculations, where Runge-Kutta of the 4th order of accuracy and Crank Nicolson methods were necessary to assure numerical stability. A spanwise modulated wavetrain, for Reynolds number $Re = 8000$ and located near the second branch of the two-dimensional hydrodynamic stability diagram, was studied. In this region of the diagram, the two-dimensional Tollmien-Schlichting (TS) wave, contained in the wavetrain, is linearly unstable. The present results suggested that, particularly for this case, the nonlinear regime of the spanwise modulation wavetrain is governed by K-type transition. With reduction of the initial disturbance magnitude, more complex scenarios, which may involve other mechanisms, were observed. However, even these more complex scenarios, still was possible to identify the onset and dominance of K-type instability for the initial non-linear regime of the flow.*

Keywords: *Spanwise modulated wavetrain, Plane Poiseuille flow, Natural transition, Vorticity-velocity formulation, Mixed high-order numerical scheme.*

1. INTRODUCTION

The phenomenon of transition laminar-turbulent of fluids is a subject of intense academic research. Indeed, prediction of laminar or turbulent flow is extremely important for applications in the aeronautical industry. It is necessary because the friction coefficient of the turbulent flow is much greater than that of the laminar flow. Consequently, the delay of transition from a laminar to turbulent flow may be important for reducing the viscous drag of aircraft in flight. This fact can reduce spending fuel and the size of aircraft. Furthermore, it increase the transported passengers number and the gain of airlines (Joslin, 1998; Green, 2002; Boiko et al., 2002).

A large number of researchs on the transition phenomenon was concentrated to a simplified situation, in which only a limited number of Tollmien-Schlichting (TS) waves is assumed. These studies resulted some classical scenarios of transition: K-type and H-type transitions and oblique transition. In K-type transition, a two-dimensional TS wave promotes the growth of three-dimensional TS waves through of nonlinear resonance (Klebanoff et al., 1962). In H-type transition, the nonlinear resonance involves the growth of subharmonic TS waves (Herbert, 1988; Kachanov, 1994). Finally, the oblique transition involves the development of a pair of oblique TS waves (Elofsson and Alfredsson, 1998). In this case, transition is preceded by formation of streamwise vortices and appearance of mean flow distortions in form of longitudinal streaks. The classical scenarios of transition, indicated above, are much less complex than in practical situation or natural transition. In fact, a large number of three-dimensional TS waves, which are modulated, are present in natural transition. Studies of simplified situations are often performed as an attempt to understand natural transition. Nevertheless, simplified scenarios of transition can not agree with natural transition (Gaster, 1978).

Studies of natural transition have concentrated mainly in boundary layer flow. In this type of flow, the three classical scenarios of transition, indicated above, can occur simultaneously (Medeiros, 2006). In this case, it has a behavior much more complex than the simplified situation, in which each classical scenario is isolately studied. In a controlled experimental study, Medeiros (2006) performed evolution of isolated three-dimensional wavepackets inside of a boundary layer in a flat plate. Three-dimensional wavepackets are three-dimensional TS waves with modulation on spanwise and longitudinal directions of the flow. In those experimental studies, the wavepackets were originated by a source point in a flat plate. In fact, source point generates disturbances that mimics the practical situation and had been indicated by literature as a good technique (Lele, 1992). In that study, Medeiros (2006) observed the presence of each classical scenario of transition in different stages of the nonlinear regime. Firstly, a modified oblique transition was observed. This first nonlinear stage was a seed to the nonlinear second stage, which was dominated by K-type transition. In a more advanced nonlinear stage, the H-type transition dominated the nonlinear regime.

Studies of natural transition in boundary layer flow present some difficulties for analysis of results. These difficulties are associated with variation of the Reynolds number during the evolution of wavepackets inside of the boundary layer (Medeiros and Gaster, 1999a,b; Medeiros, 2004). So, similar studies in plane Poiseuille flows also are important. In fact, the plane Poiseuille flows satisfy the parallelism condition. Consequently, studies of the transition phenomenon in plane Poiseuille flows should be treated for constant Reynolds number. This is advantageous because the Reynolds number can be used as a control parameter.

For the current paper, the nonlinear regime of isolated spanwise modulated wavetrain in a plane Poiseuille flow, was studied. Spanwise modulated wavetrains are a more simplified situation than three-dimensional wavepackets, because the longitudinal modulation is not assumed. This simpler model might provide an important step towards the understand of natural transition in plane Poiseuille flows. The present studies were of numerical and theoretical nature. The numerical simulations were performed using a numerical scheme with mixed high-order of accuracy. In fact, for the flow normal direction, mixed compact finite differences at 5th to 6th order of accuracy were employed. For flow longitudinal and spanwise directions, a pseudo-spectral method was used. The temporal integration was performed using a Runge-Kutta method of 4th order of accuracy except to calculations of mean flow distortions, where a blended method using Runge-Kutta at 4th order and Crank-Nicolson method was carried out. The theoretical analysis was performed based in linear, weakly nonlinear and secondary instability theories.

The current spanwise modulated wavetrain satisfied only the longitudinal wavenumber $\alpha = 1$ and a wide range of spanwise wavenumbers. It is intended as a wave system more generic than those that lead directly to classical transition scenarios. The investigation of linear and nonlinear regimes of spanwise modulation wavetrains in plane Poiseuille flows, with infinitesimal initial amplitude, is unknown by the authors of this paper. On the other hand, evolution of this wave system in boundary layer flow was studied, for example, by Gilyov et al. (1983); Kachanov (1984a); Seifert (1990); Seifert and Wygnanski (1991) and Wiegand (1996). Those studies paid attention to the linear regime of the process. Numerical simulation of the nonlinear regime of spanwise modulated wavetrains in a boundary layer flow was performed by Stemmer (2001). In that study, the breakdown of the flow was attributed to oblique transition. Medeiros (2004) also studied the nonlinear regime of spanwise modulated wavetrains in a boundary layer flow. In that study, Medeiros (2004) observed a modified oblique transition, which was a seed for the growth of the K-type instability.

Several studies under the nonlinear regime of classical scenarios of transition in plane Poiseuille flows have been performed, but to subcritical Reynolds number or Reynolds number smaller than 5772. For example, experimental studies of secondary instabilities were performed by Nishioka et al. (1975). Theoretical studies were performed by Orzag and Patera (1983) and Herbert (1988). Numerical studies were performed, for example, by Sandham and Kleiser (1992). Those studies involved a Reynolds number set to 5000. Experimental studies of the oblique transition also were performed, but at $Re = 2000$, by Elofsson and Alfredsson (1998). However, those studies assumed initial amplitude around 5% to 10% of the mean flow amplitude, where the flow yet is nonlinear. Consequently, those studies did not describe the linear process of the wave system and, because of this, large initial amplitude was not used in the current work. On the other hand, wavetrains with Reynolds number values cited above and an initial amplitude smaller than 1% of the mean flow can not result the nonlinear regime. In fact, for such subcritical Reynolds numbers, wavetrains decay due to flow stability. Thus, for the present study, the chosen wavetrains satisfied supercritical Reynolds number ($Re = 8000$). It allowed the use of and infinitesimal initial amplitude. Thus, an analysis of both linear and weakly nonlinear regimes of the flow was performed.

The results in the current work confirm dominance of K-type transition during the initial nonlinear regime of the phenomenon. This result is in agreement with results from Medeiros (2004). Moreover, it was possible to identify dominance of K-type transition in a large range of parameters. It was also confirmed the contribution from the linear regime for the transition process.

The current paper was presented as follow. In the section 2 governing equations and boundary conditions for the physical problem in question, are shown. The section 3 presents the numerical scheme used for the numerical proceeding. The choose of initial conditions and parameters is explained in the section 4. The section 5 presents results of these studies. The final remarks were presented in the section 6.

2. GOVERNING EQUATIONS AND BOUNDARY CONDITIONS

The governing equations describe an incompressible and three-dimensional flow between two plates. In this paper, the governing equations were written in a vorticity-velocity formulation, where the Navier/Stokes equations are used for transport of vorticity $\vec{\omega}$ in the interior of the domain, as follow:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (1)$$

where the components of $\vec{\omega}$ are:

$$\omega_x = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega_y = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

From the definition of vorticity, Eq. (2), and using the fact that both velocity and vorticity vector fields are solenoidal, namely,

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{\omega} = 0, \quad (3)$$

one obtains the Poisson equation for the velocity field as follow

$$\nabla^2 \vec{u} = -\nabla \times \vec{\omega}. \quad (4)$$

The above equations were made dimensionless using the following reference parameters: U_{max} , which is the maximum value of velocity in the channel, and H , which is half the channel height. These variables produce the following dimensionless parameters:

$$x = \frac{x^*}{H}, \quad y = \frac{y^*}{H}, \quad z = \frac{z^*}{H}, \quad u = \frac{u^*}{U_{max}}, \quad v = \frac{v^*}{U_{max}}, \quad w = \frac{w^*}{U_{max}}, \quad (5)$$

$$\omega_x = \omega_x^* \frac{H}{U_{max}}, \quad \omega_y = \omega_y^* \frac{H}{U_{max}}, \quad \omega_z = \omega_z^* \frac{H}{U_{max}}, \quad t = t^* \frac{U_{max}}{H}, \quad (6)$$

where the terms with an asterisk are dimensional. The Reynolds number (Re) is $\frac{U_{max}H}{\nu}$, where ν denotes the kinematic viscosity.

The total flow is composed by a small three-dimensional disturbances and the plane Poiseuille flow. So, it can be decomposed into two components as follow:

$$u = \bar{U} + u'; \quad v = v'; \quad w = w' \quad (7)$$

$$\omega_x = \omega'_x; \quad \omega_y = \omega'_y; \quad \omega_z = \bar{\Omega}_z + \omega'_z, \quad (8)$$

where $\bar{U}(y) = 2y - y^2$ is the plane Poiseuille flow and $\bar{\Omega}_z(y) = 2 - 2y$ is the spanwise vorticity. The variable u' , v' and w' are the velocity disturbance components and ω'_x , ω'_y and ω'_z the vorticity disturbance components. Substituting these expressions into Eqs. (1) and (4) and canceling the terms that satisfy the plane Poiseuille flow calculations, one obtains the vorticity transport equations only for the disturbances as follow:

$$\frac{\partial \omega'_x}{\partial t} = -\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega'_x \quad (9)$$

$$\frac{\partial \omega'_y}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega'_y \quad (10)$$

$$\frac{\partial \omega'_z}{\partial t} = -\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega'_z; \quad (11)$$

where

$$a = v' \omega'_x - (\bar{U} + u') \omega'_y, \quad (12)$$

$$b = (\bar{U} + u') \omega'_z + u' \bar{\Omega}_z - w' \omega'_x, \quad (13)$$

$$c = -v' (\bar{\Omega}_z + \omega'_z) + w' \omega'_y \quad (14)$$

are the nonlinear quadratic terms.

The equations for the velocity disturbance calculations are:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega'_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y}; \quad (15)$$

$$\nabla^2 v' = \frac{\partial \omega'_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega'_z}{\partial x}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = \frac{\partial \omega'_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 v'}{\partial y \partial z}. \quad (17)$$

Eqs. (15) to (17) were resulted from algebraic manipulations of Eqs. (2) to (4).

Note that, contrary to the primitive formulation, the current formulation doesn't depend of the pressure term calculations. Moreover, the continuity equation is assumed implicitly into Eqs. (9) to (17). On the other hand, there are no boundary conditions for vorticity at the wall. Therefore, it should be calculated from the velocity field assuring consistency and conservation of mass. More differences of the current formulation compared with the primitive formulation can be found in Gatski (1991); Meitz and Fasel (2000).

2.1 Boundary Conditions

A periodic boundary condition was adopted in both streamwise and spanwise directions (x and z -directions). For the wall normal direction (y -direction), non-slip and impermeability ($u = v = w = 0$ at the walls) conditions were imposed. The flow geometry is presented in Fig. 1.

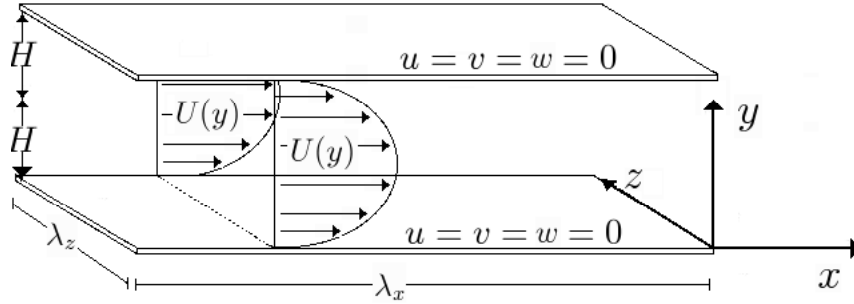


Figure 1. Schematic diagram of the physical system.

3. NUMERICAL METHODS

For x and z -directions, a spectral method was used. In this method, a generic quantity s can be decomposed into Fourier modes (α_l, β_k) as following

$$s(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{l=0}^{N_x} S_{l,k}(y, t) e^{-i(\alpha_l x + \beta_k z)} \quad (18)$$

where s represents the variables $u', v', w', \omega'_x, \omega'_y, \omega'_z, a, b$ and c in the physical space. $S_{l,k}$ represents the discrete Fourier components of the function s . Furthermore, $\alpha_l = \frac{2\pi l}{\lambda_x}$; $-N_x \leq l \leq N_x$ and $\beta_k = \frac{2\pi k}{\lambda_z}$; $-N_z \leq k \leq N_z$ are respectively spanwise and streamwise wavenumbers; λ_x and λ_z are wavelengths relative to smaller wavenumbers in x and z -directions respectively.

Substituting the expression (18) into Eqs. (9) to (11) and (15) to (17) one obtains

$$\frac{\partial \Omega_x^{l,k}}{\partial t} = -\frac{\partial A^{l,k}}{\partial y} - \beta_k B^{l,k} + \frac{1}{Re} \nabla^{l,k^2} \Omega_x^{l,k}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Omega_y^{l,k}}{\partial t} = \alpha_l A^{l,k} - \beta^k C^{i,k} + \frac{1}{Re} \nabla^{l,k^2} \Omega_y^{l,k}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Omega_z^{l,k}}{\partial t} = \beta_k B^{l,k} + \frac{\partial C^{l,k}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^{l,k^2} \Omega_z^{l,k}, \quad (21)$$

$$(\alpha_l^2 + \beta_k^2) U^{l,k} = \beta_k \Omega_y^{l,k} + \alpha_l \frac{\partial V^{l,k}}{\partial y}; \quad (22)$$

$$\nabla^{l,k^2} V^{l,k} = \beta_k \Omega_x^{l,k} + \alpha_l \Omega_z^{l,k}, \quad (23)$$

$$(\alpha_l^2 + \beta_k^2) W^{l,k} = -\alpha_l \Omega_y^{l,k} + \beta_k \frac{\partial V^{l,k}}{\partial y}, \quad (24)$$

$$\Omega_x^{l,k} = \frac{1}{\alpha_l^2 + \beta_k^2} (-\beta_k \nabla^{l,k^2} V^{l,k} + \alpha_l \frac{\partial \Omega_y^{l,k}}{\partial y}), \quad (25)$$

$$\Omega_y^{l,k} = 0, \quad (26)$$

$$\Omega_z^{l,k} = \frac{1}{\alpha_l} (\nabla^{l,k^2} V^{l,k} - \beta_k \Omega_x^{l,k}). \quad (27)$$

Eqs. (19) to (21) were used for vorticity calculations in the interior of the domain. Eqs. (22) to (24) were used for velocity calculations. Eqs. (25) to (27) were used for vorticity calculations at the wall. Note that, if $(l = k = 0)$ then Eqs. (25) and (27) should not be calculated. In this case, $\Omega_x^{0,0}$ and $\Omega_z^{0,0}$ were calculated using the Eq. (2). In fact, $\Omega_x^{0,0} = 0$ by streamwise vorticity definition and

$$\Omega_z^{0,0} = \frac{\partial U^{0,0}}{\partial y} \quad (28)$$

by spanwise vorticity definition. In Eq. (28) the calculation of $\Omega_z^{0,0}$ depends on $\frac{\partial U^{0,0}}{\partial y}$. However, $U^{0,0}$ can not be calculated using the Eq. (22). The chosen alternative for $\Omega_z^{0,0}$ and $U^{0,0}$ calculations was to use an iterative method.

All Fourier modes (α_l, β_k) were calculated independently using Eqs. (19) to (27). Moreover, nonlinear terms of Eqs. (19) to (21) was performed according to the following procedure: First, nonlinear components were transformed from Fourier space to physical space by a fast Fourier transform and nonlinear calculations were performed. After, the results were transformed from the Physical space back to the Fourier space. This procedure is namely pseudo-spectral method.

For the y -direction, a mixed high-order compact finite difference scheme was used. Points in the interior of the domain were discretized by a scheme using centered compact finite difference of 6th order of accuracy. Points at the walls and nearby were discretized by using an asymmetric schemes of 5th and 6th order of accuracy, except to the wall vorticity calculation. In this case, compact finite difference of 6th order of accuracy was used. Full details of the chosen finite differences method can be found in Souza (2003) and Silva (2008).

3.1 Temporal Integration

For all Fourier modes, except to the zeroth mode (α_0, β_0) , the temporal integration was done with an explicit 4th order Runge-Kutta method of four stages (Ferziger and Peric, 1997). The zeroth mode was advanced in time using the blended temporal integration with Runge-Kutta and Crank-Nicolson methods. This procedure was necessary to assure numerical stability of the calculations because of iterative methods, cited in the subsection (3), and the non-existence of a physical boundary condition for the vorticity at the wall. The blended method with Runge-Kutta and Crank-Nicolson methods involves an equation that is described as follow: First, write the right hand side of the vorticity transport equation as

$$f' = rhs + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \Omega_z^{0,0}}{\partial y^2}. \quad (29)$$

Use the Crank-Nicolson method for the $\frac{\partial^2 \Omega_z^{0,0}}{\partial y^2}$ term and advance in time the Eq. (29) assuming:

$$f' = \frac{1}{\Delta t} (\Omega_z|^{it} - \Omega_z|^{it+1}), \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_z^{0,0}}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Omega_z^{0,0}}{\partial y^2} |^{it} + \frac{\partial^2 \Omega_z^{0,0}}{\partial y^2} |^{it+1} \right), \quad (31)$$

$$rhs = rhs^{s-1} |^{it+1}, \quad (32)$$

where it is the time level, $s - 1 = 0, i, ii, iii$ are the stages of the Runge-Kutta method. When $s - 1 = 0$ the previous time level is assumed.

The $\frac{\partial^2 \Omega_z^{0,0}}{\partial y^2}$ was calculated using a spatial discretization in y with compact finite differences as follow

$$\mathcal{A} \frac{\partial^2 \Omega_z^{0,0}}{\partial y^2} |_{j=1,N} = \mathcal{R} f |_{j=1,N}, \quad (33)$$

where N is the number of points on the grid, \mathcal{A} and \mathcal{R} are the coefficients matrices of the linear system that should be solved.

From Eqs. (29) to (33) one leads:

$$\left(\frac{\Delta t}{2Re} \mathcal{R} - \mathcal{A} \right) \Omega_z^{0,0s} |_{j=1,N}^{it+1} = \left(\frac{\Delta t}{2Re} \mathcal{R} + \mathcal{A} \right) \Omega_z^{0,0s} |_{j=1,N}^{it} - \Delta t \mathcal{A} rhs^{s-1} |^{it+1}. \quad (34)$$

This equation is calculated jointly with iterative method involving $U^{0,0}$ and $\Omega_z^{0,0}$ calculation cited in the subsection (3). To reach convergence, the $\Omega_z^{0,0}$ values at the wall should be underrelaxed as follow:

$$\Omega_z |_{j=1}^{0,0} = \frac{l-1}{lmax-1} \Omega_z^{0,0} |_{j=1}^{it+1} + \frac{lmax-l}{lmax-1} \Omega_z^{0,0} |_{j=1}^{it}, \quad (35)$$

$$\Omega_z |_{j=2,N-1}^{0,0} = \frac{1}{2} (\Omega_z^{0,0} |_{j=2,N-1}^{it+1} + \Omega_z^{0,0} |_{j=2,N-1}^{it}), \quad (36)$$

$$\Omega_z |_{j=N}^{0,0} = \frac{l-1}{lmax-1} \Omega_z^{0,0} |_{j=N}^{it+1} + \frac{lmax-l}{lmax-1} \Omega_z^{0,0} |_{j=N}^{it}, \quad (37)$$

where $lmax$ is the iteration number to reach the convergence. In this current work, $lmax = 2$ was sufficient for this subjective.

The temporal integration was performed according to the following procedure:

1. Calculate the nonlinear terms $A_{l,k}$, $B_{l,k}$ and $C_{l,k}$ in the physical domain and transform them back to the Fourier space;
2. Calculate the right-hand side of the vorticity transport equation, Eqs. (19) to (21), excluding the wall-normal diffusion term only for (α_0, β_0) , ie $\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \Omega_z^{0,0}}{\partial y^2}$;
3. Calculate a first estimate for wall-normal diffusion $\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \Omega_z^{0,0}}{\partial y^2}$ using compact finite differences;
4. Integrate the vorticity transport equation, Eqs. (19) to (21), in one stage using the Runge-Kutta method of 4th–order of accuracy. Here, all the Fourier modes should be calculated including the zeroth mode. The value of zeroth mode is used to start the iteration described in the item 8 below;
5. Calculate the velocity component $V^{l,k}$ using the eq. (23);
6. Calculate the velocity components $U^{l,k}$ and $W^{l,k}$ using Eqs. (22) and (24) respectively;
7. Calculate the wall vorticity using Eqs. (25) to (28).
8. Calculate the wall-normal diffusion term $\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \Omega_z^{0,0}}{\partial y^2}$ implicitly with a Crank-Nicolson method. Since there is no boundary condition for the vorticity at the wall, the following iteration procedure is necessary:
 - a) Calculate $U^{0,0}$ for all points of the domain and $\Omega_z^{0,0}$ only for the points at the walls;
 - b) Underrelaxate the $\Omega_z^{0,0}$ values at the wall;
 - c) Using the wall vorticity values as boundary conditions, calculate the new vorticity values inside, using the Eq. (34).
9. Turn of to item 1 and repeat the above calculation until the time simulation expected.

As the Fourier modes were calculated independently, it is not necessary the item 6 to be performed before the item 7. It was done in this sequence only for a better organization of the numerical code routines. The present numerical code was verified using the Method of Manufactured Solution and the results can be found in (Silva et al., 2008; Silva, 2008).

4. INITIAL CONDITION AND CHOOSE OF THE PARAMETERS

The initial condition was generated using the current numerical code. Initially, a disturbance was introduced into computational domain through a technique of type blowing or suction, as used in experimental procedures (Laurien and Kleiser, 1989; Marxen, 1998). In this technique, the wall normal velocity v has the following expression

$$v(x, y_0, z, t) = A^m \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right) \Re(e^{i(\alpha x + \beta^m z + \phi^m)}), \quad (38)$$

where A^m , α , β^m and ϕ^m indicate amplitude, longitudinal and spanwise wavenumbers and phase for the disturbance m . The \Re symbol indicates the real part of the complex number $e^{i(\alpha x + \beta^m z + \phi^m)}$. Here, y_0 assumes the values 0 and $2H$.

To avoid possible nonlinear mechanisms during the generation of the initial condition, only the linear terms of the governing equations were simulated. The disturbance (38) converged to Tollmien-Schlichting waves (TS waves), which are solutions of the Navier-Stokes equations in a linearized version (Boiko et al., 2002). The linearized Navier-Stokes equations are fundamentals for the Linear Stability Theory (LST), and result the Orr-Sommerfeld equation, which was numerically solved, for example, by (Mendonça, 2003). Some comparisons between the propagation of TS waves, using the current initial condition, and the LST were performed and found in Silva (2008).

The current initial condition concerned at 170 TS oblique waves, which satisfy the same longitudinal wavenumber $\alpha = 1$ and cover the discrete range of spanwise wavenumber $-2.55 \leq \beta \leq 2.55$. The number of TS waves that cover the discrete range of spanwise wavenumber $-0.63 \leq \beta \leq 0.63$ had the initial amplitude set to $A = 2 \times 10^{-5}$. The other TS waves of this waves system had the initial amplitude set to $A = 1 \times 10^{-8}$. Here, the smaller spanwise wavenumber was $\beta_0 = 0.03$ for a Reynolds number at $Re = 8000$. More details about the current initial condition and the motivation for choosing it can be found in Silva (2008).

The current wavetrain was indicated by a circle in a linear growth rate map or the linear stability diagram, shown in Fig. 4. Here, the set of waves with null growth rate was denominated by neutral curve. The Fig. 4 displays three neutral curves. The neutral curve for $\beta = 0$ represents the two-dimensional TS waves. The other neutral curves correspond to the three-dimensional cases where the spanwise wavenumber are $\beta = 0.2$ and $\beta = 0.4$, respectively. Note that the circle is located on the unstable region delimited by these neutral curves. Furthermore, the circle is more distant of the neutral curve for $\beta = 0$ than to the other indicated neutral curves. In other words, for the current spanwise modulated wavetrain, the two-dimensional TS wave has linear growth rate larger than the three-dimensional TS waves. Consequently,

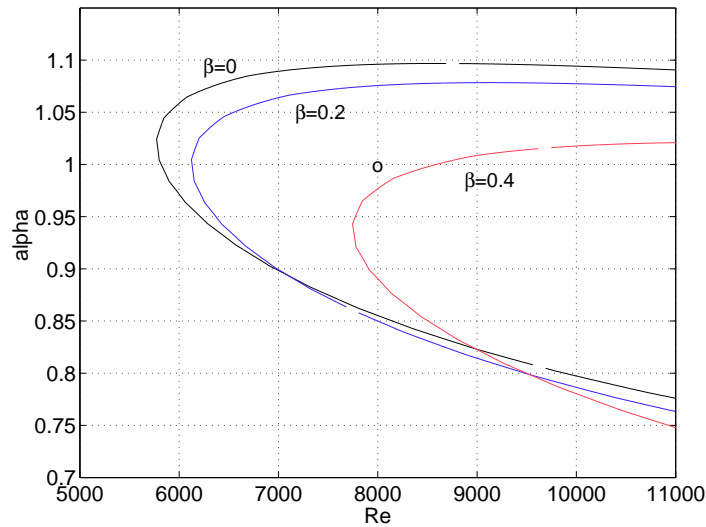


Figure 2. Linear Stability Diagram of the two and three-dimensional TS waves. The circle indicates the chosen spanwise modulation wavetrain studied in the present work.

if the initial condition is spectrum-flat, the two-dimensional TS wave at the final of the linear regime reaches the largest amplitude. This fact motivated the study of the present wavetrain because it may promote secondary instability for the process.

The Fig. 3 shows the linear behavior of the temporal evolution of the Fourier modes for u -velocity at fixed wall normal point $y = 0.15H$. The Fourier modes shown in Fig. 3 are indicated in this text by modes $(\alpha, N_z\beta)$, where N_z

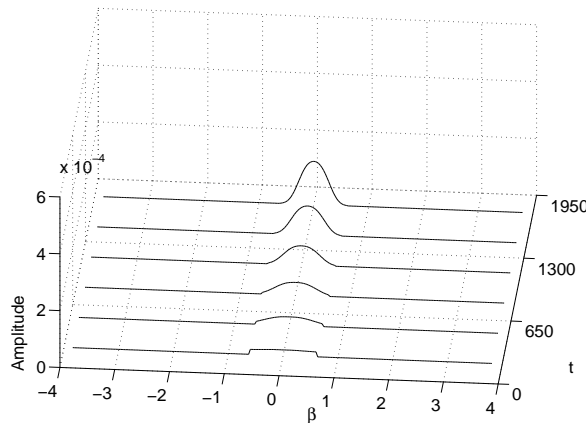


Figure 3. Spectral evolution of Fourier modes during the initial of the linear stage.

is the number of Fourier modes used in the spanwise direction discretization. The Fig. 3 clearly displays that, during the temporal evolution, the amplitude of the two-dimensional Fourier mode is larger than the three-dimensional Fourier modes.

The Fig. 4 shows the amplitude growth rate in time for the positive Fourier modes $(\alpha, N_z\beta)$. Note that, until temporal evolution around $t = 2000$, the spectral range $(\alpha, 0)$ to $(\alpha, 0.63)$ described a behavior in according to the Linear Theory Stability. Furthermore, these Fourier modes had dominant amplitude when compared with the spectral range $(\alpha, 1.84)$ to $(\alpha, 2.55)$. This result is according to results displayed in Fig. 3. After nondimensional time $t = 2000$, the Fig. 4 indicates an explosive amplitude growth rate in time for the modes $(\alpha, 1.84)$ to $(\alpha, 2.55)$. This behavior do not is described by linear theory and can be consequence at the nonlinear activities of the process. Therefore, attention was paid for it. Furthermore, other Fourier modes were generated (not shown in Fig. 4). In fact, the Fourier modes $(0, N_z\beta)$ representing mean flow distortions and $(2\alpha, N_z\beta)$ representing the harmonics were present in the results. These Fourier modes also were studied in the current work. Details of this study was presented in section (5).

A mesh refinement test was performed in the present work and the results can be found in Silva (2008). The optimal mesh and parameters for both Fourier and physical spaces were presented in the Tab. 4.

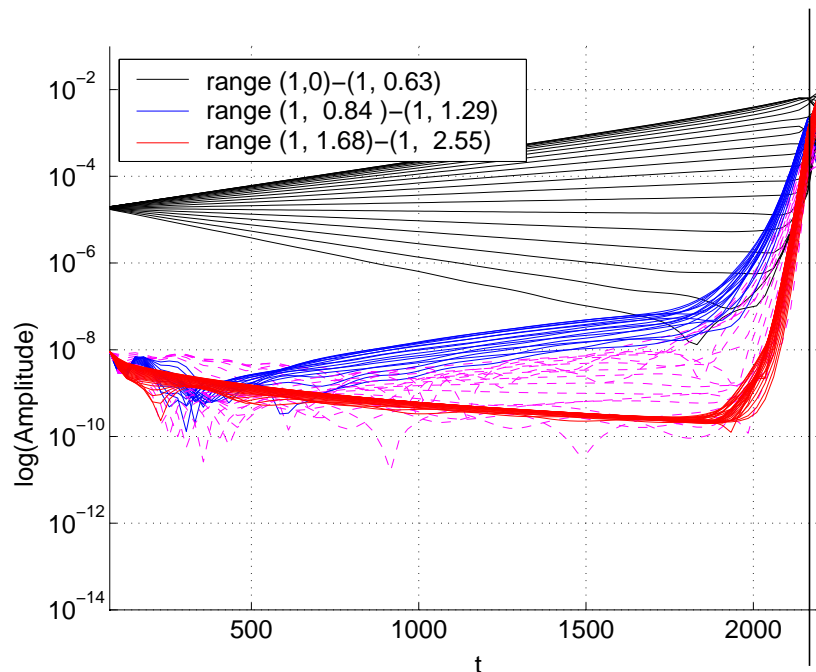


Figure 4. Temporal evolution for the Fourier modes $(\alpha, N_z\beta)$. Here, only the positive Fourier modes were shown.

Table 1. Parameters for the present study^a.

Parameters for the Fourier Space		Parameters for the physical Space	
N_x	5	n_x	16
α	1	λ_x	$2\pi/\alpha = 6.2832$
N	201	N	201
N_z	85	n_z	128
β_0	0.03	λ_z	$2\pi/\beta_0 = 209.44$

^aThe parameters N_x, L_x, N_z and L_z are related only to one side of the spectral domain. The x and z -directions resolution for the Fourier space was smaller than the physical space only to avoid alias error (Press et al., 1992).

5. NUMERICAL RESULTS

The Fig. 5 displays the temporal evolution of the u -velocity of the spanwise modulated wavetrain. The results were obtained from the wall normal position $y = 0.15H$. Initially, the spanwise modulated wavetrain is strongly concentrated on the centerline of the domain ($z = 0$), because of the high modulation in the z -direction. During the linear regime of the flow, they span a larger portion of the flow field. This fact occur because the weakly three-dimensional TS waves (the smaller β), together with the two-dimensional TS wave, have the larger linear growth rate than the strongly three-dimensional TS waves (TS waves with large values of β). In fact, the flow field tends to a two-dimensional flow if the nonlinear effects are negligible. However, around $t = 2000$, it is possible to identify some flow distortions on the centerline of the domain. These distortions may not be described by the Linear Stability Theory and, therefore, the weakly nonlinear mechanisms may be present in the flow, in according to Fig. 4.

The Fig. 6 shows the temporal evolution of the Fourier modes in a spectral domain. The Fig. 6 (top left) displays the temporal evolution at the modes initially excited, $(\alpha, N_z\beta)$. The Fig. 6 (top right and lower) displays $(0, N_z\beta)$ and $(2\alpha, N_z\beta)$ modes that can be resulted of nonlinear interactions of the process. Note that, until the nondimensional time $t = 2000$, only the $(\alpha, N_z\beta)$ modes had significant amplitude. Furthermore, these Fourier modes had a behavior described by Linear Theory Stability (not shown in the current paper). After the time $t \sim 2000$, the Fig. 6 (top right) shows other spectral ranges increasing in amplitude. These spectral ranges were centered on the modes $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, -1)$ and $(1, -2)$. This behavior also appeared to the $(0, N_z\beta)$ modes (Fig. 6 top left). In both cases, the spectral ranges had an explosive growth in a short time interval. Such behavior also agrees with the Fig. 4, which presents a threshold of the Fourier modes and an explosive growth of the spectral range $(1, 0.84)$ to $(1, 2.55)$ at $t \sim 2000$. These results are typical of a flow instability.

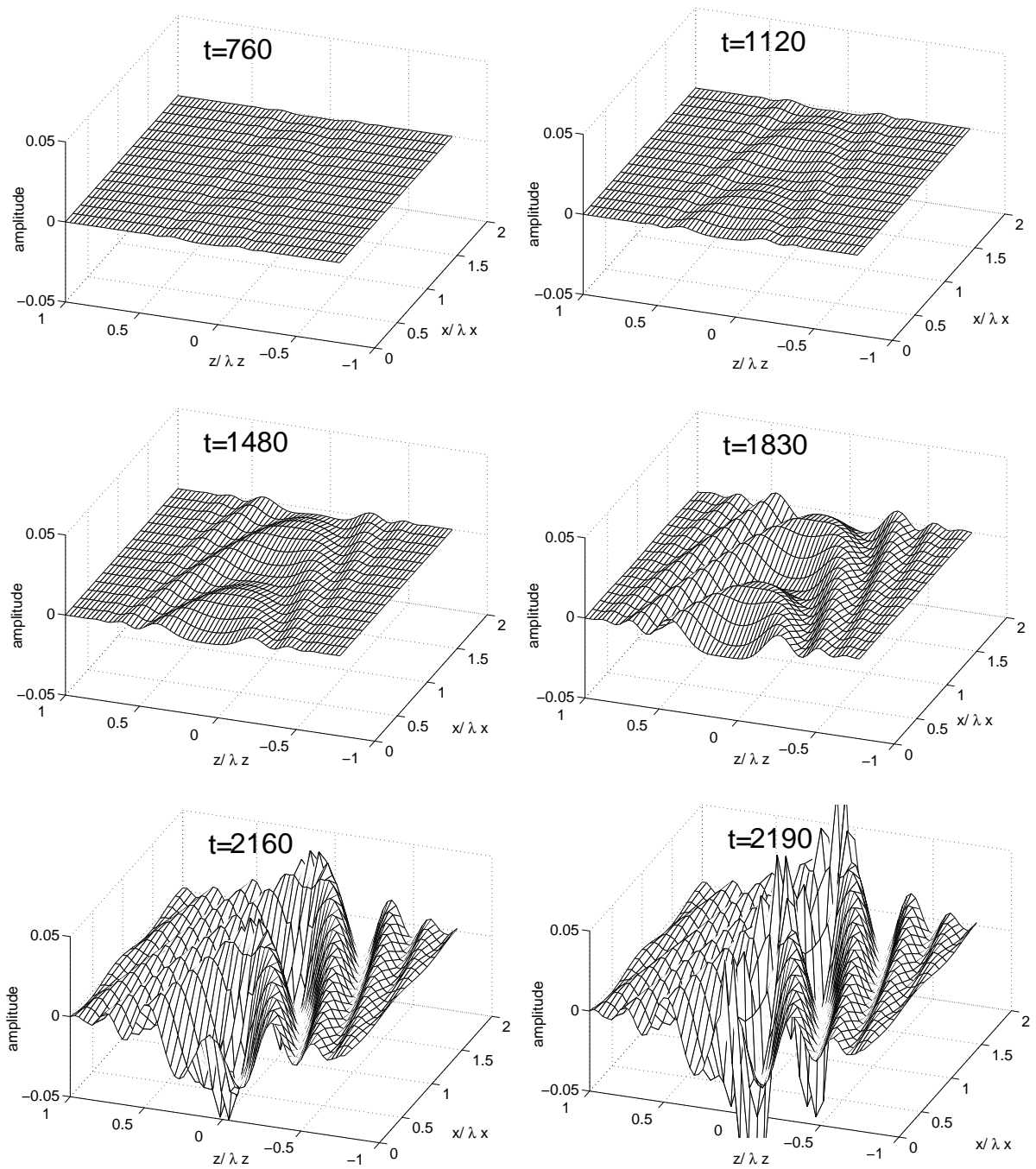


Figure 5. Time evolution of the u -velocity of a spanwise modulated wavetrain in the plane Poiseuille flow at $y = 0.15H$. Results obtained from the physical space.

Experimental results on the evolution at spanwise modulated wavetrains in a flow boundary layer, performed by Medeiros (2004), pointed to similar behavior reached in the current work. In that study, mean flow distortions, recorded in the physical space, were concentrated close to the centerline and it was associated, in a first nonlinear regime, to oblique transition (Elofsson and Alfredsson, 1998). So, in a more advanced nonlinear regime, K-type instability was identified by Medeiros (2004). Numerical study on nonlinear evolution of spanwise modulated wavetrains was performed by Stemmer (2001). In that study, Stemmer (2001) attributed the nonlinear effects to oblique transition and concluded that it dominated the flow breakdown. However, it is possible to verify, from figures in that thesis, an explosive growth for the Fourier modes, which is typical of the K-type instability. Due to results reached by Medeiros (2004) and Stemmer (2001), it seemed important to check, as in boundary layer, if K-type instability appears on plane Poiseuille flows.

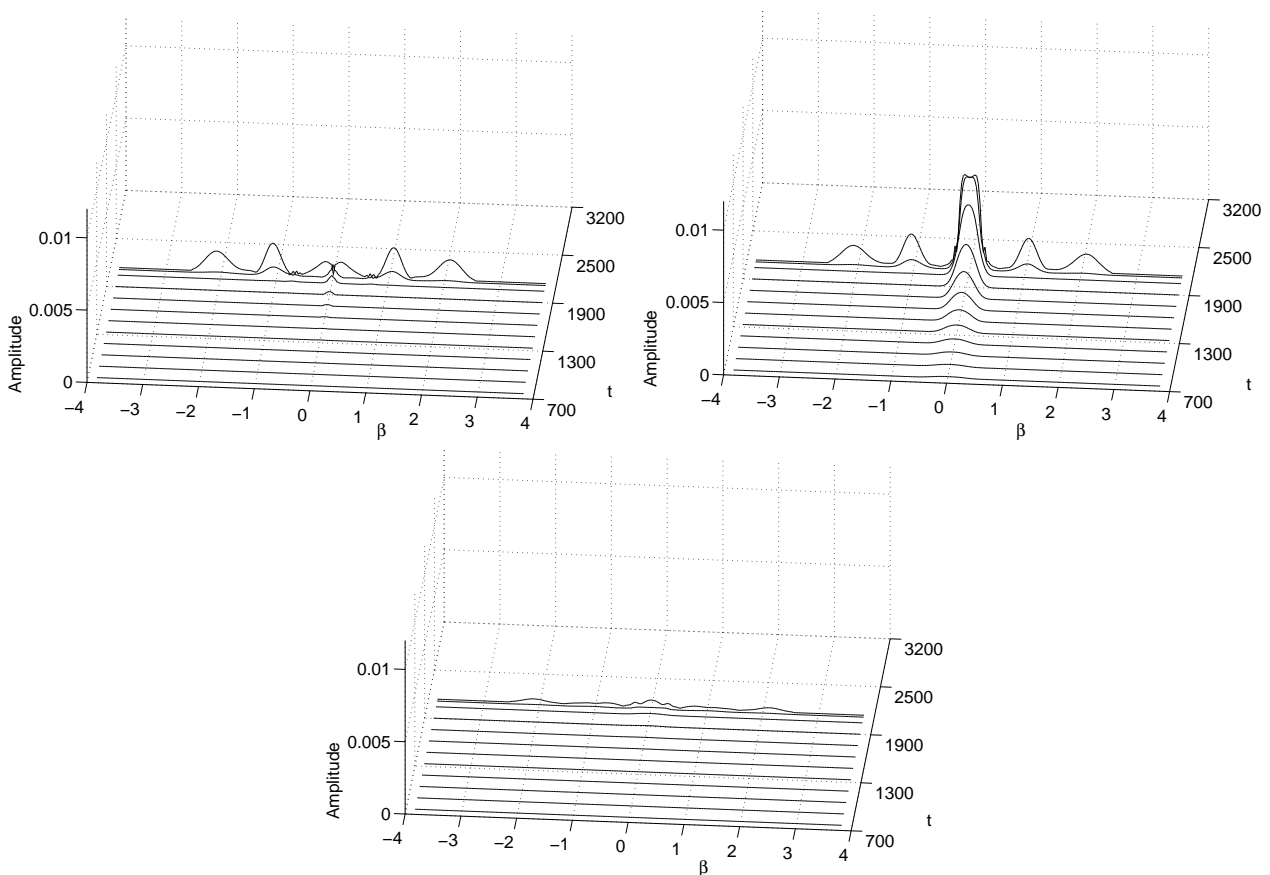


Figure 6. Time evolution of the Fourier modes for the u -velocity. *Top left:* $(0, N_z\beta)$ modes. *Top right:* $(\alpha, N_z\beta)$ modes. *Lower:* $(2\alpha, N_z\beta)$ modes.

5.1 An investigation of the Secondary Instability

In the current section, it was proposed a secondary instability model. It concerned to perform numerical simulation for K-type instability, similar to presented studies in literature. The results for the current model was assumed as a reference to analysis of results for the investigated spanwise modulated wavetrain. Therefore, same parameters used by the wavetrain simulations were used in the K-type instability simulations. In a first attempt, it was simulated the two-dimensional TS wave with initial amplitude set to 2×10^{-4} and the three-dimensional TS waves with small amplitude set to 1×10^{-8} . The Fig. 7 displays the amplitude growth rate in time for the positive Fourier modes $(\alpha, N_z\beta)$. One of the objectives of this simulation was to identify the resonant three-dimensional TS wave with largest growth rate according to the secondary instability. Results were compared with the results displayed in Fig. 4. The comparisons between Figs. 4 and 7 showed that the Fourier modes in both figures presented different nondimensional times for the threshold, ie, instantaneous nondimensional time that began the secondary instability. The threshold of Fourier modes was identified to $t \sim 2000$ in the wavetrain simulation, Fig. 4, and $t \sim 1750$ in the K-type instability simulation, Fig. 7. Furthermore, the spectral ranges of studied cases also were different between them. However, the results were in qualitative agreement because, in both cases, it was possible to verify an explosive growth for the Fourier modes. Furthermore, similar to the spanwise modulated wavetrain, Fig. 4, the results for the K-type instability also identified harmonic modes due to nonlinear interactions between every involved Fourier modes. As consequence, they turned difficult the analysis of the flow instability.

In an attempt to eliminate such harmonic modes, a number of simulations were carried out in which each simulation used a numerical resolution for only three Fourier modes in the z -direction. These simulations involved only a pair of oblique three-dimensional TS waves and a two-dimensional TS wave with identical longitudinal wavenumber. The chosen oblique three-dimensional TS waves covered a spectral range in the z -direction from -4.8 to 4.8 with interval at 0.2 . Each pair of oblique Fourier modes was simulated separately, but the results were collected together in one picture, Fig. 8. Although every three-dimensional Fourier modes were excited with same initial amplitude, it presented different amplitudes and instants of threshold. This fact was attributed by a locking phase that occurred during the initial evolution for the resonant Fourier modes. Other researchers also identified such mechanism (Orszag, 1980; Zang and Kirst, 1989).

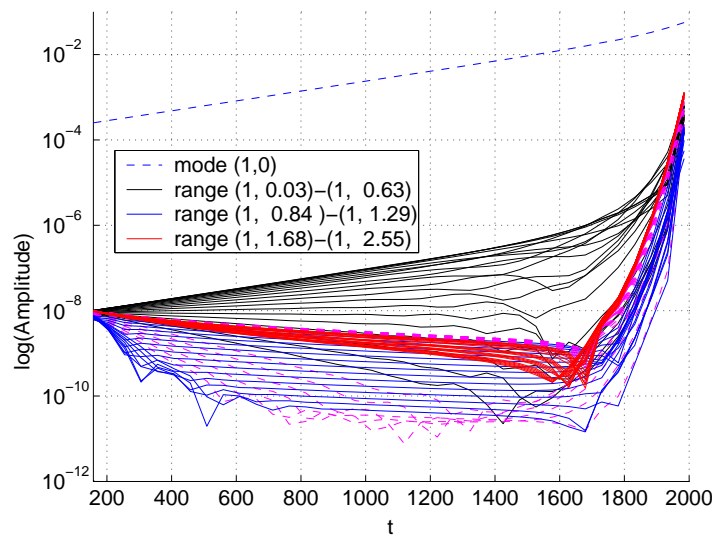


Figure 7. Temporal evolution for the Fourier modes $(\alpha, N_z\beta)$ for the simplified case. As displayed in Fig. 4, only the positive Fourier modes were shown.

However, such as in current results, this fact did not affect the growth rate of each resonant mode.

To identify the most unstable Fourier mode, the N factor of growth rate for each TS wave was calculated. The N factor is defined as $N = \log \frac{A}{A_0}$, where A and A_0 indicate final and initial amplitudes for Fourier modes on the time interval $800 \leq t \leq 950$. This interval in time was indicated by transversal lines in Fig. 8. The fig. 9 shows the N factor for the Fourier modes plotted in Fig. 8. The continuous line was an interpolation of the obtained values. The results indicate an extense range of Fourier modes that were amplified by K-type instability. The Fourier mode with the largest N factor was $\beta = 1.5$.

$\beta = 1.5$ does not agree with the Fourier mode with the largest growth rate presented in Fig. 6, which was $\beta = 1.2$. On the other hand, the results were satisfactory because it gave some explanations for these differences at values. In fact, it is known in the literature about the classical studies of the secondary instability that, if the two-dimensional TS wave reaches an amplitude value at 1% of the mean flow, it promotes a selective growth for three-dimensional TS waves through of fundamental resonance (Klebanoff et al., 1962). This fact was according to the results shown in Figs. 7 and 8, but it does not agree with the result from the spanwise modulated wavetrain simulation, shown by Fig. 4. In fact, the two-dimensional TS wave on the wavetrain did not reach amplitude value at 1% of the mean flow at any simulation time, but was possible to identify a threshold for the Fourier modes. This suggested that, since the wavetrain is three-dimensional, there was an effective two-dimensional TS wave, composed by a number of three-dimensional and the two-dimensional TS waves, which drove the resonance. The effective amplitude composed by these TS waves may be associated with the maximum value of the spanwise modulated wavetrain in the physical space. Here, the maximum amplitude was located on the centerline of the wavetrain, as indicated in Fig. 5.

Fig. 10 compares the growth rate of resonant Fourier modes for the spanwise modulated wavetrain, shown in Fig. 7, with the growth rate displayed in Fig. 8. The maximum amplitude of the wavetrain in the physical space also was presented in Fig. 10. Paying attention for the wavetrain results, it is possible to verify a threshold of resonant modes when the maximum amplitude of the wavetrain reached 1% of the mean flow. This behavior confirms the existence of an effective amplitude that promoted the K-type instability. Furthermore, the growth rate of the effective two-dimensional TS wave for the wavetrain case is smaller than the growth rate of the two-dimensional TS wave for the classical K-type instability. As consequence, different amplitudes are reached by them. This may be associated with the fact that, the most unstable three-dimensional waves for the wavetrain simulation does not be the most unstable three-dimensional waves for the classical K-type instability, as shown in Figs. 6 and 9. An explanation for such behavior was obtained by Herbert (1988) under the studies in boundary layer flow. In that work, Herbert (1988) suggested that the secondary instability promotes the growth of a oblique wave range in which the more unstable wave is related to the amplitude of the two-dimensional TS wave that is driving the resonance. Therefore, if the two-dimensional TS wave reaches large amplitudes, the more unstable resonant wave has large β values. Herbert (1988) performed that study in a boundary layer flow only for the H-type instability. De-Paula (2007) confirmed those results for the K-type instability also in a boundary layer flow. Such result may be general and also occur in plane Poiseuille flows.

In general, the results shown some similarities between the nonlinear regimes for the spanwise modulated wavetrain and the classical K-type instability. Firstly, there was a threshold for the Fourier modes in both cases. The growth rate of the resonant waves also were similar, Fig. 10. The most unstable three-dimensional TS wave satisfied similar

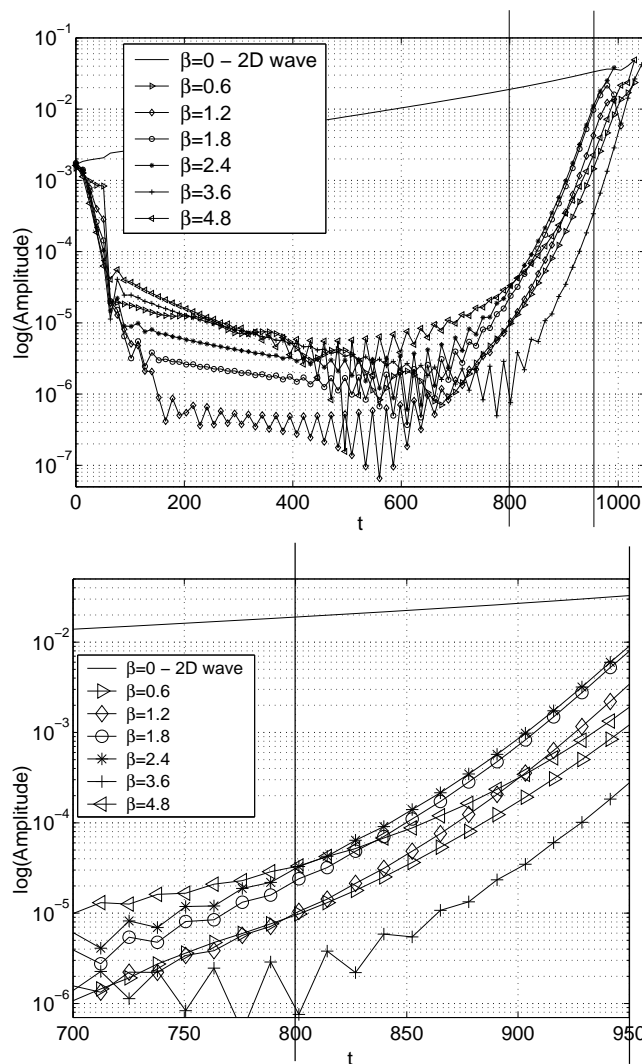


Figure 8. Numerical results of the growth rate of each positive Fourier mode. Here, each pair of Fourier modes was simulated separately but the results were collected together in this figure. *Top*: Full temporal evolution of each simulated Fourier mode. *Lower*: Amplification view on nondimensional time in which the behavior of the Fourier modes was studied.

β values in both cases and the difference between them was justified. Finally, the amplitude of the two-dimensional TS wave for the proposed model and the effective two-dimensional wave in the wavetrain was 1% of the mean flow when secondary instability was triggered. These similarities gave indicatives that the nonlinear regime of the spanwise modulated wavetrain was dominated by K-type instability.

To assure that such results did not depend of the chosen initial amplitude of the wavetrain, numerical simulations using other levels of initial amplitude for the wavetrain also was performed. In fact, initial amplitude at $A = 1 \times 10^{-5}$, $A = 5 \times 10^{-6}$ and $A = 2.5 \times 10^{-6}$ respectively for the spectral range $(\alpha, 0)$ to $(\alpha, 0.63)$ and at $A = 1 \times 10^{-8}$ for the other Fourier modes, were employed. Analysis of the results (not shown in this paper) indicated other nonlinear mechanisms, but the K-type instability dominated the nonlinear regime. It is important to note that the initial amplitudes cited above were smaller than the initial amplitude for the results shown in Fig. 4. This was done because, according to the argument explained in the section 4 and displayed in Figs. 3 and 4, an initial amplitude larger than $A = 2 \times 10^{-5}$ also can promote K-type instability. Full details of effects of the initial amplitude can be found in Silva (2008).

6. FINAL REMARKS

The paper reports an investigation of the nonlinear regime of spanwise modulated wavetrain in a plane Poiseuille flow. It was composed of one two-dimensional TS wave and several three-dimensional TS waves covering the discrete range of spanwise wavenumber $-2.55 \leq \beta \leq 2.55$. Each TS waves in the wavetrain had the longitudinal wavenumber $\alpha = 1$ and satisfied a Reynolds number at $Re = 8000$. The proposal of the current work was to study implications of

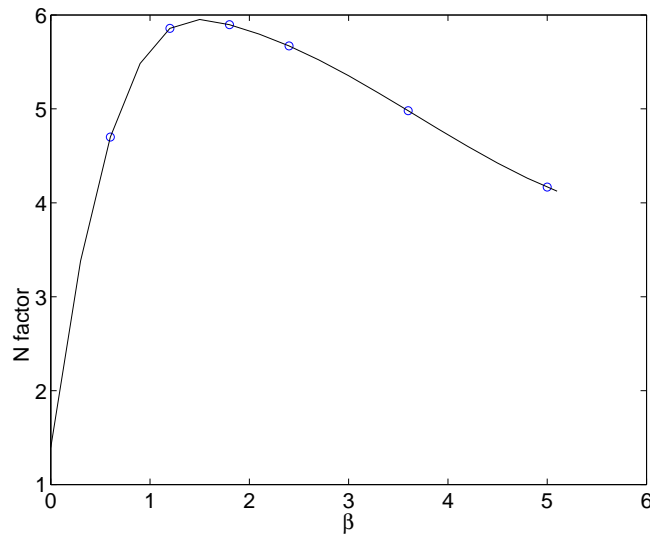


Figure 9. N factor values for the three-dimensional TS waves presented in Fig. 8.

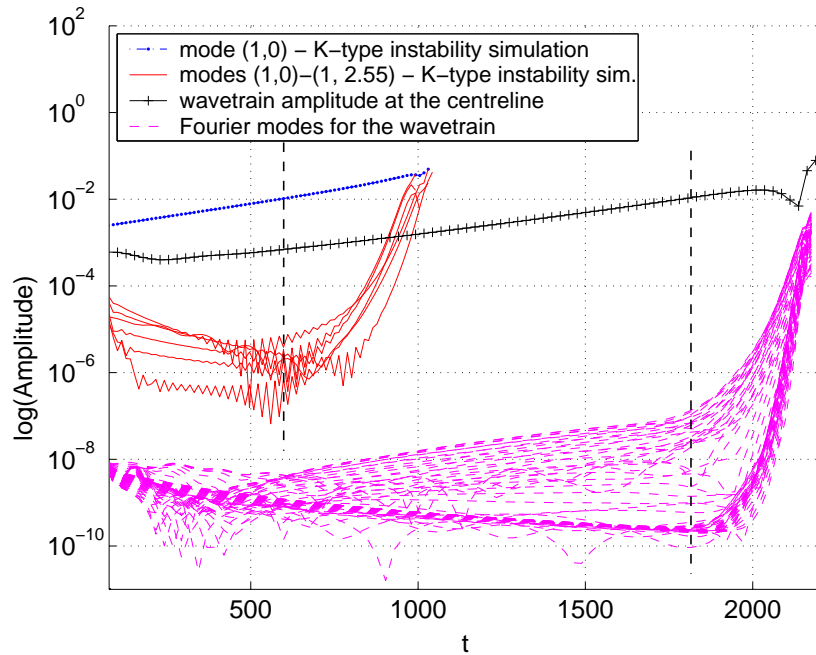


Figure 10. Growth rate of positive Fourier modes. Comparison between the simulations of the K-type instability and spanwise modulated wavetrain. The maximum amplitude evolution of the wavetrain also was presented.

three-dimensionality to natural transition. Therefore, the wavetrain was of very small amplitude, such as the scale levels present in natural transition. The studied wavetrain locates far from the first branch of the linear stability diagram and in a region that corresponds to similar region of the diagram for boundary layer, in which several studies on the transition phenomenon was carried out (Stemmer, 2001; Boiko et al., 2002; Medeiros, 2004). The current study involved numerical simulation and theory. Numerical simulation was performed using a code of computational fluid dynamics that uses a solution scheme at mixed high order of accuracy. The theoretical study was based into linear and weakly nonlinear instability theory.

Results suggested that, particularly for the current wavetrain, the initial nonlinear regime is dominated by K-type instability. In fact, during the evolution of the wavetrain, it was verified a threshold of the Fourier modes and selective growth for three-dimensional TS wave ranges. An effective two-dimensional wave, with sufficient amplitude, may be initialized the secondary instability. The amplitude of this effective two-dimensional TS wave may be associated with the maximum amplitude of the wavetrain that, in this present case, was located on the centerline.

The linear regime gave strong contributions to the nonlinear regime. In fact, calculations of linear growth rate of

the TS waves composing the wavetrain were performed. The results were in agreement with Linear Stability Theory and it suggested that the two-dimensional TS waves satisfied the largest linear growth rate. The two-dimensional TS wave together with some weakly three-dimensional TS waves may be behaved as an effective two-dimensional waves and contributed to the secondary instability mentioned above.

The current results suggested an explanation for the onset of the K-type instability into boundary layer flow, as observed by Medeiros (2004). In that flow, the wavetrain evolved from a position near the first branch and crossed the second branch. Medeiros (2004) observed onset of K-type instability on the flow for positions near the second branch of the diagram. The current results suggested that, as for the Plane Poiseuille flow, regions near the second branch of the diagram for the boundary layer flow also are exposed to the secondary instability due to influence of the linear stability on the nonlinear evolution. Indeed, near the second branch of the linear stability diagram, the two-dimensional TS wave is the most unstable linearly and, although in different parameters, the linear behavior of wavetrain in boundary layer is similar to plane Poiseuille flows.

For the analysis of prediction of transition carried out in the aeronautical industry, the methods involving the linear theory are the most reliable. Moreover, depending on the flow condition, an extension of the linear approach is to verify what the classical scenarios of transition is the most relevant on the process. This verification is usually performed by numerical simulations at each one of the three classical scenarios of transition. Indeed, the most unstable classical scenario present in the flow is considered the dominant of the process. However, the results obtained in the current work suggest that it can not be a good practice, specially when the nonlinear regime is dominated by secondary stability. In fact, the nonlinear regime of the present wavetrain involves an effective two-dimensional wave which directed the secondary stability. This effective two-dimensional wave can not be detected by classical scenario simulations, otherwise, the original two-dimensional TS wave is considered. Nevertheless, the current results showed that the effective and original two-dimensional waves have different growth rates among them. This fact may predict, for example, an erroneous position for the breakdown of the flow.

Numerical simulation of wavetrains in the plane Poiseuille flow for different regions of the stability diagram, but maintaining the fixed Reynolds number at $Re = 8000$, also was performed (Silva, 2008). In that study, one objective was to investigate the effect of the linear regime on the nonlinear evolution of the wavetrain. It was possible to identify the onset of the K-type instability in wide range of parameters, except to the cases near the first branch of the linear diagram. In fact, in that region of the diagram, some strongly three-dimensional TS waves have larger linear growth rates than the two-dimensional and weakly three-dimensional TS waves, contrary to the presented case in the current paper. In that study, the linear regime favored the onset of a scenario of transition that resemble the oblique transition. It is important to note that the influence of the linear regime on the nonlinear evolution is strongly important to the phenomenon of transition, but it is not yet published in the literature. It is expected that the current results will help further work in natural transition.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge the professor João Batista Aparecido for assistance with the write of the paper. The financial support of the CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) and FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) are gratefully acknowledged.

References

- A. Boiko, G. Grek, A. V. Dovgal, and V. Koslov. *The Origin of Turbulence in Near-Wall Flows*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2002.
- I. B. De-Paula. *Influência de uma Rugosidade Tri-dimensional Isolada na Transição de Uma Camada Limite Sem Gradiente de Pressão*. PhD thesis, Universidade de São Paulo - USP, São Carlos-São Paulo-Brasil, 2007.
- P. Elofsson and P. H. Alfredsson. An experimental study of oblique transition in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech*, 358:177–202, 1998.
- J. H. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, Germany, 1997.
- M. Gaster. The physical process causing breakdown to turbulence. In *Naval Hydrodynamics Symposium*, Washington, 1978.
- T. Gatski. Review of incompressible fluid flow computations using the vorticity-velocity formulation. *Applied Numerical Mathematics*, 7:227–239, 1991.
- V. Gilyov, Y. Kachanov, and V. Koslov. Development of a spatial wavepacket in a boundary layer. *Izvestiya Sibirskovo Otdeleniya Akademii Nauk SSSR, Seria Tekhnicheskikh Nauk (in Russian)*, 13(3):27–37, 1983.

- J. Green. Greener by design. *The Aeronautical Journal*, (1056):57–114, 2002.
- T. Herbert. Secondary instability of boundary-layers. *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, 20:487–526, 1988.
- R. Joslin. Aircraft laminar flow control. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 30:1–29, 1998.
- Y. Kachanov. *Development os Spatial Wave Packets in Boundary Layer*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984a. In: V. V Kozlov, ed., *Laminar-Turbulent Transition*, IUTAM-Symposium, Novosibirsk, USSR.
- Y. Kachanov. Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26:411–482, 1994.
- P. S. Klebanoff, K. D. Tidstrom, and L. M. Sargent. The three-dimensional nature of boundary-layer instability. *J. Fluid Mech*, 12:1–34, 1962.
- E. Laurien and L. Kleiser. Numerical simulation of boundary-layer transition control. *J. Fluid Mech.*, 199:403–440, 1989.
- S. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103:16–42, 1992.
- O. Marxen. *Temporal Direct Numerical Simulation of a Flat Plate Boundary Layer; Diplomarbeit*. PhD thesis, University of Arizona, Arizona-USA, 1998.
- M. Medeiros. The nonlinear evolution of a wavetrain emanating from a point source in a boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 508:287–317, 2004.
- M. Medeiros. *Os Primeiros Estágios Não-Lineares da Transição Natural em Camada Limite (livre-docência)*. Universidade de São Paulo-Escola de Engenharia de São Carlos-Departamento de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automobilística, São Carlos, S.P., Brasil, 2006.
- M. Medeiros and M. Gaster. The influence of phase on the nonlinear evolution of wavepackets in boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 397:259–283, 1999a.
- M. Medeiros and M. Gaster. The production of subharmonic waves in the nonlinear evolution of wavepackets in boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 399:301–318, 1999b.
- H. Meitz and H. Fasel. A compact-difference scheme for the Navier-Stokes equations in vorticity-velocity formulation. *Journal of Computational Physics*, 157:371–403, 2000.
- M. T. Mendonça. *Estabilidade de Escoamentos de Laminares: Teoria Linear, capítulo 5*. ABCM-EPTT, Uberlândia-MG, 2003.
- M. Nishioka, S. Lida, and Y. Ichikawa. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 72(4):1882–1882731–751, 1975.
- L. Orszag, S.A.and Kells. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane couette flow. *J. Fluid Mech.*, 96:159–205, 1980.
- S. Orzag and A. Patera. Secondary instability of wall-bounded shear flows. *J. Fluid Mech.*, 128:347–385, 1983.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and V. P. Flannery. *Numerical Recipies in Fortran 77*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- N. D. Sandham and L. Kleiser. The late stages of transition to turbulence in channel flow. *J. Fluid Mech*, 245:319–348, 1992.
- A. Seifert. *On the interaction of low amplitude disturbances emanating from discrete points in a Blasius boundary layer*. PhD thesis, Tel. Aviv. University, Israel, 1990.
- A. Seifert and I. Wygnanski. On the interaction of wave trains emanating from two point sources in a blasius boundary layer. In *In: Boundary Layer Transition and Control*, Peterhouse College, Cambridge, UK, 1991.
- H. Silva. *Regime Não Linear de Trens de Ondas Modulados na Direção Transversal em um Escoamento de Poiseuille Plano*. PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, S.P., Brazil, 2008.
- H. G. Silva, L. Souza, and M. Medeiros. On the verification of a mixed high-order accurate DNS code by the method of manufactured solutions - ACCEPTED FOR PUBLICATION. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, pages –, 2008.

- L. Souza. *Instabilidade Centrífuga e transição laminar-turbulento de escoamentos sobre superfícies côncavas*. PhD thesis, Instituto tecnológico aeronáutico, São José dos Campos, S.P., Brazil, 2003.
- C. Stemmer. *Direct Numerical Simulation of Harmonic Point Source Disturbances in an Airflow Boundary Layer with Adverse Pressure Gradient*. PhD thesis, Stuttgart University, Stuttgart, Germany, 2001.
- Wiegand. *Experimentelle Untersuchungen zum laminar-turbulenten Transitions-prozess eines Wellenzuges in einer Plattengrenzschicht*. PhD thesis, Universität Stuttgart, Stuttgart, Germany, 1996.
- T. Zang and S. Kirst. Numerical experiments on stability and transition in plane channel flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1:41–64, 1989.

Responsibility notice

The author(s) is (are) the only responsible for the printed material included in this paper.

Numerical and Theoretical Investigation of the Asymmetry Effects in a Wake Profile

Elmer. M. Gennaro, elmer@sc.usp.br

Marcello A. F. de Medeiros, marcello@sc.usp.br

Universidade de São Paulo

Abstract. *In an aircraft, high-lift devices operating at high angle of attack promote the formation of relatively large wakes. Such wakes influence the aerodynamic performance. The slat wake, for example, affects the transition point of the wing main element and is the most important source of noise in the airframe. Owing to the generation of lift these wakes are asymmetric. Bodies immersed in a shear flow also produce asymmetric wakes, with important applications to the oil industry. There are aspects of such flows that need investigation. For instance, there is no consensus about whether or not the asymmetry can suppress vortex shedding or how it affect the shedding frequency. Indeed there is an apparent discrepancy between results found in literature. The aim of the present work was to contribute to this issue. The idea was to investigate the influence of asymmetry on a two-dimensional wake profile under temporal development. The asymmetric wake profile was obtained by a combination between a gaussian wake profile and a hyperbolic tangent mixing layer profile. The bidimensional (2D) linear stability theory analyses of the profile was performed. The work also included 2D Direct Numerical Simulation (DNS) using the characteristic formulation of the compressible Navier-Stokes equations in non-conservative form. The results showed that the asymmetry reduces the shedding frequency for the range of $0 \leq K \leq 0,25$ investigated. For small values of the asymmetric parameter the results showed that the asymmetry promotes stability. Moreover, the results from literature were reconciled by taking into account the variation of the drag coefficient with the asymmetry. Therefore, a possible explanation for the controversy was offered.*

Keywords: *Asymmetric wake, vortex shedding, hydrodynamic instability, Orr-Sommerfeld equation, DNS*

1. Introduction

Uniform flow past a cylinder has been accepted as a problem for a better understanding the vortex dynamics in the wake behind a bluff body. A considerable number of studies on the uniform flow have been performed so far (Williamson, 1996). In most bluff body flows of engineering interest, however, the free stream is not uniform, but sheared. Nevertheless, shear flow over a circular cylinder has been investigated less extensively than uniform flow.

In an aircraft, high-lift devices operating at high angle of attack promote the formation of relatively large wakes. Such wakes influence the aerodynamic performance. The slat wake, for example, affects the transition point of the wing main element and is the most important source of noise in the airframe (Gennaro, 2008). Owing to the generation of lift these wakes are asymmetric. This asymmetry in the wake indicates shear flow. Bodies immersed in a shear flow also produce asymmetric wakes, with important applications to the oil industry. Therefore, more systematic study on the asymmetric wake flow is required for further improvised understanding of engineering bluff body flows.

Quite a few studies have been performed on uniform shear flow over a cylinder, along with the adopted flow conditions in Table 1. They have mainly investigated the effects of Reynolds number and shear rate on the vortex-shedding frequency, the magnitude of the mean drag, and so on in the uniform shear flow. Despite many achievements to date, some controversial issues have to be further resolved for improved understanding of the bluff body flows (Kang, 2006). A few discrepancies among studies on the uniform shear flow remain unresolved yet (Lei et al., 2000 and Sumner and Akosile, 2003). It is implied that more investigations on the uniform shear flow are necessary, which motivates the present study. Representative controversial issues among previous studies are enumerated in the Table 1.

"Kiya et al., 1980, Kwon et al. 1992, Tamura et al. 1980 and Yoshino and Hayashi, 1984" claimed that the Strouhal number $St = fD/U_c$ increased with increasing shear rate. On the other hand, "Vitola, 2006, Kang, 2006, Sumner, and Akosile, 2003 and Lei et al. 2000" claimed that the Strouhal number decreased with increasing shear rate. In this present study, this shear rate represents the asymmetry of the wake.

The aim of the present work is to contribute to this issue by investigating the influence of asymmetry on a two-dimensional wake profile under temporal development.

There are important aspects of such flows that need investigation. For instance, there is no consensus about whether or not the asymmetry can suppress vortex shedding. Indeed there is an apparent discrepancy between results found in literature.

The aim of the present work is to contribute to this issue by investigating the influence of asymmetry on a two-dimensional wake profile under temporal development.

Table 1. Flow conditions used in previous studies.

References	Re	K	St
"Vitola, 2006"	1800	0 – 0,2	decrease
"Kang, 2006"	50 – 160	0 – 0,2	decrease
"Sumner and Akosile, 2003"	$4.0 \times 10^4 - 9.0 \times 10^4$	0,02 – 0,07	decrease
"Lei, Cheng, and Kavanagh, 2000"	80 – 1000	0 – 0,25	decrease
"Kwon, Sung, and Hyun, 1992"	600 – 1600	0 – 0,25	increase
"Tamura, Kiya and Arie, 1980"	40 and 80	0 – 0,4	increase
"Kiya, Tamura and Arie, 1980"	35 – 1500	0 – 0,25	increase
"Yoshino and Hayashi, 1984"	80	0 – 0,4	increase

2. Statement of Problem

The purpose of this paper is to investigate the effects of asymmetry on the instability of wake flows using as a model simple velocity profile

$$U(y) = 1 - \exp(-y^2 \ln 2) + K \tanh(2y) \quad (1)$$

where K is the asymmetric parameter that controls the amount of asymmetry. The "Figure 1" shows the variation of the profile with K . The local half-widths of the wake b have been used as scales. This reference length scale of a wake profile is the local half-width b , such that

$$U(b) = (U_{max} + U_{min})/2. \quad (2)$$

For the current asymmetric case, the length scale was the average b , between both sides of the profile. The reference velocity was the maximum velocity.

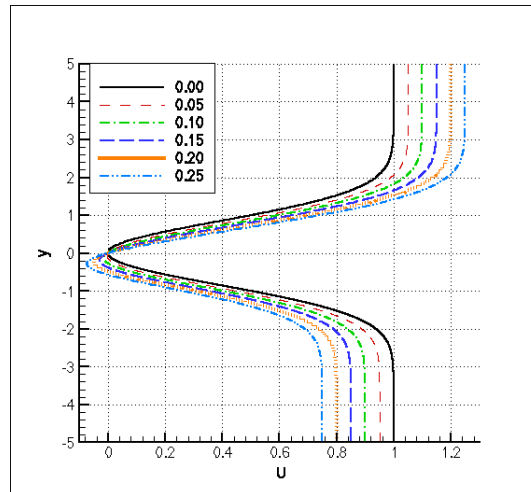


Figure 1. K variation on asymmetric wake profile.

The coordinate system is a Cartesian system defined such that the x and y are in the streamwise and spanwise directions, respectively.

As usual, the normal mode assumption. It is assumed that the physical perturbation velocity is given by

$$\tilde{u}(x, y) = \hat{u}(y) \exp[i(\alpha x - \omega t)], \quad (3)$$

with an analogous assumption for spanwise velocity and the perturbation pressure, where α and ω are wavenumber and frequency, respectively. Substitution of (3) into the Navier-Stokes equation and continuity, linearization and application of the parallel-flow assumption then leads to the Orr-Sommerfeld equation for the y -direction velocity component

$$\alpha(U - c)(\hat{v}'' - \alpha^2 \hat{v}) - U'' \alpha \hat{v} = \frac{-i}{Re} (\hat{v}'''' - 2\alpha^2 \hat{v}'' + \alpha^4 \hat{v}) \quad (4)$$

where $c = \omega/\alpha$ and the primes denote derivatives with respect to y .

The direct numerical simulation that was performed without cylinder was carried out for a Reynolds number $Re = 100$ and a K ranging from 0 to 0,25. The present work differs from previous studies of this problem by investigation the temporal amplification rate of disturbance introduced in the base flow. The idea was to verify the influence of asymmetry on the amplification rate of these disturbances, and not only check the formation of vortices. The modification of the amplification rates is a better indication of the influence of the asymmetry on the hydrodynamic instability of the flow.

3. Methodology

The eigenvalues of the problem defined by 4 were determined numerically by using a shooting method. The starting values for the numerical procedure were obtained from the asymptotic solutions of 4. A 4th order Runge-Kutta was the used to numerically integrate the Orr-Sommerfeld equation. Orthogonalization of the solutions used Gram-Schmidt process was performed whenever deemed necessary to preserve their linear independence.

The study also was carried out by solving the compressible two-dimensional Navier-Stokes equations in non-conservative form, written in a characteristic formulation. The code used 6th order compact finite difference scheme for the spatial derivatives and a 4th order Runge-Kutta scheme for the time integration. A filtering scheme was also employed to keep the simulation without aliasing problems [3]. In normal-to-the-flow y -direction a free-slip non-reflecting boundary conditions was used. For both the theoretical and numerical analysis the flow was considered periodic in streamwise x -direction.

4. Results

After verifying the numerical method, we conducted numerical simulations by varying the asymmetric parameter of $0 \leq K \leq 0,25$ with Reynolds number. The "Figures 2 and 2" show comparisons between theoretical and numerical results of the temporal amplification rate for Reynolds number $Re = 100$ and $Re = 1000$ with the asymmetric parameter.

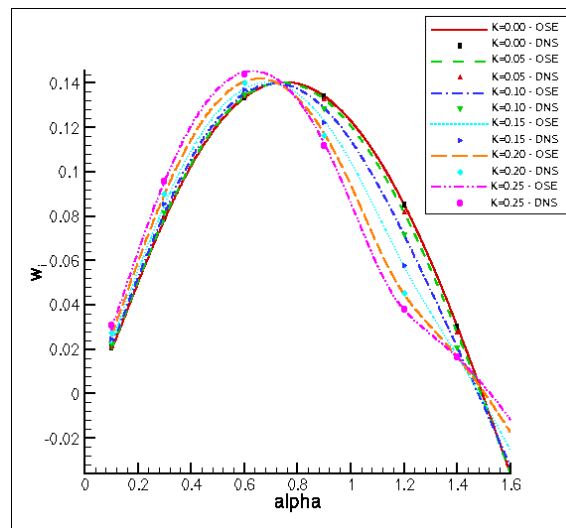


Figure 2. Temporal amplification rate by varying the asymmetric parameter at $Re = 100$.

The unstable band decreased to small asymmetric parameters, but for high values of asymmetry parameters the unstable band increased. The Reynolds number promotes the increased in the unstable band. The "Figures 2 and 3" show a stabilizing effect for small asymmetry parameters.

There is still a change of behavior in amplification rate. This occurs for α values near the amplification rate maximum. Thus, for wavenumbers smaller than the wavenumber that more amplifies the temporal amplification rate increased with the asymmetry of the wake, and for wavenumbers more than the wavenumber that more amplifies this trend reversing, namely, the temporal amplification rate decreased with the asymmetry parameter.

Other important aspect is the behavior showed in the "Figures 2 and 3" for high values of K . There is another point of maximum, it not investigated in this work.

The theoretical results were obtained at a computational cost lower than the direct numerical simulations. Owing the computational cost low, the theoretical results conducted at an identification the wave number that more amplifies with asymmetry parameter and Reynolds number. The results indicated for the symmetric case, the maximum amplification occurs for wave number $\alpha \approx 0,753$ at $Re = 100$ and $\alpha \approx 0,7865$ at $Re = 1000$. For the asymmetric case with $K = 0,20$ the maximum amplification occurs for $\alpha \approx 0,657$ at $Re = 100$ and $\alpha \approx 0,6659$ at $Re = 1000$.

According to "Figure 4", the wave number that has the maximum amplification decreased with increased asymmetric parameter and increasing with Reynolds number. Furthermore, this reduction presented in the "Figure 4" indicates a reversal for K values larger than the range investigated in this work.

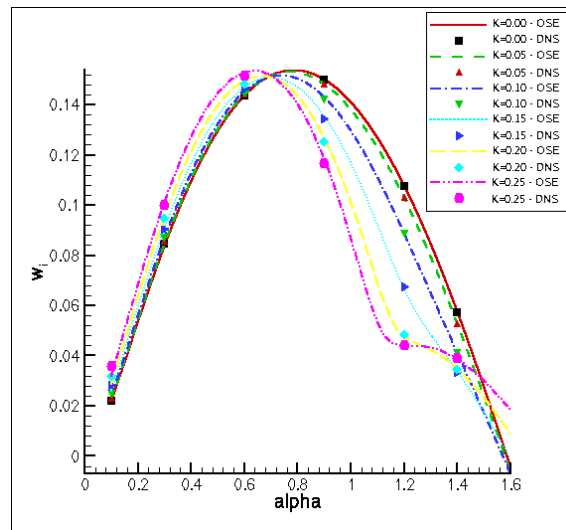


Figure 3. Temporal amplification rate by varying the asymmetric parameter at $Re = 1000$.

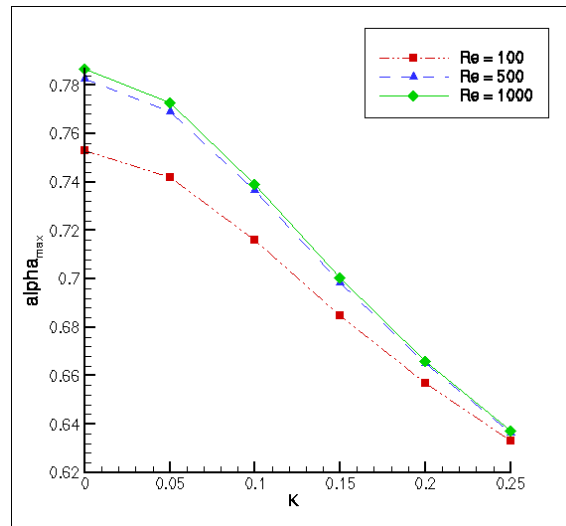


Figure 4. Wavenumber of maximum amplification versus the asymmetry parameter for $Re = 100, 500$ and 1000 .

With increasing asymmetric parameter occurs a reduction of ω_r that can be seen in “Figure 5”. Besides, it occurs a reduction of ω_r with Re to K high values, while to K small values occurs the opposite.

In the “Figure 6” can be seen the variation of the temporal amplification rate maximum with Re and K . Besides, the curves display a minimum point which varies with Reynolds number. Owing the reduction in the amplification rate for K values small, this results indicated that the flow becomes more stable, for K values small.

4.1 Controversy

The result showed a reduction of both the amplification rates and unstable range of wave numbers for K values small. Besides, the asymmetry parameter promotes a reduction of ω_r , which suggests a reduction of the Strouhal number. Therefore, before as clear controversy presented in Table 1 it is possible that the this divergence is not due to errors in the experiments and numerical simulations. Perhaps this controversy can be explained by a physical phenomenon and the results can be reconciled. This study presents a proposal in this direction.

The drag coefficient, C_D , is defined by

$$C_D = F_D / \frac{1}{2} \rho V^2 L, \tag{5}$$

where F_D is the drag force, V is the velocidade and L is the reference parameter, that in the case is the cylinder diameter.

There is clearly the proportionality between drag coefficient and dimension of the wake, since the wake of the cylinder corresponds the momentum deficit tah is the drag.

In the literature, it find little discrepancy between the results about the asymmetry parameter in the drag coefficient.

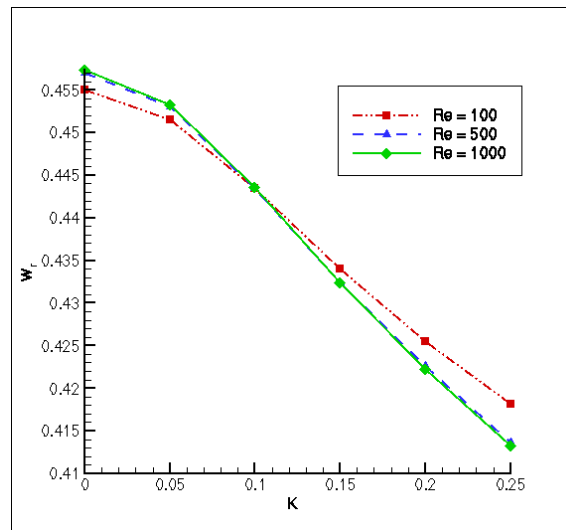


Figure 5. Frequency ω_r to their wave number to more unstable versus the asymmetry parameter for for $Re = 100, 500$ and 1000 .

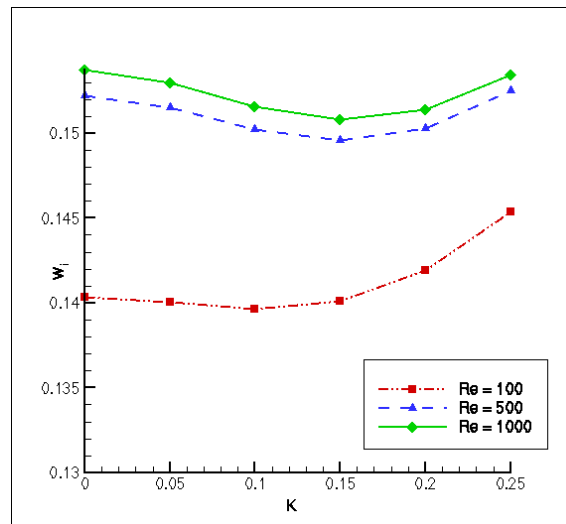


Figure 6. Temporal amplification rate ω_i to their wave number to more unstable versus the asymmetry parameter for for $Re = 100, 500$ and 1000 .

"Kang, 2006; Kwon et al., 1992; Lei et al., 2000 and Yoshino and Hayashi, 1984" claimed that the drag coefficient decreased with increasing of the asymmetry parameter. This reduction in the drag represents a reduction in the reference scale of the wake. Besides, this variation in the scale of the wake promotes a variation in the effective diameter, which implies in variation of the Strouhal number. In this paper, the wake scale is always constant. On the other hand, in previous studies not examine the wake itself.

The Figure "7" show results of previous studies, a discrepancy between the results. The idea is to correct the results presented in "Figure 7" by effective diameter obtained from of the reduction of the effective diameter arising of the drag coefficient reduction. The results this correction can be seen in "Figure 8".

As the Strouhal number is proportional to the frequency, by definition, consequently is also proportional to the ω_r , normalized to the results obtained by the theory of ω_r by ω_{r_0} , where the index "0" indicates the symmetric case. Besides, the Strouhal numbers corrected were normalized by St_0 . This comparison between results presented in this study and the previous studies can be seen in the "Figure 9".

The results showed in "Figure 9" were normalized by symmetric case and can be seen in "Figure 10" that showed the decreased of the Strouhal number with the increased of the asymmetry parameter, so it is a clear tendency. Therefore, removing the controversy showed in the study. Besides, the present results are in good agreement with those previous studies "Kang, 2006; Sumner et al., 2003; Lei et al., 2000 and Kwon et al., 1992".

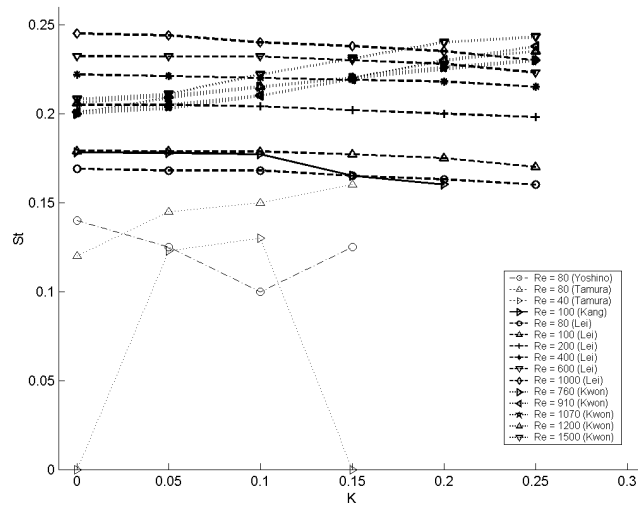


Figure 7. Strouhal number versus asymmetric parameter.

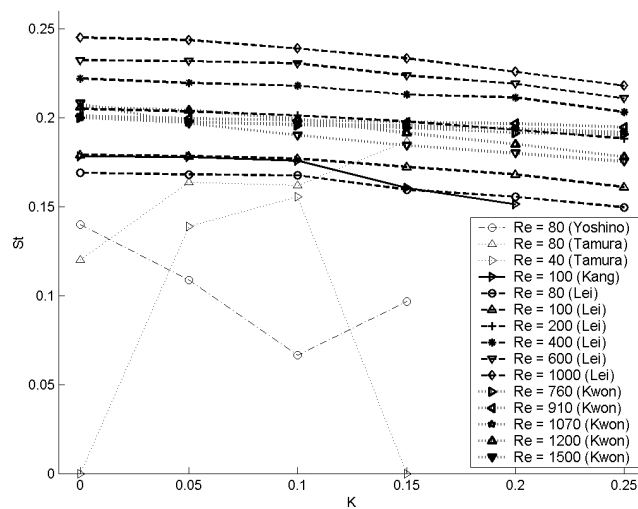


Figure 8. Strouhal number corrected versus asymmetric parameter.

5. Final remarks

In the present paper, results of numerical and theoretical calculations are described which were performed for an asymmetric wake profile. The Reynolds number was 100, 500 and 1000 and the asymmetry parameter K was in the range of $0 \sim 0, 25$.

The main results can be summarized as follows: As expected, a von Kàrman vortex street similar to that behind a cylinder was observed even though no cylinder was actually simulated. In fact, only a base flow of a wake profile was simulated. The results showed a reduction of both the amplification rates and unstable range of wave numbers for the asymmetry parameter small. Therefore, the asymmetric wake was shown to be less unstable. The results indicated that the Strouhal number decreases with the increase of the asymmetry parameter small.

The results also shed some light into the apparent discrepancy illustrated by Table 1 and “Figure 7”, in particular regarding the variation of the Strouhal number. The results in the table were to be corrected for the more appropriate reference scales, they could show a clear tendency for reduction of the Strouhal number for increasing asymmetry. This results may strongly suggest that the controversy can be given as resolved.

6. Acknowledgments

The support for this work by CNPq is gratefully acknowledged.

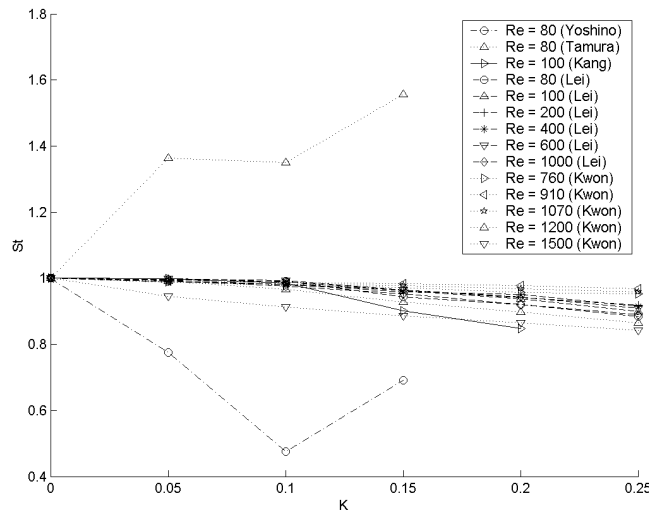


Figure 9. Strouhal number corrected and normalized by symmetric case versus asymmetric parameter.

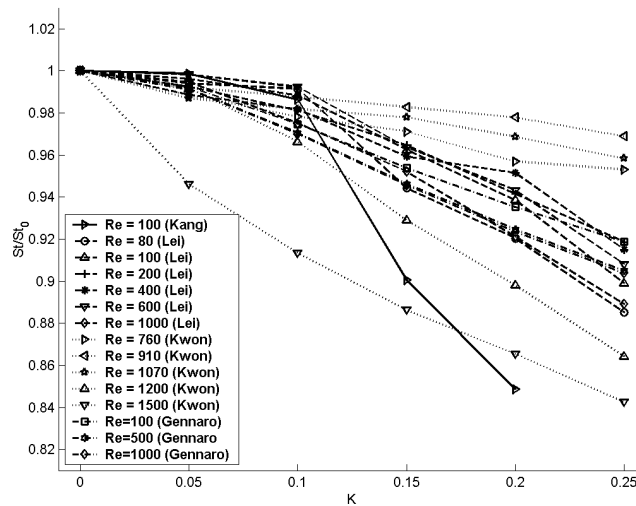


Figure 10. Strouhal number corrected and normalized by symmetric case versus asymmetric parameter in scale.

7. References

- Gennaro, E. M., 2008 "Análise da instabilidade hidrodinâmica de uma esteira assimétrica", dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo.
- Gennaro, E. M. and Medeiros, M. A. F., 2007, "Temporal development of an asymmetric wake", Proceedings of the Fifth Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations BBVIV5, pp. 113-116.
- Germanos, R. A. C. and Medeiros, M. A. F., 2005, "Development of a code for a direct numerical simulation of compressible shear flow instabilities", Proceedings of the 18th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, in CD-ROM, Brazil.
- Lei, C., Cheng, L. and Kavanagh, K., 2000, "A finite difference solution of the shear flow over a circular cylinder", Ocean Engineering, Vol. 27, pp. 271-290.
- S. Kang, 2006, "Uniform-shear flow over a circular cylinder at low Reynolds numbers", Journal of fluid and Structures, Vol. 22, pp. 541-555.
- Kiya, M., Tamura, H. and Arie, M., 1980, "Vortex shedding from a circular cylinder in moderate Reynolds number shear flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 141, pp. 721-735.
- Kwon, T. S., Sung, H. J. and Hyun, J. M., 1992, "Experimental investigation of uniform-shear flow past a circular cylinder", ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 114, pp. 457-460.
- J. Sesterhenn, 2001, "A Characteristic-type formulation of the Navier-Stokes equations for high order upwind schemes",

Computers and Fluids, Vol. 30, pp. 37-67.

Sumner, D. and Akosile, O. O., 2003, "On uniform planar shear flow around a circular cylinder at subcritical Reynolds number", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 18, pp. 441-454.

Tamura, V., Kiya, M. and Arie, M., 1980, "Numerical study on viscous shear flow past a circular cylinder", *Bulletin of the JSME*, Vol. 23, pp. 1952-1958.

Vitola, M. A., 2006, "Influência de um contorno plano sobre o desprendimento de vórtices ao redor de um cilindro circular" (In Portuguese), Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, R.S., Brazil, 175 p.

Yoshino, F. and Hayashi, T., 1984, "Numerical solution of flow around a rotating circular cylinder in uniform shear flow", *Bulletin of the JSME*, Vol. 27, pp. 1850-1887.

Williamson, C. H. K., 1996, "Vortex dynamis in the cylinder wake", *Annual Review of Fluid Mechanics* 28, 477-539.

SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS EM CAVIDADES CÚBICAS

Elie Luis M. Padilla

epadilla@mecanica.ufu.br

Felipe Pamploma Mariano

fpmariano@mecanica.ufu.br

Tiago de Assis Silva

tasilva@mecanica.ufu.br

Aristeu da Silveira Neto

aristeus@mecanica.ufu.br

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica

Av. João Naves de Ávila 2121, Campus Santa Mônica, Bloco 1M

38400-902, Uberlândia, MG, Brasil

Abstract. *Uma vez que, na realidade, os escoamentos externos à cavidade (representados pela tampa deslizante) nem sempre são paralelos aos eixos, o presente trabalho apresenta a caracterização e análise numérica de escoamentos turbulentos no interior de cavidades cúbicas com tampa deslizante diagonal (45°), considerando números de Reynolds acima de 3200. Apresenta-se também uma análise comparativa com o problema de tampa deslizante paralela (0°). As equações de Navier-Stokes são discretizadas com o método dos volumes finitos em coordenadas cartesianas, com malhas deslocadas e esquemas temporal e espacial de segunda ordem. A metodologia de simulação de grandes escalas (SGE) com modelagem dinâmica é usada.*

Keywords: *escoamentos turbulentos, cavidades tridimensionais, SGE.*

1. INTRODUÇÃO

O escoamento em cavidades com tampa deslizante tem algumas importantes aplicações tecnológicas em diferentes áreas da engenharia. A simplicidade da geometria, a qual delimita o problema, contrasta com a diversidade de estruturas que se formam e, de acordo com a literatura, estas características tornam a cavidade um problema clássico para testar modelos numéricos.

A representação de cavidades de seção quadrada com comprimento axial infinito, cavidades bidimensionais, tem sido largamente estudada e agora é um problema padrão para testar novos esquemas numéricos e computacionais. Benjamin e Denny (1979), Ghia et al. (1982) e Botella e Peyret (1998) são alguns dos muitos trabalhos existentes, dentre os quais o de Ghia et al. (1982) se destaca, pois é frequentemente referenciado, ele emprega o método das diferenças finitas com a formulação função corrente-vorticidade, usando malha cartesiana uniforme.

Somente nos anos 80 o primeiro trabalho experimental de Koseff e Street (1984) permitiu mostrar que escoamentos em cavidades são de natureza tridimensional. Além disso, este escoamento possui características típicas como vórtices primários e secundários e estruturas denominadas vórtices de canto. O vórtice primário surge na direção transversal ao movimento da tampa, com sentido das paredes para o centro da cavidade, ao mesmo tempo, para satisfazer a conservação da massa do sistema, surge um segundo vórtice no sentido contrário, ou seja, do centro para as paredes (*inward and outward currents*), além desses, vórtices similares aos de Taylor-Gortler também são observados. Recentemente, Migeon et al. (2003) considerou o desenvolvimento temporal tridimensional dentro de um paralelepípedo com tampa deslizante com número de Reynolds igual à 1000, os resultados mostram a formação e surgimento de estruturas de vórtices e o aparecimento de vórtices de Taylor-Gortler em fase inicial.

O progresso recente em análise numérica e hardware possibilitam fazer uma análise adequada de problemas tridimensionais, devido a esse fato, Ku et al. (1987) e Babu e Korpela (1994) através da solução das equações de Navier-Stokes, apresentam comparações entre cavidades bi e tridimensionais. Iwatsu et al. (1989) mostrou a topologia do escoamento através da projeção de linhas de corrente em planos para alguns números de Reynolds e Sheu e Tsai (2002) fizeram o mesmo para número de Reynolds igual à 400. Escoamentos laminares instáveis mostram a existência de vórtices do tipo Taylor-Gortler, foram resolvidos por Iwatsu et al. (1990), Zang et al. (1994) e Chiang et al. (1996). Escoamentos turbulentos foram resolvidos usando a metodologia da simulação numérica direta por Leriche e Gavrillakis (2000) e através de simulação de grandes escalas por Zang et al. (1993), Deshpande e Milton (1998) e Hassan Barsamian (2001), estes trabalhos comparam os resultados com os dados de Koseff e Street (1984) e mostram características de turbulência estatística e comportamento instantâneo do escoamento.

Povitsky (2005) apresentou simulações, realizadas em um software comercial, de cavidades tridimensionais com tampa deslizante não paralela as paredes, este tipo de problema pode ser observado em aplicações práticas de engenharia civil, algumas construções podem formar geometrias próximas de cavidades tridimensionais e o escoamento sobre elas dependem da direção do vento, que normalmente, não é paralelo a posição das paredes. Em aterrissagens e

decolagens, uma fonte de ruído muito importante é a cavidade formada ao se abrir o trem de pouso. Padilla et al. (2006a) analisaram o mesmo tipo de escoamento considerando tampa deslizante direcionada em 45° e números de Reynolds dentro da faixa $100 \leq Re \leq 2000$. Nessa mesma faixa de Re , Padilla et al. (2006b) acrescentam a análise e caracterização desses escoamentos para outros ângulos da tampa.

Neste trabalho será apresentada a análise de simulações de escoamentos em cavidades cúbicas com tampa deslizante paralela e não paralela as paredes da cavidade usando a metodologia de simulação de grandes escalas com modelo dinâmico. Na próxima seção será feito uma breve descrição do modelo matemático que rege o problema, na seqüência será explicada a metodologia numérica utilizada, para finalizar o artigo serão mostrados os resultados e as principais conclusões obtidas.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E MODELO DE TURBULÊNCIA

Trata-se de escoamentos no interior de cavidades cúbicas com tampa deslizante, de comprimento característico L , como mostrado na Fig. 1(a). A tampa se movimenta com velocidade U , considerando uma movimentação diagonal da tampa com $\alpha = 45^\circ$. Para efeitos de análise definem-se alguns planos (Fig. 1b): o plano $(\sqrt{x^2 + z^2}, y)$ denominado plano A; o plano $(\sqrt{z^2 + x^2}, y)$, denominado plano B e o plano (x, z) em $y/L = 0,5$, denominado plano C.

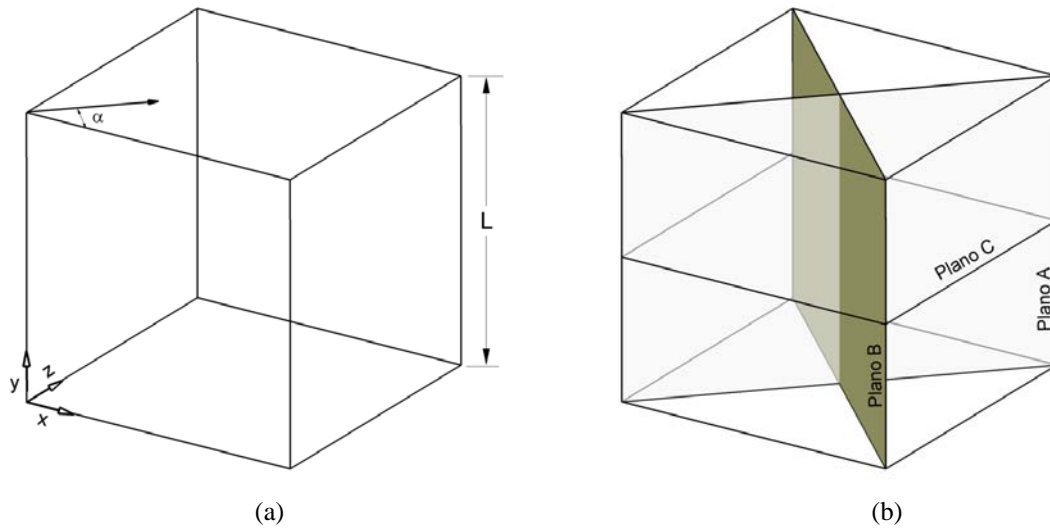


Figura 1. Cavidade cúbica com tampa deslizante; (a) movimentação diagonal da tampa $\alpha = 45^\circ$, (b) planos de análise utilizados no presente trabalho.

O fluido confinado é considerado newtoniano, isotérmico e incompressível, com massa específica ρ e viscosidade cinemática ν . O escoamento no interior da cavidade é regido pelas equações de Navier-Stokes, expressas aqui na forma conservativa e em coordenadas cartesianas, mostradas nas Eqs. (1-2):

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot [\nu(\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T)], \quad (2)$$

onde o vetor velocidade \bar{u} tem componentes u, v, w nas direções x, y, z , respectivamente, p é o campo de pressão, ρ é a massa específica do fluido e ν é a viscosidade cinemática.

De acordo com a metodologia de simulações de grandes escalas (Smagorinsky, 1963), aplica-se o processo de filtragem nas equações governantes (1 e 2) para separar os campos que contém as grandes escalas e as escalas sub-malhas. Este processo de filtragem gera o tensor de Reynolds sub-malha definido como $\tau_{ij} = -(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j)$, este tensor é melhor descrito por Silveira-Neto et al. (2002). O tensor τ_{ij} é modelado pela hipótese de Boussinesq:

$$\tau_{ij} = -\nu_t 2\bar{S}_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (3)$$

onde ν_t é a viscosidade turbulenta, $\bar{S}_{ij} = (1/2)(\partial\bar{u}_i/\partial x_j + \partial\bar{u}_j/\partial x_i)$ é a taxa de deformação calculada usando o campo resolvido e a energia cinética turbulenta. Considerando as Eqs. (1-3), as equações de Navier-Stokes filtradas são escritas como:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot [(\nu + \nu_t)(\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T)]. \quad (5)$$

Para aproximar o tensor de Reynolds utiliza-se o modelo sub-malha dinâmico, onde o parâmetro de proporcionalidade é computado como uma função das coordenadas espaciais e do tempo. Este modelo supera muitas dificuldades e deficiências do modelo de Smagorinsky. A expressão que define a viscosidade turbulenta ν_t de acordo com Germano et al. (1991) e modificada por Lilly (1992):

$$\nu_t = C \Delta^2 |\bar{S}|, \quad (6)$$

onde Δ é o comprimento de escala filtrado, $|\bar{S}| = (\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2}$ e C é o coeficiente dinâmico dado por:

$$C = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}, \quad L_{ij} = \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \hat{\bar{u}}_i \hat{\bar{u}}_j, \quad M_{ij} = \hat{\Delta}^2 |\hat{S}| \hat{S}_{ij} - \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}. \quad (7)$$

onde $\hat{\Delta} = 2\Delta$ é o comprimento de escala do filtro teste. A influência do filtro teste no escoamento é muito importante como demonstrado por Padilla e Silveira-Neto (2003). No presente trabalho o filtro discreto proposto por Padilla (2004) é usado.

3. MÉTODO NUMÉRICO

O método dos volumes finitos (Patankar, 1980) foi empregado, utilizando malha deslocada, para descrever numericamente as Eqs. (4) e (5). As derivadas espaciais foram discretizadas com um esquema de diferenças centrais de segunda ordem e para a discretização temporal foi utilizado o esquema de Adams-Bashforth, também de segunda ordem. O método de acoplamento entre os campos de pressão e velocidade utilizado foi o passo fracionado (Kim e Moin, 1985), com dois passos denominados preditor e corretor. A correção do campo de pressão foi realizada resolvendo a equação de Poisson, para isso utilizou-se o procedimento fortemente implícito (SIP) proposto por Stone (1968).

O passo de tempo foi avaliado segundo o critério de estabilidade CFL. Além disso, utilizou-se malha não-uniforme, mais refinada próxima às paredes da cavidade.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O processo de validação do código numérico desenvolvido foi realizado usando a configuração com ângulo de orientação da tampa nulo ($\alpha = 0^\circ$, vide Fig. 1) e comparado com dados experimentais e numéricos, como apresentados na Fig. 2. Nessa figura comparam-se os resultados obtidos para regime laminar (Fig 2a) e para regime turbulento (Fig 2b), usando perfis ao longo da direção x/L em $(y, z)/L = 0,5$ (segundo o sistema de eixos da Fig. 1). Em regime laminar, para $Re = 400$, observa-se muito boa concordância, para malha $40 \times 40 \times 40$, com os resultados numéricos de Kato et al (1990), Babu e Korpela (1994) e Sheu e Tsai (2002). Comparações qualitativas sobre o desenvolvimento temporal do escoamento para $Re = 1000$, foram realizadas, mostrando um padrão idêntico aos obtidos experimentalmente por Migeon et al. (2000). Em regime turbulento, mostram-se perfis de intensidade turbulenta da componente vertical da velocidade para $Re = 10000$, isto é, a estatística das flutuações da velocidade na forma $v_{rms} = \sqrt{\overline{v'v'}}/U$. Estes perfis, obtidos com malha não uniforme de $40 \times 40 \times 40$, mostram a superioridade do modelo sub-malha dinâmico em relação ao modelo de Smagorinsky e boa aproximação com os dados experimentais de Prasad e

Koseff (1989). Uma análise detalhada do problema, para diversos valores de Re em duas e três dimensões, é encontrada nos trabalhos precedentes Padilla e Silveira Neto (2005) e Padilla et al. (2005).

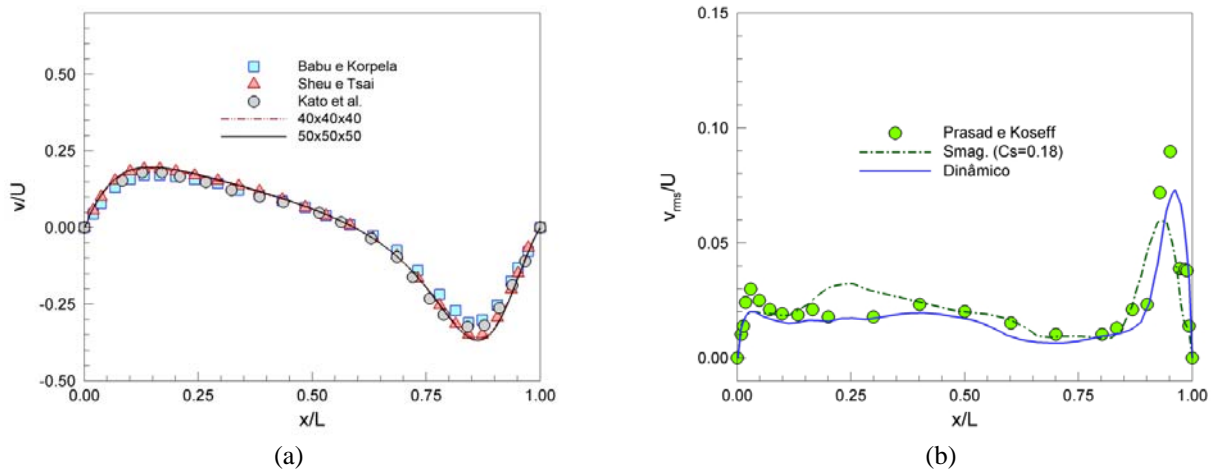


Figura 2. Comparação com dados de referência para escoamentos com ângulo da tampa nulo ($\alpha = 0^\circ$) na posição $(y, z)/L = 0,5$; (a) regime laminar, (b) regime turbulento.

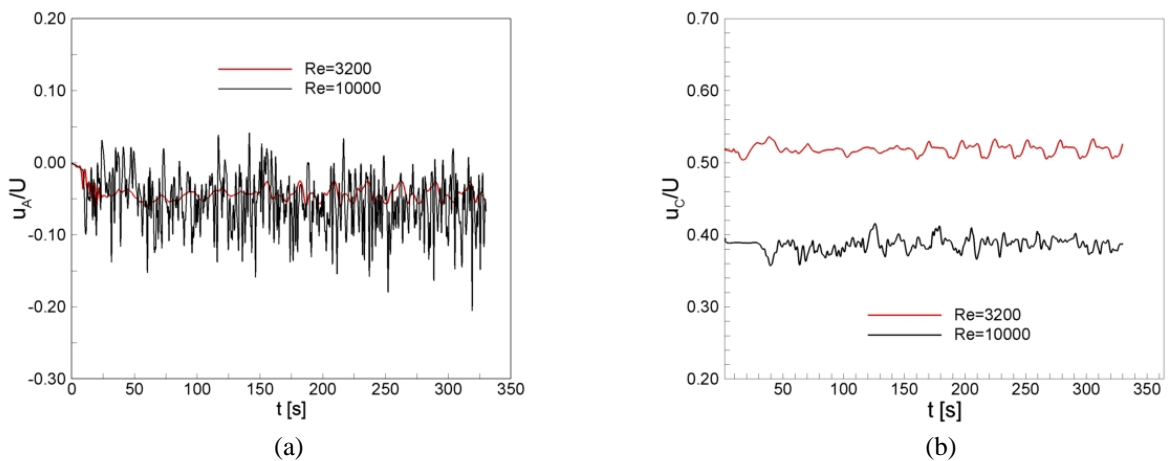


Figura 3. Distribuição temporal da componente u da velocidade para dois valores de Re , (a) sonda A, (b) sonda B.

Baseados nos dados apresentados, as simulações do presente trabalho foram realizadas com malhas não uniformes (com razão de expansão-redução de 5%) e com modelo sub-malha dinâmico. Enquanto a seleção da faixa de valores de Re , considerando que para cavidades com ângulo nulo o escoamento a $Re=3200$ é instável (Prasad e Koseff, 1989; Deshpande e Milton, 1998; Padilla et al, 2005) e que, segundo a sugestão de Povitsky (2001) para cavidades cúbicas com ângulo $\alpha = 45^\circ$, o escoamento pode-se apresentar instável para Re menor que para cavidades com ângulo nulo, foi escolhida a faixa de valores de $3200 \leq Re \leq 10000$.

Dois sondas numéricas foram colocadas de forma a monitorar os sinais das grandezas dos escoamentos, denominadas de sonda A e sonda B. A primeira delas, na região inferior da cavidade, localizada em $(x, y, z)/L = 0,5, 0,0076, 0,5$; a segunda, na região próxima da tampa deslizante, localizada em $(x, y, z)/L = 0,5, 0,9924, 0,5$. Os sinais da componente horizontal da velocidade u/U , para dois valores de Re , são mostrados na Fig. 3. Estes sinais indicam claramente que o escoamento para $Re=3200$ é completamente instável, apresentando oscilações de amplitude levemente maiores na sonda A e várias frequências, das quais a mais importante corresponde à $0,047 \text{ Hz}$ (avaliadas usando FFT das flutuações do sinal). Para $Re=10000$, as oscilações evidenciam uma multiplicação de frequências e, principalmente na sonda A, um incremento exagerado da amplitude das mesmas que as torna de aparência caótica. Essas características, observadas para $Re=10000$, são típicas dos escoamentos turbulentos e similares ao padrão observado para o caso de cavidade com orientação da tampa nula (Prasad e Koseff, 1989; Padilla et al, 2005). Os sinais

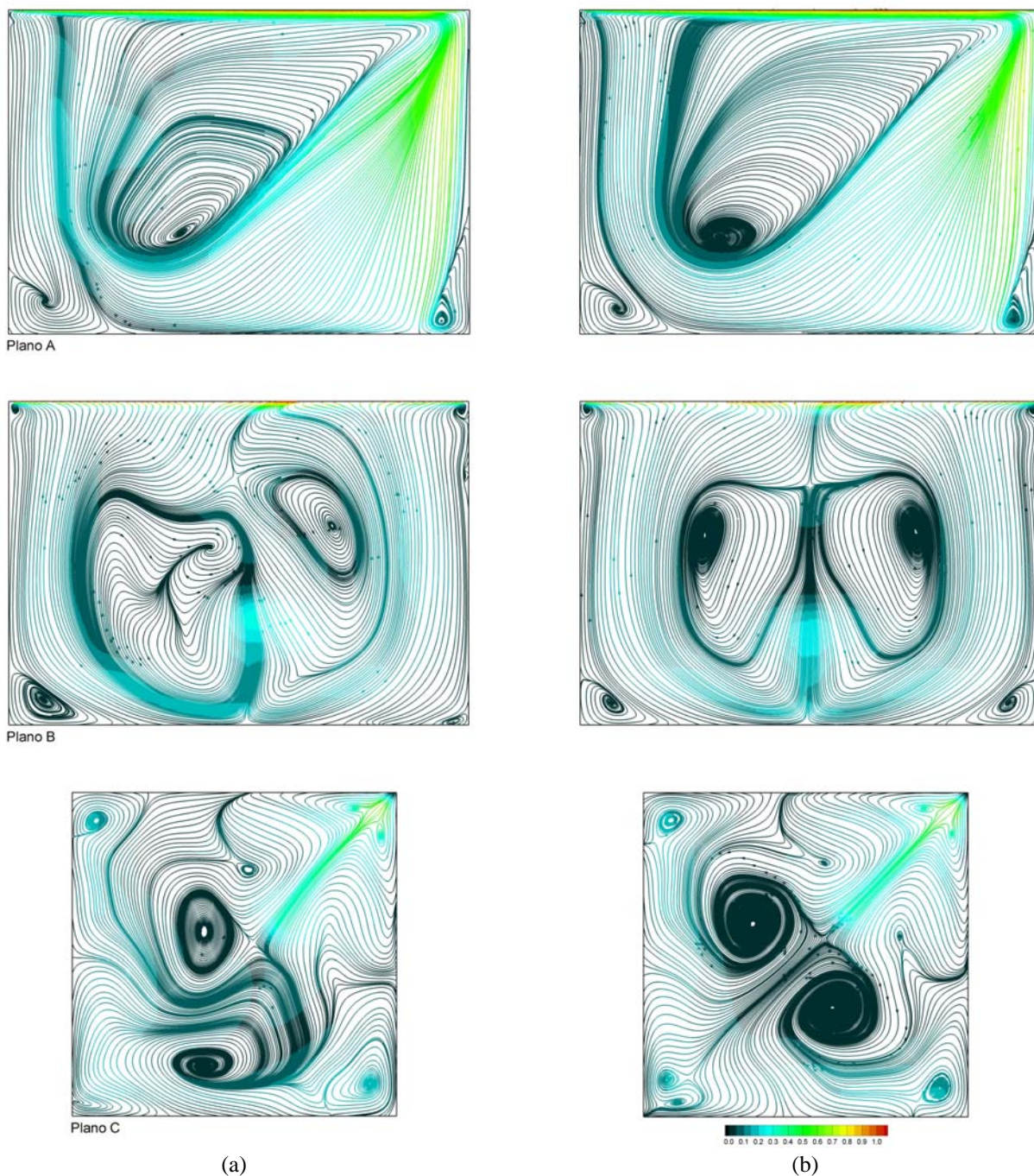


Figura 4. Padrão do escoamento para $Re = 3200$, visualizado sobre diferentes planos; (a) campo instantâneo, (b) campo médio.

indicam também que é necessário um razoável intervalo de tempo de simulação que permita uma boa estimativa dos comportamentos médios.

As imagens das Figs. 4 e 5 ilustram as características do padrão dos escoamentos para $Re = 3200$ e 10000 , através das linhas de corrente sobre os três planos predefinidos na seção 2 (Fig. 1b), usando duas perspectivas: o instantâneo (Figs. a) e o estatístico (Figs. b). Para se ter uma melhor representatividade, as linhas de corrente foram coloridas com a norma da velocidade ($\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$). O plano A permite visualizar o escoamento principal, enquanto os outros planos mostram os escoamentos secundários. Como observado na Fig. 3, por se tratar de escoamentos em transição à turbulência e turbulência, os escoamentos no interior das cavidades têm uma dinâmica que oscila intensamente em umas regiões e em outras oscila menos, sendo que a dinâmica desses escoamentos torna-se completamente instável à medida que o Re aumenta. Essas características são claramente evidenciadas nas Figs. 4(a) e 5(a) através das linhas de corrente

instantâneas. Para $Re = 3200$, os planos de escoamento secundário apresentam assimetria em relação ao plano A e região central muito instável (comparando a posição dos vórtices com o escoamento médio, Fig. 4b). Em concordância com a análise da Fig. 3, à medida que o Re é incrementado uma ampla banda de frequências aparecem, indicando a presença de múltiplos vórtices, como registrado para o escoamento a $Re = 10000$. Por outro lado, o escoamento médio permite padronizar o comportamento, nesta oportunidade, pela presença do número de vórtices em cada plano. No plano A, tem-se o vórtice principal e dois vórtices secundários para $Re \leq 5000$, ou três vórtices secundários para $Re > 5000$, sendo que o terceiro pequeno vórtice aparece na parte superior esquerda do plano. No plano B, o número de vórtices passa de três pares para seis pares quando o Re é incrementado de 3200 a 10000. No plano C, se mantêm o mesmo número de vórtices.

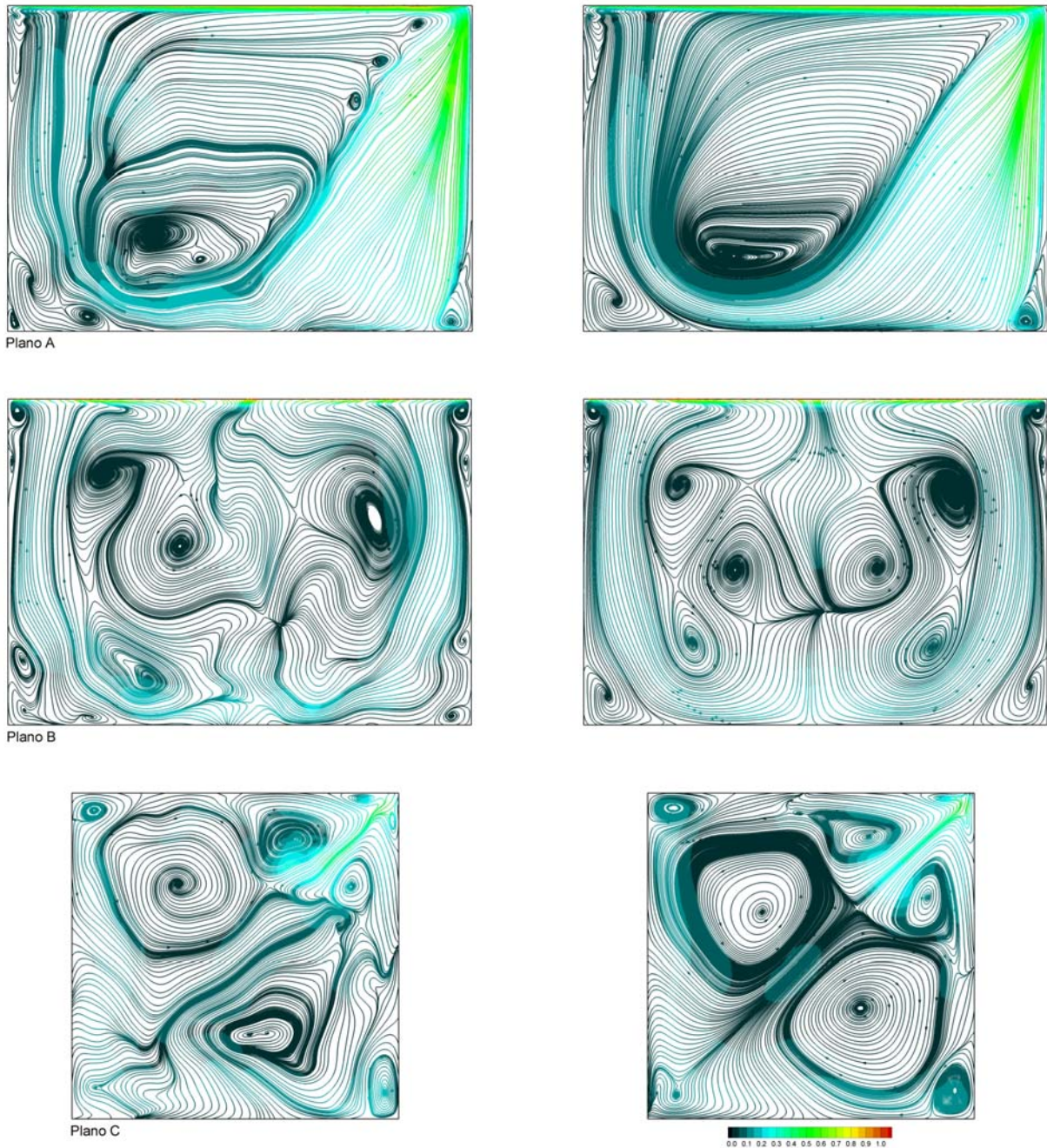


Figura 5. Padrão do escoamento para $Re = 10000$, visualizado sobre diferentes planos; (a) campo instantâneo, (b) campo médio.

A análise dos escoamentos através de iso-superfícies de vorticidade permitiu confirmar a presença das estruturas conhecidas como vórtices de canto, localizadas próximas das paredes a frente da tampa deslizante (visualizadas também nos extremos do plano B). Usando o critério Q (Pallares et al. 1996), foi possível visualizar a presença de vórtices tipo Taylor-Gortler, que para os maiores Re , aparecem como estruturas desintegradas que oscilam nas regiões de maior intensidade de turbulência, como pode ser observado na Fig. 6. Nessa figura, mostram-se iso-superfícies de $Q=1$ em dois instantes do escoamento para $Re=10000$.

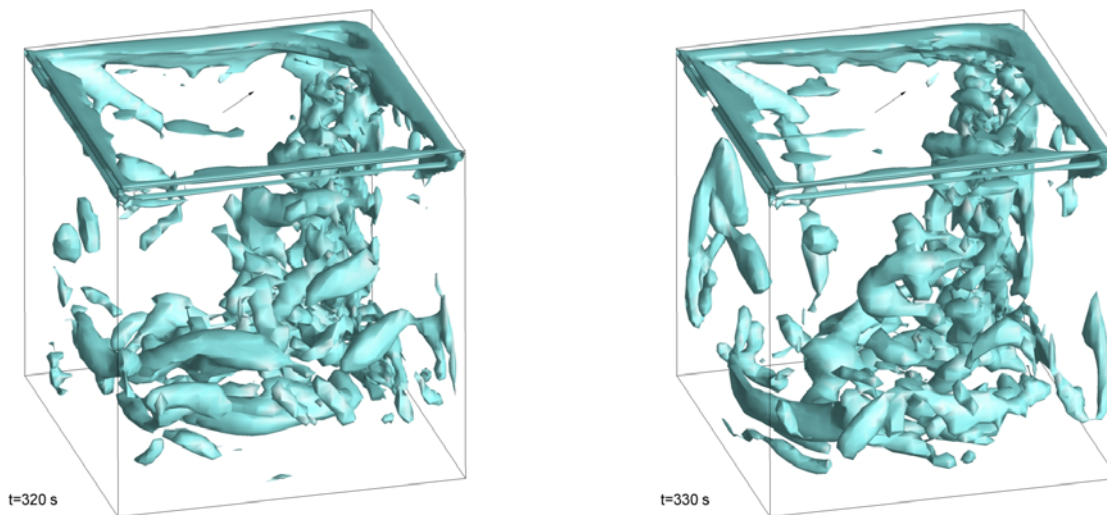


Figura 6. Estruturas características usando critério $Q=1$, $Re=10000$, para dois instantes do escoamento.

Na Fig. 7 têm-se perfis de velocidade média da componente horizontal da velocidade e a estatística das flutuações associada à mesma componente, perfis ao longo da coordenada y/L em $(x, z)/L = 0,5, 0,5$. Evidentemente, para os maiores valores de Re existem altos gradientes de velocidade nas proximidades das paredes da cavidade e máximos de $-u/U$ na região inferior, sendo que para $Re \geq 7500$, essas velocidades máximas de retorno do escoamento principal, situam-se mais próximas da parede inferior. A distribuição de u_{rms} (Fig. 7b) confirma a interpretação da Fig. 4(a), evidenciando como região de maiores flutuações à região central da cavidade; para $Re > 5000$ essa região se desloca para regiões inferiores. Como é lógico, se observa na Fig. 6, essa característica não necessariamente é válida nos outros planos.

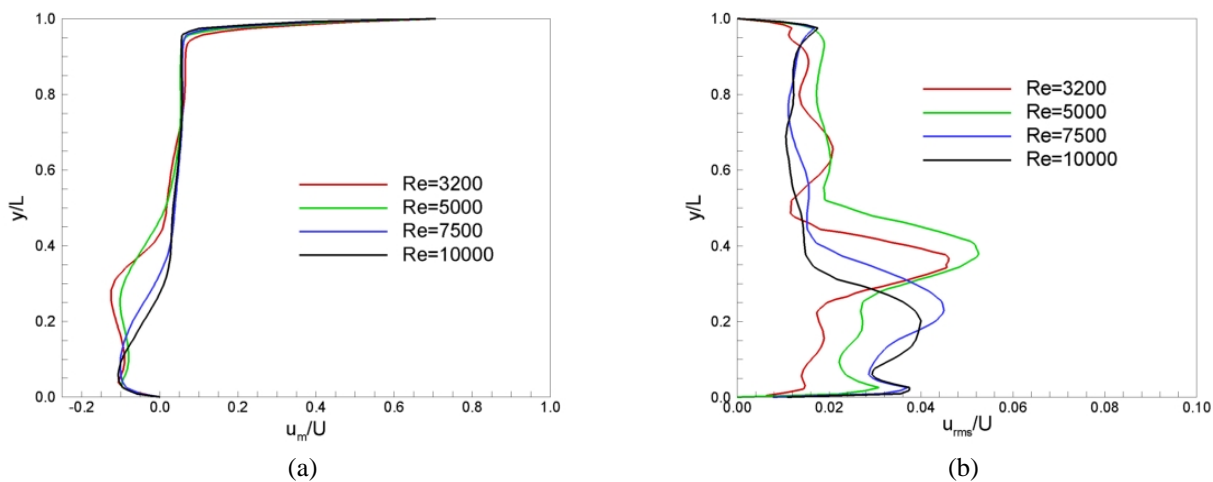


Figura 7. Perfis estatísticos associados a componente da velocidade u para diferentes valores de Re ; (a) velocidade média, (b) u_{rms} .

O espectro de energia associado ao sinal da componente horizontal da velocidade para $Re=3200$, na sonda A, apresenta uma inclinação pronunciada, a qual representa a presença basicamente de grandes estruturas. À medida que o Re aumenta, a inclinação do espectro se aproxima a $-5/3$ como resposta a multiplicação das pequenas estruturas, sendo que são maiores as mudanças para $3200 \leq Re \leq 5000$. Para $Re=10000$, como mostrado na Fig. 8, a orientação da zona inercial é levemente de menor inclinação, mais larga e mais energizada que aquela correspondente a $Re=5000$.

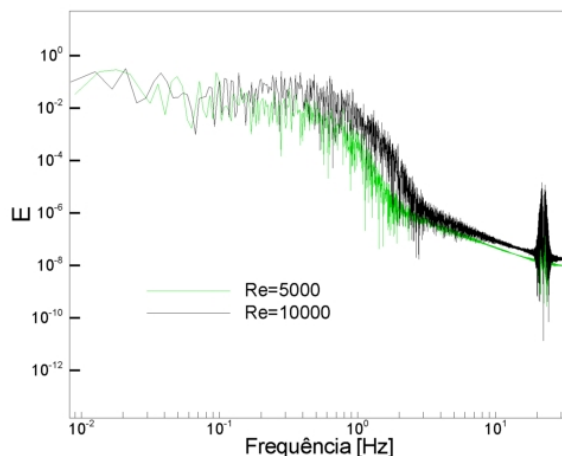


Figura 8. Espectro de energia associado ao sinal da componente da velocidade u na sonda A.

5. CONCLUSÃO

Escoamentos instáveis no interior de cavidades cúbicas com tampa deslizante diagonal foram simulados usando modelagem sub-malha dinâmica. Estes tipos de escoamento representam modelos simplificados de diversos problemas encontrados na indústria (por exemplo: indústria aeronáutica e de construção civil), onde a orientação do escoamento representado pela tampa modifica a dinâmica do escoamento no interior cavidade, quando comparado ao problema com movimento da tampa com ângulo nulo. Foi estabelecido o padrão dos escoamentos para os diversos valores de Re considerados, baseados no número de vórtices presentes no escoamento médio, usando três planos representativos. Estruturas como os vórtices primário, secundários, de canto e de tipo Taylor-Gortler estão presentes no escoamento médio, sendo que para altos Re essas estruturas oscilam intensamente ao ponto de serem desintegradas.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPEMIG, CAPES e do CENPES-PETROBRAS.

7. REFERÊNCIAS

- Botella, O. and Peyret, R., 1998, "Benchmark Spectral Results on the Lid-Driven", *Comput Fluids*, vol 27(4), pp. 421-433.
- Chiang, T.P., Sheu, W.H. and Hwang, R.R., 1996, "Finite Volume Analysis of Spiral Motion in a Rectangular Lid-Driven Cavity", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol 23, pp. 325-346
- Deshpande, M.D. and Milton, S.G., 1998, "Kolmogorov Scales in a Driven Cavity Flow", *Fluid Dyn. Res.*, 22, pp. 359-381.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W.H., 1991, "A Dynamic Sub-Grid-Scale Eddy Viscosity Model", *Phys. Fluids A* 3 (7), pp. 1760-1765.
- Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes equations and a Multigrid Method", *J. Comput. Phys.*, 48, pp. 387-411.
- Hassan, Y.A. and Barsamian, H.R., 2001, "New-wall Modeling for Complex Flows Using the Large Eddy Simulation Technique in Curvilinear Coordinates", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 44, pp. 4009-4026.
- Iwatsu, R. Ishi, K., Kawamura, T., Kawahara, K. and Hyun, J.M., 1989, "Simulation of Transition to Turbulence in a Cubic Cavity", *AIAA Pap. No 98-0040*.

- Iwatsu, Hyun, J.M. and Kawahara, K., 1990, "Analyses of Three-dimensional Flow Calculations in a Driven Cavity", *Fluid Dyn. Res.*, 6, pp. 91-102.
- Kato, Y., Kawai, H. and Tanahashi, T., "Numerical Flow Analysis in a Cubic Cavity by the GSMAC finite-element method", *JSME Int. J. Series II* 33, pp.649-658.
- Kim, J. and Moin, P., 1985, "Application of a Fractional Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations", *J. Comp. Phys.*, 59, pp. 308-323.
- Koseff, J.R. and Street R.L., 1984, "Visualization of a Shear Driven Three-Dimensional Recirculation Flow", *J. Fluids Eng.*, 106, pp. 21-29.
- Ku, H.C., Hirsh, R.S. and Taylor, T.D., 1987, "A Pseudospectral Method for Solutions of the Three-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations", *J. Comput. Phys.*, 70, pp. 439-462.
- Migeon, C., Pineau, G. and Texier, A., 2003, "Three-Dimensionality Development Inside Standard Parallelepipedic Lid-Driven Cavities at $Re=1000$ ", *J. of Fluids and Structures Eng.*, 17, pp. 717-738.
- Leriche, E. and Gavrilakis, S., 2000, "Direct Numerical Simulation of the Flow in a Lid-driven Cubical Cavity", *Phys. Fluids*, vol 12(6), pp. 1363-1376.
- Lilly, D.K., 1992, "A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Method", *Phys. Fluids A* 4 (3), pp. 633-635.
- Padilla, E.L.M., Martins, A.L. and Silveira Neto, A. 2005, "Large-Eddy Simulation of the Three-Dimensional Unstable Flow in a Lid-Driven Cavity", *Proceedings of 18th International Congress of Mechanical Engineering, Ouro Preto. Proceedings of COBEM.*, v. 1. p. 1-8.
- Padilla, E.L.M. and Silveira Neto, A., 2005, "Desenvolvimento de um Código Computacional Tridimensional para Solução de escoamentos em Transição e Turbulência", *Proceedings of XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Guarapari*, v. 1. p. 1-12.
- Padilla, E.L.M., Silva, T.A. and Silveira Neto, A., 2006(a), "Escoamento Tridimensional no Interior de Cavidades com Tampa Deslizante Diagonal", *Proceedings of XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Belém*, v. 1. p. 1-12.
- Padilla, E.L.M. ; Silva, T.A. and Silveira Neto, A., 2006(b), "Caracterização de Escoamentos em Cavidades Cúbicas com Movimentação Diagonal da Tampa", *Anais do 11 Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, Curitiba*, v. 1. p. 1-11.
- Pallares, J., Cuesta, I., Grau, F.X. and Giralt, F., 1996, "Natural Convection in a Cubical Cavity Heated from Below at Low Rayleigh Numbers", *Int. J. Heat Mass transfer*, vol. 39(15), pp. 3233-3247.
- Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, New York.
- Povitsky, A., 2001, "Three-Dimensional Flow in Cavity at Yaw", *ICASE Report N° 2001-31*, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia..
- Povitsky, A., 2005, "Three-Dimensional Flow in Cavity at Yaw, Nonlinear Analysis", v. 63, pp. E1573-e1584.
- Prasad, A.K. and Koseff, J.R., 1989, "Reynolds Number and End-Wall Effects on a Lid-Driven Cavity Flow", *Phys. Fluids A*, 1, pp. 208-218.
- Silveira-Neto, A., Mansur, S.S. and Silvestrini, J.H., 2002, "Equações da Turbulência: Média Versus Filtragem", *Anais da III Escola de Primavera de Transição e Turbulência, Florianópolis*, pp. 1-7.
- Sheu, T.W.H. and Tsai, S.F., 2002, "Flow Topology in a Steady Three-Dimensional Lid-Driven Cavity", *Comput Fluids*, 31, pp. 911-934.
- Smagorinsky, J., 1963, "General Circulation Experiments with Primitive Equations", *Montly Weather Rev.*, 91, pp. 216-241.
- Stone, H.L., 1968, "Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations", *SIAMJ Numer. Anal.*, vol. 5, pp. 530-558.
- Zang, Y., Street, R.L. and Koseff, J.R., 1994, "A Non-Staggered Grid, Fractional Step Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinates", *J. Comp. Phys.*, 114, pp. 18-33.

ANÁLISE DO MODELO DE LANGEVIN ESTENDIDO NA MODELAGEM DA COMBUSTÃO TURBULENTA USANDO A ABORDAGEM DE REATOR PARCIALMENTE AGITADO

Elder M. Orbegoso, eldermendoza@esp.puc-rio.br

Luis Fernando Figueira da Silva, luisfer@esp.puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rua Marquês de São Vicente 225 - Gávea, CEP 22453-900, Rio de Janeiro-Brasil

Resumo. *O presente trabalho tem como finalidade determinar a influência das propriedades termoquímicas no emprego do modelo de Langevin estendido (ELM) em uma situação de combustão de reagentes pré-misturados. Para este caso simplificado, considerou-se a abordagem de Função Densidade de Probabilidade (PDF) na formulação matemática do Reator Parcialmente Misturado (PaSR). Uma vez que a abordagem da PDF apresenta termos abertos no que diz respeito aos processos difusivos, o modelo ELM foi levado em conta para o fechamento do termo que descreve a difusão do campo escalar. Este modelo de mistura estocástico apresenta uma principal vantagem frente aos modelos de mistura reportados na bibliografia, pela inclusão de espectros de escalas que simulam a turbulência e a taxa de dissipação do escalar presentes em um fenômeno de mistura turbulenta. Desta forma o PaSR foi utilizado como uma ferramenta matemática na avaliação da influência do modelo ELM nas propriedades termoquímicas em uma situação de combustão do tipo pré-misturada. Os resultados obtidos foram analisados para diferentes regimes de funcionamento do PaSR.*

Palavras-chave: *Reator Parcialmente Agitado, Função Densidade de Probabilidade, Equação Diferencial Estocástica, Técnica Monte-Carlo.*

1. INTRODUÇÃO

Dentre os desafios recentes no estudo de escoamentos turbulentos reativos, um dos principais é o desenvolvimento de modelos computacionais capazes de descrever adequadamente as interações existentes entre combustão, turbulência e a mistura dos reagentes. Um dos motivadores deste desafio é a crescente preocupação no impacto dos processos de combustão no meio ambiente a qual encontra-se diretamente relacionada com a influência do grau da mistura sobre os processos de combustão e, em particular, sobre a formação de poluentes.

A abordagem de Reator Parcialmente Agitado (PaSR), utilizada neste trabalho, é capaz de levar em conta o processo de micro-mistura entre reagentes e gases queimados, isto é, a presença de flutuações das propriedades termodinâmicas durante o processo de combustão, as quais podem acarretar uma maior taxa de formação de poluentes. A formulação matemática de PaSR pode ser realizada mediante a utilização da Equação de Transporte de uma Função Densidade de Probabilidade (PDF). Quando são utilizados modelos que consideram o transporte da PDF das propriedades do escoamento, os termos da convecção e da produção química aparecem de forma fechada e, portanto, não requerem de modelo, porém, o fenômeno da difusão do campo escalar ou micro-mistura permanece aberto, e portanto, precisa de modelo (Pope, 1985; Pope, 2000; Fox, 2003). Esta dificuldade aparece pois processos difusivos envolvem formulações do tipo biponto, as quais não podem ser descritos mediante técnicas estatísticas do tipo uniponto.

Nas décadas passadas, diversos modelos foram propostos de maneira a representar o processo da micro-mistura, iniciando-se com os modelos clássicos de interação entre partículas (Curl, 1963; Dopazo, 1978; Pope, 1982) e o modelo de interação mediante a transferência com a média ou modelo IEM (Villermaux e Devillon, 1972), até aqueles, mais sofisticados, como os modelos de Langevin (Pope, 1985; Valiño e Dopazo, 1991), o modelo de modo de fechamento mediante mapeamento (Chen *et al.*, 1989) e o modelo baseado na extensão de ramificações por meio de mínimo euclidiano (Subramaniam e Pope, 1998). Recentemente, Sabel'nikov e Gorokhovski (2001) propuseram novos modelos de mistura estocásticos, o mais complexo e funcional, o modelo de Langevin estendido (ELM). Este modelo substitui a escala de tempo único utilizada no modelo IEM por uma descrição estocástica da frequência do movimento turbulento e pela adição de um termo que simula a dissipação do campo escalar, na qual conduz a um espalhamento das trajetórias do espaço da fase enquanto que garante a propriedade de delimitação. Desta maneira, é possível conseguir uma relaxação da PDF de um campo escalar inerte para uma forma Gaussiana. Este novo modelo de mistura foi avaliado e validado por Soulard *et al.* (2004) mediante resultados obtidos através de Simulação Numérica Direta por Eswaran e Pope (1988) para casos de mistura turbulenta de um campo escalar inerte, porém, ainda não havia sido empregado em uma situação de combustão.

O presente trabalho apresenta um estudo do modelo de Langevin estendido (ELM), desenvolvido por Sabel'nikov e Gorokhovski (2001), em um Reator Parcialmente Agitado (PaSR). Considera-se um sistema simples e homogêneo representativo de aplicações práticas de modelos de mistura. O resultado do processo de combustão é governada pela competição entre as escalas do tempo característico da reação química, mistura e o tempo de residência dos gases confinados no interior do PaSR. A equação de transporte da PDF é resolvida mediante um sistema equivalente de equações diferenciais estocásticas (SDEs) usando a técnica Monte-Carlo, utilizando método numérico do tipo implícito para a res-

oluição de sistema de SDEs (Tian e Burrage, 2001). O estado permanente da PDF do escalar reativo dentro de um PaSR é estudado para casos correspondentes a mistura rápida e combustão intensa e para mistura lenta e combustão moderada. Finalmente, um estudo paramétrico da influência dos tempos característicos da mistura e da reação química e dos parâmetros dos modelos de Langevin estendido nas propriedades médias do escalar reativo dentro do PaSR é apresentado.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E MÉTODO NUMÉRICO

O processo químico é descrito usando uma reação global de passo único, a qual envolve a variável de progresso da reação, $c = (T - T_0)/(T_{ad} - T_0)$, onde T , T_0 e T_{ad} são a temperatura, a temperatura na entrada do reator e a temperatura de combustão adiabática, respectivamente. A formulação da equação de transporte da Função Densidade de Probabilidade conjunta do escalar reativo, c , e o logaritmo da frequência turbulenta, χ , para o caso do modelo ELM no interior do PaSR (Orbegoso e Figueira da Silva, 2008) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(c, \chi; t)}{\partial t^*} = & [\delta(c) - P(0, \chi; t)] + \mathcal{Z} \frac{\partial}{\partial c} [a\Omega e^\chi (c - \langle c|\chi \rangle) P(c, \chi; t)] + \mathcal{Z} \frac{\partial^2}{\partial c^2} [b\Omega e^\chi c(1 - c) P(c, \chi; t)] \\ & + \mathcal{Z} \frac{\partial}{\partial \chi} [C_\chi (\chi - m_1) P(c, \chi; t)] + \mathcal{Z} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} [C_\chi m_2 P(c, \chi; t)] - \mathcal{Y} \frac{\partial}{\partial c} [\dot{S}(c) P(c, \chi; t)], \end{aligned} \quad (1)$$

onde, $t^* = t/\tau_r$ é o tempo adimensional, τ_r é o tempo de residência da mistura no PaSR. Nesta equação, o lado esquerdo representa a evolução transiente da PDF conjunta $P(c, \chi)$. O logaritmo da frequência turbulenta, χ , é descrito mediante um processo estocástico do tipo Orstein-Uhlenbeck (Pope e Chen, 1990). Os processos de entrada-saída dos gases são representados pelo primeiro termo do lado direito da Eq. (1). Note-se que os gases frescos que entram no reator são caracterizados mediante uma distribuição inicial da frequência turbulenta, $P(0, \chi)$. Os termos restantes descrevem, em ordem, os processos difusivos e dissipativos de c e χ e o termo de produção química, a qual, é descrito por $\dot{S}(c) = (1 - c) \exp[\beta c/(c + 1/\alpha)]$, onde $\alpha = (T_{ad} - T_0)/T_0$ é o calor de reação reduzido e $\beta = E/RT_0$ é a energia de ativação reduzida. A razão entre a tempo de residência médio e o tempo característico da turbulência é $\mathcal{Z} = \tau_r/\tau_t$. Desta maneira, para um valor de $\mathcal{Z} \rightarrow \infty$ o Reator Perfeitamente Agitado é obtido. No caso em que $\mathcal{Z} \rightarrow 0$, a solução do PaSR é reduzida para o equivalente a um Reator do tipo Pistão (PFR). O parâmetro $\mathcal{Y} = \tau_r/\tau_c$ representa o número de Damköhler baseado no tempo de residência e a escala do tempo característico do processo químico, $\tau_c \propto \exp(\beta)$ (Sabel'nikov e Figueira da Silva, 2002). Note-se que a definição usual do número de Damköhler é $Da = \tau_t/\tau_c = \mathcal{Y}/\mathcal{Z}$. Os valores de a , b e Ω são dados por

$$a = 1 + d_0 \frac{\langle c(1 - c)|z \rangle}{\sigma_M^2}, \quad (2)$$

$$b = d_0 \frac{\langle c^2|z \rangle - \langle c|z \rangle^2}{\sigma_M^2}, \quad (3)$$

$$\Omega = \frac{\sigma_{\mathcal{X}}}{\langle z(\langle c^2|z \rangle - \langle c|z \rangle^2) \rangle}, \quad (4)$$

onde $\mathcal{X} = \tau_r/\tau_m$, $\tau_m^{-1} = \langle \omega_c \rangle$ é a média da frequência de mistura do escalar. Do exposto anteriormente, pode ser mostrado que $\langle \omega_c \rangle = \Omega \langle \omega \rangle$ (Soulard *et al.*, 2004). Nas Eqs. (3-5), z representa o modelo estocástico da frequência turbulenta adimensional, representado por $z = \tau_r \langle \omega \rangle e^\chi = \mathcal{Z} e^\chi$, onde, ω e $\langle \omega \rangle$ são a frequência turbulenta e seu valor médio. Note-se que ω é descrito mediante uma distribuição log-normal (Pope e Chen, 1989). Além disso, na Eq. (1), m_1 e m_2 são a média e a variância do processo estocástico χ , e $C_\chi = 1,6$ (Pope e Chen, 1989; Soulard *et al.*, 2004). Uma vez que χ é uma variável estocástica cujos valores obedecem a uma distribuição Normal, $m_1 = -m_2/2$. Yeung e Pope (1989), baseado em resultados de DNS, propuseram $m_2 = 0,29 \ln Re_\lambda - 0,36$, para $28 \leq Re_\lambda \leq 96$, onde Re_λ é o número de Reynolds baseado na escala de comprimento de Taylor. O correto decaimento da variância, $\sigma^2 = \langle c - \langle c \rangle \rangle^2$, coerente com a equação exata para o caso turbulência homogênea (Soulard *et al.*, 2001), $\sigma^2 = \sigma_0^2 \exp(-2\langle \omega_c \rangle t)$, é alcançada mediante a escolha de Ω na Eq. (4). Finalmente, $\sigma_M^2 = \langle c \rangle (1 - \langle c \rangle)$ é definido como o valor máximo da variância do escalar e d_0 é uma constante que controla a taxa de relaxação da PDF (Soulard *et al.*, 2004). Note-se que, no caso em que simultaneamente, a dissipação do escalar seja negligenciada, $d_0 = 0$, e o movimento turbulento é uniforme, $z = cte$, obtém-se o modelo IEM clássico (Sabel'nikov e Figueira da Silva, 2002).

A equação de transporte da PDF utilizado neste trabalho, Eq. (1), não possui nenhuma solução analítica conhecida, com exceção em que modelo IEM é adotado (Sabel'nikov e Figueira da Silva, 2002). Além disso, contrariamente ao caso inerte, onde uma Solução Numérica Direta desta equação é possível (Soulard *et al.*, 2004), o termo de produção química apresenta dificuldades na especificação da condições de contorno na vizinhança de $c = 1$ (Sabel'nikov e Figueira da Silva, 2002). Por conseguinte, a técnica clássica de se resolver o sistema de equações diferenciais estocásticas (SDE) equivalente de acordo com a representação de Itô (Gardiner, 1990) é adotada,

$$dc^{(n)} = \left[-\mathcal{Z} a \Omega e^\chi (c^{(n)} - \langle c|\chi \rangle) + \mathcal{Y} \dot{S}(c^{(n)}) \right] dt^* + \sqrt{2\mathcal{Z} b \Omega c^{(n)} (1 - c^{(n)})} dW_c, \quad (5)$$

$$d\chi^{(n)} = -ZC_\chi(\chi^{(n)} - m_1)dt^* + \sqrt{2ZC_\chi m_2}dW_\chi, \quad (6)$$

onde dW_c e dW_χ são as variações, independentes entre si, de c e χ que obedecem a um processo Wiener padrão com média igual a zero e variância igual a dt (Gardiner, 1990). a condição inicial destas equações são os gases frescos ($c = 0$) e uma frequência turbulenta ω seguindo a uma distribuição Log-normal, ou seja, χ é prescrito como obedecendo a uma distribuição Normal.

As Equações (5) e (6) são SDEs não lineares que representam a evolução de c e χ no interior do PaSR. Esta não linearidade está associada aos termos de mistura estocástica e de produção química. A solução numérica deste sistema requer ao emprego de métodos numéricos que sejam capazes em resolver equações diferenciais estocásticas rígidas. Os esquemas clássicos de integração do tipo explícito, como o Euler-Maruyama (Gardiner, 1990), não são os mais adequados, uma vez que a delimitação do campo escalar não pode ser garantida. O esquema numérico considerado neste trabalho para a solução das Eqs. (5) e (6) é o método de Milstein Taylor Implícito (Tian e Burrage, 2001). A formulação geral de uma equação diferencial estocástica que descreve a evolução de uma variável, ϕ submetida a um processo Wiener unidimensional, usando a representação de Itô, é

$$d\phi(t) = A[\phi(t), t] dt + B[\phi(t), t] dW_j(t), \quad \phi(t_0) = \phi_0, \quad t \in [t_0, T], \quad (7)$$

onde, $A[\phi(t), t]$ e $B[\phi(t), t]$ são respectivamente os coeficientes de deriva e de difusão, e dW é o incremento de um processo Wiener. A forma discretizada da Eq. (7) utilizando o Método de Milstein Taylor Implícito (Tian e Burrage, 2001) é

$$\phi_{n+1} = \phi_n + A[\phi_{n+1}, t_{n+1}] \Delta t + B[\phi_{n+1}, t_{n+1}] \Delta W_n - \frac{1}{2}(BB')[\phi_{n+1}, t_{n+1}] [(\Delta W_n)^2 + \Delta t], \quad (8)$$

onde $B' = dB/d\phi$, Δt e ΔW_n representam respectivamente, o incremento de tempo e a variação do processo Wiener discretizado, e os índices n e $n + 1$ denotam os tempos sucessivos. Este método, implícito em ambos os termos de deriva e de difusão, possui uma convergência de ordem forte igual a 1, e boa estabilidade, quando comparados a outros métodos numéricos disponíveis para a solução de SDEs (Tian e Burrage, 2001). As Equações (5) e (6), discretizados utilizando a Eq. (8), são resolvidos mediante a técnica clássica de Monte-Carlo (Pope, 1985). Para cada passo de tempo, gases frescos entram ao reator. O valor da frequência turbulenta dos gases na entrada é prescrita de acordo à distribuição Log-normal com os valores m_1 e m_2 , previamente fornecidos.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos para o PaSR considerando o modelo de Langevin estendido (ELM) desenvolvido por Sabel'nikov e Gorokhovski (2001). Um estudo da influência do parâmetro d_0 e das escalas de tempo características adimensionais \mathcal{Z} e \mathcal{Y} no processo de combustão será apresentada.

Para todos os resultados obtidos da simulação estocástica do PaSR, foram consideradas 4^6 partículas estocásticas. Para cada tempo adimensional, Δt^* , $N_{sub} = 4^3$ partículas foram retiradas do reator. Estes valores foram escolhidos de maneira a reduzir o erro estatístico, mantendo-se o tempo computacional em valores razoáveis. Desta forma, o tempo de residência é dado por $\tau_r = N_p \Delta t / N_{sub}$ e o passo de tempo adimensional, $\Delta t^* = \Delta t / \tau_r = N_{sub} / N_p$, é igual a 4^{-3} . No início da simulação, todas as partículas estocásticas contêm apenas gases frescos, isto é, $P[c(t=0)] = \delta(c)$. Os valores adimensionais empregados do calor de reação, α , e da energia de ativação, β , são 0, 8 e 15 respectivamente. Estes valores utilizados por Sabel'nikov e Figueira da Silva, (2002), representam uma reação química com um valor moderado do calor de reação e uma energia de ativação elevada.

3.1 Mistura Rápida com Regime de Combustão Intensa

A primeira situação examinada é aquela na qual a evolução da mistura e da cinética química são rápidas, quando comparadas com o tempo de residência dos gases no PaSR. O conjunto dos parâmetros adimensionais utilizados a esta situação é $\mathcal{Z} = 2$ e $\mathcal{Y} = 0,167$, as quais controlam, respectivamente, a velocidade dos processos de micro-mistura e de reação.

Na Fig. 1 apresentam-se PDFs estacionárias conjuntas de c e χ , e a PDF de c obtido mediante a integração de $P(c, \chi)$ no espaço amostral de χ , isto é, $P(c) = \int_{-\infty}^{\infty} P(c, \chi) d\chi$. Estas PDFs correspondem aos valores de $d_0 = 0, 0,4$ e 1. Nesta figura, os resultados obtidos mediante o emprego do modelo ELM são representados por histogramas, enquanto que a linha sólida sempre representa a solução semi-analítica da PDF de c correspondente ao modelo IEM (Sabel'nikov e Figueira da Silva, 2002) que é traçada para fins de referência.

Dos gráficos superiores mostrados na Fig. 1, claramente se evidencia uma alta probabilidade de se encontrar gases completamente queimados no interior do PaSR, isto é, gases com composição $c \rightarrow 1$. Percebe-se também que estas PDFs são praticamente similares para as diferentes escolha de d_0 em esta situação particular de combustão intensa e mistura rápida. No entanto, os gráficos inferiores da Fig. 1 mostram que a PDF de c obtida com o modelo de Langevin estendido

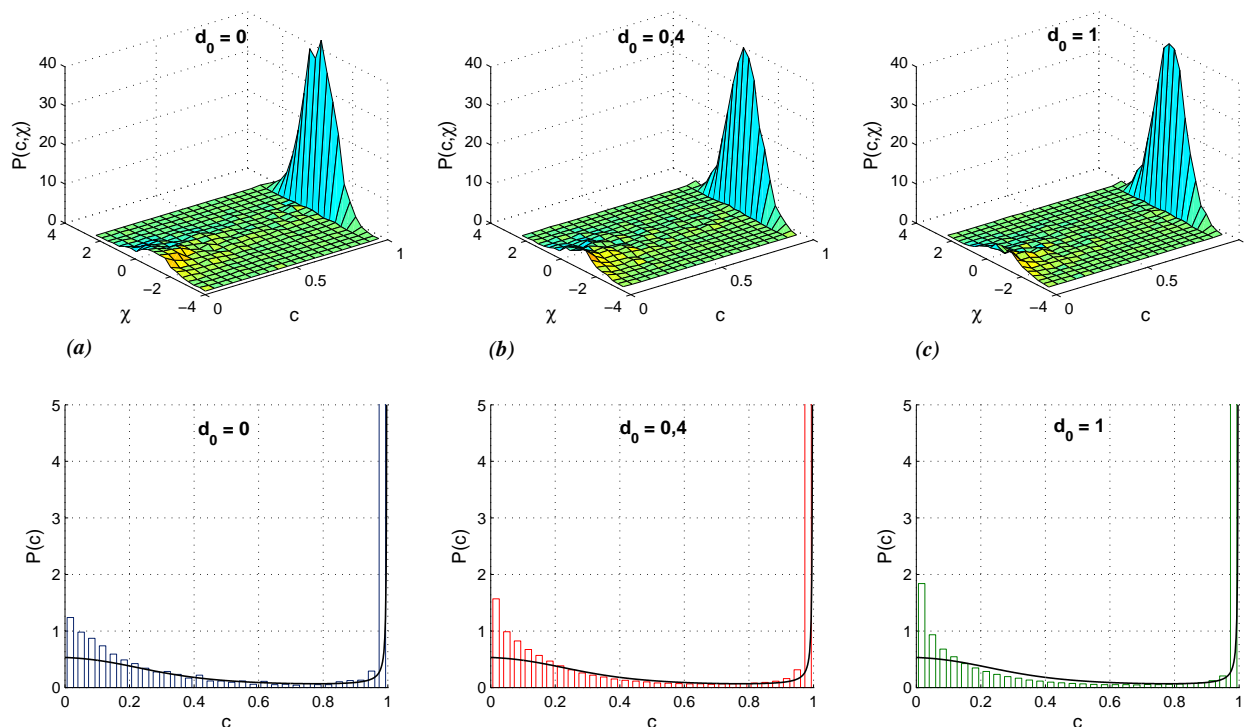


Figure 1. Comparação do estado estacionário das PDFs $P(c, \chi)$ e $P(c)$ no caso o regime de combustão intensa, $\mathcal{Y} = 0,167$, e mistura alta, $\mathcal{Z} = 2$, usando o modelo de Langevin estendido para (a) $d_0 = 0$, (b) $d_0 = 0,4$ e (c) $d_0 = 1$. A linha contínua representa a PDF de c usando o modelo IEM (Sabel'nikov e Figueira da Silva, 2002).

exibe pequenos desvios em relação à solução fornecida pelo modelo IEM. Estes pequenos desvios são perceptíveis na vizinhança dos gases frescos, $c = 0$, onde um ligeiro incremento no valor de $P(c)$ é observado. Note-se, também, que o valor de d_0 praticamente não influencia a forma da PDF. Como será visto mais adiante, estas pequenas mudanças não alteram os momentos estatísticos da PDF neste caso particular. Efetivamente, nesta situação, o PaSR poderia ser aproximado para um PSR uma vez que a maioria de gases queimados que existem no interior do reator possuem composição vizinha (mas diferente) de $c = 1$.

3.2 Mistura Lenta com Regime de Combustão Moderada

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos com o modelo de Langevin estendido onde a mistura e a cinética química é lenta em relação ao tempo de residência. O conjunto representativo dos parâmetros do reator escolhidos é $\mathcal{Z} = 0,5$ e $\mathcal{Y} = 0,042$. A Fig. 2, quando comparado à Fig. 1, mostra que a natureza bimodal de $P(c, \chi)$ e $P(c)$ é incrementada quando ambas, a intensidade da mistura e da reação química são progressivamente diminuídas. Desta forma, a probabilidade de encontrar gases frescos $P(c \rightarrow 0)$ é maior do que nos casos do regime de combustão intensa.

Os gráficos apresentados na Fig. 2 mostram que, em contraste ao observado no caso do regime de combustão intensa, a escolha do valor de d_0 influencia fortemente a forma da PDF. Em particular, o contínuo incremento no valor de d_0 leva sempre à diminuição da probabilidade de encontrar gases frescos no interior do PaSR, além de conduzir a um acréscimo no valor médio da variável de progresso da reação, $\langle c \rangle$. Este comportamento é de se esperar, uma vez que valores altos de d_0 correspondem a um maior peso ao processo de mistura do escalar reativo, quando comparado com o processo da reação. Note-se, também, que o incremento no valor d_0 conduz a um acréscimo na curvatura de $P(c \rightarrow 0)$, $|d^2P(c)/dc^2|$.

A parte inferior da Fig. 2 permite verificar que a frequência de mistura é incrementada na vizinhança cercana dos gases frescos do PaSR, quando comparada à solução semi-analítica do modelo IEM. Assim, espera-se que o valor médio da variável de progresso da reação diminua com respeito ao valor calculado pelo modelo IEM. Além disso, o valor absoluto de $dP(c)/dc$ na vizinhança de $c = 0$ é maior, no caso do modelo ELM, em comparação com o modelo IEM, indicando, que a mistura é mais lenta para o caso dos resultados fornecidos pelo modelo ELM. Note-se que a solução semi-analítica de Sabel'nikov e Figueira da Silva (2002) é utilizada simplesmente para propósitos de referência, uma vez que a Eq. (1) não possui solução analítica conhecida.

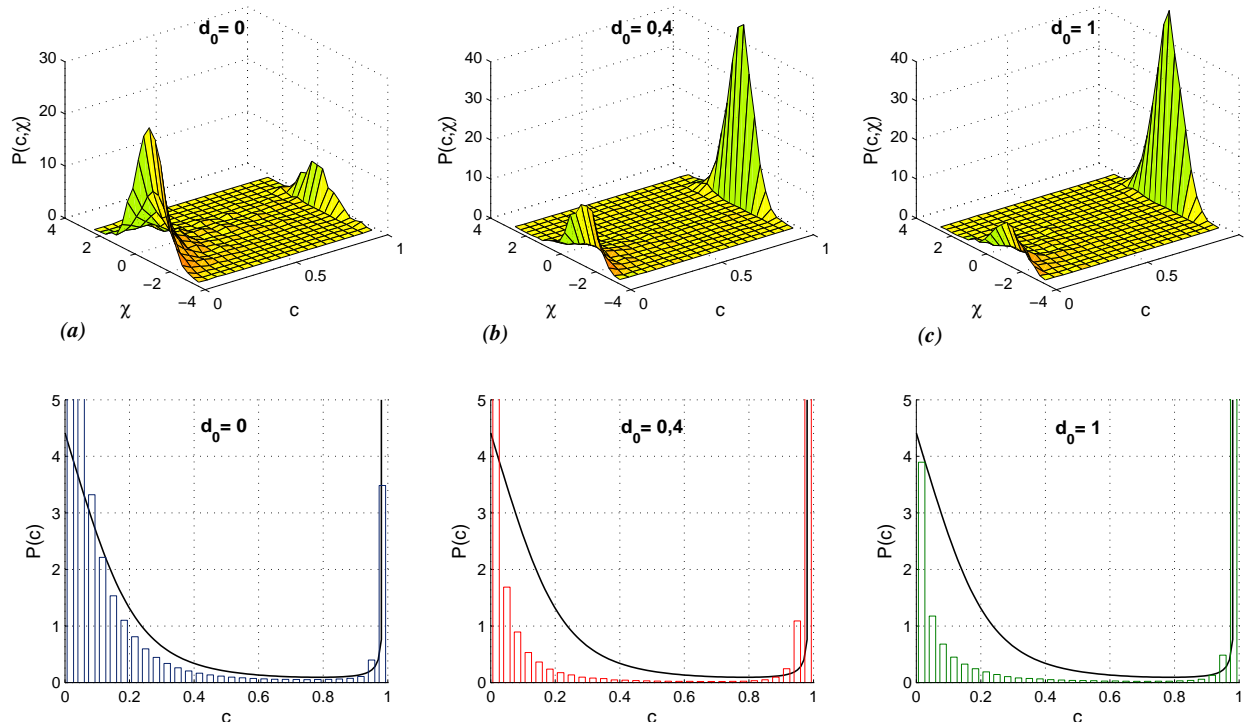


Figure 2. Comparação do estado estacionário das PDFs $P(c, \chi)$ e $P(c)$ no caso de um regime de combustão moderada, $\mathcal{Y} = 0,042$, e mistura baixa, $\mathcal{Z} = 0,5$, usando o modelo de Langevin estendido para (a) $d_0 = 0$, (b) $d_0 = 0,4$ e (c) $d_0 = 1$. A linha contínua representa a PDF de c usando o modelo IEM (Sabel'nikov e Figueira da Silva, 2002).

3.3 Estudo Paramétrico da Influência do Modelo ELM em $\langle c \rangle$ e σ

Nesta seção apresentam-se os resultados de um estudo paramétrico da influência do modelo de Langevin estendido na média, $\langle c \rangle$, e no desvio padrão, σ , da variável de progresso de uma reação para dois valores de \mathcal{Z} , 0,5 e 2, os quais correspondem aos processos de mistura rápida e lenta, respectivamente. Uma faixa ampla das escalas de tempo químico é coberta, $0,03 \leq \mathcal{Y} \leq 1$, abrangendo desde o regime de combustão fraca até aquela que descreve o regime de combustão intensa.

A Fig. 3 apresenta uma comparação dos valores de $\langle c \rangle$ e σ obtidos com o modelo de Langevin estendido quando $d_0 = 0, 0,4$ e 1 são usados. Os resultados mostrados na Fig. 3a, correspondentes a um processo de mistura rápida, $\mathcal{Z} = 2$, mostram que os valores de $\langle c \rangle$ são praticamente idênticos quando $\mathcal{Y} > 0,2$, isto é, quando o regime de combustão é intenso. A medida que a intensidade da reação química torna-se fraca, discrepâncias são observadas as quais são continuamente aumentadas a medida em que o valor de d_0 é aumentado, até um valor cercano a 35%. Os valores de desvio padrão são praticamente similares em todos os regimes de combustão uma vez que discordâncias não maiores do que 6,5% são observadas.

Comportamentos diferentes são obtidos no caso de um processo de mistura lenta, mostrados na Fig. 3b. Por um lado, os valores de $\langle c \rangle$ e σ calculados usando o modelo ELM com $d_0 = 0, 0,4$ e 1 são praticamente idênticos no caso de um regime de combustão intensa ($\mathcal{Y} > 0,2$). Quando o processo da reação química é retardado, a escolha do modelo de mistura influencia substancialmente os valores de $\langle c \rangle$ e σ . Por exemplo, para $\mathcal{Y} = 0,03$ e $\mathcal{Z} = \mathcal{X} = 0,5$, o qual representa um caso de regime de combustão fraca com mistura lenta, os valores de $\langle c \rangle$ obtidos para $d_0 = 0, d_0 = 0,4$ e $d_0 = 1$ são 0,101, 0,630 e 0,748, respectivamente. Desta maneira, para o valor de $d_0 = 0$, o modelo ELM prediz virtualmente a extinção do PaSR, enquanto que o modelo ELM com $d_0 = 1$ leva a uma combustão o qual apresenta a mesma intensidade como se a mistura fosse rápida. Isto demonstra que existe uma influência considerável na escolha de d_0 sobre o valor médio de c . A fig. 3b- igualmente revela que o desvio padrão é afetado, embora, em menor escala. Quando $\mathcal{Y} < 0,06$, o valor de σ predito pelo modelo ELM para $d_0 = 0$ é substancialmente menor do que aquele calculado usando o modelo ELM para $d_0 = 0,4$ e $d_0 = 1$. Note-se também, que o valor de σ , tende a se estabilizar em um valor próximo a 0,4 como resultado do incremento de d_0 .

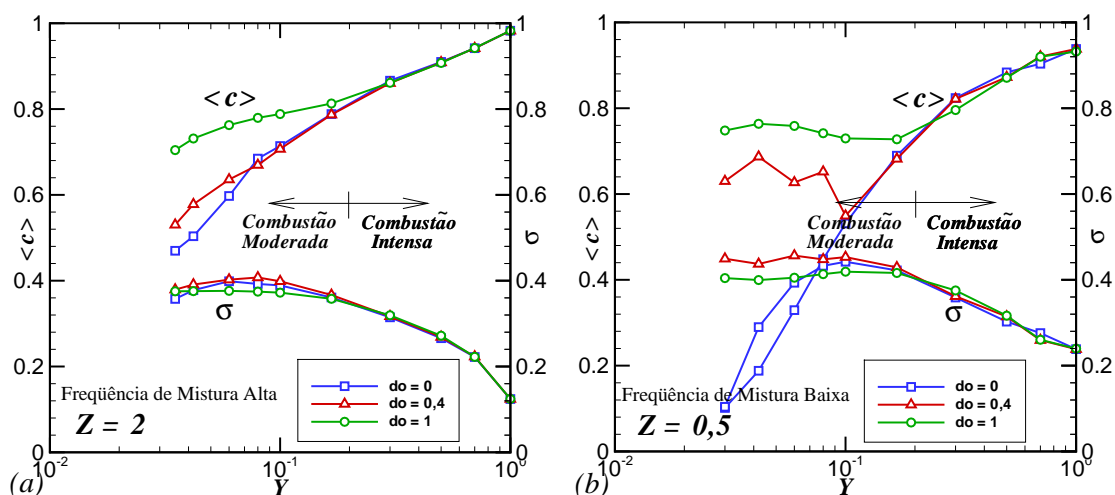


Figure 3. Comparações da média e desvio padrão de c na operação do PaSR o modelo ELM com $d_0 = 0$, $d_0 = 0,4$ e $d_0 = 1$, para (a) Frequência de mistura alta, (b) Frequência de mistura baixa.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentaram-se os resultados do emprego do modelo de Langevin estendido na modelagem e simulação da mistura e combustão. Esta simulação foi realizada usando a técnica de Monte-Carlo para resolver as equações diferenciais estocásticas equivalentes à equação de transporte da função densidade de probabilidade conjunta do campo escalar e da frequência turbulenta. Devido às não linearidades envolvidas na descrição da mistura e da cinética química, foi necessário adotar um esquema numérico recentemente desenvolvido e que resolve eficientemente sistemas de equações diferenciais estocásticas rígidas. Foi estudada em um Reator Parcialmente Homogêneo a evolução da PDF em situações características de mistura rápida com combustão intensa e para uma mistura lenta com combustão moderada. No primeiro caso, a forma da PDF em estado permanente é ligeiramente modificada com a escolha do modelo de mistura. Quando o PaSR se encontra operando em um regime de combustão moderada e mistura lenta, discrepâncias entre as PDFs calculadas foram observadas, em particular, na vizinhança dos gases frescos e dos gases completamente queimados. Estas estão associadas com a descrição Log-normal da frequência turbulenta e do parâmetro que controla a intensidade da taxa de dissipação do escalar. Finalmente, uma análise paramétrica do comportamento dos dois primeiros momentos estatísticos do escalar reativo no interior do PaSR foi apresentada. Esta análise mostra que, no caso de regime de combustão intensa, por exemplo, quando a razão do tempo de residência e o tempo químico é maior que 0,3, os diversos valores de d_0 conduzem a resultados equivalentes. No entanto, para o caso de uma combustão moderada, grandes discrepâncias foram encontradas. De modo geral, um incremento no valor médio do escalar reativo é conseguido quando d_0 encontra-se acima de 0,1. Este comportamento é consistente com o incremento da taxa de reação média que corresponde à abordagem clássica da combustão turbulenta pré-misturada. No entanto, trabalhos futuros devem de ser realizados para a validação deste modelo de mistura em situações de combustão mais complexas.

5. REFERÊNCIAS

Borghi, R., Champion, M., 2000, "Modélisation et Théorie des Flamme", 1st edition, Ed. Technip, France.
 Curl, R.L., 1963, "Dispersed Phase Mixing: I. Theory and Effects in Simple Reactors", AIChE Journal, Vol.11, pp. 119-192.
 Chen, H., Kraichnan, R.H., 1989, "Probability Distribution of a Stochastically Advected Scalar Field", Physics Review Letters, Vol.63, pp. 2657-2660.
 Eswaran, W., Pope, S.B., 1988, "Direct Numerical Simulations of the Turbulent Mixing of a Passive Scalar", Physics of Fluids, Vol.31, pp. 506-520.
 Fox, R.O., 2003, "Computational Model for Turbulent Reacting Flows", 2nd edition, Ed. Cambridge University Press, UK.
 Gardiner, C.W., 1990, "Handbook of Stochastic Methods", 2nd edition, Ed. Springer, Germany.
 Orbegoso, E.M., Figueira da Silva, L.F., 2008, "Study of Stochastic Mixing Models for Combustion in Turbulent Flows", 32nd International Symposium on Combustion, Montreal, Canada.
 Pope, S.B., 1982, "An Improved Turbulent Mixing Model", Combustion Science and Technology, Vol.28, pp. 131-145.
 Pope, S.B., 1985, "PDF Methods for Turbulent Reactive Flows", Progress in Energy and Combustion Science, Vol.111, pp. 119-192.

- Pope, S.B., Chen, Y.L., 1990, "The Velocity–Dissipation Probability Function Model for Turbulent Flows", *Physics of Fluids*, Vol.2, pp. 1437-1449.
- Pope, S.B., 2000, "Turbulent Flows", 1st edition, Ed. Cambridge University Press, UK.
- Sabel'nikov, V.A., Gorokhovski, M.A., 2001, "Extended LMSE and Langevin Models of the Scalar Mixing in Turbulent Flows", *Second International Symposium of Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden.
- Sabel'nikov, V.A., Figueira da Silva, L.F., 2002, "Partially Stirred Reactor: Study of the Sensitivity of the Monte-Carlo Simulation to the Number of Stochastic Particles With the Use of a Semi-Analytic Steady-State Solution to the pdf Equation", *Combustion and Flame*, Vol.129, pp. 164-178.
- Soulard, O., Sabel'nikov, V.A., Gorokhovski, M.A. 2004, "Stochastic Scalar Mixing Model Accounting for Turbulent Frequency Multiscale Fluctuations". *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol.25(5), pp. 875-883.
- Subramaniam, S., Pope, S.B., 1998, "A mixing Model for Turbulent Reactive Flows Based on Euclidean Minimum Spanning Trees", *Combustion and Flame*, Vol.115(4), pp. 487-514.
- Tian, T., Burrage, K., 2001, "Implicit Taylor Methods for Stiff Stochastic Differential Equations", *Applied Numerical Mathematics*, Vol.38, pp. 167-185.
- Valiño, L., Dopazo, C., 1991, "A Binomial Langevin Model for Scalar Turbulent Mixing", *Physics of Fluids*, Vol.3, pp. 3034-3037.
- Villermaux, J., Devillon, J.C., 1972, "Représentation de la Redistribution des Domaines de Ségrégation dans un Fluide par un Modèle D'interaction Phénoménologique", *2nd International Symposium of Chemical Reacting Engineering*, Amsterdam, Netherlands, 1972.
- Yeung, P.K., Pope, S.B., 1989, "Lagrangian Statistics from Direct Numerical Simulations of Isotropic Turbulence", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.207, pp. 531-586.

6. NOTA DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis do material impresso inserido neste artigo.

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM ESCOAMENTO AO REDOR DE UM PAR DE CILINDROS EM TANDEM COM OSCILAÇÃO FORÇADA

Eduardo Silveira Molina, eduardo.molina@puccs.br

Luis Fernando Posada Cuadro, lufepo1984@yahoo.com.br

Jorge Hugo Silvestrini, jorgehs@puccs.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - Av. Ipiranga 6681, Porto Alegre / Brasil

Resumo. Este trabalho tem como objetivo apresentar resultados de um estudo numérico do escoamento bi-dimensional ao redor de dois cilindros em linha considerando os casos particulares no qual o cilindro de jusante recebe uma oscilação forçada e, a continuação, com ambos os cilindros oscilando igualmente. O desprendimento de vórtices de ambos os cilindros é analisado através do comportamento do escoamento, dos coeficientes de arraste e sustentação, do gráfico de fases do campo de velocidades e do espectro de frequências. As simulações numéricas foram realizadas por meio de um código computacional, no qual são utilizados esquemas de diferenças finitas centradas compactas de sexta ordem e conjuntamente com um método Runge-Kutta de baixa armazenagem de terceira ordem. A representação de obstáculos é realizada através do método de fronteiras imersas. O cálculo das forças hidrodinâmicas sobre o cilindro é feito pelo método de volume de controle. A interferência do cilindro de jusante oscilando na esteira do cilindro de montante estacionário é estudada evidenciando a possibilidade de diminuir as forças hidrodinâmicas sobre o cilindro estacionário. Quando ambos cilindros oscilam, é verificada a existência de uma nova bifurcação dentro do diagrama de sincronização apresentado por Papaioannou et al (2006).

Palavra-chave: Desprendimento de vórtices, oscilação forçada, cilindros em tandem

1. INTRODUÇÃO

O escoamento ao redor de dois ou mais cilindros é um estudo genérico com implicações em casos práticos, como vibração induzida pelo escoamento e geração de ruído. Aplicações representativas incluem, por exemplo, tubos de trocadores de calor, edifícios adjacentes e estudos genéricos de aerodinâmica ao redor de obstáculos.

Entre os diversos arranjos em que os dois cilindros podem ser posicionados, o arranjo em linha (tandem) vem sendo estudado extensivamente. Nesta configuração, a esteira do cilindro a montante interfere de forma direta no cilindro a jusante, (Zdravkovich, 1987) [12]. O efeito desta interferência, sensível ao número de Reynolds (Re) e à separação dos cilindros, é visto na variação do número de Strouhal (St) e, conseqüentemente, na frequência de desprendimento de vórtices f_0 , nos padrões de desprendimento de vórtices e na variabilidade dos coeficientes de arraste e sustentação.

Zdravkovich (1987)[12] e Igarashi (1981) [6] classificaram diversas disposições de cilindros estacionários em um escoamento longitudinal, incluindo o arranjo em tandem. Nestes estudos, os autores observaram que a pressão oscila na superfície dos cilindros, e portanto nos coeficientes de arraste e sustentação.

Mais recentemente, Carmo & Meneghini (2006) [4] simularam um escoamento bi e tri-dimensional ao redor de um par de cilindros em linha, com diversas separações, calculando o valor de St em função do número de Re (160 a 300), para cada configuração.

Williamson & Roshko (1988) [10] estudaram os padrões das esteiras de vórtices para um cilindro, oscilando transversalmente em forma senoidal, através de uma variação de amplitudes, A , ($A/D \leq 5$, onde D é o diâmetro do cilindro) e do comprimento de onda, λ , ($\lambda/D \leq 15$). Os autores definiram diferentes regimes para os modos de esteira dos vórtices, usando oscilações controladas, no plano ($\lambda/D, A/D$). Foi introduzida uma terminologia descritiva para cada modalidade de desprendimento de vórtices. Cada esteira de vórtices periódica compreende um único vórtice (S) e/ou pares de vórtices (P), dando padrões tais como 2S, 2P, e a modalidade P + S. Estas são as modalidades principais ao redor da região de sincronização onde a frequência de desprendimento de vórtices é próxima da frequência de excitação.

A questão da existência de uma região de sincronização para dois cilindros oscilantes foi descoberta experimentalmente por Mahir & Rockwell (1996) [8]. Os autores demonstraram que é possível obter uma resposta dentro da região de sincronização em uma faixa maior de frequências de excitação comparada com um único cilindro oscilando. Além disso, eles mostraram que, para uma pequena separação entre cilindros, é possível obter um regime sensível ao ângulo de fase entre os cilindros.

Papaioannou et al (2006) [9] realizaram simulações numéricas para obter informações detalhadas sobre os experimentos de Mahir & Rockwell (1996) [8], evidenciando a existência de uma nova bifurcação dentro do diagrama de sincronização (lock-in) para um escoamento ao redor de um par de cilindros oscilantes com a mesma fase. Os autores demonstraram que era possível ter uma resposta modulada dentro do diagrama de lock-in.

O presente trabalho tem por objetivo realizar um estudo numérico de um escoamento ao redor de um par de cilindros em linha, primeiramente, com o cilindro a jusante recebendo uma oscilação forçada e após, ambos os cilindros oscilando

com mesma amplitude e frequência.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

O modelo matemático que representa o escoamento incompressível é dado pelas equações adimensionais de conservação de massa e de quantidade de movimento:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad , \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{u} = \vec{f} - \vec{\nabla} P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \quad . \quad (2)$$

em que \vec{u} é o vetor velocidade, P o campo de pressão modificado, $\vec{\omega}$ o campo de vorticidade dado pela relação $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ e \vec{f} as forças exteriores. O número de Reynolds é definido como $Re = U_\infty D / \nu$, onde D é o diâmetro do cilindro, U_∞ é a velocidade do escoamento externo (corrente livre) e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

O termo \vec{f} é usado para gerar a representação virtual do cilindro imerso. Este termo, introduzido por Goldstein *et al.* (1993) [5], pode ser descrito por um oscilador harmônico representado por:

$$\vec{f} = \alpha \int_0^t (\vec{u} - \vec{u}_c) dt + \beta (\vec{u} - \vec{u}_c) \quad . \quad (3)$$

A velocidade de oscilação imposta ao cilindro, \vec{u}_c , tem por componentes:

$$u_c = 0 \quad , \quad (4)$$

$$v_c = 2\pi a f_e \cos(2\pi f_e t) \quad . \quad (5)$$

Na Equação (5), u_c é a velocidade imposta ao cilindro na direção do escoamento, v_c é a velocidade transversal ao escoamento imposta ao cilindro, a é a amplitude de oscilação e f_e é a frequência de excitação.

As forças hidrodinâmicas são calculadas pelo Método de Volume de Controle, os coeficientes de arraste (C_D) e sustentação (C_L) são adimensionalizados por:

$$C_D = \frac{F_D}{A_t \frac{\rho U_\infty^2}{2}} \quad ,$$

$$C_L = \frac{F_L}{A_t \frac{\rho U_\infty^2}{2}} \quad . \quad (6)$$

onde F_D é a força de arraste, F_L é a força de sustentação, ρ é a massa específica do fluido e A_t é a área transversal do cilindro.

3. MÉTODO NUMÉRICO

O código computacional, que resolve numericamente as Eq. (1) e (2), utiliza os seguintes métodos: representação espacial definida por um esquema de diferenças finitas centradas compactas de sexta ordem [7] e discretização temporal determinada por um esquema de Runge-Kutta de baixa armazenagem de terceira ordem [11].

As simulações foram realizadas no domínio computacional mostrado na Figura 1, onde $L_x=20D$ e $L_y=16D$ representam, respectivamente, o comprimento e a altura do domínio. As distâncias C_x e C_y representam a localização do cilindro a montante, denominado cilindro 1, em relação à borda inferior esquerda, sendo que ambas possuem o valor de $8D$. Por último, S_D corresponde à distância que separa o cilindro a montante, cilindro 1, do cilindro a jusante, cilindro 2.

A validação dos resultados para um cilindro recebendo uma oscilação forçada foi feita por Benevenuti & Silvestrini [2], onde é verificada a região de sincronização e os espectros de frequências resultantes. Os autores realizaram diversas simulações para várias amplitudes e frequências de oscilação de forma a delimitar a região de sincronização, baseado nos resultados obtidos por Bearman & Meneghini (1995) [1]. A Figura 2 mostra os sinais temporais dos coeficientes de arraste e sustentação do cilindro oscilando dentro da zona de sincronização (sinal vermelho, $a = 0.2$ e $f_e/f_0 = 0.85$) e fora da zona de sincronização (sinal azul, $a = 0.1$ e $f_e/f_0 = 0.85$), sendo a frequência de desprendimento de vórtices (f_0) para um cilindro isolado igual a 0.2.

Para dois cilindros estacionários em linha, o valor do número de Strouhal foi comparado com o obtido por Papaioannou *et al.* (2006) [9] para um escoamento com número de Reynolds igual a 160 e com separação entre os cilindros, S_D , igual a $2.5D$. O resultado obtido, $St = 0.126$, é muito próximo do apresentado por Papaioannou *et al.* (2006) [9], $St = 0.128$.

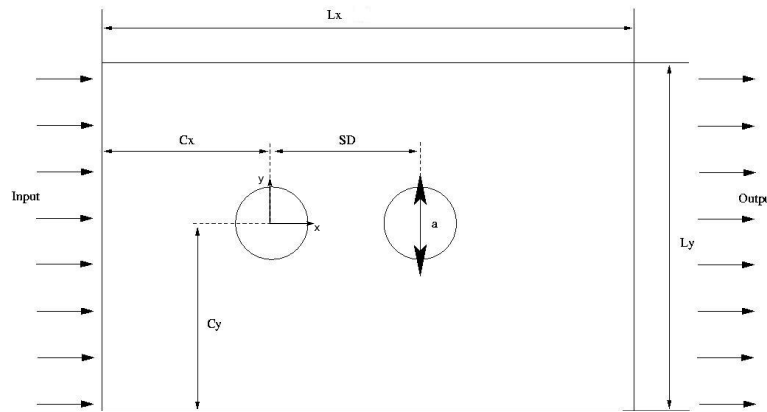


Figura 1. Domínio computacional.

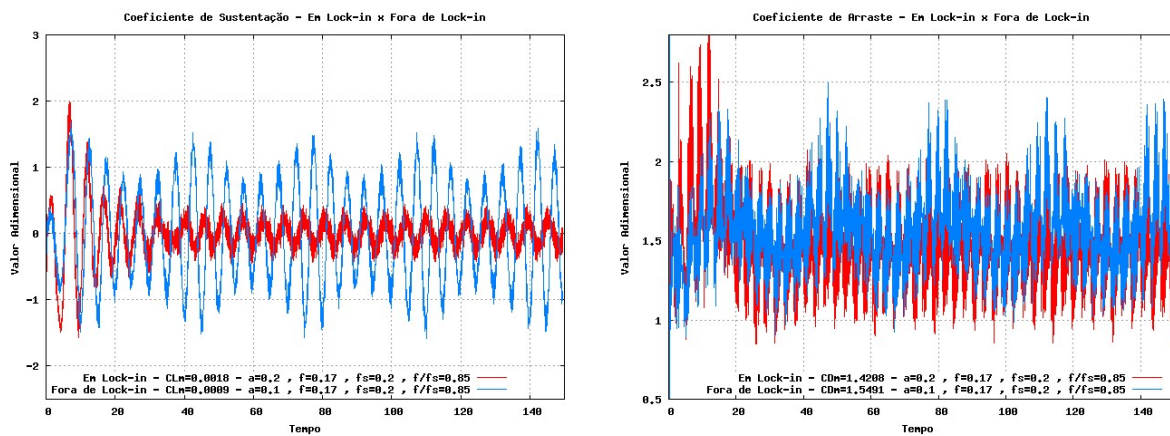


Figura 2. Sinais temporais dos coeficientes de sustentação e arraste dentro (à esquerda) e fora (à direita) da zona de sincronização [2].

4. RESULTADOS

4.1 Escoamento ao redor de dois cilindros em tandem com oscilação forçada no cilindro a jusante

Apresentam-se a continuação os principais resultados obtidos de simulações numéricas do escoamento bi-dimensional a $Re = 300$ ao redor de dois cilindros em linha com o cilindro de jusante recebendo uma oscilação forçada.

A escolha de duas separações longitudinais, $S_L = 2.5D$ e $S_L = 4.0D$, foi feita através de estudos prévios. Na primeira separação, o cilindro a jusante está completamente dentro da esteira do cilindro a montante, formando uma única esteira. Por outro lado, na segunda separação escolhida, há espaço para o desprendimento de vórtices do cilindro a montante [3]. A condição inicial foi definida a partir de simulações com ambos cilindros em repouso, uma vez que os coeficientes de arraste e sustentação dos dois cilindros estabilizaram-se.

A oscilação do cilindro a jusante é imposta através da introdução da amplitude e da frequência. A frequência f_e foi escolhida através do gráfico da região de sincronização de Bearman & Meneghini(1995) [1], optando-se pela relação de frequência $f_e/f_0 = 0.85$ para todas as soluções. As amplitudes foram selecionadas considerando a discretização do domínio de cálculo escolhido igual a $D = 32\Delta$, sendo Δ o tamanho da malha. Desta forma foram considerados os casos: $a_1 = 0.0625D$ (corresponde a 2 malhas de oscilação), $a_2 = 0.125D$ (4 malhas) e $a_3 = 0.1875D$ (6 malhas) para as duas configurações.

A Figura 3 apresenta os resultados para a primeira configuração, $S_D = 2.5D$, com os dois cilindros em repouso, não recebendo nenhuma oscilação. Conforme mostra a Figura, os sinais dos coeficientes de sustentação e arraste encontram-se defasados, decorrente do desprendimento de vórtices da esteira única formada pelos dois cilindros.

A Figura 4 apresenta os resultados para a mesma configuração, agora com oscilação forçada de amplitude igual a $0.0625D$ no cilindro a jusante. Os resultados sugerem que se colocarmos um cilindro oscilando forçadamente com uma amplitude baixa, atrás e em linha com um outro cilindro estacionário, há possibilidade de controlar a força de sustentação exercida no primeiro cilindro. Uma explicação possível para este fato é que a pequena oscilação imposta ao cilindro a jusante limita a variação do campo de pressão do cilindro a montante, pois os dois formam uma esteira única, refletindo no amortecimento do coeficiente de sustentação.

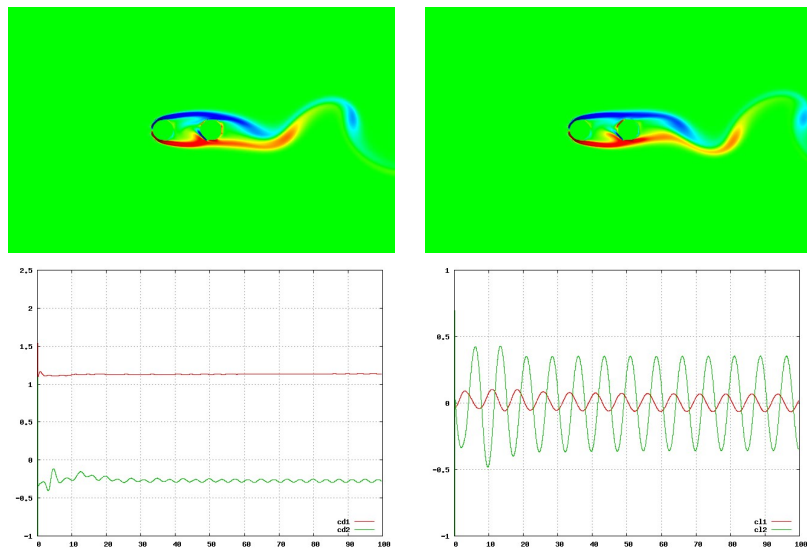


Figura 3. Visualização do escoamento ao redor de dois cilindros estacionários com $S_D = 2.5D$. À esquerda, a curva do coeficiente de arraste e à direita, a do coeficiente de sustentação. Os sinais vermelhos são do cilindro a montante e os sinais verdes do cilindro a jusante

Conforme a Tabela 1, comparando os resultados obtidos com a simulação anterior (cilindros estacionários), há um decréscimo do $C_{L_{rms}}$ do cilindro a jusante (cilindro 2). A diferença de fase observada no sinal de C_L e a esteira única persistem. A média do C_D , para ambos cilindros, aumentam.

Tabela 1. Resultados globais para $S_D = 2.5D$.

$S_D=2.5D$	Estacionário				$a=0.0625D$			
	C_{D_m}	$C_{D_{rms}}$	C_{L_m}	$C_{L_{rms}}$	C_{D_m}	$C_{D_{rms}}$	C_{L_m}	$C_{L_{rms}}$
Cyl(1)	1.1320	0.0016	- 0.0005	0.0467	1.1672	0.0028	0.0000	0.0111
Cyl(2)	-0.2726	0.0149	0.0006	0.2525	-0.2169	0.0254	-0.0024	0.2365
	$a=0.125D$				$a=0.1875D$			
Cyl(1)	1.1789	0.0016	0.0006	0.0398	1.1794	0.0060	0.0022	0.0790
Cyl(2)	-0.0679	0.0514	-0.0029	0.3523	0.0659	0.0779	-0.0041	0.4316

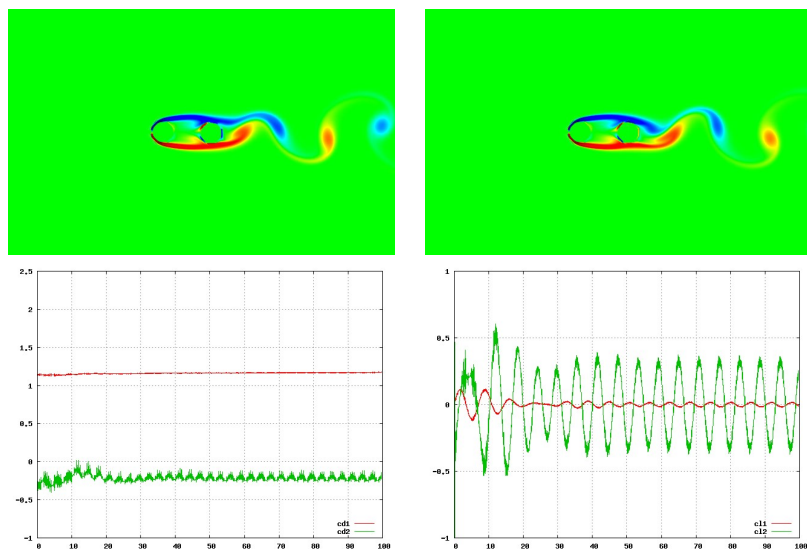


Figura 4. Visualização do escoamento com $S_D = 2.5D$ e com o cilindro 2 oscilando com amplitude igual a $0.0625D$. À esquerda, a curva do coeficiente de arraste e à direita, a do coeficiente de sustentação. Os sinais vermelhos são do cilindro a montante e os sinais verdes do cilindro a jusante.

A terceira simulação para a configuração $S_D = 2.5D$ é mostrada na Figura 5, onde o cilindro 2 é forçado a oscilar com uma amplitude de $0.125D$. A diferença de fase no sinal C_L e a esteira única continuam sendo características marcantes como é constatado na Figura 5. Há um aumento na amplitude de oscilação do C_L do cilindro 2 em razão à oscilação, assim como no C_D que mantem-se negativo mas agora próximo de zero. Para o cilindro 1, a média do C_L aumenta em relação a simulação com oscilação de $0.0625D$ ficando próxima ao caso com os cilindros estacionários.

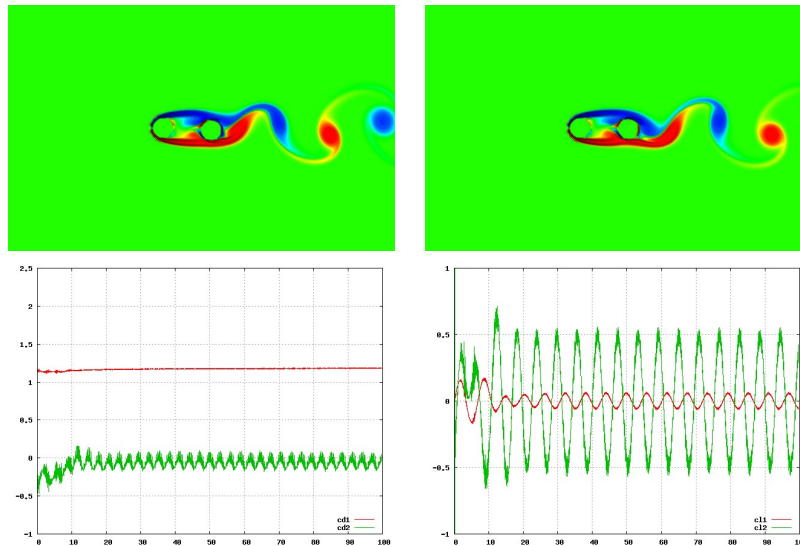


Figura 5. Visualização do escoamento com $S_D=2.5D$ e com o cilindro 2 oscilando com amplitude igual a $0.125D$. À esquerda, a curva do coeficiente de arraste e à direita, a do coeficiente de sustentação. Os sinais vermelhos são do cilindro a montante e os sinais verdes do cilindro a jusante.

Para a configuração de $S_D = 2.5D$, a quarta simulação foi com o cilindro 2 oscilando com amplitude igual a $0.1875D$, e é apresentada na Figura 6. A média do C_D do cilindro 2 torna-se positiva, mas ainda não ocorre o desprendimento de vórtices do cilindro 1, conforme é mostrado na figura. O acréscimo dado pela oscilação ao cilindro 2 pode ser visto no valor do $C_{L_{rms}}$ na Tabela 1.

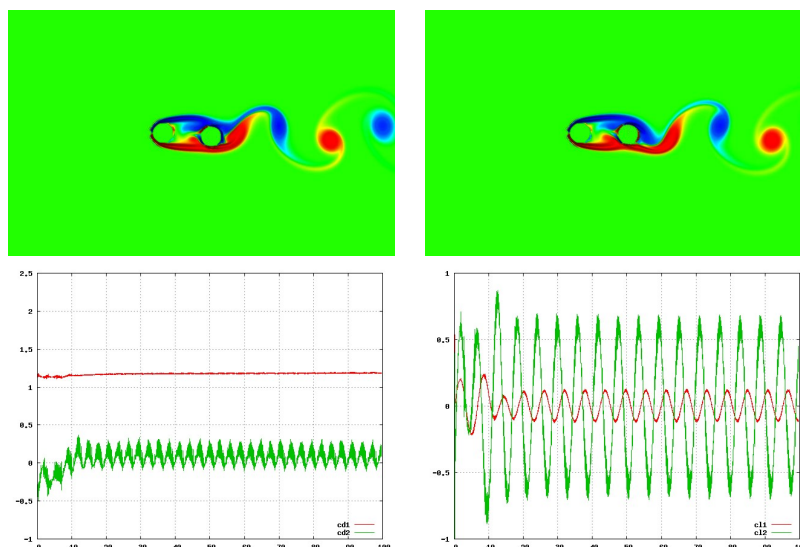


Figura 6. Visualização do escoamento com $S_D=2.5D$ e com o cilindro 2 oscilando com amplitude igual a $0.1875D$. Abaixo a curva de arraste e sustentação, respectivamente.

Nas simulações para a configuração com separação de $4D$, as forças hidrodinâmicas impostas ao cilindro 1 não são sensíveis à oscilação do segundo cilindro como ocorreu na primeira configuração. Pode-se notar que os valores dos coeficientes de arraste e sustentação do primeiro cilindro, em todas as simulações, não sofreram alteração significativa com as três oscilações impostas, conforme mostra a Tabela 2.

Nesta configuração, a diferença de fase entre as curvas dos coeficientes de sustentação dos dois cilindros permanece inalterável em todas as simulações. Por outro lado, as curvas dos coeficientes de arraste permanecem em fase. Um aspecto

de importância que surge com a oscilação imposta no segundo cilindro é o aumento do efeito "batimento" do coeficiente de sustentação do cilindro 2.

Tabela 2. Resultados globais para $S_D = 4.0D$.

$S_D=4.0$	Estacionário				$a=0.0625D$			
	C_{Dm}	C_{Drms}	C_{Lm}	C_{Lrms}	C_{Dm}	C_{Drms}	C_{Lm}	C_{Lrms}
Cyl(1)	1.4994	0.0751	-0.0002	0.7974	1.5092	0.0835	-0.0010	0.8009
Cyl(2)	0.6457	0.3603	-0.0010	1.7326	0.5956	0.3216	-0.0071	1.7544
	$a=0.125D$				$a=0.1875D$			
Cyl(1)	1.5024	0.0838	-0.0013	0.8029	1.4980	0.0834	-0.0017	0.8045
Cyl(2)	0.5737	0.3469	-0.0107	1.7114	0.5983	0.3718	-0.0143	1.7273

4.2 escoamento ao redor de dois cilindros oscilantes em tandem

Esta seção apresenta os resultados de um escoamento bi-dimensional a $Re = 160$, ao redor de um par de cilindros em tandem, com ambos cilindros oscilando com mesma frequência e amplitude. As simulações foram realizadas com base nos resultados obtidos experimentalmente por Mahir & Rockwell (1996) [8] e numericamente por Papaioannou *et al* (2006) [9].

A separação longitudinal escolhida foi $S_D = 2.5D$. Como anteriormente, a condição inicial foi definida a partir desta simulação com os cilindros estacionários até os coeficientes de arraste e sustentação dos dois cilindros tornarem-se estabilizados. A partir desta condição, os dois cilindros começam a oscilar com a mesma frequência, amplitude e fase. A componente longitudinal (u) e transversal (v) do campo de velocidades foram registrados na da esteira dos cilindros no ponto $x/D = 5$ e $y/D = 0.5$.

As simulações numéricas foram realizadas considerando o diagrama de sincronização de Papaioannou *et al* (2006) [9], Figura 7. A amplitude foi fixada em $a = 0.35D$ e a relação de frequência f_e/f_0 , onde f_e é a frequência de excitação e f_0 é a frequência natural para dois cilindros estacionários, foi variada de 0.7 a 1.719. Este diagrama mostra a existência de uma segunda bifurcação para um relação de frequência f_e/f_0 entre 1.25 e 1.5 e amplitudes maiores que $0.35D$, na qual é encontrada uma resposta fora da zona de sincronização.

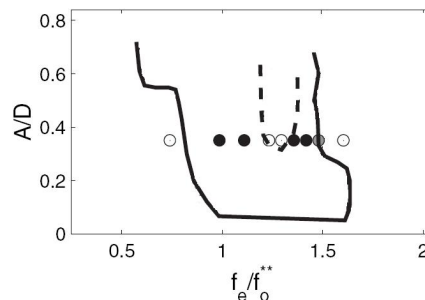


Figura 7. Diagrama de sincronização com as simulações realizadas, adaptado de Papaioannou *et al* (2006). os círculos pretos correspondem a uma resposta sincronizada, círculos brancos indicam fora da zona de sincronização e círculos cinzas correspondem a uma resposta transicional. [9].

Na primeira simulação, com $f_e/f_0 = 0.7$, é observada uma resposta não sincronizada, caracterizando uma esteira desorganizada, fato que também pode se constatar no gráfico de fase do campo de velocidades (Figura 8). Este gráfico é construído usando os sinais temporais das componentes de velocidade $u(x, y)$ e $v(x, y)$ na posição x, y indicada anteriormente. O espectro de potência obtido a partir dos sinais temporais da componente transversal do campo de velocidades apresenta diversos picos. A média do C_D do cilindro a jusante torna-se positiva caracterizando o desprendimento de vórtices entre os cilindros. O acréscimo dado pela oscilação imposta pode ser visto no C_{Lrms} de ambos cilindros, conforme é apresentado na Tabela 3.

Na Figura 9 se apresentam os resultados obtidos para $f_e/f_0 = 0.976$. A resposta está claramente dentro da zona de sincronização, com um pico na frequência de excitação mostrado no espectro. A esteira exibe uma estrutura simétrica, organizada caracterizada por dois desprendimentos de vórtices (um de cada cilindro) do mesmo sinal por ciclo. Os valores de C_{Dm} e C_{Drms} de ambos os cilindros aumentam em relação a simulação com frequência de excitação $f_e/f_0 = 0.7$, enquanto que os valores de C_{Lrms} diminuem para o cilindro a montante e aumentam para o cilindro a jusante. O gráfico da fase apresenta uma estrutura definida e fechada caracterizando uma resposta sincronizada.

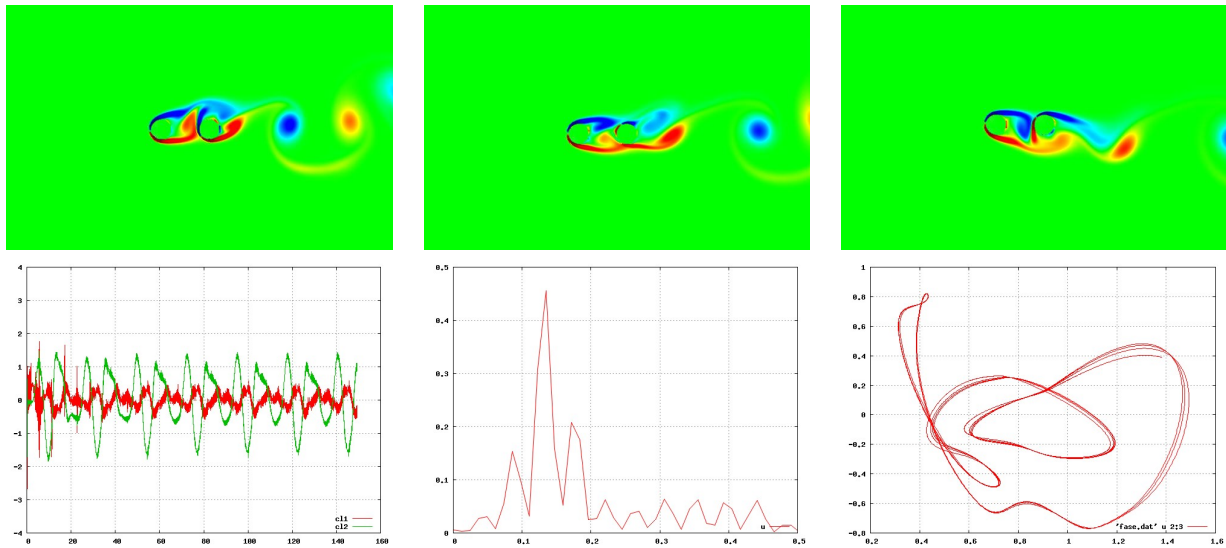


Figura 8. Visualização, em três instantes característicos, do escoamento ao redor de um par de cilindros oscilantes com $f_e/f_0 = 0.7$, sinais temporais do coeficiente de sustentação (Cil.1 vermelho e Cil.2 verde), espectro de velocidade e gráfico da fase.

Tabela 3. Resultados globais para $S_D = 2.5D$, com cilindros estacionários e com cilindros oscilando com amplitude $a = 0.35$ e frequências $f_e/f_0 = 0.7, 0.976$ e 1.226 .

$S_D=2.5$	Estacionário				$f_e/f_0=0.700$			
	C_{Dm}	C_{Drms}	C_{Lm}	C_{Lrms}	C_{Dm}	C_{Drms}	C_{Lm}	C_{Lrms}
Cyl(1)	1.2037	0.0024	-0.0004	0.0261	1.2477	0.1730	0.0002	0.2067
Cyl(2)	-0.1980	0.0043	-0.0008	0.1550	0.4875	0.4428	0.0178	0.7984
	$f_e/f_0=0.976$				$f_e/f_0=1.226$			
Cyl(1)	1.4553	0.2194	-0.0006	0.1857	1.6742	0.3787	-0.0019	0.5732
Cyl(2)	1.2228	0.5833	0.0001	1.5587	0.4869	0.1659	-0.0087	0.7429

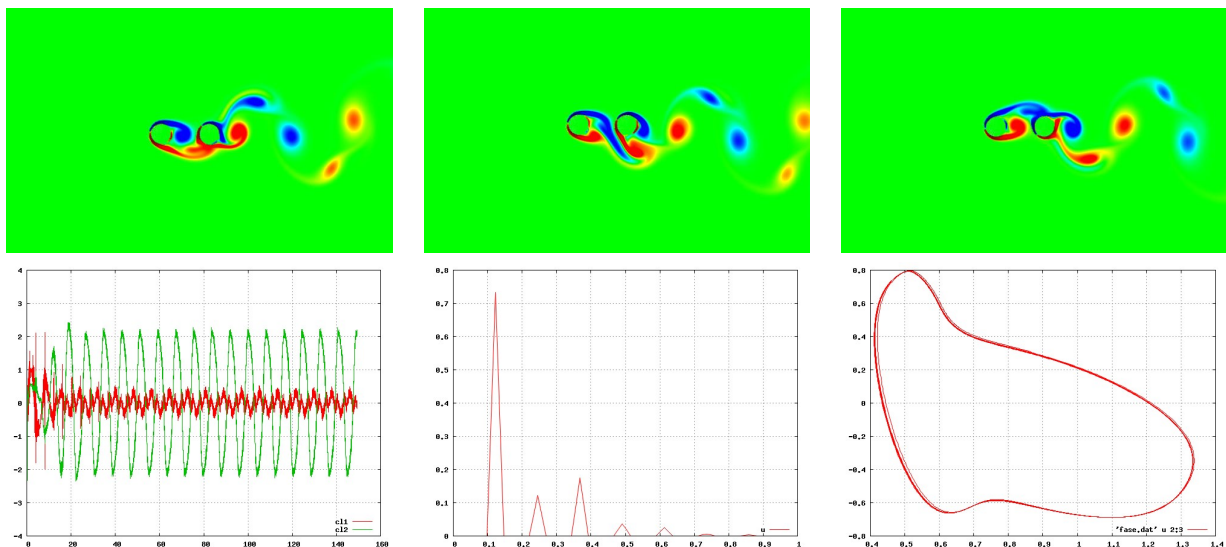


Figura 9. Visualização, em três tempos característicos, do escoamento ao redor de um par de cilindros oscilantes com $f_e/f_0 = 0.976$, sinais temporais do coeficiente de sustentação (Cil.1 vermelho e Cil.2 verde), espectro de velocidade e o gráfico da fase.

Para $f_e/f_0 = 1.226$ (Figura 10), existe um desprendimento quase periódico com três picos apresentados no gráfico do espectro, $f_e/2, f_e, 3f_e/4$. O campo de vorticidade para este caso apresenta uma esteira desorganizada consistente com os picos da análise do espectro, mostrando que a resposta está fora da zona de sincronização. Os valores de C_{Dm}, C_{Drms}

e $C_{L_{rms}}$ do cilindro a jusante diminuem bruscamente, enquanto que para o cilindro a montante aumentam. O gráfico da fase volta a apresentar uma estrutura desorganizada, como a simulação da Figura 8, caracterizando uma resposta fora da zona de sincronização.

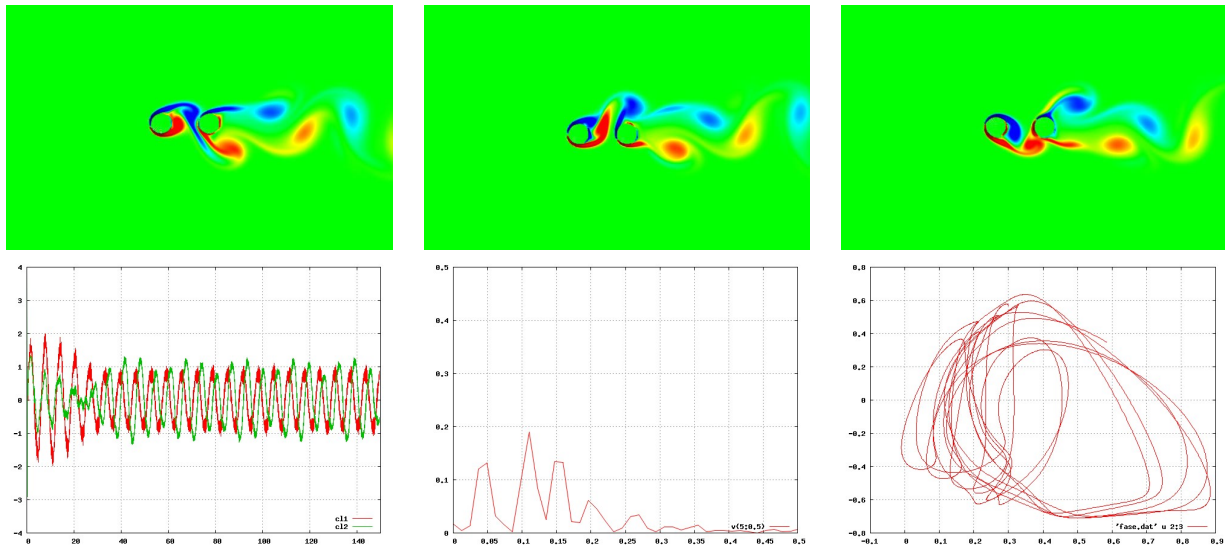


Figura 10. Visualização do escoamento ao redor de um par de cilindros oscilantes com $f_e/f_0 = 1.226$, sinais temporais do coeficiente de sustentação (Cil.1 vermelho e Cil.2 verde), espectro de velocidade e gráfico da fase.

Com o aumento da frequência para $f_e/f_0 = 1.344$ (ver Figura 11), a esteira volta para o estado de lock-in com picos no espectro de $f_e, 2f_e$ e apresentando uma estrutura 2S de desprendimento de vórtices. Os valores de $C_{L_{rms}}$ aumentam bruscamente para ambos cilindros, assim como o valor de C_{D_m} para o cilindro a jusante, conforme valores em Tabela 4. O gráfico da fase volta a apresentar uma estrutura fechada, caracterizando a sincronização.

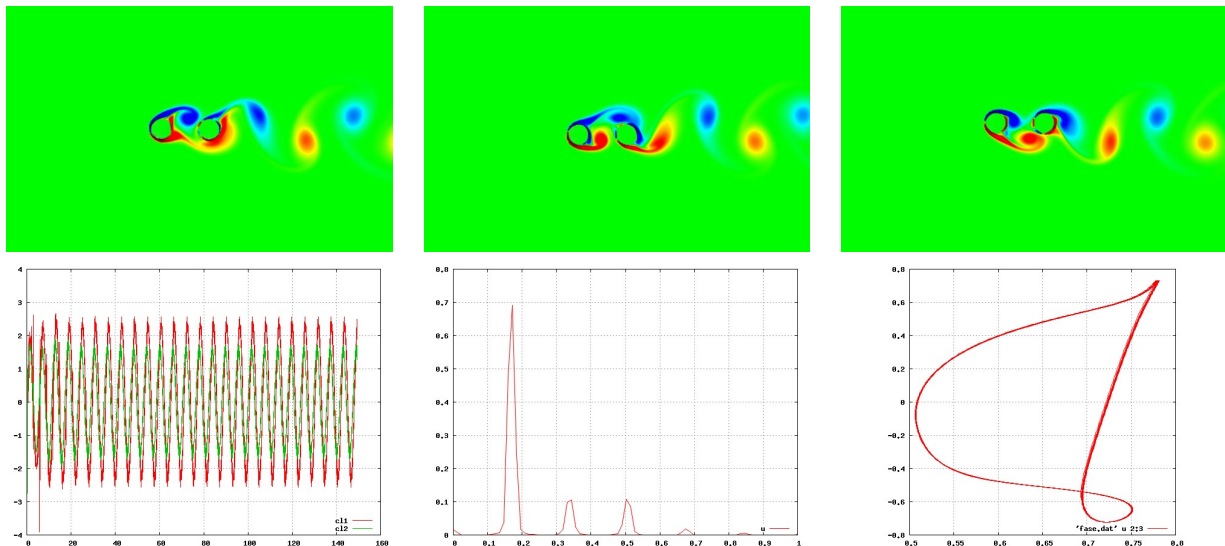


Figura 11. Visualização do escoamento ao redor de um par de cilindros oscilantes com $f_e/f_0 = 1.334$, sinais temporais do coeficiente de sustentação (Cil.1 vermelho e Cil.2 verde), espectro de velocidade e gráfico da fase.

A Figura 12 mostra os resultados para a frequência de excitação $f_e/f_0 = 1.446$. Os resultados mostram uma esteira organizada, dentro da zona de sincronização e com um campo de vorticidade apresentando um estrutura 2S de desprendimento de vórtices com um pico pronunciado. O espectro de velocidade apresenta os picos $f_e, 2f_e$. Há um aumento do valor de $C_{L_{rms}}$ para ambos os cilindros comparado com os resultados para a frequência $f_e/f_0 = 1.334$. A estrutura fechada no gráfico da fase persiste nesta simulação.

A última simulação, Figura 13, apresenta os resultados para a frequência de excitação $f_e/f_0 = 1.719$. O campo de vorticidade é mais intenso que as simulações anteriores e os vórtices são formados relativamente perto um dos outros na esteira do cilindro a jusante. Assim, o espectro de velocidade apresenta picos múltiplos de $f_e/2$. Os valores de C_{L_m} e $C_{L_{rms}}$ aumentam para ambos os cilindros devido a saída da região de sincronização. Por outro lado, a tabela mostra

Tabela 4. Resultados globais para $S_D=2.5D$, com ambos os cilindros oscilando com amplitude $a = 0.35$ e frequências $f_e/f_0 = 1.344, 1.469, 1.719$.

$S_D=2.5D$	$f_e/f_0=1.344$				$f_e/f_0=1.469$			
Cyl(1)	1.5114	0.3973	-0.0011	1.6118	1.4730	0.4006	-0.0009	1.8071
Cyl(2)	0.7067	0.1413	-0.0024	1.1048	0.6459	0.1487	-0.0019	1.6536
	$f_e/f_0=1.719$							
		C_{Dm}	C_{Drms}	C_{Lm}	C_{Lrms}			
Cyl(1)		1.4268	0.4175	0.0008	2.2686			
Cyl(2)		0.1890	0.1863	-0.0041	2.5334			

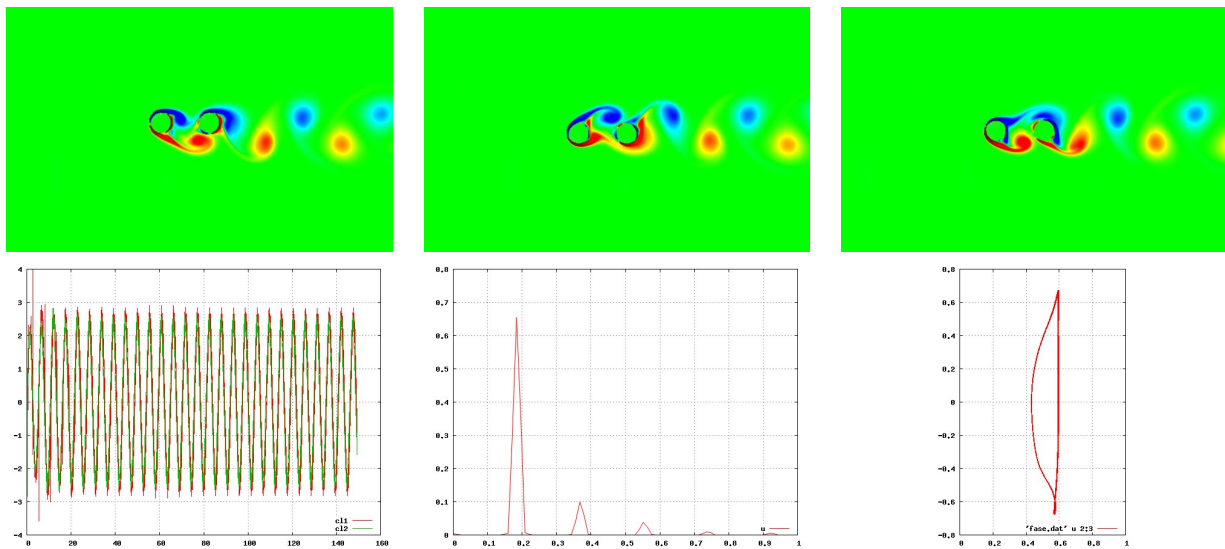


Figura 12. Visualização do escoamento ao redor de um par de cilindros oscilantes com $f_e/f_0 = 1.446$, sinais temporais do coeficiente de sustentação (Cil.1 vermelho e Cil.2 verde), espectro de velocidade e gráfico da fase.

a queda do valor de C_{Dm} do cilindro a montante, apresentando o menor valor de todas as simulações realizadas com os cilindros oscilando. O gráfico da fase volta a apresentar uma estrutura desorganizada, assim como as simulações anteriores característicos de casos que estão fora da zona de sincronização (Figuras 8 e 11).

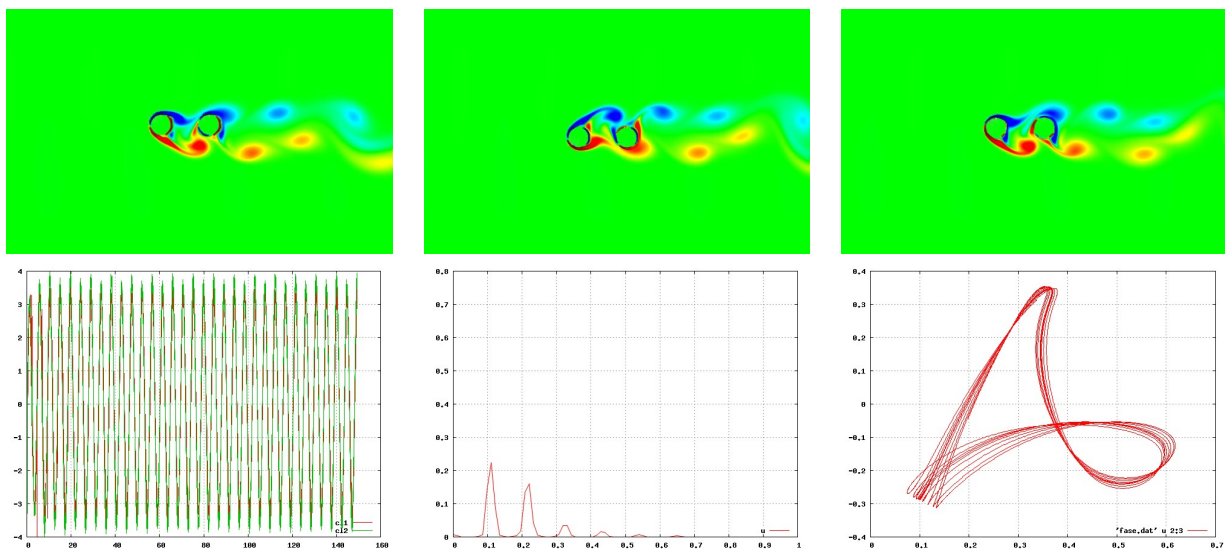


Figura 13. Visualização do escoamento ao redor de um par de cilindros oscilantes com $f_e/f_0 = 1.719$, sinais temporais do coeficiente de sustentação (Cil.1 vermelho e Cil.2 verde), espectro de velocidade e gráfico da fase.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho tem como propósito simular numericamente um escoamento bi-dimensional ao redor de um par de cilindros em linha. O trabalho é dividido em duas partes: uma primeira onde o cilindro a jusante oscila forçadamente e, na segunda parte, onde ambos cilindros oscilam.

Na primeira parte foram escolhidas duas distâncias de separação entre os cilindros $S_D = 2.5D$ e $S_D = 4.0D$, onde para a primeira separação o cilindro a jusante está dentro da esteira do primeiro cilindro formando uma esteira única. Já para a segunda distância de separação, o cilindro a jusante está completamente fora da esteira do primeiro. Quatro simulações foram realizadas para cada separação considerando o caso do escoamento ao redor de dois cilindros estacionários e após com o cilindro a jusante oscilando em diferentes amplitudes ($0.0625D$, $0.125D$ e $0.1875D$) com frequência constante e igual a $f_e/f_0 = 0.85$.

Nas simulações para a distância de $S_D = 2.5D$, a média do coeficiente de arraste do cilindro 1 permaneceu praticamente inalterada, já a média do coeficiente de arraste do cilindro 2 aumentava proporcionalmente a oscilação imposta, tornando-se positiva na amplitude $0.1875D$. Os coeficientes de sustentação dos dois cilindros apresentaram uma diferença de fase. Porém, o coeficiente de sustentação do cilindro 1 foi suscetível à oscilação do cilindro 2 como mostram as Figuras 3, 4, 5 e 6. Na simulação com amplitude de oscilação de $0.0625D$ verificou-se uma queda no sinal temporal do coeficiente de sustentação do cilindro a montante. Uma explicação possível para este fato é que a pequena oscilação imposta ao cilindro a jusante limita a variação do campo de pressão do cilindro a montante, pois os dois formam uma esteira única, refletindo no amortecimento do coeficiente de sustentação. Nas demais simulações, o coeficiente de sustentação de ambos os cilindros variou proporcionalmente a oscilação imposta ao cilindro 2.

Nas simulações para $S_D = 4.0D$, os resultados apresentados mostraram que as oscilações do cilindro 2 não alteram os coeficientes de arraste e sustentação do cilindro 1, pois o cilindro 2 encontra-se fora da esteira do cilindro 1. Os coeficientes de arraste e sustentação do cilindro 2 sofrem influência direta das amplitudes de oscilação. A diferença de fase dos sinais temporais é mantida em todas as simulações.

Na segunda parte, com ambos os cilindros oscilando, foi fixada a amplitude de $a = 0.35D$, diferença de fase entre os cilindros de zero graus e frequência de excitação f_e/f_0 variando de 0.7 a 1.716. Os resultados numéricos confirmam a existência de uma nova bifurcação que levam a respostas não periódicas dentro do diagrama de sincronização evidenciada por Papaioannou *et al* (2006) [9]. Os gráficos de fase apresentaram uma estrutura definida e fechada para casos em que a resposta é sincronizada. Por outro lado, para casos com respostas não periódicas, os gráficos apresentados são completamente desorganizados.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte da FAPERGS, Fundação de Amparo à Pesquisa do Rio Grande do Sul, PIBIC, Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e do CNPQ, Conselho Nacional de Pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

- P. W. BEARMAN and J. R. MENEGHINI. Numerical Simulation High Amplitude Oscillatory Flow About a Circular Cylinder. *J. of Fluids and Structures*, **9**:435–455, 1995.
- L. B. BENEVENUTI and J.H. SILVESTRINI. Estudo numérico de um escoamento através de um cilindro oscilante utilizando o método de fronteiras imersas. *Proceeding of ENIEF*, 2006.
- E. H. BRANBILA. Desprendimento de vórtices de obstáculos cilíndricos alinhados por simulação numérica direta. Salão de iniciação científica, PUCRS, 2005.
- B.S. CARMO and J.R. MENEGHINI. Numerical investigation of the flow around two circular cylinders in tandem. *J. of Fluids and Structures*, **22**:979–988, 2006.
- D. GOLDSTEIN, R. HANDLER, and L. SIROVICH. Modeling a no-slip boundary condition with an external force field. *J. Comp. Phys.*, **105**:354–366, 1993.
- T. IGARASHI. Characteristics of the flow around two circular cylinders arranged in tandem. *Bulletin of Japan Soc. Mechanical Eng.*, **24**:323–331, 1981.
- S. K. LELE. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, **103**:16–42, 1992.
- N. MAHIR and D. ROCKWELL. Vortex formation from a forced system of two cylinders part i: tandem arrangement. *J. of Fluids and Structures*, **10**:473–489, 1996.
- G.V. PAPAIOANNOU, D.K.P. YUE, M.S. TRIANTAFYLLOU, and G.E. KARNIADAKIS. Evidence of holes in the arnold tongues of flow past two oscillating cylinders. *Physical Review Letters*, **96**:14501–1–4, 2006.
- C. H. K. WILLIAMSON and A. ROSHKO. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. *J. of Fluids and Structures*, **2**:355–381, 1988.
- J. H. WILLIAMSON. Low-storage Runge-Kutta schemes. *J. Comp. Phys.*, **35**:48–56, 1980.
- M.M. ZDRAVKOVICH. The effects of interference between circular cylinders in cross-flow. *J. of Fluids and Structures*,

1:239–261, 1987.

CÉLULAS DE CORRENTES EM ESCOAMENTOS GERADOS POR GRADES OSCILANTES

Carlos Eugênio Pereira, cep@sc.usp.br

José Eduardo Alamy Filho, zeedu@feciv.ufu.br

Nivaldo Aparecido Corrêa, nacorrea@sc.usp.br

Harry Edmar Schulz, heschulz@sc.usp.br

Departamento de Hidráulica e Saneamento, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador Sãocarlense, 400. CP 359. CEP 13566-590

Resumo. A turbulência gerada em equipamentos de grade oscilante permite a comprovação experimental de proposições teóricas. Usualmente não se considera a presença de correntes preferenciais nas constatações experimentais conduzidas nesses equipamentos. Entretanto, para que as previsões teóricas possam ser definitivamente corroboradas, é preciso quantificar as correntes preferenciais e a sua forma, de modo que se possa inferir a sua influência nos fenômenos medidos. No presente estudo apresentam-se resultados experimentais da quantificação das correntes preferenciais em escoamentos gerados por grades oscilantes, mostrando que a sua estrutura é bem definida e que devem ser considerados nas comprovações teóricas de fenômenos associados à turbulência. Como uma bomba hidráulica, a energia imposta ao sistema converte-se também em movimentos preferenciais (não só turbulentos), o que foi resumidamente denominado de “efeito de bomba hidráulica”. Considerou-se uma situação de agitação caracterizada por amplitude, frequência, tamanho de malha da grade e profundidade da água mantidos constantes ao longo dos experimentos. O presente texto apresenta os resultados experimentais decorrentes de medidas de velocidade realizadas em um tanque no qual a turbulência foi produzida por grades oscilantes. Verifica-se que tal dispositivo gera escoamentos médios, os quais podem assumir características geométricas bastante complexas. As medidas foram realizadas com velocimetria a laser, utilizando técnica PIV (Particle Image Velocimetry).

Palavras-Chave: Turbulência, Velocimetria a Laser, Grades Oscilantes, Correntes Preferenciais.

1. INTRODUÇÃO

Os processos de transferência de quantidades físicas em fluidos ocorrem geralmente em escoamentos turbulentos e são de difícil quantificação. As dificuldades ocorrem tanto no campo experimental como no campo teórico. No campo experimental são necessários equipamentos adequados, que permitam obter avaliações corretas das flutuações das quantidades físicas. No campo teórico as dificuldades se relacionam à complexidade das equações e à indisponibilidade de computadores suficientemente rápidos e capazes de processar a enorme quantidade de dados em tempos razoáveis. Por isso muitos equacionamentos apresentam “lacunas” que são “preenchidas” com novas equações, com princípios físicos indefinidos, tornando ainda mais complexos o entendimento e a solução dos problemas relativos a essa área de estudo.

Um equipamento relatado na literatura, usado para gerar movimento turbulento, é o tanque de grades oscilantes, utilizado há mais de sessenta anos. Comparando-o aos canais utilizados em laboratório, os quais também são equipamentos amplamente empregados para estudar escoamentos hídricos, a turbulência gerada é relativamente menos intensa. Em princípio, esse equipamento gera uma estrutura turbulenta simples e com intensidade controlável. Ao longo das décadas o seu uso ganhou espaço, sendo usado em estudos voltados para responder diferentes questões. Isto ocorre talvez devido às características gerais associadas à turbulência gerada, tais como: homogeneidade da turbulência ao longo de um plano, geração com intensidade controlável, tensões de Reynolds nulas distante das grades e comprovação de modelos teóricos para turbulência isotrópica. Os tanques com grades oscilantes já foram utilizados para detalhar a transferência de gás em interfaces, verificar o comportamento de sedimentos, observar a dispersão de poluentes e quantificar a mistura interfacial de fluidos estratificados, entre outros.

No presente estudo evidencia-se que uma aspecto deste tipo de equipamento, que é a intrínseca geração de correntes preferenciais, não foi considerada nos estudos precedentes. São mostrados resultados experimentais que indicam uma estrutura de escoamento média bem definida, a qual é sobreposta pelo movimento turbulento também gerado pelo equipamento.

2. HISTÓRICO DO USO DE TANQUES COM GRADES OSCILANTES

O tanque de grades oscilantes é um equipamento geralmente composto de um tanque de água, em cujo interior grelhas ou grades são osciladas com auxílio de equipamento mecânico. Schulz (1997) comenta que esse movimento é regular, portanto inserindo energia de forma determinística no meio fluido. Rouse & Dodu, citados em Thompson & Turner (1975), utilizaram um tanque com grades oscilantes para examinar o movimento em uma mistura interfacial de fluidos estratificados. As grades geravam turbulência, sendo o seu efeito observado em uma interface líquido/líquido.

Estudos semelhantes foram feitos por Cromwell (1960), Turner e Kraus (1967), e Turner (1968), também citados em Thompson & Turner (1975), sendo que em todos esses trabalhos as taxas de mistura foram interpretadas usando escalas de comprimento e velocidade baseadas na geometria e frequência da grade oscilante. Thompson & Turner (1975) utilizaram o equipamento de Turner (1968) e procuraram descrever a mistura através de uma interface líquido/líquido usando as propriedades da turbulência na região próxima dessa interface. Para isso correlacionaram a velocidade turbulenta com os parâmetros externos (parâmetros de controle do equipamento), como frequência e a amplitude de oscilação da grade para três grades de malhas diferentes. Em cada combinação foram medidas as escalas de comprimento turbulentas e verificados os decaimentos espaciais da turbulência. Hopfinger & Toly (1976) também descreveram a intensidade turbulenta no fluido através de parâmetros externos (de controle do equipamento). Sendo o movimento da grade especificado pela amplitude S , frequência f , com um lado da malha da grade M , os autores sugeriram:

$$u' = 0,25 \cdot f \cdot S^{1,5} \cdot M^{0,5} \cdot y^{-1} \quad (1)$$

onde u' é o valor RMS da velocidade (intensidade turbulenta) e y é a distância a partir do centro do movimento da grade.

O tanque com grades oscilantes se presta bem ao estudo de transferência de gases através da interface ar-água, como descrito por Brumley (1984). O autor obteve algumas formas de espectros de turbulência, perfis de flutuação de velocidade e perfis de comprimento de escala dentro da camada limite hidrodinâmica superficial. Dickey et al. (1984), por sua vez, realizaram medidas simultâneas das flutuações de velocidade nas direções vertical e horizontal e forneceram um campo de velocidades na superfície, assumindo a turbulência isotrópica no plano horizontal. Os autores concluíram o trabalho desenvolvendo, através de análise dimensional, um coeficiente utilizando parâmetros estatísticos obtidos de suas medições e o compararam ao coeficiente de transferência de gases. Brumley & Jirka (1987) realizaram medidas com anemometria de filme quente, obtendo perfis verticais das componentes vertical e horizontal da velocidade turbulenta (valor RMS), das escalas de comprimento integrais transversal e longitudinal e da taxa de dissipação de energia em seu tanque de grades oscilantes. O objetivo do trabalho era esclarecer a estrutura turbulenta e elucidar os detalhes da transferência mecânica de massa na interface gás/líquido. Chu & Jirka (1991) procuraram avançar no detalhamento do mecanismo de transferência de massa na interface ar-água, utilizando o mesmo equipamento de Brumley & Jirka (1987), medindo ainda as flutuações de concentração de oxigênio dissolvido na água. Concluíram que a espessura da camada limite de concentração abaixo da superfície da água pode ser relacionada com o número de Reynolds turbulento no seio do volume de água e que a macro-escala do movimento dos turbilhões é dominante na transferência de massa interfacial. Roma (1988) desenvolveu um sensor para estudar ondulações na interface ar/água através de refração ótica, um estudo que se fundamenta na observação das franjas de diferentes luminosidades abaixo de uma superfície ondulante. Da Silva & Fernando (1994) utilizaram grades oscilantes e técnica PIV para estudar algumas propriedades da turbulência isotrópica. Os dados obtidos foram usados para avaliar o espectro de frequência Euleriano. Brunk et al. (1996) utilizaram uma coluna vertical com cinco grades oscilantes com movimento oscilatório simultâneo e idêntico. Segundo os autores, a turbulência gerada era isotrópica e homogênea, e, por meio de uma seleção apropriada de amplitudes e frequências das grades, geraram-se dados que foram utilizados para simular a lei de decaimento exponencial da intensidade turbulenta em escoamentos em canal aberto. Perfis de sedimentos foram também obtidos nessa coluna. Os experimentos permitem sugerir que a "coluna de turbulência" pode ser utilizada para simular o carreamento dos sedimentos em canais. Orlins & Gulliver (2000) também utilizaram a técnica PIV em um tanque com grade oscilante para investigar a relação entre turbulência na superfície livre e o transporte de massa. Os autores apresentaram velocidades, vorticidades e divergente bi-dimensionais superficiais. Medina et al. (2001) realizaram um conjunto de experimentos para estudar o comportamento de sedimentos na presença de um campo turbulento com escoamento médio nulo. Também foram medidos o aumento e o decaimento das velocidades para diferentes concentrações de sedimentos. Cheng & Law (2001) investigaram a turbulência gerada por uma grade vertical também usando a técnica PIV. Em uma análise comparativa, seus resultados concordam com os demais resultados presentes na literatura. Souza (2002) projetou e construiu um tanque de grade oscilante e realizou medidas de velocidade turbulenta também utilizando PIV. A amplitude de oscilação utilizada foi mantida constante em 3,0 cm, para quatro diferentes frequências de oscilação. O autor adquiriu 9.600 imagens do movimento do fluido, em seis regiões do tanque e gerou gráficos para os campos de velocidade turbulenta (valor RMS), possibilitando a observação do decaimento espacial da turbulência e da região de sua produção. Janzen (2003) ampliou os resultados de Souza (2002), realizando medidas precisas com PIV para diferentes condições de frequência e amplitude da grade. Adicionalmente, estudou com detalhes a região compreendida entre duas grades oscilantes. Modelos teóricos construídos para essa região foram corroborados por suas medidas.

Nenhum dos trabalhos mencionados buscou a quantificação das correntes preferenciais existentes nesses tanques, bem como a sua modificação em alterando as condições experimentais. Nesse sentido, o presente trabalho apresenta primeiros resultados obtidos na descrição detalhada das correntes preferenciais existentes nesse tipo de equipamento, conforme descritos em Pereira (2006).

3. MATERIAIS E MÉTODOS

Utilizou-se o tanque contruído por Souza (2002), também descrito em Janzen (2003) e Pereira (2006), constituído de placas de acrílico transparente de espessura de 0,025 m, com um tanque central de base quadrada (0,50 m x 0,50 m) e profundidade interna de 1,15 m e dois tanques laterais com dimensões de 0,15 m x 0,50 m e profundidade igual ao primeiro. A grade oscilante utilizada neste trabalho tinha dimensões de 0,494 x 0,494 m, com 9 x 9 barras quadradas de aço inoxidável com 0,01 m de lado, produzindo um espaçamento entre os eixos de 0,051 m, com 32% de solidez (relação entre a área ocupada pelas barras e a área horizontal do tanque). A grade foi posicionada a 0,55 m do fundo do tanque. A Figura 1a é um esquema dos tanques e da grade e a Figura 1b mostra toda a bancada experimental deste trabalho.

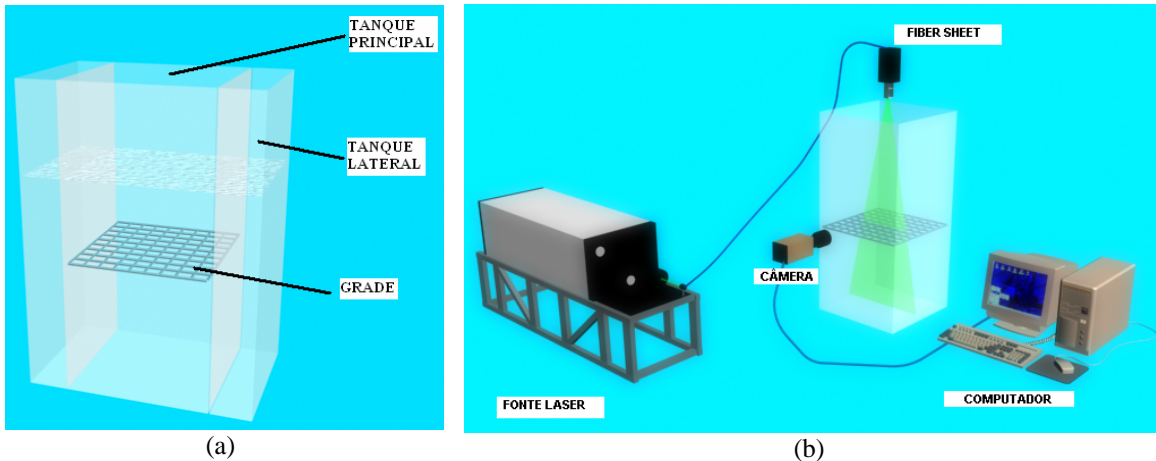


Figura 1: a) Os três tanques e a posição da grade oscilante. b): Bancada experimental: tanque de grade oscilante, micro computador, câmara digital e luz laser. Fonte: PEREIRA (2006)

As medidas de velocidade foram realizadas com técnica PIV (Particle Image Velocimetry), utilizando luz laser e uma câmara digital para registrar as posições sucessivas de partículas na água. A fonte luminosa é um equipamento de laser verde de vapor de cobre (Oxford Laser LS-20-10 20W frequência de pulsação de 10kHz) usado para evidenciar partículas traçadoras inertes (suspensão diluída de talco neutro, sobrenadante após sedimentação de 24 horas). A câmara digital é do tipo CCD de alta resolução e velocidade (Kodak EP1000). Através de um programa computacional (Visiflow), as informações das posições sucessivas e dos tempos envolvidos foram convertidas nos campos de velocidade utilizados nas análises. Para o posicionamento da câmara digital e do feixe plano de laser (3 mm de espessura), foi construído um suporte para permitir o deslocamento tridimensional tanto da câmara como do *Fiber-Sheet* (gerador da folha de luz, ver Figura 1b). A Figura 2a mostra as estruturas de barra que compõem o suporte para o posicionamento da câmara e do *Fiber-Sheet*. O transporte da luz até o *Fiber-Sheet* foi feito com fibra óptica. A Figura 2b mostra a bancada em operação.

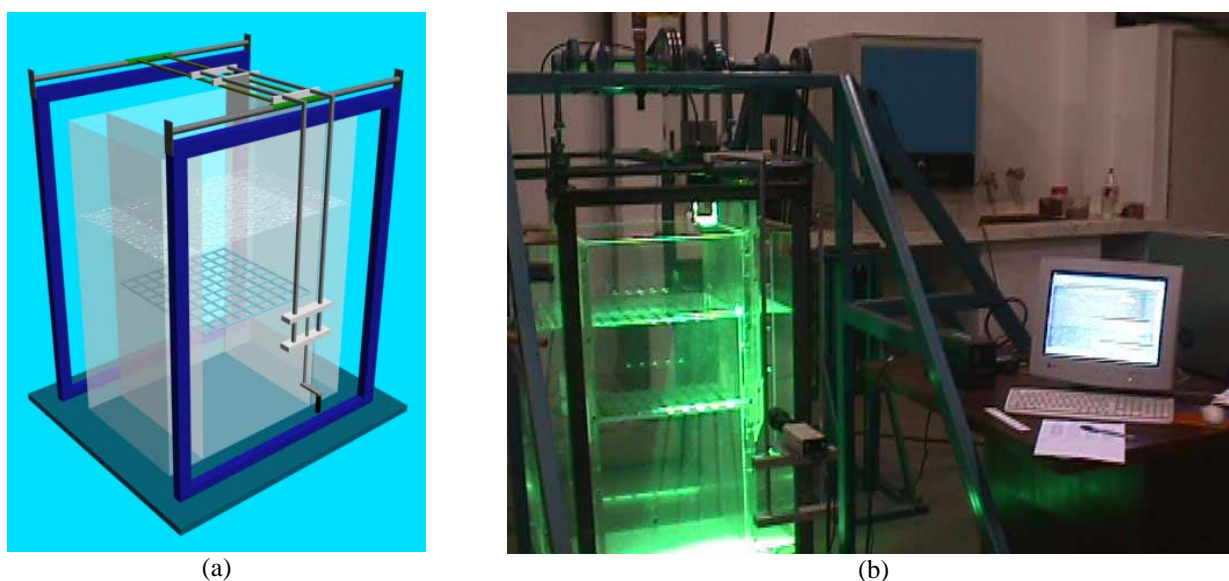


Figura 2: a) Sistema de Movimentação Tridimensional (barras colocadas acima e ao lado do tanque). b): Bancada em operação, mostrando a folha de luz, a câmara digital, o tanque e o sistema de aquisição de imagens. Fonte: PEREIRA (2006).

A frequência de oscilação da grade foi estabelecida em 100 rpm, com amplitude de oscilação de 0,01 m, totalizando um movimento vertical da grade de 0,02 m. No presente estudo são descritos os resultados obtidos para o nível da água fixo em 0,15 m acima do centro de oscilação da grade.

Os experimentos foram feitos com o feixe plano de laser colocado em diferentes posições no volume de líquido, permitindo efetuar uma série de medidas de velocidades em uma varredura de diversos planos do escoamento no interior do tanque. Foram definidas as três direções ortogonais XYZ. Nesta representação, a direção Y é vertical. Nas direções X e Z (horizontais) foram estabelecidas quatro seções ou cortes, como é mostrado na Figura 3a. Como os lados do tanque central têm comprimento de 0,5 m, definiram-se quatro cortes nas direções X e Z, separados por uma distância “ideal” de 0,1 m. Houveram ajustes nessas distâncias, uma vez que se buscou localizar as seções em posições Sobre as Barras (SB) da grade (duas seções) e Entre as Barras (EB) da grade (as duas seções restantes). A Figura 3b mostra a disposição adotada.

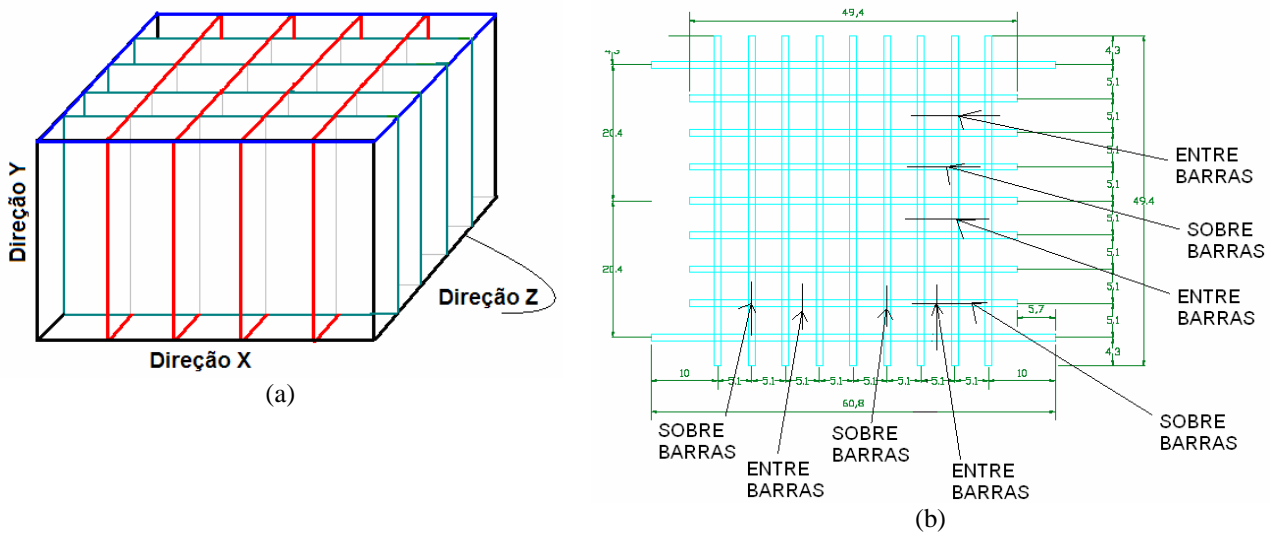


Figura 3: a) Acima: cortes nas direções X e Z b) Ao lado: posições “entre barras” e “sobre barras”, conforme SOUZA (2002) e JANZEN (2003).

Imagens muito próximas à grade geram vetores de velocidade perturbados pela presença intermitente da grade. Assim, estipulou-se que o nível inferior de cada foto ficasse localizado a 0,5 cm acima da amplitude máxima de oscilação da grade.

Após o acionamento do motor elétrico na rotação definida anteriormente, esperou-se, em todos os ensaios, um intervalo de 30 minutos para permitir o estabelecimento de condições estacionárias (com relação à turbulência e aos eventuais escoamentos preferenciais) dentro do tanque de água. O ensaio foi iniciado junto à parede na posição 1 da Figura 4 (direção X), sendo adquiridas e armazenadas 1.000 imagens seqüenciais. Daí deslocou-se sucessivamente a câmara para as posições 2, 3 e 4, sendo adquiridas e armazenadas 1000 imagens em cada posição. O mesmo procedimento foi feito para a direção Z.

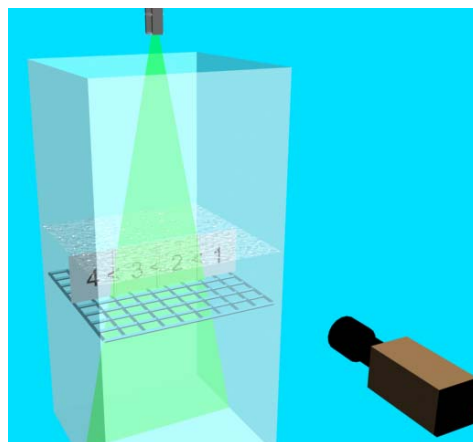


Figura 4: Posições da câmara e dos setores medidos. Fonte: PEREIRA (2006).

O total de 1.000 imagens por posicionamento da câmara foi obtido em pacotes de 100 imagens, capturadas ao longo de três minutos. Cada pacote de 100 imagens foi capturado em quatro segundos. Assim, o intervalo entre a captura de cada pacote foi de aproximadamente 16 segundos. A macroescala de tempo para as flutuações turbulentas nos

experimentos de grades oscilantes tem ordem de grandeza de segundo (segundo a literatura), o que permite dizer que em três minutos as imagens englobam eventos estatisticamente independentes.

Considerando as oito seções nas duas direções e a necessidade de quatro campos independentes por seção, cada qual utilizando 1.000 imagens, foram obtidas, no total, 32.000 imagens, analisadas rigorosamente. Essas imagens permitiram compor 8 campos de velocidade média para as oito seções estudadas. Cada foto apresenta dimensões de aproximadamente 0,15 x 0,15 m, e em torno de 43 x 43 vetores de velocidade, obtidos com o uso de programa que utiliza correlação cruzada entre posições de partículas em fotografias sucessivas. A distância total sobre o eixo Y engloba desde a posição de oscilação máxima da grade até a superfície livre, ou seja, das posições 0,015 m até 0,165 m no eixo Y . Como as fotografias tinham 0,15 m, então varreu-se toda a altura do escoamento.

Arquivos *.ASC* foram organizados com os valores numéricos das variáveis presentes nos cortes nas duas direções. Posteriormente, foi utilizada uma rotina de computador, em linguagem *FORTRAN*, desenvolvida no contexto desta pesquisa, para interpolar os resultados obtidos nas duas direções, nas linhas em que os planos se interceptam. A saída do programa de interpolação é apresentada em forma de texto, que por fim, pode ser lido pelo programa *TECPLOT*, responsável pela geração das figuras tridimensionais apresentadas a seguir.

4. RESULTADOS

A apresentação dos campos de velocidade permite observar a qualidade da tomografia efetuada, através da visualização dos padrões de movimento em cada seção ou corte. As Figuras 5a e b contêm as seções com os campos da velocidade horizontal U no plano XY . A posição alternada dos cortes nas duas figuras (cortes 1 e 3 e cortes 2 e 4) objetiva a visualização completa dos quatro campos de velocidade (sem sobreposição).

As Figuras 6a e b mostram a componente horizontal W da velocidade, nos planos ZY , seguindo os mesmos procedimentos adotados para a velocidade U .

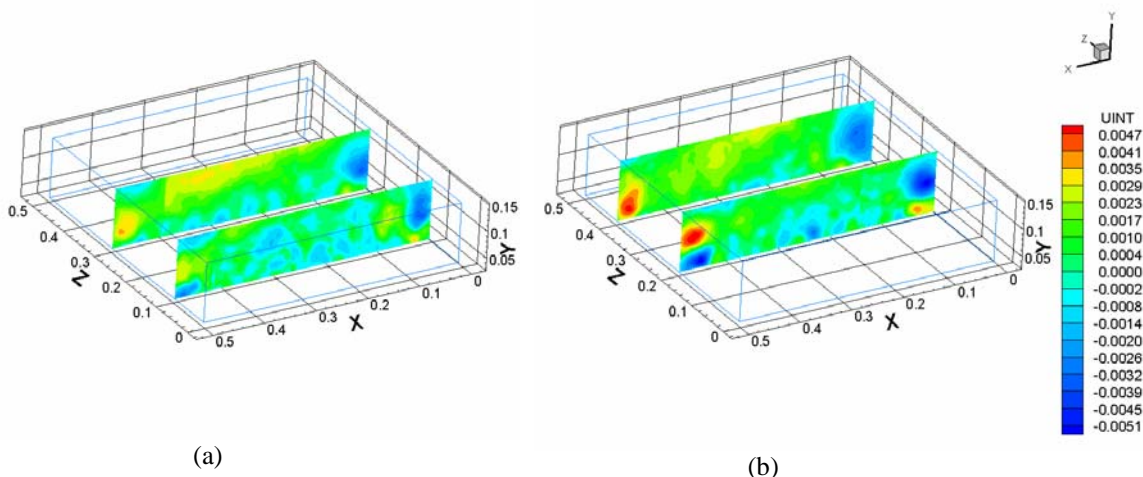


Figura 5: a) Velocidade horizontal U (m/s) no plano XY em $z = 0,1\text{m}$ e $z = 0,3\text{m}$. b) Velocidade horizontal U (m/s) no plano XY em $z = 0,2\text{m}$ e $z = 0,4\text{m}$. A escala de velocidades está indicada em m/s.

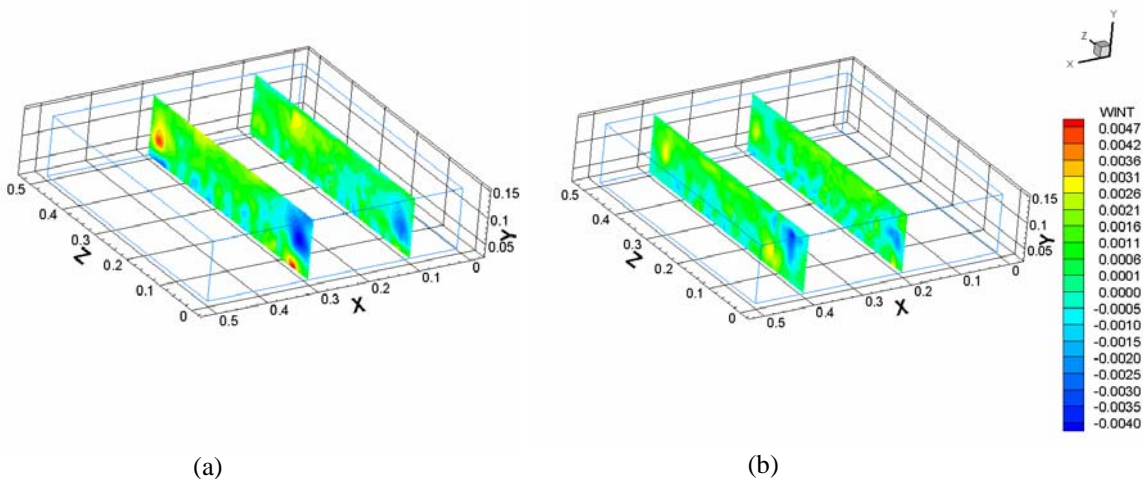
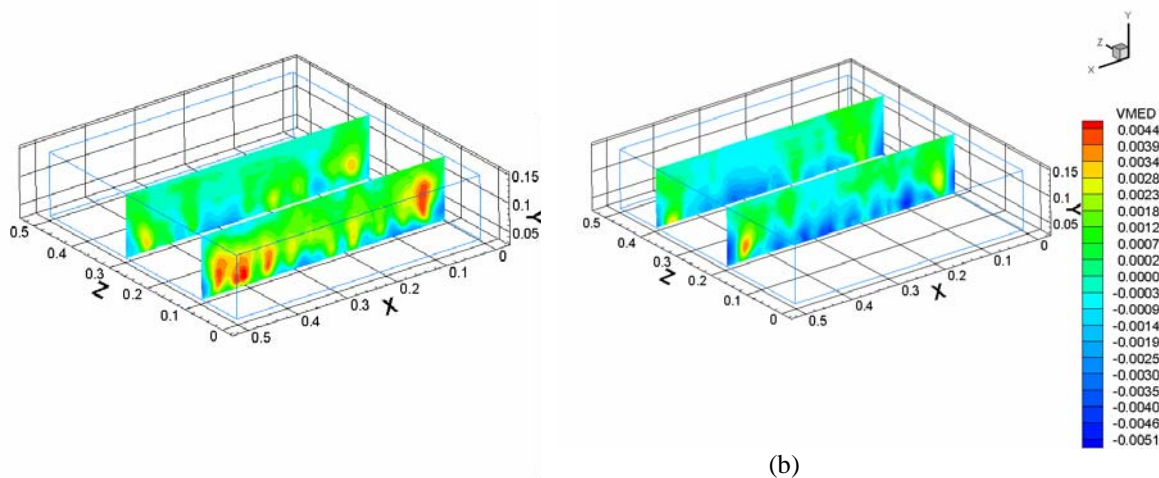


Figura 6: a) Velocidade horizontal W (m/s) no plano ZY em $x = 0,1\text{m}$ e $x = 0,3\text{m}$. b) Velocidade horizontal W (m/s) no plano ZY em $x = 0,2\text{m}$ e $x = 0,4\text{m}$. A escala de velocidades está indicada em m/s.

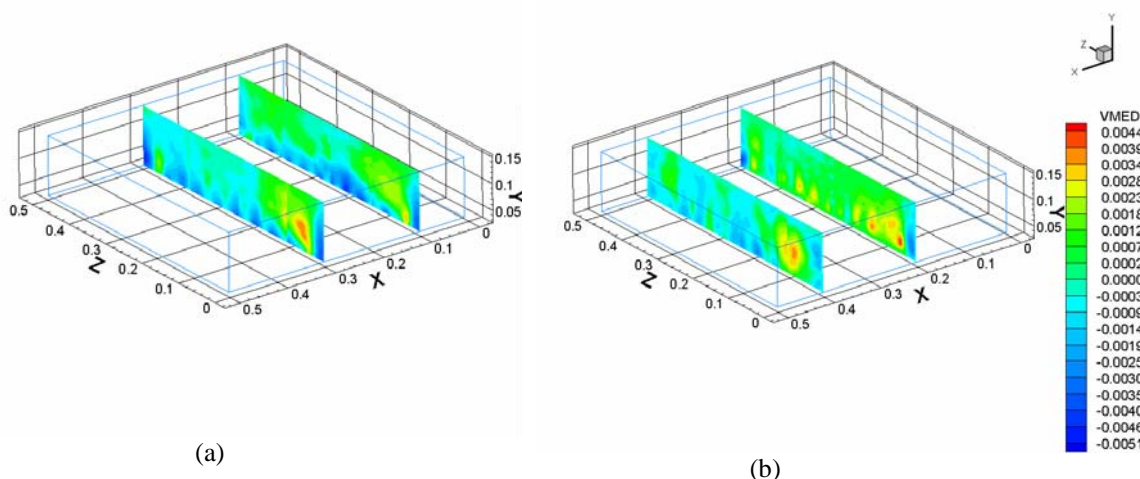
Finalmente, as Figuras 7a e b e 8a e b mostram a componente vertical V da velocidade, segundo os planos XY e os planos ZY . A forma de obtenção dos dados permitiu que essa componente da velocidade fosse analisada em planos ortogonais, permitindo uma visão mais completa em todo o volume. As imagens mostram nitidamente os efeitos da presença da grade no campo de velocidade.



(a)

(b)

Figura 7: a) Velocidade vertical V (m/s) no plano XY em $z = 0,1$ m e $z = 0,3$ m. b) Velocidade vertical V (m/s) no plano XY em $z = 0,2$ m e $z = 0,4$ m. A escala de velocidades está indicada em m/s.



(a)

(b)

Figura 8: a) Velocidade vertical V (m/s) no plano ZY em $x = 0,1$ m e $x = 0,3$ m. b) Velocidade vertical V (m/s) no plano ZY em $x = 0,2$ m e $x = 0,4$ m. A escala de velocidades está indicada em m/s.

Todas as Figuras 5 a 8 mostram a presença de vórtices, uma vez que as regiões com componentes positivas e negativas ocupam preferencialmente diferentes regiões do volume líquido. É interessante observar as regiões positivas e negativas junto às extremidades da grade (parte inferior das extremidades das figuras, junto às paredes). Nessas regiões, tanto para os cortes perpendiculares a X como para os perpendiculares a Z , a composição das velocidades horizontais e verticais evidencia vórtices com velocidade descendente junto às paredes. Uma vez que esta estrutura de vórtice ocorre ao longo de toda a extremidade da grade, a sua representação contínua mostra a existência de um toro (Figura 12) com velocidade ascendente na parte interna e descendente na parte externa. Evidencia-se, portanto, uma estrutura de escoamento preferencial nítida.

Os valores da componente vertical da velocidade obtidos para todos os pontos das oito seções medidas foram interpolados de forma a se obter campos tri-dimensionais para esta componente. As Figuras 9, 10 e 11 mostram superfícies de isovelocidades para V , considerando valores positivos e negativos semelhantes. Nota-se, principalmente nas Figuras 10 e 11, a presença de jatos verticais que decorrem das aberturas da grade oscilante, mostrando que o campo de velocidades é influenciado por sua geometria. Adicionalmente, esta forma de apresentação permite observar que o campo médio da velocidade vertical, para todo o núcleo do volume de líquido, apresenta valores positivos (ascendentes) mais próximo à origem de X (lado direito das figuras), enquanto os valores negativos (descendentes) localizam-se mais próximo a $Z=0,5$ m (lado esquerdo da figura). Ademais, as Figuras 5 e 6 mostram que o movimento horizontal junto à superfície ocorre preferencialmente na direção positiva, tanto para U como para W , o que corresponde a um movimento da direita para a esquerda sobreposto às Figuras 9, 10 e 11, gerando uma “macro-célula” de circulação

com dimensões semelhantes às do volume de líquido estudado. A Figura 13 mostra essa célula de circulação mais ampla, sobreposta ao toro da Figura 12.

Os resultados mostram que a energia imposta ao sistema gera movimentos preferenciais, semelhantemente a uma bomba hidráulica, o que pode ser denominado de “efeito de bomba hidráulica”.

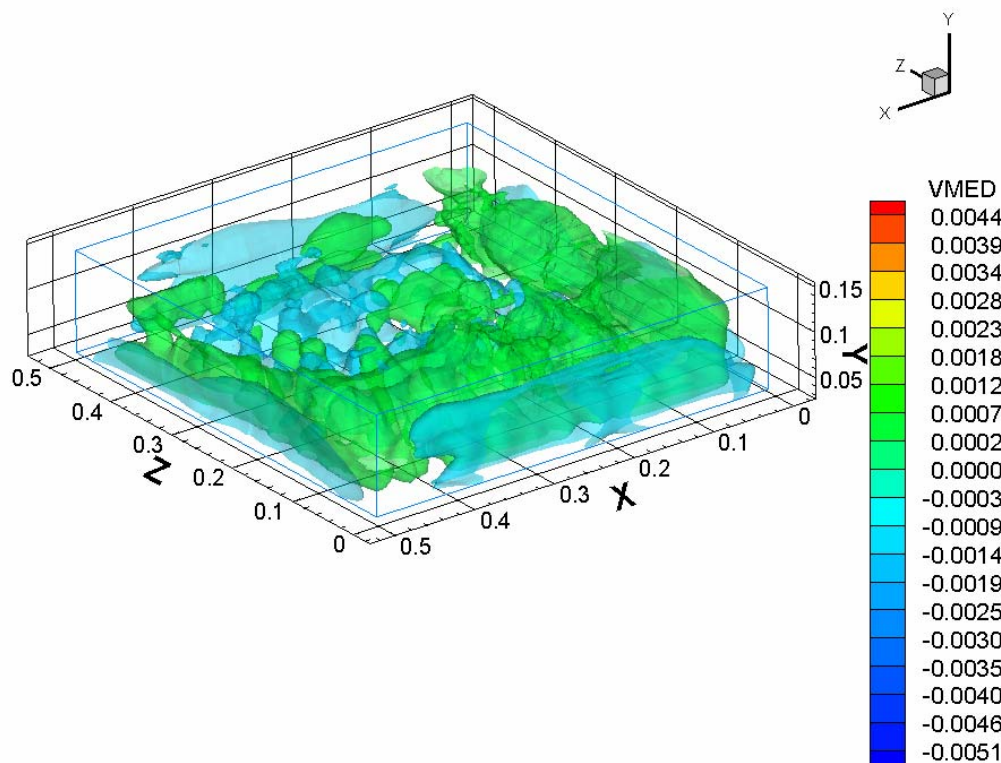


Figura 9: Velocidade vertical V (m/s): isovelocidades com valores $V = -0.0009$ e $V = +0.0007$ m/s

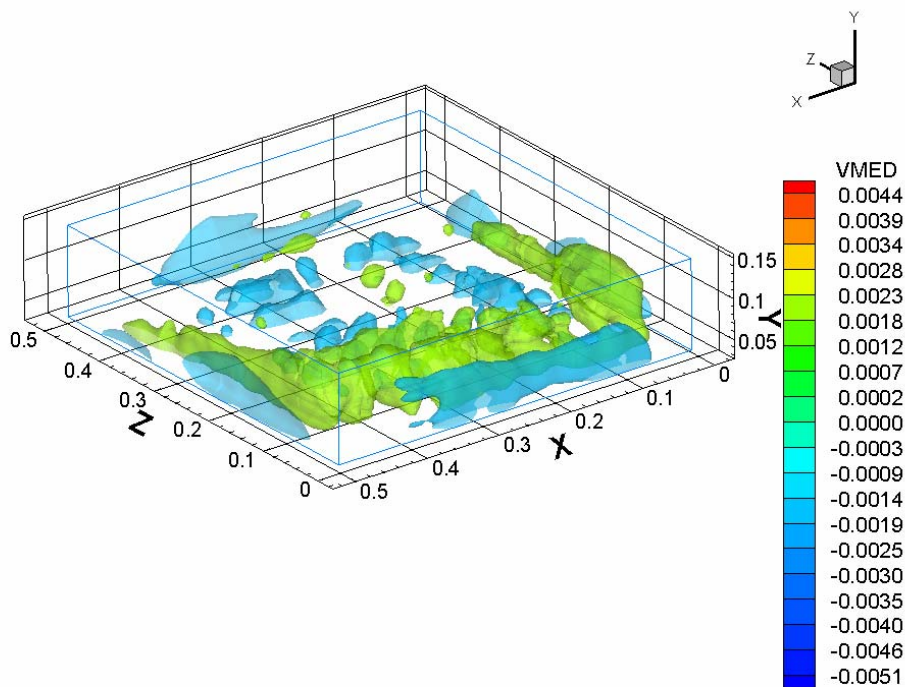


Figura 10: Velocidade vertical V (m/s): isovelocidades com valores $V = -0.0019$ e $V = +0.0018$ m/s

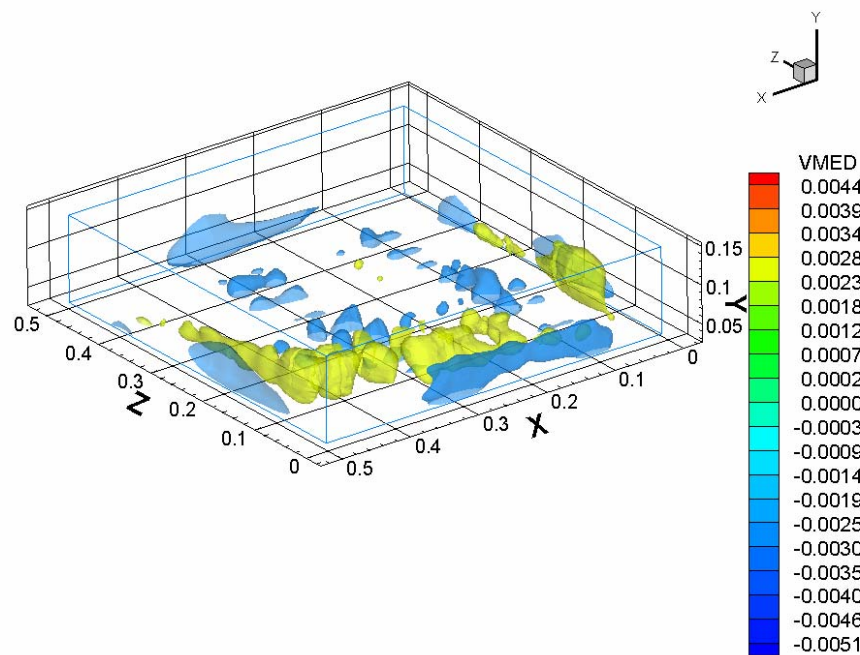


Figura 11: Velocidade vertical V (m/s): isovelocidades com valores $V=-0.0025$ e $V=+0.0028$ m/s

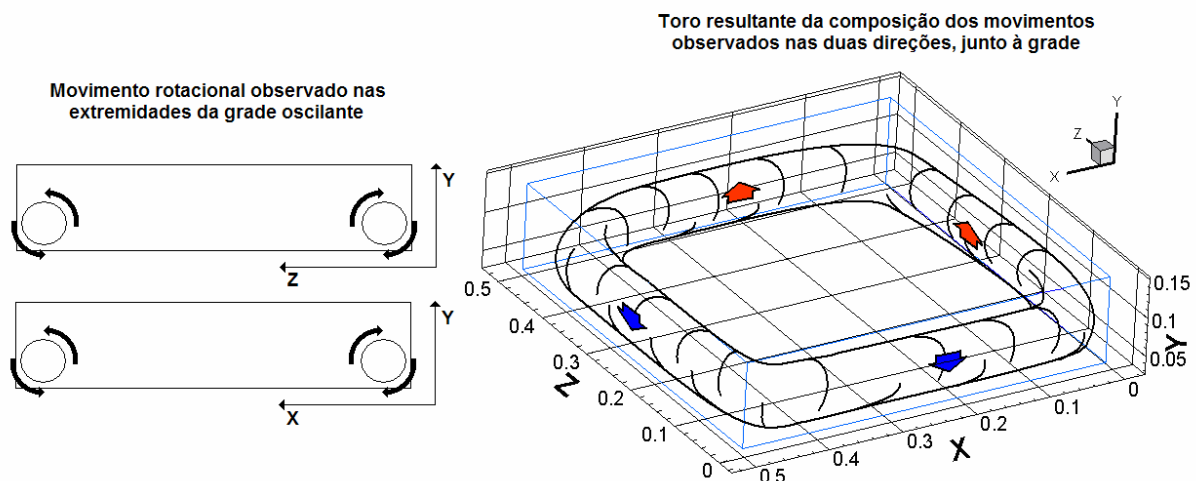


Figura 12: A representação contínua do vórtice observado na extremidade da grade oscilante gera um toro ao longo de toda a extremidade da grade, junto à parede.

Na Figura 13 o vetor resultante das velocidades no plano paralelo à superfície da grade é representado pela resultante das velocidades ao longo de x e z , ambas positivas. Assim, nota-se que a água se desloca em média acompanhando aproximadamente uma das diagonais da superfície quadrada do volume estudado.

Os valores de todas as velocidades aqui medidas são reduzidos. A ordem de grandeza básica é $1,0 \times 10^{-3}$ m/s, em valor absoluto, observando-se valores absolutos máximos (locais) de até cerca de $5,0 \times 10^{-3}$ m/s.

Para satisfazer a conservação de massa do sistema, sugere-se que há outro toro na superfície inferior da grade. Nessa região estima-se que o vetor de velocidades no plano paralelo à superfície da grade seja orientado no sentido inverso ao observado na região superior da grade.

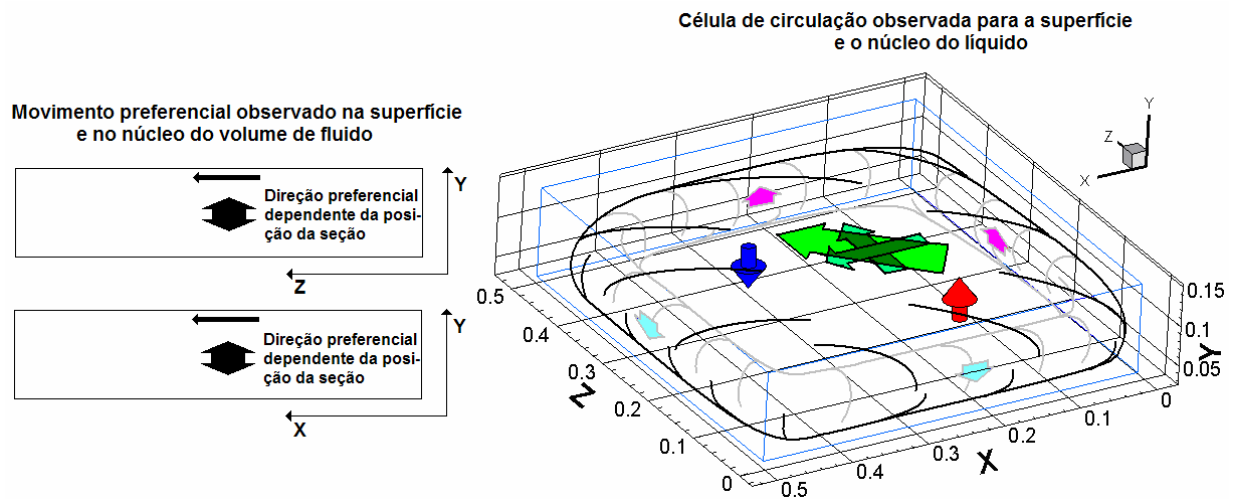


Figura 13: Considerando todo o núcleo do volume de fluido e o escoamento junto à superfície, uma “macro-célula” de circulação é observada. A componente superficial da velocidade (em verde) é a resultante das velocidades superficiais ao longo de x e z . A célula está sobreposta ao toro da Figura 12.

5. CONCLUSÕES

Demonstrou-se experimentalmente que movimentos preferenciais ocorrem em diferentes escalas em um tanque com agitação induzida por grades oscilantes. Assim, a energia imposta ao sistema converte-se não apenas em movimentos aleatórios (característicos da turbulência), mas em movimentos preferenciais bem definidos, cuja existência deve ser considerada nos estudos de transferência interfacial de propriedades físicas em interfaces ar-água. Essa conversão da energia imposta em movimento preferencial lembra o efeito de uma bomba hidráulica (onde energia elétrica gera pressão hidráulica que é ultimamente convertida em energia cinética para a água), o que faz com que a existência do movimento preferencial tenha sido denominado de “efeito de bomba hidráulica”.

As estruturas de movimento preferencial no volume estudado podem ser descritas como um toro junto a toda a extremidade da grade, ao longo das paredes, superposto a uma macro-célula de circulação que confere movimento médio à superfície da água.

Esses movimentos preferenciais devem ser considerados quando do estudo de propriedades físicas através de einterefaces gás-líquido, em escoamentos turbulentos gerados por grades oscilantes.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPESP pela manutenção desta linha de pesquisa e pela concessão de bolsa para a sua realização, bem como ao CNPq e à CAPES, pelas bolsas concedidas, em especial ao processo CAPES 2201/06.

7. BIBLIOGRAFIA

- BRUMLEY, B. (1984) Turbulence measurements near the free surface in stirred grid experiments in gas transfer at water surface. In: BRUSTSAERT, W.; JIRKA, G.H., ed. Gas transfer at water surface. Dordrecht, D. Reidel. p. 83-92.
- BRUMLEY B.H.; JIRKA G.H. (1987). Near-surface turbulence in a grid-stirred tank. *Journal of Fluid Mechanics*, v.183, n.1, p.235-263.
- CHENG, N.S.; LAW, W.K. (2001) Measurement of Turbulence Generated by Oscillating Grid, *Journal of Hydraulic Engineering*, v.127, n.3, p. 201-208, Mar.
- CHU, C.R.; JIRKA, G.H. (1991) Turbulent Velocity and Gas Concentration Measurements in the Near-Surface Layer. In: WILHELMS, E. C. ; GULLIVER, J.S. ed. Air water mass transfer, New York, ASCE. p.160-172.
- DA SILVA, I.P.D. ;FERNANDO H.J.S. (1994) Oscillating grids as a source of nearly Isotropic Turbulence. *American Institute of Physics*, v.6 n.7, p. 2455-2464, July.
- DICKEY, T.D., HARTMAN, B.,HAMMOND,D.& HURST,E. (1984) A Laboratory Technique for Investigating the Relationship Between Gas Transfer and Fluid Turbulence”. In: BRUSTSAERT, W.; JIRKA, G. H., ed. Gas Transfer at Water Surface.Dordrecht, D. Reidel. p.93-100.
- JANZEN (2003)
- HOPFINGER, E. L. ;TOLY, J.A. (1976) Spacially decaying turbulence and its relation to mixing across density interfaces. *Journal of fluid mechanics*, v.78, n.1, p.155-175.
- PEREIRA, C.E. (2006)
- ORLINS, J.J. ;GULLIVER, J.S. (2000) Measurement of Free Surface Turbulence. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON GAS TRANSFER AT WATER SURFACES, 4., Flórida, Comunicação pessoal.

- ROMA, W. N. L. (1988) Medida dos parâmetros de turbulência superficial e sua interrelação com o coeficiente de reeração. São Carlos. 74 p. Tese (Livre Docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SOUZA, L.B.S. de (2002). Estudo da estrutura turbulenta em escoamentos gerados por grades oscilantes. São Carlos 65 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- THOMPSON S.M. ;TURNER J.S. (1975) Mixing across in interface due to turbulence generated by in oscillating grid. Journal of Fluid Mechanic, v.67, n.2, p.349-368.
- SCHULZ (1997). Teste de uma Formulação Alternativa em Turbulência. São Carlos. 120 p. Tese (Livre-Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.
- BRUNK, B. ; WEBER-SHIRK, M ; JENSEN, A. ; JIRKA, G. & LION, L.W. (1996). Modeling Natural Hydrodynamic Systems with a Differential-Turbulence. Journal of Hydraulic Engineering, v. 122, n. 7, p. 373-380.
- PEREIRA, C.E. (2006) Determinação das Células de Convecção Induzidas em Tanques Agitados por Grades Oscilantes. Tese EESC-USP, São Carlos-SP. 250p.
- JANZEN, J.G. (2003). Detalhamento das Propriedades Turbulentas em Água Agitada por Grades Oscilantes. São Carlos. 107p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.

8. TERMO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis pelo material publicado nesse artigo.

CÁLCULO DIRETO DO RUÍDO AERODINÂMICO GERADO POR CAMADAS DE MISTURA EM EVOLUÇÃO ESPACIAL

Carlos Anissem Soares Moser, carlos.moser@yahoo.com.br

Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP, 13566-590 – Av. Trabalhador São-carlense 400, São Carlos, SP, Brasil

Resumo. Este trabalho tem por objetivo analisar o efeito do número de Mach sobre o ruído aerodinâmico emitido por camadas de mistura subsônicas em evolução espacial a números de Mach entre 0,20 e 0,40 e número de Reynolds 400. Uma formulação com base em características é utilizada para resolver os campos aerodinâmico e acústico por meio de simulação numérica direta (Direct Numerical Simulation–DNS) do sistema completo de equações de Navier-Stokes compressíveis. A estrutura modular ondulatória desta formulação permite especificar condições de contorno não-reflexivas, utilizando um modelo conceitual baseado na análise característica. Uma zona buffer de absorção acústica e dissipação aerodinâmica é aplicada na região de saída do domínio computacional. Para uma resolução precisa dos campos aerodinâmico e acústico são empregados esquemas de diferenças finitas compactos de sexta ordem para a discretização espacial e um esquema de Runge-Kutta de quarta ordem para integração temporal..

Keywords: aeroacústica computacional, camada de mistura subsônica, simulação numérica direta, ruído aerodinâmico

1. INTRODUÇÃO

Atualmente o ruído emitido por escoamentos cisalhantes livres se constitui num dos problemas centrais de uma grande diversidade de aplicações industriais. No campo da engenharia, podem ser mencionados o ruído aerodinâmico externo gerado por turbomáquinas, automóveis, trens, rotores de helicópteros e motores a jato de aeronaves. A emissão sonora de maior impacto ambiental nos tempos atuais é o ruído emitido por motores a jato de aeronaves. Esta forma de ruído vem sendo intensamente investigada desde o trabalho pioneiro de Lighthill (1952), pela necessidade de desenvolver aeronaves mais silenciosas. Desde os primeiros turbojatos colocados em operação na década de 50 até a segunda geração de aeronaves a jato em operação desde a década de 70, importantes progressos na redução do ruído vem sendo alcançados pela indústria aeronáutica. Contudo, perante ao enorme crescimento do tráfego aéreo nas últimas décadas e ao contínuo processo de urbanização nos arredores de aeroportos, o ruído emitido por aeronaves a jato continua causando enorme impacto ambiental, principalmente durante operações de pouso e decolagem. Estimativas da Comissão Européia de Controle de Tráfego Aéreo prevêem um crescimento anual do tráfego aéreo mundial da ordem de 4% ao ano nos próximos anos, devendo praticamente duplicar o tráfego aéreo até 2020. Visando reduzir drasticamente o impacto ambiental causado pela emissão de ruído, regulamentações técnicas da International Civil Aviation Organization (ICAO) e da Federal Aviation Regulation (FAR) vêm estabelecendo níveis de operação e certificação de ruído aerodinâmico externo cada vez mais restritivos.

Como decorrência natural deste cenário, a redução dos níveis atuais de emissão sonora vem se tornando uma questão estratégica no projeto de novas aeronaves a jato pela indústria da aviação civil. Contudo, para elaborar estratégias eficientes visando a redução do ruído aerodinâmico, necessita-se uma melhor compreensão dos mecanismos físicos inerentes aos processos de geração e propagação do ruído em escoamentos livres cisalhantes em evolução espacial, como camadas de mistura e jatos subsônicos. Entre os fatores preponderantes na investigação dos mecanismos de emissão de ruído aerodinâmico, o efeito do número de Mach se constitui num dos parâmetros fundamentais.

Neste trabalho, pretende-se investigar numericamente o efeito do número de Mach sobre o ruído aerodinâmico emitido por camadas de mistura subsônicas em evolução espacial, visto que ainda não é compreendida a influência deste fenômeno nos mecanismos de geração e propagação sonora nos campos aerodinâmico e acústico. Um estudo paramétrico dos campos aerodinâmico e acústico é conduzido, em que a fonte de geração de ruído no campo aerodinâmico e sua propagação no campo acústico, são calculados usando a técnica de simulação numérica direta (DNS). O acesso direto aos campos de geração e propagação sonora é essencial, visto que previsões do ruído por técnicas de modelagem de escalas submalha recaem inevitavelmente em hipóteses que não podem ser verificadas experimentalmente em escoamentos reais (Crow, 1970). Em particular, o papel fundamental da formação de estruturas primárias (vórtices de Kelvin-Helmholtz) e suas interações (apariamento de vórtices) com mecanismos de emissão acústica, podem ser claramente mostrados por computações diretas (Bogey, 2000; Freund, 2001; Sandhan & Reynolds, 1991).

Devido ao custo computacional elevado de computações por DNS, a presente análise paramétrica restringe-se a camadas de mistura bidimensionais (2D) em regime quase incompressível, em que as instabilidades mais amplificadas são as 2D. Embora os efeitos de compressibilidade na dinâmica do escoamento sejam fracos, observa-se uma forte influência destes efeitos na geração e propagação do ruído aerodinâmico. No entanto, fora desta faixa de números de Mach, uma aproximação puramente 2D seria extremamente questionável, devido a predominância de instabilidades 3D, em que as ondas mais amplificadas são as oblíquas, conforme descreve a teoria de estabilidade linear de Michalke (1964a) e resultados

DNS anteriores de Sandhan & Reynolds (1991).

A necessidade de esquemas numéricos extremamente precisos para efetuar previsões do ruído aerodinâmico por DNS é amplamente reconhecida em aeroacústica computacional, visto que a natureza fracamente dissipativa e dispersiva destes esquemas fornece uma melhor representação de uma ampla faixa de escalas, assegurando uma melhor resolução das menores escalas energéticas e uma representação precisa da propagação de ondas acústicas. Fisicamente, estas exigências estão estritamente relacionadas a preservação da propagação sonora relevante, conjuntamente com uma apurada descrição das maiores escalas do campo de geração. Estas exigências são particularmente difíceis de serem cumpridas a baixos números de Mach, onde as flutuações acústicas são várias ordens de magnitude menores que as perturbações de natureza aerodinâmica. No intuito de satisfazer estas exigências de precisão e seguindo a prática de estudos aeroacústicos anteriores (Bogey, Bailly & Juvé, 2000; Freund, 2003; Mitchell, Lele & Moin, 1999; Vreman, Sandham & Luo, 1996), neste trabalho são utilizados esquemas de diferenças finitas compactos de sexta ordem de precisão para a discretização espacial. Contudo, distintamente de estudos anteriores, este trabalho utiliza uma formulação não-conservativa com base em características proposta por Sesterhenn (2001). No contexto da aeroacústica computacional, a estratégia numérica proposta neste trabalho tem como vantagem a simplicidade oferecida por esta formulação para a implementação de condições de contorno e de uma zona *buffer* de absorção/dissipação (Colonius, Lele & Moin, 1993). Segundo o conhecimento do autor (Moser, 2006), esta é a primeira vez em que esta formulação é utilizada para a computação direta do som.

2. CONFIGURAÇÃO DO ESCOAMENTO

No esquema de uma camada de mistura subsônica em evolução espacial da Fig. 1, os campos aerodinâmico e acústico são representados, respectivamente, pelos campos de vorticidade e dilatação. A região de saída do domínio computacional inclui uma zona *buffer* de dissipação aerodinâmica e absorção acústica. Neste trabalho, as variáveis do escoamento na corrente superior e inferior são sub-indexadas por 1 e 2, respectivamente.

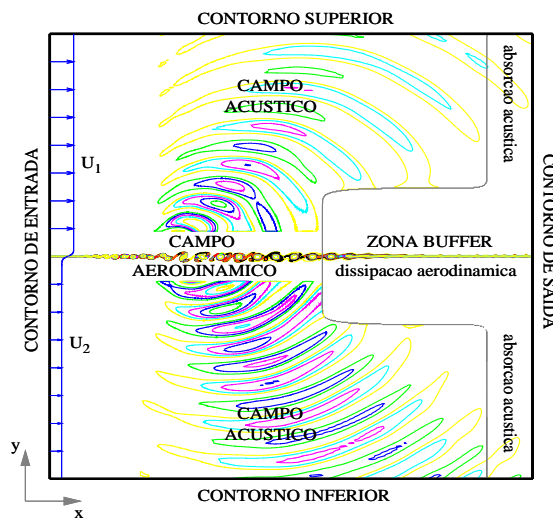


Figure 1. Configuração da camada de mistura em evolução espacial. Perfil de velocidade em tangente hiperbólica, com velocidades médias $[U_1, U_2]$. Campos aerodinâmico e acústico são representados, respectivamente, pelos campos de vorticidade e dilatação. Domínio computacional inclui zona *buffer* de dissipação aerodinâmica e absorção acústica.

A camada de mistura consiste de dois escoamentos paralelos com velocidades médias U_1 e U_2 , conectados por um perfil de velocidade em tangente hiperbólica

$$u_o(y) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{\Delta U}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta_{\omega_o}}\right) \quad (1)$$

onde $\delta_{\omega_o} = \Delta U / |\partial u_o / \partial y|_{max}$ é a espessura de vorticidade e $\Delta U = U_1 - U_2$. Neste estudo, o número de Reynolds adotado $Re = \rho_2 \Delta U \delta_{\omega_o} / \mu$ é 400 para números de Mach $M = \Delta U / c_2$ variando de 0,20 a 0,40, onde μ a viscosidade dinâmica, δ_{ω_o} a espessura inicial de vorticidade, c_2 a velocidade do som e ρ_2 a massa volumétrica. As quantidades são normalizadas com base na corrente lenta (inferior) da camada de mistura. Na tabela 1 estão relacionados os números de Mach com as respectivas velocidades médias $[U_1, U_2]$ na correntes livres superior e inferior.

As simulações numéricas são realizadas num domínio computacional com dimensões $[L_x, L_y] = [800, 800]$, onde uma zona *buffer* se estende de $0.55L_x$ a L_x . Uma malha Cartesiana consistindo de $[n_x, n_y] = [2071, 745]$ pontos é utilizada. Esta malha é estirada na direção normal ao escoamento, a partir da região de mistura. Na direção do escoamento, a malha

é uniforme no domínio físico e gradualmente estirada na zona *buffer*, com o propósito de atenuar perturbações de grande amplitude, por meio do aumento artificial da dissipação.

Velocidade	Número de Mach $M = \Delta U/c_2$				
	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
U_1	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
U_2	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40

Table 1. Velocidades médias $[U_1, U_2]$ referentes a faixa de números de Mach: $0.20 \leq M \leq 0.40$.

Para desestabilizar a camada de mistura, sem uma interferência excessiva nas condições de entrada, uma perturbação de pequena amplitude e de natureza incompressível (Bogey, Bailly & Juvé, 2000) é aplicada na região de mistura próxima ao contorno de entrada. A modulação de frequência desta perturbação é obtida através da análise de estabilidade linear de uma camada de mistura compressível estacionária (Michalke, 1964a).

3. MÉTODO NUMÉRICO

3.1 Equações governantes do movimento

Neste trabalho, a formulação com base em características de Sesterhenn (2001) é empregada para resolver por DNS o sistema de equações de Navier-Stokes compressíveis. Esta formulação decompõe a parte invíscida das equações em vários modos de ondas, propagando-se com velocidades características associadas. A estrutura modular ondulatória das equações é especialmente adaptada para definir condições de contorno não-reflexivas. O sistema de equações governantes é representado em coordenadas Cartesianas em termos das variáveis do escoamento $[p, u, v, s]^T$, respectivamente, pressão, componentes da velocidade e entropia.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\rho c}{2} ((X^+ + X^-) + (Y^+ + Y^-)) + \frac{p}{C_v} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + X^s + Y^s \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{1}{2}(X^+ - X^-) + Y^u \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(X^v + \frac{1}{2}(Y^+ - Y^-) \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \quad (4)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -(X^s + Y^s) + \frac{R}{p} \left(-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \Phi \right) \quad (5)$$

No sistema de equações, os modos de propagação de ondas são denotados por ondas acústicas (X^\pm e Y^\pm), entrópicas (X^s e Y^s) e vorticais (X^u e Y^v), definidos pelas seguintes relações

$$X^\pm = (u \pm c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \pm \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad Y^\pm = (v \pm c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial y} \pm \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6)$$

$$X^s = u \frac{\partial s}{\partial x}, \quad Y^s = v \frac{\partial s}{\partial y} \quad \text{e} \quad X^v = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Y^u = v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

Na equação (5), $q_i = -\lambda \partial T / \partial x_i$ é o fluxo de calor, onde $\lambda = \mu C_p / Pr$ é a condutividade térmica e T a temperatura. $\Phi = \tau_{ij} s_{ij}$ é a dissipação viscosa, onde s_{ij} é o tensor taxa de deformação e τ_{ij} o tensor das tensões viscosas

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right], \quad (8)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica e δ_{ij} a função delta de Kronecker.

O fluido é assumido como um gás caloricamente perfeito. Desta forma, o sistema de Eqs.(2–5) pode ser fechado pelas seguintes relações para um gás ideal

$$\rho = \frac{p^{1/\gamma}}{e^{s/C_p}}, \quad T = \frac{p}{\rho R} \quad \text{e} \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (9)$$

onde R é a constante universal dos gases e $\gamma = C_p / C_v$ a razão entre os calores específicos a pressão e a volume constante.

3.2 Condições iniciais e de contorno

O perfil inicial de velocidades da camada de mistura é dado pela Eq.(1), de modo que a razão entre as velocidades médias $U_1/U_2 = 2$, enquanto que as demais variáveis do escoamento são mantidas inicialmente constantes.

O modelo conceitual com base na análise característica de Thompson (1987, 1990) é usado para prescrever condições de contorno não-reflexivas. Por este modelo ondas com propagação para fora do domínio são determinadas pelo sistema de Eqs.(6-7), enquanto que ondas com propagação para o interior do domínio são especificadas por condições de contorno. A especificação imprópria destas condições resulta em perturbações artificiais que podem levar a uma solução numérica inadequada (Hixon, Shih & Mankbadi, 1995). No presente estudo restringiremos nossos atenções a escoamentos subsônicos, em que este problema é mais acentuado.

Como o domínio computacional deve ser suficientemente largo para permitir a propagação de ondas acústicas no campo distante (*far-field*), condições de contorno podem ser especificadas nas laterais do domínio pela simples anulação, nas Eqs.(6), das ondas Y^+ e Y^- com propagação para o interior do domínio, respectivamente, no contorno inferior e superior.

No contorno de entrada do escoamento existem ondas acústicas, entrópicas e vorticais que se propagam para o interior do domínio computacional. Para estimar estas ondas, considera-se uma entrada com entropia, entalpia e a componente transversal da velocidade fixas (Sesterhenn, 2001). Em vez de impor condições a estas quantidades, que são quase constantes no tempo na entrada, condições de contorno são especificadas para forçar a zero suas derivadas temporais: (i) $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$, (ii) $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, and (iii) $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

Considerando a condição de entropia (i) na Eq.(5) é possível resolver a onda entrópica com propagação para o interior do domínio

$$X^s = -Y^s + \frac{R}{p} \left(-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \Phi \right) \quad (10)$$

Aplicando-se a condição (ii) a definição de entalpia: $H = E + pV$, onde E , p e V são, respectivamente, a energia, pressão e volume do sistema, obtém-se

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) = T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

onde h é a entropia local. Posteriormente, aplicando-se a condição (i) na Eq.(11), podemos reter

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

Substituindo-se na Eq.(12) as Eqs.(2) e (3), e inserindo na equação resultante o termo de entropia $X^s + Y^s$, obtido considerando-se a condição (i) na Eq.(5), resulta na seguinte expressão para a onda acústica com propagação para o interior do domínio

$$X^+ = \frac{2u}{u+c} \left(\frac{1}{2} X^- - Y^u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{1,j}}{\partial x_j} - \frac{c}{2u} (X^- + Y^+ + Y^-) + \frac{\gamma-1}{\rho u} \left(-\frac{\partial q_{x_i}}{\partial x_i} + \Phi \right) \right) \quad (13)$$

Aplicando-se na Eq.(4) a condição (iii), obtém-se a onda de vortacidade com propagação para o interior do domínio

$$X^v = -\frac{1}{2} (Y^+ - Y^-) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{2,j}}{\partial x_j} \quad (14)$$

3.3 Zona buffer

Uma zona *buffer* é construída na região de saída do domínio computacional com o propósito de dissipar ondas de vortacidade e entropia de grande amplitude e de absorver ondas acústicas espúrias de pequena amplitude. A grande diferença de escala de energia das ondas de vortacidade e entropia comparada com as ondas acústicas, requer a combinação das seguintes técnicas de absorção/dissipação.

3.3.1 Dissipação aerodinâmica

De modo similar a Colonius, Lele & Moin (1993), as ondas de vortacidade e de entropia são efetivamente dissipadas antes de interagir com o contorno de saída, pela adição de um termo de amortecimento as equações do escoamento

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \Big|_{dp} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - \sigma_{dp} \mathbf{Q}' \quad (15)$$

onde $\mathbf{Q} = [u, p]$ e $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}$ é dado pelas Eqs.(2) e (3). $\mathbf{Q}'_{(n)} = \mathbf{Q}_{(n)} - (\beta \bar{\mathbf{Q}}_{(n-1)} + (1 - \beta)\mathbf{Q}_{(n)})$ é a perturbação no passo de tempo n , com $\beta = 0.90$ e $\bar{\mathbf{Q}}_{(n-1)}$ uma média temporal da perturbação calculada no passo de tempo anterior. σ_{dp} é um coeficiente de amortecimento aerodinâmico definido como segue

$$\sigma_{dp}(x, y) = \frac{r_1}{2} (1 + \tanh(\beta_1(x - x_o))) (1 + \tanh(\beta_2(y - y_o))) \quad (16)$$

com $\{0 \leq \sigma_{dp}(x, y) \leq 0.05\}$ para $\{x_{dp} \leq x \leq L_x\}$ e $\{-y_{dp} \leq y \leq y_{dp}\}$, onde $[x_{dp}, y_{dp}]$ são os limites da zona de dissipação. Os valores dos parâmetros na Eq.(16) são dados por $r_1 = 0.025$, $\beta_1 = 0.02$, $\beta_2 = 0.12$, $x_o = 0.875L_x$ e

$$y_o = \begin{cases} +0.075L_y & \text{se } y \geq 0, \\ -0.075L_y & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$

3.3.2 Absorção acústica.

Na região de absorção da zona *buffer*, as ondas acústicas refletidas no contorno de saída do domínio são absorvidas por meio da aplicação gradual de uma condição de contorno não-reflexiva (Moser, Lamballais & Gervais, 2006) as equações governantes do movimento

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \Big|_{ab} = \sigma_{ab} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \Big|_{X^- = 0} + (1 - \sigma_{ab}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \quad (17)$$

onde $\mathbf{Q} = [u, p]$ e $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}$ é dado pelas Eqs.(2) e (3). $\sigma_{ab} = \frac{r}{2} (1 + \tanh(\alpha(x - x_o)))$ é um coeficiente de absorção, com $r = 1$, $\alpha = 0.05$, $x_o = 0.90L_x$ e $\{0 \leq \sigma_{ab}(x) \leq 1\}$ para $\{x_{ab} \leq x \leq L_x\}$. Desta forma, resulta que

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \Big|_{ab} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} & \text{para } \sigma_{ab}(x_{ab}) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \Big|_{X^- = 0} & \text{para } \sigma_{ab}(L_x) = 1. \end{cases}$$

3.4 Perturbação próxima ao contorno de entrada

Com o propósito de desestabilizar mais rápido a camada de mistura, de melhorar o controle sobre os processos de enrolamento e apareamento de vórtices, e de introduzir um carácter determinista em computações aeroacústicas, a camada cisalhante é forçada nas proximidades do contorno de entrada com uma perturbação (f'_p) de pequena amplitude e de natureza incompressível (Bogey, Bailly & Juvé, 2000) dada por

$$f'_p = \frac{\Delta U}{\Delta y_p} \exp\left(-\ln 2 \frac{r^2}{\Delta y_p^2}\right) \sum_{i=1}^2 \alpha_i \sin[2\pi f_i t + (i - 1)\theta] \quad (18)$$

Esta perturbação é diretamente aplicada as componentes da velocidade: $u_p = u + f'_p (y - y_p)$ e $v_p = v - f'_p (x - x_p)$, onde $\Delta y_p = 0.125$ é um comprimento de referência e $r^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2$, com $[x_p; y_p] = [2.5; 0]$ o centro da perturbação. $\theta = \pi/6.66$ é o deslocamento de fase entre as perturbações harmônicas. $\alpha_1 = 2.5 \times 10^{-4}$ e $\alpha_2 = \alpha_1/2$ são amplitudes correspondentes a frequência mais instável $f_1 = 0.132U_c/\delta_{\omega_1}$ e seu sub-harmônico $f_2 = f_1/2$, previstos pela análise de instabilidade linear (Michalke, 1964a), onde δ_{ω_1} é uma espessura local de vorticidade e $U_c = (c_1 U_2 + U_1 c_2)/(c_1 + c_2)$ a velocidade de convecção. Conforme mostra o esquema da Fig. 2, devido ao baixo número de Reynolds considerado ($Re_{\omega_o} = 400$), o crescimento da difusão viscosa na camada cisalhante permite ajustar automaticamente os

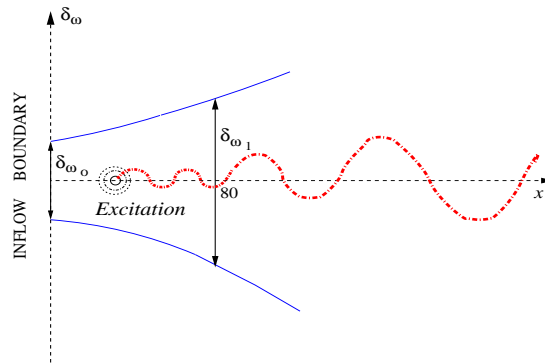


Figure 2. Esquema do crescimento da espessura de vorticidade devido a difusão viscosa na camada cisalhante. Efeitos da perturbação são ajustados para desestabilizar a camada de mistura em $x_1 \simeq 80$, posição em que $\delta_{\omega_1} \simeq 2\delta_{\omega_o}$.

efeitos da perturbação para desestabilizar a camada de mistura numa posição $x_1 \simeq 80$, para a qual a espessura local de vorticidade é $\delta_{\omega_1} \simeq 2\delta_{\omega_o}$.

Para minimizar a reflexão de ondas espúrias geradas pela perturbação no contorno de entrada, uma zona de absorção acústica é construída nas proximidades da perturbação, por meio da adição de termos de absorção às equações governantes

$$\left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right|_{ac} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{Q}}' - \mathbf{Q}')\sigma_{ac} \quad (19)$$

onde $\mathbf{Q} = [u, v, p]$, $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}$ são dadas pelas Eqs.(2-4) e $\bar{\mathbf{Q}}'$ é a média temporal da perturbação $\mathbf{Q}'_{(n)} = \mathbf{Q}_{(n)} - \mathbf{Q}_{(o)}$, onde $\mathbf{Q}_{(o)} = [u_o, v_o, p_o]$ e n o passo de tempo computacional. σ_{ac} é um coeficiente de absorção acústica definido como segue

$$\sigma_{ac}(x, y) = \frac{r_1}{2} ((1 - \tanh(\alpha_1(x - x_p))) (1 - \tanh(\alpha_2|y - y_p|)) - (1 - \tanh(\alpha_1|x - x_p|)) (1 - \tanh(\alpha_3|y - y_p|))), \quad (20)$$

onde $[x_p; y_p] = [2.5; 0]$ é o centro da perturbação. $r_1 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.08$, $\alpha_2 = 0.055$ e $\alpha_3 = 0.155$.

4. RESULTADOS

O efeito do número de Mach sobre os mecanismos físicos da geração e propagação sonora é investigado por meio da computação por DNS de camadas de mistura em evolução espacial para a faixa de números de Mach: $0, 20 \leq M \leq 0, 40$ e número de Reynolds $Re_{w_o} = 400$. Uma descrição completa e precisa do escoamento é fornecida por computações por DNS, visto que são capturados numa mesma computação o campo aerodinâmico de geração e o campo acústico de propagação sonora, sem a necessidade de recorrer a modelagem de escalas.

Conforme mostra a figura 3, em consistência com a análise teórica de geração sonora (Howe, 1975), a teoria de instabilidade linear (Michalke, 1964b) e resultados numéricos obtidos em jatos axi-simétricos (Mitchell, Lele & Moin, 1999), com o aumento do número de Mach observam-se modificações quase desprezíveis no campo aerodinâmico de geração sonora (centro do domínio). Contudo, contrariamente ao campo de geração sonora, o campo acústico de propagação é consideravelmente modificado pelo aumento do número de Mach. A radiação emitida pela camada de mistura mais lenta ($M = 0, 20$) assemelha-se a emissão sonora de uma fonte quadripolar axi-simétrica observada em experimentos com jatos de Bridges & Hussain (1992). A solução do campo acústico apresenta bom acordo com resultados anteriores (Billson, Erikson & Davidson, 2002), obtidos por meio de simulação de grandes escalas (*Large-Eddy Simulation*–LES) a números Reynolds elevados. Aspectos comuns aos resultados obtidos por LES podem ser mencionados. Frontes de onda apresentam forma oval, com maior comprimento de onda a jusante da zona de emissão sonora. A emissão sonora se torna acusticamente menos compacto pelo aumento do número de Mach, visto que as escalas de comprimento do campo acústico (comprimentos de onda) são gradualmente reduzidas, enquanto que as escalas da fonte sonora (tamanho dos turbilhões) permanecem constantes. O som radiado pela camada de mistura mais rápida ($M = 0, 40$) é altamente diretivo ou superdiretivo. Este resultado está em conformidade com resultados de Crighton & Huerre (1990), que demonstraram a partir da solução exata da equação da onda que a não-compacidade da emissão acústica na direção axial conduz a possibilidade de radiação sonora superdiretiva, isto é, fontes sonoras com diretividade concentrada principalmente a pequenos ângulos de radiação (Laufer & Yen, 1983; Jiang, Avital & Luo, 2004).

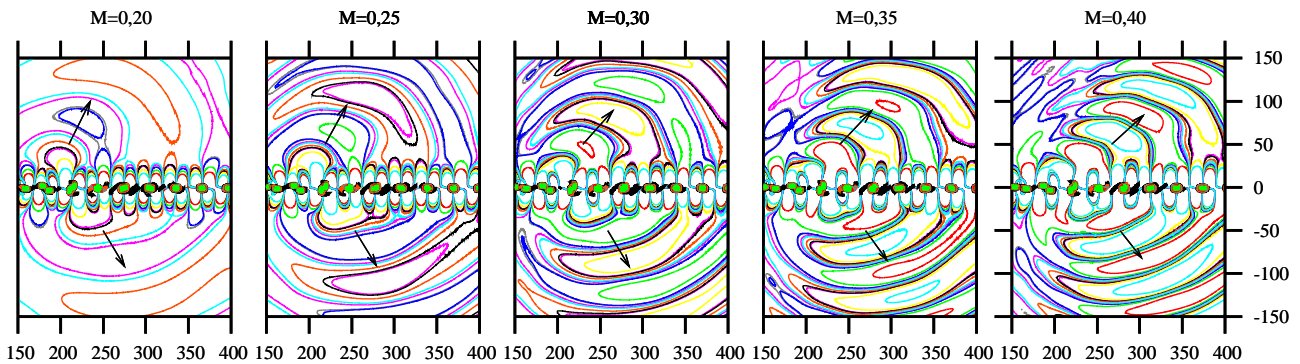


Figure 3. Superposição do campo aerodinâmico de geração (camada cisalhante) e do campo acústico de propagação sonora de camadas de mistura à números de Mach: $0, 20 \leq M \leq 0, 40$. Iso-contornos de vorticidade: 5 em $[-0, 7 : 0, 0]$. Iso-contornos de dilatação: 10 em $[-1, 0 \times 10^{-4} : 1, 0 \times 10^{-4}]$ espaçados com taxa de progressão geométrica $1, 0 \times 10^{-5}$. Setas indicam a direção de propagação sonora nas correntes superior e inferior do escoamento.

Com o propósito de discutir padrões de radiação sonora, locais aparentes da fonte (x_s) são estimados pela projeção de linhas radiais (indicadas por setas na Fig. 3) partindo da região de emissão acústica (local de apareamento de vórtices)

e posicionadas na direção de propagação sonora (perpendicularmente aos frentes de onda) para ângulos de radiação (θ_s). Estes ângulos correspondem a máximos locais de radiação sonora nas correntes inferior e superior, dados pelo diagrama de diretividade da Fig. 4. Os valores de x_s e θ_s estão representados na tabela 2. Observa-se que os locais aparentes da fonte (x_s) movem-se ligeiramente a jusante pelo aumento do número de Mach. O pequeno deslocamento da fonte (região de aparecimento de vórtices) está em acordo com a teoria de instabilidade linear de Michalke (1964b), que mostra que a taxa de crescimento das perturbações decresce ligeiramente com o aumento do número de Mach. A tabela 2 também mostra a forte dependência do número de Mach do ângulo (θ_s) de máximo local de radiação sonora nas correntes superior e inferior das camadas de mistura.

	Corrente	Número de Mach $M = \Delta U/c_2$				
		0, 20	0, 25	0, 30	0, 35	0, 40
x_s	superior	195	199	202	207	213
	inferior	226	230	235	241	248
θ_s	upper	64°	59°	49°	47°	42°
	lower	-59°	-60°	-59°	-54°	-52°

Table 2. Local aparente da fonte (x_s) e ângulo de radiação, (θ_s), correspondentes ao máximo local de radiação sonora por camadas de mistura a números de Mach: $0.20 \leq M \leq 0.40$. Medidas de θ_s tomadas a partir da direção do escoamento no diagrama de diretividade na Fig. 3.

4.1 Padrões de radiação sonora

Na figura 4 estão representados padrões de diretividade da radiação sonora emitida por camadas de mistura. Um lobe de diretividade pode ser claramente identificado em cada uma das correntes do escoamento, para todos os números de Mach considerados. Padrão este já observado por Bogey, Bailly & Juvé (2000), mas não confirmado por Billson, Erikson & Davidson (2002), os quais relataram uma diretividade ligeiramente descentrada, com dois lobes nas correntes superior e inferior. Conforme discutido anteriormente, com aumento do número de Mach observa-se que a emissão sonora adquire gradualmente um carácter altamente diretivo, com o pico de emissão concentrando-se a pequenos ângulos de radiação.

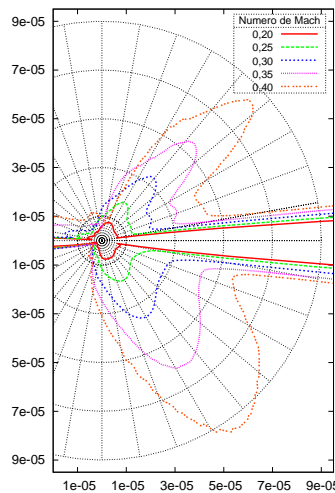


Figure 4. Padrões de diretividade da radiação sonora emitida por camadas de mistura a números de Mach: $0.20 \leq M \leq 0.40$, computados como a média temporal RMS da dilatação em semi-círculos de raio $r = 150$, centrados nos locais x_s dados na tabela 2, para ângulos de radiação medidos a partir da direção do escoamento.

4.1.1 Intensidade do som

A intensidade da emissão sonora no campo de propagação é avaliada pela medida da taxa média de energia sonora que passa através de uma determinada área por unidade de tempo:

$$I = \frac{(\overline{p - \bar{p}_o})^2}{\rho_2^2 c_2^4}, \quad (21)$$

onde p é a pressão, \bar{p}_o é uma média espaço-temporal da pressão local. ρ_2 e c_2 são a massa específica e a velocidade do som na corrente inferior de referência. É importante salientar que a Eq.(21) fornece pequenas flutuações de pressão,

definidas como a intensidade do som (I) no campo acústico, e grandes flutuações de pressão na camada cisalhante do campo aerodinâmico, que não devem ser interpretadas como emissão sonora.

Conforme mostre a figura 5, no campo acústico da camada de mistura mais lenta ($M = 0,20$) observa-se que a intensidade da emissão sonora é quase duas ordens de magnitude menor do que na camada de mistura mais rápida, irradiando-se por uma ampla região do campo acústico. Contrariamente a camada de mistura mais lenta, na mais rápida ($M = 0,40$) o som é altamente concentrado em direções de propagação bem definidas e a pequenos ângulos de radiação. Este aspecto, mais uma vez, identifica claramente o carácter altamente diretivo da emissão sonora a números de Mach mais elevados.

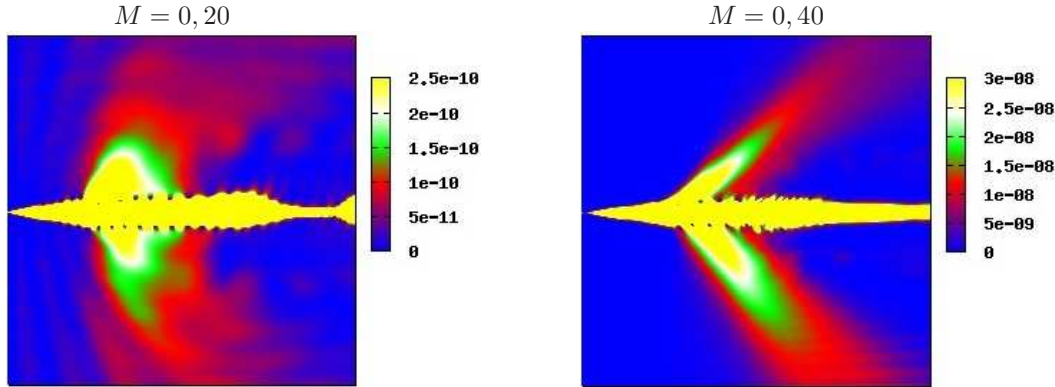


Figure 5. Padrões da intensidade do som (I) no campo acústico e de flutuações de pressão no campo aerodinâmico nas camadas de mistura mais lenta ($M = 0,20$) e mais rápida ($M = 0,40$). Representação no domínio computacional completo, incluindo a zona *buffer* de absorção/dissipação. $[L_x \times L_y] = [800 \times 800]$.

Na figura 6 são mostrados perfis longitudinais de flutuação de pressão na corrente inferior da camada cisalhante, dados pela Fig. 5. Para o número de Mach 0,20, são claramente identificadas seis zonas de silêncio com níveis de flutuação de pressão decaindo mais de duas ordens de magnitude. Observa-se uma pequena expansão destas zonas na direção do escoamento, visto que a distância entre duas zonas consecutivas tem um ligeiro aumento nesta direção. Aumento-se o

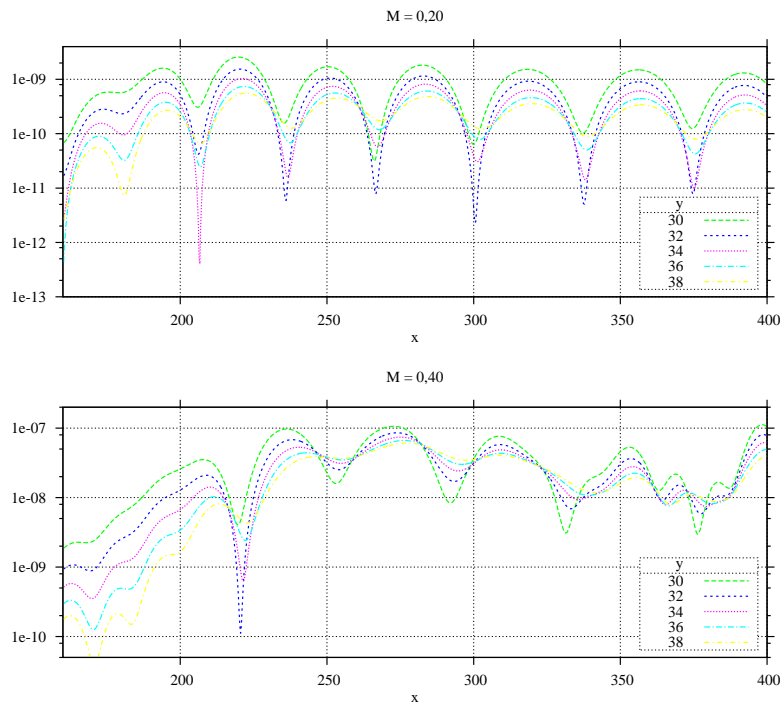


Figure 6. Representação logarítmica de flutuações de pressão na corrente inferior da camada cisalhante de camadas de mistura a números de Mach $M = 0,20$ e $0,40$, dados pela Eq.(21). Perfis longitudinais são tomados na corrente inferior a distâncias do eixo da camada cisalhante: $y = 30, 32, 34, 36$ e 38 , para $160 \leq x \leq 400$.

número de Mach para 0, 40, estas zonas de silêncio são gradualmente deslocadas e expandidas na direção do escoamento, com níveis de flutuação de pressão decaindo menos de uma ordem de magnitude, exceto na primeira zona de silêncio. O decaimento mais acentuado dos níveis de flutuação de pressão na primeira zona de silêncio, observado para ambos os números de Mach, provavelmente está associado a fortes interações do escoamento com o campo acústico, devido a sua maior proximidade da fonte sonora dominante (veja os locais aparentes da fonte na tabela 2).

Perfis radiais da flutuação de pressão na corrente inferior de camadas de mistura a números de Mach 0, 20 e 0, 40, obtidos da Fig. 5 estão representados na Fig. 7. Estes perfis descrevem tanto as flutuações de pressão na camada cisalhante quanto a intensidade do som no campo de propagação. Em ambas as camadas de mistura, duas regiões distintas podem ser claramente identificadas por estes perfis. (i) região com grandes flutuações de pressão não-lineares na camada cisalhante, localizada a pequenas distâncias (d) da fonte sonora, e (ii) região com pequenas flutuações de pressão lineares no campo de propagação sonora, correspondendo ao decaimento linear de pressão a distância da fonte $d \gtrsim 100$. É importante observar que a presença das zonas de silêncio descritas acima também pode ser detectada para ambos os números de Mach para certos ângulos de radiação, na região de transição entre grandes e pequenas flutuações de pressão.

Conforme observado por Mitchell, Lele & Moin (1999) em jatos axi-simétricos a baixos números de Mach, a disparidade das escalas de energia é notadamente marcante na camada de mistura mais lenta ($M = 0, 20$) (Fig.7), visto que a intensidade sonora no campo de propagação é aproximadamente 10.000 vezes menor do que as flutuações de pressão na camada cisalhante, com padrões de decaimento linear similares a lei clássica de decaimento sonoro no campo de propagação (d^{-1}), para todos os ângulos de radiação. Distintamente da camada de mistura mais lenta, na mais rápida ($M = 0, 40$) (Fig.7), o decaimento da intensidade do som tem forte dependência do ângulo de radiação. Valores máximos da intensidade sonora no campo de propagação são atingidos para pequenos ângulos de radiação (45°), com decaimento linear similar a d^{-1} . Contudo, com o aumento do ângulo de radiação ocorre um decaimento consideravelmente maior, devido ao deslocamento das medidas da intensidade do som para fora da região superdiretiva de propagação sonora.

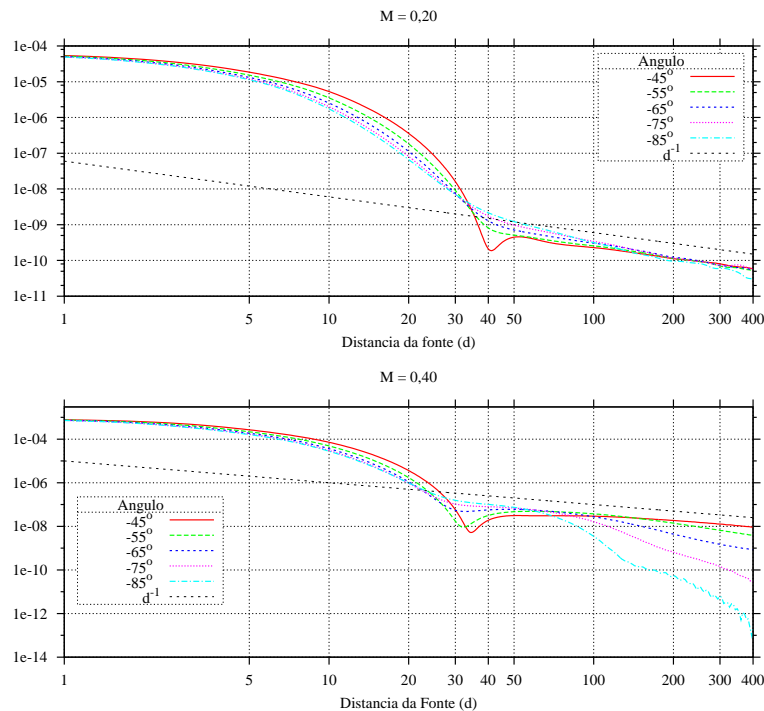


Figure 7. Representação logarítmica de flutuações de pressão na camada cisalhante e da intensidade sonora no campo acústico de camadas de mistura a números de Mach $M = 0.20$ e 0.40 , obtidos da Eq.(21). Perfis radiais tomados na corrente inferior a distâncias (d) da fonte, obtidos por meio de interpolação a partir dos locais x_s dados na tabela 2.

Ângulos de radiação medidos a partir do eixo da camada cisalhante. (\cdots) Lei clássica de decaimento sonoro d^{-1} .

Medidas da emissão sonora (I) no campo acústico efetuadas a partir da definição (21) e plotadas na Fig. 8, revelam uma taxa de aumento da intensidade máxima de emissão (I_{max}) proporcional a M^7 em ambas as correntes da camada de mistura. Este resultado é consistente com a análise teórica de Howe (1975), que demonstrou que a potência da emissão sonora radiada pela turbulência bidimensional é proporcional a $\ell \rho_o v^3 M^4$, onde ℓ e v são, respectivamente, o tamanho característico e a velocidade de fontes sonoras individuais (turbilhões), e ρ_o a massa específica de referência. Enquanto que resultados numéricos obtidos em camadas de mistura em evolução temporal, a baixo número de Mach (Fortuné, 2000; Golanski, Fortuné & Lamballais, 2004) obtiveram intensidade máxima de emissão (I_{max}) proporcional a M^6 .

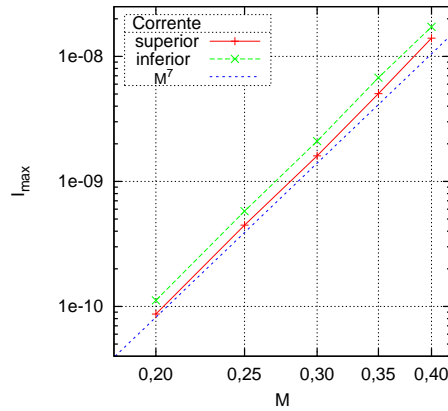


Figure 8. Representação logarítmica da intensidade máxima (I_{max}) do som radiado nas correntes superior e inferior de camadas de mistura a números de Mach: $0,20 \leq M \leq 0,40$. Medida da intensidade máxima tomada em semi-círculos de raio $r = 300$, centrados nos locais aparentes da fonte (x_s) fornecidos na tabela 2. (\dots) Lei de potência M^7 .

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia numérica para realizar a computação do som radiado pelo processo de apariamento de vórtices em camadas de mistura a números de Mach: $0,20 \leq M \leq 0,40$ e a número de Reynolds $Re_{w_o} = 400$. A análise paramétrica do efeito do número de Mach nos mecanismos de geração e propagação sonora em conjunção com o custo computacional inerentemente elevado de aproximações por DNS, especialmente a baixos números de Mach, restringiu o presente estudo a computações bidimensionais.

As bases fundamentais da análise característica foram estabelecidas por esta aproximação numérica, visto que ela combina a utilização de uma formulação com base em características (Sesterhenn, 2000) para a resolução do sistema completo de equações de Navier-Stokes compressíveis com um modelo conceitual baseado na análise característica (Thompson, 1987, 1990) para a prescrição de condições de contorno não-reflexivas e de uma zona *buffer* de absorção/dissipação. A aplicação de uma perturbação harmônica de natureza incompressível (Bogey, Bailly & Juvé, 2000) introduziu um carácter determinista na solução do campo acústico e permitiu obter um melhor controle dos processos de enrolamento e apariamento de vórtices.

A análise do efeito do número de Mach na geração e propagação sonora mostrou que o processo de apariamento de vórtices se constitui na fonte sonora dominante, para todos os números de Mach considerados. Devido aos baixos números de Mach adotados na presente análise, modificações desprezíveis foram identificadas na dinâmica da fonte sonora. Conforme previsto pela análise de instabilidade linear de Michalke (1964b), com o aumento do número de Mach ocorre um ligeiro deslocamento do local do enrolamento e do apariamento de vórtices na direção do escoamento. Contudo, quando o número de Mach é aumentado, a região da fonte sonora se torna menos compacta e a emissão sonora mais diretiva. Em bom acordo com a análise teórica da geração aerodinâmica do som (Howe, 1975) foi observado um aumento da intensidade máxima de emissão sonora proporcional a M^7 . Para a camada de mistura mais rápida ($M = 0,40$), a não-compacidade espacial da fonte na direção axial conduz a um carácter superdiretivo da emissão sonora, com o pico de emissão concentrando-se a pequenos ângulos de radiação.

O método numérico desenvolvido neste trabalho tem sido especialmente aplicado na análise do efeito do número de Mach e de efeitos térmicos na geração e propagação sonora de camadas de mistura compressíveis em evolução espacial. Contudo, existem muitas outras aplicações e possíveis melhorias que podem ser introduzidas. A presente metodologia vem sendo atualmente utilizada por Cabana, Fortuné & Lamballais (2007a, 2007b) como solução de referência para validar resultados obtidos pela computação do ruído aerodinâmico gerado por camadas de mistura utilizando esquemas compactos upwind (CUHD) de elevada ordem de precisão. Utilizando a aproximação DNS como metodologia de referência o autor pretende construir um código 3D para simulação de grandes escalas (Large-eddy simulation — LES) do som radiado por escoamentos cisalhantes livres, como camadas de mistura e jatos. A aproximação por DNS também pretende ser usada para fornecer uma base de dados precisa para o desenvolvimento e avaliação de previsões sonoras por meio de modelagem de escalas submalha (SGS) baseada em analogias acústicas (Lilley, 1972; Lighthill, 1952).

6. AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado no Laboratório de Estudos Aerodinâmicos ENSMA 6609 CNRS, Université de Poitiers, France, com suporte financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Brasil. As computações foram realizadas nos supercomputadores NEC-SX5 e NEC-SX8 providos pelo Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS), France, ao qual agradeço pelo valioso tempo computacional cedido.

7. REFERÊNCIAS

- BILLSON M., ERIKSON L.-E. & DAVIDSON L. Acoustic source terms for the linear Euler equations on conservative form. The 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (2002).
- BOGEY, C. *Calcul direct du Bruit Aérodynamique et Validation de Modèles Acoustiques Hybrides*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2000b.
- BOGEY, C., BAILLY, C. & JUVÉ, D. Numerical simulation of sound generated by vortex pairing in a mixing layer. *AIAA Journal* 38, 12 (2000a).
- BRIDGES, J. & HUSSAIN F. Direct evaluation of aeroacoustic theory in a jet. *J. Fluid Mech.* 240 (1992), 469–501.
- CABANA, M., FORTUNÉ V. & LAMBALLAIS, E. Direct computation of the sound radiated by shear layers using upwind compact schemes. In *ERCRAFTAC Workshop - Direct and Large-Eddy Simulation 7* (Trieste, Italy, September 8-10, 2007a).
- CABANA, M., FORTUNÉ V. & LAMBALLAIS, E. Évaluation des schémas compacts décentrés pour le calcul direct du champ acoustique émis par une couche de mélange. In *XVIII Congrès Français de Mécanique* (Grenoble, France, 27-31 août, 2007b).
- COLONIUS, T., LELE, S. K. & MOIN, P. Boundary condition for direct computation of aerodynamic sound generation, 1993.
- CRIGHTON, D. G. & HUERRE P. Shear-layer pressure fluctuations and superdirective acoustic sources. *J. Fluid Mech.* 220 (1990), 355–368.
- CROW, S.C. Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem. *Stud. Appl. Math.* 49, 1 (1970), 1–44.
- FORTUNÉ, V. *Étude par Simulation Numérique Directe du Rayonnement Acoustique de Couches de Mélange Isothermes et Anisothermes*. PhD thesis, École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, 2000.
- FREUND J. Noise sources in a low-Reynolds turbulent jet at Mach 0.9. *J. Fluid Mech.* 483 (2001), 277–305.
- GOLANSKI, F., FORTUNÉ, V. & LAMBALLAIS, E. Noise radiated by a non-isothermal, temporal mixing layer. Part II: Prediction using DNS in the framework of low Mach number approximation. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* (2005).
- HIXON, R., SHIH S.H. & MANKBADI R.R. Evaluation of boundary conditions for computational aeroacoustics. *AIAA Journal* 33, 11 (1995), 2006–2012.
- HOWE, M. S. Cambridge monographs on mechanics. In *Acoustics of fluid-structure interactions* (1998), Cambridge University Press, Ed., pp. 105–108.
- HOWE, M.S. Contributions to the theory of aerodynamic sound, with applications to excess jet noise and the theory of the flute. *J. Fluid Mech.* 71, 4 (1975), 625–673.
- JIANG, X., AVITAL, E.J. & LUO, K.H. Direct computation and aeroacoustic modelling of a subsonic axisymmetric jet. *J. Sound Vib.* 270 (2004), 525–538.
- LAUFER, J. & YEN T.-C. Noise generation by a low-Mach-number jet. *J. Fluid Mech.* 134 (1983), 1–31.
- LIGHTHILL, M.J. On sound generation aerodynamically. Part I.: General theory. *Proc. Roy. Soc. London A211* (1952), 564–587.
- LILLEY, G.M. The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol. IV - Theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. Part II: Generation of sound in a mixing region. vol. 4. Air Force Aero Propulsion Laboratory, AFAPL-TR-72-53, 1972.
- MICHALKE, A. On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.* 19 (1964a), 543–566.
- MICHALKE, A. Survey on jet instability theory. *Prog. Aerospace Sci* 21 (1964b), 159–199.
- MITCHELL B. E., LELE, S. K. & MOIN, P. Direct computation of the sound generated by vortex pairing in an axisymmetric jet. *J. Fluid Mech.* 383 (1999), 113–142.
- MOSER, C. *Calcul direct du son rayonné par une couche de mélange en développement spatial: étude des effets du nombre de Mach et de l'anisothermie*. PhD thesis, École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, 2006.
- MOSER, C., LAMBALLAIS, E. & GERVAIS, Y. Direct computation of the sound generated by isothermal and non-isothermal mixing layers. *The 12th AIAA/CEAS Aeroacoustic conference, AIAA 2006-2447* (2006).
- SANDHAM N. D. & REYNOLDS W. C. Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer. *J. Fluid Mech.* 224 (1991), 133–158.
- SESTERHENN, J. A characteristic-type formulation of the Navier-Stokes equations for high order upwind schemes. *Comput. Fluids* 30 (2001), 37–67.
- THOMPSON, K. W. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.* 68 (1987), 1–24.

- THOMPSON, K. W. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II. *J. Comput. Phys.* 89 (1990), 439–461.
- VREMAN, A.W., SANDHAM N.D. & LUO, K.H. Compressible mixing layer growth rate and turbulence characteristics. *J. Fluid Mech.* 320 (1996), 235–258.

8. Nota de responsabilidade

O autor é o único responsável pelo material impresso incluído neste artigo.

ANÁLISE DE MODELOS SUBMALHA EM ELEMENTOS FINITOS

Carla Marques Xavier

PROMEC – Escola de Engenharia – UFRGS – Rua Sarmiento Leite, 425 – CEP 90050-170 – Porto Alegre – RS – Brasil
xavier_carla@yahoo.com.br

Adriane Prisco Petry

PROMEC – Escola de Engenharia – UFRGS – Rua Sarmiento Leite, 425 – CEP 90050-170 – Porto Alegre – RS – Brasil
adrianep@mecanica.ufrgs.br

Resumo. *A turbulência continua sendo, ainda hoje, um grande desafio para os pesquisadores, pois os escoamentos turbulentos são complexos e dependentes do tempo e do espaço. A combinação entre Simulação de Grandes Escalas e Método de Elementos Finitos está provando ser de grande relevância à comunidade de Engenharia, no entanto, ainda são escassas as publicações que tratam dessa combinação. Os objetivos desse trabalho são: analisar escoamentos de fluidos viscosos, incompressíveis e isotérmicos partindo de um código computacional tridimensional apresentado por Petry, 2002; verificar o comportamento dos Modelos Submalha em problemas de simulação de escoamento em canal tridimensional; estudar e aplicar a simulação de grandes escalas no âmbito do método de elementos finitos. Para alcançar esses objetivos são utilizados o modelo clássico de Smagorinsky e o modelo Dinâmico de viscosidade turbulenta, inicialmente proposto por Germano et al., 1991. Para o processo de segunda filtragem do modelo dinâmico emprega-se a filtragem por elementos finitos independentes de Petry, 2002. Na implementação do algoritmo é utilizado o Método dos Elementos Finitos e, para integrar as equações governantes, é usado o esquema de Taylor-Galerkin para a discretização no tempo e no espaço. O elemento finito de discretização do domínio computacional é o hexaedro linear. Os resultados obtidos com Simulação de Grandes Escalas no modelo clássico de Smagorinsky e no modelo Dinâmico, tiveram boa concordância com dados experimentais e com Simulação Numérica Direta, mas, o modelo Dinâmico mostrou melhor comportamento próximo à parede.*

Palavras-chave: *Elementos Finitos, Modelos Submalha, Turbulência.*

1. INTRODUÇÃO

O interesse no estudo dos fluidos em movimento existe em grande parte pela presença dos fenômenos que ocorrem na natureza e em algumas aplicações da engenharia. Conseqüentemente, a análise de escoamentos turbulentos é extremamente importante. Tennekes e Lumley, 1972, observam que tudo o que se pode fazer no sentido de definir a turbulência é listar algumas das características principais dos escoamentos turbulentos, como: irregularidade, difusividade, associação com elevados números de Reynolds, tridimensionalidade das flutuações de vorticidade, dissipação, validade da hipótese do contínuo e que está sendo caracterizada pelas as propriedades do escoamento, não pelas propriedades físicas do fluido. Em 1950, com o advento dos computadores, apareceu uma alternativa de se obter soluções numéricas das equações de Navier-Stokes, começando uma área nova no estudo dos fluidos, chamada Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD), que estuda métodos computacionais ou simulações numéricas de escoamentos.

Diferentes métodos numéricos são usados nestas simulações. Uma técnica eficiente para a análise dos problemas com geometrias complexas é o Método dos Elementos Finitos, que é a metodologia adotada neste trabalho. As simulações numéricas diretas (DNS) e as equações médias de Reynolds (RANS) representam as duas extremidades dos métodos possíveis para a simulação de escoamentos turbulentos. Na metodologia DNS todas as escalas do movimento são simuladas, o que é muito caro para qualquer escoamento turbulento. Na metodologia RANS, onde a demanda computacional é relativamente baixa, tem a remoção de todos os detalhes dos processos turbulentos, conseqüentemente passam para ser representados em função dos valores médios.

A simulação de grandes escalas (LES) está entre estas duas extremidades, conseqüentemente as maiores estruturas turbulentas, são resolvidas diretamente, e modelos são usados para representar o efeito das escalas submalha. Esses modelos têm a mesma proposta dos modelos de turbulência convencional, mas são mais simples porque consideram somente o efeito das pequenas escalas. Além disso, os modelos submalha têm menor dependência da geometria porque as pequenas escalas são de uma natureza mais universal do que a turbulência total.

Para superar as dificuldades na análise numérica de escoamentos incompressíveis é necessário adotar algum esquema para estabilizar a solução (Reddy e Gartling, 1994; Franca e Frey, 1992). A alternativa adotada neste trabalho é a formulação quase-incompressível (Kawahara e Hirano, 1983). A formulação usual para o escoamento incompressível é

baseada na hipótese de um valor constante para a densidade e, desta hipótese, a derivada da velocidade do som no campo de escoamento é infinita (Schlichting, 1968). Entretanto, no escoamento real a propagação do som ocorre sempre com velocidade finita. As equações para o escoamento quase-incompressível supõem a densidade constante (as flutuações da densidade são consideradas sem valor) e um valor finito para a velocidade do som. Com esta consideração a equação da conservação de massa contém uma derivada da pressão no tempo.

Este trabalho apresenta a aplicação de um algoritmo numérico para a análise de um escoamento turbulento tridimensional. A metodologia é baseada no método dos elementos finitos e na simulação de grandes escalas. O código computacional para simular o escoamento transiente, quase-incompressível e tridimensional, foi desenvolvido por Petry, 2002, usando o esquema de Taylor-Galerkin, com elemento hexaédrico de oito nós. Os modelos submalha utilizados são o modelo clássico de Smagorinsky e o modelo Dinâmico de viscosidade turbulenta, inicialmente proposto por Germano et al., 1991. As simulações de escoamento em um canal retangular, presentes neste trabalho, confirmam a validade do projeto executado, porém igualmente demonstram que melhorias são necessárias para superar dificuldades em grandes problemas computacionais.

2. ASPECTOS MATEMÁTICOS E NUMÉRICOS

2.1. Equações Governantes

As equações para a Simulação de Grandes Escalas são derivadas (Petry, 2002) das equações de conservação de massa, energia e momento de um escoamento viscoso, quase-incompressível, tridimensional, transiente e isotérmico de um fluido Newtoniano (White, 1974; Kawahara and Hirano, 1983). Na simulação de grandes escalas (Findikakis and Street, 1982) cada variável é decomposta em campo de grande escala (identificado por barra sobre a variável) e campo submalha (identificado pelo apóstrofo):

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i \quad p = \bar{p} + p' \quad \rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (1)$$

Se a densidade é constante, então $\rho' = 0$.

Prosseguindo o processo de filtragem das equações de conservação de massa e do momento do escoamento isotérmico, viscoso, quase-incompressível, tridimensional e transiente, as equações governantes são dadas por:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{v}_j) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{v}_j) \right] + \frac{\lambda}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho (L_{ij} + C_{ij} + \bar{v}'_i \bar{v}'_j) \right\} - f_i = 0 \end{aligned} \quad (j=1,2,3) \text{ in } \Omega \quad (3)$$

Com as condições de contorno:

$$v_i = \hat{v}_i \quad \text{in } \Gamma_v \quad (4)$$

$$\left\{ \left[-\bar{p} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} + v \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{v}_j) \right] \right\} n_j = t_i \quad \text{in } \Gamma_t \quad (5)$$

e as correspondentes condições iniciais:

$$v_i = \hat{v}_{i0} \quad \text{in } t=0, \Omega \quad (6)$$

$$p = \hat{p}_0 \quad \text{in } t=0, \Omega \quad (7)$$

Onde:

$\rho \rightarrow$ massa específica do fluido

$v_i \rightarrow$ componente da velocidade na direção i

$x_i \rightarrow$ coordenada na direção i

δ_{ij} - delta de Kronecker

\hat{v}_i - valores prescritos da velocidade i no contorno indicado

n_j - cosseno diretor do vetor normal ao contorno

t_i - valores prescritos das forças de superfície no contorno

μ - coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido

λ - coeficiente de viscosidade volumétrica do fluido

C - velocidades de propagação do som

ν - viscosidade cinemática

$\overline{v}_i \rightarrow$ componente, correspondente às grandes escalas, do vetor de velocidade na direção x_i .

$\overline{p} \rightarrow$ pressão, componente correspondente às grandes escalas.

$v'_i \rightarrow$ componente, correspondente às escalas submalha, do vetor de velocidade na direção x_i .

$L_{ij} = \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j} \rightarrow$ termos de Leonard.

$C_{ij} = \overline{v_i v'_j} + \overline{v'_i v_j} \rightarrow$ termos cruzados.

$\overline{v'_i v'_j} \rightarrow$ tensor de Reynolds submalha.

Os termos L_{ij} e C_{ij} podem ser negligenciados (Findikakis e Street, 1982). Estudos anteriores (Petry e Awruch, 1997) confirmam que a consideração desses termos não afeta significativamente os resultados aumentam em torno de 20% o tempo de processamento.

As equações (2) e (3), negligenciando os termos de Leonard e cruzados, com as condições de contorno e iniciais dadas pelas equações (4), (5), (6) e (7), são as equações governantes de um escoamento turbulento, isotérmico, quase-incompressível, de um fluido Newtoniano e, com as equações dos modelos submalha, consistem no sistema a ser resolvido.

2.2 Modelos Submalha

Os dois modelos implementados são baseados no conceito de viscosidade turbulenta, usando a hipótese de Boussinesq, as tensões de Reynolds submalha são dadas por:

$$\overline{-v'_i v'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

Onde ν_t é a viscosidade turbulenta.

Esta é a equação original de Boussinesq. Usualmente para escoamentos incompressíveis a equação (8) é modificada, introduzindo um termo com energia cinética submalha para fazer o modelo compatível com a equação usual da conservação de massa para escoamentos incompressíveis (Hinze, 1975). Porém neste trabalho a equação da continuidade é modificada, para escoamentos quase-incompressíveis, conseqüentemente, a equação (8) é válida.

2.3 Modelo de Smagorinsky

O modelo de Smagorinsky (1963) tem sido tradicionalmente usado para representar o efeito das escalas submalha em simulação de grandes escalas (Findikakis and Street, 1982; Lesieur et al, 1995). É um modelo de viscosidade turbulenta no qual as tensões de Reynolds submalha são dadas pela equação (8) e a viscosidade turbulenta é definida como:

$$\nu_t = C_S^2 \bar{\Delta}^2 \left| \bar{S} \right| \quad (9)$$

Onde C_S é a constante de Smagorinsky, com valores de 0.1 to 0.22, e os outros termos são dados por:

$$\left| \bar{S} \right| = \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad (10)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

$$\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\prod_{i=1}^3 \Delta x_i} \quad (12)$$

2.4 Modelo Dinâmico de Viscosidade Turbulenta

O modelo dinâmico foi primeiramente proposto por Germano et al., 1991, e modificado por Lilly, 1992. As tensões de Reynolds submalha são obtidas também com a equação (8), entretanto a viscosidade turbulenta é definida por:

$$\nu_t = C(\mathbf{x}, t) \bar{\Delta}^2 \left| \bar{S} \right| \quad (13)$$

O coeficiente dinâmico é calculado em função de características locais do escoamento, usando um processo de dupla filtragem. O cálculo de $C(\mathbf{x}, t)$ é baseado na informação das pequenas escalas resolvidas pela malha, e é definida como:

$$C(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (14)$$

Onde L_{ij} e M_{ij} são dados por:

$$L_{ij} = \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle - \langle \bar{v}_i \rangle \langle \bar{v}_j \rangle \quad M_{ij} = \langle \bar{\Delta} \rangle^2 \left| \langle \bar{S}_{ij} \rangle \right| \langle \bar{S}_{ij} \rangle - \langle \bar{\Delta}^2 \rangle \left| \bar{S}_{ij} \right| \bar{S}_{ij} \quad (15)$$

$$\langle \bar{S}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle \bar{v}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{v}_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad \left| \langle \bar{S} \rangle \right| = \sqrt{2 \langle \bar{S}_{ij} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle} \quad (16)$$

$\langle \bar{\Delta} \rangle$ - comprimento característico da segunda filtragem, com $\langle \bar{\Delta} \rangle > \bar{\Delta}$.

Nas equações acima, a barra indica o primeiro processo de filtragem (filtro em nível de malha) e o símbolo $\langle \rangle$ indica o segundo processo de filtragem (filtro teste).

Para a solução do sistema de equações, o Método de Elementos Finitos é empregado. Para obter o sistema de equações algébricas, as derivadas temporais são expandidas em séries de Taylor, incluindo os termos de segunda ordem e para a discretização no espaço o método clássico de Galerkin é aplicado (Reddy and Gartling, 1994). Para economizar tempo de processamento são utilizadas expressões analíticas para as matrizes e elementos hexaédricos isoparamétricos são usados (Burbridge e Awruch, 2000). Esse esquema é conhecido como Taylor-Galerkin, (Donea, 1984). O esquema temporal é explícito e condicionalmente estável e o passo de integração possui a seguinte restrição:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_i (\text{min})}{C + V} \quad (17)$$

onde $\Delta x_i (\text{min})$ é a mínima dimensão dos elementos de malha, C é a velocidade do som e V é a velocidade de referência.

2.5 A Segunda Filtragem

O modelo de viscosidade turbulenta submalha de Smagorinsky apresenta como maior limitação a dificuldade de representar corretamente, com uma constante única, diferentes campos de escoamento turbulento, tais como recirculação, recolamento e escoamento próximo à parede.

Uma alternativa ao modelo de Smagorinsky é o modelo dinâmico de viscosidade turbulenta, proposto por Germano et al., 1991 e modificado por Lilly, 1992. Nesse modelo o coeficiente é calculado de acordo com a evolução do escoamento, sendo uma função do tempo e do espaço.

A equação (14) define o coeficiente dinâmico $C(x,t)$. Este depende do uso de dois filtros de diferentes comprimentos característicos. A primeira filtragem é considerada aplicada quando se realiza a discretização das equações. O primeiro filtro (filtro ao nível de malha) tem dimensão característica relacionada às dimensões dos elementos da malha.

Para o segundo processo de filtragem (filtro teste) emprega-se um filtro com dimensão característica maior que o primeiro filtro. Baseado nestes dois níveis de escala, os modelos dinâmicos usam informações das menores escalas resolvidas (situadas entre os dois filtros) para calcular o coeficiente dinâmico.

Para o processo de segunda filtragem muitas propostas têm sido apresentadas.

Findikakis e Street, 1982 e Oshima, et al., 1996, apresentam uma expansão em série de Taylor. Padilla e Silveira Neto, 2004, analisam a influência de diferentes tipos de filtros.

A proposta para a segunda filtragem apresentada neste trabalho é referida como *segunda filtragem por elementos finitos independentes*, que foi apresentada por Petry, 2002.

Um exemplo de elemento independente em malha tridimensional é o vermelho apresentado na figura 1.

O processo consiste em construir elementos em torno de cada nó da malha, definido por nós vizinhos ao nó de interesse e empregar as funções de interpolação lineares do elemento para efetuar o processo de segunda filtragem. Desta forma, emprega-se uma interpolação linear dos valores calculados nos pontos vizinhos da malha, para obter o valor filtrado no ponto de interesse.

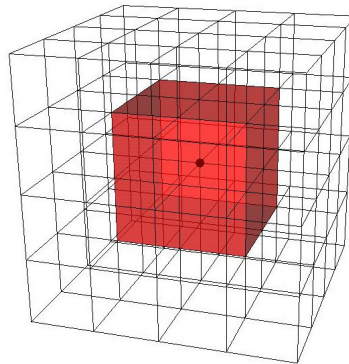


Figura 1 – Elemento independente em uma malha tridimensional, [Petry, 2002].

Para gerar esse conjunto de elementos independentes foi utilizado o algoritmo apresentado por Petry, 2002.

Considerando o elemento hexaédrico de oito nós, representado no espaço físico (x_1, x_2, x_3) e no espaço computacional (ξ, η, ζ) na figura 2, com funções de interpolação lineares dadas por:

$$\phi_\alpha(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_\alpha \xi)(1 + \eta_\alpha \eta)(1 + \zeta_\alpha \zeta) \quad (\alpha=1, \dots, 8) \quad (18)$$

onde $\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha$ são as coordenadas do nó α do elemento no sistema de eixos referencial ξ, η e ζ , dadas por:

$$\xi^T = \{-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1\} \quad (19)$$

$$\underline{\eta}^T = \{-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1\} \quad (20)$$

$$\underline{\zeta}^T = \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1\} \quad (21)$$

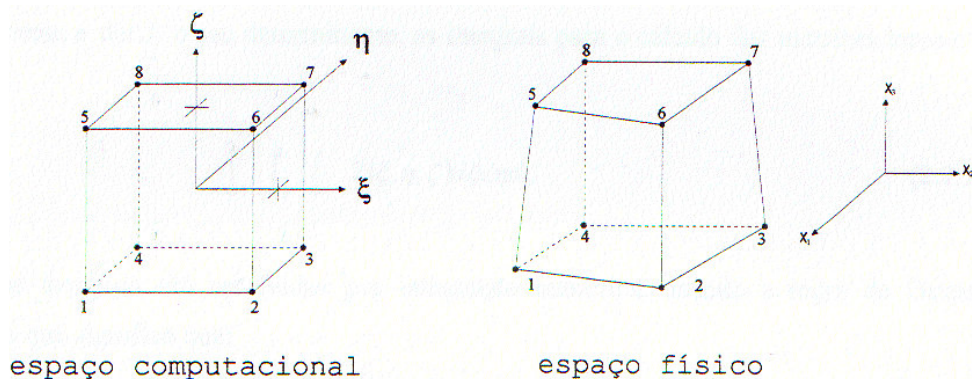


Figura 2 – Elemento hexaédrico de oito nós no espaço computacional e físico, [Petry, 2002].

As coordenadas de um ponto I qualquer no interior do elemento podem ser calculadas pela seguinte transformação de coordenadas:

$$(x_i)_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_{\alpha}(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) x_{i\alpha} \quad (22)$$

onde:

$(x_i)_I \rightarrow$ coordenada de um ponto I qualquer no interior do elemento ($i=1,2,3$)

$x_{i\alpha} \rightarrow$ coordenada i do nó α que define o elemento ($\alpha=1,2,3,4,5,6,7,8$)

$\phi_{\alpha}(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) \rightarrow$ função de interpolação do nó α , avaliada no ponto I, com coordenadas naturais (ξ_I, η_I, ζ_I) .

Esta é a transformação usual empregada em elementos finitos.

Então, dispõem-se das conectividades dos elementos independentes e das coordenadas naturais de todos os nós da malha, relativas ao seu elemento independente.

A etapa incluída no algoritmo principal de solução consiste em avaliar as quantidades:

$$\langle \bar{v}_i \rangle, \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle \text{ e } \langle \bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij} \rangle$$

utilizando as funções de interpolação do elemento e as coordenadas naturais de cada nó no interior do elemento independente associado a ele da seguinte forma

$$\langle \bar{v}_i \rangle_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_{\alpha}(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) \bar{v}_{i\alpha} \quad (23)$$

$$\langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_{\alpha}(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) \bar{v}_i \bar{v}_{j\alpha} \quad (24)$$

$$\langle \bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij} \rangle_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_{\alpha}(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) (\bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij})_{\alpha} \quad (25)$$

Empregando esta interpolação os valores dos nós vizinhos são ponderados, através de uma interpolação linear, na obtenção do valor filtrado de acordo com a distância dos mesmos ao nó I.

Para avaliar as quantidades é necessário calcular os valores de $\bar{v}_i \bar{v}_j$ e $\bar{\Delta}^2 |\bar{S}_{ij}| \bar{S}_{ij}$ para os nós que compõem o elemento independente. No programa implementado, estes valores são calculados para todos os nós da malha e armazenados para utilização na solução das equações (14) e (16).

A dimensão característica do primeiro filtro é avaliada como a raiz cúbica dos volumes dos elementos da malha:

$$\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\text{Vol}_e} \quad (26)$$

A dimensão característica do segundo filtro é calculada analogamente como sendo a raiz cúbica dos elementos independentes:

$$\langle \bar{\Delta} \rangle_I = \sqrt[3]{\text{Volume}(E_I)} \quad (27)$$

Avaliadas as expressões relativas ao segundo processo de filtragem, finalmente pode-se calcular $C(x,t)$ segundo a equação (14) para cada nó da malha.

Este coeficiente será empregado para o cálculo da viscosidade turbulenta, segundo a equação (13). Sendo a viscosidade turbulenta avaliada ao nível de elemento, e os valores do coeficiente dinâmico definidos para os nós da malha, o valor empregado para cada elemento é a média dos valores de $C(x,t)$ para os nós que compõem os elementos da malha original. Isto equivale a uma interpolação dos valores de C para o centro do elemento. Este procedimento está de acordo com o adotado por outros autores como Oshima et al., 1996, Zang et al., 1993, Breuer e Rodi, 1994, que empregam médias do coeficiente dinâmico para evitar que as variações bruscas, tanto espaciais como temporais, sejam fontes de instabilidades na solução.

Neste trabalho adotou-se um limite, também adotado por Zang et al., 1993, para a viscosidade turbulenta negativa, como sendo:

$$\nu + \nu_t \geq 0 \quad (28)$$

Outra verificação que teve de ser adotada foi que, quando o denominador da expressão para cálculo de $C(x,t)$ se anula, assume-se $C(x,t)=0$ (lembrando que esse valor é relacionado ao nó e que o valor empregado para cálculo da viscosidade turbulenta é a média dos valores nodais do elemento).

3. RESULTADOS

Simulações de escoamento em canal tridimensional com número de Reynolds 3300 são realizadas para validar o código. Os resultados são obtidos usando os modelos de Smagorinsky e Dinâmico e comparados com dados experimentais de Nishino & Kasagi (Gavrilakis, 1992) e com as simulações numéricas de Kim et al., 1987 e Abrunhosa, 2003.

A geometria do canal e a malha uniforme utilizada são mostradas, respectivamente, nas Fig. 3 e 4.

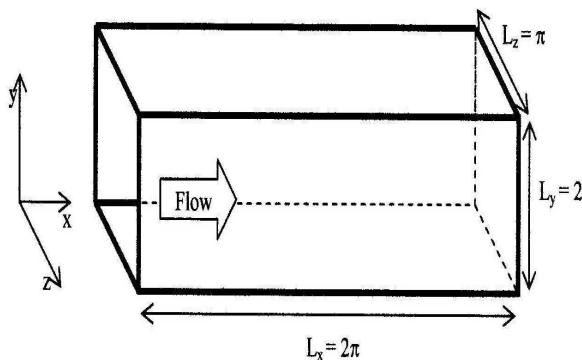


Figura 3. Geometria do canal.

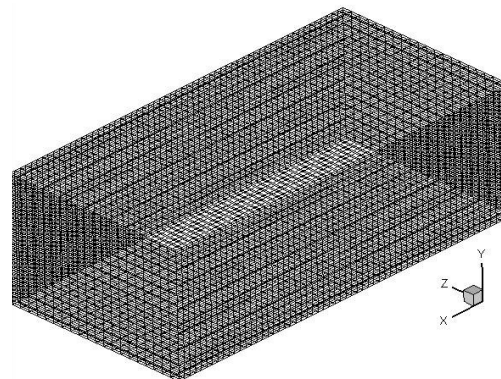


Figura 4. Malha uniforme.

Como condições de contorno na entrada usa-se um perfil turbulento de velocidade, completamente desenvolvido ($v_1=V(y)$, $v_2=0$) e condição de não-deslizamento ($v_1=v_2=v_3=0$) prescrita nas paredes superior e inferior. Na saída do canal existem condições de contorno naturais ($t_1=t_2=t_3=0$) (vide equação(5)). As condições iniciais usadas são $v_1=50,49$ m/s, $v_2=v_3=p=0$. É importante observar que, diferentemente do procedimento normal adotado em simulações numéricas de escoamentos turbulentos em canais com DNS ou LES, as condições de contorno nas direções x e z não serão periódicas.

Na Fig. 5 são mostrados os resultados da simulação, nos modelos de Smagorinsky e Dinâmico, do perfil de velocidade U comparados com resultados experimentais e outras simulações. Pode-se dizer que os resultados concordam bem com os dados experimentais e com a simulação de Abrunhosa, 2003. A tensão de Reynolds($u'v'$) estimada pelos modelos é mostrada na Fig. 6.

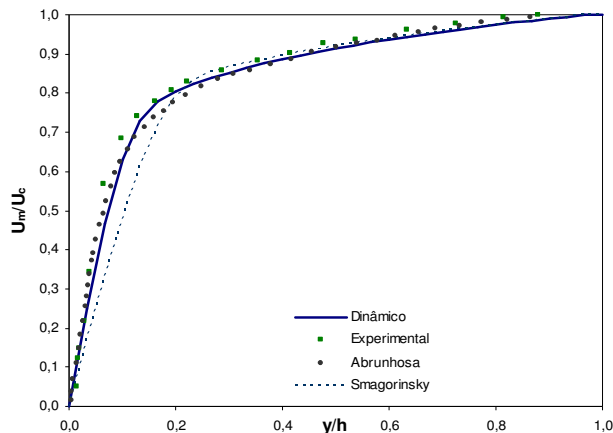


Figura 5. Perfil de Velocidade U .

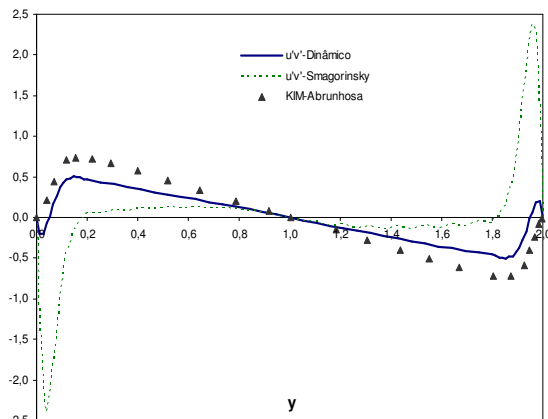


Figura 6. Tensão de Reynolds $u'v'$.

4. CONCLUSÕES

Foi apresentada a metodologia de resolução de escoamentos de fluidos Newtonianos quase-incompressíveis, turbulentos, isotérmicos e transientes em canal retangular, usando o método de elementos finitos e simulação de grandes escalas, com os modelos de Smagorinsky e Dinâmico. Os resultados são coerentes com os dados experimentais e com as simulações numéricas de Kim et al., 1987 e Abrunhosa, 2003.

Observa-se que os resultados do modelo Dinâmico estão em melhor concordância com os dados experimentais e de simulação direta do que os resultados apresentados pelo modelo de Smagorinsky. Além disso, pode ser observado que a metodologia da segunda filtragem proposta em Petry, 2002, de fato é melhor do que os resultados obtidos pelo modelo de Smagorinsky.

A análise desse problema apresentado aqui demonstrou a capacidade desta metodologia em simular escoamentos turbulentos complexos, sem limitações sobre o alocamento de memória. A grande redução no passo de tempo de integração à medida que o número de Reynolds aumenta, acarreta em grandes tempos de processamento e inviabiliza a construção de uma malha mais refinada, o que traria melhorias na análise do escoamento para o canal. Pesquisas nesse aspecto estão em andamento.

5. RECONHECIMENTOS

Os autores agradecem o Centro Nacional de Supercomputação da Região Sul, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CESUP-RS/UFRGS).

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrunhosa, J.D.M., 2003. “**Simulação de escoamento turbulento complexo com modelagem clássica e de grandes escalas**”. Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.
- Breuer, M., Rodi, W., 1994. “Large Eddy Simulation of Turbulent Flow through a Straight Square Duct and 180° Bend”, **Direct and Large Eddy Simulation I**, p.273-285, P.R. Voke et al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Burbridge, H.P., Awruch, A.M., 2000. An efficient one-step Taylor-Galerkin Scheme to Analyze 3D High Compressible Flows Using the Finite Element Method, Anais **ENCIT 2000**, Porto Alegre, RS, Brasil
- Donea, J., 1984. “A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v 20, pp 101-119.
- Findikakis, A.N. and Street, R.L., 1982. "Mathematical Description of Turbulent Flows", **Journal of Hydraulics Division, ASCE**, V108, N°HY8, paper 17265, p887-903.
- Franca, L., Frey, S. L., 1992. “Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations”. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 99, pp. 209-233.
- Gavrilakis, S., 1992, “Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct”, **J. Fluid Mech.**, vol. 244, pp. 101-129.
- Germano, M. Piomelli, U., Moin, P. Cabot, W.H., 1991. “A dynamic sub-grid-scale eddy viscosity model”, **Physics of Fluids**, A3 (7), 1760-1765.
- Ghosal, S., 1996. “An analysis of numerical errors in large eddy simulations of turbulence”, **Journal of Computational Physics**, 125, pp. 187-206;
- Hinze, J.O., 1975. "**Turbulence**", McGraw-Hill, New York.
- Kawahara, M., Hirano, H., 1983. “A Finite Element Method for High Reynolds Number Viscous Fluid Flow Using Two Step Explicit Scheme”. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, V.3, pp.137-163.
- Kim, J., Moin, P., and Moser, R., 1987. “Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number”, **J. Fluid Mech.**, vol. 177, pp. 133-166.
- Lesieur, M. Comte, P., Métais, O., 1995. “Numerical simulations of coherent vortices in turbulence”, **ASME - Appl Mech Rev**, Vol. 48, N°4.
- Lilly, D.K., 1992. “A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method”, **Physics of Fluids**, A4 (3), 633-635.
- Oshima, M., Kobayashi, T., Taniguchi, N., Tsubokura, M., 1996. “Development of Filtering Operation for Dynamic SGS Model Using Finite Element Method”. **The Second ERCOFTAC Workshop on Direct and Large Eddy Simulation**. Septembre 16-19, Grenoble, França.
- Padilla, E. L. M. ; Silveira Neto, A., 2003. “Influência de diferentes tipos de filtros para modelagem dinâmica em Simulação de Grandes Escalas”. In: **XXXIV Inberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE**, Ouro Preto. UFOP, v. 1. p. 1-10.
- Petry, A.P., 2002. “**Análise Numérica de Escoamentos Turbulentos Tridimensionais Empregando o Método de Elementos Finitos e Simulação de Grandes Escalas**”, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.
- Petry, A.P., Awruch, A.M., 1997. “Turbulent Flows Simulation Using the Finite Element Method and Large Eddy Simulation”(in Portuguese), **ENIEF 97**, Proceedings, San Carlos de Bariloche, Argentina.
- Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994. “**The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**”, CRC Press.
- Schlichting, H., 1968. "**Boundary Layer Theory**", McGraw-Hill, New York.
- Smagorinsky, J., 1963. “General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment”, **Monthly Weather Reviews**, v. 91, pp. 99-164.
- Tenekes, H. Lumley, J.L., 1972. "**A First Course in Turbulence**", MIT Press.
- White, F.M., 1974. “**Viscous Fluid Flow**”, McGraw-Hill, New York.
- Zang, Y., Street, R. L., Koseff, J. R., 1993. “A Dynamic Mixed Subgrid-Scale Model and its Application to Turbulent Recirculating Flows”. **Physics of Fluids**, A, v. 5, n. 12, pp. 3186-3196.

TURBULÊNCIA

Volume 6

CAPÍTULO 1

Redução de Ruído em Ensaio Experimentais

Igor Braga de Paula

University of Stuttgart

Institute für Aerodynamik und Gasdynamik–IAG/LWK

Stuttgart, Alemanha

Fernando Martini Catalano

Escola de Engenharia de São Carlos (EESC)

Departamento de Engenharia de Materiais,

Aeronautica e Automobilística

Universidade de São Paulo (USP)

São Carlos, SP - Brasil

CAPÍTULO 2

Elementos da Teoria de Transição em Estabilidade Hidrodinâmica

Sávio B. Rodrigues

Universidade Federal de São Carlos, UFSCar

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Matemática

São Carlos, SP - Brasil

CAPÍTULO 3

Estabilidade Hidrodinâmica em escoamento Bifásico Paralelo

Oscar M. H. Rodriguez

Escola de Engenharia de São Carlos (EESC)

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade de São Paulo (USP)

São Carlos, SP - Brasil

CAPÍTULO 4

Modelagem de Turbulência para Aplicações Aeroespaciais

Enda Dimitri V. Bigarella

Aerodinâmica e CFD, Embraer S.A.

São José dos Campos, SP - Brasil

João Luiz F. Azevedo

Comando Geral de Tecnologia Aeroespacial

Instituto de Aeronáutica e Espaço (CTA/IAE)

São José dos Campos, SP - Brasil

Escola de Primavera em Transição e Turbulência

TURBULÊNCIA

Volume 6

Editores

Márcio Teixeira Mendonça

Marcello Augusto Faraco de Medeiros

ABCM

Rio de Janeiro

Sumário

0.1	Introdução	1
0.2	Redução de Ruído no Projeto de Túneis de Vento	2
0.2.1	Projeto de Ventiladores	5
0.2.2	Corner Vanes	11
0.2.3	Câmara de Estabilização	13
0.2.4	Contração	14
0.2.5	Difusores	17
0.2.6	Exemplos Implementados em Túneis de Vento Existentes	21
0.3	Ruído de Instrumentação e Aquisição de Dados	24
0.3.1	Ruídos Provenientes de Alimentação	25
0.3.2	Ruído de Terra	28
0.3.3	Ruído na Transmissão de Informações	29
0.3.4	Ruído Introduzido por Calibração dos Sensores	32
0.3.5	Ruído no Estágio de Amplificação do Sinal	36
0.3.6	Filtros	38
0.3.7	Conversão A/D	42
0.3.8	Redução de Ruído Através de Processamento Digital de Sinais	43
0.4	Considerações Finais	54

Redução de Ruído em Ensaio Experimentais

Igor Braga de Paula

University of Stuttgart

Institute für Aerodynamik und Gasdynamik–IAG/LWK

Stuttgart, Alemanha

Fernando Martini Catalano

Escola de Engenharia de São Carlos (EESC)

Departamento de Engenharia de Materiais,

Aeronautica e Automobilitica

Universidade de São Paulo (USP)

São Carlos, SP - Brasil

0.1 Introdução

O presente trabalho trata de alguns métodos de redução de ruído, utilizados freqüentemente em ensaios experimentais. Existem diversas maneiras de detectar fontes de ruído e ações que podem ser tomadas para reduzir a sua influencia sobre o fenômeno que se deseja estudar. O presente trabalho aborda duas principais fontes de ruído presentes em experimentos com fluidos: ruído do escoamento (turbulência) e ruído de medição/digitalização. A primeira parte do trabalho trata da redução de turbulência no projeto de túneis de vento. A segunda parte trata de técnicas para redução de ruído elétrico dos equipamentos de medição, e algumas técnicas de aquisição e processamento de sinais que podem ser empregadas para melhorar

a qualidade do sinal medido.

0.2 Redução de Ruído no Projeto de Túneis de Vento

Desde o principio das pesquisas e desenvolvimentos aerodinâmicos, o túnel de vento tem sido o equipamento padrão mais importante do aerodinamicista. O rápido desenvolvimento de métodos numéricos em dinâmica dos fluídos mudou a relação entre experimento e teoria, mas de maneira nenhuma tornou o túnel de vento obsoleto. Dessa forma, novos túneis de vento serão construídos e usados no futuro.

Muitos túneis de vento existentes são resultados de considerações individuais e que atenderam os requisitos iniciais do usuário. Isso justifica, em parte, nenhum túnel de vento ser cópia de outro. Por outro lado, para cada túnel de vento projetado, o trabalho de engenharia é praticamente feito desde o início e as soluções de engenharia são feitas quase que exclusivamente para cada túnel, não havendo intercâmbio e troca de idéias suficientemente elevadas para que possam ser reutilizadas baixando assim, os custos de projeto.

O conhecimento básico para o projeto de túnel de vento de baixa velocidade está altamente desenvolvido. Mesmo para o projeto de túneis de grandes dimensões a construção de um túnel piloto em escala normalmente não é mais necessária. Projetos de túneis de vento que são baseados em metodologia comprovada constituirão provavelmente equipamentos de boa qualidade. Entretanto, diferentes projetos e métodos de fabricações podem levar a formas geométricas diferentes e qualidade de escoamentos diferentes.

Independentemente da metodologia de projeto e da construção todo túnel de vento deve seguir certos padrões geométricos para garantir a qualidade do escoamento, tais como:

- Difusores suaves com ângulo de difusão não excedendo 4° para o difusor de alta velocidade e 5° para o difusor principal.
- Difusor de alto ângulo na entrada da câmara de estabilização com telas (ou o trocador de calor) para prevenir separação.
- Guias de curva (corners vanes) com perfis de baixo arrasto.

- Projeto cuidadoso das telas e/ou colméias instaladas na câmara de estabilização para que sejam obtidas pequenas perdas e alta qualidade do escoamento.
- Contração projetada com razão de contração (R_c) $6 < R_c < 15$, de maneira a ter o menor comprimento sem separação para que a camada limite tenha a menor espessura possível na câmara de ensaios.
- Projeto do ventilador para alta eficiência e baixa emissão acústica.
- Baixa turbulência:
 $0,005\% < Tu_{axial} < 0,11\%$ e $0,06\% < Tu_{lateral} < 0,13\%$

Teste em túnel de vento é um fator crítico no desenvolvimento de veículos aerodinâmicos e suas tecnologias associadas. Os custos e o tempo despendido nos testes são significativos, mas essenciais na redução do custo e do risco tecnológico dos ensaios em vôo de aeronaves e novas tecnologias. Decisões tomadas durante a evolução e execução dos programas de ensaios em túnel de vento, podem ter uma influência importante no desempenho, no cronograma de desenvolvimento e financiamento através do ciclo de vida de uma aeronave. Fabricantes têm aplicado um enorme esforço no sentido de reduzir riscos técnicos, custos e tempo nas atividades de desenvolvimento de uma nova aeronave.

Ensaio aeroacústicos em túneis de vento já são desenvolvidos há várias décadas para aeronaves e veículos terrestres. Do ponto de vista da técnica de ensaio apareceram avanços significativos como conjunto de microfones em fase (phased microphone array), “microphone mirrors”, processamento de dados, e outras tecnologias usadas para identificação e estudo de fontes de ruído.

Do ponto de vista do equipamento de ensaio, a tendência tem sido a construção ou, adaptação de túneis de vento de grande porte com seções de ensaios com baixo ruído de fundo, especialmente em baixas frequências. Túneis de vento de grande porte permitem ensaios de veículos terrestres detalhados em escala real e, componentes em escala real de aeronaves. Com esses avanços hoje é possível o estudo e a identificação de fontes aeroacústicas de baixas intensidades. A indústria aeroespacial tem focado no desenvolvimento de novas

tecnologias de medidas, com uma ênfase secundária em túneis de vento aeroacústicos novos ou melhorados. Para o caso da indústria automobilística acontece exatamente o contrário com investimentos em novos e renovados túneis de vento com pouca ênfase em novas tecnologias de medidas.

Existem dois procedimentos gerais para suplantiar o problema do ruído de fundo da seção de ensaios de um túnel de vento o qual pode influenciar o sinal aeroacústico de um veículo em teste: O primeiro é testar em um túnel cujo ruído de fundo é muito baixo com isso aumentando efetivamente a relação entre o sinal e o ruído tanto para as medidas internas quanto externas. Esse foi o procedimento da indústria automobilística nos últimos quinze anos a qual construiu ou renovou pelo menos doze túneis aeroacústicos de grande porte. Esses túneis são na grande maioria do tipo 3/4 aberto com área de testes de 10 a 56 m².

O segundo procedimento para minimizar os efeitos do ruído de fundo é utilizar técnicas de medidas acústicas modernas. Nos últimos 15 anos esse foi o procedimento utilizado pela indústria aeroespacial.

O ruído de fundo na câmara de testes é predominantemente ruído de banda larga (broadband), mas também existem ruídos tonais discretos. Dentre as fontes de ruído de fundo destacam-se as mais importantes como sendo o ruído do ventilador; o ruído do escoamento através de componentes o circuito do túnel (guias de curvas, telas e trocadores de calor); o ruído devido à turbulência da camada cisalhante; e o ruído proveniente da camada cisalhante incidindo sobre o coletor (câmaras abertas ou 3/4 abertas). Fontes de ruído tonal em túneis de vento são: frequência de passagem das pás do ventilador, interação pá do ventilador e estatores, ruído eletromagnético do motor, “vortex shedding noise” do escoamento passando em sondas ou estaiamentos de suporte, alto ruído do escoamento sobre placas perfuradas metálicas dos flapes de coletores (chapas metálicas perfuradas são usadas no tratamento acústicos de muitos túneis), e ressonância de baixa frequência associada com a interação do bocal de saída, coletor e o circuito do túnel.

Essa lista de fontes de ruído de fundo em túneis de vento não significa que todas são importantes e devam ser atenuadas. Usualmente, somente algumas dessas fontes são importantes para um dado túnel de vento. Num túnel de vento que não foi tratado acusticamente, o ruído de fundo na seção de ensaios é tipicamente dominado pelos ruí-

dos tonais e de banda larga provenientes do ventilador. Desde 1960 foram construídos vários de túneis de tamanho pequeno a moderado os quais estão disponíveis para pesquisa e desenvolvimento. Na metade de 1980, surgiram vários túneis de vento de grande porte que foram modificados ou modernizados visando testes aeroacústicos. A maioria desses túneis serve a indústria aeroespacial.

0.2.1 Projeto de Ventiladores

Como apontado na seção anterior, uma das maiores fontes de ruído de banda larga e tonal são provenientes do ventilador (ou ventiladores) do túnel de vento. Para túneis de grande porte (área de ensaio de 12 a 60 m²) normalmente se projeta um ventilador do tipo axial, mas dependendo do balanço custo/energético é possível adotar multi-ventiladores também axiais. O conjunto ventilador motor é o item mais caro no projeto de um túnel de vento e dependendo do tamanho do circuito, a utilização de um ventilador apenas pode ser uma solução mais cara do que um projeto com vários ventiladores menores. Atualmente, com sistemas robustos de “feedback-control” é possível controlar multi-ventiladores de maneira eficiente sem que haja descompasso tanto de rotação quanto de empuxo. Para o caso de túneis aeroacústicos ainda é necessário um estudo de compromisso entre custo e ruído uma vez que multi-ventiladores podem produzir mais ruído tonal e ruído eletromagnético e mecânico dos motores.

Para túneis de pequeno e médio porte há uma tendência na utilização de ventiladores centrífugos e circuito aberto. Ventiladores centrífugos são menos eficientes, mas podem produzir menos ruído de fundo na câmara de ensaios. A configuração de circuito aberto favorece a utilização do ventilador centrífugo no fim do difusor para a sucção do escoamento.

A maior porção do ruído que é gerado pelo ventilador é de origem aerodinâmica e pode ocorrer devido à:

- passagem das pás através do ar;
- forças exercidas pelas pás no ar;
- esteira das pás passando num ponto fixo ou estrutura;
- interferência da separação do escoamento com alguma superfície sólida;

- turbulência causada pelas forças cisalhantes em regiões do fluido longe das paredes.

Em geral é sabido que o ruído do ventilador é uma função da velocidade da ponta da pá, da pressão estática, da potência do ventilador, do escoamento, número de pás e diâmetro, mas não há parâmetros específicos para calcular o nível de ruído esperado a ser emitido por um ventilador para uma dada condição de operação.

Fatores que afetam o ruído de ventiladores:

- a. Estruturas do sistema motor ventilador: O movimento do ar passando sobre estruturas de suporte do motor e dos endireitadores gera turbulência através da esteira, que produz ruído aerodinâmico. Além da turbulência, um ruído de baixa frequência ocorre quando as esteiras das pás passam sobre essas estruturas.
- b. Rotação do ventilador (velocidade na ponta): Em geral, é sabido que o ruído de um ventilador é proporcional à quinta potência da velocidade da ponta da pá, ou seja, quanto maior a velocidade na ponta maior o ruído gerado.
- c. Número de pás: Num dado sistema, o trabalho realizado por cada pá é inversamente proporcional ao número de pás. O aumento do número de pás acarreta uma diminuição do carregamento em cada uma delas. Logo, utilizando-se um número maior, é possível ajustar um ângulo de ataque menor em cada pá para manter o mesmo carregamento total. Com isso é possível obter uma redução do nível de ruído gerado.
- d. Tamanho da corda da pá: Quanto maior a corda da pá, melhor a distribuição de carregamento sobre a pá, portanto, menor o ruído produzido.
- e. Ângulo de ataque das pás: O nível de ruído é minimizado para um ângulo de ataque menor que o máximo recomendado.
- f. Formato da entrada: Uma vez que a forma da entrada do ventilador afeta a pressão dinâmica, afetara também o ruído produzido.

Os itens c, d e e levam sempre a uma solução de compromisso entre eles, não é fácil projetar um ventilador com múltiplas pás (por exemplo, >10) que contemplam o item d, pois um número grande de pás levam a pás delgadas. Uma solução é aumentar o diâmetro do cubo, mas esse tamanho não pode passar de 60% do diâmetro do ventilador com risco de aumentar a carga alar das pás inviabilizando os requisitos c e d simultaneamente.

A faixa de número de Reynolds em que um ventilador opera é um fator muito importante para o seu projeto. A variação do número de Reynolds com a rotação da pá é significativa e, em geral, os valores se mantêm na faixa considerada de baixo número de Reynolds, ou seja, abaixo de 1×10^6 . Por exemplo: um ventilador típico de 4 m de diâmetro com 450 rpm de rotação, corda na raiz de 0.30 m e corda na ponta de 0.15 m, terá uma faixa de variação do número de Reynolds na ponta de 942478 a 282740 quando funcionando na rotação máxima e a 10% desta respectivamente.

Aerofólios comumente usados em ventiladores de túneis de vento, tais como o Clark Y e RAF-6 foram projetados e testados para número de Reynolds acima de 1×10^6 cuja estrutura de desenvolvimento da camada limite é usualmente composta de escoamento laminar, transição e escoamento turbulento. No caso de baixo número de Reynolds essa estrutura pode não se desenvolver necessariamente dessa maneira onde a transição provavelmente acontecerá através de separação laminar, formação de uma bolha de separação laminar e recolamento. Ainda, em escoamentos de baixo número de Reynolds, a separação turbulenta ocorre do bordo de fuga para o bordo de ataque ou ainda pior, pode ocorrer separação laminar sem recolamento (bubble bursting) principalmente para aerofólios projetados para altas velocidades operando em baixas velocidades. Todos esses fatores são geradores de ruído.

Em resumo, aerofólios projetados para operarem em altas velocidades simplesmente perdem rendimento em baixas velocidades. Dessa maneira, deve-se escolher um aerofólio que apresente alto rendimento em baixo número de Reynolds, tais como os da família Eppler e Wortman. Outro fator importante, não levado em conta na escolha do aerofólio das pás de ventiladores, é o seu desempenho aerodinâmico numa faixa de ângulos de ataque negativos até pouco maior que zero. É nessa faixa de ângulos de ataque que mais frequentemente opera toda a envergadura da pá (satisfazendo o item e) e,

como se deseja alto desempenho em ventiladores de túnel de vento, aerofólios com alto desempenho nessa faixa de incidência deverão ser escolhidos. Aerofólios anteriormente usados, como os já citados Clark-Y e RAF, são na sua maioria planos no intradorso (essa era a principal razão de serem escolhidos, devido à facilidade de construção das pás) fazendo com que o câmber seja devido principalmente à curvatura do extradorso, a Fig. 1 apresenta uma comparação entre os aerofólios citados. Esse fato faz com que o câmber não seja elevado prejudicando seu desempenho a baixos ângulos de ataque. Aumentando-se o câmber apenas pela curvatura do extradorso também não é uma solução, pois deteriora ainda mais o desempenho aerodinâmico do aerofólio operando a baixos número de Reynolds.

A distribuição de câmber ideal para assegurar bom desempenho em baixos ângulos de ataque e baixos número de Reynolds tem dois fatores importantes: câmber máximo acima de 15% da corda e intradorso na região de 70% até 100% da corda com curvatura côncava.

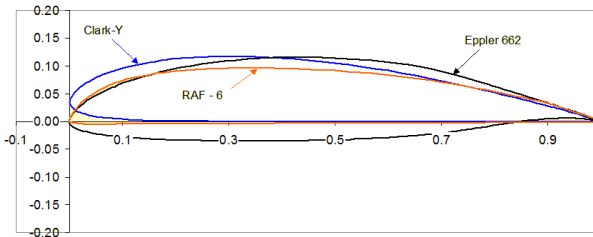


Figura 1: Perfil dos Aerofólios ClarkY, RAF 6 e Eppler 662.

O aerofólio Eppler 662 reúne as características citadas acima, além disso possui espessura geral que possibilita boa resistência estrutural. Características bidimensionais podem ser diretamente usadas no cálculo da geometria aerodinâmica da pá, pois, assume-se que a distância entre a ponta da pá e o duto que envolve o ventilador é suficientemente pequena para garantir escoamento bidimensional. A Fig. 2 apresentam os resultados de C_L e C_D para os três aerofólios para um n° de Reynolds de 1×10^6 . Para esse n° de Reynolds, para ângulos de ataque na faixa de $-4^\circ < \alpha < 1^\circ$ o aerofólio Eppler apresentou o melhor desempenho. O RAF-6 apresenta C_{Lmax}

equivalente ao Eppler 662, no entanto, para ângulos negativos seu desempenho diminui bastante devido à sua curvatura no intradorso no bordo de ataque. Nessa região pode ocorrer separação laminar caso o ponto de estagnação fique no extradorso como é o caso de ângulos negativos. A eficiência aerodinâmica também é melhor para o Eppler em todas as faixas de ângulos de ataque e sua maior eficiência está na região em que normalmente operam os ventiladores. A Fig. 3 apresenta as curvas L/D para o Eppler e RAF-6.

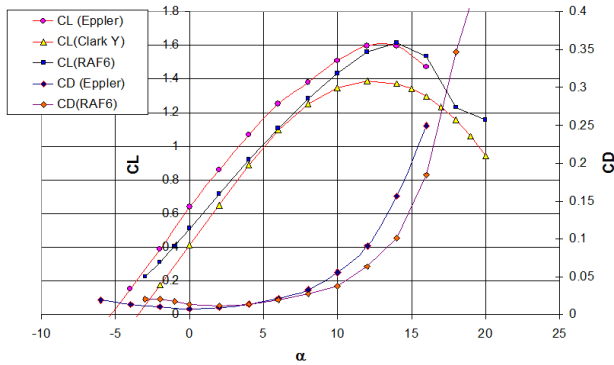


Figura 2: Comparação entre Eppler 661, Clark Y e RAF-6.

Portanto, para um ventilador produzir baixo ruído seu projeto aerodinâmico deverá ser cuidadosamente elaborado e, se possível, distinguir seções ao longo da envergadura da pá onde as condições como n^o de Reynolds e razão de avanço, exigirem perfis aerodinâmicos mais adequados. Nesse caso uma pá com diferentes perfis ao longo de sua envergadura será uma solução elegante e eficiente bastante possível de ser construída. Outro fator importante seria avaliação do enfechamento das pás que pode reduzir ruídos produzidos nas pontas das pás.

Como dito anteriormente, um número grande de pás pode reduzir o ruído produzido por ventiladores axiais. Se o número de pás for igual ao número de endireitadores a interrupção aparece em todas as pás simultaneamente e o nível de ruído produzido será consideravelmente grande. Em geral, fontes de ruído iguais emitindo

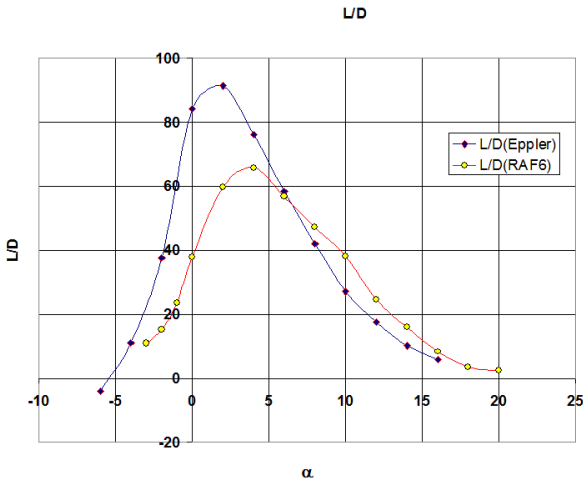


Figura 3: Eficiência aerodinâmica dos Aerofólios Eppler 662 e RAF-6.

simultaneamente, aumentam o nível de ruído em 3 dB. Se esse tipo de perturbação simultânea for eliminado haverá uma redução da intensidade do ruído emitido. A tabela 1 fornece a redução do nível de ruído em dB se perturbações simultâneas forem evitadas. Por exemplo, para um ventilador com 16 pás espera-se que seja obtida uma redução de 12 dB se os 16 endireitadores forem colocados de uma maneira que não coincidam com as pás. Isso pode ser feito com torção dos endireitadores diferentes das pás do ventilador. O mais comum é colocar um número de endireitadores diferente do número de pás do ventilador. A tabela 2 fornece uma relação entre o número de pás e o de endireitadores.

Número de pás do ventilador	1	2	4	8	16
Diminuição nível de ruído dB	0	3	6	9	12

Tabela 1: Redução do nível de ruído com o aumento do número de pás do ventilador.

Número de pás do ventilador	4	8	12	16
Número de endireitadores (min)	3	7	11	15
Número de endireitadores (máx)	5	9	13	17

Tabela 2: Relação entre número de pás e endireitadores.

0.2.2 Corner Vanes

Em túneis de circuito fechado, um dos fatores mais importantes na qualidade do escoamento e na eficiência do circuito é o projeto das guias de curvas (corner vanes). Existem vários projetos de guias de curvas cada um com suas vantagens e desvantagens porem, todos devem satisfazer as seguintes condições:

- a. Acarretar baixas perdas ao circuito
- b. Garantir que o escoamento que passa nas curvas seja o mais uniforme possível, sem acelerações e geração de vórtices.
- c. Rigidez suficiente para evitar vibrações.
- d. Construção seriada para obtenção de similaridade entre as várias guias.

Guias que satisfaçam todas essas condições são difíceis de projetar, pois há sempre um compromisso entre as condições acima. A Fig. 4 apresenta alguns resultados de testes com diferentes guias, onde K_0 é o coeficiente de perda de pressão e P/C é a relação entre a distância entre as guias e sua corda.

Esses experimentos foram feitos por [21] onde o número de Reynolds e ângulo da curva puderam ser variados. Nota-se da Fig. 4 que guias de arco circular podem apresentar bom desempenho comparativamente às guias espessas do tipo Collar [8]. No entanto esse bom desempenho é conseguido para uma razão P/C de 0.25 o que significa que uma quantidade muita elevada de guias seria necessária para a construção da seção. Por outro lado, de acordo com a Fig. 4, as guias do tipo Collar apresentam o melhor desempenho para $P/C = 0.4$. A decisão de qual guia deverá ser usada pode ser mais influenciada pelas condições c e d acima. Guias do tipo Collar apresentam uma forma geométrica mais complexa do que um simples arco circular. Para as guias de arco circular é necessário a construção de duas

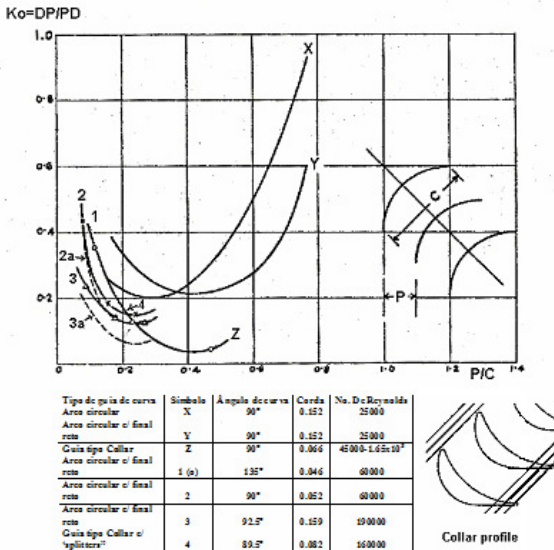


Figura 4: Comparação entre várias guias de curva em relação à perda de pressão e distância entre as guias, [21].

ferramentas para a conformação das guias para as curvas 1-2 e 3-4 que possuem cordas diferentes. O custo dessas ferramentas mais a quantidade de chapas de aço podem inviabilizar a utilização de guias de arco circular.

As guias do tipo Collar possuem ótimo desempenho aerodinâmico e podem ser construídas utilizando-se tecnologia de material composto. Como para as guias do tipo Collar o melhor desempenho aerodinâmico é conseguido para $P/C = 0.4$, deve-se construir uma quantidade de guias para cada curva com a respectiva corda para satisfazer esse coeficiente. Se no projeto do circuito do túnel de vento forem adotadas seções de curvas sem difusão, as curvas 1 e 2 deverão ter a mesma quantidade de guias e todas com as mesmas dimensões. O mesmo acontecerá com as curvas 3 e 4 porém com dimensões maiores, pois a entrada da curva 3 é o final do segundo difusor. Com esse lay-out é provável que seja adotado um difusor de alto ângulo

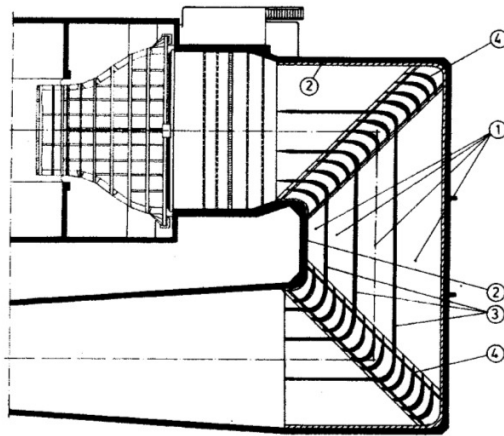
ao final da 4ª curva.

As guias de curvas do tipo Collar possuem um bordo de ataque arredondado o que permite um passeio maior do ponto de estagnação com isso evitando que possíveis e inevitáveis desalinhamentos do escoamento provoquem separações tanto no extradorso quanto no intradorso.

Para que as guias do tipo Collar possam ser utilizadas em um túnel de vento com tratamento acústico seu bordo de fuga devera ser afilado e sua superfície coberta com material isolante acústico como espuma de poliéster poroso ou tinta emborrachada. Seu interior deve ser preenchido com material absorvente tipo espuma de poliuretano expandida. As seções de curvas são ideais para a inserção de abafadores de ruídos, as Figs. 5 e 6 mostram o tratamento acústico dado às guias de curvas e as placas separadoras verticais com camadas de material absorvente de ruído. As paredes das curvas são ideais para a colocação de absorvedores de ruído de banda larga do tipo apresentado na Fig. 7. Com esse tipo de arranjo é possível abater o ruído proveniente de ventiladores nas frequências de 80 a 200 Hz. Ruídos em outras frequências podem ser absorvidas também mudando a espessura da espuma absorvedora.

0.2.3 Câmara de Estabilização

Geralmente se utiliza uma seção de estabilização do escoamento antes e depois da contração. A câmara de estabilização antes da entrada da contração serve principalmente para atenuar a turbulência gerada pelo sistema de telas e colméia. É sabido que a escala de turbulência é reduzida ao passar por uma tela, no entanto o nível de turbulência aumenta. Mas como a escala diminui essa turbulência é dissipada rapidamente, mas exige certo comprimento. O comprimento da câmara de estabilização é uma solução de compromisso entre a dissipação da turbulência e o aumento da camada limite das paredes que não pode ser muito grande, pois conseqüentemente irá aumentar o risco de separação na contração ou pelo menos aumentar a camada limite da câmara de ensaios. Uma das fontes de ruído de banda larga na câmara de ensaios é sua camada limite (no caso de câmara de ensaios fechada ou 3/4 aberta) ou a camada cisalhante (câmara aberta). As fontes são distribuídas ao longo das superfícies da câmara de ensaios ou das fronteiras do jato. Devido à sua



1	Duto de retorno subdividido em seções diferentes com a mesma perda de carga e transmissão acústica.
2	"Acoustic Lining" das paredes laterais dos túnel com membranas absorvedoras de ruído
3	Placas verticais dos dutos contendo duas camadas de membranas absorvedoras de ruído
4	Guias de curva de metal perfilada com espuma de poliéster porosa Figura YYY

Figura 5: Curvas 3 e 4 do túnel de vento da Universidade de Stuttgart após tratamento acústico para diminuição do ruído de fundo, [13].

localização na câmara de ensaios essas fontes de ruído não podem ser totalmente atenuadas com o uso de tratamento acústico. Em túneis de vento automobilísticos, as seções são geralmente $\frac{3}{4}$ abertas com o solo rígido e acusticamente refletivo para simular a pista de rolagem. Em alguns túneis aeroespaciais seções de ensaios fechadas com tratamento acústico das superfícies são utilizadas para melhorar a velocidade e diminuir a energia do ventilador. No caso de seções de ensaios fechadas o ruído produzido pela camada limite é o maior contribuidor de SPL de média e alta frequência.

0.2.4 Contração

A função principal da contração num túnel de vento é acelerar o escoamento de maneira uniforme, ou seja, o escoamento na saída da contração deve ter distribuição uniforme em toda a sua área. Para

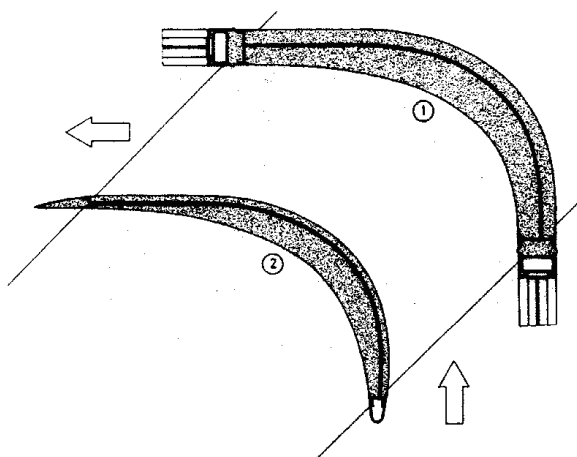


Figura 6: Guia de curva perfilada com espuma de poliéster porosa, 1 guia integrada com as paredes verticais dos dutos e 2 guias entre as paredes verticais dos dutos, [13].

fazer isso a geometria da contração deve possuir curvaturas que possibilitem a aceleração do escoamento o mais uniformemente possível. O uso de contrações com razão de contração entre 6 e 9 é altamente recomendado. Também é importante escolher uma curvatura que possua a maior mudança de área próxima à secção central da contração, ou seja, que o ponto de inflexão esteja entre 50% a 60% do comprimento da contração. O comprimento da contração deve ser de 1 a 1.25 vezes o diâmetro hidráulico da entrada da contração. Mantendo a relação comprimento L e diâmetro hidráulico nessa faixa evita-se separação em contrações com razão de contração entre 6 e 9. Inclinação zero na entrada e curvatura nula no ponto de inflexão também ajudam na prevenção da separação da camada limite, inclusive em baixas velocidades. Inclinação e curvatura nulas na saída da contração também garantem boas condições da camada limite e de turbulência próximo à entrada da câmara de ensaios. Contrações com razão de contração maior que 9 produzem condições na câmara de ensaios com vários problemas na estrutura e desenvolvi-

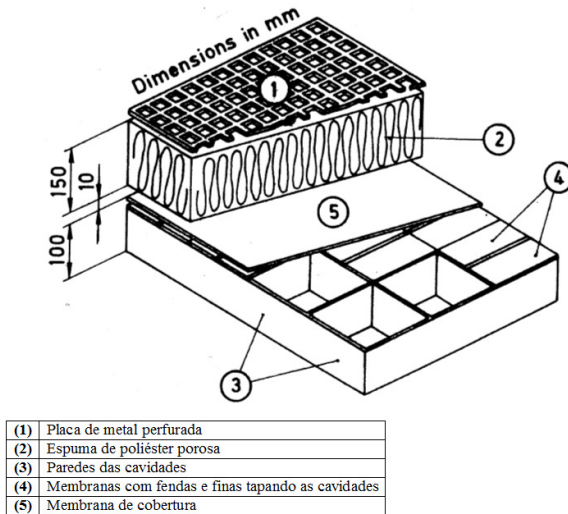


Figura 7: Esquema de um absorvedor de banda larga consistindo de espuma de poliéster e membranas absorvedoras.

mento da turbulência do escoamento. Além disso, um crescimento acentuado dos vórtices de Görtler é uma fonte de instabilidade de baixa frequência.

Segundo [19], entre os vários problemas de uma contração com alta razão de contração, estão os descompassos entre as intensidades e escalas das componentes longitudinal e lateral da turbulência. Isso resulta não somente numa anisotropia artificial, mas também numa câmara de ensaios com um crescimento rápido de sua turbulência. Ambas as características quase nunca são encontradas em condições de voo. Portanto, a única vantagem real conseguida por uma contração larga é o aumento da velocidade na câmara de ensaios. Com uma otimização do tamanho do ventilador em relação ao circuito do túnel pode resultar numa velocidade maior através do uso de um ventilador maior com capacidade de produzir maior vazão com baixa queda de pressão.

A contração deve ser projetada mantendo-se em mente a discussão acima. Há vários métodos de projeto de contrações tridimensi-

onais. Um dos métodos mais populares é o método das duas curvas cúbicas desenvolvido por [16]. O método de Morel constitui na determinação de duas curvas cúbicas (Eq. 1) cujo ponto de inflexão está localizado na parte central da contração. Para o projeto da contração o ponto de inflexão foi fixado a 60% da entrada da mesma.

$$\frac{D}{D_1} = 1 - F_i \left(\frac{x}{D_1} \right)^3. \quad (1)$$

Onde D_1 é o diâmetro hidráulico da entrada da contração, D é o diâmetro na posição x e F_i é uma função m da razão entre os diâmetros hidráulicos da entrada e saída. A função F_i é definida pelas equações 2 e 3 para a entrada e saída da contração respectivamente:

$$F_i(\text{entrada}) = \frac{m-1}{m} X^{-2} \left(\frac{L}{D_1} \right)^{-3}, \quad (2)$$

$$F_e(\text{saida}) = \frac{m-1}{m^3} (1-X)^2 \left(\frac{L}{D_1} \right)^{-3}. \quad (3)$$

Onde X é a localização do ponto de inflexão e L o comprimento da contração. Essas dimensões podem ser vistas na 8

Para manter a camada limite segura e com a menor espessura possível, Morel sugere que:

$$0.75 \leq \frac{L}{D_1} \leq 1.25 \quad e \quad 0.2 \leq X \leq 0.8. \quad (4)$$

0.2.5 Difusores

Difusores podem ser classificados em duas diferentes categorias:

- I. Difusores de baixo ângulo ou difusores de saída, como por exemplo, o difusor após a câmara de ensaios. Esse tipo de difusor, geralmente possui pouca expansão com ângulo de cone equivalente até 5° e com uma razão de áreas (A) menor que 1.5.

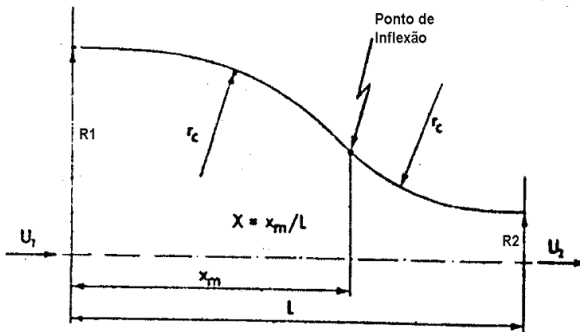


Figura 8: Geometria do contorno da contração construída a partir de dois arcos cúbicos com curvatura r_c unidos num ponto de inflexão em x_m .

II. Difusores de alto ângulo. Com a utilização de contrações com razão de contração maior que 6 significa que a área de entrada da contração será grande em relação à área da câmara de ensaios. Se uma grande razão de área de difusão for necessária, então deverá ser projetado um difusor longo, com ângulo de cone equivalente até 5° . Isso não é desejável economicamente, pois o circuito do túnel será muito grande, cada curva e guias serão diferentes, pois será necessário que haja difusão nessas seções. Um difusor curto com grande razão de difusão e conseqüentemente um ângulo de cone equivalente grande pode ser uma solução mais adequada. Esse tipo de difusor é um difusor de alto ângulo, definido como um difusor no qual a área da seção transversal aumenta tão rapidamente que a separação pode ser evitada somente se for utilizado algum tipo de controle da camada limite.

Um dos mais populares métodos de controle da camada limite para evitar a separação em difusores de alto ângulo é a colocação de telas ao longo de seu comprimento. A colocação de telas provoca uma redução da pressão total em regiões de alta velocidade muito maior do em regiões de baixa velocidade, como por exemplo, na camada

limite. Portanto, à jusante da região de perturbação na pressão total causada pela tela, a velocidade é mais uniforme. As telas são usualmente usadas na câmara de estabilização para uniformização do escoamento e redução da turbulência, lembrando que o processo de redução da turbulência por uma tela é diferente do processo de uniformização citado acima. Telas instaladas na câmara de estabilização reduzem a intensidade da turbulência da câmara de ensaios através de um processo de quebra de grandes vórtices em vários menores que por sua vez se dissipariam mais rapidamente antes de atingirem a câmara de ensaios. As telas podem ser empregadas em difusores de alto ângulo para evitar a separação e, se forem bem instaladas podem também agir tal como uma tela instalada na câmara de estabilização, reduzindo turbulência e uniformizando o escoamento da câmara de ensaios.

A eficiência de uma tela depende simplesmente do seu coeficiente de perda de pressão (K), o qual é definido pela razão entre a variação de pressão total (ΔP) e a pressão dinâmica do escoamento ($P_D = 1/2\rho V^2$) que se aproxima da tela perpendicular ao seu plano. K é função da porosidade β da tela, do número de Reynolds baseado no diâmetro do fio e da inclinação do escoamento que entra na tela. O índice de refração de uma tela, definido como na ótica, é aproximadamente $0.9\sqrt{1+K}$ ou seja, a presença de uma tela no escoamento age na componente lateral da velocidade atenuando a não uniformidade da velocidade.

Em difusores de alto ângulo, ao invés de se utilizar somente telas com K elevado é preferível a utilização de várias telas com K pequeno (entre 1 e 2), colocadas em pontos onde poderia haver separação. Isso se deve ao fato de que o aumento de K numa única estação produz pouco efeito no atrito superficial numa estação a jusante. Difusores eficientes necessitam menos telas, como por exemplo, os de paredes curvadas. No entanto, difusores de paredes curvadas são difíceis de serem construídos com precisão em grandes dimensões. Por outro lado, difusores com paredes planas, apesar das descontinuidades na entrada e saída, são fáceis de construir e apresentam desempenho satisfatório se o ângulo de cone equivalente não for muito grande. A posição das telas em difusores de paredes planas é determinante para o seu bom desempenho.

[15] apresenta uma análise de desempenho entre 130 difusores de alto ângulo que foram testados experimentalmente por vários auto-

res. Metha utilizou essa análise para definir certas regras para o projeto de um difusor eficiente. Os resultados são apresentados em relação à razão de áreas e ângulo de cone equivalente sendo que cada dado relaciona a geometria e o número de telas. A Fig. 9 apresenta o gráfico elaborado por Metha, onde as curvas cheias enquadram os difusores que tiveram desempenho satisfatório com 0, 1, 2 e 3 telas. A linha pontilhada em $2\psi = 55^\circ$ é a linha limite para evitar separação.

Metha conclui que as regras para um difusor de alto ângulo operar com sucesso são:

- a. Manter pontos de projeto à esquerda da curva relevante e antes da linha pontilhada limite de separação.
- b. A razão de áreas deve ser menor que $1.14 \sum K + 1$, onde $\sum K$ é a soma dos coeficientes de perda de pressão de todas telas empregadas no difusor.
- c. Utilizar telas para o controle da camada limite se a razão área (Ar) é menor que 5 e o ângulo de cone equivalente menor que 50° .
- d. Podem-se utilizar telas planas caso $Ar < 4$.

Com K da tela de nylon igual a 1.4 [5] e [6] as regras b e d acima são satisfeitas.

Primeiramente, estudou-se a possibilidade do emprego de duas telas, mas decidiu-se por apenas uma deixando a possibilidade de duas telas para o caso do difusor apresentar algum problema de separação. No entanto, em nenhum regime de velocidade ocorreu separação da camada limite no difusor e, portanto, uma única tela plana foi mantida.

As telas de nylon são convenientes para aplicação em difusores de alto ângulo devido à sua flexibilidade podendo ser facilmente ajustada para trabalhar curvada, o que favorece o controle de separação em difusores com $Ar > 4$. A não uniformidade das telas provocada por tensionamento desigual na instalação pode ser facilmente corrigida, pois o desalinhamento das malhas não é permanente como pode acontecer nas telas metálicas. Além disso, o maior atrativo das telas de nylon é o custo muito menor em relação às telas metálicas.

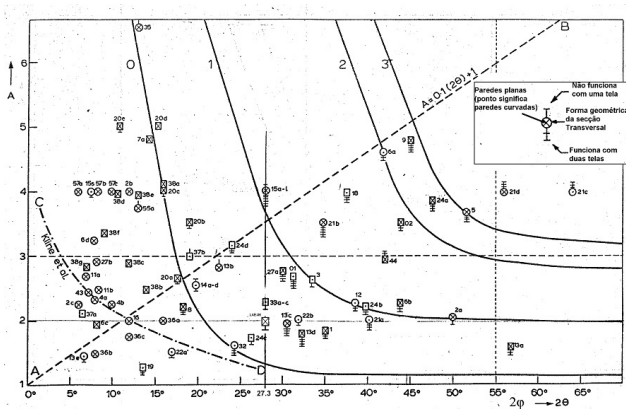


Figura 9: Razão de áreas A_r vs 2ψ para difusores com (ou sem) telas [15].

0.2.6 Exemplos Implementados em Túneis de Vento Existentes

Como dito anteriormente a indústria aeroespacial já possuía inúmeros túneis de médio e grande porte com bom escoamento e condições de testes bastante avançados. Na maioria desses túneis, foi feita uma adaptação de varias soluções para que o ruído de fundo fosse atenuado e pudessem ser usados para ensaios aeroacústicos. Como as exigências de qualidade de escoamento na área aeroespacial sempre foram muito rígidas, as adaptações referidas foram na colocação de “liners” quase sempre nas seções de curva, troca de ventilador mais moderno e menos ruidoso etc. Mas, o desenvolvimento e adoção de instrumentação precisa e sensível com uma metodologia de pós-processamento de sinais adequada foram os principais avanços.

Para o caso da indústria automobilística, alguns túneis foram adaptados, no entanto, muitos outros foram construídos já com a filosofia de baixo ruído. A razão disso é que a grande maioria dos túneis automobilísticos possuía escoamento de baixa qualidade, pois por possuírem grande área de ensaios ($>15m^2$) a utilização de mais telas e colméia para a melhoria do escoamento exigiria uma potencia

ainda maior. De qualquer forma a Fig. 10 apresenta um levantamento do ruído de fundo para vários túneis tanto automobilísticos quanto aeronáuticos.

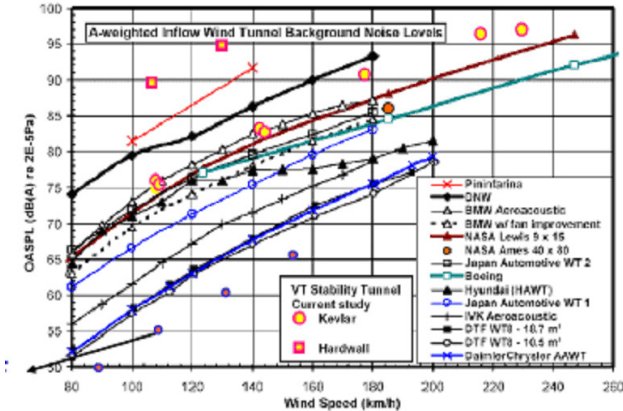


Figura 10: Comparação entre túneis do nível de ruído medido na seção central da câmara de ensaios [12].

Na Fig. 10 pode-se notar que o túnel da DNW é um dos túneis que possuem ruído de fundo maior, apesar desse túnel ser um dos mais importantes da indústria aeroespacial. Possui capacitação para medidas de varias categorias como possibilidade de mudar o tipo de câmara de ensaios de fechada para aberta. A câmara de ensaios fechada pode ter três dimensões diferentes: 6 m x 6 m: $0 < V < 152$ m/s, 8 m x 6 m: $0 < V < 116$ m/s, 9,5 m x 9,5 m: $0 < V < 62$ m/s e a câmara aberta possui a dimensão do jato de 8 m x 6 m: $0 < V < 80$ m/s. Somente a câmara de ensaios aberta é utilizada em ensaios aeroacústicos. Essas dimensões permitem a utilização de modelos em escala real de asas e pequenas aeronaves. As Figs. 11 e 12 mostram ensaios de uma asa com “high-lift” e uma fuselagem com hélices.

O complexo de túneis da DNW é um consórcio entre as agencias aeroespaciais da Holanda e Alemanha. Para o mapeamento de fontes de ruídos a DNW utiliza um outro túnel localizado em Braunschweig, suas dimensões são: Closed or slotted wall test section: 3.25 m x 2.8



Figura 11: Túnel da DNW , ensaio de uma semi-asa em escala real com hiper-sustentadores. Nota-se na figura um “array” de microfones para quantificar o ruído e o “Microphone Mirror” para localizar fontes de ruído.

m x 8.0 m e Open jet section: 3.25 m x 2.8 m x 6 m. A Fig. 13 mostra a camada de ensaios desse túnel onde está sendo testado um meio modelo com hiper-sustentadores. Notar o “array” de microfones na parede lateral esquerda.

Essa placa de microfones deve ser cuidadosamente projetada para evitar a interferência da camada limite da parede. Uma solução encontrada foi colocar uma fenda para separar a escoamento da camada limite da parede do túnel e da placa. Mais detalhes dessa placa pode ser observado na Fig. 14.

Um dos túneis de vento projetados especificamente para ensaios aeroacústicos de veículos terrestres é o túnel da Audi_{China}. Esse túnel projetado para velocidades até 300 km/h possui baixo ruído de fundo e esta totalmente equipado para medidas aeroacústicos. Novamente, as guias de curvas aparecem como um local para grandes abatimentos do ruído como pode ser visto na Fig. 15 as guias das curvas 2 e 3 com dutos retos coberto por absorvedores de ruído.

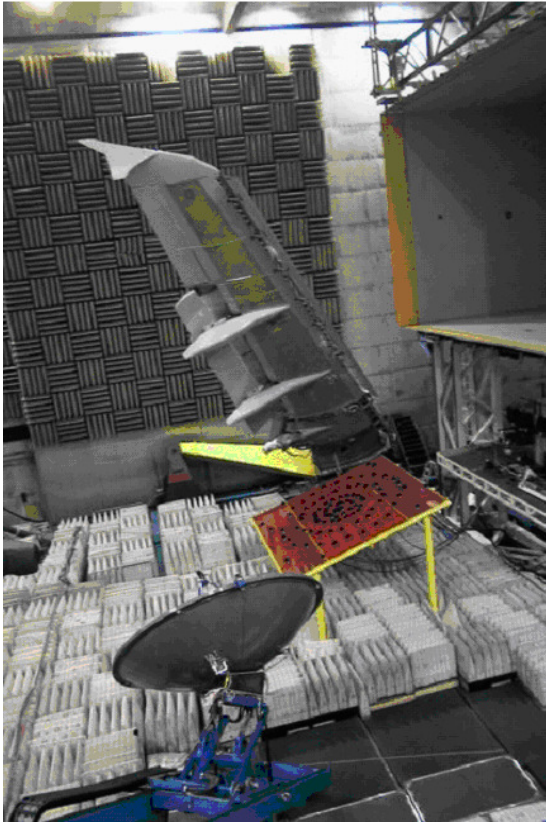


Figura 12: Túnel de Vento da DNW, ensaio de uma fuselagem e hélice.

0.3 Ruído de Instrumentação e Aquisição de Dados

O ruído existente nos vários estágios envolvidos em um processo simples de medição pode ser descrito conforme o diagrama da Fig. 16.

Na seção anterior abordou-se algumas técnicas para a redução de ruído do escoamento que é a primeira etapa do diagrama da Fig. 16. Nesta seção são abordados os ruídos introduzidos pelos estágios



Figura 13: Câmara de ensaios do túnel NWB para ensaios de identificação de fontes de ruídos.

seguintes. Algumas técnicas utilizadas na redução do ruído nesses estágios são discutidas. Entretanto, antes de tratar de cada estágio especificamente, são avaliadas as fontes de ruído que são comuns a praticamente todas as etapas do processo de medição. Conforme observado na Fig. 16, as fontes comuns aos diversos estágios são a alimentação dos circuitos, o cabeamento e o terra.

0.3.1 Ruídos Provenientes de Alimentação

Fontes ruidosas podem comprometer seriamente a qualidade do sinal medido. Além disso, freqüentemente nos experimentos em fluidos, as flutuações de velocidade que se deseja observar possuem freqüências da mesma ordem da freqüência da rede elétrica e seus harmônicos. Sendo assim, a redução do ruído elétrico de um ex-



Figura 14: Detalhes da placa de array de microfones.

perimento, usualmente, passa pela análise da qualidade do sinal de alimentação dos equipamentos. Uma vez contaminado pelo ruído de alimentação, dificilmente o sinal de interesse poderá ser separado do ruído.

Na escolha de uma fonte de alimentação com nível de ruído adequado, deve-se observar algumas características importantes do equipamento, que indicam a qualidade e estabilidade do sinal fornecido. Dentre essas características destacam-se:

- regulação de carga: variação do valor de saída na faixa de operação da fonte,
- “drift” : variação da tensão de saída com o tempo,
- “ripple” : valor da componente alternada observado com uma carga ligada à saída da fonte.

Com base nesses parâmetros é possível, então, estimar o nível de ruído esperado na fonte de alimentação. Para exemplificar o efeito do ruído de fonte de alimentação no sinal de saída de um equipamento realizou-se testes com um anemômetro a fio quente de temperatura constante. Esse equipamento foi escolhido por ser bastante sensível a ruídos de alimentação e pelo fato de ser muito empregado no



Figura 15: Detalhes da placa de array de microfones.

estudo experimental de escoamentos. O anemômetro utilizado nos ensaios foi construído no Laboratório de Aeronáutica da Escola de Engenharia de São Carlos [9] com base em um protótipo construído na Universidade de Cambridge. Foi investigado o sinal de saída do equipamento quando este era alimentado por uma fonte retificada, regulada, e com ripple em carga menor do que 1%. Esse sinal foi comparado com o sinal obtido quando a alimentação do equipamento foi feita com uma fonte limpa, que no caso era uma bateria de 12V. Nos dois casos não havia escoamento sobre a sonda do anemômetro. Conforme se pode observar na Fig. 17, no caso com alimentação da fonte regulada o modo de oscilação da rede (60Hz) e seus harmônicos estão claramente presentes no sinal.

Existem outras fontes de ruído associadas com a alimentação dos circuitos. Um exemplo é o efeito de campos magnéticos introduzidos pelos transformadores utilizados na conversão de tensão. O efeito causado pelos transformadores é mais perceptível em equipamentos que trabalham com ganhos elevados do sinal do sensor, como é o caso do anemômetro a fio quente.

Existem algumas formas de reduzir os efeitos magnéticos sobre

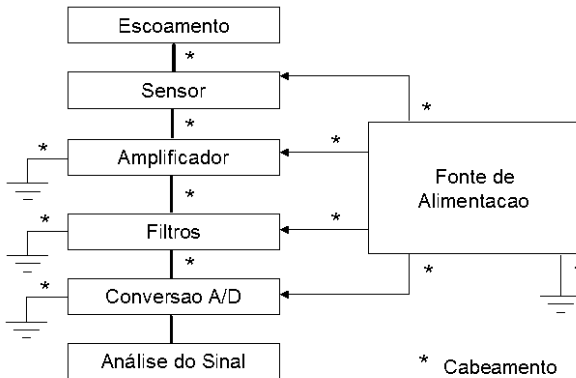


Figura 16: Ruído nos diversos estágios de um experimento.

os circuitos. Um meio simples é através da separação do circuito de alimentação do restante do equipamento por meio de divisórias blindadas ou mesmo abrigar os circuitos em caixas blindadas diferentes. Quando isso não é possível, é comum optar-se pela utilização de transformadores do tipo toroidais. Esse tipo de transformador produz uma menor dispersão do campo magnético em comparação ao transformadores tradicionais. Em contrapartida o rendimento dos transformadores toroidais é menor.

0.3.2 Ruído de Terra

Uma fonte de ruído elétrico comum é o ruído devido ao terra dos equipamentos. A utilização de um aterramento correto dos equipamentos é essencial para se ter um baixo nível de ruído em medições. De acordo com as normas NBR5410 e IEEE 1992, o aterramento de uma planta, não deve variar com as condições do solo, deve ter baixa impedância, e ter uma distribuição espacial condizente com a área da planta em que ele for utilizado. Os detalhes construtivos de um aterramento são encontrados nas normas. Tendo o aterramento adequado, deve-se preocupar então com a ligação dos circuitos de modo a se evitar um acoplamento através de diferenças de potenciais entre

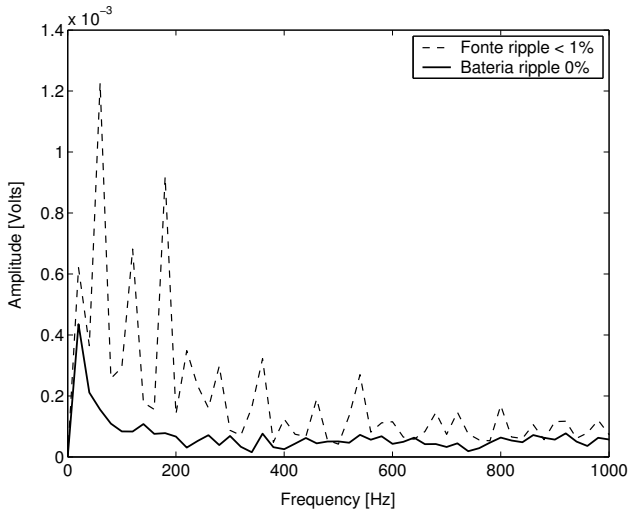


Figura 17: Espectro do sinal de saída de um anemômetro a fio quente para duas diferentes fontes de alimentação.

terras. A Fig. 18 mostra como ocorre esse tipo de acoplamento. Para evitar esse problema deve-se procurar ligar os instrumentos de medição em um único terra. Além disso, deve-se adotar diferentes terras para instrumentos de medição e máquinas elétricas. Na construção de circuitos, deve-se buscar diferentes terras para os componentes que trabalham com sinais digitais e analógicos. Isso porque os circuitos digitais, normalmente trabalham sinais TTL (0-5V), considerados de alta amplitude em comparação com sinais de sensores, e induzem considerável ruído nas trilhas de terra dos circuitos.

0.3.3 Ruído na Transmissão de Informações

A descrição das técnicas de redução de ruído nas transmissões de sinais elétricos requer uma breve revisão dos mecanismos de interferência que essas transmissões estão sujeitas. Dentre esses mecanismos de interferência destacam-se como os 3 principais:

- o acoplamento capacitivo,

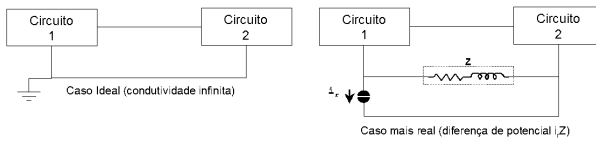


Figura 18: Desenho esquemático do acoplamento através de diferença de potenciais entre terras.

- o acoplamento indutivo,
- a condução através de impedância comum.

O acoplamento capacitivo ocorre quando um condutor passa próximo a uma fonte de ruído (Fig. 19). É muito comum ocorrer nas trilhas de alimentação dos circuitos. Nesses casos busca-se proteger as entradas de alimentação dos circuitos utilizando-se capacitores cerâmicos monolíticos ou capacitores de tântalo. Esses capacitores são mais indicados por possuírem uma baixa indutância própria.

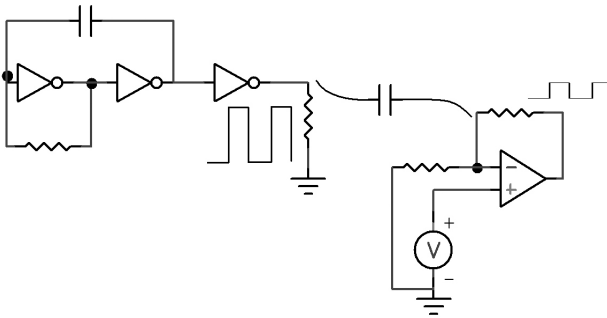


Figura 19: Desenho esquemático para exemplificar como ocorre o acoplamento capacitivo.

Quando esse efeito ocorre na transmissão de sinais, uma saída para a redução do problema é a utilização de cabos coaxiais com

blindagem aterrada. Uma descrição mais completa dos tipos de cabos coaxiais aplicados a cada situação pode ser encontrada em [17]. Utilizando cabos coaxiais com malha aterrada adiciona-se um caminho de baixa impedância ao ruído, Fig. 20. Quanto menor a impedância da blindagem em relação ao terra, menor será a amplitude da contaminação do sinal pelo ruído. Pode-se observar nessa figura que o retorno do ruído ocorre através da blindagem. Sendo assim, não é recomendável a utilização da blindagem para a transmissão de informações. Em casos onde se deseja observar a amplitude de um sinal em relação a outro, utiliza-se 2 cabos coaxiais distintos e ajusta-se o sistema de aquisição de dados ajustado para modo diferencial. Um caso especial é quando o potencial da blindagem é uma referencia diferente de zero. Nesse caso adota-se nos sistemas de aquisição a configuração de sinal não referenciado. Nesses casos deve-se levar em consideração o valor da voltagem de referencia, pois o ruído sempre tende a seguir o caminho em direção ao menor potencial. Em operações normais o sinal é referenciado com relação à malha ligada a um referencial nulo.

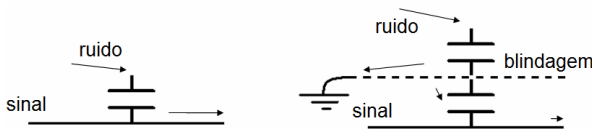


Figura 20: Desenho esquemático da proteção, na transmissão sinais em cabos coaxiais, através do aterramento da malha (blindagem aterrada).

No caso do acoplamento indutivo os efeitos que levam a transmissão do ruído para o circuito são de natureza diferente. O acoplamento ocorre devido a efeitos magnéticos cuja variação induz o aparecimento de correntes parasitas no circuito de interesse. Nesses casos as medidas para redução do ruído estão relacionadas à blindagem contra campos magnéticos. Entretanto, esse tipo de blindagem normalmente não é tão eficiente quanto a blindagem contra campos elétricos, [17] and [23]. O que se faz, normalmente, é evitar a emissão de campos magnéticos ou ainda evitar que cabos de informações

passem muito próximos de equipamentos que sabidamente tem emissão considerável. Nos equipamentos a emissão em baixas frequências (faixa de oscilação da rede de alimentação) é reduzida envolvendo-os com materiais de alta permeabilidade magnética (caixas de aço, por exemplo). A emissão de campos magnéticos através de cabos pode ser reduzida significativamente utilizando-se par trancado de cabos.

O caso de ruído através de impedância comum o ocorre no retorno de corrente para o terra e devido a diferenças de potenciais entres equipamentos. Os meios de redução desse tipo de ruído já foram abordados no item ruído de terra. As considerações feitas naquele caso também são validas no caso de transmissão de informações.

O aterramento e a blindagem, quando aplicados corretamente, podem resolver a grande maioria dos problemas de ruído em equipamentos. Em contrapartida, aterramentos e blindagens ruins, normalmente, estão entre as principais fontes de ruído observadas na prática [18].

0.3.4 Ruído Introduzido por Calibração dos Sensores

O segundo estágio de um processo simples de medição, dado pela Fig. 16, envolve a utilização de um sensor para medição da grandeza desejada. Normalmente, é necessário realizar a calibração desses sensores com relação a um medidor padrão. Como a calibração fornece a base para as medições com o sensor, é extremamente importante assegurar que a base de dados de calibração seja confiável e não tendenciosa. Logo, todas as considerações sobre ruído em experimentos devem ser aplicadas nesse estágio. Além do ruído elétrico dos equipamentos e ruído de escoamento, existe também a possibilidade de inserção de ruído, nesse caso, melhor chamado de incerteza, através da introdução de erros sistemáticos na calibração.

Uma das formas comuns de se evitar uma calibração tendenciosa é através da utilização de técnicas de amostragem. Existem diversas técnicas que podem ser aplicadas em diferentes situações. Uma revisão dessas técnicas pode ser encontrada em [7]. Não é o objetivo desse trabalho fazer uma extensa revisão sobre essas técnicas. Entretanto, cabe citar a técnica de amostragem aleatória que além de ser extremamente simples é adequada a grande parte dos processos de calibração de instrumentos de medição. Com a amostragem aleatória

de dados reduz-se tendências induzidas na calibração por efeitos de histerese, variações das condições de calibração com o tempo, dentre outros.

A amostragem aleatória permite a realização de análises mais detalhadas dos erros presentes na calibração. Um exemplo de análise de calibração de um sistema de anemometria pode ser observado nas Fig. 21 e 22. O sistema utilizado foi o mesmo utilizado nos testes sobre ruído da fonte de alimentação.

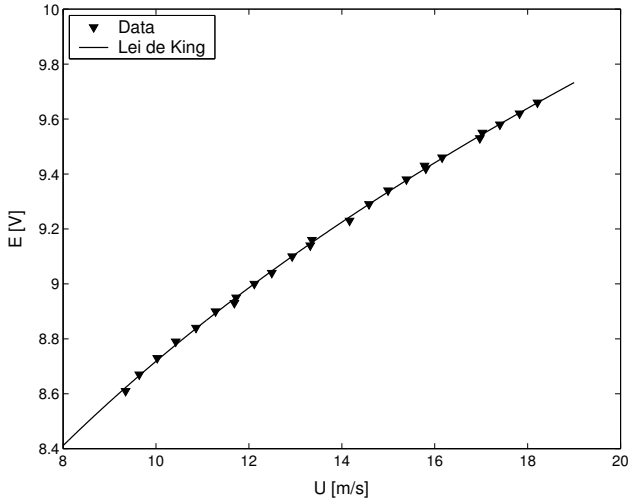


Figura 21: Curva de calibração de sistema de anemometria (CTA).

A Fig. 21 mostra a curva de calibração da tensão de saída do sistema em relação a uma medição padrão com um tubo de Pitot ligado a um manômetro. Nessa calibração foi utilizada a amostragem aleatória. A relação de calibração utilizada foi a Eq. 5, conhecida como lei de King ([20] e [2]).

$$E^2 = AU^n + B. \quad (5)$$

Onde E é a tensão de saída do anemômetro, U a velocidade do escoamento, A e B são os coeficientes de calibração e n é o expoente

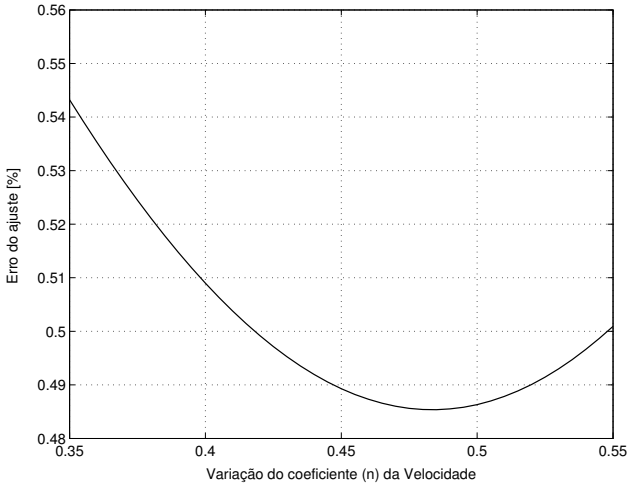


Figura 22: Variação do erro de calibração com o expoente n da lei de King.

da velocidade, que no caso de uma sonda típica de anemometria fica entre 0.4 e 0.5 [2]. A Fig. 22 mostra que na calibração realizada, o menor erro da curva de calibração foi obtido para valores de n dentro do intervalo sugerido por Bruun.

A análise do erro dessa calibração feita pode ser observada na Fig. 23. A normalidade do resíduo da calibração é mostrada nos gráficos superiores da figura. A curva de normalidade do resíduo, que para distribuições normais se aproxima de uma reta, apresenta características próximas à uma distribuição normal, enquanto que o histograma apresenta uma distribuição que lembra uma forma gaussiana. Isso confirma que o erro possui uma distribuição aproximadamente de normal. No gráfico inferior da mesma figura, pode-se observar a variação do erro de calibração de acordo com a seqüência de amostragem dos dados. Nessa figura observa-se claramente uma tendência no comportamento do erro. Aqui essa tendência foi mostrada propositalmente, pois ao longo da calibração escolhida houve uma variação da temperatura do escoamento pouco maior que 1°C . Essa variação é claramente percebida na análise do resíduo, pois a

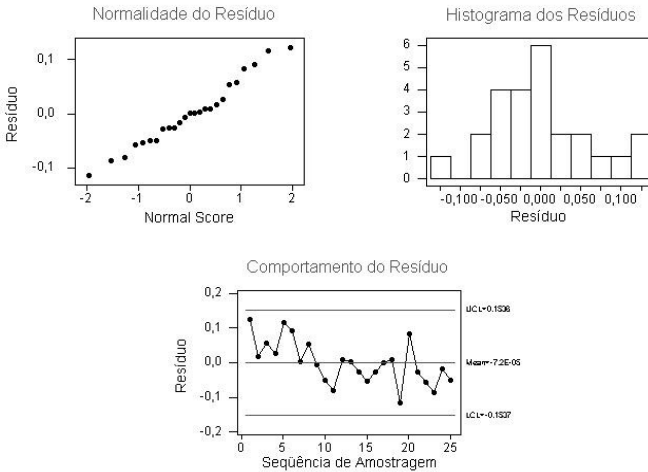


Figura 23: Análise do erro de calibração.

maior parte dos valores de erro no início da calibração possuem valores positivos, enquanto que ao final da calibração a maior parte dos valores assume valores negativos. Erros de histerese também podem ser investigados. Para isso basta relacionar a seqüência do resíduo com seqüência de valores amostrados.

Um outro tipo de informação importante sobre o sistema, além da calibração estática é a avaliação da sua resposta dinâmica. Geralmente a calibração do equipamento é feita para o caso estático. Nos casos onde há oscilação da variável medida a resposta do sistema pode variar de acordo com a freqüência de oscilação. No caso do anemômetro a análise em freqüência é feita através do teste da onda quadrada. Esse teste é descrito em [2] and [20]. A Fig. 24 mostra a resposta ótima de um sistema de anemometria convencional (extraído de [2]). A Fig. 25 mostra a curva de resposta ao degrau do anemômetro utilizado na calibração da Fig. 21. Como se pode ver no caso do anemômetro testado a resposta em freqüência não estava otimizada. A análise em freqüência permite avaliar também a resposta em freqüência de sondas não convencionais, quando essas

respondem mais lentamente do que o circuito, como foi o caso do sistema testado. Naquele caso utilizou-se sondas construídas com filamentos maiores do que $15\mu m$ de diâmetro. A partir da análise em frequência da Fig. 25 pode-se observar que a resposta em frequência naquele caso era da ordem de 5kHz. Sendo assim, naquele caso a sonda utilizada não seria adequada para se observar flutuações de velocidade com frequências da ordem kHz.

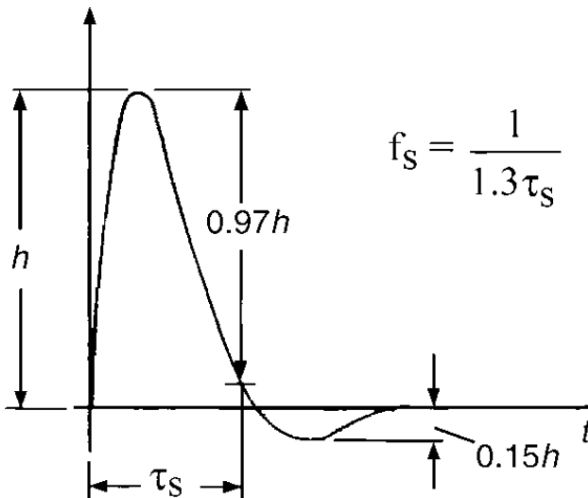


Figura 24: Resposta ideal de um anemômetro submetido ao teste de onda quadrada (extraído de [2]).

0.3.5 Ruído no Estágio de Amplificação do Sinal

Os circuitos amplificadores são amplamente utilizados em experimentos, pois normalmente os sinais de saída dos sensores possuem tensões baixas. Esse procedimento em si já é uma técnica para se aumentar a razão entre o sinal de interesse e ruído. Entretanto, ele deve ser realizado com extremo cuidado para que o ruído do estágio de amplificação não contamine de maneira significativa o sinal de interesse. Para se avaliar/selecionar os equipamentos, deve-se primeiro

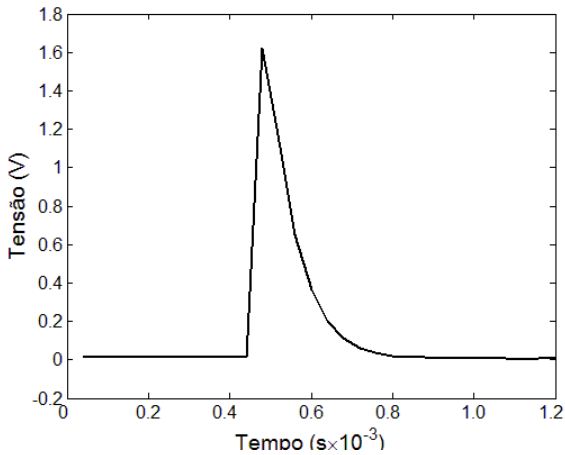


Figura 25: Resposta do anemômetro testado à uma excitação do tipo onda quadrada.

conhecer algumas características importantes do amplificador a ser utilizado. Dentre essas características destacam-se:

- a rejeição de modo comum (CMR- common mode rejection),
- rejeição de ruído da fonte (PSRR - power supply rejection),
- distorção harmônica,
- ruído introduzido.

A rejeição de modo comum é a razão entre o ganho diferencial e o ganho comum de um amplificador. Esse ganho comum é o ganho do amplificador quando o mesmo sinal é aplicado nas duas entradas. O ganho comum ocorre devido a assimetria da entrada diferencial dos amplificadores e resulta em um “offset” no sinal de saída do amplificador. Para contornar esse problema, normalmente utiliza-se um resistor para o ajuste da tensão nula do amplificador. Um teste simples para verificar o offset de um amplificador é conectar (curto circuito) as entradas e verificar a tensão na saída.

A rejeição de ruído de fonte é uma medida da ‘imunidade’ do amplificador à variações na tensão de alimentação

($\Delta V_{\text{alimentacao}}/\Delta V_{\text{saida}}$). Quanto maior o PSRR, menos sensível o amplificador será a flutuações provenientes da fonte de alimentação.

A distorção harmônica é uma medida da energia dos harmônicos do sinal de entrada que são geradas pelo amplificador. Essa característica deve ser avaliada nos casos onde se deseja observar oscilações no sinal com amplitudes de ordem significativamente diferentes.

O ruído introduzido é uma medida RMS da amplitude do ruído inserido pelo amplificador. O sinal de interesse deve ter uma amplitude significativamente maior do que o ruído. Por isso, normalmente se opta por separar o sinal dos sensores em componentes contínua (DC) e alternada (AC) de modo a se evitar a saturação dos amplificadores. Geralmente, busca-se aplicar ganhos consideráveis na componente alternada do sinal. Desse modo, utiliza-se um maior número de bits do conversor analógico/digital durante a discretização do sinal. Um cuidado especial que se deve tomar é para que os amplificadores trabalhem sempre em uma faixa segura de ganhos. Isso porque os amplificadores respondem de forma diferente quando sujeitos a saturação. Alguns exibem sinais característicos claros de saturação, como uma tensão constante igual a tensão de saturação. Nesse tipo de equipamento é fácil reconhecer que houve saturação. Entretanto, existem equipamentos que quando sujeitos a saturação exibem um sinal de saída não constante e de amplitude menor do que a tensão de saturação. Nesses casos fica difícil reconhecer quando houve a saturação dos amplificadores o que pode gerar a ocorrência de falsas medições. O que se utiliza normalmente é uma fração da faixa de operação do amplificador (ex.: 80% da amplitude de saturação). Uma descrição detalhada das características dos amplificadores operacionais e suas aplicações é encontrada em [4].

0.3.6 Filtros

A compreensão das técnicas descritas a seguir requer uma breve revisão sobre transformadas discretas de Fourier. A representação espectral de Fourier busca descrever um sinal qualquer como uma série de senos e cossenos. Assumindo $x(t)$ como sendo um sinal qualquer, com duração finita de T , amostrado N vezes em intervalos igualmente espaçados de Δt , pode-se escrever a série da transformação

discreta de Fourier (DFT) como na Eq. 6.

$$FT(x) = \sum_{n=0}^{N-1} x e^{-i \frac{2\pi n k}{N}}, \quad (6)$$

com $k = 0, 1, \dots, (N - 1)$. Onde $e^{-i(2\pi n k/N)} = \cos(2\pi n k/N) - i \sin(2\pi n k/N)$, n é o índice de amostragem de dados em intervalos Δt (frequência de amostragem $f = 1/\Delta t$). Os coeficientes espectrais são computados para frequências igualmente espaçadas. As frequências correspondentes aos coeficientes de Fourier são dadas de acordo com a equação 7.

$$f_k = \frac{k}{N\Delta t} = \frac{kf}{N}. \quad (7)$$

A partir da equação 7 pode-se calcular o espaçamento de frequências do espectro (equação 8).

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{T} = \frac{f}{N}. \quad (8)$$

Esta também é a menor frequência que pode ser observada no espectro. A maior frequência que pode ser observada ocorre quando $k = N/2$. Isso corresponde a uma frequência $f_N = f/2$, que é conhecida como frequência de Nyquist. Com essa revisão breve é possível compreender melhor os termos e técnicas descritos nas seções seguintes deste trabalho. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em [1].

Antes da discretização de um sinal contínuo analógico para uma série discreta de dados digitais é importante assegurar que sinais com frequência acima da frequência de Nyquist não causarão erros nas medições. De acordo com a teoria de transformação discreta de Fourier, só é possível reconhecer frequências em um sinal que tem mais de dois pontos amostrados por período. Essa frequência limite é a frequência de Nyquist. Frequências maiores que a de Nyquist não podem ser reconhecidas e caso a energia desses modos não seja retirada do sinal, ela acaba contaminando os coeficientes da representação de Fourier relacionados com frequências mais baixas. Esse

fenômeno é conhecido como aliasing. A ocorrência de aliasing na aquisição de dados é evitada utilizando-se filtros analógicos para reduzir a níveis não significativos a energia contida nos modos de altas frequências. Filtros analógicos possuem características diferentes, que variam de acordo com a ordem e com as funções de atenuação do sinal. Alguns dos principais filtros utilizados na prática são os do tipo Butterworth, Chebyshev e Bessel. Cada tipo de filtro possui características particulares (Figs. 26 e 27) que são adequadas para diferentes aplicações.

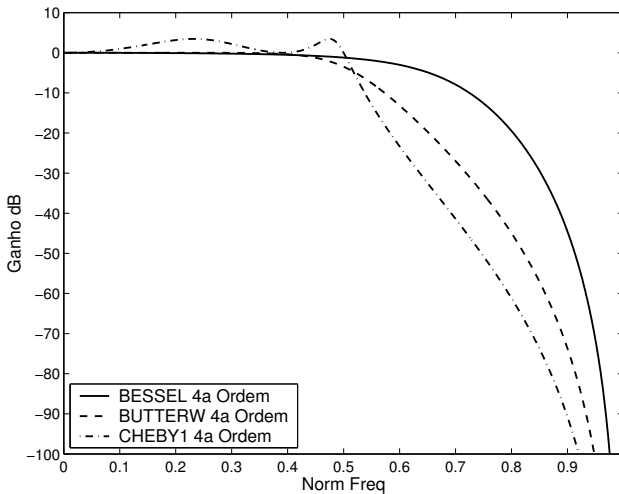


Figura 26: Ganho de diferentes filtros.

Os filtros do tipo Bessel possuem uma função com atenuação mais suave. Isso faz com que a banda de frequências que são afetadas por esse tipo de filtro seja mais larga. No caso de filtros do tipo Chebyshev e Butterworth a atenuação da função é mais abrupta. Por outro lado, o atraso de fase induzido pelos filtros aumenta juntamente com aumento atenuação da função do filtro. Sendo assim, não há um filtro melhor ou pior, mas sim um filtro mais adequado para cada situação. No livro [22] pode-se encontrar a descrição detalhada de cada tipo de filtro assim como alguns exemplos de implementação

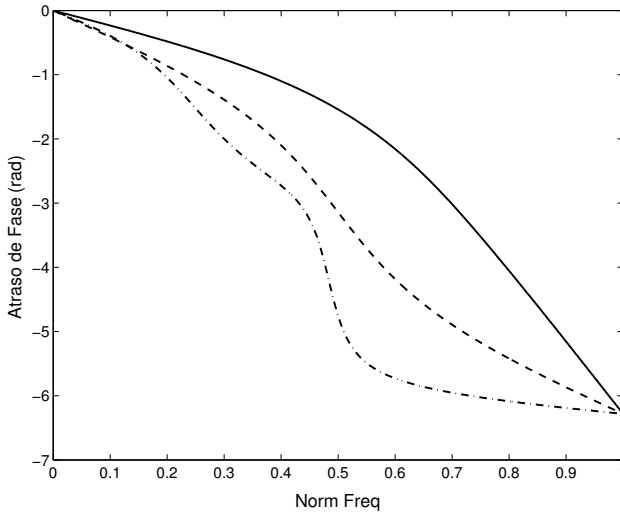


Figura 27: Atraso de fase.

em circuitos.

É importante sempre considerar que os filtros analógicos causam distorção do sinal (fase e amplitude) em uma banda próxima a frequência de corte. Por isso deve-se selecionar frequências de corte significativamente superiores a banda de interesse do sinal. As consequências da utilização de um filtro com parâmetros não adequados podem ser piores que a não utilização do filtro.

Na construção de filtros analógicos normalmente se utiliza componentes eletrônicos ativos (amplificadores operacionais) para ajuste da curva de resposta em frequência do filtro. Nesses casos, os parâmetros de ruído dos amplificadores também estão presentes nos filtros, tais como offset, ruído inserido, etc. Sendo assim, não é recomendável a realização da filtragem analógica com filtros ativos antes da amplificação do sinal.

0.3.7 Conversão A/D

A escolha adequada dos parâmetros de aquisição de dados tais como resolução, frequência de amostragem e número de amostras também é um meio para se aumentar a amplitude do sinal de interesse em relação ao ruído. No caso da resolução da conversão analógico digital, é bastante claro e intuitivo que, o aumento na resolução (número de bits) implica em redução do nível de ruído. No entanto, pode ocorrer que o nível de ruído elétrico do equipamento de conversão A/D ser maior do que a resolução do sistema. Sendo assim é de se esperar que na conversão A/D, normalmente exista uma resolução nominal (número de bits do conversor) e uma resolução efetiva. A avaliação da resolução efetiva deve ser considerada quando se busca analisar sinais com amplitudes muito pequenas em relação a faixa de medição do conversor. Uma maneira simples de avaliar a resolução efetiva de um sistema de aquisição é fazendo a coleta de um sinal 'limpo'. Uma bateria pode ser utilizada para fornecer esse sinal. Geralmente, sistemas ajustados para escalas da ordem de 10V apresentam resolução nominal próxima da resolução efetiva. A medida que se reduz a escala das tensões de aquisição, a resolução efetiva tende a diminuir e se afastar da resolução nominal.

A frequência de aquisição e o número de amostras podem ser otimizadas quando se conhece a frequência das perturbações que se deseja analisar. Ajustando-se o período total de aquisição de dados ajusta-se também a frequência de discretização do sinal no espaço de Fourier (Δf da equação 8). Desse modo, pode-se discretizar o espectro em frequências múltiplas àquela de interesse. Com isso se minimiza o espalhamento de energia em torno da frequência de interesse. Os espectros da Fig. 28 mostram claramente esse efeito. A linha tracejada mostra o espectro de um sinal coletado de maneira que a energia do modo dominante ficasse localizada entre dois modos de Fourier. Pode-se perceber claramente nesse caso o espalhamento da energia ao longo de todo o espectro. A linha continua mostra o espectro do mesmo sinal quando a aquisição de dados foi otimizada. Nesse caso o modo de Fourier possui a mesma frequência do modo dominante do sinal.

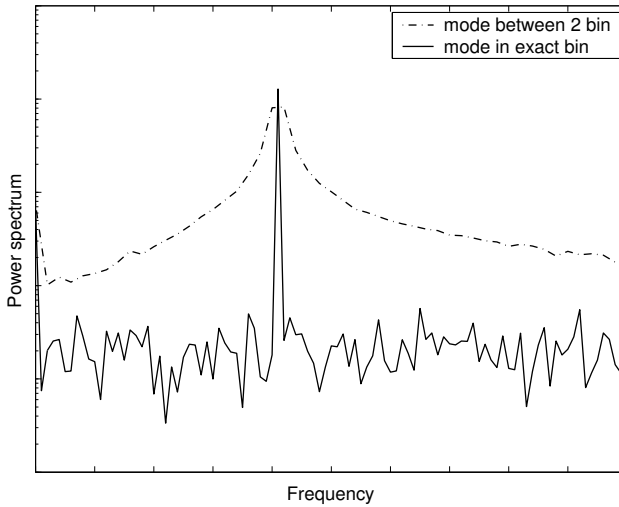


Figura 28: Comparação entre espectro com espalhamento máximo e espectro onde a discretização era múltipla da frequência de interesse.

0.3.8 Redução de Ruído Através de Processamento Digital de Sinais

Esta seção trata brevemente de algumas técnicas simples de processamento de sinais que são úteis na redução de ruído e na extração de informações confiáveis de experimentos onde a razão entre sinal de interesse e ruído é baixa.

Expansão e Redução de Domínio

Uma maneira de se aumentar a razão entre sinal de interesse em relação ao ruído na análise espectral de uma série de dados é através da utilização de funções de enjanelamento e de expansão da série de dados.

As funções de enjanelamento são frequentemente utilizadas quando se deseja isolar um evento, ou quando se deseja reduzir a influência da não periodicidade de um sinal. A não periodicidade de um sinal causa espalhamento de energia em todas as frequências do es-

pectro calculado a partir da transformada de Fourier, uma vez que nessa transformação os sinais são assumidos como periódicos. Existem diversas funções de enjanelamento com características distintas que devem ser analisadas antes da escolha da função adequada, [14]. Dentre as características das funções de enjanelamento destacam-se como as mais importantes como sendo a banda equivalente de ruído, o ganho e o nível do pico lateral.

A banda equivalente de ruído é uma medida de performance de ruído de uma função de enjanelamento. Essa medida é dada pela integral da resposta espectral de todos os modos dividida pela resposta no pico principal. Isso corresponde a largura da banda que um filtro retangular ideal teria que ter para acumular o mesmo ruído da função de enjanelamento utilizada. A Fig. 29 exemplifica esse conceito. Em termos práticos, essa medida fornece uma estimativa do espalhamento da energia, em cada modo, que o filtro irá induzir (semelhante a uma perda de foco).

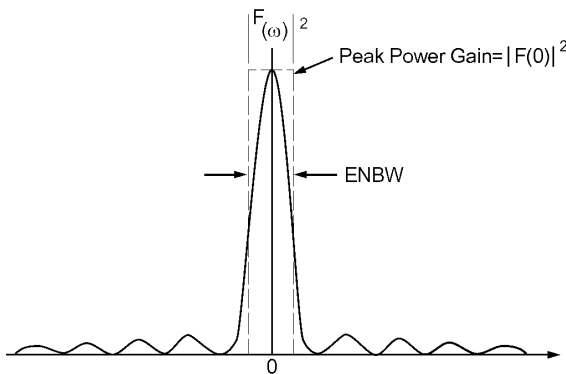


Figura 29: Banda equivalente de ruído de uma função de enjanelamento.

O ganho é uma estimativa da redução de potencia do sinal devido a utilização da função de enjanelamento. Essa medida é dada pelo

quadrado da soma dos termos da janela (Eq. 9).

$$\left(\sum_{t=0}^T w(t) \right)^2. \quad (9)$$

O espectro do sinal enjanelado, de acordo com a Eq. 6, pode ser escrito como na Eq. 10.

$$FT(x) = \sum_{n=0}^{N-1} wx e^{-i \frac{2\pi nk}{N}}. \quad (10)$$

Conforme é possível observar na Eq. 10 a redução do ganho implica em uma redução da energia existente no sinal não enjanelado. Isso implica em perda de da quantidade de informação do sinal, principalmente próximo do início e do final da série de dados, onde a amplitude da janela tem valores próximos de 0.

O nível do pico lateral fornece um indicativo da contribuição de energia de uma frequência para as frequências em lóbulos adjacentes. Deve-se escolher uma janela com pequenas amplitudes de picos laterais, em casos onde se deseja estudar flutuações de pequena amplitude em frequências próximas à de uma flutuação de grande amplitude. O conhecimento das características de cada janela e do sinal a ser estudado facilita a busca pela função de enjanelamento mais adequada.

Outro meio de se buscar uma redução do ruído relativo do sinal é através da utilização da expansão artificial do domínio. Esse aumento do domínio induz um aumento do número de modos do espectro de frequências. Isso corresponde a um aumento na discretização do espectro. Entretanto, vale lembrar que esse aumento da discretização não equivale a um aumento de resolução do espectro. O aumento real da resolução do espectro só é conseguido aumentando-se o domínio real de amostragem. A redução do ruído relativo com a utilização da expansão do domínio pode ocorrer devido ao ajuste do par frequência de aquisição e número de amostras, de modo a permitir que a frequência que se deseja observar seja exatamente um dos modos do espectro. A Fig. 30 exemplifica como um aumento da razão entre sinal de interesse em relação ao ruído

pode ser obtida, aplicando-se corretamente procedimentos simples de enjanelamento e expansão do domínio sobre um sinal com função $x(t) = \sin(20.5 \cdot t) + 0.05 \sin(35.5 \cdot t)$, com $t[0; 2\pi - \Delta t]$. O espectro discreto de Fourier do sinal analisado possuía uma resolução igual a 1 (sem unidade, somente para fins explicativos). Escolheu-se as frequências das funções, de maneira que o espalhamento da energia no espectro de Fourier do sinal fosse máximo. No gráfico superior da figura é mostrado o espectro desse sinal sem nenhum tratamento. Nesse gráfico, o espalhamento da energia é claro. É possível notar ainda que o espectro apresenta uma amplitude do sinal de mais baixa frequência menor do que a real. Quando se soma um ruído randômico ao sinal, a energia da senóide de mais alta frequência não sobressai em relação ao ruído. No gráfico inferior aplicou-se os procedimentos de expansão do domínio e enjanelamento do sinal. Com a expansão do domínio foi possível extrair a correta amplitude do sinal de mais baixa frequência. No entanto, devido a não periodicidade do sinal o espalhamento em frequências próximas das duas senóide de interesse continuou presente. Nesse caso a energia do modo de mais alta frequência não é claramente perceptível em meio ao ruído. Com a aplicação de uma função de enjanelamento do tipo Hamming foi possível aumentar a razão entre sinal de interesse e ruído. Com isso, a energia da senóide de mais alta frequência se tornou mais evidente no espectro.

Médias Condicionais

Um método bastante efetivo de extração de informação de uma série de dados ruidosa é através da utilização de médias. O caso mais simples e comum é quando a média é uma constante no intervalo de dados. Nesse caso costuma-se descrever a velocidade do escoamento como sendo composta de uma componente média, invariante no tempo, e uma flutuação (Eq. 11)

$$U_{Total} = \bar{U} + u'(t). \quad (11)$$

As Figs. 31 e 32 são exemplos de resultados comuns obtidos através desse procedimento simples. Nesse caso realizou-se a medição das componentes média e flutuação de velocidade na esteira de um cilindro. O perfil do escoamento médio (\bar{U}) é mostrado na Fig. 31

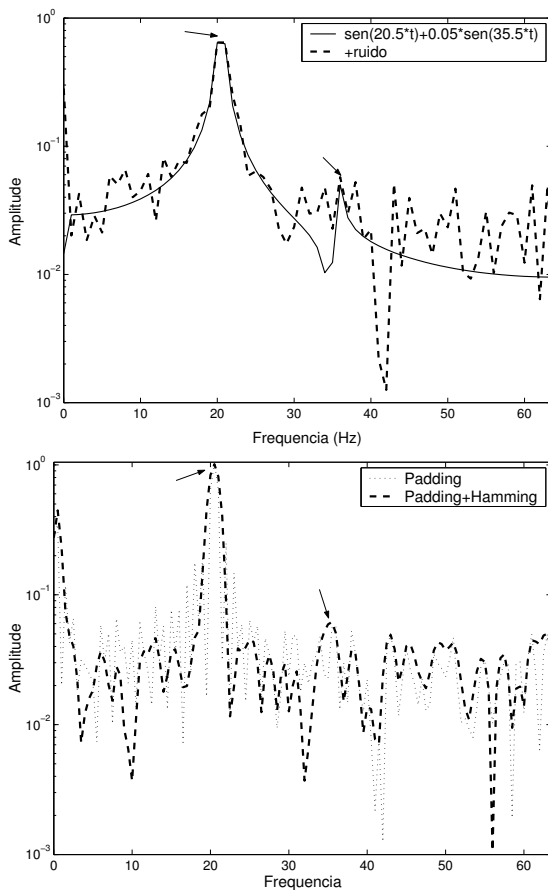


Figura 30: Exemplo de aplicação das técnicas de enjanelamento e expansão do domínio.

e o valor RMS da flutuação de velocidade $[(u'_{RMS})]$ é mostrado na Fig. 32.

Nos casos onde o valor médio que se deseja obter não é uma constante e sim um evento médio, torna-se necessário então extrair a média de eventos semelhantes. Para isso deve-se primeiramente

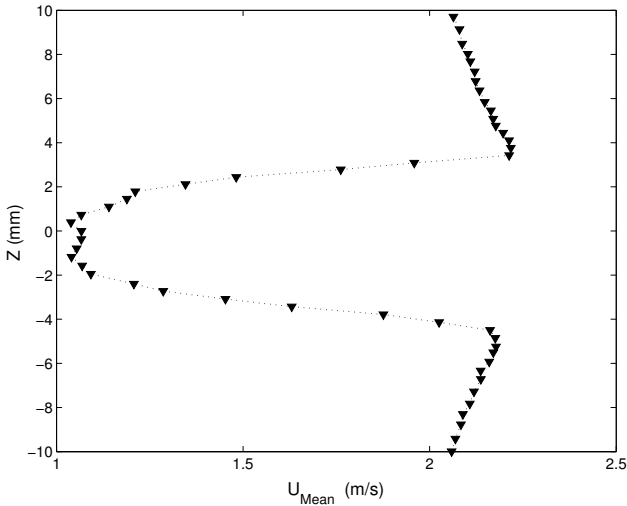


Figura 31: Perfil de velocidade médio na esteira de um cilindro.

definir o instante de ocorrência de tais eventos. Isso pode ser feito basicamente de duas maneiras. A primeira forma é criando condições artificiais nos experimentos, de modo que os eventos possam ser repetidos de maneira sincronizada com a aquisição de dados. A segunda maneira é através do reconhecimento de eventos dentro de uma série de dados.

No primeiro caso os experimentos devem ser sincronizados com a ocorrência da variável que se deseja extrair a média. Desse modo a componente periódica assume a forma dada pela Eq. 12.

$$\bar{U}(t) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M U(t, m). \quad (12)$$

Onde M é o número total de eventos e m o número de cada evento. A medida que se aumenta o número de eventos amostrados, as componentes aleatórias, não relacionadas com a sincronização reduzem, tendendo a zero quando M tende a infinito.

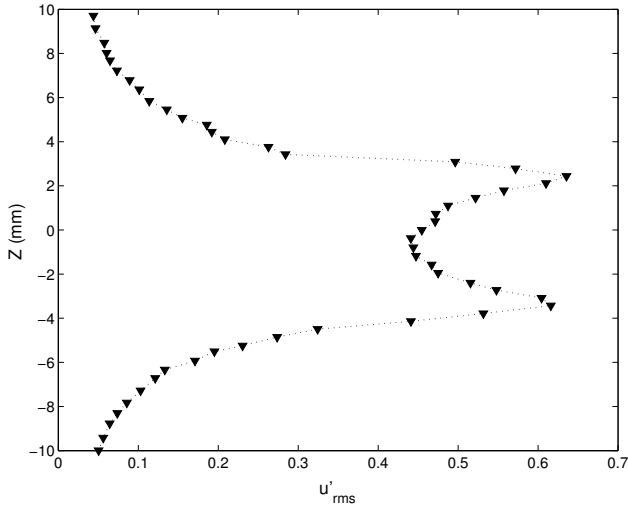


Figura 32: Perfil de intensidade da flutuação de velocidade na esteira do cilindro.

As Fig. 33 e 34 exemplificam casos onde se aplicou a média sobre eventos repetidos de maneira sincronizada com aquisição de dados. Na Fig. 33 é mostrado um exemplo de uma curva de coeficiente normal de força em um aerofólio, do tipo NACA0012, onde o ângulo de ataque era oscilatório, [3]. Esse tipo de investigação é mais conhecida como estudo de estol dinâmico. No trabalho de [3] utilizou-se o sinal de um encoder, ligado ao eixo de oscilação do aerofólio, para sincronizar o evento com a aquisição de dados. A frequência de oscilação no caso mostrado na Fig. 33 foi de 0,5Hz. A média de eventos permitiu reconstruir a curva de coeficiente normal de sustentação para diferentes ângulos de ataque. Nesse caso, o coeficiente de força normal para cada ângulo de ataque foi a variável média oscilatória (análogo a \bar{U} da Eq. 11).

Na Fig. 34 é mostrado como exemplo um experimento sobre o estudo da evolução de ondas de instabilidade do tipo Tollmien-Schlichting na esteira de uma rugosidade imersa na camada limite de um aerofólio, [11] e [10]. Nesse caso, a flutuação foi gerada de

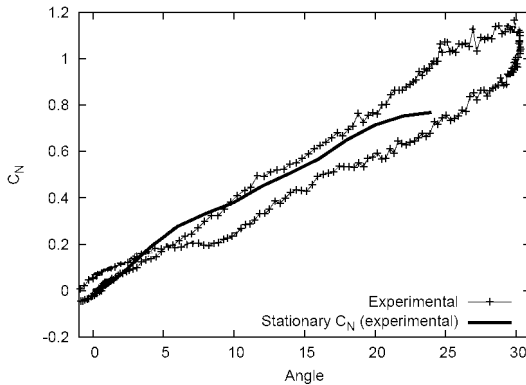


Figura 33: Coeficiente de força normal de um aerofólio em regime não estacionário (oscilação 0.5Hz).

maneira controlada através da utilização de autofalantes. O sinal fornecido aos alto falantes foi sincronizado com a aquisição de dados. Além disso, a rugosidade também era oscilatória. Sendo assim a geração de ondas de instabilidade e o movimento da rugosidade tiveram de ser sincronizados com a aquisição de dados. Desse modo foi possível reconstruir o comportamento das ondas de instabilidade na esteira para diferentes alturas de rugosidade $[\bar{U}(h) + \bar{u}'(t, h)]$, onde h corresponde a altura da rugosidade].

O reconhecimento de eventos em uma série de dados é empregado nos casos onde não é possível controlar os eventos artificialmente. Nesse caso a saída encontrada para a extração da media de eventos é através do reconhecendo de padrões que definem um evento dentro de séries de dados (revisão liográfica em [24]). Para estabelecer eventos dentro de uma serie temporal de dados é necessário o reconhecimento de padrões em uma posição de referencia do domínio. Normalmente o reconhecimento de padrões em séries de dados é um procedimento mais ruidoso e perigoso do que a sincronização do aparato experimental. Isso porque falhas no reconhecimento desses padrões pode levar a resultados completamente errados. Além disso, o reconhecimento desses padrões deve ser conseguido em meio ao ruído da série de dados. De acordo com [24], esse é o principal

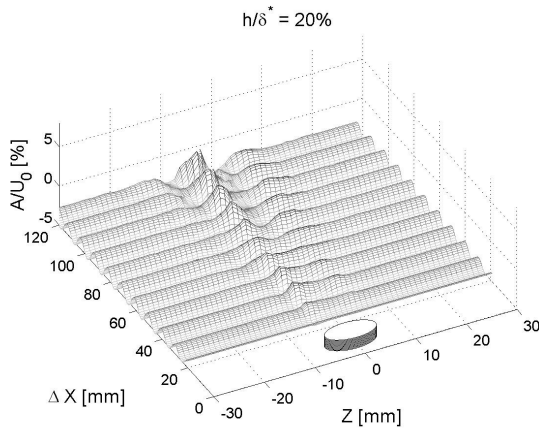


Figura 34: Evolução de ondas de instabilidade na esteira de uma rugosidade em uma camada limite.

desafio, mas vale lembrar, que mesmo os escoamentos turbulentos, tidos como extremamente ruidosos e aleatórios, possuem estruturas coerentes. A dificuldade maior é o reconhecimento dessas estruturas. Outra característica que deve existir para que a média condicional tenha sentido é a coerência do evento de referencia com o sinal no restante do domínio.

Para exemplificar a aplicação desse procedimento, realizou-se um experimento para a medição do escoamento na esteira de um cilindro utilizando-se duas sondas de fio quente. Uma sonda foi mantida fixa enquanto a outra sonda efetuou a varredura do sinal na esteira do cilindro. A aquisição dos sinais das duas sondas foi feita simultaneamente. Com os procedimentos padrões foi possível extrair somente as informações de amplitude do escoamento médio e da intensidade de turbulência (mostradas nas Figs. 31 e 32) e espectro de potencia. Com a utilização de técnicas de reconhecimento de padrões é possível extrair maiores informações do escoamento em intervalos específicos do ciclo.

No caso do experimento realizado para exemplificar o procedimento, utilizou-se a correlação cruzada entre as duas sondas de ane-

metria para a identificação dos eventos. A função de correlação cruzada fornece uma medida quantitativa do grau de semelhança entre duas funções. A função discreta de correlação para dois sinais x e y , ambos com médias iguais a zero, pode ser descrita como na Eq. 13.

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_T^{t=0} x(t) \times y(t + \tau). \quad (13)$$

Onde τ é um tempo de atraso. O coeficiente de correlação cruzada corresponde a função de correlação dividida pelo produto dos desvios padrões das series de dados x e y . Quando o coeficiente de correlação é igual a 1, diz-se que os sinais são perfeitamente correlacionados (idênticos). No caso do coeficiente de correlação ser igual a -1 os sinais são quase idênticos, mas possuem um defasamento de 180° . O valor zero do coeficiente ocorre quando os sinais não possuem correlação.

Através do cálculo do coeficiente de correlação entre as diferentes séries de dados coletadas da sonda de referência, foi possível obter os instantes onde ocorreu a máxima correlação entre as diferentes séries de dados.

Adotando-se esse procedimento foi possível estabelecer os eventos para todo o domínio, uma vez que a aquisição do sinais das duas sondas foi feito simultaneamente. O gráfico superior da Fig. 35 mostra a serie temporal de flutuação de velocidade de um evento obtido através do procedimento descrito acima. Como se pode observar o evento contém informações sobre o fase das flutuacoes de velocidade do escoamento na esteira do cilindro, mas ainda de forma muito ruidosa. O gráfico inferior da mesma figura mostra a série temporal da media condicional do escoamento na esteira do cilindro. Nessa figura pode-se observar claramente o arranjo de vórtices na esteira do cilindro.

A média condicional do escoamento total $\bar{U} + \bar{u}'(t)$ e da flutuação de velocidade $\bar{u}'(h)$ podem ser observadas respectivamente nos gráficos superior e inferior da Fig. 36. A figura mostra claramente a oscilação do escoamento total na esteira do cilindro devido a passagem dos vórtices. Para verificar o domínio de validade da média condicional é necessário analisar nos eventos, o comportamento da

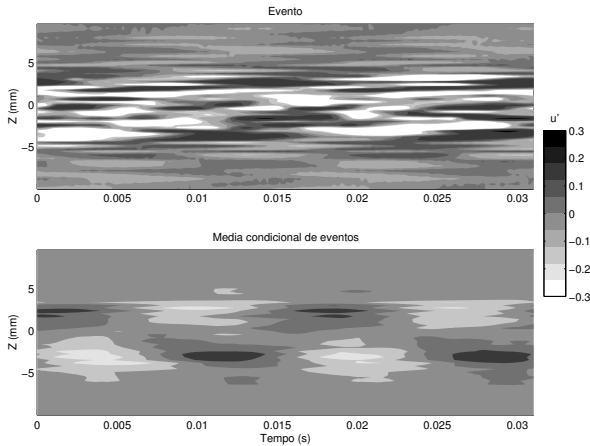


Figura 35: Comparação entre um único evento e a média de vários eventos.

correlação entre as flutuações medidas pela sonda de referência e a sonda de varredura (Fig. 37). A figura mostra que o coeficiente de correlação entre os sinais normalizados das duas sondas. O sinal de cada sonda foi normalizado em relação ao máximo da série para se retirar da análise o efeito de variação de amplitude dos sinais. Conforme pode-se observar, a correlação entre os dois sinais é alta em quase todo o domínio de medição. Isso mostra que o evento da sonda estacionária é uma medida representativa para sincronização dos eventos em todo o domínio do experimento. A medida que se aplica um avanço ou atraso de fase entre os dois sinais, a correlação entre os sinais diminui. Isso mostra que as duas sondas estavam localizadas em distâncias semelhantes à jusante do cilindro. No entanto, esse não é um requisito para a realização do experimento. As sondas podem estar localizadas em qualquer posição do domínio. O requisito é que o evento da sonda estacionária não seja completamente independente do restante do domínio.

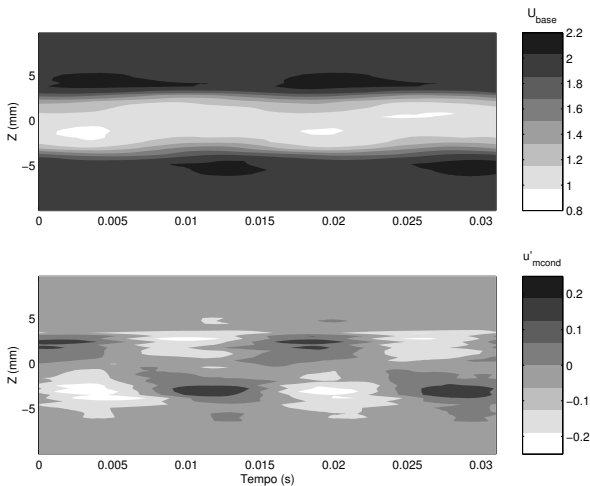


Figura 36: Escoamento e total e flutuação de velocidade na esteira do cilindro.

0.4 Considerações Finais

Neste trabalho buscou-se mostrar que existem diversas técnicas para redução do ruído nos vários estágios de um experimento, desde o projeto de túneis de vento até o processamento de sinais. Foram apresentadas somente algumas técnicas, pois o tema é extremamente extenso. Contudo, vale lembrar que existem inúmeras maneiras de se reduzir ruído em experimentos. O importante é a aplicação correta da técnica escolhida, pois a utilização inadequada freqüentemente pode gerar ruídos significativos que podem inviabilizar a extração das informações almejadas. Além disso, o trabalho procurou mostrar que em um processo de experimentação diversos fatores podem influenciar os resultados e, portanto a montagem cuidadosa de um experimento é muito mais do que somente a “ligação de cabos”.

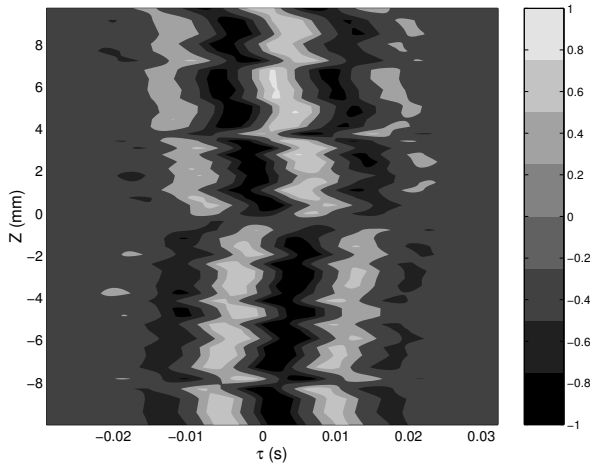


Figura 37: Variação do coeficiente de correlação cruzada no domínio de medição.

Referências Bibliográficas

- [1] Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 1971, “Random data - analysis and measurement procedures”, Wiley Interscience, 1th edition.
- [2] Bruun, H. H., 1995, “Hot wire anemometry - principles and signal analysis”, Oxford University Press.
- [3] Bueno, A. P., Doricio, J. L., Marques, A. C. H., de Paula, I. B., Catalano, F. M., and Junior, P. C. G., 2007, Pressure Measurements in Oscillatory NACA0012 Airfoil - Experimental and Computational Results, “COBEM - 19th International Congress of Mechanical Engineering”, Brasilia.
- [4] Carter, B. and Brown, T. R., 2001, Handbook of Operational Amplifier Applications, Technical Report SBOA 092A, Application report - Texas Instruments.
- [5] Catalano, F. M., 1989, Características Aerodinâmicas de Telas Comerciais de Nylon, “COBEM - 10th International Congress of Mechanical Engineering”.

- [6] Catalano, F. M., 2001, The New Closed Circuit Wind Tunnel Of The Aircraft Laboratory Of University Of São Paulo, “COBEM - 16th International Congress of Mechanical Engineering”.
- [7] Cochran, W. G., 1997, “Sampling Techniques”, Wiley-Interscience.
- [8] Collar, A. R., 1937, Some Experiments with Cascade of Airfoils, Technical Report 1768, R & M.
- [9] de Paula, I. B., 2004, Manual para construçao de anemometro a fio quente, Technical Report Incluído em relatório de bolsista FAPESP 2004, Universidade de Sao Paulo - EESC.
- [10] de Paula, I. B., Wuerz, W., and Medeiros, M. A. F., –, transition induced by a single three-dimensional roughnessl element. Part a: fundamental resonance, “Journal of fluid Mechanics”, Vol. **em submissao**, pp. –.
- [11] de Paula, I. B., Wuerz, W., and Medeiros, M. A. F., 2008, Experimental study of a Tollmien-Schlichting wave interacting with a shallow 3D roughness element, “Journal of Turbulence”, Vol. **9**, No. 7, pp. 1–23.
- [12] Duell, E., Walter, J., Arnette, S., and Yen, J., 2002, Recent Advances in Large-Scale Aeroacoustic Wind Tunnels, “8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit”, Breckenridge, Colorado.
- [13] Gelder, T. F., Moore, R. D., Sanz, J. M., and Mcfarland, E. R., 1986, Wind Tunnel Turning Vanes of Modern Design - Paper 86-0044, “AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit”, Reno, NV.
- [14] Haykin, S. and Veen, B. V., 2002, “Sinais e Sistemas”, Bookman.
- [15] Metha, R. D., 1976, The Design of Wide Angle Diffusers, Technical Report Report 76-03, I.C. Aero.
- [16] Morel, T., June 1975, Comprehensive Design of Wind Tunnel Contractions, “Journal of Fluid Engineering, ASME Transactions”, pp. 225–233.

- [17] Morrison, R., 1998, "Grounding and shielding Techniques", Wiley-Interscience.
- [18] Nachtigal, C. L., 1990, "Instrumentation and Control: Fundamentals and Applications", Wiley-IEEE.
- [19] Nagib, H. M. and Marion, A., 1984, On the Design of Contraction and Settling Chambers for Optimal Turbulence Manipulation in Wind Tunnels, "AIM Paper", , No. 84-0536.
- [20] Perry, A. E., 1982, "Hot wire anemometry", Oxford University Press.
- [21] Salter, C., 1946, Experiments on Thin Turning Vanes, Technical Report 2469, Reports and Memoranda.
- [22] Schaumman, R. and Valkenburg, M. E. V., 2001, "Design of Analog Filters", Oxford University Press.
- [23] Shah, S. J., 2000, Field wiring and noise considerations for analog signals, Technical Report Note 025, National Instruments Application Notes.
- [24] Tropea, C., L., A., and Foss, J. F., 2007, "Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics", Springer Verlag.

Escola de Primavera em Transição e Turbulência

TURBULÊNCIA

Volume 6

Editores

Márcio Teixeira Mendonça

Marcello Augusto Faraco de Medeiros

ABCM

Rio de Janeiro

Sumário

0.1	Introdução	1
0.2	Estabilidade Linear	6
0.2.1	Escoamentos Paralelos	7
0.2.2	Estabilidade Linear de Escoamentos Paralelos	8
0.2.3	Modos Normais em Escoamentos Paralelos	9
0.3	Estabilidade Linear de Equações com Coeficientes Periódicos	14
0.3.1	Teoria de Floquet	15
0.3.2	Demonstração do Teorema de Floquet	18
0.3.3	Instabilidade Paramétrica em Um Pêndulo	19
0.3.4	Instabilidade Secundária de Ondas TS	22
0.3.5	Escoamento Laminar Periódico	26
0.4	Transientes em Escoamentos Cisalhantes	27
0.5	Perturbações Localizadas de Alta-Frequência	32
0.5.1	Soluções de Ondas-Planas	33
0.5.2	Ondas-Planas e Instabilidade Elíptica	35
0.5.3	Ondas-Planas em Escoamentos Cisalhantes	41
0.5.4	Teoria Assintótica	48
0.5.5	Considerações Sobre Perturbações Localizadas	53

Elementos da Teoria de Transição em Estabilidade Hidrodinâmica

Sávio B. Rodrigues

Universidade Federal de São Carlos, UFSCar
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática
Sao Carlos, SP - Brasil

0.1 Introdução

A teoria de transição hidrodinâmica se estende pelas diversas áreas da ciência. Ela evolui da confluência de esforços experimentais, computacionais e teóricos numa sinergia sem igual em outros ramos da ciência. Aqui são apresentados alguns elementos matemáticos utilizados na teoria de transição, as idéias principais são apresentadas em casos simples que contenham os elementos essenciais da teoria. Atenção especial é dada aos escoamentos paralelos pois estes representam uma grande classe de interesse para engenharia. Na teoria de estabilidade hidrodinâmica para escoamentos paralelos deriva-se a célebre equação de Orr-Sommerfeld. Estão também descritos aqui a teoria para equações com coeficiente periódicos e a teoria de estabilidade para perturbações localizadas.

Considera-se que o fluido estudado é modelado pela equação de Navier-Stokes (ENS). Esta equação descreve o movimento de um fluido com viscosidade como a água e o ar. Ela é a equação mais simples que descreve um fluido no qual há os efeitos de inércia e de atrito. Outros efeitos físicos podem ser adicionados à ENS detre os quais: compressibilidade do ar, superfícies livres da água, variações de densidade do fluido. Em todos os casos, a não-linearidade provinda da equação de Navier-Stokes sempre causa fenômenos interessantes, especialmente com relação à transição do escoamento.

Nas aplicações, quase sempre é desejável ter escoamentos de caráter estacionário. *Escoamento estacionário* é aquele no qual, observando um ponto fixo no espaço, a velocidade do fluido no ponto é a mesma para qualquer instante de tempo. O escoamento estacionário é também chamado de escoamento permanente. Com respeito às equações, pode-se caracterizar um escoamento estacionário como sendo aquele em que a solução da equação não depende do tempo (variável t), chamada de *solução estacionária*. Na maioria das vezes é preferível ter escoamentos estacionários ao redor da asa de um avião ou num cano que transporta água. No entanto, em diversas aplicações isto não é possível. A impossibilidade de obter escoamentos estacionários se deve à instabilidade do escoamento.

Se permitirmos pequenas perturbações na velocidade do escoamento estacionário, estas perturbações podem ter três destinos: elas podem desaparecer, e então o escoamento volta a seu estado estacionário; elas podem permanecer pequenas, e então o escoamento permanece próximo ao estado estacionário; ou elas podem crescer e romper o regime estacionário do escoamento. Neste último caso dizemos que o escoamento estacionário é instável. Claramente, uma perturbação maior romperia o estado estacionário com maior facilidade. No entanto, é interessante notar que, se o escoamento for linearmente instável, perturbações arbitrariamente pequenas levam à destruição do regime estacionário de forma definitiva. Isto é, perturbações arbitrariamente pequenas romperão o regime estacionário. Esta instabilidade não pode ser evitada simplesmente controlando o nível de ruído no fluído, elas são um fato matemático das equações de movimento. No entanto, muitas vezes é possível projetar um regime laminar que seja suficientemente estável de modo a atrasar o aparecimento das perturbações indesejáveis.

O número de Reynolds é o parâmetro adimensional usado para

caracterizar o regime do escoamento. Ele é usado para identificar se um escoamento apresenta instabilidade ou não. De fato, na equação de Navier-Stokes, este é o único parâmetro relevante para a estabilidade. O número de Reynolds é definido como $R = UL/\mu$ no qual U e L expressam a velocidade e o comprimento típico do escoamento, enquanto μ expressa a viscosidade do fluido. O número $1/R$ pode ser pensado como sendo a “viscosidade” adimensional. Variando o número de Reynolds, gera-se uma família de escoamentos e, tipicamente, o escoamento com números de Reynolds mais baixo é mais estável que o escoamento com número de Reynolds mais alto. À primeira vista, isto se deve ao fato da viscosidade ter um efeito estabilizante, pois as perturbações tenderiam a desaparecer devido ao atrito, no entanto, é importante notar que há exemplos em que o escoamento é instável quando há viscosidade e estável quando não há viscosidade. Isto ocorre porque há uma relação complexa entre a viscosidade e a fronteira do fluido (onde ele toca uma superfície sólida). Sempre existe a formação de uma região próxima à fronteira, chamada de camada limite, a qual pode ser uma fonte de instabilidade para o escoamento.

Se pensarmos numa perturbação de intensidade arbitrariamente pequena, o critério mais importante para a estabilidade de um fluido é a estabilidade linear. Este critério está centrado no estudo de autovalores da equação de Navier-Stokes linearizada (que se torna a equação de Orr-Sommerfeld para o caso de escoamentos paralelos). Dado um escoamento estacionário, procura-se uma equação que descreva a evolução temporal de perturbações adicionadas a este escoamento. Se a intensidade da perturbação for suficientemente pequena, a equação de Navier-Stokes pode ser simplificada para uma equação linear. Esta equação linear, por sua vez, descreve a evolução inicial da perturbação. A equação linear será uma boa descrição enquanto a perturbação permanecer pequena, isto é, enquanto os efeitos dos termos não-lineares forem pequenos. Por sua vez, a evolução temporal de uma equação linear recai no estudo de autovalores de uma equação diferencial. Há muitos exemplos em que existem perturbações instáveis que crescem exponencialmente rápido quando R supera um certo valor crítico R_c . Estas perturbações representam os estágios iniciais da transição, esta instabilidade é chamada de *instabilidade primária*.

Estudar a transição do escoamento significa descrever os cami-

nhos da instabilidade de seu início até que o escoamento torne-se turbulento. Após a ocorrência da instabilidade primária, há vários caminhos pelos quais um escoamento torna-se turbulento. Há dois elementos principais: a instabilidade secundária e a instabilidade fracamente não-linear. A transição pode ocorrer numa combinação destes dois elementos. Aqui, somente a estabilidade secundária será estudada em detalhe pois esta instabilidade é mais relevante para o caso de escoamentos paralelos. A instabilidade secundária leva ao estudo de equações diferenciais com coeficientes periódicos, o que por sua vez, leva ao estudo da teoria de Floquet. Em certos casos, pode-se levar em conta efeitos fracamente não-lineares. Estes representam um estágio no qual a teoria linear pode ser corrigida para incorporar a não-linearidade, desde que esta não-linearidade seja pequena. No caso de escoamentos paralelos, a teoria fracamente não-linear tem validade muito restrita e ela freqüentemente é subjugada pela instabilidade secundária e pelos efeitos de transientes.

A teoria de estabilidade primária e secundária é de grande valia para o entendimento da transição. No entanto, para escoamentos paralelos freqüentemente há um desacordo entre a teoria linear e a observação experimental. Isto porque o regime linear da instabilidade requer um nível de ruído muito pequeno sendo que algumas vezes este nível de ruído é proibitivamente pequeno para qualquer experimento. Efeitos de transientes devem ser considerados para reconciliar a observação e a teoria. Escoamentos com cisalhamento, e em particular os escoamentos paralelos, apresentam crescimento transientes de perturbações. Estes transientes levam a uma deformação do escoamento que, se suficientemente grande, pode disparar efeitos não-lineares que levam o escoamento à transição, este cenário é chamado de *by-pass transition* (BT). O nome vem do fato da instabilidade pular o estágio inicial da instabilidade primária. Para uma descrição completa da BT é necessário estudar a intensidade e a forma da perturbação inicial que causa a transição. Não obstante, se a perturbação inicial for pequena o suficiente então recupera-se a teoria linear. No entanto, não há uma relação direta entre o crescimento transiente e a causa da transição, isto é, as perturbações com maior crescimento transiente não são responsáveis diretamente pela transição. A não-linearidade tem um papel importante no resultado final, e a BT não pode ser compreendida através de uma teoria linear, portanto não há um R_c que possa ser associada ao início da

transição. Para compreender a BT é necessário descrever a intensidade e a forma da perturbação inicial que leva à transição. Há alguns exemplos simples em escoamentos cisalhantes descritos aqui que ajudam a entender a relação entre o crescimento transiente e a BT.

Por fim, há também a teoria de perturbações localizadas. Esta teoria vem sendo utilizada com crescente interesse no estudo de estabilidade hidrodinâmica. Ela pode ser usada para extrair informações importantes sobre o problema de autovalores e ao mesmo tempo sobre o comportamento de transientes. Uma de suas principais vantagens é que ela pode ser aplicada com facilidade a escoamentos bastante complexos. Um exemplo clássico da aplicação desta teoria encontra-se no estudo da estabilidade e vórtices elípticos.

Aqui, a equação utilizada para modelar o fluido é a ENS na qual há um *campo de velocidades* que descreve o escoamento e que, a cada ponto do espaço tri-dimensional $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ocupado pelo fluido no instante de tempo t , associa um vetor velocidade que é denotado por

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = (\tilde{u}(\mathbf{x}, t), \tilde{v}(\mathbf{x}, t), \tilde{w}(\mathbf{x}, t)). \quad (1)$$

Há também uma função escalar, chamada de *pressão*, associada a cada ponto do espaço: $\tilde{p}(\mathbf{x}, t)$. Para que o escoamento preserve seu volume, isto é, seja *incompressível*, é necessário que o campo de velocidades satisfaça a condição de incompressibilidade

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Esta condição expressa a conservação de massa do fluido quando este tem densidade constante. A ENS é dada pela condição de incompressibilidade e pela conservação de momento

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{R} \Delta \tilde{\mathbf{u}}. \quad (3)$$

A velocidade deve satisfazer a condição $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = 0$ na fronteira, isto é, onde o fluido encosta numa superfície (imóvel). A equação acima pode ser reescrita componente a componente

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta \tilde{u}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta \tilde{v}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{R} \Delta \tilde{w}, \quad (6)$$

na qual $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ representa o Laplaciano. Também é útil descrever o comportamento do fluido em termos da vorticidade dada por

$$\tilde{\omega}_x = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\tilde{\omega}_y = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\tilde{\omega}_z = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}. \quad (9)$$

A vorticidade é particularmente interessante para descrever escoamentos bi-dimensionais pois, neste caso, a Eq. (3) reduz-se a uma única equação escalar para uma componente da vorticidade.

0.2 Estabilidade Linear

A teoria de estabilidade hidrodinâmica dedica-se a estudar o comportamento de perturbações de escoamentos laminares. Existe uma grande variedade de escoamentos laminares possíveis para um fluido, algumas situações tornaram-se clássicas e bastante estudadas, [5]. O entendimento obtido em cada uma destas situações é comumente transportado para outras situações de interesse prático ou servem como uma primeira aproximação da situação real. Ênfase será dado aos escoamentos paralelos pois eles são comumente encontrados em

aplicações. Escoamentos paralelos também são freqüentemente usados como aproximação para escoamento quase-paralelos como escoamentos em camada limite, jatos, e a camada de mistura.

Para diferenciar o escoamento laminar do escoamento total usa-se a notação $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$ no qual $\tilde{\mathbf{u}}$ é o escoamento total, \mathbf{U} denota o escoamento laminar e $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{U}$ é a diferença entre o escoamento total e o laminar, chamada de perturbação. Desta forma, letras maiúsculas são usadas para o escoamento laminar, $\mathbf{U} = (U, V, W)$, e minúsculas são usadas para a perturbação, $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Equivalentemente, para a pressão usa-se a notação $\tilde{p} = P + p$. O escoamento laminar \mathbf{U} é solução exata da ENS quando $\mathbf{u} = 0$, isto é, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U}$ é uma solução das Eqs. (2-3).

0.2.1 Escoamentos Paralelos

Escoamentos paralelos são aqueles em que a solução da ENS é da forma $U(y)$ enquanto $V = 0$ e $W = 0$. A função $U(y)$ é chamada de perfil de velocidade do escoamento. As direções x , y e z serão chamadas de direção horizontal, vertical e transversal, respectivamente. Idealizaremos a situação em que o fluido está confinado entre duas placas planas de extensão infinita. O fluido escoar na direção x , enquanto as placas são perpendiculares à direção y . Este tipo de escoamento é chamado de escoamento em um canal. Há dois escoamentos interessantes no canal, o escoamento de Poiseuille e o de Couette. O escoamento de Poiseuille, já adimensionalizado, tem o perfil de velocidade dado por $U(y) = 1 - y^2$, no qual as placas se encontram nas posições $y = -1$ e $y = 1$ e a velocidade no centro do canal é 1. Neste caso, o número de Reynolds é definido como $R = U_c L / \nu$ no qual L é a metade da largura real do canal, U_c é a velocidade do escoamento no centro do canal e ν é a viscosidade do fluido. Este escoamento é chamado também de escoamento parabólico ou escoamento com gradiente constante de pressão, isto porque, se calcularmos a pressão veremos que $\partial P / \partial x = -2/R$. O escoamento de Couette tem um perfil linear de velocidade, $U(y) = y$ (já adimensionalizado), no qual as placas se encontram na mesma posição que o Poiseuille, mas agora a placa superior move-se na horizontal com velocidade 1 e a placa inferior também move-se na horizontal com velocidade -1. O número de Reynolds para o escoamento Couette define-se da mesma forma que para o escoamento Poiseuille. Note

que não há gradiente de pressão para empurrar o fluido, no entanto a energia para manter o fluido em movimento vem da parede. O escoamento de Couette tem um atrativo matemático devido a sua simplicidade, no entanto, ele é menos estudado que o Poiseuille pois é muito difícil realizar experimentos com controle no nível de ruído.

Um escoamento laminar muito estudado é o perfil de Blasius. Consiste no escoamento sobre uma placa plana em $y = 0$ com uma velocidade fixa quando y tende ao infinito, isto é, $U(y) \rightarrow 1$ quando $y \rightarrow +\infty$. O perfil de velocidade $U(y) = f'(y)$ é dado pela função de Blasius $f(y)$ que obedece à equação

$$f''' + f f'' = 0, \quad (10)$$

com condições de fronteira $f(0) = f'(0) = 0$ e $f'(0) \rightarrow 1$ quando $y \rightarrow \infty$. Este escoamento é muito importante pois ele aproxima o perfil de velocidades de uma camada limite.

0.2.2 Estabilidade Linear de Escoamentos Paralelos

Para estudar pequenas perturbações num fluido é conveniente escrever a ENS em termos da evolução da perturbação \mathbf{u} , sendo que $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e que $\tilde{p} = P(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{\Delta \mathbf{u}}{R}, \quad (11)$$

com $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. A hipótese fundamental da teoria linear é que a perturbação \mathbf{u} seja suficientemente pequena. A perturbação \mathbf{u} deverá ser pequena o suficiente para justificar que o termo não-linear $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ da equação acima seja desprezado. Desta forma obtêm-se a ENS linearizada

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{u}, \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (13)$$

No caso de escoamentos paralelos, $\mathbf{U} = (U(y), 0, 0)$, esta equação fica

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + U'v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta u, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta v, \quad (15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \Delta w, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (17)$$

Dentro da teoria matemática, existem teoremas que permitem justificar o uso da equação linearizada. Por exemplo, diz-se que há estabilidade não-linear se existir uma constante $C > 0$ tal que se a norma da perturbação $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$ for menor que C então a solução \mathbf{u} da ENS satisfaz $\mathbf{u} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, [12]. Analogamente existem teoremas de instabilidade não-linear nos quais demonstra-se que existe uma perturbação inicialmente pequena que torna-se tão grande quanto o escoamento laminar, [6].

0.2.3 Modos Normais em Escoamentos Paralelos

Comumente usa-se *modos normais* para determinar se a Eqs. (14-17) tem soluções instáveis no tempo, isto é, procura-se soluções da forma

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(y)e^{\lambda t + i(\alpha x + \beta z)}, \quad (18)$$

no qual $\hat{\mathbf{u}}(y) = (\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y))$. O mesmo vale para a pressão que fica $p = \hat{p}(y)e^{\lambda t + i(\alpha x + \beta z)}$. Para satisfazer a condição de fronteira, é necessário que $\hat{\mathbf{u}}(y_f) = 0$ no qual y_f é um ponto da fronteira (por exemplo $\hat{\mathbf{u}}(1) = 0$ e $\hat{\mathbf{u}}(-1) = 0$ para o escoamento de Poiseuille). Desta forma, λ deverá ser um auto-valor da equação diferencial

$$\lambda\hat{u} + i\alpha U\hat{u} + U'\hat{v} = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{R}(-\alpha^2 - \beta^2 + D^2)\hat{u}, \quad (19)$$

$$\lambda\hat{v} + i\alpha U\hat{v} = -D\hat{p} + \frac{1}{R}(-\alpha^2 - \beta^2 + D^2)\hat{v}, \quad (20)$$

$$\lambda\hat{w} + i\alpha U\hat{w} = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{R}(-\alpha^2 - \beta^2 + D^2)\hat{w}, \quad (21)$$

$$i\alpha\hat{u} + D\hat{v} + i\beta\hat{w} = 0, \quad (22)$$

no qual usamos a letra D para denotar a derivada $\partial/\partial y$. Se existir um auto-valor λ com $Re(\lambda) > 0$ então o escoamento será instável para os dados valores de α , β e R . Neste caso, há um crescimento exponencialmente rápido da função $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ quando $t \rightarrow +\infty$. É conveniente utilizar uma notação que evidencia o movimento horizontal da perturbação no tempo. Para tanto definimos a *velocidade de onda* $c = i\lambda/\alpha$, de forma que o modo-normal pode ser reescrito como

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(y)e^{i\alpha(x-ct)+i\beta z}. \quad (23)$$

A velocidade pode ser um número complexo $c = c_r + ic_i$ no qual c_r indica a velocidade horizontal e c_i a taxa de amplificação. A onda é dita *instável* se $\alpha c_i > 0$, *estável* se $\alpha c_i \leq 0$ e, em particular, ela é dita *neutra* se $\alpha c_i = 0$. Em termos da velocidade de onda as equações são reescritas como

$$i\alpha(U - c)\hat{u} + U'\hat{v} = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{R}(-\alpha^2 - \beta^2 + D^2)\hat{u}, \quad (24)$$

$$i\alpha(U - c)\hat{v} = -D\hat{p} + \frac{1}{R}(-\alpha^2 - \beta^2 + D^2)\hat{v}, \quad (25)$$

$$i\alpha(U - c)\hat{w} = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{R}(-\alpha^2 - \beta^2 + D^2)\hat{w}, \quad (26)$$

$$i\alpha\hat{u} + D\hat{v} + i\beta\hat{w} = 0, \quad (27)$$

que evidencia a relação entre o autovalor e a velocidade do escoamento.

Há uma transformação que permite reduzir o estudo da equação acima ao caso bi-dimensional; esta transformação leva ao teorema de Squire que diz que as ondas bi-dimensionais são mais instáveis que as ondas tri-dimensionais. Para tanto, definimos a seguinte mudança de variáveis

$$\check{\alpha} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (28)$$

$$\check{u} = (\alpha\hat{u} + \beta\hat{w})/\check{\alpha}, \quad (29)$$

$$\check{p} = \check{\alpha}\hat{p}/\alpha, \quad (30)$$

$$\check{v} = \hat{v}, \quad (31)$$

$$\check{c} = c, \quad (32)$$

$$\check{R} = \alpha R/\check{\alpha}. \quad (33)$$

Desta forma, multiplicando a Eq. (24) por α e a Eq. (25) por β e somando-as, as equações se transformam em

$$i\check{\alpha}\check{R}(U - \check{c})\check{u} + \check{R}U'\check{v} = -i\check{\alpha}\check{R}\check{p} + (-\check{\alpha}^2 + D^2)\check{u}, \quad (34)$$

$$i\check{\alpha}\check{R}(U - \check{c})\check{v} = -\check{R}D\check{p} + (-\check{\alpha}^2 + D^2)\check{v}, \quad (35)$$

$$i\check{\alpha}\check{u} + D\check{v} = 0. \quad (36)$$

Esta transformação utilizada é conhecida como transformação de Squire; ela será usada novamente no estudo de crescimento transiente. Note que as Eqs. (34-36) são equivalentes às Eqs. (24-27) com β e \hat{w} iguais a zero. Isto é, para cada solução tri-dimensional, corresponde uma solução bi-dimensional. Note que a solução bi-dimensional é mais instável que a tri-dimensional. Isto porque as taxas de crescimento das perturbações instáveis são respectivamente αc_i e $\check{\alpha}\check{c}_i$ para perturbações tri- e bi-dimensionais. Como $\alpha < \check{\alpha}$ e $c_i = \check{c}_i$, segue que a taxa bi-dimensional é a maior. Além disto, como $\alpha < \check{\alpha}$, segue da Eq. (33) que $\check{R} < R$. Define-se o *número de Reynolds crítico* R_c como sendo o menor número de Reynolds sobre todos os possíveis valores de α e β para os quais existem perturbações instáveis. O *teorema de Squire* diz que *para encontrar R_c é suficiente considerar perturbações bi-dimensionais*. Este teorema segue imediatamente da desigualdade $\check{R} < R$. Portanto, basta considerar perturbações em que $\beta = 0$. Quando existir um modo normal que é neutramente estável, $c_i = 0$, para um valor de α e R , dizemos que este modo normal é uma *onda de Tollmien-Schlichting* (onda TS) do escoamento, em particular, há uma onda TS crítica associada ao R_c . As ondas TS são periódicas em x e t : $\mathbf{u}^{TS}(x, y, t) = e^{i\alpha(x-ct)}\hat{\mathbf{u}}(y)$. Para vários escoamentos o número de Reynolds crítico é conhecido. Para os escoamentos paralelos tem-se que R_c para o escoamento de Poiseuille é 5772 enquanto para o perfil de Blasius R_c é 519. Já o perfil de Couette é sempre linearmente estável e R_c é infinito. Também acredita-se que seja infinito o R_c do escoamento dentro de um cano cilíndrico, às vezes chamado de escoamento de Hagen-Poiseuille.

Note que as Eqs. (34-36) podem ser simplificadas transformando-as numa equação apenas para \check{v} . Por exemplo, substituindo $\check{u} = iD\check{v}/\check{\alpha}$ e depois eliminando a pressão das Eq. (34-35). No entanto, há um modo mais conveniente de simplificá-las usando a função corrente, isto levará à equação de Orr-Sommerfeld. A *função corrente* de um escoamento bi-dimensional é definida como $\psi(x, y, t)$ tal que

$$u(x, y, t) = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad (37)$$

$$v(x, y, t) = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (38)$$

no qual u e v são soluções das Eqs. (14-17) com $w = 0$. Note que, havendo uma função corrente, a condição de incompressibilidade é automaticamente satisfeita (Eq. 17). O nome função corrente se dá porque, quando ψ não depende de t , as linhas de corrente do escoamento são as curvas de nível de ψ . Como a *vorticidade* na direção z é definida por $\omega_z = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$, temos que $\omega_z = -\Delta\psi$. A equação para ω_z é obtida derivando a Eq. (14) em relação a y , derivando a Eq. (15) em relação a x e subtraindo-as. Deste modo obtemos a equação linearizada para vorticidade que, em termos da função corrente, fica

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + U\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi - U''\frac{\partial}{\partial x}\psi = \frac{1}{R}\Delta^2\psi, \quad (39)$$

a qual, na fronteira, temos que impor $\partial\psi/\partial y = \partial\psi/\partial x = 0$. Utilizando modos normais, $\psi(x, y, t) = \phi(y)e^{i\alpha(x-ct)}$, obtemos a *equação de Orr-Sommerfeld*

$$(U - c)(D^2 - \alpha^2)\phi - U''\phi = \frac{1}{i\alpha R}(D^2 - \alpha^2)^2\phi, \quad (40)$$

que tem condições de fronteira $D\phi = \alpha\phi = 0$. O problema de auto-valor é encontrar valores c , α e R tais que a equação acima tenha solução não-trivial (α e R devem ser reais e c pode ser complexo).

A resolução da equação de Orr-Sommerfeld é um problema bastante estudado. Existem métodos assintóticos e numéricos para aproximar a solução do problema de auto-valor, no entanto o entendimento completo do problema de auto-valor é bastante sofisticado. Por exemplo, existe uma diferença matemática significativa entre escoamentos num canal e escoamentos no semi-plano (como Blasius). No canal, existe um número infinito de auto-valores discretos λ_j e a condição inicial do problema de evolução, Eq. (39), pode ser descrita como uma superposição de auto-funções $\phi_j(y)$ na direção y e com

uma série de Fourier na direção x :

$$\psi(x, y, 0) = \sum_j \sum_k A_{jk} \phi_{jk}(y) e^{i\alpha_k x}, \quad (41)$$

a evolução temporal é então dada por

$$\psi(x, y, t) = \sum_j \sum_k A_{jk} \phi_{jk}(y) e^{i\alpha_k (x - c_{jk} t)}. \quad (42)$$

No entanto o escoamento de Blasius, por exemplo, tem um conjunto finito de auto-valores; o que claramente não permite expressar qualquer condição inicial como uma superposição de auto-funções. Este escoamento tem o que é chamado de *espectro contínuo*. Por estas peculiaridades, a equação de Orr-Sommerfeld é importante dentro da teoria espectral de operadores diferenciais. Note que ela é uma equação de quarta ordem e que no limite $\alpha R \rightarrow +\infty$ o termo viscoso desaparece e a equação passa a ter segunda ordem. Mas este termo não pode ser desprezado ao impor as condições de fronteira. Próximo à fronteira, a viscosidade sempre é importante e as derivadas $D^4\phi$ devem ser grandes o suficiente para que $(1/(\alpha R))D^4\phi$ seja comparável aos outros termos da equação.

0.3 Estabilidade Linear de Equações com Coeficientes Periódicos

As equações com coeficientes periódicos estão relacionadas às *instabilidades paramétricas*. Na teoria hidrodinâmica elas surgem em algumas situações, uma delas ocorre se houver uma dependência periódica no tempo no escoamento laminar. Um caso clássico é a *camada de Stokes* na qual o escoamento é dado por $(U(y, t), 0, 0)$ na região $y \geq 0$ com condição de fronteira periódica em $y = 0$ dada por $U(0, t) = B \text{sen}(\Omega t)$. Este escoamento representa uma camada limite na qual a placa se desloca periodicamente na horizontal. Costuma-se chamar também da camada de Stokes qualquer camada limite resultante de um forçamento periódico. Para escoamentos paralelos, como Poiseuille e Blasius, o surgimento de escoamentos periódicos é bastante natural. Isto porque estes escoamentos

podem abrigar ondas TS neutras. Por exemplo, o escoamento laminar pode ser dado por $(U(y) + u^{TS}(x - ct, y), v^{TS}(x - ct, y), 0)$ no qual $(u^{TS}(x - ct, y), v^{TS}(x - ct, y), 0)$ representa uma onda TS bi-dimensional. Esta solução periódica é uma solução da ENS linearizada, e permanecerá uma boa aproximação para a solução da ENS enquanto a onda TS for pequena. A instabilidade deste escoamento periódico será chamada de instabilidade secundária das ondas TS. A teoria de estabilidade secundária tem grande importância na descrição da transição para turbulência. Por exemplo, ela pode ser usada para achar, com alguma precisão, o ponto de transição ao longo da camada limite. O estudo de equações com coeficientes periódicos pode ser realizado usando a teoria de Floquet, a qual é descrita primeiramente para equações diferenciais ordinárias.

0.3.1 Teoria de Floquet

Considere o exemplo de uma equação diferencial escalar de primeira ordem com coeficientes periódicos,

$$y' + (1 - \cos t)y = 0, \quad (43)$$

com condição inicial $y(0) = 1$, cuja solução é $y(t) = y_0 \exp(-t + \sin t)$. Note que a solução pode ser escrita como o produto de uma função periódica e de uma exponencial $y(t) = p(t)e^{-t}$ e que nos instantes $t_k = 2k\pi$ tem-se $y(t_k) = e^{-t_k}$. De modo geral, a teoria de Floquet permite escrever a solução de um sistema de EDOs como o produto de funções periódicas vezes exponenciais. Definimos o sistema linear como

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}, \quad (44)$$

no qual $\mathbf{y}(t)$ é um vetor $n \times 1$ e $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com elementos que dependem de t . Define-se a *matriz fundamental* $X(t)$ como sendo a matriz tal que $\mathbf{y}(t) = X(t)\mathbf{y}(0)$, isto é, ela é a matriz que dá a solução do sistema acima para qualquer condição inicial $\mathbf{y}(0)$. O cálculo da matriz fundamental é feito integrando numericamente o sistema n vezes com condições iniciais linearmente independentes. Mais especificamente, definindo $\mathbf{y}_j(t)$ como sendo a solução da Eq.

(44) com condição inicial

$$\mathbf{y}_j(0) = \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j - \text{ésima componente}, \quad (45)$$

$\mathbf{y}_j(t)$ será a j -ésima coluna da matriz fundamental

$$X(t) = [\mathbf{y}_1(t) \mid \mathbf{y}_2(t) \mid \cdots \mid \mathbf{y}_n(t)]. \quad (46)$$

Note que $X(0) = I$. Para sistemas lineares *autônomos*, no qual A não depende de t , existe uma forma “explícita” para escrever a matriz fundamental

$$X(t) = \exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(At)^n}{n!}, \quad (47)$$

na qual a última identidade é a definição de exponencial de matriz. Pode-se verificar que $X' = (\exp(At))' = A \exp(At) = AX$.

O principal *teorema da teoria de Floquet* diz que se a Eq. (44) possuir coeficiente periódico, $A(t+T) = A(t)$, então existem matrizes $P(t)$ e Q tal que a matriz fundamental é

$$X(t) = P(t)e^{Qt}, \quad (48)$$

na qual $P(t)$ é uma matriz periódica, $P(t+T) = P(t)$ e $P(0) = I$, e Q é uma matriz constante. Portanto, nos instantes de tempo $t_k = kT$,

$$X(t_k) = P(kT)e^{QkT} = (e^{QT})^k = M^k, \quad (49)$$

no qual $M = X(T) = e^{QT}$. Para encontrar M numericamente, é necessário calcular $X(T)$ usando o procedimento descrito acima. Também é possível encontrar as matrizes Q e $P(t)$. O procedimento para

calcular Q e $P(t)$, bem como a demonstração do teorema encontram-se na sec. 0.3.2.

A estabilidade da Eq. (44) está relacionada aos auto-valores λ_j da matriz M , $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, estes auto-valores são chamados de *multiplicadores de Floquet*. A solução é *assintoticamente estável* se $|\lambda_j| < 1$ para todo $1 \leq j \leq n$ pois segue da Eq. (49) que $M^k \rightarrow 0$ no limite $k \rightarrow +\infty$. A solução é *instável* se $|\lambda_1| > 1$, pois neste caso $M^k \mathbf{v}_1 = \lambda_1^k \mathbf{v}_1$ cresce exponencialmente com k . Quando houver q auto-valores com módulo unitário, $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_q| = 1$, a solução será *estável* (neutramente estável) se existir q auto-vetores, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$, linearmente independentes (LI) associados a estes auto-valores. Caso não haja q auto-vetores LI, então a solução será instável com crescimento polinomial, isto é, a solução será instável devido a ressonâncias do sistema. Note que a solução de Eq. (44) coincide, em $t = t_k$, com a solução do sistema de coeficientes constantes $\tilde{\mathbf{y}}' = Q\tilde{\mathbf{y}}$. De modo que os critérios de estabilidade também podem ser descritos em termos dos auto-valores de Q . Os auto-valores μ_j de Q são chamados de *expoentes característicos*. Como as matrizes M e Q comutam, $MQ = e^{QT}Q = Qe^{QT} = QM$, elas possuem os mesmos auto-vetores. Chamando de μ_j e \mathbf{v}_j os auto-valores e auto-vetores de Q , então:

$$\lambda_j \mathbf{v}_j = M \mathbf{v}_j = e^{QT} \mathbf{v}_j = e^{T\mu_j} \mathbf{v}_j, \quad (50)$$

e portanto $\lambda_j = e^{T\mu_j}$ é a relação entre os autovalores de M e Q . Mais ainda, existe uma solução particular $y_j(t)$ da Eq. (44) tal que

$$y_j(t) = P(t)e^{Qt} \mathbf{v}_j = (P(t)\mathbf{v}_j)e^{\lambda_j t} = \mathbf{p}_j(t)e^{\lambda_j t}, \quad (51)$$

no qual $\mathbf{p}_j(t)$ é um vetor de componentes periódicas. Se Q for diagonalizável, então há uma base completa de autovetores \mathbf{v}_j de forma que qualquer solução da Eq. (44) pode ser escrita como

$$y(t) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{p}_j(t) e^{\mu_j t}. \quad (52)$$

É interessante notar que as soluções $y(t) = \mathbf{p}_j(t)e^{\mu_j t}$ têm período comensurável com T quando $\mu_j = 2\pi ik/(mT)$ com k e m inteiros. A

solução é chamada de *sub-harmônica* se $\mu_j = \pi i/T$ e ela é chamada de *fundamental* se $\mu_j = 2\pi i/T$. As instabilidades paramétricas mais significativas usualmente provém de perturbações dos auto-valores $\mu_1 = \pi i k/T$ com $k = 1, 2$ ou 3 . Estes casos neutramente estáveis frequentemente aparecem na fronteira entre soluções estáveis e instáveis. Note que a solução sub-harmônica troca de sinal a cada período T .

$$\mathbf{y}(t+T) = \mathbf{p}_j(t+T)e^{\pi i(t+T)/T} = -\mathbf{p}_j(t)e^{\pi it/T} = -\mathbf{y}(t), \quad (53)$$

enquanto a solução sub-harmônica tem período $2T$ a fundamental tem o período T .

0.3.2 Demonstração do Teorema de Floquet

Uma propriedade da matriz fundamental da Eq. (44) é que

$$X(t+T) = X(t)X(T). \quad (54)$$

Isto pode ser demonstrado dividindo a evolução da equação em duas partes: a evolução no intervalo $[0, T]$, seguida da evolução no intervalo $[T, t+T]$. Primeiro evoluindo a condição inicial $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ no intervalo de tempo $[0, T]$ resulta em $\mathbf{y}(T) = X(T)\mathbf{y}_0$. Segundo, tomando como condição inicial $\mathbf{y}(T) = X(T)\mathbf{y}_0$ e evoluindo-a no intervalo $[T, t+T]$ tem-se $\mathbf{y}(t+T) = X(t)\mathbf{y}(T)$. Isto ocorre porque, como $A(t+T) = A(t)$, a evolução no intervalo $[T, t+T]$ é igual a evolução no intervalo $[0, t]$, e portanto $\mathbf{y}(t+T) = X(t)(X(T)\mathbf{y}_0)$. Por outro lado, a evolução da condição inicial \mathbf{y}_0 no intervalo total $[0, t+T]$ é dada pela fórmula $\mathbf{y}(t+T) = X(t+T)\mathbf{y}_0$, comparando com a expressão anterior tem-se que $X(t)X(T)\mathbf{y}_0 = X(t+T)\mathbf{y}_0$. Como a condição inicial \mathbf{y}_0 é arbitrária, vale a propriedade acima.

Definindo $M = X(T)$, é possível encontrar uma matriz Q tal que $M = \exp(QT)$. A matriz QT é chamada de matriz *logaritmo* de M . Uma matriz M é *diagonalizável* quando existir uma matriz D diagonal e uma matriz B inversível tal que $M = BDB^{-1}$ (D é

a matriz dos auto-valores e B é uma matriz formada pelos auto-vetores de M). Quando M for diagonalizável e inversível, a matriz Q é dada por $Q = (1/T)B \log(D)B^{-1}$ no qual $\log(D)$ é a matriz diagonal cujos elementos são o logaritmo dos respectivos elementos da diagonal de D . Quando M é inversível mas não é diagonalizável, é necessário usar a forma canônica de Jordan para definir $\log(M)$. Há uma liberdade na definição de Q pois $\exp(Q + 2\pi i I) = \exp(Q)$. Para qualquer matriz Q vale que $\exp(Qa) \exp(Qb) = \exp(Q(a + b))$, e em particular $\exp(Qt) \exp(-Qt) = I$. Assim, define-se a matriz $P(t) = X(t) \exp(-Qt)$ e resta demonstrar que $P(t)$ é uma matriz periódica. De fato, usando as propriedades acima,

$$\begin{aligned} P(t + T) &= X(t + T)e^{-Q(t+T)} = \\ &X(t)Me^{-QT}e^{-Qt} = X(t)e^{-Qt} = P(t), \end{aligned} \tag{55}$$

e portanto $X(t) = P(t) \exp(Qt)$ para todo tempo.

0.3.3 Instabilidade Paramétrica em Um Pêndulo

A instabilidade paramétrica de um pêndulo é um fenômeno que todos conhecem ao balançar num balanço. Um criança ao balançar, levanta o corpo a cada ida e vinda mudando a posição do centro de massa, o que é equivalente a modificar a posição do pêndulo. É possível gerar instabilidade simplesmente modificando o comprimento da haste do pêndulo de forma periódica. Em particular, para um pêndulo, a instabilidade sub-harmônica é a mais forte; isto porque o “forçamento” ocorre a cada semi-período. Um modelo bastante estudado para este fenômeno é a equação de um pêndulo com haste variável

$$y'' + \Omega^2(1 + \epsilon q(t))y = 0, \tag{56}$$

no qual $q(t + 2\pi) = q(t)$. Um caso particular é a equação de Mathieu que tem $q(t) = \cos(t)$. Para a equação de Mathieu, temos o seguinte diagrama dado pela Fig. 1. Ele indica a região do plano no qual as soluções são estáveis e instáveis. Note que a região de

instabilidade toca o eixo Ω nos pontos $\Omega = 1/2, 1$ e $3/2$, e que a região mais larga de instabilidade na Fig. 1 ocorre no sub-harmônico. Pode-se demonstrar que para qualquer $q(t)$ a curva neutra toca o eixo Ω somente nos pontos $\Omega = k/2$ com $k > 0$ inteiro, as regiões de instabilidade são chamadas de línguas de Arnold [1]. As línguas ficam cada vez finas e podem ser facilmente perturbadas com a adição de atrito. A Fig. 2 mostra a região de instabilidade para a equação de Mathieu com atrito

$$y'' + \delta y + \Omega^2(1 + \epsilon q(t))y = 0, \quad (57)$$

no qual $\delta = 10^{-2}$. A língua de instabilidade sub-harmônica é a que se aproxima mais do eixo Ω , ela requer apenas um pequeno valor de ϵ para que a instabilidade ocorra. Outras escolhas para $q(t)$ na Eq. (56) resultam em comportamentos similares para região de estabilidade, especialmente na proximidade do eixo Ω (quando ϵ é pequeno).

Uma forma de obter os expoentes característicos μ_j para a equação de Mathieu é usar uma série de Fourier para representar a parte periódica da solução $\mathbf{p}_j(t)$ na Eq. (52). Pode-se procurar uma solução da forma

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mu t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n e^{int}, \quad (58)$$

(com $\mathbf{a}_{-n} = \bar{\mathbf{a}}_n$ para que a solução seja real). A Eq. (56) pode ser reescrita como um sistema 2×2 de primeira ordem

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2(1 + \epsilon \cos(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad (59)$$

e substituindo

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{\mu t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix} e^{int}, \quad (60)$$

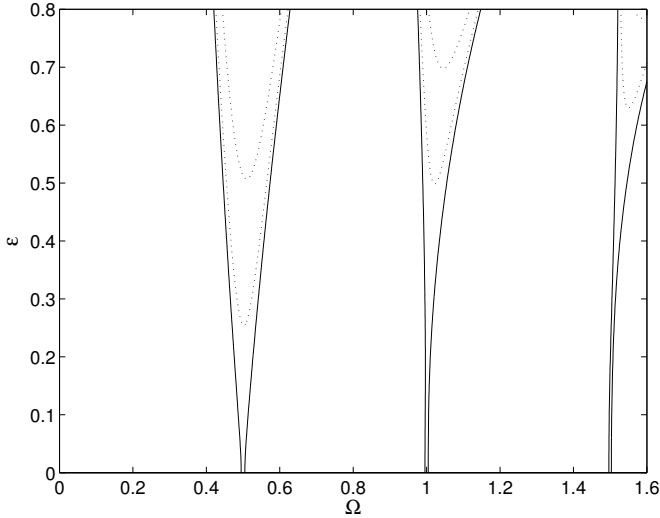


Figura 1: Região de estabilidade no plano (Ω, ϵ) da equação de Mathieu. Curvas de nível da função $\log |\lambda_1|$, a curva de nível zero é indicada pela linha contínua e as linhas pontilhadas são as curvas de nível 0,2 e 0,4. A curva neutra é a curva de nível zero.

na Eq. (59) e usando $\cos(t) = (e^{it} + e^{-it})/2$ tem-se

$$\mu \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_n - iny_n \\ -\Omega^2 y_n - inz_n - \left(\frac{\Omega^2 \epsilon}{2}\right)(y_{n+1} + y_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad (61)$$

para todo n inteiro, o qual gera um problema de auto-valor com infinitas equações acopladas. Os auto-valores devem ser obtidos truncando a série de Fourier, isto é, considerando apenas coeficientes y_n e z_n com $|n| < N$. Note que a Eq. (61) tem um número infinito de auto-valores, isto porque se μ for um auto-valor então $\mu + 2\pi ik$, com k inteiro, também é um auto-valor (basta redefinir os índices de y_n e z_n).

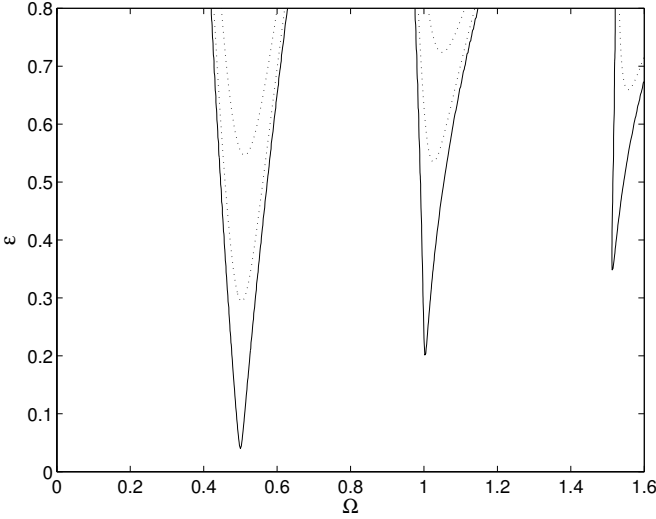


Figura 2: Região de estabilidade no plano (Ω, ϵ) da equação de Mathieu com atrito. Curvas de nível da função $\log|\lambda_1|$, a curva de nível zero é indicada pela linha contínua e as linhas pontilhadas são as curvas de nível 0,2 e 0,4. A curva neutra é a curva de nível zero.

0.3.4 Instabilidade Secundária de Ondas TS

A estabilidade secundária tem sido usada para prever o ponto de transição em escoamentos paralelos e quase-paralelos. Perturbações primárias linearmente instáveis, como as ondas TS, tendem a crescer a uma taxa exponencial e, num certo ponto de seu crescimento, o escoamento passa por uma mudança de comportamento. No lugar das ondas TS podem aparecer estruturas tri-dimensionais chamadas de vórtices-lambda (Λ -vortex) que precedem o escoamento turbulento. A formação dos vórtices-lambda está relacionada à instabilidade secundária das ondas TS.

O escoamento laminar é modelado como $\mathbf{U} + \mathbf{u}^{TS}$ no qual \mathbf{U} é o escoamento paralelo e a onda TS é $\mathbf{u}^{TS} = (u^{TS}(x - ct, y), v^{TS}(x - ct, y), 0)$, de modo que o escoamento total é dado por $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U} + \mathbf{u}^{TS} + \mathbf{u}$ no qual $\mathbf{u} = (u, v, w)$ é a perturbação do escoamento laminar. A ENS

linearizada com respeito à perturbação \mathbf{u} fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (U + u^{TS}) \frac{\partial u}{\partial x} + v^{TS} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u^{TS}}{\partial x} + \\ v \left(U' + \frac{\partial u^{TS}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta u, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (U + u^{TS}) \frac{\partial v}{\partial x} + v^{TS} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v^{TS}}{\partial x} + \\ v \frac{\partial v^{TS}}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta v, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (U + u^{TS}) \frac{\partial w}{\partial x} + v^{TS} \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \Delta w, \quad (64)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (65)$$

Em particular, as ondas TS são dadas por:

$$u^{TS} = A\phi'(y)e^{i\alpha(x-ct)} + cc, \quad (66)$$

$$v^{TS} = -i\alpha A\phi e^{i\alpha(x-ct)} + cc, \quad (67)$$

no qual $\phi(y)$ é uma solução neutra, $c = c_r$, da equação de Orr-Sommerfeld Eq. (40) e A é a amplitude complexa da onda, cc denota o complexo-conjugado da expressão anterior. É conveniente mudar de coordenada $\tilde{x} = x - ct$, $\mathbf{u}(t, \tilde{x}, y, z) \equiv \mathbf{u}(t, x - ct, y, z)$, de modo que $\partial/\partial x \equiv \partial/\partial \tilde{x}$ e $\partial/\partial t \equiv \partial/\partial t - c\partial/\partial \tilde{x}$. As equações ficam

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} + (U - c + A\phi'(y)e^{i\alpha\tilde{x}} + cc) \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \\
& (-i\alpha A\phi e^{i\alpha\tilde{x}} + cc) \frac{\partial u}{\partial y} + u(i\alpha A\phi'(y)e^{i\alpha\tilde{x}} + cc) + \\
& v(U' + A\phi''(y)e^{i\alpha\tilde{x}} + cc) = -\frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{R}\Delta u, \tag{68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v}{\partial t} + (U - c + A\phi'(y)e^{i\alpha\tilde{x}} + cc) \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \\
& (-i\alpha A\phi e^{i\alpha\tilde{x}} + cc) \frac{\partial v}{\partial y} + u(\alpha^2 A\phi e^{i\alpha\tilde{x}} + cc) + \\
& v(-i\alpha A\phi' e^{i\alpha\tilde{x}} + cc) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R}\Delta v, \tag{69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w}{\partial t} + (U - c + A\phi'(y)e^{i\alpha\tilde{x}} + cc) \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}} + \\
& (-i\alpha A\phi e^{i\alpha\tilde{x}} + cc) \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R}\Delta w, \tag{70}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{71}$$

Esta equação tem coeficientes periódicos na variável \tilde{x} com período $2\pi/\alpha$, e nas variáveis t e z ela tem coeficientes constantes. Usando a teoria de Floquet, procuraremos uma solução que, na variável \tilde{x} , seja o produto de uma função periódica em \tilde{x} vezes uma

exponencial em \tilde{x} . Portanto procuramos soluções da forma

$$\mathbf{u}(t, \tilde{x}, y, z) = e^{\lambda t} e^{\mu \tilde{x}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\mathbf{u}}_m(y) e^{im\alpha \tilde{x}} \right) e^{i\beta z}, \quad (72)$$

no qual $\mu = \mu_r + i\mu_i$ é o expoente característico e $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$. Aqui há que se escolher entre o desenvolvimento espacial ou temporal da instabilidade secundária. Pode-se escolher λ e então determinar μ através da teoria de Floquet ou pode-se escolher μ e então procurar λ que contemple a escolha feita para μ . De fato, detre os quatro parâmetros reais, há que se escolher dois. Aqui, prossegue-se no estudo do desenvolvimento temporal impondo que $\mu_r = 0$. Além disto, sem perda de generalidade, a escolha de μ_i pode ser restrita ao intervalo $-\alpha/2 < \mu_i \leq \alpha/2$; outros valores de μ_i são reduzidos a este intervalo redefinindo os índices do somatório em m . Os casos $\mu_i = 0$ e $\mu_i = \alpha/2$ são chamados de *fundamental* e de *sub-harmônico* respectivamente; outros valores de μ_i e são chamados de *dissonantes*.

Ao substituir a Eq. (72) em Eqs. (68-71) tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m \hat{u}_m + U' \hat{v}_m + i\alpha \hat{p}_m = \\ A(-i\alpha_m \phi' + i\alpha \phi D) \hat{u}_{m-1} - A\phi'' \hat{v}_{m-1} + \\ \bar{A}(-i\alpha_m \bar{\phi}' + i\alpha \bar{\phi} D) \hat{u}_{m-1} - \bar{A}\bar{\phi}'' \hat{v}_{m+1}, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m \hat{v}_m + D\hat{p}_m = \\ A(-i\alpha_{m-2} \phi' + i\alpha \phi D) \hat{v}_{m-1} - A\alpha^2 \phi \hat{u}_{m-1} + \\ \bar{A}(i\alpha_m \bar{\phi}' - i\alpha \bar{\phi} D) \hat{v}_{m+1} - \bar{A}\alpha^2 \bar{\phi} \hat{u}_{m+1}, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m \hat{w}_m + i\beta \hat{p}_m = A(-i\alpha_{m-1} \phi' + i\alpha \phi D) \hat{w}_{m-1} + \\ \bar{A}(-i\alpha_{m+1} \bar{\phi}' - i\alpha \bar{\phi} D) \hat{w}_{m+1}, \end{aligned} \quad (75)$$

$$i\alpha_m \hat{u}_m + D\hat{v}_m + i\beta \hat{w}_m = 0, \quad (76)$$

na qual $\hat{\mathbf{u}}_m = (\hat{u}_m, \hat{v}_m, \hat{w}_m)$ e

$$\mathcal{L}_m = \lambda + i\alpha_m(U - c) + \frac{1}{R}(k_m^2 - D^2), \quad (77)$$

$$\alpha_m = m\alpha + \mu_i, \quad (78)$$

$$k_m^2 = (m\alpha)^2 + \beta^2. \quad (79)$$

A dificuldade associada a estas equações é o número infinito de elementos na série de Fourier em $\hat{\mathbf{u}}_m$. Faz-se necessário truncar a série considerando apenas os $\hat{\mathbf{u}}_m$ com $|m| < N$ para algum inteiro N . Então, fixado μ_i , β e A , procura-se um auto-valor λ para o qual esta equação possua solução não-trivial. Interessante é notar que consegue-se bons resultados mesmo utilizando fortes truncamentos da série, por exemplo, tomando $N = 2$. No caso do escoamento de Poiseuille a análise de estabilidade desta equações pode ser encontrada nas referências [13] e [7]. Para escoamentos paralelos, a instabilidade secundária aparece quando a onda TS representa aproximadamente 1% do escoamento paralelo, então, surgem instabilidades secundárias tri-dimensionais, $\beta \neq 0$, que rapidamente alcançam a amplitude da onda TS deformando o escoamento.

0.3.5 Escoamento Laminar Periódico

Um exemplo interessante de escoamento é encontrado variando periodicamente o gradiente de pressão do escoamento Poiseuille. O resultado é um escoamento laminar periódico cujas propriedades podem ser estudadas pela teoria de Floquet. Pode-se tomar o gradiente de pressão como sendo

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{2}{R}(1 + \epsilon \cos \Omega t), \quad (80)$$

e o escoamento laminar correspondente é dado por $\mathbf{U} = (u(y, t), 0, 0)$ com

$$u(y, t) = (1 - y^2) - \frac{2\epsilon}{R} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\Omega t}}{i\Omega} \left(1 - \frac{\cosh(e^{i\pi/4} y / \delta)}{\cosh(e^{i\pi/4} / \delta)} \right) \right), \quad (81)$$

no qual $\operatorname{Re}(\cdot)$ é a parte real da expressão e $\delta = 1/\sqrt{R\Omega}$. O parâmetro δ representa a espessura da camada viscosa que, neste caso, é chamada de camada de Stokes porque envolve a frequência de oscilação. Este escoamento foi estudado por Kerczek [8] que analisou a curva de estabilidade marginal. Como o teorema de Squire também é válido neste caso, sua estabilidade pode ser comparada com a do escoamento de Poiseuille. Para valores moderados da frequência Ω , o escoamento oscilatório é mais estável (Reynolds crítico maior) que o escoamento de Poiseuille, para valores pequenos ou muito alto de Ω , o escoamento periódico é um pouco mais instável.

0.4 Transientes em Escoamentos Cisalhantes

Experimentalmente observa-se que escoamentos laminares, especialmente os cisalhantes, apresentam uma instabilidades para números de Reynolds abaixo do esperado, isto é, em regiões em que o escoamento é linearmente estável. Isto se deve a presença de ruídos no escoamento pois, apesar de linearmente estável, a estabilidade requer um nível de ruído muito pequeno, às vezes proibitivamente pequeno para a situação experimental. A transição ocorre porque existem perturbações que levam o escoamento a um regime não-linear, invalidando assim a análise de estabilidade linear. Isto se dá através do crescimento transiente da perturbação o qual desperta efeitos não-lineares. Quando este tipo de transição ocorre ela é chamada de *by-pass transition* (BT).

Há basicamente dois tipos de mecanismos que permitem o crescimento transiente de perturbações em escoamentos cisalhantes: o *transporte escalar* e o mecanismo de *onda inclinante*. Estes mecanismos estão relacionados à transformação de Squire. Frequentemente

ambos mecanismos aparecem no escoamento, esta combinação permite que o escoamento apresente a BT.

O transporte escalar é exemplificado em soluções da ENS em escoamentos paralelos que não dependam da direção x . Tome, por exemplo, a perturbação de um escoamento paralelo $\tilde{\mathbf{u}}(t, y, z) = \mathbf{U}(y) + \mathbf{u}(t, y, z)$ que dependa apenas de y e z , a ENS fica:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \frac{1}{R} \Delta \tilde{u}, \quad (82)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta \tilde{v}, \quad (83)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{R} \Delta \tilde{w}, \quad (84)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0. \quad (85)$$

Note que as Eq. (83-85) representam um escoamento bi-dimensional no plano (y, z) independente da componente \tilde{u} da velocidade. Agora, da Eq. (82) representa uma equação de transporte-difusão da componente \tilde{u} como se fosse uma substância transportada passivamente pelo fluido. Este transporte pode, por exemplo, ocorrer ao longo da vertical ou em um movimento circular de modo que o perfil paralelo original $U(y)$ pode ser levantado (ou abaixado) na direção y ou inclinado pela rotação. De qualquer modo, o transporte de $U(y)$ se dá pelo fato de que, no escoamento bi-dimensional, há uma componente da vorticidade na direção x : $\tilde{\omega}_x = \partial \tilde{w} / \partial y - \partial \tilde{v} / \partial z$.

Este mecanismo também está presente na ENS linearizada. Como exemplo, considere o perfil paralelo de Couette $\mathbf{U}(y) = (y, 0, 0)$ nas Eqs. (14-17). Por simplicidade, suponha que não haja fronteiras e que a perturbação seja periódica nas três direções x, y e z . O efeito de “levantamento” (*lift-up*) pode ser iniciado com uma perturbação $\mathbf{u}(0, x, y, z) = (0, a \text{ sen}(\beta z), 0)$. As equações para $\mathbf{u}(t, z) = (u(t, z), v(t, z), 0)$ são

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v = \frac{1}{R}\Delta u, \quad (86)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{R}\Delta v, \quad (87)$$

cuja solução é

$$\mathbf{u} = (-ate^{-\beta^2 t/R} \text{sen}(\beta z), ae^{-\beta^2 t/R} \text{sen}(\beta z), 0). \quad (88)$$

O crescimento transiente dado pelo termo $te^{-\beta^2 t/R}$ reflete o transporte vertical da velocidade na direção x .

O outro mecanismo de amplificação transiente se dá através do mecanismo de onda inclinante. Uma perturbação bi-dimensional pode produzir um crescimento transiente dependendo da distribuição da vorticidade em relação ao cisalhamento, neste caso o cisalhamento não é mais um simples transporte passivo. Para exemplificar-lo, considere novamente as Eqs. (14-17), com o escoamento $\mathbf{U}(y) = (y, 0, 0)$ num domínio periódico, e uma perturbação dada por $\mathbf{u}(t^*, x, y) = (t^*a, a, 0)e^{i\alpha(x-t_0y)}$ no instante $t = t^*$. A vorticidade na direção z , $\omega_z(t, x, y)$ satisfaz

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + y \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{R}\Delta \omega_z, \quad (89)$$

a qual tem solução $\omega_z = Ce^{i\alpha(x-ty)}e^{-\alpha^2(t+t^3/3)/R}$. Obtém-se que a velocidade correspondente é

$$\mathbf{u}(t, x, y) = (ta, a, 0)e^{i\alpha(x-ty)}e^{-\alpha^2(t+t^3/3)/R} \frac{1}{1+t^2}. \quad (90)$$

A energia máxima da perturbação é atingida próximo ao instante $t = 0$, portanto a amplificação máxima da perturbação inicial será obtida quando o parâmetro t^* for negativo. O gráfico da função $f(t) = e^{-c(t+t^3/3)}/(1+t^2)$ é ilustrado na Fig. 3. Esta solução repre-

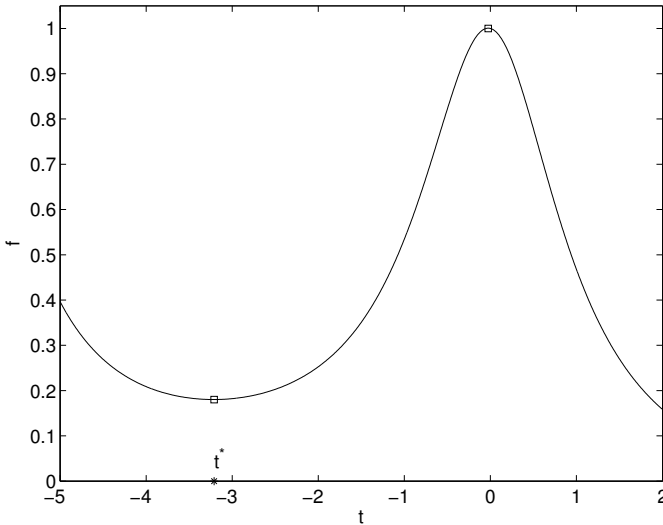


Figura 3: Gráfico da função $f(t) = e^{-c(t+t^3/3)}/(1+t^2)$, com $c = 0,05$ e tomando $t^* = -3,2$ tem-se um fator de amplificação aproximadamente 5 vezes o valor inicial. Quanto menor for $c > 0$ maior será a amplificação.

senta uma onda-plana com vetor de onda dependente do tempo, tais soluções serão estudadas em detalhe na sec. 0.5.3.

Uma combinação dos dois tipos de crescimento transiente são encontrados no caso de ondas oblíquas ao escoamento. O teorema de Squire garante que as perturbações bi-dimensionais são mais instáveis no comportamento assintótico $t \rightarrow +\infty$. Além disto, a transformação de Squire pode ser usada para caracterizar os dois mecanismos de crescimento transiente de uma perturbação oblíqua. Considere uma solução oblíqua geral da ENS da forma $\tilde{\mathbf{u}}(t, y, x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta)$ (esta forma inclui os modos normais usados no teorema de Squire). Introduz-se a mudança de variáveis na ENS de (x, y, z) para (x', y, z') dada por

$$x' = x \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta, \quad (91)$$

$$z' = -x \operatorname{sen} \theta + z \cos \theta. \quad (92)$$

As componentes da velocidade também são transformadas da mesma forma

$$\tilde{u}' = \tilde{u} \cos \theta + \tilde{w} \operatorname{sen} \theta, \quad (93)$$

$$\tilde{w}' = -\tilde{u} \operatorname{sen} \theta + \tilde{w} \cos \theta. \quad (94)$$

As equações que descrevem a perturbação nas novas coordenadas ficam

$$\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial t} + \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial x'} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}'}{x'} + \frac{1}{R} \Delta' \tilde{u}', \quad (95)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x'} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta' \tilde{v}, \quad (96)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}'}{\partial t} + \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial x'} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial y} = \frac{1}{R} \Delta' \tilde{w}', \quad (97)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial x'} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0. \quad (98)$$

Portanto um escoamento oblíquo é equivalente a um escoamento bi-dimensional no plano (x', y) , dado pelas Eqs. (95-96) e (98), e uma equação de transporte para a componente \tilde{w}' da velocidade, dado pela Eq. (97). Desta forma, uma perturbação oblíqua de um escoamento paralelo,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(t, y, x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta) = \\ (U(y), 0, 0) + \mathbf{u}(t, y, x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta), \end{aligned}$$

é reescrito nas novas coordenadas como

$$\tilde{\mathbf{u}}'(t, y, x') = (U(y) \cos \theta, 0, -U(y) \sin \theta) + \mathbf{u}'(t, y, x').$$

Deste modo, o escoamento laminar bi-dimensional no plano li-
nebreak[2] (x', y) é dado por $U(y) \cos \theta$ enquanto a componente da
velocidade na direção z' , $-U(y) \sin \theta$, é transportada passivamente
como um escalar. Isto mostra que perturbação oblíqua apresenta
os dois mecanismos de crescimento transiente e que a contribuição
de cada mecanismo depende do ângulo θ . Apesar da Eq. (97) não
influenciar nas Eqs. (95-96), a configuração espacial de \tilde{w}' é muito
importante para a estabilidade não-linear tri-dimensional do fluido
quando há várias perturbações superpostas.

0.5 Perturbações Localizadas de Alta-Freqüência

Perturbações localizadas têm sido usadas recentemente para es-
tudiar a estabilidade de diversos escoamentos. Dentre as vantagens
em utilizar este tipo de análise estão: permitir o estudo de escoam-
entos laminares em geometrias complicadas, obter a estabilidade
de perturbações de alta-freqüência, e obter critérios de estabilidade
baseado apenas na forma local das linhas de corrente. Além disto,
existe uma simplicidade matemática nas equações que permite que
a análise seja feita com baixo custo computacional.

Uma perturbação localizada de alta-freqüência é expressa mate-
maticamente pelo produto de um *envelope* $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ e de uma função
oscilatória $e^{i\theta(\mathbf{x}, t)/\epsilon}$ que varia rapidamente com sua *fase* $\theta(\mathbf{x}, t)$. A
teoria de perturbações localizadas é uma teoria assintótica que con-
sidera o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Deste modo, a oscilação de $e^{i\theta(\mathbf{x}, t)/\epsilon}$ é mais
rápida do que a variação do envelope $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, isto é, as derivadas de
 $e^{i\theta(\mathbf{x}, t)/\epsilon}$ são maiores que as derivadas de $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. A *localização* da
perturbação em torno de um ponto \mathbf{x}_0 se dá quando, inicialmente,
o envelope $\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0)$ vai a zero ao se afastar de x_0 . Uma forma de
localização é exigir que $\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0)$ valha zero fora de um raio r_0 , isto
é, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) = 0$ quando $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| > r_0$. Outra forma de localização é
permitir que $\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0)$ tenda a zero rapidamente ao se afastar de \mathbf{x}_0 ,
por exemplo, exigindo que $\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0)$ seja limitado pelo perfil de uma

função gaussiana: $|\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0)| \leq C \exp(-k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$. A perturbação localizada é transportada pelo escoamento de modo que a evolução espacial do envelope move-se com o fluido.

Há dois modos de deduzir as equações de evolução para perturbações localizadas: utilizando soluções de ondas-planas, explicado na sec. 0.5.1, ou utilizando o método assintótico da ótica-geométrica, explicado na sec. 0.5.4.

0.5.1 Soluções de Ondas-Planas

As soluções de ondas-planas são soluções exatas da ENS quando o escoamento laminar possui gradiente constante nas componentes espaciais. O escoamento laminar é dado por

$$\mathbf{U} = S(t)\mathbf{x}, \quad (99)$$

no qual $S(t)$ é uma matriz 3×3 com $\text{tr} S(t) = 0$ e os elementos de $S(t)$ podem depender do tempo. Procura-se perturbações com a seguinte forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k}(t)\cdot\mathbf{x}} + cc, \quad (100)$$

no qual cc indica o complexo conjugado da expressão anterior, e a perturbação da pressão tem a forma

$$p(\mathbf{x}, t) = P(t)e^{i\mathbf{k}(t)\cdot\mathbf{x}} + cc. \quad (101)$$

Dada qualquer matriz $S(t)$ é possível encontrar equações para $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{k}(t)$ e $P(t)$, tal que $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ seja uma solução exata da ENS. Substituindo $\tilde{\mathbf{u}} = S(t)\mathbf{x} + \mathbf{A}(t)e^{i\mathbf{k}(t)\cdot\mathbf{x}} + cc$ na ENS, Eq. (2-3), encontra-se as equações

$$\begin{aligned} bfA' + i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})\mathbf{A} + i(\mathbf{k} \cdot S\mathbf{x})\mathbf{A} + S\mathbf{A} = \\ -i\mathbf{k}P - \frac{1}{R}|\mathbf{k}|^2\mathbf{A}, \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{A}(t) = 0, \end{aligned} \quad (102)$$

para todo t . Note que o termo não-linear $i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}$ desaparece por conta da Eq. (102). Agora, igualando os termos que dependem de \mathbf{x} na Eq. (102) tem-se

$$\mathbf{k}' = -S^t \mathbf{k}, \quad (103)$$

no qual a condição inicial $\mathbf{k}(0)$ é dada. Tomando o produto interno de $\mathbf{k}(t)$ com os termos que sobraram na equação (102), encontra-se uma equação para a pressão

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}' + \mathbf{k} \cdot S\mathbf{A} = -i|\mathbf{k}|^2 P, \quad (104)$$

e derivando a Eq. (102) com respeito a t e usando Eq. (103) tem-se

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}' = -\mathbf{k}' \cdot \mathbf{A} = \mathbf{k} \cdot S\mathbf{A}, \quad (105)$$

e a pressão fica $-iP = 2\mathbf{k} \cdot S\mathbf{A}/|\mathbf{k}|^2$. Portanto a equação para a amplitude fica

$$\mathbf{A}' = \left(2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^t}{|\mathbf{k}|^2} - I \right) S\mathbf{A} - \frac{1}{R} |\mathbf{k}|^2 \mathbf{A}, \quad (106)$$

na qual a condição inicial deve satisfazer $\mathbf{k}(0) \cdot \mathbf{A}(0) = 0$. Portanto uma perturbação inicial na forma de onda-plana continua a evoluir como uma onda-plana na qual $\mathbf{k}(t)$ é dado por Eq. (103) e $\mathbf{A}(t)$ é dado por Eq. (106). Esta solução de onda-plana é válida quando o ∇U for constante com respeito às variáveis espaciais.

Qualquer escoamento laminar suave pode ser aproximado localmente por um escoamento com gradiente constante como na Eq. (99). Para tanto, tome $\mathbf{U}_g(\mathbf{x}_g, t)$ como sendo o escoamento laminar suave global; este pode ser um escoamento ao redor de um aerofólio, cilindro, e pode depender do tempo de forma não-periódica. Este escoamento possui uma linha de corrente $\tilde{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0)$, tal que $\tilde{\mathbf{x}}(0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, no qual \mathbf{x}_0 é um ponto no interior do fluido (isto é, não pertencente à fronteira). Localmente, o escoamento global pode ser aproximado por um escoamento linear nas variáveis espaciais, isto é dado pela expansão em Taylor

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_g(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0), t) &\approx \mathbf{U}_g(\tilde{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0), t) + \\ &\nabla \mathbf{U}_g(\tilde{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0), t)(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0)). \end{aligned} \quad (107)$$

Com isto, pode-se imaginar que a onda-plana é uma perturbação localizada em torno de uma linha de corrente $\tilde{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0)$ e, deste modo, o escoamento laminar ao redor da onda-plana é dado por $\nabla \mathbf{U}_g(\tilde{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0), t)(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0))$. Portanto, tomando

$$S(t) = \nabla \mathbf{U}_g(\tilde{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0), t),$$

as equações Eqs. (103-106) definem a evolução de uma perturbação de onda-plana localizada nas proximidades da linha de corrente $\tilde{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0)$.

Uma superposição de ondas-planas também pode ser utilizada como solução local da ENS linearizada, sendo que a superposição pode ser contínua através de uma integral. Chega-se então a uma forma muito similar à transformada de Fourier em que, por exemplo, a perturbação é dada por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{A}(t; \xi) e^{i\mathbf{k}(t; \xi) \cdot \mathbf{x}} d\xi, \quad (108)$$

e $\mathbf{k}(t; \xi)$ e $\mathbf{A}(t; \xi)$ evoluem no tempo segundo as Eqs. (103-106). A condição inicial destas equações é dada pela forma inicial da perturbação

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \int \mathbf{A}(0; \xi) e^{i\mathbf{k}(0; \xi) \cdot \mathbf{x}} d\xi. \quad (109)$$

0.5.2 Ondas-Planas e Instabilidade Elíptica

Vórtices elípticos aparecem naturalmente como uma perturbação de vórtices circulares. Qualquer vórtice circular bi-dimensional transportado por um escoamento cisalhante adquire uma forma aproximadamente elíptica. Isto sempre acontece, por exemplo, num par

de vórtices pois a presença de um vórtice deforma o campo de velocidades do seu vizinho. Descobriu-se um fato universal, que vórtices elípticos bi-dimensionais são instáveis a perturbações de alta-freqüência tri-dimensionais quando a viscosidade do escoamento é pequena. Esta descoberta foi motivada pelo estudo de escoamentos atmosféricos [11] pois estes escoamentos têm viscosidade desprezível e são, em grande parte, bi-dimensionais. No entanto, reproduzir vórtices bi-dimensionais com baixa viscosidade em laboratório é difícil pois observou-se que eles facilmente apresentam instabilidades tri-dimensionais. A instabilidade elíptica admite uma formulação em termos de soluções de ondas-planas como descrito por Bayly [2].

Para estudar a instabilidade elíptica, o modelo para o escoamento no centro do vórtice é dado por

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma - \mu & 0 \\ \gamma - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (110)$$

no qual γ controla a taxa de rotação do escoamento e μ a taxa de cisalhamento. A função corrente deste escoamento é dada por

$$\psi(x, y) = -(\gamma - \mu)x^2 - (\gamma + \mu)y^2, \quad (111)$$

e a vorticidade na direção z é constante igual a 2γ . Note que o eixo maior da elipse se encontra na direção x , e que no caso limite $\gamma = \mu$ tem-se um escoamento cisalhante. O escoamento cisalhante será tratado na seção seguinte. A Eq. (103) para $\mathbf{k}(t)$ pode ser resolvida de forma explícita,

$$\mathbf{k}(t) = [k_x(t), k_y(t), k_z(t)]^t = k_0 [\sin \theta \cos \Omega(t - s), \alpha \sin \theta \sin \Omega(t - s), \cos \theta]^t, \quad (112)$$

no qual $\Omega = \sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = \mu/\gamma$, $\alpha = \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$, e s e θ são números reais arbitrários. Note que $\mathbf{k}(t)$ tem período $P = 2\pi/\Omega$ e que a componente k_z é sempre constante enquanto $[k_x(t), k_y(t)]$ descreve uma elipse. A elipse descrita por $[k_x(t), k_y(t)]$ tem a mesma

excentricidade das linhas de corrente do escoamento porém estão viradas de 90° . Uma vez encontrado $\mathbf{k}(t)$, a Eq. (106) é resolvida usando a teoria de Floquet. O número de parâmetros desta equação pode ser reduzido dividindo-a por γ , modificando a escala no tempo para $T = \gamma t$ e redefinindo a viscosidade como sendo $\nu = k_0^2/(\gamma R)$. A equação fica:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dT} = \left(2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^t}{|\mathbf{k}|^2} - I \right) \tilde{S}\mathbf{A} - \nu |\mathbf{k}|^2 \mathbf{A}, \quad (113)$$

no qual $\tilde{S} = S/\gamma$. Só é necessário resolver Eq. (113) para o caso $s = 0$ pois os coeficientes são periódicos, deste modo, os parâmetros desta equação são ν , β , θ . A solução é uma combinação linear de três modos de Floquet

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{n=1}^3 \mathbf{p}_n(t) e^{\sigma_n t}. \quad (114)$$

Pode-se ordenar os expoentes de forma que $Re(\sigma_1) \geq Re(\sigma_2) \geq Re(\sigma_3)$. É necessário efetuar integração numérica da equação (113) de modo a encontrar estes expoentes. Para a estabilidade da solução, é necessário estudar como $Re(\sigma_1)$ depende dos parâmetros θ , β e ν . Para tanto definimos

$$\rho(\beta, \nu) = \max_{0 \leq \theta \leq \pi/2} Re(\sigma_1(\theta, \beta, \nu)), \quad (115)$$

como sendo o crescimento exponencial mais instável. Pode-se denotar também $\theta(\beta, \nu)$ como sendo o ângulo que atinge este valor máximo. A Fig. 4 mostra no plano (β, ν) a região de estabilidade, $\rho(\beta, \nu) < 0$, a região de instabilidade, $\rho(\beta, \nu) > 0$, e a curva neutra $\rho(\beta, \nu) = 0$ (esta figura foi originalmente descrita por Landman e Saffman [9]). Note que, com $\nu = 0$, existe instabilidade para qualquer valor do parâmetro $\beta > 0$. Em particular, no limite de pequena excentricidade, $\beta \rightarrow 0$, é possível mostrar que $\theta(\beta, 0) \rightarrow \pi/3$. Isto é, a primeira instabilidade a aparecer é tri-dimensional.

A Fig. 5 mostra que há algo especial na solução da Eq. (113) quando $\theta = \pi/3$, $\nu = 0$ e $\beta = 0$. Quando examinamos o modo de

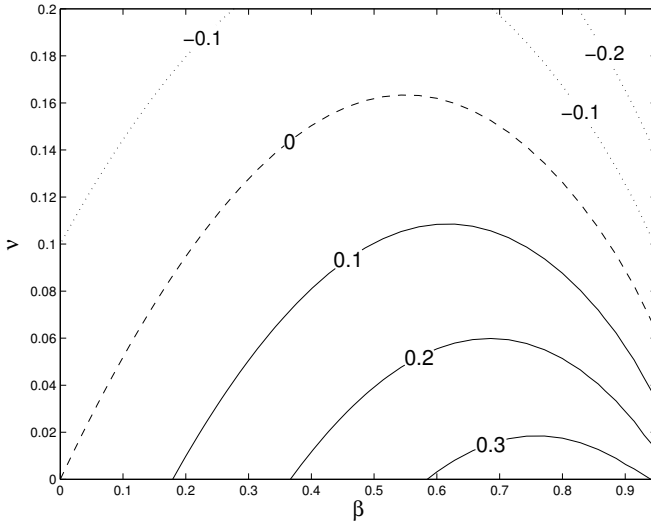


Figura 4: Região de estabilidade e instabilidade da Eq. (113) no plano (β, ν) . As curvas de nível da função $\rho(\beta, \nu)$ estão indicadas com seu respectivo valor, a curva de estabilidade neutra está indicada por uma linha tracejada.

Floquet neutramente estável da Eq. (113), o vetor de velocidades $\mathbf{A}(t)$ descreve uma trajetória similar a um “8” desenhado sobre uma esfera. Esta trajetória fecha perfeitamente produzindo uma solução periódica de período P . Note que, em média, o vetor $(A_x(t), A_y(t))$ aponta numa determinada direção do plano xy . A instabilidade surge quando há um pouco de excentricidade como mostrado na Fig. 7, na qual $\beta = 0.05$. O módulo do vetor velocidade cresce, mas sua direção continua aproximadamente a mesma do caso $\beta = 0$. O mecanismo físico desta instabilidade é explicado pelo fenômeno de *esticamento de vórtice* (*vortex stretching*). Pode ser mostrado que o vetor da vorticidade, dado por $\mathbf{k} \times \mathbf{A}$, aponta primariamente na direção onde há o esticamento de vórtices [15] e que, portanto, a vorticidade é amplificada. Em contraste, se o ângulo $\theta = \pi/3$ for perturbado tomando $\theta = \pi/2.9$, o modo de Floquet neutramente estável circula por toda a esfera como pode ser visto na Fig. 6 com $\nu = 0$ e $\beta = 0$. Neste caso, se houver excentricidade, a quantidade de esticamento é compensada

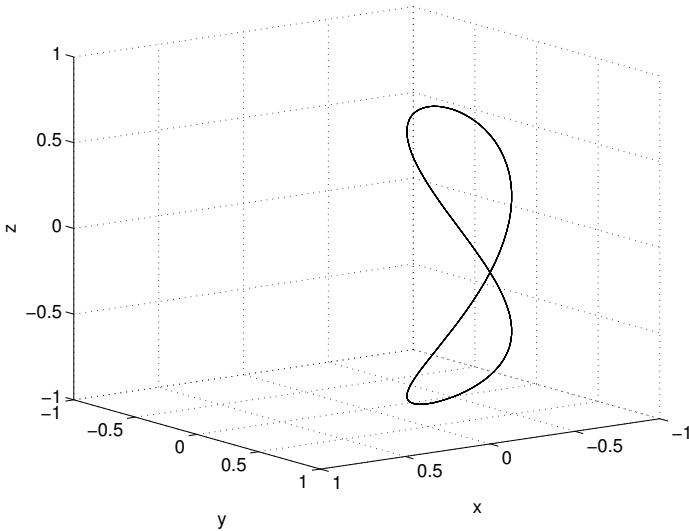


Figura 5: Curva tri-dimensional formada pelas três componentes $(A_x(t), A_y(t), A_z(t))$ da solução da Eq. (113) com $\theta = \pi/3$, $\nu = 0$, $\beta = 0$.

por algum “encolhimento” da vorticidade e a instabilidade não é tão intensa quanto no caso $\theta = \pi/3$ (a direção na qual há encolhimento de vórtices é ortogonal à direção de esticamento).

A presença de viscosidade é claramente estabilizante para a equação, note que na Fig. 4, sempre há estabilidade se a viscosidade for grande o suficiente. De fato, pode-se “fatorar” o efeito da viscosidade usando um fator integrante na Eq. (113), isto é, procurando uma solução da forma

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{B}(t) \exp\left(-\nu \int_0^t |\mathbf{k}(t)|^2 dt\right), \quad (116)$$

encontra-se a equação

$$\frac{d\mathbf{B}}{dT} = \left(2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^t}{|\mathbf{k}|^2} - I\right) \tilde{S}\mathbf{B}, \quad (117)$$

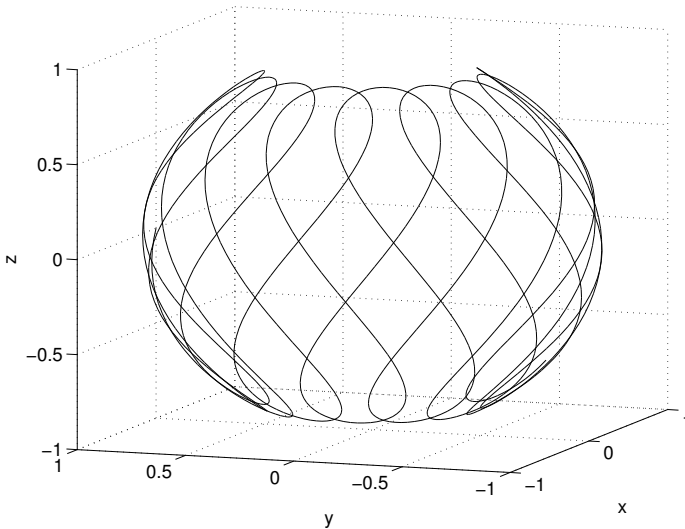


Figura 6: Curva tri-dimensional formada pelas três componentes $(A_x(t), A_y(t), A_z(t))$ da solução da Eq. (113) com $\theta = \pi/2.9$, $\nu = 0$, $\beta = 0$.

que é a equação sem viscosidade. Note que esta equação depende apenas dos parâmetros β e θ . Separadamente, pode-se levar em conta a taxa de decaimento médio provocado pela viscosidade que é dada por

$$-\frac{\nu}{P} \int_0^P |\mathbf{k}(t)|^2 dt = -\nu k_0^2 \left(1 + \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)\text{sen}^2\theta \right). \quad (118)$$

Portanto, a taxa de crescimento da perturbação é dada pela taxa de crescimento sem viscosidade subtraída da taxa de decaimento viscoso.

É interessante notar que, na curva neutra $\rho = 0$, existe uma quantidade contínua de modos neutros de Floquet, isto porque há um modo neutro $A(t-s)$ para cada s , $0 \leq s < P$. Uma superposição

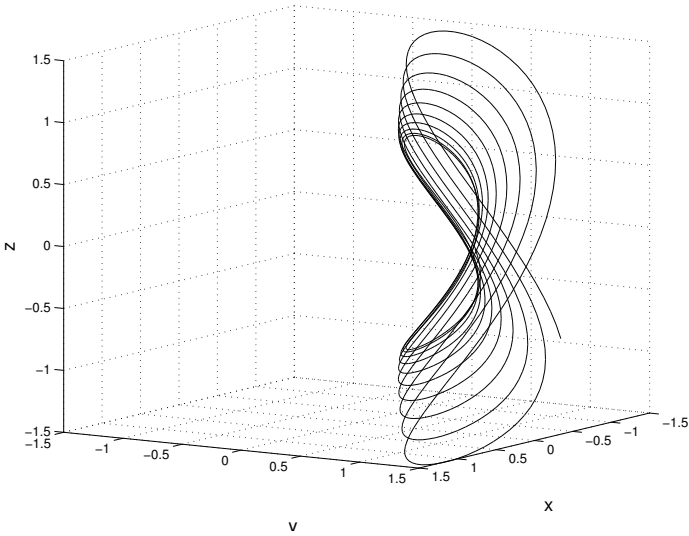


Figura 7: Curva tri-dimensional formada pelas três componentes $(A_x(t), A_y(t), A_z(t))$ da solução da Eq. (113) com $\theta = \pi/3$, $\nu = 0$, $\beta = 0.05$.

infinita destes modos,

$$\mathbf{u}(x, t) = \int_0^P a(s) A(t-s) e^{i\mathbf{k}(t-s) \cdot \mathbf{x}} ds, \quad (119)$$

é uma solução da ENS linearizada. A função $a(s)$ é arbitrária e, no caso particular em que $a(s) = 1$, isto dá uma solução estacionária da ENS linearizada conhecida como onda de Kelvin, ela representa a média de todas as ondas-planas neutramente estáveis.

0.5.3 Ondas-Planas em Escoamentos Cisalhantes

O crescimento transiente produzido pela dinâmica linear é um dos fatores importantes para transição para turbulência do tipo BT em escoamentos cisalhantes. Os mecanismos de crescimento transi-

ente para estes escoamentos são uma combinação do mecanismo do transporte escalar e do mecanismo de onda inclinante (como descritos na sec. 0.4). Em qualquer escoamento cisalhante, perturbações localizadas de alta-freqüência apresentarão estes mesmos mecanismos de crescimento transiente. O crescimento transiente localizado pode ser quantificado de forma universal para qualquer escoamento cisalhante. Para tanto, basta aproximar localmente o escoamento base por um escoamento com gradiente constante sobreposto a perturbações na forma de ondas-planas (sec. 0.5.1). A seguir, a intensidade e as escalas espaciais do crescimento transiente encontram-se calculadas para os dois tipos de mecanismos. Há três tipos de ondas envolvidas no processo de crescimento transiente: as ondas bi-dimensionais (x, y) que são chamadas de *ondas- α bi-dimensionais*; as ondas bi-dimensionais (x, z) que são chamadas de *ondas- β* ; e as ondas tri-dimensionais que são chamadas de *ondas- α oblíquas*. Pode-se mostrar que a transição BT de perturbações localizadas se dá através de uma interação não-linear dos três tipos de ondas: ondas- β , ondas- α bi-dimensionais, e ondas- α oblíquas. Usando uma combinação destes três tipos de ondas é possível construir um processo auto-sustentado com pequena amplitude, isto é, uma pequena perturbação inicial cuja evolução não decai a zero nem cresce demasiadamente. Os mecanismos para BT em perturbações localizadas são similares aos que são observado em camadas limites ou escoamentos em canais. Nos processos não-lineares que levam à TB, a existência de crescimento transiente e a interação não-linear entre os três tipos de ondas é fundamental. No entanto, não é necessário que se atinja o maior crescimento transiente para que a transição ocorra, nem é a perturbação com o maior crescimento transiente a mais instável. A classe de perturbações suficientemente instáveis para gerar a TB são aquelas em que os três tipos de ondas aparecem de forma equilibrada, no entanto, é questionável a necessidade de se calcular a perturbação mais instável porque dificilmente tal perturbação seria selecionada para ocorrer naturalmente no escoamento. Em contraste, na teoria linear, as perturbações mais instáveis são selecionadas para crescer e estas se destacam em relação às outras perturbações.

Por simplicidade, descreve-se aqui o comportamento das perturbações de ondas-planas num escoamento laminar dado por $\mathbf{U} = (y, 0, 0)$ com $R = 1$ (isto pode ser feito reescalando as dimensões espaciais e temporais da perturbação localizada). Isto equivale a

tomar

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (120)$$

na Eq. (99), no qual a perturbação inicial é da forma $\mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{A}e^{i(\alpha x + \gamma y + \beta z)}$. Para obter soluções de ondas-planas, é necessário resolver as Eqs. (103) e (106). Para Eqs. (103) encontra-se

$$\mathbf{k}(t) = (\alpha, -\alpha t + \gamma, \beta). \quad (121)$$

O vetor $\mathbf{k}(t)$ não é periódico como ocorre no caso de vórtices elípticos. Para encontrar $\mathbf{A}(t)$ deve-se distinguir dois casos: $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$. Para cada tipo será obtido o fator de amplificação, a duração do crescimento transiente bem como a taxa de decaimento assintótico. No caso $\alpha = 0$ a equação fica

$$\dot{A}_x = -A_y - (\gamma^2 + \beta^2)A_x, \quad (122)$$

$$\dot{A}_y = -(\gamma^2 + \beta^2)A_y, \quad (123)$$

$$\dot{A}_z = -(\gamma^2 + \beta^2)A_z, \quad (124)$$

cuja solução é

$$A_x(t) = (C_x - C_y t)e^{-(\gamma^2 + \beta^2)t}, \quad (125)$$

$$A_y(t) = C_y e^{-(\gamma^2 + \beta^2)t}, \quad (126)$$

$$A_z(t) = -(\gamma C_y / \beta)e^{-(\gamma^2 + \beta^2)t}, \quad (127)$$

na qual estamos supondo que $\beta \neq 0$ e a condição inicial dada por $\mathbf{A}(0) = (C_x, C_y, -\gamma C_y / \beta)$. Para $\beta = 0$, e com condição inicial dada por $\mathbf{A}(0) = (C_x, 0, C_z)$, as soluções são

$$A_x(t) = C_x e^{-\gamma^2 t}, \quad (128)$$

$$A_y(t) = 0, \quad (129)$$

$$A_z(t) = C_z e^{-\gamma^2 t}. \quad (130)$$

No caso em que $\alpha \neq 0$ as equações são

$$\dot{A}_x = \frac{2\alpha^2}{\|\mathbf{k}\|^2} A_y - A_y - \|\mathbf{k}\|^2 A_x, \quad (131)$$

$$\dot{A}_y = -\frac{2\alpha^2(t-t_0)}{\|\mathbf{k}\|^2} A_y - \|\mathbf{k}\|^2 A_y, \quad (132)$$

$$\dot{A}_z = -\frac{2\alpha\beta}{\|\mathbf{k}\|^2} A_y - \|\mathbf{k}\|^2 A_z, \quad (133)$$

com solução

$$\begin{aligned} A_x(t) = & \left[-\frac{\beta^2 D_y}{\alpha \tilde{\alpha}} \left(\arctan \left\{ \frac{\alpha(t-t_0)}{\tilde{\alpha}} \right\} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\tilde{\alpha}\alpha(t-t_0)}{\tilde{\alpha}^2 + \alpha^2(t-t_0)^2} \right) - \frac{\tilde{\alpha}^2(t-t_0)D_y}{\tilde{\alpha}^2 + \alpha^2(t-t_0)^2} - \frac{\beta D_z}{\alpha} \right] \\ & e^{-\tilde{\alpha}^2(t-t_0) - \alpha^2(t-t_0)^3/3}, \end{aligned} \quad (134)$$

$$A_y(t) = \frac{\tilde{\alpha}^2 D_y}{\tilde{\alpha}^2 + \alpha^2(t-t_0)^2} e^{-\tilde{\alpha}^2(t-t_0) - \alpha^2(t-t_0)^3/3}, \quad (135)$$

$$A_z(t) = \left[\frac{\beta D_y}{\tilde{\alpha}} \left(\arctan \left\{ \frac{\alpha(t-t_0)}{\tilde{\alpha}} \right\} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{\tilde{\alpha}\alpha(t-t_0)}{\tilde{\alpha}^2 + \alpha^2(t-t_0)^2} \right) + D_z \left] e^{-\tilde{\alpha}^2(t-t_0) - \alpha^2(t-t_0)^3/3}, \quad (136)$$

no qual $\tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $t_0 = \gamma/\alpha$ e $\mathbf{A}(t_0) = (-\beta D_z/\alpha, D_y, D_z)$.

Análise do Caso $\alpha = 0$

As ondas com $\alpha = 0$ são responsáveis pelo mecanismo de crescimento transiente causado pelo transporte escalar como descrito na sec. 0.4. Refere-se a estas ondas como sendo as ondas- β . De (125-127) nota-se que estas ondas têm crescimento transiente apenas na primeira componente $A_x(t)$. A amplificação total depende da perturbação inicial $\mathbf{A}(0)$. Por exemplo, supondo que $\mathbf{A}(0) = (0, C_y, 0)$, toda a energia inicial está na componente y da velocidade a qual “levanta” o escoamento cisalhante nesta direção. Este crescimento transiente ocorre somente quanto $A_y(0) \neq 0$. No caso especial em que $\mathbf{k} = (0, \gamma, 0)$, esta componente é zero e a solução decai monotonicamente, não havendo crescimento transiente. Examinando o quadrado da amplitude de uma onda- β tem-se

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}(t)\|^2 &= (|A_y(0)t - A_x(0)|^2 + \\ &|A_y(0)|^2 + |A_z(0)|^2)e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t}. \end{aligned} \quad (137)$$

Examinando esta solução em termos da vorticidade $\mathbf{\Omega}(t) = i\mathbf{k}(t) \times A(t)$ das ondas- β , observa-se que o crescimento transiente da vorticidade se dá nas componentes y e z ,

$$\mathbf{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} \gamma A_z(0) - \alpha A_y(0) \\ \beta(A_x(0) - tA_y(0)) \\ -\gamma(A_x(0) - tA_y(0)) \end{pmatrix} e^{-(\gamma^2 + \beta^2)t}. \quad (138)$$

A componente x da vorticidade decai monotonicamente mesmo havendo crescimento transiente das outras componentes.

Análise do Caso $\alpha \neq 0$

Esta classe de ondas apresenta crescimento transiente através do mecanismo de ondas inclinantes, sec. 0.4, e são chamadas de ondas- α . Na sua forma mais geral, o vetor de onda pode ser escrito com $\mathbf{k}(t) = (\alpha, -\alpha(t - t_0), \beta)$, no qual chama-se de *deslocamento* temporal da onda o valor $t_0 = \gamma/\alpha$. É interessante notar que estas ondas possuem decaimento assintótico super-exponencial dado por $e^{-\alpha^2(t-t_0)^3/3}$, Eqs. (134-136). Portanto este termo de decaimento tem intensidade moderada dentro do intervalo de tempo da ordem $O(\alpha^{-2/3})$ centrado em torno de t_0 , fora deste intervalo, o decaimento é muito grande. Este decaimento super-exponencial ocorre por causa do efeito crescente da viscosidade quando $|\alpha(t - t_0)|$ cresce (número de onda na direção y).

Considera-se primeiro a classe de perturbações puramente bi-dimensionais dadas por $\beta = 0$. Inicialmente supondo que $A_z(t) = 0$, o quadrado da amplitude da perturbação é

$$\|\mathbf{A}(t)\|^2 = \frac{|A_y(t_0)|^2}{1 + (t - t_0)^2} e^{-\alpha^2((t-t_0)+(t-t_0)^3/3)}. \quad (139)$$

Dada uma perturbação inicialmente excitada no instante t^* com uma energia de perturbação $\|\mathbf{A}(t^*)\|^2 = E$, se $t^* \gg t_0$ então a energia decairá monotonicamente com o tempo. Da mesma forma similar, se $t^* \ll t_0$ então a energia começará decaindo e apresentará algum crescimento próximo a $t = t_0$. Da Eq. (139), pode-se encontrar o menor valor de $\|\mathbf{A}(t)\|^2$. Se a perturbação começar neste instante com uma energia E , então haverá a amplificação máxima. Pode-se obter da Eq. (139) os valores de t_i e t_f , $t_i < t_f$, tais que $\|\mathbf{A}(t_i + t_0)\|^2$ e $\|\mathbf{A}(t_f + t_0)\|^2$ sejam respectivamente o mínimo local e o máximo local da função $\|\mathbf{A}(t)\|^2$. A razão $\|\mathbf{A}(t_f + t_0)\|^2 / \|\mathbf{A}(t_i + t_0)\|^2$ é o maior fator de amplificação possível e $[t_i + t_0, t_f + t_0]$ é o intervalo de crescimento transiente. É possível obter a ordem do fator de amplificação e o tamanho deste intervalo no limite assintótico em que α^2 vai a zero. Encontra-se que $t_f - t_0 \sim -\alpha^2$, e que

$$t_i - t_0 \sim -\alpha^{-2/3}. \quad (140)$$

Obtêm-se que o maior fator de amplificação de energia é dado

por:

$$\frac{\|\mathbf{A}(t_f)\|^2}{\|\mathbf{A}(t_i)\|^2} \sim e^{2/3} \alpha^{-4/3}.$$

Para que isto ocorra, a onda deve estar inicialmente inclinada contra o sentido do cisalhamento mas não tão inclinada a ponto dos efeitos de viscosidade serem mais relevantes que a amplificação. Note que $t_i - t_0 < 0$ e que portanto o número de onda na direção y é $-\alpha(t - t_0) > 0$. A onda atinge seu máximo em $t = t_0$ quando o número de onda na direção y é zero. A perturbação perde intensidade à medida que se inclina na direção do cisalhamento.

Quando $\beta = 0$ e $A_z(t) \neq 0$ a vorticidade pode apresentar crescimento transiente na componente x

$$\mathbf{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} -\alpha(t - t_0)A_z(t_0) - \alpha A_z(t_0) \\ \Omega_z(t_0) \end{pmatrix} e^{-\alpha^2((t-t_0)+(t-t_0)^3/3)}, \quad (141)$$

este crescimento também é causado pela inclinação da onda em relação ao cisalhamento.

Ondas *oblíquas* ao escoamento são aquelas em que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Estas ondas produzem crescimento transiente por uma combinação do mecanismo de transporte escalar e de onda inclinante como discutido na sec. 0.4. Do mesmo modo, pode-se usar transformação de Squire, Eqs. (91-94), para decompor o escoamento em duas partes: um escoamento bi-dimensional no plano (x', y) (oblíquo ao cisalhamento) e o transporte da componente do cisalhamento perpendicular a este plano. A máxima amplificação é obtida combinando os dois efeitos transientes através do ângulo θ .

O escoamento bi-dimensional pode ser descrito pelas componentes $A_{\tilde{x}}(t) = (\alpha A_x(t) + \beta A_z(t))/\tilde{\alpha}$ e $A_y(t)$, de modo que encontra-se das Eqs. (131) e (133)

$$A_{\tilde{x}}(t) = -\frac{\alpha \tilde{\alpha}(t - t_0) D_y}{\tilde{\alpha}^2 + \alpha^2(t - t_0)^2} e^{-\tilde{\alpha}^2(t-t_0) - \alpha^2(t-t_0)^3/3},$$

$$(142)$$

e a componente $A_y(t)$ é igual a Eq. (132). O comportamento das componentes $(A_{\tilde{x}}(t), A_y(t))$ é similar ao do caso $\beta = 0$ se $\tilde{\alpha}/\alpha$ não for grande. Isto é, o comportamento assintótico de $t_i - t_0$ (140) não muda se $\beta \ll \alpha^{1/3}$. Portanto o intervalo de crescimento transiente da componente $(A_{\tilde{x}}(t), A_y(t))$ é aproximadamente a do caso $\beta = 0$. É interessante notar que a análise de crescimento transiente da onda oblíqua naturalmente relaciona os números de onda na direção x e z .

A contribuição do transporte escalar promove também o crescimento transiente. Isto é descrito pela componente $A_{\tilde{z}}(t) = (-\beta A_x(t) + \alpha A_z(t))/\tilde{\alpha}$ e das Eqs. (131) e (133) obtêm-se

$$A_{\tilde{z}}(t) = \left(\frac{2D_y\beta\tilde{\alpha}(t-t_0)}{\tilde{\alpha}^2 + \alpha^2(t-t_0)^2} + \frac{D_y\beta}{\alpha} \arctan \left\{ \frac{\alpha(t-t_0)}{\tilde{\alpha}} \right\} + \frac{D_z}{\alpha} \right) \exp -\tilde{\alpha}^2(t-t_0) - \frac{\alpha^2(t-t_0)^3}{3}. \quad (143)$$

Note que, comparado com $A_{\tilde{x}}(t)$ e $A_y(t)$, esta componente não decai tão rapidamente e influencia a dinâmica da perturbação por mais tempo. O termo contendo $\arctan(\alpha(t-t_0)/\tilde{\alpha})$ tenderá para uma constante ao invés de decair com $1/(t-t_0)$. Mesmo que estas perturbações possam permanecer por mais tempo, elas também terão um decaimento assintótico com a taxa $e^{-\alpha(t-t_0)^3/3}$.

0.5.4 Teoria Assintótica

A teoria assintótica de perturbações localizadas procura descrever o comportamento quando as perturbações são rapidamente oscilatórias em relação ao escoamento laminar. Esta teoria é similar à teoria assintótica da ótica geométrica na qual supõe-se que as ondas oscilam muito mais rápido do que propriedades do meio que em que elas propagam.

O escoamento laminar é uma função $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ que varia suavemente em \mathbf{x} e t (ele deve ser uma solução exata da ENS). Superpõe-se a

este escoamento uma perturbação de pequena amplitude da forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \epsilon \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) e^{i\theta(\mathbf{x}, t)/\epsilon}, \quad (144)$$

na qual $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ é um envelope localizado (isto é, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ decai rapidamente em \mathbf{x} com descrito no início da sec. 0.5). Procura-se uma solução assintótica para as Eqs. (2-3) usando a seguinte expansão

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U} + \epsilon e^{i\theta(\mathbf{x}, t)/\epsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n \mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t) + cc, \quad (145)$$

e, de forma equivalente, faz-se uma expansão para a pressão

$$\tilde{p} = P + \epsilon e^{i\theta(\mathbf{x}, t)/\epsilon} \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon^n p_n(\mathbf{x}, t) + cc, \quad (146)$$

as quais devem ser substituída nas Eqs. (2-3). A expansão pressupõe que o número de Reynolds seja alto de modo que $1/R = \nu\epsilon^2$. Desta forma, ao agrupar os termos de ordem um, $O(1)$, da Eq. (3) encontra-se a seguinte expressão

$$i \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \theta \right) \mathbf{A}_0 e^{i\theta/\epsilon} = 0, \quad (147)$$

a qual resulta em

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \theta = 0. \quad (148)$$

É conveniente introduzir a notação de *derivada material*

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla, \quad (149)$$

e reescrever a equação acima como

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0, \quad (150)$$

a qual expressa que a fase $\theta(\mathbf{x}, t)$ é transportada como um ponto material pelo escoamento. Para ver isto, deriva-se $\theta(\mathbf{x}(t), t)$ em relação a t

$$\frac{d\theta(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla\theta, \quad (151)$$

e a solução da Eq. (150) virá igualando

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{x}(t), t), \quad (152)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (153)$$

No sistema de EDOs acima, cada ponto inicial dado $\mathbf{x}(0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ descreverá uma trajetória segundo a Eq. (152), ao longo desta trajetória o valor de $\theta(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), t)$ permanecerá constante, igual a seu valor inicial $\theta(\mathbf{x}_0, t_0)$ (a Eq. (150) é o equivalente da equação eiconal da ótica geométrica). As trajetórias $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ são chamadas de *curvas características*. O número de onda local é definido por $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) = \nabla\theta(\mathbf{x}, t)$, assim, na $O(1)$ a Eq. (2) resulta em

$$i\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (154)$$

Uma equação para a evolução de $\mathbf{k}(x, t)$ é obtida derivando a Eq. (150) em relação às variáveis x , y e z , por exemplo, derivando em relação a x resulta em

$$\frac{D(\partial\theta/\partial x)}{Dt} + (\partial\mathbf{U}/\partial x) \cdot \nabla\theta = 0, \quad (155)$$

e equivalentemente para as outras variáveis. Portanto, ao longo das características, há três equações para a evolução das três componentes de $\mathbf{k}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), t)$, escrevendo na forma vetorial tem-se

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} + (\nabla\mathbf{U})^t \mathbf{k} = 0. \quad (156)$$

Note que também pode-se definir uma frequência local dada por $\Omega = \partial\theta/\partial t$. A justificativa de que \mathbf{k} e Ω são o número de onda e a frequência local segue da expansão local de Taylor, pois

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{x}, t) &\approx \theta(\mathbf{x}_0, t_0) + \\ &\mathbf{k}(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \Omega(\mathbf{x}_0, t_0)(t - t_0), \end{aligned} \quad (157)$$

de modo que as ondulações $\exp(i\theta/\epsilon)$ podem ser aproximadas localmente por uma onda plana

$$e^{i\theta(\mathbf{x}, t)} \approx e^{i\theta(\mathbf{x}_0, t_0)} e^{i(\mathbf{k}(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \Omega(\mathbf{x}_0, t_0)(t - t_0))}. \quad (158)$$

Prosseguindo para os termos de ordem $O(\epsilon)$ encontra-se

$$\left(\frac{D\mathbf{A}_0}{Dt} + \nabla\mathbf{U}\mathbf{A}_0 + i(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{A}_0 + i\mathbf{k}p_1 + \nu|\mathbf{k}|^2\mathbf{A}_0 \right) e^{i\theta/\epsilon} = 0, \quad (159)$$

no qual o termo não-linear $i(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{A}_0$ é nulo devido à equação (154), tem-se então que

$$\frac{D\mathbf{A}_0}{Dt} + \nabla\mathbf{U}\mathbf{A}_0 + i\mathbf{k}p_1 + \nu|\mathbf{k}|^2\mathbf{A}_0 = 0. \quad (160)$$

Devido à derivada material $D\mathbf{A}_0/Dt$, a Eq. (160) descreve a evolução da função \mathbf{A}_0 ao longo de curvas características e, portanto, o vetor $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0), t)$ evolui ao longo das características de acordo com equação

$$\frac{d\mathbf{A}_0}{dt} = -\nabla\mathbf{U}\mathbf{A}_0 - i\mathbf{k}p_1 - \nu|\mathbf{k}|^2\mathbf{A}_0. \quad (161)$$

Determina-se p_1 de tal modo que a Eq. (154) seja satisfeita para todo t . Derivando Eq. (154) em relação a t resulta em

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{A}_0 + \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{A}_0}{dt} = 0, \quad (162)$$

então toma-se o produto interno de \mathbf{k} com a Eq. (161) e o produto interno de \mathbf{A}_0 com a Eq. (156). Destas expressões obtêm-se que a pressão vale

$$p_1 = 2i \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{U} \mathbf{A}_0}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (163)$$

Portanto, a equação para evolução de \mathbf{A}_0 fica

$$\frac{d\mathbf{A}_0}{dt} = \left(2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^t}{|\mathbf{k}|^2} - I \right) \nabla \mathbf{U} \mathbf{A}_0 - \nu |\mathbf{k}|^2 \mathbf{A}_0. \quad (164)$$

Resumindo, o conjunto de EDOs que deve ser integrado ao longo das características é

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{x}(t), t), \quad (165)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -(\nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}(t), t))^t \mathbf{k}, \quad (166)$$

$$\frac{d\mathbf{A}_0}{dt} = \left(2 \frac{\mathbf{k}(t)\mathbf{k}(t)^t}{|\mathbf{k}(t)|^2} - I \right) \nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}(t), t) \mathbf{A}_0 - \nu |\mathbf{k}(t)|^2 \mathbf{A}_0, \quad (167)$$

com condições iniciais $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{k}(0)$ e $\mathbf{A}_0(0)$ dadas. O escoamento \mathbf{U} será instável a perturbações de alta-frequência se existir um conjunto de condições iniciais tais que a equação acima seja instável. Pode-se prosseguir o cálculo dos termos \mathbf{A}_n de ordem mais alta na série assintótica se desejado, porém a instabilidade da equação para \mathbf{A}_0

já implica na instabilidade linear do escoamento laminar. As equações acima reduzem às Eqs. (103) e (106) no caso em que $\nabla\mathbf{U}$ não depende de \mathbf{x} .

0.5.5 Considerações Sobre Perturbações Localizadas

Perturbações localizadas têm sido usadas recentemente para estudar a estabilidade de diversos escoamentos. Dentre as vantagens em utilizar este tipo de análise estão: permitir o estudo de escoamentos laminares em geometrias complicadas, obter a estabilidade de perturbações de alta-freqüência, e obter critérios de estabilidade local baseado apenas na forma da linhas de corrente. Além disto, existe uma simplicidade matemática nas equações que permite que a análise seja feita com baixo custo computacional. A teoria de perturbações localizadas também pode ser usada para obter informação sobre crescimento de transientes. Como esta é uma teoria assintótica para altas-freqüências, ela pode ser usada para completar o estudo computacional da estabilidade linear, isto porque a estabilidade linear se baseia no cálculo de auto-valores e seria dispendioso fazer discretizações espaciais muito finas para calcular o comportamento assintótico destes autovalores. Já foi demonstrado de forma rigorosa que se existir instabilidade nas Eqs. (165-167) então existirá instabilidade linear no escoamento $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, [14]. De fato, no caso da instabilidade elíptica, os auto-valores instáveis ocorrem em perturbações de alta-freqüência e portanto estas instabilidades se manifestam nas Eqs. (165-167). Não é todo escoamento laminar que necessita de uma análise de estabilidade para alta-freqüência, ela será necessária somente quando a viscosidade for suficientemente pequena (a viscosidade é sempre estabilizante para perturbações de altas-freqüências longe da fronteira). Outros aspectos interessantes das perturbações localizadas são a possibilidade de identificar transientes importantes para a BT e a possibilidade de facilmente incorporar outros fenômenos físicos às equações. Por exemplo, existem trabalhos que incorporam estratificação do fluido (densidade variável), compressibilidade, rotação, viscosidade não-newtoniana, condutividade elétrica, entre outros. Uma desvantagem das perturbações localizadas é que elas não tratam de efeitos de fronteira, a análise é válida apenas para o interior do fluido.

Referências Bibliográficas

- [1] Arnold, V.I., *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, Mir (1987).
- [2] Bayly, B. J., “Three-dimensional instability of elliptical flow,” *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2160 (1986).
- [3] Coddington, E.A., Levinson, N., *Ordinary Differential Equation*, McGraw-Hill (1955).
- [4] Craik, D. D. and Criminale, W. O., “Evolution of wavelike disturbance in shear flows: a class of exact solutions of the Navier-Stokes equation,” *Proc. R. Soc. Lond. A* **406**, 13 (1986).
- [5] Drazin, P.G., Reid, W.H., *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press (1981).
- [6] Gallaire, F., Gérard-Varet, D. and Rousset, F., “Three-Dimensional Instability of Planar Flows”, *Arch. Rational Mech. Anal.* **186**, 423 (2007).
- [7] Herbert, T., “Secondary instability of boundary layers”, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20**, 487-526.
- [8] Kerczek, C.H., “The stability of oscillatory plane Poiseuille flow”, *J. Fluid Mech.* **116**, 91-144 (1982).
- [9] Landman, M. J. and Saffman, P. G., “The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid,” *Phys. Fluids* **30**, 2339 (1987).
- [10] Lifschitz, A. and Hameiri, E., “Local stability conditions in fluid dynamics,” *Phys. Fluids A* **3**, 2644 (1991).
- [11] Pierrehumbert, R. T. “Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid,” *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2157 (1986).
- [12] Romanov, V. A., “Stability of plane-parallel Couette flow”, *Functional Anal. & Its Applies* **7**, 137-46 (1973).
- [13] Schmid, P.J., Henningson, D.S., *Stability and Transition in Shear Flows*, Springer (2001).

- [14] Vishik, M. M., Fiedlander, S., “Dynamo theory methods for hydrodynamic stability”, *J. Math. Pures Appl.* (9) **72**(2), 145-180 (1993).
- [15] Waleffe, F. A., “On the three-dimensional instability of strained vortices,” *Phys. Fluids A* **2**, 76 (1990).

Escola de Primavera em Transição e Turbulência

TURBULÊNCIA

Volume 6

Editores

Márcio Teixeira Mendonça

Marcello Augusto Faraco de Medeiros

ABCM

Rio de Janeiro

Sumário

0.1	Introdução	1
0.2	Escoamento Bifásico Gás-Líquido e Líquido-Líquido	4
0.2.1	Considerações Iniciais	4
0.2.2	Escoamento Bifásico Gás-Líquido em Tubulação	7
0.2.3	Escoamento Bifásico Líquido-Líquido em Tubulação	11
0.3	Aspectos Fundamentais da Modelagem de Escoamento Bifásico: Modelo de Dois Fluidos Unidimensional	19
0.3.1	Equações Locais Instantâneas do Escoamento Bifásico e Condições de Salto	21
0.3.2	Equações de Escoamento Bifásico Médias na Seção Transversal; Modelagem Unidimensional	28
0.3.3	Exemplo: Dedução da Equação da Quantidade de Movimento Unidimensional Média Numa Seção Para Escoamento Estratificado Óleo-Água em Regime Permanente	33
0.4	Conceitos Fundamentais da Estabilidade Hidrodinâmica em Escoamento Bifásico Paralelo	37
0.4.1	Considerações Iniciais	37
0.4.2	Conceitos Básicos da Estabilidade Hidrodinâ- mica em Escoamento Bifásico Paralelo	39

0.4.3	Classificação das Instabilidades em Escoamento Bifásico Paralelo	41
0.4.4	Exemplo: Escoamento Estratificado Horizontal em Canal Bidimensional	47
0.5	Aplicações	66
0.5.1	Análise da Estabilidade do Escoamento Líquido-Líquido Anular (<i>Core-Annular Flow</i>)	66
0.5.2	Análise da Estabilidade do Escoamento Líquido-Líquido Estratificado	80
0.6	Conclusões	89
0.7	Agradecimentos	90

Estabilidade Hidrodinâmica em Escoamento Bifásico Paralelo

Oscar M. H. Rodriguez

Escola de Engenharia de São Carlos (EESC)

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade de São Paulo (USP)

São Carlos, SP - Brasil

0.1 Introdução

Escoamentos bifásicos são observados em numerosos processos naturais e industriais, sendo compostos de duas fases imiscíveis arranjadas em diversas configurações geométricas ou padrões de escoamento. Há muitos exemplos comuns de escoamentos bifásicos, por exemplo: neblina, água fervente, fumaça, ovos mexidos, chuva, molho para salada, nuvens, creme batido, areia movediça e tempestades de areia. Quando cerveja é vertida de uma garrafa, a vazão é limitada pela velocidade das bolhas que sobem pelo gargalo num padrão de escoamento conhecido como golfadas, subseqüentemente, bolhas nucleadas por defeitos nas paredes do copo ascendem para formar a saborosa espuma na superfície. No âmbito industrial, eles

são comumente encontrados na forma de misturas: (i) gás ou líquido-sólido (alguns exemplos: leitos fluidizados borbulhantes ou circulantes, biorreatores e transporte pneumático), com aplicações comuns na indústria farmacêutica, metalúrgica e petroquímica (reações de síntese, craqueamento catalítico, reações de oxidação e redução de minérios, processos de combustão e gaseificação, transporte de material particulado e recuperação de calor); (ii) gás-líquido (colunas de bolhas, torres de resfriamento, escoamentos condensado-vapor, óleo-gás e água-gás em tubulações), com aplicações comuns na indústria petroquímica, nuclear e de refrigeração (microbiologia, caldeiras, refrigeração e ventilação industrial, reatores nucleares, produção e transporte de petróleo e gás natural); e (iii) líquido-líquido (escoamento de óleo leve ou pesado e água em tubulações, escoamento de emulsões), com aplicações comuns na indústria de alimentos e de petróleo (transporte de emulsões na indústria de alimentos, produção e transporte de petróleo). Uma boa introdução aos escoamentos bifásicos é oferecida nos seguintes livros: Kunii e Levenspiel [60], Wallis [109], Govier e Aziz [43], Ishii [53], Butterworth e Hewitt [28], Hewitt [48], Collier [32], Bergles *et al.* [17], Delhaye *et al.* [36], Hetsroni [47], Notterill [21], Howard [51] e Hewitt *et al.* [48].

A característica mais marcante dos escoamentos bifásicos é que a mistura de fluidos imiscíveis ou fases pode se apresentar em várias configurações espaciais ou padrões de escoamento. Considerando apenas misturas gás-líquido e líquido-líquido, essas podem ser agrupadas em três categorias: escoamento disperso (dispersões e emulsões), escoamento de fases separadas (estratificado e anular) e escoamento intermitente (golfadas ou pistonado). Cada padrão de escoamento tem sua própria relação de deslizamento entre as fases, isto é, sua forma particular para o cálculo da fração volumétrica in situ e da perda de pressão bifásica. Escoamento de fases separadas compreende os padrões anular e estratificado. O primeiro tem sido sugerido como uma alternativa rentável para o transporte e elevação artificial de óleos altamente viscosos, além de ser o padrão com ocorrência mais comum em sistemas de refrigeração e na produção de gás natural. O segundo como uma forma conveniente de evitar a formação de emulsões de água em óleo em oleodutos e também com uma ocorrência comum em poços de petróleo direcionais. Tais padrões de escoamento são comumente modelados como tendo fases paralelas, *i.e.*, um escoamento bifásico paralelo.

A teoria da estabilidade hidrodinâmica integra o escopo da mecânica dos fluidos clássica deste a primeira metade do século passado (H. Schlichting). Ela é capaz de levar em conta o efeito de um número de parâmetros (instabilidades) sobre a transição do regime laminar ao regime turbulento. Essa teoria tem encontrado inúmeras aplicações importantes, entre elas no projeto de aerofólios de baixo arrasto (aerofólios laminares). A partir da década de 1970 a teoria da estabilidade hidrodinâmica passou a ser aplicada com intensidade para a modelagem e previsão das fronteiras de transição de padrão de escoamento bifásico. Segundo G. B. Wallis, em alguns casos, transições de padrão de escoamento podem ser atribuídas a instabilidades que resultam da amplificação temporal de uma onda de perturbação na interface das fases. Entretanto, a formidável complexidade dos escoamentos bifásicos não permite, na maioria das vezes, a solução analítica das equações governantes gerais. Métodos numéricos (*CFD*) têm sido capazes de descrever em detalhes a física dos escoamentos bifásicos em variadas circunstâncias, mas ainda com um custo computacional relativamente elevado. Nesse contexto, a pretensão deste documento é apresentar a abordagem unidimensional para o estudo da estabilidade hidrodinâmica dos escoamentos bifásicos paralelos. A modelagem unidimensional encontra aplicação óbvia no escoamento em tubulações e permite a aplicação de um modelo de dois fluidos rigoroso.

O texto está organizado da seguinte forma. Na seção 0.2, considerações gerais são delineadas a respeito dos escoamentos bifásicos gás-líquido e líquido-líquido, como: ocorrência, padrões de escoamento e mapas de fluxo. Na seção 0.3, aspectos fundamentais da modelagem bifásica são demonstrados, incluindo a derivação das equações de transporte segundo o modelo de dois fluidos unidimensional. Conceitos básicos relativos à estabilidade hidrodinâmica em escoamento bifásico paralelo são apresentados na seção 0.4, incluído um estudo de caso: escoamento estratificado entre placas planas paralelas e infinitas. A teoria da estabilidade linear é aplicada para casos típicos e exemplos são descritos em detalhe na seção 0.5: escoamento anular líquido-líquido e escoamento estratificado em tubulações. Finalmente, temos as conclusões na seção 0.6.

0.2 Escoamento Bifásico Gás-Líquido e Líquido-Líquido

0.2.1 Considerações Iniciais

Antes de dar início ao tema específico deste estudo, alguns dos termos básicos do escoamento bifásico serão definidos. Consideram-se duas fases escoando simultaneamente em uma tubulação com área de seção transversal A . As vazões volumétricas de injeção da fase 1 e fase 2 são Q_1 e Q_2 , respectivamente. As frações volumétricas de injeção das fases são, respectivamente:

$$C_1 = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}, \quad C_2 = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}. \quad (1)$$

As velocidades superficiais da fase 1 e da fase 2 são baseadas nas vazões volumétricas de injeção e na área de seção transversal do tubo e são definidas como:

$$J_1 = \frac{Q_1}{A}, \quad J_2 = \frac{Q_2}{A}. \quad (2)$$

Combinado as Eqs. 1 e 2 é obtida a relação entre as velocidades superficiais e as frações volumétricas de injeção:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (3)$$

Em escoamento bifásico, assume-se que cada fase ocupa diferentes partes da seção transversal do tubo. A velocidade real de cada fase ou velocidade *in situ* é diferente da velocidade superficial, pois é calculada da vazão volumétrica passando por uma área menor do que a área transversal do tubo. Chamando A_1 e A_2 as áreas de seção transversal ocupadas pela fase 1 e fase 2, respectivamente, as velocidades *in situ* são dadas por:

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1}, \quad V_2 = \frac{Q_2}{A_2}. \quad (4)$$

Das Eqs. 2 e 4 segue-se que a velocidade *in situ* sempre excede a velocidade superficial para cada fase.

O *holdup* ou fração volumétrica *in situ* da fase, ϵ (média no tempo e na seção transversal em certo trecho de tubo), é freqüentemente considerada como uma grandeza local, isto é, num comprimento diferencial de tubo. Portanto, as frações volumétricas *in situ* da fase 1 e da fase 2 são definidas da seguinte forma:

$$\epsilon_1 = \frac{A_1 \delta L}{A \delta L} = \frac{A_1}{A}, \quad \epsilon_2 = \frac{A_2}{A}. \quad (5)$$

A velocidade *in situ* e a velocidade superficial de cada fase estão relacionadas à fração volumétrica *in situ* da seguinte forma:

$$V_1 = \frac{J_1}{\epsilon_1}, \quad V_2 = \frac{J_2}{\epsilon_2}. \quad (6)$$

A velocidade da mistura é definida pela divisão da vazão volumétrica total pela seção transversal do tubo:

$$J = \frac{Q_1 + Q_2}{A}, \quad (7)$$

que também é igual à soma das velocidades superficiais $J = J_1 + J_2$. Aqui, vale notar que J corresponde a uma velocidade média da mistura, ponderada pela fração volumétrica *in situ*, ou seja:

$$J = V_1 \epsilon_1 + V_2 \epsilon_2. \quad (8)$$

Quando dois fluidos escoam juntos em uma tubulação, a fração volumétrica *in situ* é geralmente diferente da fração volumétrica de injeção. Diferenças na densidade e/ou viscosidade causam uma importante característica dos escoamentos bifásicos: o deslizamento s . O deslizamento (*holdup ratio*) pode ser definido como a razão das frações volumétricas *in situ* (ϵ_2/ϵ_1) pela razão das frações volumétricas de injeção (C_2/C_1), o que é equivalente à razão das velocidades

das fases *in situ*, ou seja:

$$s = \frac{\epsilon_2/\epsilon_1}{C_2/C_1} = \frac{V_1}{V_2}. \quad (9)$$

Quando o deslizamento é maior do que a unidade a fase 2 está acumulando no tubo e a fase 1 está escoando mais rapidamente. Quando o deslizamento é menor do que a unidade a fase 1 está acumulando no tubo e a fase 2 está escoando mais rapidamente.

Poder-se-ia dizer que a variável primordial do escoamento bifásico é a fração volumétrica *in situ*. Por exemplo, o cálculo da queda de pressão bifásica e do coeficiente de transferência de calor por convecção em escoamentos em tubulações depende irremediavelmente do prévio conhecimento da fração volumétrica *in situ*. A fração volumétrica *in situ*, ϵ , comumente medida em laboratório, é resultante de médias temporais e espaciais da fração de fase. A fração de fase local ou cordal, $\bar{\epsilon}$, é obtida através de médias temporais, conforme Fig. 1a e b, respectivamente, ou seja:

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{T} \int_t \epsilon_k dt = \frac{T_k}{T}, \quad (10)$$

onde T é o tempo de amostragem e o subscrito k indica fase.

A fração de fase instantânea média na seção transversal, $\langle \epsilon \rangle$, é obtida através de média espacial 1c, isto é:

$$\langle \epsilon_k \rangle = \frac{1}{A} \int_A \epsilon_k dA = \frac{A_k}{A}, \quad (11)$$

onde A é área de seção transversal. Observa-se relação comutativa entre médias temporal e espacial, *i.e.*:

$$\langle \bar{\epsilon}_k \rangle = \overline{\langle \epsilon_k \rangle} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{A} \int_A \frac{T_k}{T} dA = \frac{1}{T} \int_t \frac{A_k}{A} dt, \quad (12)$$

A Eq. 12 nos diz que a média espacial do valor médio local no tempo da fração de fase e que a média temporal do valor médio instantâneo na seção transversal da fração de fase representam a mesma

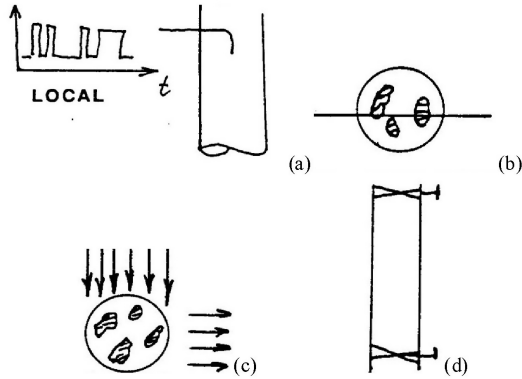


Figura 1: (a) Fração de fase local e (b) fração de fase cordal, avaliadas no tempo, T . (c) Fração de fase instantânea média na seção transversal e (d) Fração de fase média volumétrica (válvulas de fechamento rápido).

grandeza: a fração volumétrica *in situ*, ϵ . Em variadas circunstâncias práticas, a fração volumétrica *in situ* pode ser considerada uma grandeza local, como definido pela Eq. 5. Assim sendo, ela pode ser medida em laboratório através da técnica das válvulas de fechamento rápido (Fig. 1d).

0.2.2 Escoamento Bifásico Gás-Líquido em Tubulação

Na engenharia da área *upstream* da indústria de petróleo, mais especificamente elevação e escoamento, superdimensionamentos são comuns. Considerando o projeto de um sistema de transporte de fluidos, a maior dificuldade em escoamento bifásico é que a geometria da interface não é conhecida *a priori*, *i.e.*, nos não sabemos como as fases estão arrançadas geometricamente. A importância de conhecer o padrão de escoamento é clara: necessário para a modelagem, cálculo e previsão eficiente de transferência de calor, queda de pressão, corrosão, etc., ou seja, parâmetros imprescindíveis para o projeto e operação dos equipamentos e sistemas industriais. Do ponto de vista

econômico, o estudo dos escoamentos gás-líquido talvez seja o mais importante.

Escoamento Bifásico Gás-Líquido em Tubulação Vertical ascendente

Em linhas verticais os padrões de escoamento observados são os seguintes (Fig. 2):

- **Padrão bolhas (*bubble*):** a fase gasosa está distribuída sob a forma de bolhas dispersas em um meio líquido contínuo. As bolhas podem ter formato esférico, de calota, elipsoidal etc. O tamanho das bolhas é sempre menor que o diâmetro do tubo.
- **Padrão bolhas dispersas (*finely dispersed bubble*):** a fase gasosa está distribuída sob a forma de pequenas bolhas dispersas em um meio líquido contínuo. As bolhas tendem a ter um formato esférico e seu tamanho é sempre menor que o tamanho das bolhas observadas no padrão bolhas.
- **Padrão golfadas (ou pistonado) (*slug*):** bolhas conhecidas como bolhas de Taylor, que possuem tamanho aproximadamente igual ao diâmetro do tubo, ascendem enquanto um filme líquido descende pelas paredes do tubo. Elas têm um formato cilíndrico e um “nariz” semelhante a uma “bala de fuzil”. Pistões de líquido se intercalam às bolhas de Taylor, o que caracteriza um escoamento intermitente. Em diâmetros de tubo maiores, os pistões líquidos são normalmente aerados.
- **Padrão agitante (*churn*):** o padrão caracteriza-se por um transporte caótico das fases, intercalando-se em escoamento co-corrente e contra-corrente. O padrão agitante é considerado por alguns autores como transição do padrão golfadas ao anular. Também é considerado por outros autores como um padrão de transição observado durante o desenvolvimento espacial do padrão golfadas.
- **Padrão anular (*annular*):** no padrão anular o gás esco no núcleo do tubo circundado por um filme de líquido. O núcleo gasoso é normalmente composto de gotículas “arrancadas” do filme líquido, o que caracteriza um aerossol. O escoamento

pode dar-se em co-corrente ou contra-corrente (filme descendente).

Mapas ou cartas de fluxo são ferramentas utilizadas para a determinação dos padrões de escoamento em função das velocidades superficiais das fases (ou fluxos volumétricos). A primeira abordagem adotada pela indústria baseou-se em cartas de fluxo experimentais. Entretanto, não há carta experimental genérica para o escoamento de dois líquidos imiscíveis. Ambos os estudos teóricos e experimentais demonstram que a geometria da tubulação e as propriedades dos fluidos afetam significativamente as fronteiras de transição de padrão de escoamento. Portanto, desenvolvimento de modelos mecanicistas para a previsão dos padrões é necessário. Trabalhos baseados em modelagens fenomenológicas (como definido por G.F. Hewitt) têm sido capazes de prever com razoável precisão a localização das fronteiras de transição de padrão de escoamento, as frações volumétricas das fases e a perda de pressão bifásica. Pode ser vista na Fig. 3 a carta de fluxo fenomenológica de Taitel *et al.* [100] (vide também Fig. 2).

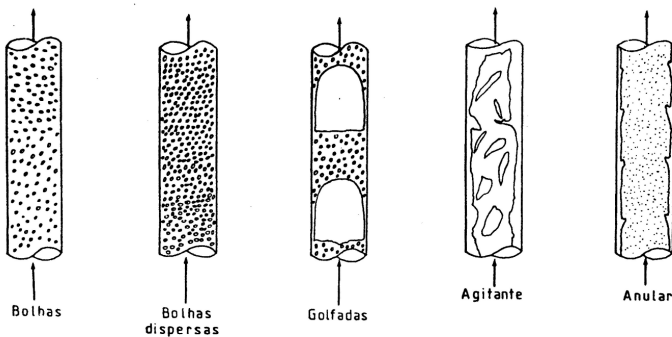


Figura 2: Padrões de escoamento gás-líquido em tubulação vertical ascendente (Taitel *et al.*, [100]).

Escoamento Bifásico Gás-Líquido em Tubulação Horizontal

Em linhas horizontais os padrões de escoamento observados são os seguintes (Fig. 4):

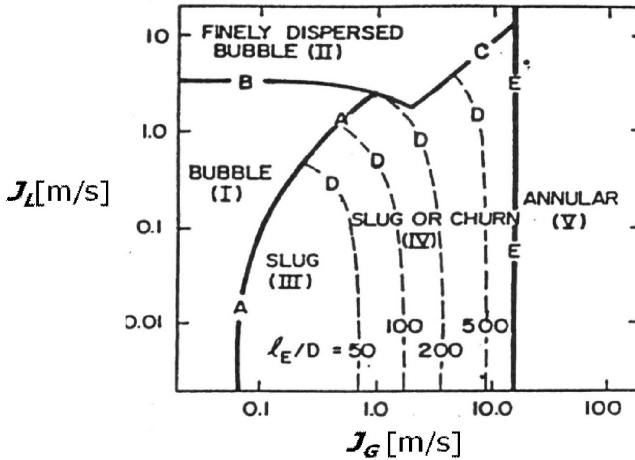


Figura 3: Carta de fluxo fenomenológica de Taitel *et al.* [100] para escoamento gás-líquido vertical ascendente.

1. **Padrão bolhas (bubble)**: semelhante ao padrão bolhas no escoamento vertical, mas, devido à gravidade, as bolhas tendem a se deslocar para a parte superior do tubo.
2. **Padrão bolhas alongada (plug)**: a fase gasosa está distribuída sob a forma de bolhas alongadas com comprimento da ordem do diâmetro do tubo. Essas estruturas localizam-se na parte superior do tubo e assemelham-se a bolhas de Taylor, porém assimétricas.
3. **Padrão estratificado (stratified)**: característico a baixas vazões. As fases estão segregadas, *i.e.*, escoam separadamente. A interface é praticamente lisa e observam-se apenas ondas interfaciais longas.
4. **Padrão estratificado ondulado (wavy)**: característico a baixas vazões. As fases permanecem segregadas, mas com o aumento da vazão de gás, observa-se uma interface ondulada.
5. **Padrão golfadas (ou pistonado) (slug)**: semelhante ao padrão golfadas no escoamento vertical, mas, devido à gravidade,

as bolhas tendem a se deslocar para a parte superior do tubo. Em comparação com o escoamento vertical, há menor tendência de aeração do pistão de líquido.

6. **Padrão anular (annular)**: o padrão é formado quando a velocidade do gás é suficientemente alta para formar um filme contínuo ao redor do núcleo gasoso (aerossol). O filme líquido possui ondas de alta frequência e é mais espesso na parte inferior do tubo devido à ação da gravidade.

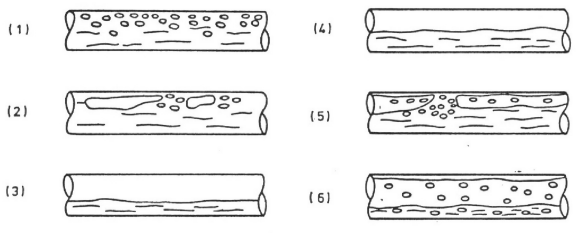


Figura 4: Padrões de escoamento gás-líquido em tubulação horizontal (Taitel e Dukler, [101]).

Os trabalhos clássicos realizados pelo grupo liderado por A.E. Dukler, e posteriormente por Y. Taitel, no final da década de setenta e década de oitenta, sobre escoamentos gás-líquido (Taitel e Dukler, [101], e Taitel, Barnea e Dukler, [100]), apresentaram ao mundo a potencialidade da aproximação fenomenológica, a qual é de fato capaz de resolver uma série de problemas de engenharia, mesmo considerando a dinâmica extremamente complexa dos escoamentos multifásicos. Pode ser vista na Fig. 5 a carta de fluxo de Mandhane *et al.* [64] (vide também Fig. 4).

0.2.3 Escoamento Bifásico Líquido-Líquido em Tubulação

A necessidade de métodos de projeto confiáveis para escoamentos multifásicos tem sido a força motriz por detrás do extensivo esforço de pesquisa na área registrado na literatura nos últimos 40 anos,

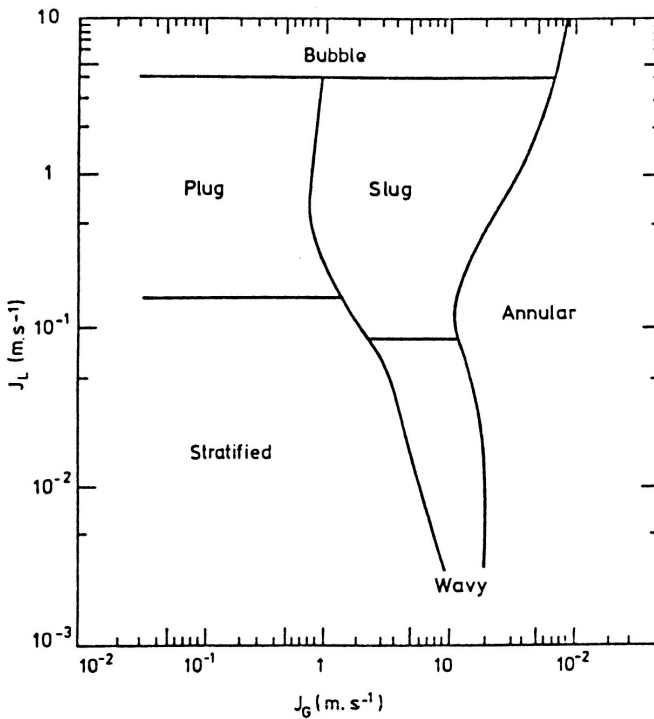


Figura 5: Carta de fluxo de Mandhane *et al.* [64] para escoamento gás-líquido horizontal.

especialmente sobre escoamentos gás-líquido. Recentemente, a indústria tem focado sua atenção em direção ao escoamento trifásico gás-líquido-líquido. Entretanto, o caso especial onde apenas as fases líquidas estão presentes não tem recebido a mesma atenção. O escoamento simultâneo de dois líquidos imiscíveis em tubos é de ocorrência comum na indústria de petróleo. Não raro, uma quantidade significativa de água (aquífero) está presente na formação rochosa rica em petróleo, especialmente em reservatórios maduros. Além disso, a água injetada no reservatório para facilitar a drenagem de óleos viscosos pode encontrar o caminho para o poço de produção. A con-

figuração geométrica do escoamento de misturas líquido-líquido em tubos é bastante diferente daquela das misturas gás-líquido. A diferença é explicada principalmente pela grande capacidade de transferência de quantidade de movimento entre os líquidos e efeito de empuxo menor. Adicionalmente, a menor energia livre interfacial permite a formação de ondas interfaciais mais curtas e gotas dispersas de tamanho menor. Portanto, sistemas bifásicos líquido-líquido têm comportamento diferente e apresentam padrões de escoamento diferentes em comparação com os sistemas gás-líquido.

Escoamento Bifásico Líquido-Líquido em Tubulação Vertical Ascendente

Em linhas verticais e para mistura de óleo e água com alta razão de viscosidades ($\mu_{\text{óleo}} \gg \mu_{\text{água}}$) os padrões de escoamento observados de são os seguintes (Fig. 6):

- **Gotículas dispersas (BD)**: este padrão ocorre a baixas vazões de óleo e altas vazões de água. Tal padrão poderia ser chamado também de dispersão de óleo em água. As gotas de óleo relativamente pequenas e praticamente esféricas são arrastadas pela grande vazão de água seguindo a tendência do perfil de velocidades esperado para o escoamento monofásico de água em tubulações (maiores velocidades no centro do tubo e menores próximo à parede). O padrão difere da emulsão, pois se notam nitidamente as fases.
- **Gotas (B)**: esse padrão ocorre para maiores vazões de óleo e menores vazões de água, em comparação com o padrão BD. As gotas possuem um diâmetro maior e apresentam-se nas seguintes formas: esférica, calota elíptica e calota esférica (*cap*). As gotas possuem um movimento independente do perfil parabólico da água, deslocando-se de maneira oscilatória em relação ao plano observado. Devido à menor turbulência da fase contínua, ocorre coalescência.
- **Intermitente (I)**: aumentando-se a vazão de óleo, a partir do padrão B, as gotas tendem a unir-se em grandes gotas alongadas, separadas por longos trechos de água. O diâmetro da gota alongada aproxima-se do diâmetro do tubo e a forma do seu

“nariz” lembra as bolhas de Taylor do escoamento gás-líquido. A fase contínua (água) pode apresentar gotículas dispersas.

- **Anular (A)**: no padrão anular o óleo escoa no núcleo do tubo circundado por um filme de água. Tal padrão ocorre para maiores vazões de óleo, em comparação com o padrão intermitente. A interface apresenta estrutura ondulatória que lembra um “bambu”. Dependendo da razão de injeção das fases, o filme de água pode apresentar gotículas dispersas e o núcleo oleoso (*core*) pode apresentar distorções ou perturbações de alta frequência.

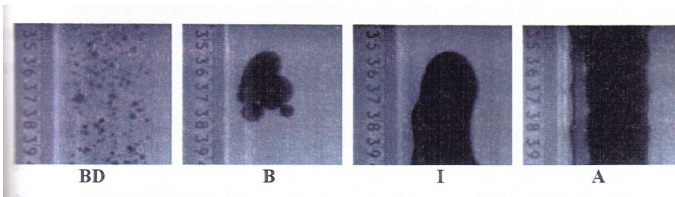


Figura 6: Padrões de escoamento líquido-líquido (água e óleo altamente viscoso) em tubulação vertical ascendente (Bannwart *et al.*, [9]).

Na Fig. 7 pode ser vista a carta de fluxo para escoamento líquido-líquido vertical ascendente (vide também Fig. 6).

Escoamento Bifásico Líquido-Líquido em Tubulação Horizontal

Em linhas horizontais e para misturas de óleo e água com moderada razão de viscosidades os padrões de escoamento observados de são os seguintes, (Fig. 8):

- **Estratificado (ST)**: para velocidades superficiais baixas o escoamento é dominado pela gravidade; as fases escoam separadamente e a interface é lisa. Apesar disso, as fases podem estar no regime de transição para a turbulência, especialmente a menos viscosa.

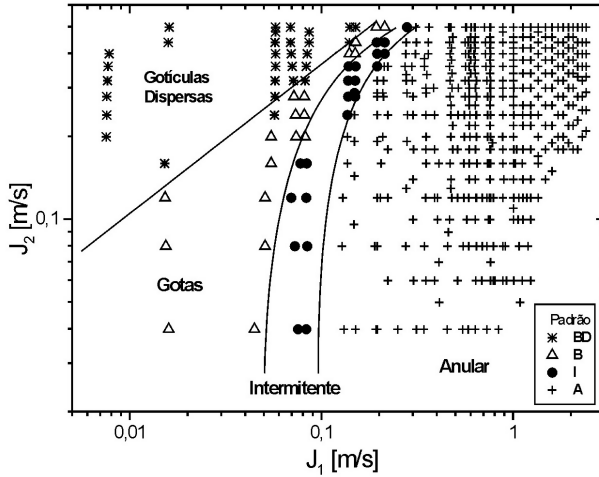


Figura 7: Carta de fluxo para escoamento vertical ascendente de mistura de água e óleo viscoso (viscosidade 500 mPa.s e densidade 935 kg/m³ a 25° C), (Bannwart *et al.*, [9]).

- **Estratificado com mistura na interface (ST & MI):** o padrão ocorre para velocidades superficiais mais altas em comparação ao padrão estratificado. Ondas capilares com comprimento de onda da ordem de duas vezes o diâmetro do tubo surgem na interface. Na proximidade da onda interfacial, podem ser observadas gotículas de água na camada de óleo e gotículas de óleo na camada de água. Forças dinâmicas e empuxo agem simultaneamente nas gotículas.
- **Dispersão de óleo em água sobre camada de água (D o/w & w):** ocorre a altas velocidades superficiais de água, *i.e.*, num escoamento dominado pela água. Vórtices aquosos próximos à interface dispersam a fase oleosa, mas, devido a efeitos de molhabilidade, água pode permanecer na parte superior do tubo como um filme lubrificando o óleo. A força de empuxo

prevalece e empurra as gotículas de óleo para cima, restando uma camada espessa de água na parte inferior do tubo.

- **Emulsão de óleo em água ou dispersão homogênea de óleo em água (o/w):** ocorre para velocidades superficiais de água extremamente altas. Trata-se de uma dispersão estável de óleo em água, sendo estabilidade neste caso definida em termos do tempo de observação, ou seja, a emulsão pode ser estável apenas enquanto as forças relacionadas à turbulência do escoamento forem maiores do que o empuxo. O termo emulsão representa uma dispersão densa ou quando a fase descontínua está totalmente dispersa.
- **Emulsão de água em óleo ou dispersão homogênea de água em óleo (w/o):** ocorre para velocidades superficiais de óleo extremamente altas e é semelhante ao padrão (o/w), mas, neste caso, óleo é a fase contínua e água a fase dispersa.
- **Dispersão de óleo em água e dispersão de água em óleo (Dw/o & Do/w):** ocorre para altas velocidades superficiais de água e óleo. Partindo do padrão ST & MI, a região de mistura próxima à interface cresce e os dois tipos de dispersão podem coexistir. A dispersão dual ocupa a maior parte da área da seção transversal do tubo.

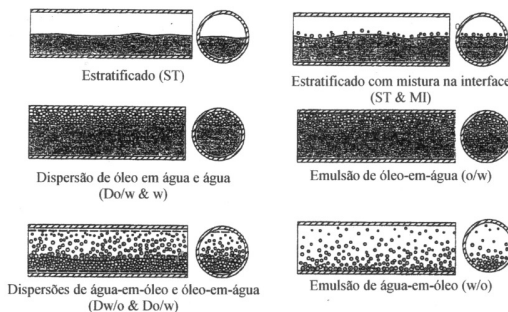


Figura 8: Padrões de escoamento líquido-líquido (óleo pouco viscoso e água) em tubulação horizontal (Trallero, [105]).

Na Fig. 9 pode ser observada uma comparação entre a carta de fluxo experimental levantada por Rodriguez e Oliemans [90] e as fronteiras de transição de padrão de escoamento previstas pelo modelo fenomenológico proposto por Trallero [105] (vide também Fig. 8).

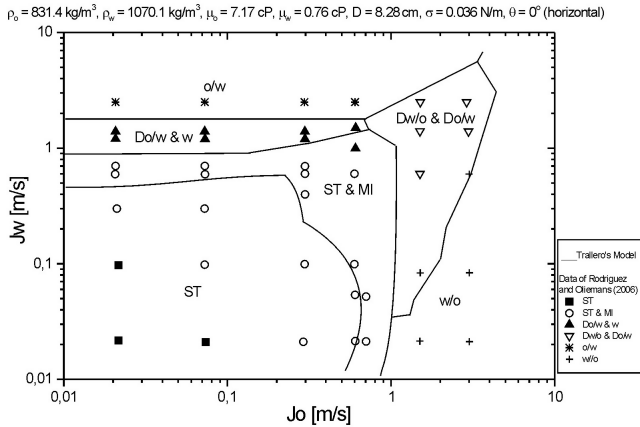


Figura 9: Carta de fluxo para escoamento horizontal de mistura de água e óleo (viscosidade 7 mPa.s) em tubulação de aço de 8,28 cm DI, (Rodriguez e Oliemans, [90]).

Quando as fases líquidas possuem alta razão de viscosidades, os padrões de escoamento são significativamente diferentes. Em linhas horizontais e para mistura de óleo e água com alta razão de viscosidades ($\mu_{\text{óleo}} \gg \mu_{\text{água}}$) os padrões de escoamento observados de são os seguintes, (Fig. 10):

- **Estratificado (E)**: padrão observado para médias e altas vazões de óleo e para baixas, médias e altas vazões de água. A água esco na parte de baixo do tubo e a fase contínua de óleo esco na parte superior da tubulação. Devido a efeitos de molhabilidade, água pode permanece na parte superior do tubo como um filme extremamente fino (sem ondas) lubrificando o

óleo. O escoamento da água se dá a velocidades *in situ* significativamente mais altas em comparação com o escoamento do óleo.

- **Gotas estratificadas (BE)**: o escoamento do óleo apresenta-se sob a forma de gotas ligadas umas às outras, formando o que se poderia chamar de “trem de gotas”. As gotas de óleo concentram-se na parte superior do tubo, com água escoando na parte inferior, e possuem forma aproximadamente esférica, com ligeiro achatamento próximo à parede superior do tubo. As gotas são observadas para baixas e médias vazões de óleo e baixas, médias e altas vazões de água.
- **Gotas dispersas (BD)**: bastante semelhante ao padrão BD observado no escoamento vertical ascendente, mas pode ocorrer na forma estratificada com uma concentração das pequenas gotas esféricas na parte superior do tubo. Observa-se este padrão para baixas vazões de óleo e médias e altas vazões de água. Tal padrão poderia ser chamado também de dispersão de óleo em água. O padrão difere da emulsão, pois se notam nitidamente as fases.
- **Anular (A)**: o padrão anular caracteriza-se por uma fase escoando no núcleo do tubo (óleo) circundada por uma segunda fase escoando junto à parede do tubo (água). Observam-se ondas interfaciais tanto na parte superior quanto na parte inferior do tubo, entretanto, as últimas possuem comprimento de onda maior.

Na Fig. 11 pode ser vista a carta de fluxo para escoamento líquido-líquido horizontal (vide também Fig. 10).

Cabe aqui destacar que o padrão de escoamento anular, A, em escoamento líquido-líquido com alta razão de viscosidades (Figs. 6 e 10) representa uma alternativa para a elevação e o transporte de óleos ultra-viscosos (na faixa dos $10^3 - 10^4$ mPa.s). A técnica baseia-se na experiência acumulada no transporte de fluidos altamente viscosos por injeção de pequenas quantidades de água, de tal forma a criar uma adequada lubrificação do óleo e estabelecer um padrão de escoamento anular líquido-líquido, chamado *core flow* ou *core-annular flow*. A literatura reporta que linhas para o transporte de petróleo pesado de aproximadamente 50 km de extensão e 6 polegadas

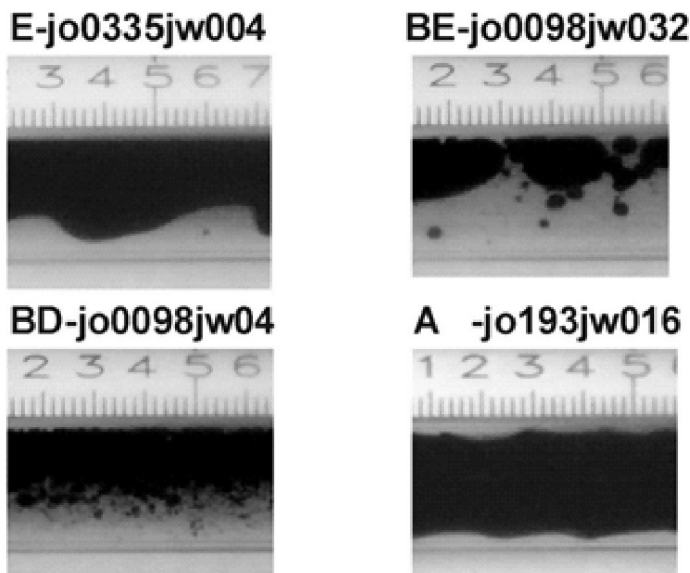


Figura 10: Padrões de escoamento líquido-líquido (água e óleo altamente viscoso) em tubulação horizontal (Bannwart *et al.*, [10]).

de diâmetro interno foram construídas e operaram com sucesso na Venezuela e nos Estados Unidos. Contudo, essa idéia parece não ter sido ainda testada para a elevação artificial de óleos ultra-viscosos.

0.3 Aspectos Fundamentais da Modelagem de Escoamento Bifásico: Modelo de Dois Fluidos Unidimensional

O propósito desta seção é apresentar em detalhe o desenvolvimento das equações fundamentais unidimensionais do escoamento bifásico e mostrar como elas podem ser aplicadas na solução de problemas práticos. A abordagem unidimensional tem importância indiscutível em uma grande variedade de disciplinas tradicionais

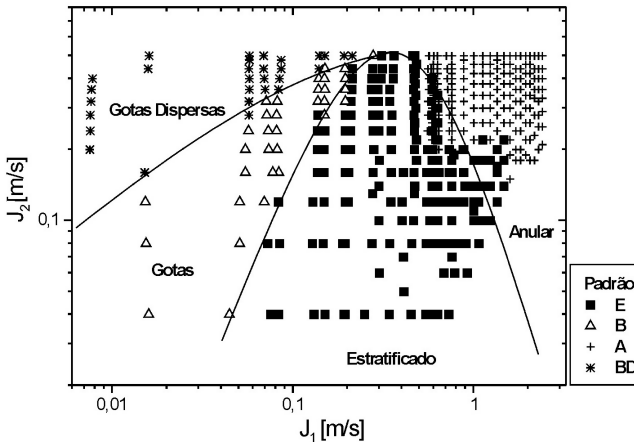


Figura 11: Carta de fluxo para escoamento horizontal de mistura de água e óleo viscoso (viscosidade 500 mPa.s e densidade 935 kg/m³ a 25°C), [10].

da engenharia e em inúmeras circunstâncias é capaz de capturar o resultado preponderante de um fenômeno multidimensional. Por exemplo, o escoamento bidimensional em torno e internamente a uma bolha ascendendo em um líquido não é derivado ou discutido, mas a função resultante da velocidade com o diâmetro é observada. Neste texto, apenas escoamentos essencialmente unidimensionais são considerados, como aqueles que ocorrem em tubos e dutos. Fenômenos multidimensionais são considerados apenas quando necessários para colocar as hipóteses unidimensionais em perspectiva, para fornecer resultados requeridos para especificar o problema *a priori* ou quando se faz necessária a introdução de parâmetros de distribuição para correção da expressão unidimensional.

0.3.1 Equações Locais Instantâneas do Escoamento Bifásico e Condições de Salto

As equações locais instantâneas do escoamento bifásico são derivadas segundo o diagrama mostrado na Fig. 12.

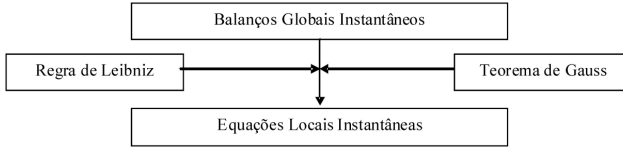


Figura 12: Procedimento para o desenvolvimento das equações bifásicas locais instantâneas.

Relações Matemáticas Importantes

Regra de Leibniz (Trata-se de uma análise puramente geométrica):

$$3D : \frac{d}{dt} \int_{v(t)} F(x, y, z, t) dv = \int_{v(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dv + \oint_{A(t)} F \vec{V}_A \cdot \vec{n} dA,$$

onde F representa uma grandeza tensorial qualquer (Fig. 13).

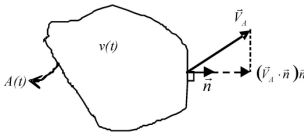


Figura 13: Esquema para regra de Leibniz 3-D.

$$2D: \frac{d}{dt} \int_{A(t)} F(x, y, t) dA = \int_{A(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dA + \oint_{\zeta(t)} F \vec{V}_p \cdot \vec{N} d\zeta,$$

onde, tem-se a Fig. 14.

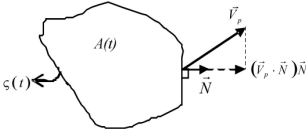


Figura 14: Esquema para regra de Leibniz 2-D.

Teorema de Gauss (ou da divergência):

$$3D: \oint_{A(t)} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \int_{v(t)} \nabla \cdot \vec{F} dv,$$

sendo \vec{F} um vetor ou tensor de segunda ordem.

$$2D: \oint_{\zeta(t)} \vec{F} \cdot \vec{N} d\zeta = \int_{A(t)} \nabla_S \cdot \vec{F} dA,$$

onde:

$$\nabla_S \cdot = \text{divergente superficial} = \hat{l}_{s1} \cdot \frac{\partial}{\partial S_1} + \hat{l}_{s2} \cdot \frac{\partial}{\partial S_2}.$$

Balances Globais Instantâneos para escoamento Bifásico

Antes da apresentação das equações bifásicas instantâneas, serão apresentadas as equações da conservação da massa e quantidade de movimento para escoamento monofásico, as quais serão utilizadas nas seções subsequentes. A derivação da equação da energia pode ser encontrada em Hetsroni ([47], Cap. 1.2).

Conservação da massa—balanço global

A equação da conservação da massa, para escoamento monofásico, pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho dv = - \oint_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA. \quad (13)$$

onde o termo do lado esquerdo representa a taxa de variação da massa no volume de controle fixo, v , e o termo da direita representa o fluxo líquido de matéria através da área superficial do volume de controle, A .

Para escoamento bifásico, onde ocorre a existência de uma interface de área definida A_i (Fig. 15), a Eq. (13) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_1(t)} \rho_1 dv + \frac{d}{dt} \int_{v_2(t)} \rho_2 dv + \frac{d}{dt} \int_{A_i(t)} \rho_i dA = \\ - \int_{A_1(t)} \rho_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 dA - \int_{A_2(t)} \rho_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 dA \\ - \int_{\zeta(t)} \rho_i \vec{V}_p \cdot \vec{N} d\zeta, \end{aligned} \quad (14)$$

onde $A_1(t)$ e $A_2(t)$ não são superfícies fechadas (só fecham com $A_i(t)$, que é a área da interface e que pode deslocar-se entre as fases), \vec{V}_p é igual à velocidade de uma partícula (ou das partículas) na interface, ρ_i é a densidade superficial (massa por unidade de área da interface), \vec{n} é o vetor normal à superfície, $\zeta(t)$ é o contorno da interface e \vec{N} é o vetor unitário normal à interface contido no plano Φ (Fig. 15).

Quantidade de movimento—balanço global

A equação da quantidade de movimento, para escoamento monofásico, pode ser expressa da seguinte forma:

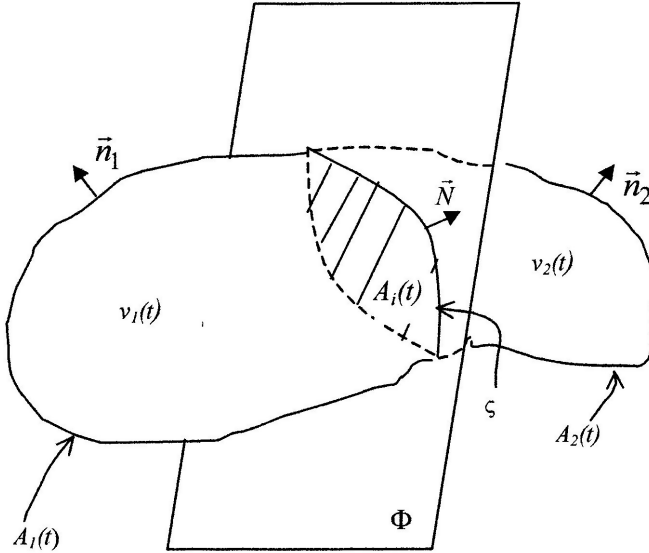


Figura 15: Localização das fases e variáveis nas equações do escoamento bifásico.

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{V} dv = \int_v \rho \vec{g} dv + \int_A \vec{n} \cdot \Pi dA - \oint_A \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA, \quad (15)$$

onde o termo da esquerda representa a taxa de variação da quantidade de movimento, o primeiro termo do lado direito é relacionado às forças de campo atuando no volume de controle, o segundo termo do lado direito é relacionado às forças na superfície do volume de controle e o último termo do lado direito representa o fluxo de quantidade de movimento através da superfície do volume de controle. O

tensor das tensões pode ser definido da seguinte forma:

$$\Pi = -PI + \tau, \quad (16)$$

onde P representa as tensões normais e τ as tensões viscosas.

Para escoamento bifásico a Eq. 15 assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{v_1(t)} \rho_1 \vec{V}_1 dv + \frac{d}{dt} \int_{v_2(t)} \rho_2 \vec{V}_2 dv + \frac{d}{dt} \int_{A_i(t)} \rho_i \vec{V}_p dA = \\ & \int_{v_1(t)} \rho_1 \vec{g} dv + \int_{v_2(t)} \rho_2 \vec{g} dv + \int_{A_{i1}(t)} \rho_i \vec{g} dA + \\ & \int_{A_1(t)} \vec{n}_1 \cdot \Pi_1 dA + \int_{A_2(t)} \vec{n}_2 \cdot \Pi_2 dA + \oint_{\varsigma(t)} \sigma \vec{N} d\varsigma - \\ & \int_{A_1(t)} \rho_1 \vec{V}_1 (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) dA - \int_{A_2(t)} \rho_2 \vec{V}_2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) dA - \\ & \int_{\varsigma(t)} \rho_i \vec{V}_p (\vec{V}_p \cdot \vec{N}) d\varsigma, \end{aligned} \quad (17)$$

onde σ é a tensão interfacial (força por unidade de comprimento).

Equações Locais Instantâneas Para Escoamento Bifásico

Conservação da massa—equação local instantânea

Aplicando a regra de Leibniz e o teorema de Gauss na Eq. (14) e agrupando as integrais de volume e de área, chega-se à seguinte equação:

$$\int_{v_1} \left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{V}_1) \right] dv + \int_{v_2} \left[\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \vec{V}_2) \right] dv +$$

$$\int_{A_i} \left[\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_p) - \rho_1 (\vec{V}_1 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_1 - \right. \\ \left. \rho_2 (\vec{V}_2 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_2 + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_\zeta) \right] dA = 0, \\ \forall v_1, v_2, A_i, \quad (18)$$

onde ∇_s é o divergente superficial. Portanto, a equação local instantânea da conservação da massa pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \vec{V}_k) = 0, \quad \text{em } v_k \quad (k = 1, 2) \quad (19)$$

e

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_p) - \rho_1 (\vec{V}_1 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_1 - \\ \rho_2 (\vec{V}_2 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_2 + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_\zeta) = 0. \quad (20)$$

em $A_i(t)$. A Eq. (20) é denominada “condição de salto” na interface. O último termo da Eq. (20) é desprezado, pois, $\vec{V}_\zeta \cdot \vec{N} = 0$ (velocidade de deslocamento da linha $\zeta(t)$).

Quantidade de movimento—equação local Instantânea

Aplicando a regra de Leibniz, o teorema de Gauss e a forma especial do teorema de Green¹ na Eq. 16 e agrupando as integrais de volume e de área, chega-se à seguinte equação:

¹Nota sobre o teorema de Green aplicado a superfícies.

$$\oint_{\zeta(t)} \sigma \vec{N} d\zeta = \int_{A(t)} [\nabla_s \sigma - (\nabla_s \cdot \vec{n}) \sigma \vec{n}] dA.$$

O primeiro termo da integral é a força por unidade de área na direção tangencial à superfície, que advém de eventuais gradientes de tensão superficial. O segundo termo da integral é a componente normal à interface da força resultante da ação da tensão interfacial.

$$\begin{aligned}
& \int_{v_1} \left[\frac{\partial (\rho_1 \vec{V}_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{V}_1 \vec{V}_1) - \rho_1 \vec{g} - \nabla \cdot \Pi_1 \right] dv + \\
& \int_{v_2} \left[\frac{\partial (\rho_2 \vec{V}_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \vec{V}_2 \vec{V}_2) - \rho_2 \vec{g} - \nabla \cdot \Pi_2 \right] dv + \\
& \int_{A_i} \left[\frac{\partial (\rho_i \vec{V}_p)}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_p \vec{V}_p) - \rho_i \vec{g} + \right. \\
& \quad \left. \vec{n}_1 \cdot \Pi_1 + \vec{n}_2 \cdot \Pi_2 - \nabla_s \sigma + \right. \\
& \quad \left. (\nabla_s \cdot \vec{n}) \sigma \vec{n} - \rho_1 \vec{V}_1 (\vec{V}_1 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_1 - \right. \\
& \quad \left. \rho_2 \vec{V}_2 (\vec{V}_2 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_2 \right] dA = 0, \quad \forall \quad v_1, v_2, A_i, \quad (21)
\end{aligned}$$

sendo que os últimos dois termos da Eq. 21 são os termos de transferência de quantidade de movimento pela interface. Portanto, a equação local instantânea da quantidade de movimento pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\frac{\partial (\rho_k \vec{V}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \vec{V}_k \vec{V}_k) - \rho_k \vec{g} - \nabla \cdot \Pi_k = 0, \quad (22)$$

em V_k ($k = 1, 2$), e a “condição de salto” para a quantidade de movimento é dada por:

$$\frac{\partial (\rho_i \vec{V}_p)}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\rho_i \vec{V}_p \vec{V}_p) - \rho_i \vec{g} +$$

$$\begin{aligned} & \vec{n}_1 \cdot \Pi_1 + \vec{n}_2 \cdot \Pi_2 - \nabla_s \sigma + (\nabla_s \cdot \vec{n}) \sigma \vec{n} - \\ & \rho_1 \vec{V}_1 \left(\vec{V}_1 - \vec{V}_i \right) \cdot \vec{n}_1 - \rho_2 \vec{V}_2 \left(\vec{V}_2 - \vec{V}_i \right) \cdot \vec{n}_2 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

0.3.2 Equações de Escoamento Bifásico Médias na Seção Transversal; Modelagem Unidimensional

A partir deste ponto serão desenvolvidas as equações bifásicas instantâneas médias numa seção ou equações governantes unidimensionais, segundo o modelo de dois fluidos desenvolvido por Delhaye [35]. O procedimento para a derivação das equações pode ser visto na Fig. 16.

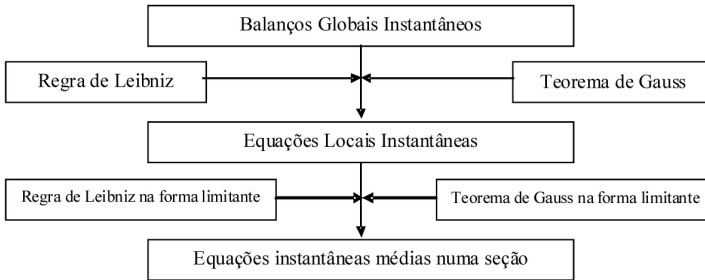


Figura 16: Procedimento para o desenvolvimento das equações bifásicas instantâneas médias na seção transversal.

Na Fig. 17 podem ser observados os parâmetros geométricos necessários para o desenvolvimento da formulação.

Algumas considerações matemáticas devem ser feitas a priori. A regra de Leibniz pode ser apresentada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_k(z,t)} f(x, y, z, t) dA = \\ & \int_{A_k(z,t)} \frac{\partial f}{\partial t} dA + \int_{\zeta(z,t)} f \frac{\vec{V}_i \cdot \vec{n}_k}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} d\zeta. \end{aligned} \quad (24)$$

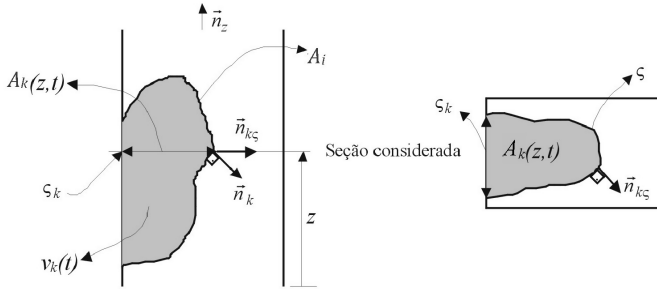


Figura 17: Localização da interface e parâmetros geométricos.

Note que na segunda integral do lado direito da equação acima é excluído o contorno rente à parede, pois $\vec{V}_i \cdot \vec{n}_k = 0$ em s_k ($\vec{V}_i = 0$).

O teorema de Gauss pode ser apresentado na forma:

$$\int_{A_k(z,t)} \nabla \cdot \vec{B} dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z,t)} B_z dA + \oint_{s(z,t) + s_k(z,t)} \vec{n}_k \cdot \vec{B} \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k_s}}. \quad (25)$$

Se $\vec{B} = \vec{n}_z$, então, $B_z = 1$ e tem-se finalmente o teorema de Gauss modificado:

$$\frac{\partial A_k(z,t)}{\partial z} = - \int_{s(z,t)} \vec{n}_k \cdot \vec{n}_z \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k_s}}. \quad (26)$$

Note que na integral do lado direito da equação acima é excluído o contorno rente à parede, pois $\vec{n}_k \cdot \vec{n}_z = 0$ em s_k (os vetores fazem um ângulo de 90°). Para campos tensoriais, tem-se que:

$$\int_{A_k(z,t)} \nabla \cdot M dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z,t)} \vec{n}_z M dA +$$

$$\oint_{\varsigma(z,t)+\varsigma_k(z,t)} \vec{n}_k \cdot M \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k,\varsigma}}. \quad (27)$$

Conservação da Massa—Equação Instantânea Média Numa Seção

Aplicando a regra de Liebnitz e o teorema de Gauss apropriados na Eq. 19 e agrupando os termos, chega-se finalmente na equação da conservação da massa instantânea média na seção:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho_k \rangle A_k] + \frac{\partial}{\partial z} [\langle \rho_k w_k \rangle A_k] = \\ - \int_{\varsigma(z,t)} \rho_k (\vec{V}_k - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_k \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k,\varsigma}}, \end{aligned} \quad (28)$$

onde o termo da direita representa a transferência de massa pela interface e

$$\frac{\int_{A_k} f_k dA}{A_k} = \langle f_k \rangle. \quad (29)$$

Quantidade de Movimento—Equação Instantânea Média Numa Seção

Utilizando a Eq. 16, aplicando a regra de Liebnitz e o teorema de Gauss apropriados na Eq. 22 e agrupando os termos, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho_k \vec{V}_k \rangle A_k] + \frac{\partial}{\partial z} [\langle \rho_k w_k \vec{V}_k \rangle A_k] - A_k \langle \rho_k \vec{g} \rangle + \\ \frac{\partial}{\partial z} [\langle P_k \vec{n}_k \rangle A_k] - \frac{\partial}{\partial z} [\langle \vec{n}_s \cdot \tau_k \rangle A_k] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\varsigma(z,t)} \left(\dot{m}_k \vec{V}_k - \vec{n}_k \cdot \Pi_k \right) \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k,\varsigma}} + \\
& \int_{\varsigma_k(z,t)} \vec{n}_k \cdot \Pi_k \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k,\varsigma}}, \tag{30}
\end{aligned}$$

onde o termo que representa a transferência de massa pela interface é,

$$\dot{m}_k = \rho_k \left(\vec{V}_k - \vec{V}_i \right) \cdot \vec{n}_k. \tag{31}$$

A componente z da Eq. 30 é a equação da quantidade de movimento instantânea média na seção:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho_k w_k \rangle A_k] + \frac{\partial}{\partial z} [\langle \rho_k w_k^2 \rangle A_k] - A_k \rho_k g_z + \\
& \frac{\partial}{\partial z} [\langle p_k \rangle A_k] - \frac{\partial}{\partial z} [\langle (\vec{n}_z \cdot \tau_k) \cdot \vec{n}_z \rangle A_k] = \\
& - \int_{\varsigma(z,t)} \vec{n}_z \cdot (\dot{m}_k \vec{v}_k - \vec{n}_k \cdot \Pi_k) \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\varsigma}} + \\
& \int_{\varsigma_k(z,t)} \vec{n}_z \cdot (\vec{n}_k \cdot \Pi_k) \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\varsigma}}. \tag{32}
\end{aligned}$$

Note que o quinto termo do lado esquerdo da Eq. 32 inclui a projeção do vetor resultante do produto escalar $(\vec{n}_s \cdot \tau_k)$ na direção z .

De posse das equações instantâneas médias numa seção, há duas abordagens clássicas para a descrição dos escoamentos bifásicos: modelos cinemáticos e modelo de dois fluidos. A primeira abordagem, apesar de mais mecanicista e empírica, descreve adequadamente uma série de fenômenos bifásicos encontrados na prática. Por sua vez, o modelo de dois fluidos incorpora a dinâmica da interação entre as fases. Entretanto, o preço a pagar por uma maior generalidade é uma

complexidade maior da modelagem. O modelo de dois fluidos é uma abordagem rigorosa dos escoamentos multifásicos do ponto de vista físico e matemático. Ele foi desenvolvido em paralelo por M. Ishii (*Purdue University*) e J.M. Delhayé (*Commissariat à l'Énergie Atomique, Grenoble*). O modelo de dois fluidos (Ishii, [53], e Delhayé, [35]) tem sido aplicado extensivamente nas últimas décadas na solução dos mais variados tipos de escoamentos multifásicos. Contudo, a solução do modelo de dois fluidos pressupõe a formulação de um conjunto de equações constitutivas, estabelecidas em termos das variáveis dependentes e independentes do sistema. Apenas com a definição adequada das equações constitutivas permite-se o fechamento do modelo. A Fig 18 sumariza esta seção.

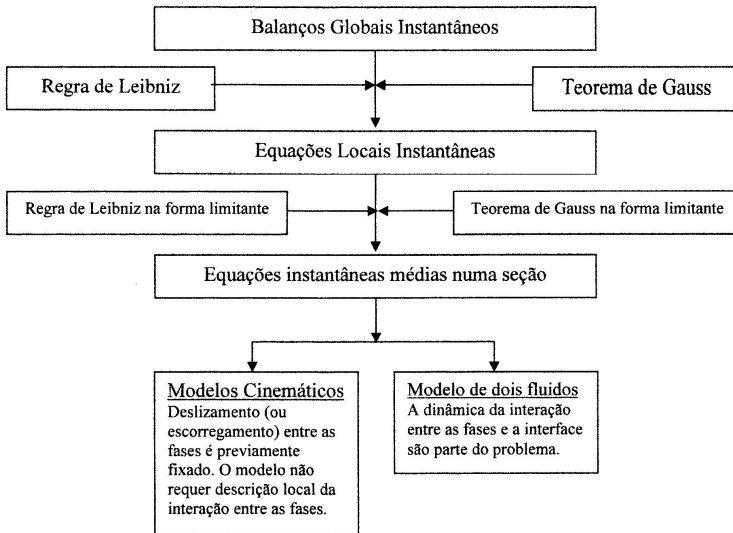


Figura 18: Sumário da derivação das equações bifásicas, instantâneas, unidimensionais.

É cabível destacar que apenas as equações bifásicas unidimensionais da conservação da massa e quantidade de movimento foram deduzidas nesta seção, pois apenas essas serão utilizadas nas seções subsequentes relacionadas à estabilidade hidrodinâmica dos padrões

de escoamento bifásico paralelos. Maiores detalhes e a derivação da equação da energia podem ser encontrados em Hetsroni ([47], Cap. 1.2).

0.3.3 Exemplo: Dedução da Equação da Quantidade de Movimento Unidimensional Média Numa Seção Para Escoamento Estratificado Óleo-Água em Regime Permanente

A componente axial da equação da quantidade de movimento instantânea média na seção, Eq. 32, será particularizada para o caso do escoamento estratificado liso em regime permanente (Fig.19).

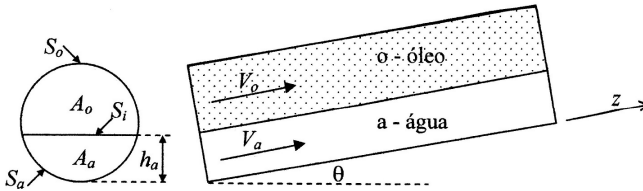


Figura 19: Escoamento estratificado liso em equilíbrio.

O último termo do lado esquerdo da Eq. 32 é desprezado, pois consideramos que a variação das tensões cisalhantes na direção z é desprezível.

Não existe o termo relativo à transferência de massa através da interface, pois se trata de fluidos totalmente imiscíveis:

$$\dot{m}_k \vec{v}_k = 0. \quad (33)$$

O termo relativo ao tensor das tensões pode ser dividido nos termos de pressão e de tensões viscosas:

$$\Pi_k = -p_k I + \tau_k. \quad (34)$$

Análise dos termos na interface (1º termo do lado direito da Eq. 32)

Termo de pressão:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\zeta(z,t)} \vec{n}_z \cdot [-\vec{n}_k \cdot (-p_{ki}I)] \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} = \\
 & p_{ki} \left(- \int_{\zeta(z,t)} \vec{n}_k \cdot \vec{n}_z \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} \right) = p_{ki} \frac{\partial A_k}{\partial z}, \quad (35)
 \end{aligned}$$

onde foi utilizado o teorema de Gauss modificado (Eq. 26). Termo de tensões viscosas:

$$- \int_{\zeta(z,t)} \vec{n}_z \cdot [-\vec{n}_k \cdot \tau_{ki}] \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} = \pm \tau_{ki} S_i. \quad (36)$$

- se $V_o > V_a$ o cisalhamento interfacial é favorável ao escoamento de água, portanto: $\tau_{ai} > 0$ e $\tau_{oi} < 0$,
- se $V_a > V_o$ o cisalhamento interfacial é favorável ao escoamento de óleo, portanto: $\tau_{ai} < 0$ e $\tau_{oi} > 0$.

Análise dos termos na parede (segundo termo do lado direito da Eq. 32)

Termo de pressão na parede:

$$\int_{\zeta_k(z,t)} \vec{n}_z \cdot (\vec{n}_k \cdot (-p_k)I) \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} = 0. \quad (37)$$

A Eq. 37 representa a componente da tensão normal na interface e em contato com a parede na direção z , que no caso é nula.

Termo de tensões viscosas na parede:

$$\int_{\zeta_k(z,t)} \vec{n}_z \cdot (\vec{n}_k \cdot \tau_{kp}) \frac{d\zeta}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\zeta}} = -\tau_{kp} S_k. \quad (38)$$

Outra consideração relevante é quanto ao fator de correção k_k , que é dado por:

$$k_k = \frac{\langle w_k^2 \rangle}{\langle w_k \rangle^2},$$

ou seja:

$$\langle w_k^2 \rangle = \langle w_k \rangle^2 k_k = V_k^2 k_k. \quad (39)$$

Substituindo 33-39 em 32, simplificando a notação, supondo escoamento incompressível e considerando a possibilidade de inclinação do tubo ($\theta > 0$, inclinação ascendente):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\rho_k V_k A_k] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_k V_k^2 k_k A_k] + A_k \rho_k g \sin \theta + \\ \frac{\partial}{\partial z} (p_k A_k) = p_{ki} \frac{\partial A_k}{\partial z} \pm \tau_{ki} S_i - \tau_{kp} S_k. \end{aligned} \quad (40)$$

Considerando escoamento totalmente desenvolvido e regime permanente, chegamos à forma final da equação unidimensional da quantidade de movimento para escoamento estratificado:

$$A_k \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) - \tau_{kp} S_k \pm \tau_i S_i - A_k \rho_k g \sin \theta = 0, \quad (41)$$

Note que o gradiente de pressão passa a ser uma constante. A tensão cisalhante interfacial é a mesma para ambas as fases por uma questão de equilíbrio mecânico.

Aplicando a equação às fases água e óleo, temos:

$$A_o \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) - \tau_{op} S_o \pm \tau_i S_i - A_o \rho_o g \sin \theta = 0, \quad (42)$$

e

$$A_a \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) - \tau_{ap} S_a \pm \tau_i S_i - A_a \rho_a g \sin \theta = 0, \quad (43)$$

onde p é a pressão, z a coordenada axial, A_o e A_a a área de seção transversal ocupada pelo óleo e água; τ_{top} , τ_{ap} e τ_i as tensões cisalhantes da fase óleo, água e interfacial; S_o , S_a e S_i os perímetros molhados do óleo, água e interfacial; ρ_o e ρ_a as densidades do óleo e da água, respectivamente; g a aceleração da gravidade e θ o ângulo de inclinação da horizontal.

Eliminando o gradiente de pressão das equações acima, temos que:

$$-\frac{\tau_{ap} S_a}{A_a} + \frac{\tau_{op} S_o}{A_o} \pm \tau_i S_i \left(\frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_o} \right) - (\rho_a - \rho_o) g \sin \theta = 0, \quad (44)$$

onde o sinal superior, positivo, no termo de tensão interfacial corresponde a $V_o > V_a$.

Para condições de operação específicas, *i.e.*, velocidades superficiais (ou vazões volumétricas), propriedades dos fluidos e geometria do tubo, os parâmetros *in situ* do escoamento, como velocidades médias e frações volumétricas (*holdup*), podem ser calculados através da solução da Eq. 44. A Eq. 44 é uma equação não-linear que pode ser resolvida numericamente, por exemplo, para o nível de água (h_a) ou fração volumétrica *in situ* da água (A_a/A) se as tensões cisalhantes são expressas em termos de fatores de atrito conhecidos. Após a solução da Eq. 44, o gradiente de pressão bifásico é diretamente obtido pela inserção dos resultados na Eq. 42 ou 43. Relações adicionais são requeridas para o cálculo das variáveis geométricas (A_o , A_a , S_o , S_a e S_i em função da fração volumétrica *in situ*) e equações constitutivas são necessárias para as tensões cisalhantes. Elas podem ser encontradas em Rodriguez e Oliemans [90].

0.4 Conceitos Fundamentais da Estabilidade Hidrodinâmica em Escoamento Bifásico Paralelo

0.4.1 Considerações Iniciais

“A teoria da estabilidade hidrodinâmica integra o escopo da mecânica dos fluidos clássica ... Ela é capaz de levar em conta o efeito de um número de parâmetros (instabilidades) sobre a transição do regime laminar ao regime turbulento” (Hermann Schlichting). “Em alguns casos, transições de padrão de escoamento (em escoamento bifásico) podem ser atribuídas a instabilidades que resultam da amplificação temporal de uma onda de perturbação na interface entre as duas fases” (Graham B. Wallis). Na mecânica dos fluidos, a transição do regime laminar ao regime turbulento ou de um padrão de escoamento bifásico de fases separadas (paralelo) a um padrão disperso é um problema de longa data e tem sido foco de pesquisa por décadas devido à sua grande importância em uma variedade de aplicações de engenharia. Ao final do século 19, O. Reynolds e Lord Rayleigh conjecturaram a idéia teórica principal: a transição estaria relacionada à estabilidade do escoamento laminar. Vale destacar o experimento clássico com tinta (traçador) em escoamento em tubulação de O. Reynolds [82], o qual levou à conclusão de que instabilidade resultaria de amplificação de perturbações ondulatórias e deterioração do regime laminar. Considera-se que Heisenberg [46] foi o fundador da teoria da estabilidade hidrodinâmica linear e atribui-se ao grupo liderado por Prandtl a formulação da teoria da estabilidade na década de 1930. Tollmien [104] e Schlichting [93], [94] apresentaram as primeiras soluções de estabilidade de camada limite e Taylor [102] defendeu a teoria de que transição à turbulência inicia-se através de oscilações na corrente livre que induzem separações locais na proximidade da parede. Ceticismo rondou a estabilidade hidrodinâmica durante a década de 1940 e somente com os experimentos de Schubauer e Skramstaf (1948) foi revelado o papel determinante das ondas de instabilidade na transição. Na década de 1950, Schlichting afirma que a estabilidade hidrodinâmica integra o escopo da mecânica dos fluidos clássica.

Mais tarde, Taitel e Dukler [101] aplicam o critério de estabilidade invíscido de Kelvin-Helmholtz para a previsão da fronteira de transição do padrão de escoamento estratificado gás-líquido, obtendo boa concordância com dados experimentais próprios e da literatura. O trabalho prossegue durante as décadas de 1970 e 1980, quando são publicados os estudos teóricos e experimentais de Ooms [77] e [78], Oliemans [74] e Joseph [56] a respeito da estabilidade hidrodinâmica do padrão de escoamento líquido-líquido anular. Na década de 1990, as teorias da estabilidade linear e não-linear foram aplicadas com sucesso para a dedução de critérios de transição em escoamento estratificado gás-líquido (Barnea [14] e [15]) e líquido-líquido (Brauner[24], Trallero [105], e Crowley [33] e [34]). Nota-se um extensivo esforço de pesquisa sobre estabilidade de escoamentos bifásicos registrado na literatura nas últimas duas décadas. Hoje, é bem estabelecido que transição em escoamentos cisalhantes sujeitos a níveis de perturbação pequenos e moderados ocorre através do desenvolvimento de ondas de instabilidade no escoamento laminar inicial ou na interface entre as duas fases do padrão de escoamento bifásico inicial.

Quando se analisa a estabilidade de um escoamento bifásico, adota-se uma analogia perfeita com o escoamento monofásico. Um sistema ou padrão bifásico básico é considerado estável se é imune a pequenas perturbações, de tal forma que a interface entre as duas fases pode tolerar essas perturbações e retornar ao estado original. A Fig. 20 ilustra essa propriedade geral através da estabilidade de sistemas mecânicos. Um padrão bifásico pode ser assintoticamente estável, como no caso de um escoamento descendente de água e ar em tubulação, onde se percebe que a água tende a escoar como um filme. Ele pode ser neutro e estável, como no caso de ar e água segregados em um recipiente, numa situação de não-escoamento. Um padrão bifásico pode ser instável, como no escoamento estratificado ascendente de água e ar em tubulação, onde nota-se que a água, mais pesada, tende a “inundar” o tubo, ou instável apenas sob grandes perturbações, como, por exemplo, no escoamento estratificado óleo-água horizontal, onde a baixas vazões há estabilidade, enquanto que a moderadas vazões se percebe um crescimento intenso das ondas de instabilidade. Neste trabalho, será estudada e aplicada apenas a teoria linear da estabilidade hidrodinâmica, ou seja, não será considerada a situação de instabilidade sob grandes perturbações, ou instabilidade não-linear.

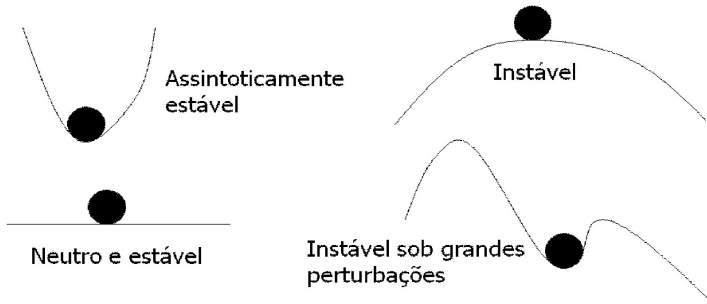


Figura 20: Exemplos mecânicos simples de estados de equilíbrio.

0.4.2 Conceitos Básicos da Estabilidade Hidrodinâmica em Escoamento Bifásico Paralelo

Neste trabalho o estudo será restrito à estabilidade do escoamento bifásico paralelo. Será adotado o termo “escoamento bifásico paralelo” para ambos os escoamentos gás-líquido e líquido-líquido no que se refere a tanto o escoamento de dois fluidos superpostos em uma geometria plana quanto o escoamento de dois fluidos concêntricos em geometria tubular (padrões estratificado e anular). Apesar de restringido aos padrões de escoamento anular e estratificado, o presente estudo tem como motivação uma vasta gama de aplicações. Como exemplos: o transporte de óleo e água em poços direcionais e oleodutos; o uso de fluidos descongelantes para a redução da formação de gelo ou acumulação de neve nas asas de aviões; o escoamento descendente de múltiplas camadas de fluidos em um plano inclinado, técnica usada na manufatura de filmes fotográficos; redução de corrosão por CO_2 em escoamento horizontal gás-líquido através da manutenção de um filme líquido no topo do tubo, o que protege o metal da fase gasosa corrosiva; produção de gás natural e condensado a altas velocidades superficiais; transporte e elevação artificial de petróleo ultra-viscoso através da geração de um filme de água que previne o contato do óleo com a parede da tubulação. Em todos esses exemplos, o estabelecimento de ondas na interface originalmente lisa pode influenciar fortemente a eficiência global do equipamento ou processo.

Focando a atenção sobre o último exemplo do parágrafo ante-

rior, temos o transporte “lubrificado” de óleo ultra-viscoso no padrão anular líquido-líquido. O óleo não entra em contato com a parede do tubo, o que significa que a queda de pressão é balanceada pela tensão cisalhante parietal na água. Conseqüentemente, a presença do anel de água reduz a queda de pressão na linha à mesma ordem de magnitude do escoamento monofásico de água. Em condições de operação, a configuração anular líquido-líquido (*core flow*) é notavelmente robusta, i.e, estável, mesmo ao passar por irregularidades como uniões, curvas e dobras. Do ponto de vista da estabilidade hidrodinâmica, a estabilidade do padrão de escoamento *core flow* (Figs. 6 e 10, padrão A) é surpreendente, especialmente no escoamento horizontal. Apesar de que o óleo é mais leve do que a água, o núcleo oleoso permanece mais ou menos na linha de centro do tubo, sem tocar a parede da tubulação. A hidrodinâmica do escoamento *core flow* ainda não é perfeitamente compreendida, entretanto, acredita-se que ondas na interface óleo-água jogam um papel crucial no balanço de forças agindo sobre o núcleo oleoso. As ondas observadas no escoamento anular líquido-líquido são assimétricas e conhecidas como ondas “bambu” (Figs. 6 e 10, padrão A). Outro exemplo de formação de ondas em escoamento bifásico paralelo é o escoamento anular gás-líquido em tubulações de sistemas de refrigeração ou poços de produção de gás natural. Dos experimentos, observa-se que o início do arrasto de gotículas (*entrainment*) ou formação do aerossol praticamente coincide com o estabelecimento das chamadas *roll waves* na interface gás-líquido. As *roll waves* são longas e lembram as ondas da arrebentação na beira da praia. Medições detalhadas mostram que as *roll waves* de alta amplitude são usualmente cobertas por ondas de pequena amplitude com comprimento de onda da ordem da espessura do filme líquido. Uma explicação provável para o mecanismo de formação do aerossol é que as gotículas são geradas pelo “arrancamento” das ondas curtas das cristas das *roll waves*.

O ponto de partida natural para o estudo da geração de ondas em escoamento bifásico paralelo é a teoria linear da estabilidade hidrodinâmica. Preservando a analogia com o escoamento monofásico, na teoria linear investiga-se como perturbações infinitesimais são amplificadas e como a evolução dessas perturbações está relacionada à transição de um padrão de escoamento bifásico a outro. Essa hipótese permite a linearização das equações em torno do padrão bifásico básico, por exemplo, o padrão estratificado liso ou o padrão anular

perfeito (sem ondas). No âmbito desse arcabouço teórico, estamos interessados no sinal da taxa de crescimento de uma perturbação senoidal com certo comprimento de onda. Uma taxa de crescimento negativa significa extinção da perturbação, enquanto que uma taxa de crescimento positiva indica que a perturbação se amplificará e crescerá mais e mais, até a quebra do padrão básico original ou até que efeitos não-lineares saturem o crescimento. O efeito de saturação do crescimento de uma perturbação conduz tipicamente à formação de ondas interfaciais curtas e de amplitude finita que podem ser vistas a olho nú.

Entretanto, a maior desvantagem da teoria linear é que ela considera apenas perturbações infinitesimais. Ela não leva em conta que instabilidade poderia ser causada por perturbações de amplitude finita, mesmo quando o padrão básico é estável sob perturbações infinitesimais, o que é conhecido como instabilidade sub-crítica. O exemplo clássico é a transição para turbulência em escoamento monofásico de Couette ou Poiseuille. Como instabilidade sub-crítica encontra origem na presença de perturbações de amplitude finita, ela só pode ser descrita por teorias que são essencialmente de natureza não linear. A teoria fracamente não-linear da estabilidade hidrodinâmica é a abordagem não-linear mais simples. Ela pode ser considerada como uma correção das aproximações feitas na teoria linear (Drazin e Reid, [37]).

0.4.3 Classificação das Instabilidades em Escoamento Bifásico Paralelo

Instabilidades originadas de mecanismos físicos variados têm sido identificadas em escoamento bifásico paralelo gás-líquido e líquido-líquido. Uma classificação das instabilidades pode ser feita através da análise da equação que governa a taxa de variação da energia cinética da perturbação. Assim, é possível mostrar a existência de formas diferentes de transferência de energia entre o escoamento básico e o escoamento perturbado, as quais têm sua origem em efeitos cisalhantes, curvatura do perfil de velocidades, estratificação de densidade ou estratificação de viscosidade. Tal análise energética baseia-se no fato de que, por definição, instabilidade implica em aumento da energia cinética de uma perturbação, inicialmente pequena, no tempo. Em escoamento bifásico, mecanismos de diversa origem física são respon-

sáveis pela produção dessa energia. A identificação do mecanismo dominante de produção de energia nos permite discriminar os diferentes tipos de ondas.

Formulação do Problema de Estabilidade

Para a formulação de um problema de estabilidade em escoamento bifásico paralelo, assume-se que o escoamento básico é a solução das equações de Navier-Stokes independentes do tempo, o qual é impelido por um gradiente de pressão que é balanceado por tensão cisalhante e gravidade (Fig. 19). A estabilidade da configuração básica é investigada através da perturbação infinitesimal do escoamento básico. Portanto, os termos de velocidade e pressão são escritos como componentes independentes do tempo (escoamento básico) somados a uma perturbação dependente do tempo. Pressupondo que o escoamento é bidimensional (este sendo sempre mais instável que o tridimensional correspondente) e incompressível, a perturbação de velocidade pode ser representada em fluidos pela função corrente $\Psi_k(x, y, t)$. Como o escoamento básico $v_k(y)$ só depende da coordenada y , assume-se que a função corrente tem a seguinte forma:

$$\Psi_k(x, y, t) = \psi_k(y)e^{i\alpha(x-ct)}, \quad (45)$$

onde i é a unidade imaginária e k indica a fase (1 ou 2). A análise considera o crescimento temporal da perturbação, tomando α como um número de onda real e permitindo que a velocidade da onda c seja complexa. A parte real de c fornece a velocidade de fase da onda, enquanto que a parte imaginária de αc é a taxa de crescimento (positiva se $\text{Im}(\alpha c) > 0$).

A substituição da função corrente $\Psi_k(x, y, t)$ nas equações de Navier-Stokes linearizadas resulta na bem conhecida equação de Orr-Sommerfeld para as funções dependentes de y , $\psi_k(y)$. Na forma adimensional, essas equações são dadas por:

$$\begin{aligned} \psi_1'''' - 2\alpha^2\psi_1'' + \alpha^4\psi_1 = \\ (i\alpha Rr/m) [(V_1 - c)(\psi_1'' - \alpha^2\psi_1) - V_1''\psi_1], \end{aligned} \quad (46)$$

Para a fase superior ($0 < y < n$), e

$$\begin{aligned} \psi_2''' - 2\alpha^2\psi_2'' + \alpha^4\psi_2 = \\ (i\alpha R) [(V_2 - c)(\psi_2'' - \alpha^2\psi_2) - V_2''\psi_1], \end{aligned} \quad (47)$$

Para a fase inferior ($-1 < y < 0$). Primos são usados para indicar diferenciação com relação a y , o número de Reynolds é definido como $R = \rho_2 V_k D_2 / \mu_2$ e as razões r, m e n são definidas como $r = \rho_1 / \rho_2, m = \mu_1 / \mu_2$ e $n = D_1 / D_2$.

As condições de contorno expressando não-deslizamento e paredes rígidas não-porosas são:

$$\begin{aligned} \psi_1 = \psi_1' = 0 \text{ para } y = n, \\ \psi_2 = \psi_2' = 0 \text{ para } y = -1. \end{aligned} \quad (48)$$

As condições na interface são a continuidade dos componentes da velocidade e o equilíbrio dos componentes de tensão.

As equações governantes do escoamento e as condições de contorno na parede e na interface constituem um problema de autovalores para a velocidade de onda complexa c . Para que a solução desse sistema diferencial homogêneo seja diferente de zero, a velocidade de onda c deve assumir valores específicos. Os recursos computacionais atuais permitem a solução numérica de praticamente qualquer perfil básico adotado $V_j(y)$ e um grande número de parâmetros adimensionais. Maiores detalhes quanto à solução numérica podem ser vistos em (Boomkamp *et al.*, [19], [20], e [18]). Finalmente, os autovalores determinam as funções corrente $\Psi_k(x, y, t)$, como definidas na Eq. 45, as quais contém toda a informação sobre as perturbações de velocidade e pressão do problema de estabilidade linear.

Balanco de Energia

Um escoamento instável implica que a energia cinética de uma perturbação inicialmente pequena cresce com o tempo. Embora seja

evidente que energia está sempre sendo suprida pelo escoamento básico, em geral não é claro qual é o mecanismo através do qual isso ocorre. Em escoamento bifásico, por exemplo, é possível que uma instabilidade receba energia do escoamento que ocorre no seio de uma das fases, similarmente ao que ocorre em escoamento monofásico. Também é possível que instabilidade se origine na interface entre os dois fluidos, ou que a energia se origine de mais de uma fonte. Uma forma adequada da equação da energia da perturbação pode ser obtida pela multiplicação das equações de Navier-Stokes, as quais expressam conservação da massa e da quantidade de movimento, pela velocidade; portanto, opera-se o produto interno das perturbações de velocidade nessas equações. Subseqüentemente, opera-se a média no comprimento de onda $\lambda = 2\pi/\alpha$ e integra-se sobre a espessura do fluido. Depois de feito isso para ambas as fases, somam-se os resultados e aplica-se o teorema da divergência de Gauss. Como solução, tem-se a seguinte equação:

$$\sum_{k=1}^2 KIN_k = \sum_{k=1}^2 DIS_k + \sum_{k=1}^2 REY_k + INT, \quad (49)$$

onde:

$$INT = NOR + TAN. \quad (50)$$

Na Eq. 49 temos a contribuição volumétrica de cada fluido para o balanço de energia. O termo KIN_k representa a taxa de variação média no espaço da energia cinética da perturbação. Para um escoamento transiente, a energia cinética de uma perturbação inicialmente pequena cresce com o tempo, *i.e.*, esse termo é sempre positivo. O termo DIS_k representa a taxa de dissipação viscosa do escoamento perturbado em cada fluido. Como esperado, dissipação viscosa opõe-se à instabilidade, ou seja, esse termo é negativo. O termo REY_k representa a taxa na qual o tensor de Reynolds está transferindo energia entre o escoamento básico e o escoamento perturbado. Esse termo pode ser tanto estabilizador (negativo) quanto desestabilizador (positivo).

A contribuição energética INT representa a taxa de trabalho produzida pela deformação da interface. Na Eq. 50, NOR repre-

senta a taxa de trabalho produzida por perturbações de velocidade e tensão na direção normal à interface. TAN representa a taxa na qual velocidade e tensões tangenciais, i.e, na direção do escoamento básico, produzem trabalho na interface. Esse últimos dois termos ainda podem ser subdivididos em:

$$NOR = TEN + HYD, \quad (51)$$

$$TAN = TAN_{\mu} + TAN_{\rho}, \quad (52)$$

onde: TEN é a taxa de trabalho das perturbações relacionada à tensão superficial (ou interfacial) e HYD é a contribuição hidrostática. O termo TAN_{μ} está relacionado à continuidade das tensões cisalhantes de perturbação na interface, i.e, tem relação com a condição de salto de viscosidade. Finalmente, para satisfazer a continuidade da tensão cisalhante total, a tensão cisalhante da perturbação deve se desenvolver em ambos os lados da interface deformada. Devido ao salto na curvatura, entretanto, essas tensões cisalhantes da perturbação são descontínuas através da interface. Para fluidos com viscosidades iguais, isso envolve uma transferência de energia resultante, denotada por TAN_{ρ} . Gravidade é responsável pela criação dessa descontinuidade na tensão cisalhante da perturbação, o que tem levado alguns autores a denominá-la “gravidade interfacial”. Em outras palavras, TAN_{ρ} tem relação com a condição de salto de densidade.

Classificação das Instabilidades em Escoamento Bifásico

- **Instabilidade de Rayleigh-Taylor.** Um sistema bifásico composto de um fluido mais pesado sobre um fluido mais leve desenvolverá instabilidade, pois para ondas suficientemente longas as forças gravitacionais desestabilizadoras são maiores do que as forças restauradoras resultantes da tensão interfacial. Esse tipo de instabilidade leva esse nome devido aos trabalhos pioneiros de Rayleigh [81] e Taylor [103]. Portanto, a fonte de energia desestabilizadora é o trabalho feito pela componente normal da gravidade na interface, HYD , a qual supera os termos estabilizadores relacionados à tensão interfacial, TEN , e dissipação, DIS_k .

- **Instabilidade de Miles.** Os artigos de Miles [66] e [67] tratam da geração de ondas superficiais por escoamentos cisalhantes. Ele propôs um mecanismo invíscido para a transferência de energia de ventos para ondas em águas profundas, assim fornecendo uma explicação para o chamado *sheltering coefficient* de Jeffreys [55]. Assumindo escoamento de ar invíscido, Miles mostrou que a curvatura negativa do perfil de velocidades induz uma tensão de Reynolds positiva e constante, a qual é conhecida por tensão de Reynolds induzida por onda (não confundir com a tensão de Reynolds da turbulência). Ela tem um efeito desestabilizador e transfere energia às ondas gravitacionais com comprimento de onda tipicamente de 10 cm. Portanto, a fonte de energia desestabilizadora relacionada ao tensor de Reynolds do ar, REY_1 , supera todos os outros termos estabilizadores, especialmente dissipação no ar e na água, DIS_k .
- **Instabilidade Induzida por Perturbações Tangenciais Interfaciais.** Esse tipo de instabilidade origina-se na interface e está relacionada à taxa na qual trabalho é feito pelas perturbações de velocidade e tensão na direção do escoamento básico. Ela pode ser dividida em:
 - Instabilidade induzida pela viscosidade. Devido à deformação da interface, uma quantidade resultante de trabalho é feita pelo escoamento básico na interface, o que produz um aumento da energia TAN_μ no escoamento perturbado. Esse mecanismo é observado, por exemplo, no escoamento horizontal líquido-líquido anular (*horizontal core-annular flow*) ou em águas profundas sujeitas a ventos com velocidades superiores a 45 m/s. A fonte de energia desestabilizadora, TAN_μ , de natureza viscosa, supera os termos estabilizadores relacionados à dissipação em ambas as fases, DIS_k .
 - Instabilidade induzida pela gravidade. Trabalho é feito pela componente da gravidade na direção do escoamento, ou seja, ocorre em escoamento não-horizontal. A fonte de energia desestabilizadora interfacial, TAN_ρ , está relacionada à diferença de densidade entre os dois fluidos e

supera os termos estabilizadores relacionados à dissipação em ambas as fases, DIS_k . Esse mecanismo é observado, por exemplo, no escoamento vertical líquido-líquido anular (*vertical core-annular flow*)

- Instabilidade induzida pela viscosidade e pela gravidade. Nesse caso, não é possível separar TAN nos termos TAG_μ e TAG_ρ . A instabilidade é causada pela fusão dos dois mecanismos citados acima.
- **Instabilidade Viscosa.** É bem sabido que escoamento monofásico de Poiseuille em canal torna-se instável quando a vazão de líquido excede certo valor crítico. Essa “instabilidade viscosa” é causada por uma combinação da condição de não deslizamento nas fronteiras e efeitos viscosos no seio da camada crítica, o que gera tensões de Reynolds desestabilizadoras (Drazin e Reid, [37]). As ondas de perturbação são conhecidas por ondas de Tollmien-Schlichting. Supondo um fluido viscoso sobre um fluido menos viscoso (escoamento óleo-água em tubo), o que caracteriza um escoamento de Couette, a fonte de energia desestabilizadora é a tensão de Reynolds no fluido menos viscoso, REY_2 (vorticidade gerada nas fronteiras sólidas e na interface são fontes de instabilidade), a qual supera o termo estabilizador relacionados à dissipação na fase menos viscosa, DIS_2 .
- **Instabilidade Interna.** A fonte de instabilidade pode ser uma combinação de duas ou mais daquelas discutidas acima. Por exemplo, no caso de um filme líquido cisalhado por gás, as instabilidades dominantes são (i) interfacial induzida por viscosidade e (ii) viscosa, *i.e.*, TAN_μ e REY_2 , respectivamente. Elas superam os termos estabilizadores relacionados à dissipação, DIS_1 , e viscosidade, REY_1 , no ar.

0.4.4 Exemplo: Escoamento Estratificado Horizontal em Canal Bidimensional

O objetivo deste exemplo é verificar se o sistema escoamento estratificado horizontal num canal é estável (Fig. 21), desconsiderando a sua resolução e verificar a importância de se conhecer a equação da onda.

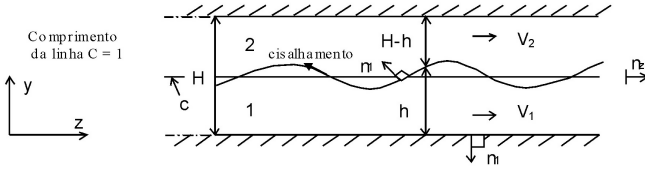


Figura 21: Canal formado por duas placas infinitas, com dois fluidos em escoamento no padrão estratificado.

Hipóteses:

- h1 – Fluidos incompressíveis;
- h2 – Não há mudança de fase;
- h3 – Não há transferência de massa, e
- h4 – Escoamento isotérmico

Balço de massa (Eq. 28):

$$(E1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho_k \rangle A_k) + \frac{\partial}{\partial z} (\langle \rho_k w_k \rangle A_k) = - \int_{\varsigma(z,t)} \rho_k (\vec{V}_k - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_k \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\varsigma}}.$$

Balço de massa da fase 1:

$$(E2) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hV_1)}{\partial z} = 0.$$

onde:

$$(E3) \quad \frac{\partial (hV_1)}{\partial z} = h \frac{\partial V_1}{\partial z} + V_1 \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Substituindo (E3) em (E2) e rearranjando:

$$(E4) \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = -\frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + V_1 \frac{\partial h}{\partial z} \right).$$

Balço de massa da fase 2:

$$(E5) \quad \frac{\partial}{\partial t} (H - h) + \frac{\partial}{\partial z} [(H - h) V_2] = 0,$$

onde:

$$(E6) \quad \frac{\partial}{\partial z} [(H - h) V_2] = (H - h) \frac{\partial V_2}{\partial z} + V_2 \frac{\partial (H - h)}{\partial z}$$

Substituindo (E6) em (E5) e rearranjando:

$$(E7) \quad \frac{\partial V_2}{\partial z} = -\frac{1}{(H + h)} \left(\frac{\partial (H - h)}{\partial t} + V_2 \frac{\partial (H - h)}{\partial z} \right)$$

Balço da quantidade de movimento (Eq. 30):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\langle \rho_k \vec{V}_k \rangle A_k \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\langle \rho_k w_k \vec{V}_k \rangle A_k \right) - A_k \langle \rho_k \vec{g} \rangle + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(\langle p_k \vec{n}_z \rangle A_k \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\langle \vec{n}_z \cdot \tau_k \rangle A_k \right) = \\ & - \int_{\varsigma(z,t)} \left(\dot{m}_k \vec{V}_k - \vec{n}_k \cdot \Pi_k \right) \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\varsigma}} + \\ & \int_{\varsigma_k(z,t)} \vec{n}_k \cdot \Pi_k \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\varsigma}}. \end{aligned}$$

Na direção z , temos (Eq. 32):

$$\begin{aligned}
 \text{(E8)} \quad & \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho_k w_k \rangle A_k) + \frac{\partial \langle \rho_k w_k^2 \rangle A_k}{\partial z} \\
 & - A_k \rho_k g_z \frac{\partial}{\partial z} (\langle p_k \rangle A_k) - \frac{\partial}{\partial z} (\langle (\vec{n}_z \cdot \tau_k) \cdot \vec{n}_z \rangle A_k) = \\
 & \int_{\varsigma(z,t)} \vec{n}_z \left(\dot{m}_k \vec{V}_k - \vec{n}_k \cdot \Pi_k \right) \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\varsigma}} + \\
 & \int_{\varsigma_k(z,t)} \vec{n}_z \cdot (\vec{n}_k \cdot \Pi_k) \frac{d\varsigma}{\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k\varsigma}}.
 \end{aligned}$$

O quinto membro do lado esquerdo da Eq. (E8) refere-se ao tensor cisalhante, cuja interpretação é feita da seguinte forma (Fig. 22):

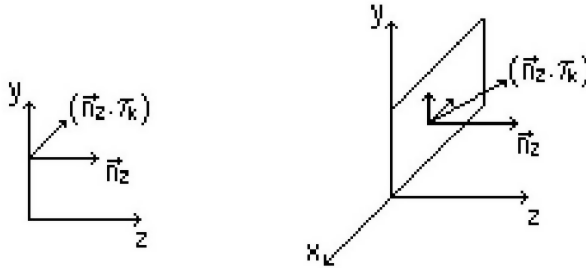


Figura 22: Tensor cisalhante.

O vetor $\vec{n}_z \cdot \tau_k$ não está nem na direção z , nem é paralelo ao plano xy . Porém, $(\vec{n}_z \cdot \tau_k) \cdot \vec{n}_z$ é a projeção do vetor descrito na direção z .

No primeiro membro do lado direito da Eq. (E8) não existe o termo relativo à transferência de massa através da interface ($\vec{n}_k \vec{V}_k = 0$) e o termo relativo ao tensor das tensões na interface

pode ser dividido nos termos de pressão e de tensões viscosas cisalhantes

$$(\Pi_k = -p_k I + \tau_k).$$

O segundo membro do lado direito da Eq. (E8), que é relativo à parede do canal, também tem seu termo relativo ao tensor das tensões na parede dividido nos termos de pressão e de tensões cisalhantes.

Outra consideração relevante é quanto fator de correção c_k , que é dado por:

$$c_k = \frac{\langle w_k^2 \rangle}{\langle w_k \rangle^2}.$$

Balço da quantidade de movimento em z para o canal em questão e para a fase 1:

$$\begin{aligned} \text{(E9)} \quad \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} (hV_1) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial z} (hc_1 V_1^2) + \frac{\partial}{\partial z} (hp) + \frac{\partial}{\partial z} (h\langle \tau_{zz} \rangle) = \\ - \int_{\varsigma(z,t)} \vec{n}_z \cdot [-\vec{n}_1 \cdot (-p_1 I)] \frac{d\varsigma}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{1\varsigma}} - \\ \int_{\varsigma(z,t)} \vec{n}_z \cdot (-\vec{n}_1 \cdot \tau_{1i}) \frac{d\varsigma}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{1\varsigma}} + \\ \int_{\varsigma_1(z,t)} \vec{n}_z \cdot [\vec{n}_1 \cdot (-p_1 I)] \frac{d\varsigma}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{1\varsigma}} + \\ \int_{\varsigma_1(z,t)} \vec{n}_z \cdot (\vec{n}_1 \cdot \tau_{w1}) \frac{d\varsigma}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{1\varsigma}}. \end{aligned}$$

Note que não há componente da gravidade na direção z no escoamento horizontal. Tenha em mente que \vec{n}_l é perpendicular à interface.

O quarto membro do lado esquerdo da Eq. (E9) será desprezado, pois considera-se que a variação da tensão cisalhante na direção z é desprezível.

Análise dos termos na interface

$$(E10) \quad - \int_{\varsigma(z,t)} \vec{n}_z \cdot [-\vec{n}_1 \cdot (-p_{1i}I)] \frac{d\varsigma}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{1\varsigma}} =$$

$$P_{1i} \left(- \int_{\varsigma(z,t)} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_z \frac{d\varsigma}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{1\varsigma}} \right) = P_{1i} \frac{dh}{dz},$$

onde foi utilizado o caso particular do teorema de Gauss na integral.

$$(E11) \quad - \int_{\varsigma(z,t)} \vec{n}_z \cdot (-\vec{n}_1 \cdot \tau_{1i}) \frac{d\varsigma}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{1\varsigma}} = +\tau_{1i},$$

se $V_2 > V_1$ o cisalhamento é favorável ao escoamento de V_1 e , portanto, é positivo.

Análise dos termos na parede

$$(E12) \quad \int_{\varsigma_1(z,t)} \vec{n}_z \cdot [\vec{n}_1 \cdot (-p_1I)] \frac{d\varsigma}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{1\varsigma}} = 0,$$

$$(E13) \quad \int_{\varsigma_1(z,t)} \vec{n}_z \cdot (\vec{n}_1 \cdot \tau_{w1}) \frac{d\varsigma}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{1\varsigma}} = -\tau_{w1}.$$

Assim a Eq. (E9) fica:

$$(E14) \quad \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} (hV_1) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial z} (hc_1V_1^2) +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (hp_1) = P_{1i} \frac{\partial h}{\partial z} + \tau_i - \tau_{w1}.$$

Analogamente, o balanço da quantidade de movimento da fase 2:

$$(E15) \quad \rho_2 \frac{\partial}{\partial t} [(H-h)V_2] + \rho_2 \frac{\partial}{\partial z} [(H-h)c_2 V_2^2] +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} ((H-h)p_2) = P_{2i} \frac{\partial (H-h)}{\partial z} - \tau_i - \tau_{w2}.$$

Se o efeito da tensão superficial não for considerado:

$$(E16) \quad p_{1i} \frac{\partial h}{\partial z} = p_{2i} \frac{\partial (H-h)}{\partial z}.$$

Condição de salto na Interface, da equação de Laplace-Young:

$$(E17) \quad p_{1i} - p_{2i} = \frac{\sigma}{R_i} = -\sigma \frac{\partial^2 h / \partial z^2}{\left[1 + (\partial h / \partial z)^2\right]^{3/2}},$$

onde R_i é o raio de curvatura da interface no plano do papel.

Modelagem

a Leis mecânicas (relação entre p_1 e p_{1i} e entre p_2 e p_{2i}),

$$(E18) \quad p_1 = p_{1i} + \frac{1}{2} \rho_1 g h,$$

$$(E19) \quad p_2 = p_{2i} - \frac{1}{2} \rho_2 g (H-h).$$

b Coeficientes de correlação para a energia cinética:

$$c_1 = c_2 = 1 \quad (\text{perfil uniforme}).$$

c Leis de interação

$$\tau_i = \tau_i(V_1, V_2, h) \quad (\text{formato genérico}).$$

Segue:

$$\tau_{w_{i1}} = \tau_{w_{i1}}(V_1, h),$$

$$\tau_{w_{i2}} = \tau_{w_{i2}}(V_2, h).$$

Definidas através de fatores de atrito.

Com esse modelo as equações (E2), (E5), (E14) e (E15) podem ser resolvidas nas variáveis básicas (h, V_1, V_2 e p).

Para investigar a estabilidade desse sistema, parte-se de uma configuração inicial onde:

$$\left. \begin{array}{l} h = h_0 = \text{constante} \\ v_1 = v_{1,0} = \text{constante} \\ v_2 = v_{2,0} = \text{constante} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Equação da} \\ \text{conservação da massa.} \end{array}$$

onde o índice “o” indica situação de equilíbrio (Fig. 23).

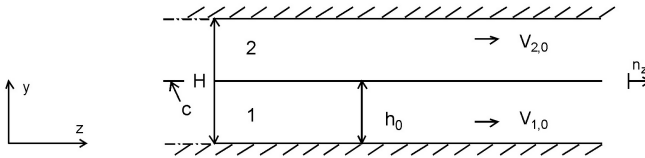


Figura 23: Configuração inicial de equilíbrio para investigação da estabilidade do sistema.

Através de balanço de forças, chega-se nas seguintes equações:

$$(E20) \quad h_0 \frac{\partial p_{1,0}}{\partial z} = \tau_{i,0} - \tau_{w_{1,0}},$$

$$(E21) \quad (H - h_0) \frac{\partial P_{2,0}}{\partial z} = -\tau_{i,0} - \tau_{w_{2,0}},$$

com:

$$(E22) \quad \frac{\partial P_{1,0}}{\partial z} = \frac{\partial P_{2,0}}{\partial z}.$$

A estabilidade hidrodinâmica estuda o eventual crescimento de uma perturbação na configuração inicial. Isto é:

$$(E23) \quad V_1(z, t) = V_{1,0} + w_1(z, t),$$

$$(E24) \quad V_2(z, t) = V_{2,0} + w_2(z, t),$$

$$(E25) \quad h(z, t) = h_0 + \eta(z, t),$$

onde:

w_1, w_2 perturbações de velocidade.

η perturbação-onda de pequena amplitude.

Na teoria da estabilidade linear, as perturbações w_1, w_2 e η são consideradas pequenas, de modo a se poder desprezar termos de segunda ordem ou de ordens mais altas.

Substituindo a Eq. (E18) em (E14) e (E19) em (E15) tem-se:

$$(E26) \quad \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} (hV_1) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial z} (hV_1^2) + h \frac{\partial p_1}{\partial z} +$$

$$p_1 p_1 \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{2} \rho_1 g h \frac{\partial h}{\partial z} + \tau_i - \tau_{w1},$$

$$(E27) \quad \rho_2 \frac{\partial}{\partial t} [(H - h) V_2] + \rho_2 \frac{\partial}{\partial z} [(H - h) V_2^2] +$$

$$(H - h) \frac{\partial p_2}{\partial z} - p_2 \frac{\partial h}{\partial z} =$$

$$-p_2 \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{2} \rho_2 g (H - h) \frac{\partial h}{\partial z} - \tau_i - \tau_{w2}.$$

Multiplicando a Eq. (E26) por $(H - h)$ e a Eq. (E27) por h , e subtraindo uma da outra:

$$\begin{aligned}
 \text{(E28)} \quad & \rho_1 (H - h) \left[\frac{\partial}{\partial t} (hV_1) + \frac{\partial}{\partial z} (hV_1^2) \right] - \\
 & \rho_2 h \left[\frac{\partial}{\partial t} [(H - h)V_2] + \frac{\partial}{\partial z} [(H - h)V_2^2] \right] + \\
 & h(H + h) \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) = \\
 & -\frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) gh (H - h) \frac{\partial h}{\partial z} + \\
 & (H - h) (\tau_i - \tau_{w1}) - (-h) (\tau_i + \tau_{w2}).
 \end{aligned}$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \text{(E29)} \quad & \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) = \\
 & \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_i} \right) + \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) g \frac{\partial h}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

Assim, eliminando $\left[\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z} \right]$ da Eq. (E28) vem:

$$\begin{aligned}
 \text{(E30)} \quad & \rho_1 (H - h) \left[\frac{\partial}{\partial t} (hV_1) + \frac{\partial}{\partial z} (hV_1^2) \right] - \\
 & \rho_2 h \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [(H - h)V_2] + \frac{\partial}{\partial z} [(H - h)V_2^2] \right\} + \\
 & (\rho_1 - \rho_2) gh (H - h) \frac{\partial h}{\partial z} +
 \end{aligned}$$

$$\sigma h (H - h) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_i} \right) =$$

$$(H - h) (\tau_i - \tau_1) - (-h) (\tau_i + \tau_{w2}),$$

onde de (E17), (E18) e (E19):

$$P_1 - P_2 = \frac{\sigma}{R} + \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) gh + \frac{1}{2} \rho_2 gH.$$

Tem-se com a ajuda das Eq (E2) e (E5):

$$(E31) \quad V_1 \left(\frac{\partial h}{\partial t} + V_1 \frac{\partial h}{\partial z} + h \frac{\partial V_1}{\partial z} \right) = 0,$$

$$(E32) \quad V_2 \left[\frac{\partial(H-h)}{\partial t} + V_2 \frac{\partial(H-h)}{\partial z} + (H-h) \frac{\partial V_2}{\partial z} \right] = 0.$$

Analisando os dois primeiros termos da Eq. (E30) através das equações (E31) e E(32):

$$(E33) \quad \rho_1 (H - h) \left[h \frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial h}{\partial t} + V_1^2 \frac{\partial h}{\partial z} + 2hV_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} \right] -$$

$$\rho_2 h \left[(H - h) \frac{\partial V_2}{\partial t} - V_2 \frac{\partial h}{\partial t} - V_2^2 \frac{\partial h}{\partial z} + \right.$$

$$\left. 2(H - h) V_2 \frac{\partial V_2}{\partial z} \right].$$

Portanto:

$$(E34) \quad \rho_1 (H - h) \left[h \frac{\partial V_1}{\partial t} + hV_1 \left(-\frac{1}{h} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial t} + V_1 \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right] -$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 h \left[(H - h) \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 (H - h) \frac{1}{H - h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right] = \\ & \rho_1 (H - h) \left[h \frac{\partial V_1}{\partial t} - V_1 \frac{\partial h}{\partial t} - V_1^2 \frac{\partial h}{\partial z} \right] - \\ & \rho_2 h \left[(H + h) \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial h}{\partial t} + V_2^2 \frac{\partial h}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Agrupando os termos, tem-se:

(E35)

$$\begin{aligned} & h (H - h) \left(\rho_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} \right) - [\rho_1 (H - h) V_1 + \rho_2 h V_2] \frac{\partial h}{\partial t} - \\ & [\rho_1 (H - h) V_1^2 + \rho_2 h V_2^2 - (\rho_1 - \rho_2) g h (H - h)] \frac{\partial h}{\partial z} + \\ & \sigma h (H - h) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_i} \right) = (H - h) (\tau_i - \tau_{w1}) + h (\tau_i - \tau_{w2}) \end{aligned}$$

Sendo:

$$(H - h) (\tau_i - \tau_{w1}) + h (\tau_i - \tau_{w2}) \Rightarrow f(V_1, V_2, h).$$

Aplicando a decomposição de V_1, V_2 e h nas equações (E2), (E5) e (E35):

$$(E36) \quad \frac{\partial}{\partial t} (h_0 + \eta) + \frac{\partial}{\partial z} [(h_0 + \eta) (V_{1,0} + w_1)] = 0,$$

Despreza-se o termo de segunda ordem (perturbações pequenas). Como h_0 não depende do tempo:

$$(E37) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial w_1}{\partial z} + V_{1,0} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0,$$

que é uma equação linear. Analogamente a Eq. (E5) fica:

$$(E38) \quad -\frac{\partial \eta}{\partial t} + (H - h_0) \frac{\partial w_2}{\partial z} - V_{2,0} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0.$$

Decompondo a Eq. (E35):

(E39)

$$\begin{aligned} & (h_0 + \eta) (H - h_0 - \eta) \\ & \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial t} (V_{1,0} + w_1) - \rho_2 \frac{\partial}{\partial t} (V_{2,0} + w_2) \right] - \\ & [\rho_1 (H - h_0 - \eta) (V_{1,0} + w_1) + \rho_2 (h_0 + \eta) (V_{2,0} + w_2)] \\ & \frac{\partial}{\partial t} (h_0 + \eta) - \\ & \left[\rho_1 (H - h_0 - \eta) (V_{1,0} + w_1)^2 + \rho_2 (h_0 + \eta) (V_{2,0} + w_2)^2 - \right. \\ & \left. (\rho_1 - \rho_2) g (h_0 + \eta) (H - h_0 - \eta) \right] \frac{\partial}{\partial z} (h_0 + \eta) + \\ & \sigma (h_0 + \eta) (H - h_0 - \eta) (-1) \frac{\partial^3}{\partial z^3} (h_0 + \eta) = \\ & f [(V_{1,0} + w_1), (V_{2,0} + w_2), (h_0 + \eta)]. \end{aligned}$$

Linearizando os termos (eliminando os termos de segunda ordem):

(E40)

$$h_0 (H - h_0) \left(\rho_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& [\rho_1 (H - h_0) V_{1,0} + \rho_2 h_0 V_{2,0}] \frac{\partial \eta}{\partial t} - \\
& [\rho_1 (H - h_0) V_{1,0}^2 + \rho_2 h_0 V_{2,0}^2 - (\rho_1 - \rho_2) g h_0 (H - h_0)] \frac{\partial \eta}{\partial z} - \\
& \sigma h_0 (H - h_0) \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = f(V_{1,0}, V_{2,0}, h_0) + \\
& \left. \frac{\partial f}{\partial V_1} \right|_0 w_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial V_2} \right|_0 w_2 + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_0 \eta.
\end{aligned}$$

Linearização do lado direito da equação

(E41)

$$f(V_{1,0}, V_{2,0}, h_0) = (H - h_0) (\tau_{i,0} - \tau_{w_{1,0}}) + h_0 (\tau_{i,0} - \tau_{w_{2,0}}).$$

Mas da Eq. (E20) e (E21):

$$(E42) \quad (H - h_0) h_0 \frac{\partial p_{1,0}}{\partial z} = (H - h_0) (\tau_{i,0} - \tau_{w_{1,0}}),$$

$$(E43) \quad h_0 (1 - h_0) \frac{\partial p_{2,0}}{\partial z} = -h_0 (\tau_{i,0} - \tau_{w_{2,0}}).$$

Assim:

$$(E44) \quad 0 = (H - h_0) (\tau_{i,0} - \tau_{w_{1,0}}) + h_0 (\tau_{i,0} - \tau_{w_{2,0}}).$$

Portanto a Eq. (E41) $\equiv 0$. Elevando a ordem da equação:

$$\begin{aligned}
(E45) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[h_0 (H - h_0) \left(\rho_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) \right] = \\
h_0 (H - h_0) \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right) - \rho_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_2}{\partial z} \right) \right].
\end{aligned}$$

Tem-se:

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right) \Rightarrow -\frac{1}{h_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + V_{1,0} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_2}{\partial z} \right) \Rightarrow -\frac{1}{H - h_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + V_{2,0} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right).$$

Resultando:

(E46)

$$A \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + B \left[\begin{array}{c} \text{Ondas} \\ \text{dinâmicas:} \\ \text{Inércia relevante} \\ \overbrace{\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2C \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t} + D \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}} \\ \text{Ondas} \\ \text{Cinemáticas:} \\ \text{continuidade} \\ \overbrace{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + a \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)} \end{array} \right] = 0,$$

onde:

$$(E47) \quad A = \sigma h_0 (H - h_0),$$

$$(E48) \quad B = \rho_1 (H - h_0) + \rho_2 h_0,$$

$$(E49) \quad C = \frac{\rho_1 (H - h_0) v_{1,0} + \rho_2 h_0 V_{2,0}}{\rho_1 (H - h_0) + \rho_2 h_0},$$

(E50)

$$D = \frac{\rho_1 (H - h_0) V_{1,0}^2 + \rho_2 h_0 V_{2,0}^2 - (\rho_1 - \rho_2) g h_0 (H - h_0)}{\rho_1 (H - h_0) + \rho_2 h_0},$$

$$(E51) \quad E = \frac{1}{H - h_0} \left. \frac{\partial f}{\partial V_2} \right|_0 - \frac{1}{h_0} \left. \frac{\partial f}{\partial V_1} \right|_0,$$

$$(E52) \quad a = \frac{\frac{V_{2,0}}{H - h_0} \left. \frac{\partial f}{\partial V_2} \right|_0 - \frac{V_{1,0}}{h_0} \left. \frac{\partial f}{\partial V_1} \right|_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_0}{\frac{1}{H - h_0} \left. \frac{\partial f}{\partial V_2} \right|_0 - \frac{1}{h_0} \left. \frac{\partial f}{\partial V_1} \right|_0},$$

onde a é a velocidade cinemática.

Para que a Eq. (E46) represente uma de onda, é necessário que seja do tipo hiperbólico. Isto requer que certas condições sejam satisfeitas pelos coeficientes C , D e a .

A Eq. (E46), então, permite classificar as ondas em duas classes:

- Ondas hiperbólicas: $A = 0, B \neq 0$
- Ondas dispersas: $A \neq 0, B \neq 0$

Por sua vez, as ondas hiperbólicas podem ser divididas em dois tipos:

1. Ondas cinemáticas $E \gg 1$, ou seja, são descritas por:

$$(E53) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + a \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0.$$

(hiperbólicas de primeira ordem)

1. Ondas dinâmicas $E \ll 1$, ou seja:

$$(E54) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2C \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t} + D \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0.$$

(hiperbólicas de segunda ordem)

Exemplo: estudar a estabilidade quando $A = 0$ e o escoamento é invíscido. Utilizando a Eq. (E46) temos:

$$(E55) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2C \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t} + D \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + E \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + a \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) = 0.$$

- Escoamento Horizontal

$$(E56) \quad f = (H - h) (\tau_i - \tau_{w1}) + h (\tau_i - \tau_{w2}) \equiv 0.$$

Para o caso inclinado, acrescenta-se o seguinte termo: $h(H - h)(\rho_1 - \rho_2)g_z$. Temos que $E \equiv 0$ (invíscido horizontal).

- Escoamento com inclinação

$$(E57)$$

$$f = (H - h) (\tau_i - \tau_{w1}) + h (\tau_i - \tau_{w2}) + h (H - h) (\rho_1 - \rho_2) g_z.$$

$V_1 e V_2$ aparecem no cisalhamento, porém quando invíscido tem-se:

$$(E58) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2C \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t} + D \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0.$$

Para a Eq. (E58) ser hiperbólica, é necessário que $C^2 - D > 0$. Verificação do caráter ondulatório da Eq. (E58):

$$(E59) \quad \eta(z, t) = F \exp [i (kz - wt)],$$

e

$$(E60) \quad \eta(z, t) = F \cos (kz - wt).$$

Como:

$$(E61) \quad c = \frac{w}{k} = \text{velocidade de onda.}$$

Daí:

$$(E62) \quad \eta(z, t) = F \cos [k(z - ct)].$$

Substituindo a Eq. (E60) na Eq. (E58) vem:

$$(E63) \quad -w^2 F \cos(kz - wt) + 2CwkF \cos(kz - wt) + \\ D(-k^2) F \cos(kz - wt) = 0.$$

Restando:

$$(E64) \quad -w^2 + 2Cwk - k^2 D = 0.$$

Dividindo a equação por k^2 temos:

$$(E65) \quad -\left(\frac{w}{k}\right)^2 + 2C\frac{w}{k} - D = 0.$$

Assim:

$$(E66) \quad c^2 - 2Cc + D = 0.$$

e $C^2 - D > 0$, para que as soluções para c sejam reais.

A equação precisa que um discriminante seja positivo. Assim para a existência de um comprimento de onda positivo, o discriminante velocidade não deve ser negativo.

- No caso mais simples onde $V_{1,0} = V_{2,0} = 0$ (parados) das Eqs. (E49) e (E50):

$$C = \frac{\rho_1(H - h_0)V_{1,0} + \rho_2 h_0 V_{2,0}}{\rho_1(H - h_0) + \rho_2 h_0},$$

$$C = 0,$$

$$D = \frac{\rho_1 (H - h_0) V_{1,0}^2 + \rho_2 h_0 V_{2,0}^2 - (\rho_1 - \rho_2) g h_0 (H - h_0)}{\rho_1 (H - h_0) + \rho_2 h_0},$$

$$D = \frac{-(\rho_1 - \rho_2) g h_0 (H - h_0)}{\rho_1 (H - h_0) + \rho_2 h_0},$$

Tem-se que:

$-D > 0 \Rightarrow \rho_1 > \rho_2$, ou seja, o sistema só é estável se o fluido menos denso estiver sobre o fluido mais denso.

- Para $V_{1,0} \neq 0$ e $V_{2,0} \neq 0$

$$C^2 > D.$$

Assim:

$$\left[\frac{\rho_1 (H - h_0) V_{1,0} + \rho_2 h_0 V_{2,0}}{\rho_1 (H - h_0) + \rho_2 h_0} \right]^2 > \left[\frac{\rho_1 (H - h_0) V_{1,0}^2 + \rho_2 h_0 V_{2,0}^2 - (\rho_1 - \rho_2) g h_0 (H - h_0)}{\rho_1 (H - h_0) + \rho_2 h_0} \right].$$

Então:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 (H - h_0)^2 V_{1,0}^2 + 2\rho_1\rho_2 (H - h_0) h_0 V_{1,0} V_{2,0} + \rho_2^2 h_0^2 V_{2,0}^2 > \\ [\rho_1 (H - h_0) + \rho_2 h_0] \\ [\rho_1 (H - h_0) V_{1,0}^2 + \rho_2 h_0 V_{2,0}^2 - (\rho_1 - \rho_2) g h_0 (H - h_0)]. \end{aligned}$$

Rearranjando o segundo termo:

$$\rho_1^2 (H - h_0)^2 V_{1,0}^2 + \rho_1\rho_2 h_0 (H - h_0) V_{2,0}^2 -$$

$$\rho_1 (\rho_1 - \rho_2) g h_0 (H - h_0)^2 + \rho_1 \rho_2 h_0 (H - h_0) V_{1,0}^2 + \rho_2^2 h_0^2 V_{2,0}^2 - \rho_2 (\rho_1 - \rho_2) g h_0^2 (H - h_0).$$

Daí:

$$\rho_1 \rho_2 h_0 (H - h_0) \underbrace{[-V_{1,0}^2 - V_{2,0}^2 + 2V_{1,0}^2 V_{2,0}^2]}_{-(V_{1,0} - V_{2,0})^2} >$$

$$(\rho_1 - \rho_2) g h_0 (H - h_0) [\rho_2 h_0 + \rho_1 (H - h_0)].$$

Como:

$$-(V_{1,0} - V_{2,0})^2 = -V_{1,0}^2 - V_{2,0}^2 + 2V_{1,0}^2 V_{2,0}^2.$$

Portanto, temos que:

$$\underbrace{(V_{1,0} - V_{2,0})^2}_{\substack{\text{força Inercial} \\ \text{(desestabilizadora)}}} < \underbrace{\frac{(\rho_1 - \rho_2) g [\rho_2 h_0 + \rho_1 (H - h_0)]}{\rho_1 \rho_2}}_{\substack{\text{Força estabilizadora, } > 0 \\ (\rho_1 > \rho_2)}}.$$

O critério derivado acima equivale ao critério clássico de Kelvin-Helmholtz.

0.5 Aplicações

0.5.1 Análise da Estabilidade do Escoamento Líquido-Líquido Anular (*Core-Annular Flow*)

Neste exemplo de aplicação, apresenta-se a dedução de um critério de transição geral para a localização do padrão de escoamento

líquido-líquido anular (*core-annular flow*) em tubulação horizontal e vertical. Ele se baseia num modelo de dois fluidos unidimensional rigoroso do escoamento bifásico líquido-líquido e considera a existência de um número de onda interfacial crítico relacionado a um termo de tensão interfacial não-desprezível, para o qual a teoria linear da estabilidade hidrodinâmica ainda é válida. O problema viscoso laminar-laminar é totalmente resolvido e efeitos da turbulência sobre a estabilidade são analisados através de fatores de forma ajustados experimentalmente. O critério de transição geral proposto inclui em sua formulação o discriminador invíscido de Kelvin-Helmholtz. Se um comprimento de onda máximo teórico é considerado como condição necessária para a estabilidade, um critério de transição em termos do número de Eötvös é obtido. Efeitos de tensão interfacial, razão de viscosidades, diferença de densidades e fatores de forma sobre a estabilidade do padrão anular são levados em conta. A modelagem mais completa permite a análise do número de onda de estabilidade neutra e os resultados sugerem fortemente que a tensão interfacial tem um papel indispensável para a correta previsão da região estável do padrão anular líquido-líquido. A incorporação de um comprimento de onda mínimo teórico no modelo de transição produz resultados significativamente melhores em comparação com outros modelos da literatura.

Formulação do Problema de Estabilidade Para Escoamento Anular

Pode ser observada na Fig. 24 uma descrição esquemática do padrão de escoamento líquido-líquido anular (*core-annular flow*). A análise baseia-se no modelo de dois fluidos, onde as equações diferenciais transientes unidimensionais médias na seção transversal da continuidade e quantidade de movimento são aplicadas para a fase central e a fase anular. As equações são acopladas através de relações constitutivas apropriadas. Os fluidos são considerados incompressíveis e o escoamento isotérmico e sem mudança de fase. O índice 1 indica a fase central (óleo) e o índice 2 indica a fase anular (água).

Partimos das seguintes equação de balanço:

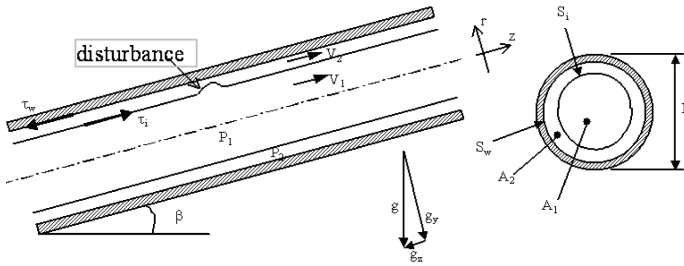


Figura 24: Descrição esquemática do padrão de escoamento líquido-líquido anular.

Continuidade

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} + \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} + V_1 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z} = 0, \quad (53)$$

$$-\frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} + (1 - \epsilon_1) \frac{\partial V_2}{\partial z} - V_2 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z} = 0. \quad (54)$$

Quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \rho_1 \left[\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_1 V_1) + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_1 k_1 V_1^2) \right] + \epsilon_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} = \\ -\frac{S_i \tau_i}{A} + \epsilon_1 \rho_1 g_z, \end{aligned} \quad (55)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_2 \left[\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_2 V_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_2 k_2 V_2^2) \right] + \epsilon_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} = \\ -\frac{S_i \tau_i}{A} - \frac{4}{D} \tau_w + \epsilon_2 \rho_2 g_z, \end{aligned} \quad (56)$$

onde V corresponde às velocidades axiais médias *in situ*, ρ corresponde às densidades, D é o diâmetro interno do tubo, g é a componente da gravidade na direção axial, ϵ_l é a fração volumétrica do óleo

in situ ou *holdup*, τ_i e τ_w são, respectivamente, as tensões cisalhantes interfacial e parietal, e ainda: $\epsilon_2 = (1 - \epsilon_1)$, $S_i = \pi D \epsilon_1^{0,5}$, $A = \pi D^2/4$ e $k = \langle V^2 \rangle / \langle V \rangle^2$, tendo em mente que, $\langle f_k \rangle = 1/A_k \int f_k dA$, onde f corresponde a qualquer função de fase e o subscrito k é o índice de fase. Os parâmetros de distribuição de energia cinética ou fatores de forma, k_k , são dados por:

$$k_1 = \frac{\langle w_1^2 \rangle}{V_1^2} = \frac{\frac{1}{\pi r^2} \int_0^{R_1} w_1^2 d(\pi r^2)}{\left[\frac{1}{\pi r^2} \int_0^{R_1} w_1 d(\pi r^2) \right]^2}, \quad (57)$$

e

$$k_2 = \frac{\langle w_2^2 \rangle}{V_2^2} = \frac{\frac{1}{\pi r^2} \int_{R_1}^{D/2} w_2^2 d(\pi r^2)}{\left[\frac{1}{\pi r^2} \int_{R_1}^{D/2} w_2 d(\pi r^2) \right]^2}, \quad (58)$$

onde w_k corresponde aos perfis de velocidade e $R_1 = D\sqrt{\epsilon_1}/2$.

Uma relação constitutiva é necessária para o fechamento do problema. A lei de Laplace-Young é escolhida para relacionar as pressões nas fases através da tensão interfacial. Propõe-se a seguinte relação:

$$P_1 - P_2 = \frac{\sigma}{R_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial R_1} \left[R_1 \left(1 + \left\{ \frac{\partial R_1}{\partial z} \right\}^2 \right)^{-1/2} \right] - \frac{0.166 \Delta \rho g_y \epsilon_1 A}{\sigma} \right\}, \quad (59)$$

onde o primeiro termo do lado direito da Eq. 59 corresponde ao efeito de variações na curvatura do núcleo (óleo) na direção axial (ondas interfaciais) e o segundo termo corresponde a distorções no contorno do núcleo devido à diferença de densidades, o que foi descrito por Bannwart [11], σ é a tensão interfacial óleo-água, e g_y é a componente da gravidade na direção radial.

A equação da quantidade de movimento para a fase anular (Eq. 5.4) é subtraída da equação da quantidade de movimento para a fase central (Eq. 5.3) e, para a eliminação o termo de diferença de pressão, a Eq. (5.7) é substituída na equação resultante. Assim obtemos a equação da quantidade de movimento unidimensional média na seção transversal para o padrão anular líquido-líquido (Eq. 5.8). Juntamente com as Eqs. (5.1) e (5.2) tem-se um conjunto de 3 equações envolvendo 3 incógnitas, V_1, V_2 e ϵ_1 :

$$\begin{aligned}
& (1 - \epsilon_1) \rho_1 \left[\frac{\partial(\epsilon_1 V_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_1 k_1 V_1^2) \right] - \\
& \epsilon_2 \rho_2 \left[\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \epsilon_1) V_2] + \frac{\partial}{\partial z} [(1 - \epsilon_1) k_2 V_2^2] \right] + \\
& (1 - \epsilon_1) \epsilon_1 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{2\sigma}{D\sqrt{\epsilon_1}} + \frac{D\sigma}{16\epsilon_1^{3/2}} \left(\frac{\partial\epsilon_1}{\partial z} \right)^2 - \right. \\
& \left. \frac{D\sigma}{4\sqrt{\epsilon_1}} \frac{\partial^2\epsilon_1}{\partial z^2} - 0.26\delta\rho g_y D\sqrt{\epsilon_1} \right] = \\
& - (1 - \epsilon_1) \frac{S_i}{A} \tau_i - \epsilon_1 \frac{S_i}{A} \tau_i + \epsilon_1 \frac{4}{D} \tau_w + \\
& \epsilon_1 (1 - \epsilon_1) g_z (\rho_1 - \rho_2). \tag{60}
\end{aligned}$$

A análise da estabilidade hidrodinâmica compreende o estudo de um eventual crescimento de uma pequena perturbação na configuração de escoamento básica inicial, tal que.

$$V_1 = V_1^o + w_1, \quad V_2 = V_2^o + w_2 \quad \text{e} \quad \epsilon_1 = \epsilon_1^o + \eta, \tag{61}$$

onde o sobrescrito “o” indica a condição de equilíbrio (sem perturbação) e w_1, w_2 e η representam as pequenas perturbações impostas na velocidade e fração volumétrica do núcleo, respectivamente. Além disso, V_1^o, V_2^o e s_i^o são constantes e w_1, w_2 e $\eta = f(z, t)$.

De acordo com a teoria linear da estabilidade e seguindo o método

das pequenas perturbações, w_1 , w_2 e η são consideradas infinitesimais e, conseqüentemente, termos de segunda ordem ou superiores podem ser desprezados. Tal simplificação parece bastante razoável para o escoamento de óleo ultra-viscoso e água no padrão anular, pois as ondas interfaciais observadas experimentalmente são relativamente curtas, de amplitude finita e não apresentam um comportamento não-linear. Substituindo a Eq. 61 nas Eqs. 53, 54 e 60 e desprezando todos os termos de ordens superiores, obtêm-se as seguintes equações da continuidade e quantidade de movimento, respectivamente:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon_1^o \frac{\partial w_1}{\partial z} + V_1^o \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad (62)$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + (1 - \epsilon_1^o) \frac{\partial w_2}{\partial z} - V_2^o \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad (63)$$

e

$$\begin{aligned} & \epsilon_1^o (1 - \epsilon_1^o) \left(\rho_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) + \\ & \left[\rho_1 V_1^o (1 - \epsilon_1^o) (1 - 2k_1^o) + \rho_2 v_2^o \epsilon_1^o (1 - 2k_2^o) \right] \frac{\partial \eta}{\partial t} - \\ & \left\{ \rho_1 (V_1^o)^2 (1 - \epsilon_1^o) \left[k_1^o - \epsilon_1^o \frac{dk_1}{d\epsilon_1} \right]_o + \right. \\ & \left. \rho_2 (V_2^o)^2 \epsilon_1^o \left[k_2^o - (1 - \epsilon_1^o) \frac{dk_2}{d\epsilon_1} \right]_o \right\} \\ & + \frac{(1 - \epsilon_1^o) \sigma}{D \sqrt{\epsilon_1^o}} + 0.13 \Delta \rho g_y D \sqrt{\epsilon_1^o} (1 - \epsilon_1^o) \left. \right\} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \\ & \frac{(1 - \epsilon_1^o) \sqrt{\epsilon_1^o} D \sigma}{4} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = \\ & \left. \frac{\partial f_e}{\partial V_1} \right|_0 w_1 + \left. \frac{\partial f_e}{\partial V_2} \right|_0 w_2 + \left. \frac{\partial f_e}{\partial \epsilon_1} \right|_0 \eta, \quad (64) \end{aligned}$$

onde os termos do lado direito da Eq. 60 foram linearizados através de expansão em série de Taylor até a primeira ordem, e:

$$f_e = f(V_1, V_2, \epsilon_1) = -\frac{S_i \tau_i}{A} + \epsilon_1 (1 - \epsilon_1) g_z (\rho_1 - \rho_2) + \frac{4\epsilon_1 \tau_w}{D}. \quad (65)$$

Para a eliminação dos termos de perturbação de velocidade, w_1 e w_2 , são usadas as Eqs. 62 e 63 e a Eq. 64 é derivada em relação a z . Finalmente, é obtida a equação diferencial da perturbação ou equação da estabilidade para o padrão de escoamento líquido-líquido anular:

$$M \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2E \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial z} + F \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + G \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) = 0, \quad (66)$$

cujos coeficiente são:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sigma D \sqrt{\epsilon_1^o} (1 - \epsilon_1^o)}{4}, \\ N &= \rho_1 (1 - \epsilon_1^o) + \rho_2 \epsilon_1^o, \\ E &= \rho_1 V_1^o (1 - \epsilon_1^o) k_1^o + \rho_2 V_2^o \epsilon_1^o k_2^o, \\ F &= \rho_1 (V_1^o)^2 (1 - \epsilon_1^o) \left(k_1^o - \epsilon_1^o \frac{dk_1}{d\epsilon_1} \Big|_o \right) + \\ &\rho_2 (V_2^o)^2 \epsilon_1^o \left[k_2^o + (1 - \epsilon_1^o) \frac{dk_2}{d\epsilon_1} \Big|_o \right] + \\ &\frac{(1 - \epsilon_1^o) \sigma}{D \sqrt{\epsilon_1^o}} + 0.13 \Delta \rho g_y D \sqrt{\epsilon_1^o} (1 - \epsilon_1^o), \end{aligned}$$

$$G = -\frac{1}{\epsilon_1^o} \frac{\partial f_e}{\partial V_1} \Big|_o + \frac{1}{1 - \epsilon_1^o} \frac{\partial f_e}{\partial V_2} \Big|_o,$$

$$H = \frac{-\frac{V_1^o}{\epsilon_1^o} \frac{\partial f_e}{\partial V_1} \Big|_o + \frac{V_2^o}{1 - \epsilon_1^o} \frac{\partial f_e}{\partial V_2} \Big|_o + \frac{\partial f_e}{\partial \epsilon_1} \Big|_o}{-\frac{1}{\epsilon_1^o} \frac{\partial f_e}{\partial V_1} \Big|_o + \frac{1}{1 - \epsilon_1^o} \frac{\partial f_e}{\partial V_2} \Big|_o} = c_o,$$

onde c_o é velocidade de onda cinemática, segundo Wallis [109].

A solução exata do problema linearizado é desenvolvida segundo a metodologia de solução de Whitham [110]. A Eq. 66 é normalizada para a avaliação de seu caráter ondulatorio, tal que:

$$\eta(z, t) = \eta_{\max} e^{i\alpha(z-ct)}, \quad (67)$$

onde $\alpha = 2\pi/\lambda$ é o número de onda, λ é o comprimento da onda interfacial e c é a celeridade da onda.

Substituindo a Eq. 67 na Eq. 66, obtêm-se a seguinte equação:

$$\alpha \frac{N}{G} \left(c^2 - 2 \frac{E}{N} c + \frac{F - M\alpha^2}{N} \right) + i(c - H) = 0. \quad (68)$$

Rearranjando a Eq. 68 e aplicando o teorema de Viète, temos:

$$\alpha \frac{N}{G} (c - c_1)(c - c_2) + i(c - c_o) = 0, \quad (69)$$

onde H foi substituída por c_o . Aproximando $c = c_1$ e $c = c_2$, a Eq. 69 fornece, respectivamente:

$$\omega \cong \alpha c_1 - i \frac{G}{N} \frac{c_1 - c_o}{c_1 - c_2} \quad \text{e} \quad (70)$$

e

$$\omega \cong \alpha c_2 - i \frac{G}{N} \frac{c_2 - c_o}{c_2 - c_1}. \quad (71)$$

Segundo a análise temporal de estabilidade, uma condição necessária para estabilidade é que a componente imaginária da frequência angular, ω , Eqs. 70 e 71, deve ser negativa. Rearranjando as Eqs. 70 e 71 e assumindo que $c_1 > c_2$, chega-se aos seguintes critérios:

$$\begin{cases} 1 - G > 0 \\ 2 - c_1 \text{ e } c_2 \text{ devem ser reais} \\ 3 - c_2 \leq c_o \leq c_1 \end{cases} \quad (72)$$

A condição de que c_1 e c_2 sejam reais corresponde ao critério de estabilidade invíscido de Kelvin-Helmholtz e pode ser expressa como:

$$V_o^2 + \frac{M\alpha^2 - F}{N} \geq 0, \quad (73)$$

onde V_o é a velocidade média ponderada, a qual corresponde a razão dos coeficiente E/N . A Eq. 73 é em geral satisfeita para comprimentos de onda relativamente curtos através da tensão interfacial.

Os critérios descritos pela Eq. 72 podem ser combinados em um único critério. Resolvendo a 68 para c (componente real) e aplicando os critérios, resulta o seguinte critério geral de estabilidade:

$$0 \leq \frac{\left(\frac{c_o}{V_o} - 1\right)^2}{M \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - F} \cdot \frac{1}{1 + \frac{NV_o^2}{M \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - F}}. \quad (74)$$

Vale a penas destacar que o denominador da Eq. 74 é reconhecido como sendo o discriminador de Kelvin-Helmholtz (Eq. 73). Portanto, se o critério geral (Eq. 74) fornecer um valor negativo, isso significa que o critério invíscido de Kelvin-Helmholtz foi violado. Por outro lado, se ele fornecer um valor superior à unidade, isso significa que o terceiro critério da Eq. 72 não está sendo satisfeito.

Crítério Invíscido de Kelvin-Helmholtz (Eq. 73)

Neste caso, o coeficiente G da equação da onda (Eq. 66 é desprezível, *i.e.*, os efeitos viscosos podem ser desprezados. A Eq. 66 torna-se:

$$M \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2E \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial z} + F \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0. \quad (75)$$

Substituindo Eq. 67 na Eq. 75, aplicando os requerimentos essenciais da análise invíscida à sua relação de dispersão e assumindo que os perfis de velocidade são uniformes ($s_{f,1} = s_{f,2} = 1$), o seguinte critério de estabilidade é obtido para escoamento líquido-líquido anular:

$$Eo^* < 24 \left[\frac{\epsilon_1^o D^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\pi} - 2We_2 \left(\frac{s_o - 1}{1 - \epsilon_1^o} \right)^2 \frac{(\epsilon_1^o)^{3/2} \rho_1}{\rho_1 (1 - \epsilon_1^o) + \rho_2 \epsilon_1^o} \right], \quad (76)$$

onde:

$$Eo^* = \frac{(\rho_1 - \rho_2) g_y \epsilon_1^o A}{\sigma}, \quad (77)$$

$$We_2 = \frac{\rho_2 J_2^2 D}{2\sigma}, \quad (78)$$

são o número de Eötvös e o número de Weber da fase anular, e $s_o = V_1^o/V_2^o$ é o deslizamento. Se se assume que não há deslizamento entre as fases, a Eq. 76 reduz-se a:

$$Eo^* < 60 \left(\frac{\epsilon_1^o D^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\pi^2} \right). \quad (79)$$

Se a existência de um comprimento de onda interfacial máximo crítico é considerado como uma condição necessária para a estabilidade, a Eq. 79 fornece um critério de estabilidade em termos do

número de Eötvös. Para o caso mais simples de um escoamento anular vertical ascendente o critério pode ser simplificado ainda mais e a Eq. 80 torna-se:

$$\lambda^* < \pi\sqrt{\epsilon_1}, \quad (80)$$

onde $\lambda^* = \lambda/D$.

Na Fig. 25 pode ser vista uma comparação entre comprimentos de onda interfacial observados por Rodriguez e Bannwart [13] e o comprimento de onda máximo previsto pela Eq. 80. Os dados experimentais (símbolos) correspondem a todas as situações para as quais o padrão de escoamento líquido-líquido anular foi observado. De acordo com a Eq. 80 e para o caso testado, o padrão anular é estável para $\lambda^* \leq \lambda_{\text{max}=2}^*$. O comprimento de onda adimensional máximo observado foi de $\lambda^* = 1.86 < \lambda_{\text{max}}^*$, o que está em excelente concordância com os dados experimentais. Segundo Rodriguez e Bannwart [13], comprimentos de onda maiores que $\lambda^* = 1.86$ estão relacionados à transição do padrão anular ao padrão intermitente (vide também Fig. 6).

Para o caso do escoamento anular horizontal, o critério assume a seguinte forma:

$$\lambda^* < \frac{\pi\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{1 + 1.3\frac{\Delta\rho D^2\epsilon_1}{\sigma}}}. \quad (81)$$

Critério Geral (Eq. 74)

O efeito da tensão interfacial na estabilidade do padrão líquido-líquido anular depende do comprimento de onda: comprimentos de onda curtos tendem a estabilizar o escoamento, enquanto que comprimentos de onda longos tendem a desestabilizá-lo. Esse efeito foi originalmente determinado por Ooms [77], entretanto a presente análise unidimensional indica a existência de um comprimento de onda mínimo crítico, para o qual ocorre o equilíbrio entre forças relacionadas à tensão interfacial e forças gravitacionais. Na Fig. 26 observa-se o efeito do comprimento de onda na estabilidade do escoamento anular laminar-laminar de densidades iguais, segundo o critério geral Eq. 74, através de dois números de Weber (Eq. 79) diferentes.

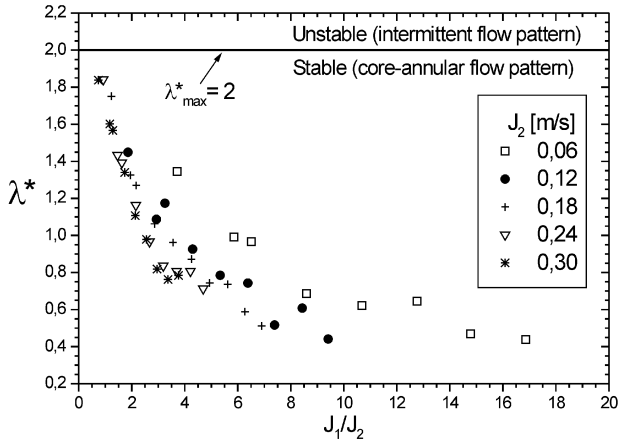


Figura 25: Comprimentos de onda obtidos experimentalmente para um escoamento líquido-líquido vertical ascendente no padrão anular em função da razão de injeção óleo-água (Rodriguez e Bannwart [89]) e comprimento de onda máximo previsto pelo critério de Kelvin-Helmholtz (Eq. 80).

Para o maior W_{e2} , Fig. 26a, há apenas um pequeno ou praticamente nenhum efeito da tensão interfacial na região estável ($\epsilon_1 > 0.5$). Para o menor W_{e2} e $\lambda^* < \lambda^*_{max}$, Fig. 26b, o escoamento tende a torna-se incondicionalmente estável, o que mostra a importância que a tensão interfacial adquire nesse caso.

Um comprimento de onda mínimo da ordem da metade do diâmetro da tubulação foi observado experimentalmente em escoamento líquido-líquido anular vertical ascendente a altas frações volumétricas *in situ* por Rodriguez e Bannwart [89]. Aqueles autores propuseram um número de Eötvös baseado no comprimento de onda, dado por:

$$Eo^* \cong \frac{\Delta\rho g \lambda D \sqrt{\epsilon_1}}{4\sigma} \cong \text{constante.} \quad (82)$$

Eles observaram que o número de Eötvös (Eq. 82 é aproxima-

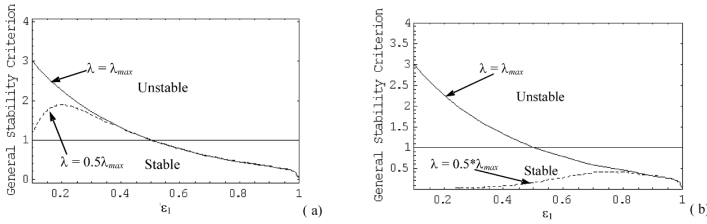


Figura 26: Efeito do comprimento de onda na estabilidade (Eq. 74) do escoamento anular líquido-líquido de densidades iguais; (a) $We_2 = 500$ e (b) $We_2 = 0.5$.

damente constante. Para uma fração volumétrica *in situ* de 0.90, associada à transição do padrão anular estável ao padrão anular com dispersão no anel aquoso, o número de Eötvös é igual a 2. Portanto, a Eq. 82 fornece um comprimento de onda de meio diâmetro de tubo para as condições testadas por aqueles autores, o que está em perfeita concordância com suas observações experimentais. Assim, propõe-se que o critério de estabilidade geral (Eq. 74) seja aplicado com um comprimento de onda $\lambda^* = 0.5$ para escoamento líquido-líquido anular.

Uma forma conveniente de avaliar o critério geral de transição proposto é através de comparação com dados experimentais sobre uma carta de fluxo das velocidades superficiais de água e óleo (J_1 e J_2 , respectivamente). Na Fig. 27, vemos essa comparação para quatro casos diferentes encontrados na literatura. A linha grossa representa a fronteira de transição experimental e linha fina a fronteira de transição prevista pela Eq. 74. Na Fig. 27, SCAF significa escoamento anular estável com ondas bambu (vide também Fig. 6, padrão A) e UCAF significa escoamento anular instável com gotículas dispersas no anel aquoso e núcleo altamente perturbado por ondas de alta frequência. O critério de transição (Eq. 74) foi testado para escoamento líquido-líquido anular (*core flow*) em tubulação vertical grande (Fig. 27a) e pequena (Fig. 27b) e em tubulação horizontal (Fig. 27c e d) para óleos com diferentes viscosidades. A concordância entre dados e previsões é mais do que encorajadora. Quantitativamente, a concordância entre previsões e dados é bastante boa; Entretanto, o resultado mais interessante é qualitativo. Nota-se que

a modelagem unidimensional foi capaz, para todos os casos testados, de capturar a tendência de diminuição da área estável a baixas velocidades superficiais de água, o que demonstra claramente a validade da abordagem adotada. Maiores detalhes podem ser vistos em Rodriguez e Bannwart, [91].

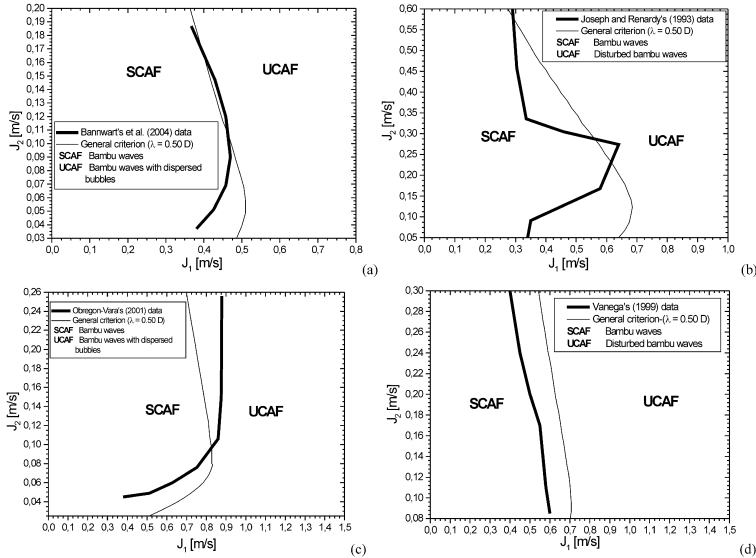


Figura 27: Fronteiras de transição prevista por Eq. 74 (linha fina, $\lambda = 0.5D$) e experimental (linha grossa) observada por: (a) Bannwart *et al.* [10] (padrão líquido-líquido anular vertical ascendente, $D = 0.0284$ m, tubo de vidro, água de torneira e óleo cru, $\rho_1 = 9354 \text{ kg/m}^3$, $\mu_1 = 500$ mPa s, $\sigma = 0.029$ N/m); (b) Joseph e Renardy [59] (padrão líquido-líquido anular vertical ascendente, $D = 0.009525$ m, tubo plástico, água de torneira e óleo mineral, $\rho_1 = 881$ kg/m³, $\mu_1 = 1300$ mPa s, $\sigma = 0.020$ N/m); (c) Obregon-Vara [72] (padrão líquido-líquido anular horizontal, $D = 0.0284$ m, tubo de vidro, água de torneira e óleo cru, $\rho_1 = 945$ kg/m³, $\mu_1 = 1193$ mPa s, $\sigma = 0.029$ N/m) e (d) Vanegas-Prada [108] (padrão líquido-líquido anular horizontal, $D = 0.0276$ m, tubo de aço galvanizado, água de torneira e óleo mineral, $\rho_1 = 960$ kg/m³, $\mu_1 = 15000$ mPa s, $\sigma = 0.020$ N/m).

0.5.2 Análise da Estabilidade do Escoamento Líquido-Líquido Estratificado

Um critério de transição geral é proposto para localizar o padrão de escoamento líquido-líquido estratificado em tubulação horizontal e levemente inclinada. O critério proposto baseia-se no modelo de dois fluidos unidimensional do escoamento bifásico líquido-líquido. Ele considera a existência de um comprimento de onda interfacial crítico relacionado a um termo de tensão interfacial não-desprezível, para o qual a teoria da estabilidade linear ainda é válida. O comprimento de onda crítico observado pode ser explicitamente incorporado no modelo, *i.e.*, o número de onda de estabilidade neutra assume um valor diferente de zero. A aproximação de onda longa é descartada e um novo termo desestabilizador relacionado à curvatura da interface no plano transversal do tubo é derivado. O critério proposto produz resultados significativamente melhores em comparação com outros modelos da literatura, especialmente nas regiões da carta de fluxo de frações volumétricas extremas.

Formulação do Problema de Estabilidade Para Escoamento Estratificado

A análise baseia-se no modelo de dois fluidos do escoamento estratificado (Fig. 28), onde as equações diferenciais transientes unidimensionais médias na seção transversal da continuidade e quantidade de movimento são aplicadas para ambas as fases. As equações são então acopladas através de relações constitutivas apropriadas. Os fluidos são considerados incompressíveis e o escoamento isotérmico e sem mudança de fase.

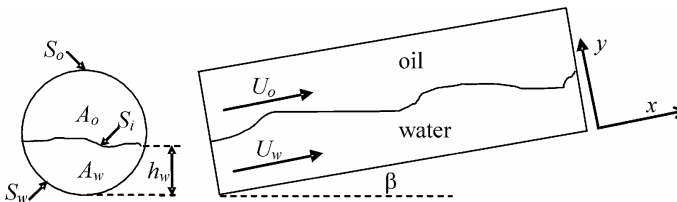


Figura 28: Descrição esquemática da configuração estratificada.

As seguintes equações de balanço são formuladas:

Continuidade:

$$\frac{\partial A_w}{\partial t} + A_w \frac{\partial U_w}{\partial x} + U_w \frac{\partial A_w}{\partial x} = 0, \quad (83)$$

$$\frac{\partial A_o}{\partial t} + A_o \frac{\partial U_o}{\partial x} + U_o \frac{\partial A_o}{\partial x} = 0. \quad (84)$$

Quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \rho_w A_w \frac{\partial U_w}{\partial t} + \rho_w A_w U_w \frac{\partial (U_w k_w)}{\partial x} = \\ -\tau_w S_w \pm -\tau_i S_i - \rho_w A_w g \sin \beta - \\ A_w \frac{\partial P_{iw}}{\partial x} + \rho_w A_w g \cos \beta \frac{\partial h_w}{\partial x}, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \rho_o A_o \frac{\partial U_o}{\partial t} + \rho_o A_o U_o \frac{\partial (U_o k_o)}{\partial x} = \\ -\tau_o S_o \pm \tau_i S_i - \rho_o A_o g \sin \beta - \\ A_o \frac{\partial P_{io}}{\partial x} + \rho_o A_o g \cos \beta \frac{\partial h_w}{\partial x}, \end{aligned} \quad (86)$$

onde U corresponde às velocidades medias axiais *in situ*; ρ corresponde às densidades; D é o diâmetro interno do tubo; g é a aceleração da gravidade; A_o e A_w são as áreas de seção transversal do óleo e da água, respectivamente; τ_i e τ_w são, respectivamente, as tensões cisalhantes interfacial e parietal; $k = \langle V^2 \rangle / \langle V \rangle^2$, tendo em mente que, $\langle f_k \rangle = 1/A_k \int f_k dA$, onde f corresponde a qualquer função de fase e k é o índice de fase. Os fatores de forma, k_k , são dados por:

$$k_w = \frac{\langle u_w^2 \rangle}{U_w^2} = \frac{1}{A_w U_w^2} \int_0^A u_w^2 dA_w, \quad (87)$$

e

$$k_o = \frac{\langle u_o^2 \rangle}{U_o^2} = \frac{1}{A_o U_o^2} \int_0^A u_o^2 dA_o, \quad (88)$$

Onde u_n corresponde aos perfis de velocidades. Considerando $A_w = A_w(h_w)$ e como $A'_w = dA_w/dh_w$ são obtidas as seguintes equações:

Continuidade:

$$\frac{\partial h_w}{\partial t} + U_w \frac{\partial h_w}{\partial x} + \frac{A_w}{A'_w} \frac{\partial U_w}{\partial x} = 0, \quad (89)$$

$$\frac{\partial h_w}{\partial t} + U_o \frac{\partial h_w}{\partial x} + \frac{A_o}{A'_w} \frac{\partial U_o}{\partial x} = 0. \quad (90)$$

Quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} & \rho_w \frac{\partial U_w}{\partial t} - \rho_o \frac{\partial U_o}{\partial t} + \rho_w U_w \left(k_w \frac{\partial U_w}{\partial x} + U_w \frac{dk_w}{dh_w} \frac{\partial h_w}{\partial x} \right) - \\ & \rho_o U_o \left(k_o \frac{\partial U_o}{\partial x} + U_o \frac{dk_o}{dh_w} \frac{\partial h_w}{\partial x} \right) + \\ & (\rho_w - \rho_o) g \cos \beta \frac{\partial h_w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (P_{iw} - P_{io}) = F, \end{aligned} \quad (91)$$

onde:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\tau_w S_w}{A_w} + \frac{\tau_o S_o}{A_o} \pm \\ & \tau_i S_i \left(\frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_o} \right) - (\rho_w - \rho_o) g \sin \beta. \end{aligned} \quad (92)$$

Uma relação constitutiva é necessária para o fechamento do problema. A lei de Laplace-Young é escolhida para relacionar as pressões nas fases através da tensão interfacial. Propõe-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} (P_{io} - P_{iw}) &= -\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 h_w}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h_w}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} = \\
&\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\frac{\partial^2 h_w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h_w}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{h_w \left[1 + \left(\frac{\partial h_w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}} \right\} = \\
&\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r_1 h_w} + \frac{1}{r_2 h_w} \right], \tag{93}
\end{aligned}$$

onde $r_1(h_w)$ e $r_2(h_w)$ são os principais raios de curvatura da interface σ é a tensão interfacial óleo-água.

Pela substituição da Eq. 93 na Eq. 91 e incluindo o termo relacionado à hipótese de *Shelting*, obtêm-se a equação da quantidade de movimento unidimensional média na seção transversal para escoamento estratificado óleo-água, e juntamente com as Eqs. Eq. 89 e Eq. 90 temos um conjunto de 3 equações e 3 incógnitas, U_w, U_o e h_w :

$$\begin{aligned}
\rho_w \frac{\partial U_w}{\partial t} - \rho_o \frac{\partial U_o}{\partial t} + \rho_w U_w \left(k_w \frac{\partial U_w}{\partial x} + U_w \frac{dk_w}{dh_w} \frac{\partial h_w}{\partial x} \right) - \\
\rho_o U_o \left(k_o \frac{\partial U_o}{\partial x} + U_o \frac{dk_o}{dh_w} \frac{\partial h_w}{\partial x} \right) + \\
L \frac{\partial h_w}{\partial x} - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r_1 h_w} + \frac{1}{r_2 h_w} \right] = F, \tag{94}
\end{aligned}$$

onde:

$$L = (\rho_w - \rho_o) g \cos \beta - \rho_f (U_w - U_o)^2 C_s S_i \left(\frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_o} \right), \quad (95)$$

e F é redefinido como:

$$F = -\frac{\tau_w S_w}{A_w} + \frac{\tau_o S_o}{A_o} \pm \tau_i^o S_i \left(\frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_o} \right) - (\rho_w - \rho_o) g \sin \beta, \quad (96)$$

onde o termo de tensão cisalhante interfacial, τ_i^o , considera somente uma interface lisa e o sinal positivo sobre o termo de tensão interfacial corresponde ao óleo escoando mais rápido que a água.

Aplica-se a técnica das pequenas perturbações da teoria linear da estabilidade hidrodinâmica, tal que:

$$U_w = \bar{U}_w + \hat{U}_w, U_o = \bar{U}_o + \hat{U}_o \quad \text{e} \quad h_w = \bar{h}_w + \hat{h}_w, \quad (97)$$

onde o sobrescrito “-” indica a condição de equilíbrio (sem perturbação) e \hat{U}_w, \hat{U}_o e \hat{h}_w representam as pequenas perturbações impostas na velocidade e no nível de água, respectivamente. Além disso, \bar{U}_w, \bar{U}_o e \bar{h}_w são constantes e \hat{U}_w, \hat{U}_o e $\hat{h}_w = f(x, t)$.

Aplicando os requerimentos essenciais da teoria da estabilidade linear, substituindo a Eq. 97 nas Eqs. 89, 90 e 94 e desprezando todos os termos de ordens mais altas, obtêm-se as seguintes equações da continuidade e da quantidade de movimento, respectivamente:

$$\frac{\partial \hat{h}_w}{\partial t} + \bar{U}_w \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} + \frac{\bar{A}_w}{\bar{A}_w'} \frac{\partial \hat{U}_w}{\partial x} = 0, \quad (98)$$

$$\frac{\partial \hat{h}_w}{\partial t} + \bar{U}_o \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} - \frac{\bar{A}_o}{\bar{A}_w'} \frac{\partial \hat{U}_o}{\partial x} = 0, \quad (99)$$

e

$$\begin{aligned}
& \rho_w \frac{\partial \hat{U}_w}{\partial t} - \rho_o \frac{\partial \hat{U}_o}{\partial t} + \rho_w \bar{U}_w \left(k_w \frac{\partial \hat{U}_w}{\partial x} + \bar{U}_w \frac{dk_w}{dh_w} \Big|_{\bar{U}} \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} \right) - \\
& \rho_o \bar{U}_o \left(k_o \frac{\partial \hat{U}_o}{\partial x} + \bar{U}_o \frac{dk_o}{dh_w} \Big|_{\bar{U}_o} \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} \right) + \bar{L} \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} - \\
& \sigma \left[\frac{\partial^3 \hat{h}_w}{\partial x^3} + \frac{1}{\bar{h}_w^2} \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} \right] = \partial \bar{F}. \tag{100}
\end{aligned}$$

Para eliminar os termos de perturbação de velocidade, \hat{U}_w e \hat{U}_o , são aplicadas as Eqs. 98 e 99 na Eq. 100 e a equação resultante é derivada em x . Finalmente, obtêm-se a equação diferencial da perturbação ou equação da estabilidade para o escoamento estratificado óleo-água:

$$\begin{aligned}
& M \frac{\partial^4 \hat{h}_w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial t^2} + 2E \frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial t \partial z} + F \frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial x^2} + \\
& G \left(\frac{\partial \hat{h}_w}{\partial t} + H \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial x} \right) = 0, \tag{101}
\end{aligned}$$

cujos coeficientes são:

$$M = \frac{A}{A_w} \sigma,$$

$$N = \left(\frac{\rho_w}{R_w} + \frac{\rho_o}{R_o} \right),$$

$$E = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho_w \bar{U}_w}{\bar{R}_w} (1 + k_w) + \frac{\rho_o \bar{U}_o}{\bar{R}_o} (1 + k_o) \right],$$

$$F = \frac{\rho_w \bar{U}_w^2}{\bar{R}_w} \left(k_w - \frac{A \bar{R}_w}{\bar{A}'_w} \frac{dk_w}{dh_w} \Big|_{\bar{U}_w} \right) +$$

$$\frac{\rho_o \bar{U}_o^2}{\bar{R}_o} \left(\frac{\bar{R}_w}{\bar{R}_o} k_o + \frac{A \bar{R}_w}{\bar{A}'_w} \frac{dk_o}{dh_w} \Big|_{\bar{U}_o} \right) -$$

$$\frac{A}{\bar{A}'_w} [(\rho_w - \rho_o) g \cos \beta -$$

$$\rho_f (U_w - U_o)^2 C_s S_i \left(\frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_o} \right) - \frac{\sigma}{h_w^2} \Big],$$

$$G = -\frac{1}{\bar{R}_o} \frac{\partial F}{\partial \bar{U}_o} \Big|_{\bar{U}_w, \bar{h}_w} - \frac{1}{\bar{R}_w} \frac{\partial F}{\partial \bar{U}_w} \Big|_{\bar{U}_o, \bar{h}_w} \quad e,$$

$$H = c_o =$$

$$\frac{\frac{A}{\bar{A}'_w} \frac{\partial F}{\partial \bar{h}_w} \Big|_{\bar{U}_w, \bar{U}_o} - \frac{\bar{U}_w}{\bar{R}_w} \frac{\partial F}{\partial \bar{U}_w} \Big|_{\bar{U}_o, \bar{h}_w} + \frac{\bar{U}_o}{\bar{R}_o} \frac{\partial F}{\partial \bar{U}_o} \Big|_{\bar{U}_w, \bar{h}_w}}{\frac{1}{\bar{R}_o} \frac{\partial F}{\partial \bar{U}_o} \Big|_{\bar{U}_w, \bar{h}_w} - \frac{1}{\bar{R}_w} \frac{\partial F}{\partial \bar{U}_w} \Big|_{\bar{U}_o, \bar{h}_w}},$$

onde c_o é a velocidade cinemática, como deduzido por Wallis [109]. Note que a inclusão das ondas de comprimento intermediário tem efeito desestabilizador (último termo do coeficiente F).

A solução exata do problema linearizado baseia-se na metodologia de solução proposta por Whitham [110]. O procedimento é análogo ao apresentado na seção 0.5.1 (Eqs. 67 a 74). O critério geral de estabilidade obtido para escoamento estratificado é idêntico à Eq. 74, porém, os coeficientes são aqueles que compõem a Eq. 101.

Aplicação do Critério Geral de Estabilidade

A fronteira de transição do padrão estratificado para os padrões dispersos gerada através do critério representado pela Eq. 74 é comparada com os dados experimentais de Rodriguez e Oliemans [90] (Fig. 29). Na carta de fluxo, os símbolos denominados pela letra S indicam padrões de escoamento estratificados e o restante dispersos ou semi-dispersos (Fig. 29).

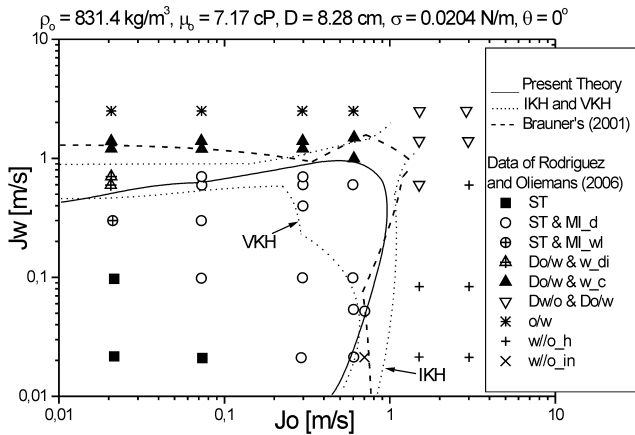


Figura 29: Fronteiras de transição: Eq. 74 (linha sólida), Trallero [105] (VKH e IKH, linhas pontilhadas) e Brauner [22] (linha tracejada) vs dados experimentais de Rodriguez e Oliemans [90] (símbolos).

O critério proposto (Eq. 74) gera a fronteira que concorda melhor com os dados (linha cheia), em comparação com as duas fronteiras de Trallero [105] e de Brauner [22], especialmente nas regiões da carta relacionadas a frações volumétricas extremas. O critério viscoso VKH de Trallero [105] apresenta resultados semelhantes nessas regiões, mas subestima fortemente os dados nas outras regiões da carta (região central da carta). O critério de Brauner [22] e o critério inviscido IKH de Trallero [105] tendem a superestimar os dados, especialmente na região de altas frações volumétricas de água (altas

velocidades superficiais de água e baixas velocidades superficiais de óleo).

A Fig. 30 mostra a fronteira de transição prevista (Eq. 74 e a carta de fluxo experimental de Rodriguez e Oliemans [90] para um escoamento estratificado descendente (-2°). Se um onda de instabilidade longa é introduzida no critério dado pela Eq. 74 tem-se a fronteira denotada por uma linha cheia na Fig. 30. Note que o modelo prevê uma diminuição significativa da região estratificada, especialmente na região de altas frações volumétricas de água, o que está em desacordo com os dados experimentais. Entretanto, nessa região o padrão de escoamento ST&ML_{wi} foi observado, *i.e.*, uma onda interfacial com comprimento da ordem do diâmetro do tubo foi visualizada. Se uma onda de comprimento menor (intermediário) é introduzida no modelo (Eq. 74 a nova fronteira gerada engloba todos os símbolos relativos ao padrão estratificado (Fig. 30, linha tracejada).

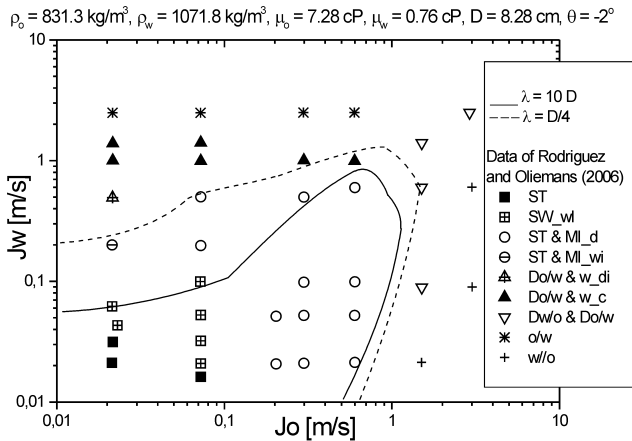


Figura 30: Critério de transição geral Eq. 74 e dados de Rodriguez e Oliemans [90] para escoamento estratificado óleo-água descendente (-2°).

Em escoamento estratificado descendente, espera-se que a fase

mais densa acelere, enquanto que a fase mais leve acumule no tubo. Esse fenômeno é mais evidente na região de altas frações volumétricas de água, onde a fase mais leve e viscosa (óleo) tende a acumular devido a efeitos viscosos mesmo em escoamento horizontal. Rodriguez e Oliemans [90] mostraram que nessa região a fração volumétrica *in situ* de água (ϵ_w) pode alcançar valores até 10 vezes superiores em comparação à fração de injeção de água (C_w). Um deslizamento ($s = U_o/U_w \equiv V_o/V_w$) muito baixo indica que provavelmente a velocidade relativa entre as fases é elevada. Percebe-se da análise da Fig.30 que o critério de transição proposto é sensível a essa fonte de instabilidade (instabilidade de Miles), entretanto, os dados mostram que ainda há estratificação significativa nessa região. Através de analogia com o escoamento gás-líquido, espera-se que existam ondas de comprimento intermediário e amplitude finita relacionadas à transição do padrão estratificado ao disperso. Os dados de Rodriguez e Oliemans [90] confirmam a existência dessas ondas, observação esta que sustenta o procedimento de inclusão de uma onda de comprimento intermediário no critério de transição descrito pela Eq. 74. Maiores detalhes podem ser vistos em Rodriguez *et al.* [89].

0.6 Conclusões

Foi apresentada uma revisão geral do problema da estabilidade hidrodinâmica em escoamento bifásico de fases separadas. Como os escoamentos de fases separadas são comumente modelados como tendo fases paralelas, adotou-se neste texto a terminologia escoamento bifásico paralelo. Considerações gerais foram delineadas a respeito dos escoamentos bifásicos gás-líquido e líquido-líquido, incluindo ocorrência, padrões de escoamento e cartas de fluxo. Aspectos fundamentais da modelagem bifásica foram demonstrados, como a derivação das equações de transporte segundo o modelo de dois fluidos unidimensional. Conceitos básicos relativos à estabilidade hidrodinâmica foram apresentados e as classes de instabilidades que ocorrem em escoamento bifásico paralelo foram catalogadas, incluindo como estudo de caso o problema do escoamento estratificado entre placas planas paralelas e infinitas. Finalmente, a teoria da estabilidade linear foi aplicada para casos típicos enfrentados pela indústria e os seguintes exemplos foram descritos em detalhe: esco-

amento anular líquido-líquido (*core flow*) e escoamento estratificado em tubulações.

É vasta a literatura a respeito dos escoamentos bifásicos, principalmente sobre escoamentos gás-líquido. Quanto aos escoamentos líquido-líquido, a literatura registra um esforço intenso de pesquisa nas últimas duas décadas. O volume de trabalho sobre estabilidade hidrodinâmica de escoamento bifásico paralelo é significativo, entretanto, estudos comparando resultados teóricos com dados experimentais são relativamente poucos. A modelagem carece de aprimoramento para lograr uma descrição mais fiel dos escoamentos de interesse da indústria. Sem dúvida, há ainda um longo e estúpido caminho a ser trilhado.

0.7 Agradecimentos

À Fundação de Amparo à pesquisa do estado de São Paulo (FAPESP) e à PETROBRAS pelo suporte financeiro. Sinceros agradecimentos a Antonio Bannwart, por ter despertado minha curiosidade a respeito do tema, e a René Oliemans, pela oportunidade e discussões enriquecedoras.

Referências Bibliográficas

- [1] B. Alkaya, S. S. Jayawardena, and J. P. Brill. Oil water flow patterns in slightly inclined pipes. In *Proceedings of ETCE/OMAE2000 Joint Conference*, New Orleans, 2000. ETCE/OMAE.
- [2] P. Angeli. *Liquid-liquid dispersed flows in horizontal pipes*. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996.
- [3] P. Angeli and G. F. Hewitt. Pressure gradient in horizontal liquid-liquid flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 24:1183–1203, 1998.
- [4] P. Angeli and G. F. Hewitt. Drop size distributions in horizontal oil-water dispersed flows. *Chemical Engineering Science*, 55:3233–3243, 2000.

- [5] S. Arirachakaran, K. D. Oglesby, M.S. Malinowsky, O. Shoham, and J. P. Brill. An analysis of oil/water flow phenomena in horizontal pipes. Technical Report SPE Paper 18836, SPE Prof. Prod. Operating Symposium, Oklahoma, 1989.
- [6] R. Bai. *Traveling waves in a high viscosity ratio and axisymmetric core annular flow*. PhD thesis, University of Minnesota, 1995.
- [7] R. Bai and D. D. Joseph. Steady flow and interfacial shapes of a highly viscous dispersed phase. *International Journal of Multiphase Flow*, 26:1469–1491, 2000.
- [8] R. Bai, K. Kelkar, and D. D. Joseph. Direct simulation of interfacial waves in a high-viscosity-ratio and axisymmetric core-annular flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 327:1–34, 1996.
- [9] A. C. Bannwart, O. M. H. Rodriguez, C. H. M. de Carvalho, Wang I. S., and R. M. Obregon Vara. Flow patterns in heavy crude oil-water flow. *Journal of Energy Resources Technology-Transactions of the ASME*, 126:184–189, 2004.
- [10] A. C. Bannwart, O. M. H. Rodriguez, F. E. Trevisan, F. F. Vieira, and De Carvalho. Flow patterns and pressure gradient in horizontal, upward inclined and vertical heavy oil-water-gas flows: experimental investigation and full-scale experiments. In P. Di Marco Pisa, G. P. Celata and R. K. Shah, editors, *3rd International symposium on two-phase flow modelling and experimentation*, pages 22–24, 2004.
- [11] A. C. Bannwart. Bubble analogy and stabilization of core-annular flow. *Journal of Energy Resources Technology*, 123:127–132, 2001.
- [12] A. C. Bannwart, F. F. Vieira, F. E. Trevisan, O. M. H. Rodriguez, and C. H. M. de Carvalho. Pressure drop in water-assisted three-phase flow of heavy oil and gas in a vertical pipe. In *5th North American Conference on Multiphase Technology-Transferring Technology*, pages 421–433. BHR Group Limited, 2006.

- [13] A. C. Bannwart and O. M. H. Rodriguez Experimental study on interfacial waves in vertical core flow. *Journal of Petroleum Sciences and Engineering*, 54:140–158, 2006.
- [14] D. Barnea. On the effect of the viscosity on stability of stratified gas-liquid flow - application to flow pattern transition at various pipe inclinations. *Chemical Engineering Science*, 46(8):2123–2131, 1991.
- [15] D. Barnea and Y. Taitel. Kelvin-helmholtz stability criteria for stratified flow: viscous versus non-viscous (inviscid) approaches. *International Journal of Multiphase Flow*, 19(4):639–649, 1993.
- [16] D. Barnea and Y. Taitel. Non-linear interfacial instability of separated flow. *Chemical Engineering Science*, 49(14):2341–2349, 1994.
- [17] A. E. Bergles, J. G. Collier, J. M. Delhay, G. F. Hewitt, and F. Mayinger. *Two-phase Flow and Heat Transfer in The Power and Process Industries*. Hemisphere; Mc Graw-Hill, 1981.
- [18] P. A. M. Boomkamp, B. J. Boersma, R. H. M. Miesen, and G. Beijnon. A chebyshev collocation method for solving two-phase flow stability problems. *J. Comput. Phys.*, 132:191–200, 1997.
- [19] P. A. M. Boomkamp and R. H. M. Miesen. Nonaxisymmetric waves in core-annular flow with a small viscosity ratio. *Phys. Fluids A*, 4:1627–1636, 1992.
- [20] P. A. M. Boomkamp and R. H. M Miesen. Physical characteristics of instabilities in parallel two-phase flow, in advances in multi-fluid flow. In Y. Renardy, editor, *Proc. AMS-IMS-SIAM Conf. Analysis of multi-fluid flows and interfacial instabilities*, Philadelphia, 1996. SIAM.
- [21] J. S. M. Botterill. *Gas Fluidization Technology*. John Wiley, 1986.
- [22] N. Brauner. The prediction of dispersed flow boundaries in liquid-liquid and gas-liquid systems. *International Journal of Multiphase Flow*, 27:885–910, 2001.

- [23] N. Brauner and D. M. Maron. Flow pattern transitions in two-phase liquid-liquid flow in horizontal tubes. *International Journal of Multiphase Flow*, 18(1):123, 1992.
- [24] N. Brauner and D. M. Maron. Stability analysis of stratified liquid-liquid flow,. *International Journal of Multiphase Flow*, 18(1):103, 1992.
- [25] N. Brauner and D. M. Maron. Classification of liquid-liquid two-phase flow systems and the prediction of flow pattern maps. In *2nd International Symposium on Two-Phase Flow Modeling and Experimentation-ISTP 99*, pages 747–754, Pisa, Italy, 1999.
- [26] N. Brauner and A. Ullmann. Modeling of phase inversion phenomenon in two-phase pipe flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 28:1177–1204, 2002.
- [27] P. J. Briggs, R. P. Baron, R. J. Fulleylove, and M. S. Wright. Development of heavy-oil reservoirs. Technical Report SPE 15748, SPE Production and Facilities, 1998.
- [28] D. Butterworth and G. F. Hewitt. *Two-phase Flow and Heat Transfer*. Oxford University Press, reprinted 1978, 1977. reprinted 1978.
- [29] M. E. Charles, and T. W. F. Russel The effect of the less viscous liquid in the laminar flow of two-immiscible liquids. *Can. J. Chem. Eng.*, 37:18–24, 1859.
- [30] M. E. Charles, G. W. Govier, and G. W. Hodgson. The horizontal pipeline flow of equal density oil-water mixtures. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 39(1):27–36, 1961.
- [31] K. Chen, R. Bai, and D. D. Joseph. Stability of core annular flow in vertical pipes. *Journal of Fluid Mechanics*, 214:251–260, 1990.
- [32] J. G. Collier. *Convective Boiling and Condensation*. Mac Graw-Hill, 1981.

- [33] C. J. Crowley, G. B. Wallis, and J. J. Barry. Validation of a one-dimensional wave model for the stratified-to-slug flow regime transition, with consequences for wave growth and slug frequency. *International Journal of Multiphase Flow*, 18(2):249–271, 1992.
- [34] C. J. Crowley, G. B. Wallis, and J. J. Barry. Dimensionless form of a one-dimensional wave model for the stratified flow regime transition. *International Journal of Multiphase Flow*, 19(2):369–376, 1993.
- [35] J. M. Delhaye. *Basic equations for two-phase flow modeling*, chapter Two-Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries. A. E. Bergles, Hemisphere Pub. Corp., 1981.
- [36] J. M. Delhaye, M. Giot, and M. L. Riethmuller. *Thermohydraulics of Two-phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering*. Hemisphere/Mc Graw-Hill, 1981.
- [37] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [38] G. Elseth. *An experimental study of oil-water flow in horizontal pipes*. PhD thesis, The Norwegian University of Science and Technology, 2001, 2001.
- [39] Y. V. Fairusov, P. Arenas-Medina, J. Verdejo-Fierro, and R. Gonzales-Islas. Flow pattern transitions in horizontal pipelines carrying oil-water mixtures: full-scale experiments. *Journal of Energy Resources Technology*, 122:169–175, 2000.
- [40] Y. V. Fairuzov. Stability analysis of stratified oil/water flow in inclined pipelines. Technical report, SPE Production and Facilities, 2001.
- [41] J. Feng, P. Y. Huang, and D. D. Joseph. Dynamic simulation of the motion of capsules in pipelines. *Journal of Fluid Mechanics*, 289:233–245, 1995.
- [42] J. G. Flores, X. T. Chen, C. Sarica, and J. P. Brill. Characterization of oil-water flow patterns in vertical and deviated

- wells. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, SPE 38810, San Antonio, Texas, 1997.
- [43] G. W. Govier, , and K. Aziz. *The Flow of Complex Mixtures in Pipes*. Van Nostrand-Reinhold, 1972.
- [44] S. Guet, O. M. H. Rodriguez, R. V. A. Oliemans, and N. Brauner. Na inverse dispersed multiphase flow model for liquid production rate determination. *Int. J. Multiphase Flow*, 32:553–567, 2006.
- [45] S. E. Haaland. Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flows. *Fluids Eng.*, pages 89–90, March 1983.
- [46] W. Heisenberg. Über stabilität und turbulenz von flüssigkeitsströmen. *Ann. Phys.*, 74:577–627, 1924. Translated as NACA TM 1291, 1951.
- [47] G. Hetsroni. *Handbook of Multiphase Systems*. Hemisphere/Mc Graw-Hill, 1982.
- [48] G. F. Hewitt. *Measurement of Two-phase Flow Parameters*. Academic Press, 1978.
- [49] O. J. Hinze. Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of splitting in dispersion processes. *A.I.Ch.E. Journal*, 1(3):289–295, 1955.
- [50] H Howard and N. Patankar. Non-axisymmetric instability of core-annular flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 290:213–224, 1995.
- [51] J. R. Howard. *Fluidized Bed Technology—Principles and Applications*. Adam Hilger, 1989.
- [52] A. Huang and Joseph D. D. Stability of eccentric core-annular flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 228:233–245, 1995.
- [53] M. Ishii. *Thermo-fluid Dynamic Theory of Two-phase Flow*. Eyrolles, 1975.
- [54] M. Ishii. *Handbook of Multiphase Systems*, chapter Wave Phenomena and Two-Phase Flow Instabilities. Hemisphere, 1982.

- [55] H. Jeffreys. On the formation of water waves by wind. *Proc. Roy. Soc. Lond-A*, 107:189–206, 1925.
- [56] D. D. Joseph. Instability of the flow of two immiscible liquids with different viscosities in a pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, 141:309–317, 1984.
- [57] D. D. Joseph, A. C. Bannwart, , and Y. J. Liu. Stability of annular flow and slugging. *International Journal of Multiphase Flow*, 22:1247–1254, 1996.
- [58] D. D. Joseph, Y. Renardy, and M. Renardy. Instability of the flow of immiscible liquids with different viscosities in a pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, 141:309–317, 1985.
- [59] D. D. Joseph and Y. Y. Renardy. *Fundamentals of Two-Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [60] D. Kunii and O. Levenspiel. *Fluidization Engineering*. John Wiley & Sons, 1969.
- [61] J. Li and Y. Renardy. Direct simulation of unsteady axisymmetric core-annular flow with high viscosity ratio. *Journal of Fluid Mechanics*, 391:123–149, 1999.
- [62] J. Lovick and P. Angeli. Two-phase liquid flows at the partially dispersed flow regime. In *4th International Conference of Multiphase Flow*, New Orleans, USA, 2001.
- [63] J. Lovick and P. Angeli. Experimental studies on the dual continuous flow pattern in oil–water flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 30:139–157, 2004.
- [64] J. M. Mandhane, G. A. Gregory, and K. Aziz. A flow pattern map for gas-liquid flow in horizontal pipes. *Int. J. Multiphase Flow*, 1:537–553, 1974.
- [65] R. H. M Miesen, G Beijnon, P. E. M. Duijvestijn, R. V. A. Oliemans, and T. M. M. Verheggen. Interfacial waves in core-annular flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 238:97–117, 1992.
- [66] J. W. Miles. On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.*, 3:185–204, 1957.

- [67] J. W. Miles. On the generation of surface waves by shear flows, part 2. *J. Fluid Mech.*, 6:185–204, 1959.
- [68] C. W. Morris, C. P. Lenn, and I. J. Albertin. Water production logging in horizontal wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 22:217–227, 1999.
- [69] M. Nadler and D. Mewes. Flow induced emulsification in the flow of two immiscible liquids in a horizontal pipe. *International Journal of Multiphase Flow*, 23(1):55–68, 1997.
- [70] T. S. Ng, C. J. Lawrence, and G. F. Hewitt. Interface shapes for two-phase laminar stratified flow in a circular pipe. *International Journal of Multiphase Flow*, 27:1301–1311, 2001.
- [71] T. S. Ng, C. J. Lawrence, and G. F. Hewitt. Laminar stratified pipe flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 28:963–996, 2001.
- [72] R. M. Obregon-Vara. *Hidrodynamicms of the two-phase heavy oil-water flow in a horizontal pipe*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas–UNICAMP, 2001.
- [73] G. Oddie, H. Shi, L. J. Durlofsky, K. Aziz, B. Pfeffer, and J. A. Holmes. Experimental study of two and three phase flows in large diameter inclined pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, 29:527–558, 2003.
- [74] R. V. A. Oliemans. *The lubricating-film model for core-annular flow*. PhD thesis, Technische Hogeschool Delft, Delft University of Technologic, 1986.
- [75] R. V. A. Oliemans, G. Ooms, H. L. Wu, and A. Duijvestijn. Core annular oil-water flow: the turbulent lubricating film model and measurements in a 5 cm pipe loop. *International Journal of Multiphase Flow*, 13(1):23–31, 1987.
- [76] N. Petalas, and K. Aziz, A mechanistic model for multiphase flow in pipes,. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 39(6):43–55, 2000.
- [77] G. Ooms. The hydrodynamic stability of core-annular flow of two ideal liquids. *Applied Science Research*., 26:147–158, 1972.

- [78] G. Ooms, A. Segal, A. J. Van der Wees, R. Meerhoff, and R. V. A. Oliemans. A theoretical model for core-annular flow of a very viscous oil core and a water annulus through a horizontal pipe. *International Journal of Multiphase Flow*, 10(1):41–60, 1984.
- [79] E. E. Paladino and C. R. Maliska. Multi-phase flow modeling in differential pressure flow meters. In *Proceedings of the IX Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences*. ABCM, 2002.
- [80] L. Pan, S. Jayanti, and G.F. Hewitt. Flow patterns, phase inversion and pressure gradients in air oil water flow in horizontal pipe. In *paper FT2, Proc. of the ICMF 95,*, Kyoto, Japan, 1995.
- [81] Lord Rayleigh. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. London Math. Soc.*, 14:170–177, 1883. Also Scientific Papers, Vol. II, Cambridge University Press, pp. 200–2007, 1900.
- [82] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans. Soc. Lond. A*, 174:935–982, 1883.
- [83] O. M. H. Rodriguez. *Interface Shape and Pressure Gradient in Upward Core-annular Flow*. PhD thesis, State University of Campinas–UNICAMP, Brazil, 2002.
- [84] O. M. H. Rodriguez. Inversion of multiphase flow models for multiphase well logging. Technical report, Shell International Exploration and Production B.V. Report, Rijswijk, Holland, 2003.
- [85] O. M. H. Rodriguez and A. C Bannwart. Flow patterns in vertical and horizontal heavy crude oil-water two-phase flow and stability analysis of core-annular flow. In *Proceedings of 5th International Conference on Multiphase Flow–ICMF*, Yokohama - Japan, 2004.

- [86] O. M. H. Rodriguez, R. F. Mudde, and R. V. A. Oliemans. Inversion of multiphase flow models for horizontal and inclined oil-water well logging. In BHR Group Limited, editor, *4th North American Conference on Multiphase Technology*, Canada, 2004. Bedfordshire (C. Rolf), Banff - Canada.
- [87] O. M. H. Rodriguez, R. F. Mudde, and R. V. A. Oliemans. Analysis of transitional boundaries, holdup and pressure gradient in inclined oil-water flows. In *5th international conference on multiphase flow-ICFM*, Yokohama, Japan, 2004.
- [88] O. M. H. Rodriguez and A. C. Bannwart. Flow patterns in vertical and horizontal heavy crude oil-water two-phase flow and stability analysis of core-annular flow. In *5th international conference on multiphase flow-ICMF*, Yokohama - Japan, 2004.
- [89] O. M. H. Rodriguez and A. C. Bannwart. Analytical model for interfacial waves in vertical core flow. *Journal of Petroleum Sciences and Engineering*, 54:173–182, 2006.
- [90] O. M. H. Rodriguez and R. V. A. Oliemans. Experimental study on oil-water flow in horizontal and slightly inclined pipes. *Int. J. Multiphase Flow*, 32:323–343, 2006.
- [91] O. M. H. Rodriguez and A. C. Bannwart. Stability analysis of core-annular flow and neutral stability wave number. *AIChE J.*, 54(1):20–31, 2008.
- [92] E. S. Rosa and R. E. M. Morales. Emprego de cfd para desenvolvimento de um medidor venturi operando com um escoamento de gás and líquido. In ABCM, editor, *IX Congresso Brasileiro de Engenharia and Ciências Térmicas-ENCIT2002*. Caxambu, MG, Brazil, 2002.
- [93] H. Schlichting. Über die stabilität der couette-strömung. *Ann. D. Phys.*, 5(14):905–936, 1932.
- [94] H. Schlichting. Zur entstehung der turbulenz bei der plattenströmung. In *Math. Phys. Klasse - Nachr. Ges. Wiss.*, pages 181–208, 1933.

- [95] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 1979.
- [96] G. B. Schubauer and H. K. Kramstad. Laminar boundary layer oscillations and transition on a flat plate. Technical Report TN 909, NACA, 1948.
- [97] M. J. H. Simmons and B. J. Azzopardi Drop size distributions in dispersed liquid-liquid pipe flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 27:843–859, 2001.
- [98] J. H. Song and M. Ishii On the stability of a one-dimensional two-fluid model. *Nuclear Engineering and Design*, 204:101–115, 2001.
- [99] G. Sotgia and P. Tartarini. Experimental and theoretical investigation on pressure drop reductions in oil water flows. In *4th International Conference of Multiphase Flow*, New Orleans, Louisiana, 2001.
- [100] Y. Taitel, D. Barnea, and A. E. Dukler. Modeling flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes. *A.I.Ch.E. Journal*, 26:345–354, 1980.
- [101] Y. Taitel and A. E. Dukler. A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow. *A. I. Ch. E. Journal*, 22:47–55, 1976.
- [102] G. I. Taylor. Statistical theory of turbulence v. effects of turbulence on boundary layer. theoretical discussion of relationship between scale of turbulence and critical resistance of sphere. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 156:307–317, 1936.
- [103] G. I. Taylor. The stability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. *Proc. Roy. Soc.*, 201:192–196, 1950.
- [104] W. Tollmien. W., Über die entdtehung der turbulenz. Technical Report 21-44, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, 1929. Translated as NACA TM 609, 1931.
- [105] J. L. Trallero. *Oil-Water Flow Patterns in Horizontal Pipes*. PhD thesis, University of Tulsa, Oklahoma, 1995.

- [106] J. L. Trallero, C. Sarica, , and J. P. Brill. A study of oil/water flow patterns in horizontal pipes. Technical Report SPE 36609, SPE Production and Facilities, 1997.
- [107] A. Valle and O. H. Utvik. Pressure drop, flow pattern and slip for two-phase crude oil/water flow: Experiments and model predictions. In *International Symposium on Liquid-Liquid Two Phase Flow and Transport Phenomena*. Antalya -Turkey, 1997.
- [108] J. W. Vanegas-Prada Experimental study of core annular flow in the ultraviscous oil lift. Master's thesis, State University of Campinas, SP, Brazil, 1999.
- [109] G. B. Wallis. *One-dimensional Two-Phase Flow*. McGraw Hill - USA, 1969.
- [110] G. B. Whitham *Linear and Nonlinear Waves*. New York: John Wiley & Sons, 1974.

Escola de Primavera em Transição e Turbulência

TURBULÊNCIA

Volume 6

Editores

Márcio Teixeira Mendonça

Marcello Augusto Faraco de Medeiros

ABCM

Rio de Janeiro

Sumário

0.1	Introdução	1
0.2	Escoamentos Aeroespaciais	2
0.3	Equações de Navier-Stokes Com Média de Reynolds	5
0.3.1	Equações de Navier-Stokes	5
0.3.2	Equações de Navier-Stokes Com Média de Reynolds	7
0.4	Modelamento de Turbulência	12
0.4.1	Classes de Modelos de Turbulência	12
0.4.2	Modelos de Viscosidade de Vórtice Lineares	13
0.4.3	Modelos de Turbulência Anisotrópicos	18
0.4.4	Outros Termos de Turbulência	25
0.4.5	Baixo Número de Reynolds e Transição	26
0.4.6	Realizabilidade	29
0.4.7	Alguns Aspectos Numéricos	31
0.5	Formulações de Modelos de Turbulência	33
0.5.1	Modelos de Viscosidade de Vórtice Lineares	33
0.5.2	Modelos de Transporte do Tensor de Reynolds	41
0.5.3	Modelo de Viscosidade de Vórtice Não-Linear	50
0.6	Resultados Típicos e Discussões	56
0.6.1	Predição da Camada Limite Turbulenta Clássica	56
0.6.2	Interação Onda de Choque/Camada Limite	58
0.6.3	Configurações Hiper-Sustentadoras	66
0.6.4	Transição e Alguns Efeitos Relacionados	69

0.7 Comentários Finais 73

Modelagem de Turbulência para Aplicações Aeroespaciais

Enda Dimitri V. Bigarella

Aerodinâmica e CFD, Embraer S.A.
São José dos Campos, SP - Brasil

João Luiz F. Azevedo

Comando Geral de Tecnologia Aeroespacial
Instituto de Aeronáutica e Espaço (CTA/IAE)
São José dos Campos, SP - Brasil

0.1 Introdução

Aplicações de engenharia que envolvam dinâmica dos fluidos podem ser divididas em dois grandes grupos no que se refere aos efeitos da turbulência. Para um grupo, a turbulência pode ser desprezada e ferramentas numéricas simples são suficientes para se obter uma qualidade adequada de resultados de simulação. Para o segundo grupo, entretanto, os efeitos de turbulência são essenciais mesmo para a topologia macro do escoamento, e as simulações numéricas mostram uma dependência apreciável quanto aos detalhes do modelamento de turbulência utilizado. Escoamentos externos típicos da comunidade

aeroespacial certamente estão neste segundo grupo. A turbulência é a regra, e não a exceção, nestes casos. Pretende-se, neste capítulo, discutir os aspectos mais relevantes do modelamento de turbulência para aplicações aeroespaciais em códigos baseados na solução das equações de Navier-Stokes com média de Reynolds, já que são os códigos mais comumente encontrados na indústria aeroespacial devido ao seu custo computacional relativamente barato e resultados adequados para fins de engenharia.

0.2 Escoamentos Aeroespaciais

Talvez o parâmetro que mais represente os escoamentos aeroespaciais típicos seja o alto número de Reynolds dos mesmos. Em escoamentos com altos números de Reynolds, a turbulência é presente, atuante e decisiva para a topologia do escoamento. Nessas condições, fenômenos complexos como interação entre onda de choque e camada limite, efeitos de gradientes elevados de pressão, separação do escoamento, esteiras, camadas cisalhantes, confluência de camadas, entre outros, podem ocorrer.

Um exemplo típico, mas bastante complexo, da engenharia aeroespacial é o escoamento sobre um perfil em configuração de hiper-sustentação, como na Fig. 1.

Nessa figura, um perfil hiper-sustentador típico, com 4 elementos, em configuração de decolagem, mostra alguns fenômenos complexos, porém usuais, desse tipo de aplicação. No projeto de um perfil desse tipo, busca-se principalmente minimizar as interações entre camadas limite e esteiras de forma que não se perca sustentação máxima devido ao subsequente enfraquecimento das camadas limite por essas interações viscosas. Logo, uma estimativa acurada de esteiras e camadas limite, onde a turbulência ocorre, permite uma avaliação mais acurada e níveis de otimização maiores de desempenho para o projeto.

A determinação das espessuras dessas camadas cisalhantes depende tanto da geração de turbulência, como em covas e nas camadas limite, quanto da interação da turbulência com os fenômenos do escoamento “médio”, como gradientes elevados de pressão. Os gradientes de pressão, em configurações de hiper-sustentação, são tão elevados que aqueles favoráveis podem promover relaminarização da

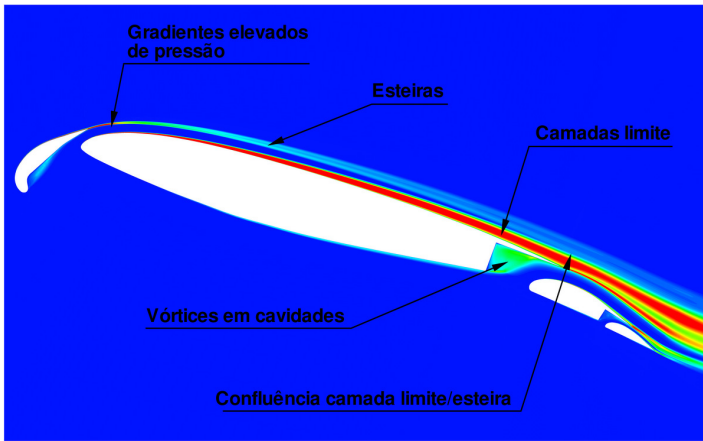


Figura 1: Fenômenos aerodinâmicos em um perfil hiper-sustentador.

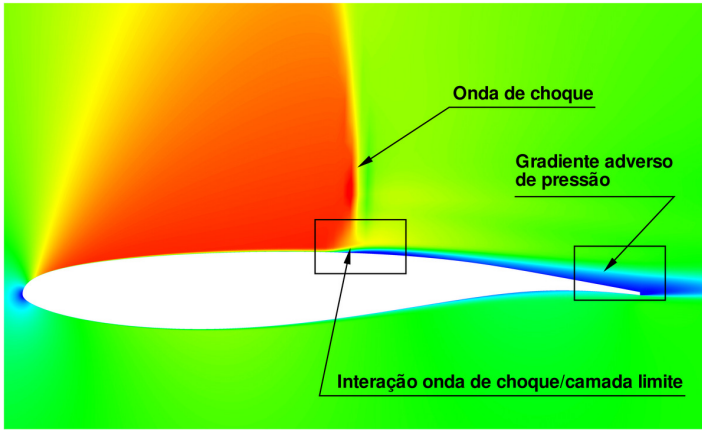
camada limite turbulenta, enquanto os adversos promovem geração elevada de turbulência, com subsequente espessamento também elevado das camadas cisalhantes, o que pode causar perda de eficiência da asa perto da sustentação máxima.

Um outro exemplo bastante típico da engenharia aeroespacial é um perfil em regime de escoamento transônico, representativo de uma asa de aeronaves de transporte civis, como mostrado na Fig. 2.

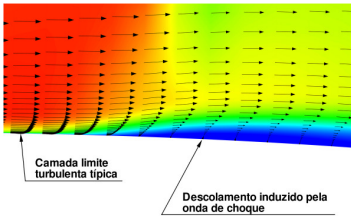
Nessa figura, um perfil supercrítico, ou seja, projetado para vôo transônico, mostra os fenômenos típicos desse tipo de regime de vôo. Dentre os fenômenos típicos, destaca-se a interação entre ondas de choque e camadas limite. Na Fig. 3, algumas configurações aeroespaciais tridimensionais e os respectivos fenômenos de interação entre onda de choque e camada limite são mostrados.

Para condições de vôo em que se tenha uma camada limite fina e uma onda de choque moderada, esta geralmente tem influência mínima sobre a camada limite, causando somente um pequeno espessamento desta e influência menor ainda no escoamento irrotacional fora dela. Ondas de choque mais fortes, entretanto, podem ter efeito bem mais expressivo, chegando a causar separação do escoamento e conseqüente perda de sustentação e aumento excessivo de arrasto.

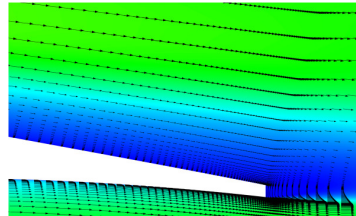
Os fenômenos de turbulência destacados afetam em ampla escala



(a) Visão geral.



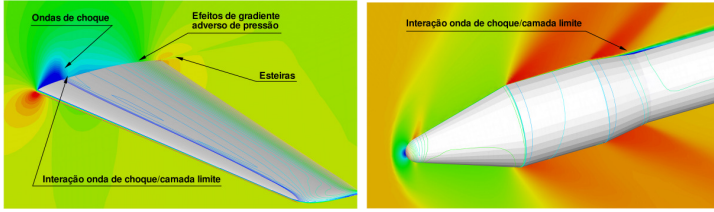
(b) Região da onda de choque.



(c) Região do bordo de fuga.

Figura 2: Fenômenos aerodinâmicos em um perfil em regime transônico.

mesmo os macro-resultados aerodinâmicos, como variáveis integradas do escoamento, que, em geral, são aquelas utilizadas para fins de engenharia, tais como coeficientes de sustentação, arrasto, entre outros. Assim, a inclusão dos efeitos de turbulência num código computacional de simulação de escoamentos para aplicações aeroespaciais é de fundamental importância para que se possibilite a predição mais acurada destes escoamentos. Algumas revisões sobre esse assunto podem ser encontradas em [59, 24, 41, 56], e o trabalho [35] é específico para aplicações aeronáuticas.



(a) Aeronave de transporte civil, $M = 0.74$. (b) Veículo lançador de satélites, $M = 2$.

Figura 3: Exemplos de configurações aeroespaciais e alguns fenômenos aerodinâmicos típicos.

0.3 Equações de Navier-Stokes Com Média de Reynolds

0.3.1 Equações de Navier-Stokes

O movimento não-estacionário de um fluido viscoso e compressível, sob a hipótese do *contínuo*, pode ser descrito pelas equações de Navier-Stokes. Trata-se de um conjunto de equações derivadas de balanços de fluxos para uma célula de fluido considerando a conservação da massa e da energia, e também a segunda lei de Newton. Escritas em forma divergente, ou forma *conservativa* na denominação mais comum, são dadas pela equação da continuidade, equação da quantidade de movimento e equação da energia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(e + p) u_j - \tau_{ij} u_i + q_{Hj}] &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Na nomenclatura usual de aplicações aeroespaciais, ρ é a densidade e $\mathbf{v} = \{u, v, w\}$ é o vetor velocidade no sistema de coordenadas

cartesianas.

Esse conjunto de equações não é um sistema fechado, já que existem mais variáveis do que equações disponíveis. De forma a se fechar esse sistema, algumas relações constitutivas são necessárias. Essas relações constitutivas contêm as informações físicas sobre o fluido considerado. No caso de aplicações aeroespaciais, mais especificamente, considera-se o ar como o fluido de interesse.

A seguir, são dadas as relações constitutivas usualmente adotadas para aplicações aeroespaciais. A primeira relação concerne a equação de estado dos gases, para a qual se adota a lei dos gases perfeitos, dada por:

$$p = \rho \mathcal{R}T = (\gamma - 1) \rho e_i, \quad e_i = C_v T, \quad (2)$$

em que p é a pressão estática, e_i é a energia interna e C_v é o calor específico do gás à volume constante. O vetor de fluxo de calor, \mathbf{q}_H , é obtido da lei de Fourier para condução de calor:

$$\mathbf{q}_H = -\kappa \nabla T, \quad \kappa = \frac{C_p \mu}{Pr}. \quad (3)$$

Nas definições acima: T é a temperatura estática; κ é o coeficiente de condutividade térmica; \mathcal{R} é a constante universal dos gases; γ é a razão entre calores específicos, que vale 1.4 para o ar ideal; Pr é o número de Prandtl, assumido constante e igual a 0.72 para o ar ideal, e C_p é o calor específico do gás à pressão constante.

A energia total por unidade de volume é definida por:

$$e = \rho \left[e_i + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right], \quad (4)$$

e a lei dos gases perfeitos, na Eq. 2, pode ser reescrita como:

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right]. \quad (5)$$

A entalpia é dada por $h = e_i + p/\rho$.

As componentes do tensor de tensões viscosas são dadas para um fluido Newtoniano por:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu, \quad (6)$$

em que μ é o coeficiente de viscosidade molecular dinâmica, δ_{ij} é a função delta de Kronecker e λ é o segundo coeficiente de viscosidade molecular dinâmica. O coeficiente de viscosidade molecular dinâmica é usualmente correlacionado com a temperatura estática de acordo com a lei de Sutherland [2]. O coeficiente de viscosidade molecular cinemático, ν , é definido como $\nu = \mu/\rho$.

Vale ressaltar aqui que, na nomenclatura estritamente correta de dinâmica dos fluidos, a denominação de equações de Navier-Stokes é usada para se referir somente às equações de quantidade de movimento. Entretanto, como usual na nomenclatura mais atual de CFD (e mesmo de dinâmica dos fluidos) adota-se a denominação de equações de Navier-Stokes para todo o conjunto de equações de descrição do escoamento bem como suas relações constitutivas.

0.3.2 Equações de Navier-Stokes Com Média de Reynolds

As equações de Navier-Stokes representam o sistema mais geral que descreve o movimento de um fluido contínuo e viscoso. Isso inclui, então, até mesmo as flutuações de turbulência, representadas pelas várias escalas de tempo e de comprimento associadas a esse fenômeno [60]. A grosso modo, essas escalas variam desde o comprimento aproximado do modelo até as micro-escalas de Kolmogorov, que são da ordem de milésimos de milímetro para um escoamento aeroespacial típico. Para uma simulação do dia-a-dia da indústria aeroespacial, as malhas computacionais e os passos de tempo praticáveis nesse contexto não são refinados o suficiente para capturar todas as escalas até as de Kolmogorov. Com isso, algumas informações sobre a turbulência são automaticamente perdidas, ou *filtradas*. Assim, para que os efeitos de turbulência sejam de alguma forma recuperados, algum tipo de modelamento da turbulência se faz necessário.

O modelamento da turbulência se inicia ao se descrever matematicamente o processo de “filtragem” que acontece no nível da malha e do tempo computacional. Essa filtragem pode ser mimificada em nível matemático através de um processo de filtragem, ou média, formal. Ao se realizar essa operação, os termos que são desprezados (filtrados) pelas malhas e passos de tempo praticáveis são analiticamente destacados, podendo ser, então, avaliados e eventualmente modelados.

Para uma aplicação típica da comunidade aeroespacial, como por exemplo a obtenção dos coeficientes aerodinâmicos de uma aeronave, as flutuações desses coeficientes devido às *flutuações turbulentas*¹ não são de interesse prático. O que importa é um valor médio, como num estado estacionário. Portanto, é interessante pensar que aquela “filtragem” aconteça na dimensão do tempo, ou seja, que a malha e o tempo computacional maiores estejam filtrando as equações de Navier-Stokes no tempo de forma a se obter uma solução de escoamento média, de estado estacionário, e em que a influência da turbulência seja também obtida somente como um efeito médio. Esse processo de filtragem no tempo para as equações de Navier-Stokes é conhecido por média de Reynolds (ou de Favre, no caso de um escoamento compressível), resultando nas equações de Navier-Stokes com média de Reynolds (em inglês, *Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) equations*).

Outros tipos de filtragem também são possíveis, como a filtragem espacial, no caso de simulação da grandes vórtices de turbulência (em inglês, *large eddy simulation – LES*), ou mista espaço-tempo dependendo do refinamento local da malha, no caso da simulação de vórtices separados (em inglês, *detached eddy simulation – DES*) [41, 56]. Ambos os métodos LES e DES requerem níveis de refinamento de malha e recursos computacionais bem maiores do que aqueles usuais para RANS [35]. A filtragem no tempo dos métodos RANS é um compromisso bastante aceitável em termos de qualidade de resultados e necessidades de recursos computacionais para as aplicações do

¹Deve-se esclarecer aqui um ponto muito comum de confusão do que se chama *turbulência* para o voo atmosférico, como o de um avião. Para as discussões que se seguem, a turbulência que interessa é aquela que ocorre dentro das camadas limite e esteiras geradas pelo movimento da aeronave, e não as rajadas atmosféricas, que são popularmente chamadas de turbulência. As rajadas não deixam de ser turbulência, mas turbulência numa escala de comprimento relativo ao escoamento do ar na atmosfera, e não relativo à aeronave.

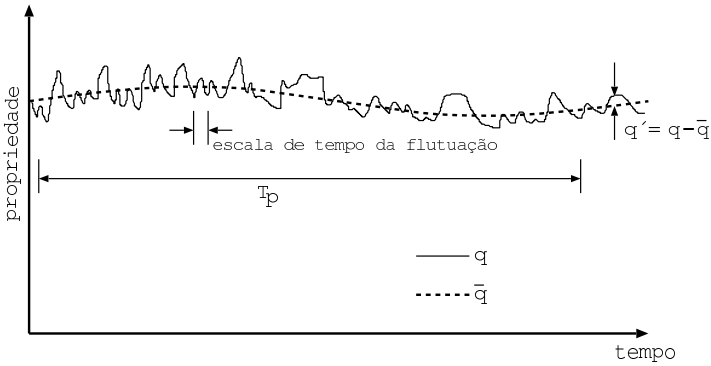


Figura 4: Definição esquemática das propriedades médias e de flutuação.

dia-a-dia de engenharia [41, 56, 35].

A filtragem por média de Reynolds é realizada através da expansão das variáveis dependentes em duas componentes: uma componente média e uma outra de flutuação, cuja média temporal seja nula. Para uma variável genérica, essa operação é feita por:

$$q = \bar{q} + q', \quad (7)$$

em que \bar{q} é a propriedade média, definida por:

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{T_p} \int_t^{t+T_p} q(\tau) d\tau, \quad (8)$$

e q' é a flutuação de média nula. A definição das propriedades q , \bar{q} e q' pode ser esquematizada de acordo com a Fig. 4.

Note que, nesta definição de filtragem, uma escala de tempo *finita*, T_p , é adotada [64, 65]. Essa escala de tempo finita é *grande o suficiente para permitir que as flutuações de turbulência sejam filtradas, mas ainda é suficientemente pequena quando comparada às escalas de tempo lentas do escoamento que não são consideradas pertencentes à turbulência*. Com isto, permite-se às equações de Navier-Stokes com média de Reynolds (RANS) capturar alguns

fenômenos temporais de escalas de tempo mais lentas, como separações massivas, por exemplo. Assim, adota-se na literatura uma nomenclatura um pouco diferente para esse tipo de filtragem, conhecida como equações de Navier-Stokes com média de Reynolds não-estacionárias (em inglês, *unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes (URANS) equations*).

No caso de uma formulação para escoamentos compressíveis, nota-se que uma separação entre variáveis média e de flutuação ponderadas pela densidade (média de Favre) permite uma reconstrução quase exata da equação de Navier-Stokes original, com exceção de alguns termos novos adicionais. Assim, as variáveis são separadas por:

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho', & \rho u_i &= \overline{\rho u_i} + (\rho u_i)', \\ e &= \bar{e} + e', & p &= \bar{p} + p', \\ \tau_{ij} &= \bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij}, & q_{H_i} &= \overline{q_{H_i}} + q'_{H_i}. \end{aligned} \quad (9)$$

Para as componentes de velocidade ou outras variáveis por unidade de massa, um procedimento de separação diferente deve ser adotado:

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'', \quad h = \tilde{h} + h'', \quad (10)$$

em que as propriedades médias são definidas como:

$$\tilde{u}_i = \frac{\overline{\rho u_i}}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{h} = \frac{\overline{\rho h}}{\bar{\rho}}. \quad (11)$$

É importante ressaltar que as flutuações u_i'' e h'' não necessariamente são de média nula.

As variáveis separadas são substituídas nas equações originais de Navier-Stokes, Eq. 1. O sistema resultante é filtrado no tempo, semelhantemente à operação na Eq. 7, resultando nas equações URANS:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\tau_{ij}} + \underbrace{\tau_{ij}^t}_1 \right) = 0 \\
 & \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\bar{e} + \bar{p}) \tilde{u}_j] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{q_{Hj}} + \underbrace{q_{Htj}}_2 \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{u}_i \left(\overline{\tau_{ij}} + \underbrace{\tau_{ij}^t}_1 \right) + \underbrace{d_{ti}}_3 \right] = 0, \tag{12}
 \end{aligned}$$

em que a energia total por unidade de volume é redefinida como:

$$\bar{e} = \bar{\rho} \left[\tilde{e}_i + \frac{1}{2} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2) + \tilde{k} \right], \tag{13}$$

e a lei dos gases perfeitos, na Eq. 5, é também redefinida, de forma que:

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left[\frac{\bar{e}}{\bar{\rho}} - \frac{1}{2} \bar{\rho} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2) - \bar{\rho} \tilde{k} \right]. \tag{14}$$

Note que nas definições anteriores, a energia cinética turbulenta por unidade de massa, \tilde{k} , surgiu como uma nova variável, definida por:

$$\tilde{k} = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}. \tag{15}$$

Os novos termos que apareceram após o processo de filtragem estão destacados na Eq. 12. Esses termos são representativos da turbulência, isolados após a filtragem, e possuem as seguintes definições:

- termo 1, $\tau_{ij}^t = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$: tensor de tensões de Reynolds;
- termo 2, $q_{Hti} = \overline{\rho u_i'' h}$: vetor de fluxo de calor turbulento;
- termo 3, $d_{ti} = u_j'' \left(\overline{\tau_{ji}} - \frac{\rho u_j'' u_i''}{2} \right)$: difusão molecular de flutuações de velocidade e transporte turbulento.

Para o escoamento médio, esses termos fazem o papel principal de aumentar o transporte de quantidade de movimento e de calor. Para a turbulência, esses termos extraem energia do escoamento médio através dos grandes vórtices. Essa energia é então redistribuída para os vórtices menores subsequentes até que se atinja a escala de Kolmogorov, em que a energia é finalmente dissipada em calor. Esse processo é conhecido na literatura por *cascata de turbulência* [60].

Esses termos adicionais representam novas variáveis para o sistema de equação, mas não podem ser resolvidos pois estão associados a informações que são essencialmente desconhecidas numa formulação (U)RANS. Porém, como são termos isolados, conhecem-se quais, então, são os termos de turbulência que são “filtrados” pelas malhas e passos de tempo adequados para aplicações do dia-a-dia da engenharia. Com isso, podem-se criar modelos para tentar representar o comportamento físico dos mesmos, pelo menos para as aplicações de interesse. Embora seja um conceito simples, ver-se-á, nas seções seguintes, que se trata de uma árdua tarefa fazer o modelamento propriamente dito desses termos de turbulência.

0.4 Modelamento de Turbulência

As discussões a seguir trazem uma introdução ao modelamento de turbulência usual para aplicações aeroespaciais. Os conceitos básicos de algumas classes de modelos de turbulência serão apresentados.

0.4.1 Classes de Modelos de Turbulência

Para se incluírem os efeitos de turbulência em códigos do tipo URANS, três principais classes de modelos existem [35], quais sejam:

- **Modelos de Viscosidade de Vórtice Lineares (MVVL).** Essa classe de modelos utiliza a hipótese de Boussinesq [64] de forma que o tensor de tensões de Reynolds, τ_{ij}^t , seja linearmente atrelado ao *campo médio de velocidade* por uma variável multiplicativa, conhecida como coeficiente de viscosidade de vórtice, μ_t .
- **Modelos de Viscosidade de Vórtice Não-Lineares (MVVNL).** Extensões não-lineares, ainda dependentes do campo médio de velocidade, são propostas sobre a hipótese de

Boussinesq de forma a se evitar algumas inconsistências físicas advindas dessa relação linear.

- **Modelos de Transporte do Tensor de Reynolds (MTTR).** Trata-se do esforço maior de modelamento de turbulência num contexto de simulações URANS. Uma equação de transporte para cada componente do tensor de Reynolds é resolvida, além de uma equação adicional para a determinação da escala de comprimento de turbulência, o que resulta em sete equações de transporte adicionais no caso tridimensional.

Cada uma dessas classes tem uma faixa maior ou menor de aplicabilidade, associada à extensão da física da turbulência embutida no modelo. Essas classes também têm associado um custo computacional típico, o que é um fator relevante num contexto de engenharia. Na seção à seguir, a base teórica de cada uma dessas classes será discutida, além da respectiva faixa de aplicação de cada.

0.4.2 Modelos de Viscosidade de Vórtice Lineares

Como já citado, MVVLs adotam a hipótese de Boussinesq, que algébrica e linearmente associam o tensor de Reynolds ao campo *médio* de velocidade², o que resulta em:

$$\tau_{ij}^t = \mu_t \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (16)$$

em que μ_t é o coeficiente de viscosidade de vórtice, calculado diferentemente por cada modelo de turbulência. Uma consideração importante na Eq. 16 é garantir que o traço do tensor de Reynolds contenha $-2\rho k$ para garantir a correta definição da energia cinética turbulenta.

Essa classe de modelos é a mais utilizada em aplicações de engenharia do dia-a-dia, e suas especificidades são amplamente documentadas na literatura [41]. Embora a relação constitutiva (hipótese de Boussinesq) seja uma relação forte entre as propriedades turbulentas

²Deste ponto em diante os símbolos de notação de propriedade média, dados por $\bar{\cdot}$ ou $\overline{\cdot}$, serão removidos, quando não houver possibilidade de margem para dúvida, para não se sobrecarregar a notação.

e o campo médio de velocidade, alguns modelos mostraram resultados bastante satisfatórios em vários tipos de escoamentos, acompanhados de estabilidade numérica e custos computacionais aceitáveis num contexto de aplicações de engenharia [59].

Vários sub-tipos de MVVLs existem, dependendo de quantas são as equações de transporte resolvidas para as variáveis que compõem o coeficiente de viscosidade de vórtice. O tipo mais simples, denominado *modelo algébrico*, na verdade não resolve nenhuma equação diferencial de transporte, mas apenas uma equação algébrica para a determinação de μ_t , baseando-se no conceito de comprimento de mistura de Prandtl [60]. Assim como o conceito de comprimento de mistura de Prandtl é bastante simplificado, os resultados com esses tipos de modelos também são bastante limitados e pouco gerais. Esses modelos, entretanto, foram os pioneiros – em torno da década de 70 – a adicionar com sucesso alguns fenômenos de turbulência num contexto URANS com algum sucesso e dentro dos escassos recursos computacionais disponíveis na época.

O modelo de Baldwin-Lomax [5] é talvez o mais famoso dessa família de modelos para aplicações aeroespaciais. Esses modelos, entretanto, falham quando separação ou múltiplas camadas cisalhantes estão presentes no escoamento. Além disso, sua implementação não é completamente automatizável ou mesmo praticável num código amplo e genérico para variadas aplicações [41]. Uma variação um pouco mais complexa deste tipo de modelo, que resolve uma equação diferencial *ordinária* para determinar o comprimento de mistura de Prandtl, foi desenvolvido por Johnson e King [25]. Outros modelos similares a esse existem e são tratados por modelos de *meia equação*. Algumas melhorias foram obtidas com essa família de modelos, entretanto, várias limitações ainda são encontradas, o que é natural já que mesmo esses modelos ainda são baseados no limitado conceito de mistura de Prandtl.

Os MVVLs mais avançados usualmente resolvem uma ou duas equações diferenciais parciais para determinar as variáveis turbulentas que compõem μ_t . Por esse motivo, tais modelos são também denominados modelos de equação de transporte. No caso de modelos com uma equação de transporte, os mais modernos e bem sucedidos normalmente resolvem uma equação para um coeficiente de viscosidade de vórtice *modificado*.

Vários modelos de uma equação estão disponíveis na literatura [65]. O modelo dessa família mais utilizado no meio aeroespacial é o modelo de Spalart-Allmaras [57, 58]. Esse modelo foi nativamente desenvolvido para aplicações aeroespaciais, e existe um grande número de publicações quanto ao seu uso e os resultados obtidos. Além disso, é um modelo simples, com condições de contorno triviais, de implementação também simples, de robustez e comportamento numérico amplamente conhecidos, principalmente relativos a rigidez numérica e resolução de malha próximo à parede.

Para modelos de duas equações, uma das equações é dedicada para a *energia cinética turbulenta*. Essa equação é analiticamente derivável das equações de Navier-Stokes [60], mas, na prática, alguns dos termos necessariamente devem ser modelados pois envolvem correlações que são essencialmente desconhecidas [16]. Para a outra equação, através de análise dimensional, pode-se concluir que uma escala de comprimento da turbulência é o suficiente para completar a definição de μ_t , o que usualmente se faz através de uma equação para um parâmetro relativo à *dissipação turbulenta*. Essa equação também pode ser obtida por meio analítico, mas sua forma é extremamente complexa [65]. Assim, comumente, essa segunda equação é *postulada*, ou seja, *assume-se* um forma de equação de transporte similar à da equação da energia cinética turbulenta e os termos são, então, modelados.

Modelos de duas equações provêm resultados superiores aos de outras famílias de MVVLs. Esse nível superior de qualidade de resultados, entretanto, faz-se sobre recursos computacionais e desafios numéricos também mais elevados. Tais recursos computacionais podem ser sumarizados em:

- Armazenamento em memória das variáveis turbulentas adicionais,
- Aumento do tempo de CPU necessário para computação dos resíduos das equações de transporte das propriedades de turbulência,
- Necessidade de malhas bem mais refinadas para suportar a captura das acentuadas variações das propriedades turbulentas perto de paredes sólidas.

Esses custos adicionais são geralmente aceitáveis em vista dos bons resultados que podem ser obtidos com essa família de modelos. Assim, modelos de duas equações acabaram tornando-se os prediletos para inclusão dos efeitos de turbulência em aplicações industriais [41, 59].

Devido a esse sucesso, é natural que um grande número de publicações envolvendo modelos de duas equações esteja disponível na literatura. Entretanto, é também natural que grande parte dessas publicações se concentrem nas deficiências desses modelos, e que proponham modificações ou mesmo conceitos totalmente novos sobre o assunto. Para o usuário final, essa situação pode levar a uma impressão errônea de que modelos de duas equações não são bons ou mesmo que, para se obter bons resultados, somente aqueles modelos mais avançados ou complexos são os capazes. Muitas vezes, entretanto, os modelos mais complexos são muito específicos e falham mesmo para os casos mais simples. Assim, é importante que o usuário final, quando da escolha do melhor modelo para suas aplicações, considere a histórico na literatura do mesmo. Isto proverá ao usuário final a aplicabilidade e as deficiências reais deste modelo, e o possibilitará incluir mentalmente essas características quando for avaliar os resultados obtidos com o modelo escolhido.

A grande maioria das computações industriais é baseada no modelo $k-\epsilon$ de Jones e Launder [26], já que, historicamente, foi o primeiro modelo de duas equações a ser razoavelmente bem sucedido e por ser também amplamente disponível em códigos comerciais. Entretanto, resultados para aplicações aeroespaciais bem sucedidos com este modelo só puderam ser obtidos, na verdade, após extensivas calibrações e modificações. Em outras palavras, o modelo $k-\epsilon$ de Jones e Launder apresenta severas limitações para fenômenos típicos de aplicações aeroespaciais. As seguintes deficiências são encontradas:

- Insensibilidade a gradientes adversos de pressão,
- Comportamento incorreto em pontos de estagnação,
- Comportamento incorreto em regiões próximas à parede³, o que fazem necessárias modificações altamente não-lineares para

³Denominam-se as regiões próximas à parede de regiões de baixo número de Reynolds *turbulento*. Uma discussão mais detalhada deste conceito é feita na Seção 0.4.5

essas regiões,

- Numericamente rígido, especialmente para essas versões corrigidas para melhor comportamento perto da parede.

Gradientes adversos de pressão são típicos e talvez um dos pontos mais relevantes para escoamentos aeroespaciais. Logo, a predição adequada desse fenômeno é crucial para a correta determinação da aerodinâmica desses veículos. Com relação aos pontos (ou linhas) de estagnação, modelos de duas equações geralmente provocam produção excessiva de viscosidade de vórtice e, portanto, níveis fisicamente não-representativos de turbulência.

Por último, formulações para regiões de baixo número de Reynolds de modelos $k-\epsilon$ requerem termos de amortecimento altamente não lineares, que são difíceis de serem integrados (rígidos) e geralmente ocasionam problemas numéricos. Além disso, para que esses termos produzam resultados de qualidade adequada, são necessárias malhas muito mais refinadas – geralmente cerca de dez vezes mais finas perto da parede – do que aquelas típicas para outros modelos de turbulência [41]. Esse requisito se traduz não somente em uma malha com mais número de elementos mas também numa rigidez numérica ainda maior, devido, primeiramente, à necessidade prática de maiores estiramentos de malha perto das paredes, e também devido às maiores diferenças de escala de tamanho dos elementos da malha. Uma das formas de se evitar esse problema é através do uso de funções de parede [41], deixando para o modelo de turbulência a tarefa de resolver somente a região de alto número de Reynolds. As funções de parede, entretanto, geralmente tendem a ser ou arbitrárias ou restritas a escoamentos parecidos aos de uma placa plana.

Algumas outras propostas de modelos de duas equações existem para se tentar evitar essas limitações. O modelo $k-\omega$ de Wilcox [63] apresenta robustez e acurácia superiores aos dos modelos $k-\epsilon$. Esse modelo pode ser naturalmente integrado por toda a camada limite até a parede sem a necessidade de adição de termos de amortecimento de baixo número de Reynolds. Este modelo apresenta, entretanto, uma restrição severa de dependência anormal a parâmetros de turbulência do escoamento não-perturbado. O modelo *shear-stress transport* (SST) (do inglês, transporte de tensão de cisalhamento) de Menter [39, 40] propõe várias melhorias sobre os modelos $k-\epsilon$ e $k-\omega$. Esse modelo foi nativamente calibrado para aplicações aeroespaciais

e é talvez o modelo de duas equações mais utilizado pela comunidade aeroespacial [42]. É um modelo de fácil implementação e de bom comportamento numérico.

0.4.3 Modelos de Turbulência Anisotrópicos

Motivações

A hipótese de Boussinesq, usada nos modelos lineares, considera efeitos que são essencialmente ligados à tensão de *cisalhamento* turbulenta na *direção do escoamento local*, ou seja, para escoamentos cisalhantes simples. Tais efeitos são, por exemplo, a fricção na parede ou o efeito da espessura da camada limite no escoamento irrotacional fora desta. Além disso, a hipótese de Boussinesq naturalmente resulta em isotropia das tensões normais de turbulência quando projetadas sobre a linha de corrente local, já que $u''u'' = v''v'' = w''w'' = \frac{2}{3}k$, considerando-se a definição da hipótese de Boussinesq na Eq. 16 para um escoamento cisalhante simples.

Esse comportamento é facilmente observável para o escoamento cisalhante clássico em um canal semi-infinito de placas paralelas, como mostrado na Fig. 5.

Observa-se que as tensões *normais* de Reynolds, obtidas por simulação direta (em inglês, *direct numerical simulation - DNS*), apresentam uma separação ao longo de toda a camada limite, ou seja, *fisicamente as tensões normais são anisotrópicas*, enquanto o modelo baseado na hipótese de Boussinesq responde com tensões normais *isotrópicas* ao longo de toda a camada limite. Como as tensões normais são dinamicamente inativas e não contribuem para o balanço de quantidade de movimento para os escoamentos cisalhantes simples, como nesse caso, as mesmas acabam sendo relevadas em modelos lineares.

A resposta da camada limite turbulenta sob gradiente adverso de pressão ou sob curvatura da linha de corrente, entretanto, é ditada tanto pelas tensões de Reynolds cisalhantes quanto pelas tensões normais. Nestes casos, as componentes *normais* são importantes por dois motivos: primeiramente, elas estão dinamicamente ativas no balanço de quantidade de movimento, e também fazem o papel de transferir informação da curvatura de linha de corrente ou da deformação do campo médio (como através de uma onda de choque) para

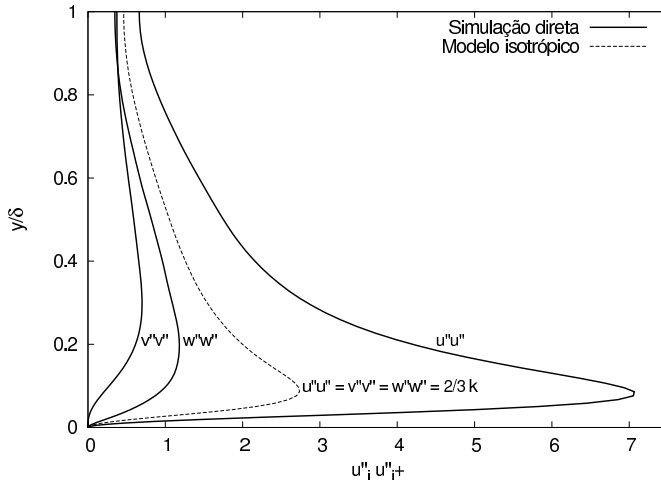


Figura 5: Tensões de Reynolds obtidas por simulação direta [28] comparadas às previstas por um modelo isotrópico em um canal semi-infinito de placas paralelas (δ é a metade da altura do canal).

as tensões de Reynolds *cisalhantes*. Além disso, a principal componente cisalhante do tensor de Reynolds – *paralela* ao escoamento médio – é gerada pela interação entre as componentes *normais* do tensor de Reynolds nas direções *perpendiculares* ao escoamento e a deformação do campo médio.

Perto da parede, o nível de anisotropia é elevado pois, embora apenas a tensão de Reynolds normal *paralela* à direção do escoamento seja gerada pela deformação do campo médio, as outras componentes normais do tensor de Reynolds são alimentadas pela correlação pressão-deformação, cujo papel redistributivo tende a guiar a turbulência para a isotropia. Essa discussão, em resumo, tenta enfatizar a importância que a anisotropia pode ter para um modelamento fisicamente mais embasado da mecânica da turbulência.

Relembrando a definição do tensor de Reynolds para modelos baseados na hipótese de Boussinesq na Eq. 16, pode-se substituí-la na definição do termo de produção da energia cinética turbulenta, de forma que:

$$P_k = \tau_{ij}^t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mu_t \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial u_n}{\partial x_n}. \quad (17)$$

Pode-se observar que a deformação do campo médio aparece ao quadrado na produção de turbulência de um modelo linear. O resultado líquido é de que o campo de deformação médio *sempre* age no sentido de aumentar o nível de turbulência, não importando qual seja o verdadeiro sinal da deformação. Por conta desse comportamento, dentre várias outras limitações dessa aproximação, duas ressaltam:

- Em escoamentos com altas taxas de deformação, essa formulação leva à produção não-física e excessiva de turbulência.
- Essa aproximação não é capaz de reproduzir um fenômeno fundamental de turbulência, que é a produção negativa de turbulência em uma camada limite sobre uma parede convexa.

Sumarizando essas discussões, embora MVVLs sejam amplamente utilizados em aplicações industriais, eles sofrem das seguintes limitações [35] devido à hipótese de Boussinesq:

- Não resolvem a anisotropia das componentes normais do tensor de Reynolds;
- Produção excessiva de turbulência em regiões de alta taxa de deformação do campo médio;
- Resposta incorreta sob efeitos de curvatura ou de rotação;
- Não levam em conta o transporte das tensões de Reynolds devido à ligação rígida entre turbulência e campo médio promovida pela hipótese de Boussinesq;
- Inapropriados para escoamentos em que mais de uma componente cisalhante da tensão de Reynolds façam a conexão da turbulência com o campo médio.

Deve-se deixar claro, entretanto, que, embora MVVLs apresentem essa lista de inconsistências, elas não são tão severas ou restritivas quanto se parecem pois muitos dos escoamentos industriais são dominados por camadas cisalhantes finas (como camadas limite, esteiras ou canais). A componente cisalhante na direção do escoamento é dinamicamente a mais importante, o que dá suporte à ampla adoção dos MVVLs para aplicações industriais.

Existem casos “extremos”, entretanto, em que a representação adequada das componentes normais do tensor turbulento é fundamental e tem papel decisivo na descrição final do escoamento médio. Tais casos “extremos”, entretanto, estão se tornando preocupações e necessidades diárias para a indústria aeroespacial, em termos de projeto e otimização de seus produtos. A anisotropia da turbulência tem papel importante, por exemplo, para asas em regime transônico de vôo ou em configuração de hiper-sustentação. Nestes casos, ondas de choque ou gradientes adversos de pressão elevados levam a uma grande desaceleração do escoamento e espessamento da camada limite, com subsequente separação do escoamento, perda de sustentação e aumento de arrasto, em alguns casos.

A interação entre onda de choque e camada limite é de extrema importância para projeto de veículos aeroespaciais transônicos e/ou supersônicos. O mecanismo de interação entre onda de choque e camada limite é extremamente complexo e pouco compreendido. Entretanto, sabe-se que essa interação é altamente sensível ao estado da turbulência na camada limite bem como à sua resposta sob a desaceleração causada pela onda de choque. O campo de turbulência é altamente anisotrópico nessa região e responde diferentemente sob cisalhamento, tensão normal ou curvatura.

Relevância similar têm as tensões normais em aplicações de asas em configuração de hiper-sustentação. Essas configurações, além de estarem sujeitas a campos de elevados gradientes (favoráveis e adversos) de pressão, possuem também camadas limite e esteiras interagindo, ou sofrendo influência dos gradientes de pressão e de curvatura de linhas de corrente. Assim, vê-se que o modelamento da anisotropia da turbulência, e também da sensibilidade desta quanto aos vários tipos de deformações do escoamento, pode incrementar a resposta dos modelos para aplicações aeroespaciais.

Modelos de Transporte do Tensor de Reynolds

Modelos de transporte do tensor de Reynolds resolvem uma equação de transporte para cada uma das componentes deste tensor. Da mesma forma que se é feito para a equação da energia cinética turbulenta (modelos de duas equações), as equações de transporte do tensor de Reynolds são analiticamente extraídas das equações de Navier-Stokes [16] e alguns termos devem ser modelados. Por definição, MTTRs respondem corretamente, pelo menos em nível qualitativo, a efeitos de curvatura de linha de corrente e anisotropia, entre outros, e por esse motivo atraem certa atenção da comunidade científica.

A forma geral de um MTTR pode ser dada por:

$$\frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j''} u_k}{\partial x_k} = P_{ij} + D_{ij}^\nu + D_{ij}^t + D_{ij}^p + \Phi_{ij}^* - \epsilon_{ij}, \quad (18)$$

em que cada um dos termos representa um mecanismo específico da turbulência, quais sejam:

- P_{ij} é a produção turbulenta. É o termo que alimenta os grandes vórtices com a energia extraída do campo médio.
- D_{ij}^ν é a difusão *molecular* da turbulência.
- D_{ij}^t é a difusão turbulenta, produzida por uma correlação tripla de flutuações de velocidade, que é essencialmente desconhecida para a ordem do tensor de Reynolds (correlação dupla).
- D_{ij}^p é a difusão por flutuações de pressão.
- Φ_{ij}^* é a correlação pressão-deformação. Esse termo não produz ou dissipa turbulência, mas, sim, promove uma redistribuição da energia de forma a direcionar a turbulência para a *isotropia*.
- ϵ_{ij} é a dissipação turbulenta, representando a dissipação da energia turbulenta através de toda a cascata de turbulência até as micro-escalas de Kolmogorov.

A forma funcional desses termos é dada por:

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= -\overline{\rho u''_i u''_k} \tilde{u}_{j,k} - \overline{\rho u''_j u''_k} \tilde{u}_{i,k}, \\
 D_{ij}^\nu &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial \overline{u''_i u''_j}}{\partial x_k} \right), \\
 D_{ij}^t &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho u''_i u''_j u''_k} \right), \\
 D_{ij}^p &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{p' u''_j} \delta_{ik} + \overline{p' u''_j} \delta_{jk} \right), \\
 \Phi_{ij}^* &= \overline{p' (u''_{i,j} + u''_{j,i})}, \\
 \epsilon_{ij} &= 2\mu \overline{u''_{i,k} u''_{j,k}}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

A produção turbulenta e a difusão molecular não requerem modelamento pois envolvem propriedades e variáveis já conhecidas. A representação dos outros termos deve ser feita por modelamento e, portanto, pode variar de modelo para modelo, o que será discutido mais à frente.

Ainda similarmente a modelos de duas equações, MTTRs também requerem a solução de uma equação adicional para obtenção da taxa de dissipação turbulenta (ϵ). Essa equação é também *postulada* e, portanto, essa estimativa seja talvez o ponto mais fraco no conceito do modelamento de transporte do tensor de Reynolds.

Modelos de Viscosidade de Vórtice Não-Lineares

A principal motivação no desenvolvimento de MVVNLs é o desejo de se melhorar a predição de fenômenos complexos de turbulência usando-se, como base, modelos de duas equações, que geralmente já existem em códigos de CFD. MVVNLs são uma forma interessante e barata de incorporar efeitos avançados de turbulência, tais como sensibilidade a curvatura de linha de corrente ou anisotropia, sem a necessidade de se recorrer a MTTRs.

Geralmente, propõe-se uma expansão explícita do tensor de Reynolds em função dos tensores de deformação e vorticidade do campo médio [36]. Essa é a forma mais geral para o grau do tensor de Reynolds e é composta por dez grupos tensoriais independentes para os quais qualquer combinação tensorial de ordem mais alta pode ser reduzida de acordo com o teorema de Caley-Hamilton. Pode-se mostrar que os termos quadráticos permitem a representação da anisotropia enquanto os termos cúbicos sensibilizam as tensões de Reynolds com efeitos de curvatura e rotação. Cada termo da expansão é controlado por coeficientes que eventualmente podem ser funções de invariantes dos tensores envolvidos.

Tais coeficientes podem ser obtidos de duas maneiras distintas. Um das formas é se simplificar um MTTR, ignorando-se termos de transporte convectivo e difusivo, de forma a se obter, a partir da equação diferencial parcial original, uma equação algébrica simplificada. A expansão tensorial discutida no parágrafo anterior é, então, substituída nessa equação algébrica, resultando num modelo algébrico e explícito para o tensor de Reynolds (MAETR). Dessa forma, consegue-se resolver um sistema de equações que proverá o funcional de cada coeficiente, fechando-se, dessa forma, o MAETR [62].

Uma outra possibilidade é se calibrarem diretamente cada um dos coeficientes da expansão explícita para um conjunto representativo de problemas turbulentos [14]. Essa aproximação recebe, usualmente, na literatura, a denominação de modelo de viscosidade de vórtice não-linear (M_{VVNL}), já que não envolve um MTTR simplificado como na metodologia anterior. Existem trabalhos, entretanto, em que as nomenclaturas MAETR ou M_{VVNL} são intercambiáveis [36]. Isso é aceitável já que ambas as metodologias fazem parte de uma mesma expansão explícita do tensor de Reynolds, e a diferença recai somente na forma como os coeficientes são calibrados. Para o presente autor, desconsiderando-se a preferência por nomenclatura, a metodologia de calibração através de um MAETR parece ser mais geral, pois não envolve a escolha de um conjunto limitado de problemas de turbulência específicos para se calibrar cada uma das constantes da expansão.

0.4.4 Outros Termos de Turbulência

Nas discussões anteriores, foram apresentadas opções de modelamento do tensor de Reynolds. A média de Reynolds das equações de Navier-Stokes, entretanto, gera também outros termos que necessitam de algum tipo de modelamento. Os termos adicionais nas equações URANS são usualmente modelados para aplicações aerospaciais da seguinte forma:

- **Vetor de fluxo de calor turbulento, q_{t_i} :** A forma mais comum para se modelar este termo é através da analogia clássica de Reynolds [64] entre quantidade de movimento e transferência de calor. Neste caso, o fluxo de calor turbulento é proposto como sendo proporcional ao gradiente de temperatura média:

$$q_{t_i} = \overline{\rho u''_i h} = -\frac{\gamma \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \langle e_i \rangle}{\partial x_i}, \quad (20)$$

em que Pr_t é o número de Prandtl turbulento. Usualmente, um valor constante de $Pr_t = 0.9$ para escoamentos externos compressíveis e adiabáticos é escolhido.

- **Difusão molecular e transporte turbulento, d_{t_i} :** Quando o modelo de turbulência não é baseado na energia cinética turbulenta este termo é desprezado. Nos casos em que se tem a energia cinética turbulenta, este termo pode ser modelado para garantir a conservação exata da energia total [Eq. 13]. A inclusão desse termo é mais importante para escoamentos supersônicos e hipersônicos, já que, nessas condições, a energia cinética turbulenta pode ser uma fração significativa da pressão estática. A forma mais comum para se modelar esse termo [64, 44] é fazendo:

$$d_{t_i} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i}, \quad (21)$$

em que a constante σ_k é definida para cada modelo de turbulência.

- **Lei dos gases perfeitos:** Sempre que disponível, a energia cinética turbulenta deve ser contabilizada para o cálculo da equação de estado do gás perfeito, como mostrado na Eq. 14.

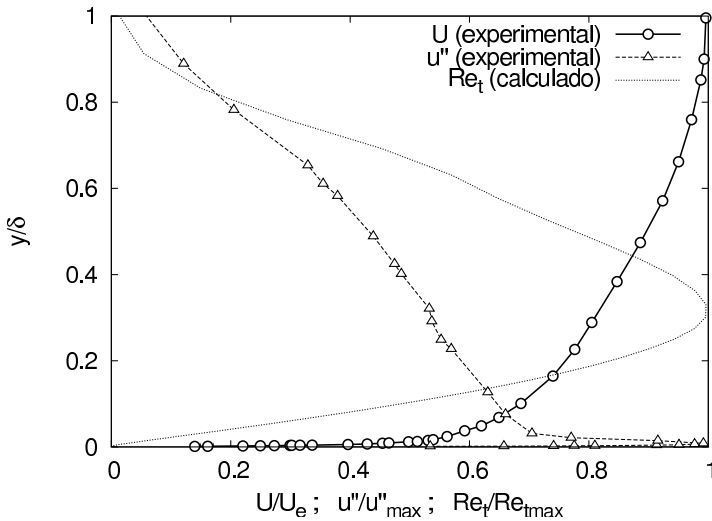


Figura 6: Perfis de propriedades turbulentas ao longo de uma camada limite clássica obtida experimentalmente [29].

Na Seção 0.5, por vir, os detalhes de cada modelo de turbulência serão discutidos.

0.4.5 Baixo Número de Reynolds e Transição

Nas nomenclaturas dos modelos de turbulência, duas denominações são utilizadas: modelos de baixo ou de alto número de Reynolds. Essa terminologia é amplamente utilizada na literatura para designar se um modelo retorna efeitos de turbulência que são essencialmente ligados às subcamadas laminar ou inercial, respectivamente. Neste caso, embora não seja constantemente destacado, o número de Reynolds se refere especificamente ao número de Reynolds *turbulento*, $Re_t = \mu_t/\mu$, que é uma propriedade *local*, ou seja, que varia ao longo da camada limite.

Uma camada limite típica sobre uma placa plana sem gradientes de pressão é mostrada na Fig. 6.

A sub-camada laminar se encontra aproximadamente na região $0 < y/\delta < 0.02$, enquanto a camada inercial se encontra aproxima-

damente na região $0.1 < y/\delta < 0.7$. Observa-se nessa figura que o número de Reynolds turbulento é baixo perto da parede e cresce substancialmente na camada inercial. Na região inercial da camada limite, onde o número de Reynolds turbulento é alto, o perfil de turbulência varia suavemente, o que é típico dos efeitos de turbulência de alto número de Reynolds. Os efeitos ditos *de parede* são caracterizados pela variação rápida e pico intenso de turbulência no final da sub-camada laminar, $y/\delta \approx 0.02$, região na qual $Re_t \rightarrow 0$. Quando modelos de turbulência são adaptados para reproduzir o comportamento *de parede* da turbulência, os mesmos são denominados modelos de *baixo número de Reynolds*. Essa adaptação é, em geral, obtida através de *funções de amortecimento de parede*, como poderá ser visto na descrição dos modelos de turbulência mais à frente.

É importante também esclarecer aqui uma inconsistência encontrada usualmente na literatura quanto a essa nomenclatura. Alguns autores referem-se a modelos de baixo ou alto número de Reynolds aqueles que, respectivamente, podem ou não podem ser *numericamente integrados* através da sub-camada viscosa, ou seja, perto da parede. Essa confusão advém do fato de que alguns modelos de turbulência de alto número de Reynolds realmente não podem ser integrados até a parede, como é o caso do modelo $k-\epsilon$ padrão [26], por exemplo. Em geral, esses modelos requerem modificações de baixo número de Reynolds para que se comportem adequadamente nessas regiões. Assim, sob uma leitura descuidada, parece haver uma associação direta da representação física com o comportamento numérico do modelo. Entretanto, essa associação é incorreta já que vários modelos de turbulência de alto número de Reynolds podem ser integrados até a parede, obtendo-se resultados bastante adequados, como é o caso do modelo $k-\omega$ [65].

Um outro aspecto muito interessante e muito importante para escoamentos aeroespaciais, mas que será apenas brevemente discutido aqui devido à grande extensão e complexidade do assunto, é quanto ao modelamento da *transição para turbulência*. Na Fig. 7 apresentam-se curvas de coeficiente de fricção na parede de uma placa plana.

Nota-se que o coeficiente de fricção sofre um aumento expressivo após um certo comprimento de placa plana, o que é típico da transição da camada limite laminar para turbulenta.

Modelos de duas equações geralmente permitem algum tipo de

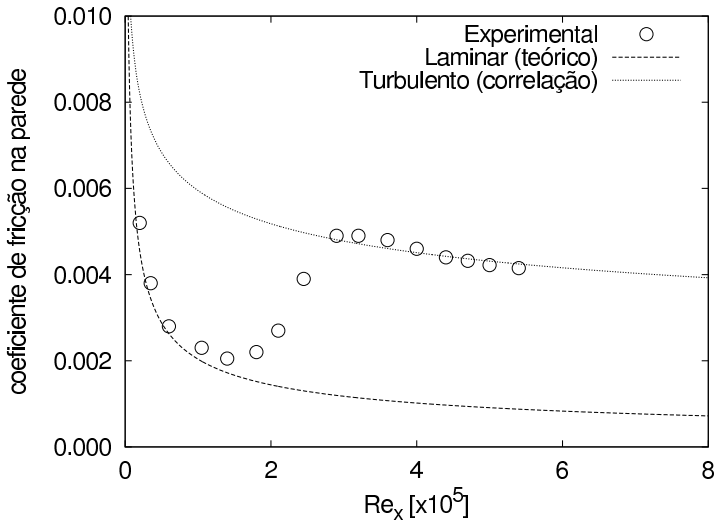


Figura 7: Escoamento sobre uma placa plana. Curvas de coeficiente de fricção de referência são comparadas a valores experimentais [31].

modelamento do fenômeno da transição. Conceitualmente, na verdade, todo modelo de duas ou mais equações inerentemente possui uma transição para a turbulência devido à sua maior representatividade física [65]. *Entretanto, devido a vários aspectos de modelamento, incluindo os relativos aos coeficientes de calibração, essa transição não possui nenhum significado físico.* Essa transição natural, como resultado desse aspecto, é inconsistentemente dependente dos coeficientes de calibração do modelo e/ou das condições de escoamento não-perturbado, fazendo com que ocorra para números de Reynolds cerca de uma ordem de grandeza (ou mais) abaixo do número de Reynolds de transição real. Como exemplo, enquanto a transição física na Fig. 7 se dá em $Re_x \approx 9 \times 10^4$, o que é representativo da transição por fenômenos do tipo instabilidade de ondas de Tollmien-Schlichting [38], a transição natural prevista por um modelo $k-\omega$ padrão se dá em $Re_x \approx 8 \times 10^3$.

A calibração de baixo número de Reynolds, discutida anteriormente, *não necessariamente garante a predição adequada da transição natural para turbulência.* Para que a predição da transição possa

ser prevista, geralmente são necessárias funções e calibrações adicionais dedicadas a isso. Uma dificuldade adicional com essa opção é que existem vários tipos de fenômenos de transição para turbulência, o que torna a calibração ainda mais complexa, caso se deseje contemplá-las [31, 65].

0.4.6 Realizabilidade

Alguns Conceitos de Realizabilidade

O conceito de realizabilidade de modelos de turbulência está intimamente ligado a conceitos *físicos* da própria turbulência, de forma que variáveis dos modelos respeitem algumas restrições que sejam fisicamente representativas. Por exemplo, a energia cinética turbulenta ou os termos normais do tensor de Reynolds não podem ter sinal negativo. Algumas outras restrições são discutidas mais à frente. Alguns desenvolvedores de modelos de turbulência inerentemente inserem restrições de realizabilidade no desenvolvimento teórico de seus modelos [64], esperando, assim, que os modelos sejam fisicamente mais representativos.

O conceito de realizabilidade, devido à sua forte representatividade física, também é estendido para a *implementação* dos modelos de turbulência. Com isso, tenta-se garantir um melhor comportamento das variáveis de turbulência ao longo do processo iterativo, evitando-se, assim, dificuldades numéricas eventualmente advindas de campos de propriedades não-físicos. É perfeitamente possível que ao longo das iterações, alguns campos intermediários atinjam um estado não-físico, principalmente para o campo de turbulência, o que violaria mesmo os conceitos de realizabilidade teóricos embutidos nos modelos. Com as propriedades turbulentas fora de seus limites realizáveis, o escoamento, que poderia se ajustar naturalmente nas iterações seguintes, provavelmente divergiria. Desta forma, é recomendado implementar nas linhas do código alguns limites de realizabilidade físicos. Com isso, por exemplo, pode-se evitar que a energia cinética turbulenta assuma um valor negativo através de $k \leftarrow \max(k, 0)$, ou funções que devam se manter no intervalo $[0, 1]$ são sempre checadas para que efetivamente não produzam nenhum valor fora do mesmo, ou ainda, não se permite que denominadores se tornem nulos, mesmo que conceitualmente nunca fossem devido

às propriedades físicas do escoamento e da turbulência.

Deve-se notar que esse tipo de procedimento representa medidas artificiais de aumento de estabilidade, já que obviamente interferem com o andamento da solução numérica. Entretanto, embora sejam praticamente obrigatórios para que se garanta um comportamento numérico adequado das simulações, esses procedimentos não interferem com a solução numérica *convergida*, já que se atingiu um campo de escoamento naturalmente realizável. A seguir, analisam-se alguns conceitos específicos de realizabilidade para MVVLs e MTTRs.

Modelos de Transporte do Tensor de Reynolds

Devido à complexidade física, matemática e numérica de MTTRs, restrições de realizabilidade são usualmente adotadas nas raízes do desenvolvimento dos modelos [54, 37]. Os limites físicos para as componentes do tensor de Reynolds devem respeitar as inequações de Schwarz [54], de forma que:

$$\begin{aligned} \overline{u''_i u''_i} &> 0, \\ \overline{u''_i u''_j}^2 &< \overline{u''_i u''_i} \overline{u''_j u''_j}, \\ \det(\overline{u''_i u''_j}) &\geq 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Recomenda-se que os termos altamente não-lineares e/ou complexos, como as correlações de pressão-deformação, conceitualmente respeitem essas restrições [37]. Os MTTRs e o MAETR discutidos mais à frente são realizáveis no contexto conceitual [13, 8, 3]. Entretanto, a implementação dessas restrições no código computacional também é recomendada. Em geral, as duas primeiras inequações são suficientes para garantir o comportamento adequado das tensões de Reynolds ao longo das iterações. Vários outros detalhes implementacionais para MTTRs e modelos relacionados podem ser encontrados em [10].

Modelos de Viscosidade de Vórtice Lineares

Restrições de realizabilidade também são considerados em MV-VLs. A restrição mais difundida entre os modelos para aplicações aeroespaciais são os de limitadores da tensão de Reynolds cisalhante [35, 47, 65], de forma que se restrinja a produção de turbulência a níveis fisicamente adequados quando submetidos a gradientes adversos de pressão e/ou cisalhamentos elevados do campo médio. Uma discussão mais detalhada desse conceito é feita nas Seções 0.5.1, 0.5.1 e 0.5.3.

Além disso, a experiência com modelos de duas equações [39] mostra que, em regiões de baixa dissipação turbulenta, pequenas perturbações no tensor de deformações podem acarretar uma produção excessiva e não-física de turbulência. Esse problema é típico em regiões de estagnação, como bordos de ataque, ou em regiões de ondas de choque destacadas. Essa é mais uma limitação resultante da hipótese de Boussinesq, e uma forma *ad-hoc* mas efetiva de se evitar esse problema é limitar a produção da energia cinética turbulenta através de:

$$(P_k)_{new} = \min(P_k, c_{lim1} D_k), \quad 5 < c_{lim1} < 20, \quad (23)$$

em que P_k e D_k são, respectivamente, a produção e a dissipação de k . A relação acima limita a razão produção-destruição a valores ainda mais altos do que aqueles fisicamente representativos dentro da camada limite turbulenta, sendo, portanto, inofensiva dentro das mesmas. É interessante destacar que formulações de MVVNLs ou MT-TRs naturalmente não apresentam esse problema e, portanto, não requerem a limitação acima. Alguns outros detalhes implementacionais para MVVLs podem também ser encontrados em [18, 32, 10].

0.4.7 Alguns Aspectos Numéricos

É interessante citar aqui alguns aspectos numéricos do modelamento de turbulência já que, na prática, os mesmo devem ser implementados em um código computacional e devem ser capazes de produzir resultados dentro de recursos e tempos computacionais adequados. Por se tratarem de equações de transporte com termos fontes não-lineares, alguns cuidados devem ser tomados para uma

implementação adequada dos mesmos. Alguns cuidados gerais são adotados, como:

- Uso de esquemas de fluxo robustos, ou mesmo mais dissipativos (primeira ordem espacial), para se evitar que as propriedades oscilem e/ou atinjam valores negativos em regiões de variação rápida de propriedades;
- Uso de integradores no tempo implícitos, com implicitação dos termos fonte, de forma a garantir robustez na integração dos termos não-lineares;
- Tratamento consistente das condições de contorno, principalmente daquelas de paredes sólidas, de forma a se garantir a descrição correta das propriedades turbulentas nessas regiões, o que é decisivo para a evolução adequada das mesmas ao longo da camada limite;

dentre outros cuidados mais específicos, dependendo dos algoritmos utilizados no código que receberá o modelo de turbulência.

Além disso, o próprio comportamento físico da propriedade turbulenta sendo integrada pode interferir drasticamente no comportamento numérico do modelo de turbulência. O exemplo que se destaca é o modelo $k-\epsilon$ padrão; o comportamento da variável ϵ , ao se aproximar da parede, é fisicamente inconsistente devido à calibração do modelo para altos números de Reynolds, gerando uma descrição inadequada de todas as outras variáveis turbulentas e subsequente comportamento numérico altamente não-linear e intratável. Devido a isso, esse modelo não pode ser integrado ao longo de toda a camada limite até a parede. O modelo $k-\omega$ padrão, embora também seja calibrado para altos números de Reynolds, apresenta um comportamento numérico consistente e bastante adequado ao se aproximar de paredes, permitindo-lhe, então, que seja numericamente integrável até as mesmas.

O assunto relacionado aos aspectos numéricos do modelamento de turbulência mereceria um capítulo a parte devido à complexidade do mesmo. Entretanto, por se envolver mais em conceitos numéricos do que da física da turbulência propriamente dita, não será discutido em mais detalhes aqui. Para o leitor interessado, recomendam-se os trabalhos [39, 40, 7, 65, 10] como referências sobre o assunto.

0.5 Formulações de Modelos de Turbulência

A seguir, os modelos de turbulência mais comumente utilizados para aplicações aeroespaciais são apresentados. Os seguintes modelos são discutidos: Spalart-Allmaras (SA); k - ω de Wilcox (WCOM); k - ϵ realizável (RKE); SST; MTTR modificado de Craft-Launder (CLMRSM); StressBSL; e MAETR de Hellsten (NLBSL). É interessante apresentar essas formulações não somente por referência, mas também porque as discussões envolvendo essas formulações contêm um amplo embasamento da física de turbulência, cujo conhecimento é indiscutivelmente importante.

0.5.1 Modelos de Viscosidade de Vórtice Lineares

Modelo de Spalart-Allmaras

O modelo SA [58] é baseado em uma equação de transporte para o coeficiente de viscosidade de vórtice modificado, $\tilde{\mu}$. Essa equação de transporte é completamente postulada, derivada de acordo com uma linha intuitiva e empírica de raciocínio, necessitando de extensa calibração para uma gama de escoamentos de referência, representativos dos fenômenos de turbulência encontrados em escoamentos aeroespaciais. Essa equação, escrita em forma conservativa, é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{\mu} u_j)}{\partial x_j} = c_{b1} \tilde{P} \tilde{\mu} - c_{w1} f_w \rho \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \\ + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \tilde{\mu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + c_{b2} \rho \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

O coeficiente de viscosidade de vórtice modificado é definido por:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}, \quad \tilde{\mu} = \rho \tilde{\nu}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}. \quad (25)$$

O termo de produção, \tilde{P} , é dado por:

$$\tilde{P} = \Omega + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad (26)$$

em que Ω é a magnitude do tensor de vorticidade:

$$\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (27)$$

e d representa a distância até a parede mais próxima. A função de amortecimento para paredes, f_w , é dada por:

$$f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3} g^6}{g^6 + c_{w3} g^6} \right)^{\frac{1}{6}},$$

$$g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad (28)$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2}.$$

As constantes deste modelo são calibradas para um grande número de problemas típicos de turbulência [58], resultando em:

$$c_{b1} = 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \quad c_{v1} = 7.1,$$

$$\sigma = 2/3, \quad \kappa = 0.41, \quad c_{w1} = c_{b1}/\kappa + (1 + c_{b2})/\sigma,$$

$$c_{w2} = 0.3, \quad c_{w3} = 2. \quad (29)$$

Essa formulação vem sendo aplicada pela comunidade aeroespacial para problemas tridimensionais e compressíveis com resultados e comportamento numérico aceitáveis [56, 35], incluindo separações induzidas por ondas de choque e camadas limite submetidas a gradientes adversos de pressão.

Modelo k - ω de Wilcox

O modelo k - ω de Wilcox [64] foi um dos modelos pioneiros para aplicações aeroespaciais, oferecendo qualidade de resultados e comportamento numérico superiores aos obtidos pelos modelos k - ϵ existentes. Esse modelo vem se desenvolvendo ao longo dos anos, incluindo correções e melhorias para um série de problemas de turbulência específicos [64, 65]. A versão que contempla baixos números de Reynolds [18] é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial (\rho k u_j)}{\partial x_j} &= P_k - \beta^* f_{\beta^*} \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu + \mu_t \sigma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \omega u_j)}{\partial x_j} &= \frac{\alpha \alpha^*}{\nu_t} P_k - \beta f_{\beta} \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu + \mu_t \sigma_{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right].\end{aligned}\tag{30}$$

O coeficiente de viscosidade de vórtice é definido como:

$$\mu_t = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega},\tag{31}$$

e o termo de produção foi definido na Eq. 17.

As correções para comportamento adequado em regiões de baixo número de Reynolds, incluindo uma calibração adicional para a transição para a turbulência por mecanismos relacionados a instabilidades de ondas de Tollmien-Schlichting, compõem as seguintes funções:

$$\alpha^* = \alpha_{\infty}^* \left[\frac{\alpha_0^* + (R_t/R_k)}{1 + (R_t/R_k)} \right], \quad \alpha = \frac{\alpha_{\infty}}{\alpha^*} \left[\frac{\alpha_0 + (R_t/R_{\omega})}{1 + (R_t/R_{\omega})} \right],\tag{32}$$

com o número de Reynolds turbulento definido para esse modelo por:

$$R_t = \frac{\rho k}{\mu \omega}.\tag{33}$$

Algumas correções para escoamentos cisalhantes livres são também consideradas, dadas por:

$$\begin{aligned}
 f_{\beta^*} &= \begin{cases} 1 & \Psi_k \leq 0 \\ \frac{1 + 680\Psi_k^2}{1 + 400\Psi_k^2} & \Psi_k > 0 \end{cases}, & \Psi_k &= \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \\
 \beta^* &= \beta_\infty^* \left[\frac{4/15 + (R_t/R_\beta)^4}{1 + (R_t/R_\beta)^4} \right], \\
 f_\beta &= \frac{1 + 70\Psi_\omega}{1 + 80\Psi_\omega}, \\
 \Psi_\omega &= \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{jk} S_{ki}}{(\beta_\infty^* \omega)^3} \right|, \tag{34}
 \end{aligned}$$

em que as componentes do tensor de vorticidade, Ω_{ij} , são definidas na Eq. 27 e as componentes do tensor de deformações, S_{ij} , na Eq. 41 mais à frente.

As constantes desse modelo também são calibradas para escoamentos típicos de turbulência [18, 64], resultando em:

$$\begin{aligned}
 \alpha_\infty^* &= 1, & \alpha_\infty &= 0.52, & \alpha_0 &= 1/9, \\
 \alpha_0^* &= \beta/3, & \beta_\infty^* &= 0.09, & \beta &= 0.072, \\
 R_k &= 6, & R_\omega &= 2.95, & R_\beta &= 8, & \sigma_k &= \sigma_\omega = 0.5.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Modelo k - ϵ Realizável

O modelo k - ϵ realizável [55] acrescenta sobre o modelo k - ϵ padrão [26] algumas modificações para melhorar seu comportamento perto de paredes sólidas e sob gradientes adversos de pressão. As equações de transporte desse modelo são:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial (\rho k u_j)}{\partial x_j} = P_k - \rho \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu + \mu_t \sigma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right],$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \epsilon u_j)}{\partial x_j} = (C_{\epsilon_1} P_k - C_{\epsilon_2} \rho \epsilon + E) T_t^{-1} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu + \mu_t \sigma_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right]. \quad (36)$$

Na equação do ϵ , T_t^{-1} é uma estimativa realizável da escala de tempo da turbulência, dado por:

$$T_t = \frac{k}{\epsilon} \max(1, \zeta^{-1}), \quad \zeta = \sqrt{\frac{R_t}{2}}, \quad (37)$$

com o número de Reynolds turbulento definido para esse modelo por:

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu \epsilon}. \quad (38)$$

O termo E na equação de ϵ foi adicionado para melhorar a resposta do modelo sob gradientes adversos de pressão, dado por:

$$E = A_E \rho \sqrt{\epsilon T_t} \Psi \max \left[k^{\frac{1}{2}}, (\nu \epsilon)^{\frac{1}{4}} \right],$$

$$\Psi = \max \left(\frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial z} \right), \quad (39)$$

$$\tau = \frac{k}{\epsilon}.$$

O coeficiente de viscosidade de vórtice é também realizável, definido por:

$$\mu_t = \min \left(C_\mu f_\mu \frac{\rho k^2}{\epsilon}, \frac{2\rho k}{3S} \right), \quad (40)$$

em que a magnitude do tensor de deformações é definido para um escoamento compressível por:

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{3}u_{k,k}\delta_{ij}. \quad (41)$$

A inclusão deste termo torna esse modelo sensível aos gradientes adversos de pressão e é obtido através de conceitos físicos e realizáveis da turbulência. Conceituação similar será discutida na seção a seguir em que se descreve o modelo SST.

Na definição do coeficiente de viscosidade de vórtice, f_μ é a função de baixo número de Reynolds para amortecimento de parede, necessária para melhorar o comportamento do modelo k - ϵ nessas regiões. Essa função é dada por:

$$f_\mu = \frac{1 - \exp^{-0.01R_t}}{1 - \exp^{-\sqrt{R_t}}} \max\left(1, \sqrt{\frac{2}{R_t}}\right). \quad (42)$$

A calibração dos coeficientes desse modelo é feita de forma similar aos outros modelos [55], obtendo-se o seguinte conjunto:

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0.09, & C_{\epsilon_1} &= 1.44, & C_{\epsilon_2} &= 1.92, \\ \sigma_k &= 1.0, & \sigma_\epsilon &= 1.3, & A_E &= 0.3. \end{aligned} \quad (43)$$

Modelo SST

Melhorias sobre o modelo k - ω de Wilcox [64] são obtidas com o modelo SST de Menter [39, 40]. O modelo SST, na verdade, é derivado de uma mistura dos modelos k - ω [64] e k - ϵ [26] padrões, de forma a se corrigir os problemas do k - ω com relação à dependência anômala com propriedades de escoamento não-perturbado [40] enquanto mantém as boas propriedades desse modelo perto de paredes. Sua formulação é dada por:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial (\rho k u_j)}{\partial x_j} = P_k - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu + \mu_t \sigma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right],$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \omega u_j)}{\partial x_j} = & \\
 \frac{\gamma_t}{\nu_t} P_k - \beta_1 \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu + \mu_t \sigma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + & \\
 2(1 - F_1) \rho \frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, & \quad (44)
 \end{aligned}$$

em que ω pode ser entendido como a dissipação turbulenta de k , e se relaciona com ϵ na forma:

$$\epsilon = \beta^* k \omega. \quad (45)$$

O último termo na equação de ω é uma difusão cruzada que aparece quando se transforma a equação de ϵ na equação para ω , e é responsável pela correção do comportamento anômalo do k - ω com relação a propriedades de escoamento não-perturbado.

Os coeficientes do modelo SST podem ser genericamente calculados da seguinte forma:

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2, \quad (46)$$

em que ϕ é um coeficiente genérico, e ϕ_1 representa o conjunto de constantes do modelo k - ω e ϕ_2 , o conjunto para o modelo k - ϵ . Os seguintes conjuntos [39] são usados:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075, \\
 \gamma_{t1} = \beta_1 / \beta^* - \sigma_{\omega 1} \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}, \\
 \sigma_{k2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.855, \quad \beta_2 = 0.0828, \\
 \gamma_{t2} = \beta_2 / \beta^* - \sigma_{\omega 2} \kappa^2 / \sqrt{\beta^*},
 \end{aligned} \quad (47)$$

e as constantes são:

$$\beta^* = 0.09, \quad \kappa = 0.41. \quad (48)$$

A variável F_1 é uma função que aciona o modelo k - ω perto das paredes e o modelo k - ϵ , da metade da camada limite em diante, para fora dela. Essa função é baseada em testes de razões de propriedades turbulentas através da camada limite, resultando em:

$$F_1 = \tanh \Gamma^4, \quad \Gamma = \min [\max (\Gamma_1, \Gamma_2), \Gamma_3], \quad (49)$$

em que Γ_1 representa a razão entre a escala de comprimento turbulenta e a distância à parede, Γ_2 é a razão baseada na escala de comprimento viscosa e Γ_3 é baseada no termo de difusão cruzada, servindo como limite superior para as duas funções anteriores de forma a se evitar a dependência anômala com propriedades de escoamento não-perturbado. Essas razões são definidas por:

$$\Gamma_1 = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \quad \Gamma_2 = \frac{500 \nu}{\omega d^2}, \quad \Gamma_3 = \frac{4\sigma_{\omega 2} \rho k}{CD_{k\omega} d^2},$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\sigma_{\omega 2} \frac{\rho}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right). \quad (50)$$

Uma contribuição adicional do modelo SST é a definição do coeficiente de viscosidade de vórtice. Um dos entendimentos que se tem sobre o fato de modelos baseados na hipótese de Boussinesq não reproduzirem adequadamente escoamentos submetidos a gradientes adversos de pressão ou separação é a ausência dos efeitos de transporte da tensão de Reynolds cisalhante [25]. Sabe-se que a tensão de Reynolds cisalhante dentro da camada limite é proporcional à energia cinética turbulenta, $\tau_{xy}^t = a_1 \rho k$ [25]. Além disso, a hipótese de Boussinesq, $\tau_{xy}^t = 2\mu_t \partial u / \partial y$, tende a sobre-produzir a tensão de Reynolds cisalhante. Assim, sob gradiente adverso de pressão, a produção de k , proporcional a $\partial u / \partial y$, seria incorretamente maior que sua dissipação, $\partial u / \partial y > a_1 \omega$.

Menter propôs, então, uma forma *ad-hoc* de se considerar esse conceito no modelo SST através da redefinição do coeficiente de viscosidade de vórtice como:

$$\mu_t = \frac{a_1 \rho k}{\max(a_1 \omega, F_2 S)}, \quad F_2 = \tanh [\max(2\Gamma_1, \Gamma_2)]^2, \quad (51)$$

em que S é a magnitude do tensor de deformações. A variável F_2 é uma outra função que aplica a limitação do transporte da tensão cisalhante apenas dentro de camadas limite. Existe também uma versão do modelo SST, denominada BSL, em que se utiliza somente a definição padrão da viscosidade de vórtice, $\mu_t = \rho k / \omega$, com alguns outros coeficientes recalibrados [39].

0.5.2 Modelos de Transporte do Tensor de Reynolds

A apresentação dos MTTRs a seguir segue a discussão em torno da Eq. 18. Cada um dos termos naquela equação de transporte são discutidos para os modelos apresentados.

MTTR Modificado de Craft-Launder

Este MTTR [8] é uma variação do MTTR não-linear proposto por Craft e Launder [13]. O modelo modificado propõe correções sobre o modelo original para melhorar sua resposta a ondas de choque, que eram falsamente interpretadas como regiões de altíssima anisotropia. Ambos não necessitam de parâmetros geométricos ou topológicos da parede como, por exemplo, vetores normais à parede ou a distância à parede. Além disso, a correlação pressão-deformação tem comportamento adequado e pode ser integrada ao longo de toda a parede, além de responder consistentemente através de ondas de choque.

Difusão completa

A hipótese generalizada de difusão de gradientes (em inglês, *generalised gradient diffusion hypothesis – GGDH*) em [15] é usada para modelar a *difusão turbulenta*. A difusão completa, envolvendo as difusões molecular, turbulenta e por pressão, é dada por:

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\overline{\partial u''_i u''_j}}{\partial x_k} + 0.22 \frac{k}{\epsilon} \overline{\rho u''_k u''_l} \frac{\overline{\partial u''_i u''_j}}{\partial x_l} \right) + \frac{\overline{\rho u''_i u''_j}}{2k} d_{kk}^p. \quad (52)$$

O último termo é um modelo para a difusão por pressão, dado por:

$$d_{kk}^p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p u_k}}{\partial x_k},$$

$$\overline{p u_k} = -(1 - A) (0.5 d_k + 1.1 d_k^A) \sqrt{\mu \rho k \epsilon A A_2} C_{pd}, \quad (53)$$

com $C_{pd} = [1 + 2 \exp(-Re_t/40)] A_2 + 0.4 Re_t^{-0.25} \exp(-Re_t/40)$. Os vetores indicadores de não-homogeneidade são definidos como:

$$d_i = \frac{N_i}{0.5 + \sqrt{N_k N_k}}, \quad d_i^A = \frac{N_i^A}{0.5 + \sqrt{N_k^A N_k^A}}, \quad (54)$$

com os gradientes e a escala turbulenta de comprimento dados por:

$$N_i = \frac{\partial(lA)}{\partial x_k}, \quad N_i^A = \frac{\partial(l\sqrt{A})}{\partial x_k}, \quad l = \frac{k^{1.5}}{\epsilon}. \quad (55)$$

A variável A representa o parâmetro de Lumley [37], cujo valor varia entre um, para turbulência isotrópica, e zero, quando a turbulência tende ao limite de apenas duas componentes:

$$A = 1 - \frac{9}{8} (A_2 - A_3), \quad A_2 = a_{ij} a_{ij}, \quad A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki}, \quad (56)$$

e o *tensor de anisotropia de tensões de Reynolds* é definido como:

$$a_{ij} = \frac{\overline{\rho u''_i u''_j}}{\rho k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}. \quad (57)$$

Para a implementação desse modelo, recomenda-se restringir essas invariantes aos respectivos limites fisicamente consistentes de:

$$0 \leq A_2 \leq \frac{8}{3}, \quad 0 \leq A \leq 1, \quad (58)$$

de forma a se garantir o comportamento realizável das mesmas.

Correlação pressão-deformação

A correlação pressão-deformação é considerada um elemento crítico para MTTRs já que pode ser da ordem de grandeza dos termos de produção e dissipação. Além disso, como é uma correlação que não se pode medir, o modelamento desse termo requer um esforço substancial. Um modelo cúbico é usado em conjunto com coeficientes e correções de baixo número de Reynolds, de forma que se tenha:

$$\Phi_{ij}^* = \Phi_{ij1}^* + \Phi_{ij2}^* + \Phi_{ij1}^{inh} + \Phi_{ij2}^{inh}, \quad (59)$$

em que:

$$\Phi_{ij1}^* = -c_1 \rho \epsilon^* \left[a_{ij} + c'_1 \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right] - \rho \epsilon^* A^{0.5} a_{ij},$$

$$\Phi_{ij2}^* = -0.6 \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) + 0.3 a_{ij} P_{kk}$$

$$- \frac{0.2}{\rho k} \left[\overline{\rho u''_k u''_j} \overline{\rho u''_l u''_i} (u_{k,l} + u_{l,k}) \right]$$

$$- \overline{\rho u''_l u''_k} \left(\overline{\rho u''_i u''_k} u_{j,l} + \overline{\rho u''_j u''_k} u_{i,l} \right)$$

$$- c_2 \left[A_2 (P_{ij} - D_{ij}) + 3 a_{mi} a_{nj} (P_{mn} - D_{mn}) \right]$$

$$\begin{aligned}
& - c'_2 \left\{ \left(\frac{7}{15} - \frac{A_2}{4} \right) \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) \right. \\
& + 0.1 P_{kk} \left[a_{ij} - \frac{1}{2} \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right] - 0.05 a_{ij} a_{lk} P_{kl} \\
& + \frac{0.1}{\rho k} \left[\overline{\rho u''_i u''_m} P_{mj} + \overline{\rho u''_j u''_m} P_{mi} - \frac{2}{3} \overline{\rho u''_l u''_m} P_{ml} \delta_{ij} \right] \\
& + \frac{0.1}{(\rho k)^2} \left[\overline{\rho u''_l u''_i} \overline{\rho u''_k u''_j} \right. \\
& \left. - \frac{1}{3} \overline{\rho u''_l u''_m} \overline{\rho u''_k u''_m} \delta_{ij} \right] [6D_{lk} + 13\rho k (u_{l,k} + u_{k,l})] \\
& \left. + \frac{0.2}{(\rho k)^2} \overline{\rho u''_l u''_i} \overline{\rho u''_k u''_j} (D_{lk} - P_{lk}) \right\}, \tag{60}
\end{aligned}$$

e os termos de baixo número de Reynolds são:

$$\begin{aligned}
\Phi_{ij1}^{inh} &= f_{w1} \frac{\epsilon}{k} \left[\overline{\rho u''_l u''_k} d_l^A d_k^A \delta_{ij} - \right. \\
& \left. \frac{3}{2} \left(\overline{\rho u''_i u''_k} d_j^A d_k^A + \overline{\rho u''_j u''_k} d_i^A d_k^A \right) \right] \\
& + f_{w2} \frac{\epsilon}{\rho k^2} \left[\overline{\rho u''_m u''_n} \overline{\rho u''_m u''_l} d_n^A d_l^A \delta_{ij} \right. \\
& - \frac{3}{2} \left(\overline{\rho u''_i u''_m} \overline{\rho u''_m u''_l} d_j^A d_l^A + \right. \\
& \left. \left. \overline{\rho u''_j u''_m} \overline{\rho u''_m u''_l} d_i^A d_l^A \right) \right], \tag{61} \\
\Phi_{ij2}^{inh} &= f_I \rho k u_{l,n} d_l d_n \left(d_i d_j - \frac{1}{3} d_k d_k \delta_{ij} \right),
\end{aligned}$$

com os seguintes coeficientes e funções:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 3.2 f_A A_2^{0.5} \min \left[(Re_t/160)^2, 1 \right], \\
 c'_1 &= 1.1, \\
 c_2 &= \\
 &\min \left\{ 0.55 \left[1 - \exp(-A^{1.5} Re_t/100) \right], 3.2A / \left(1 + \tilde{S} \right) \right\}, \\
 c'_2 &= \min \left[0.6, A^{0.5} \right] \\
 &\quad + 3.5 \left(\tilde{S} - \tilde{\Omega} \right) / \left(3 + \tilde{S} + \tilde{\Omega} \right) - 4 \min \left[S_I, 0 \right], \\
 f_{w1} &= 2.35 \left(1 - A^{0.5} \right) \min \left\{ 1, \max \left[0, 1 - (Re_t - 55) / 70 \right] \right\}, \\
 f_{w2} &= 0.6A_2 \left(1 - A^{0.5} \right) \\
 &\quad \min \left\{ 1, \max \left[0, 1 - (Re_t - 50) / 85 \right] \right\} + 0.1, \\
 f_I &= 3 f_A, \\
 f_A &= \begin{cases} (A/14)^{0.5} & A < 0.05 \\ A/0.7^{0.5} & 0.05 < A < 0.7 \\ A^{0.5} & A > 0.7 \end{cases}, \quad (62)
 \end{aligned}$$

além das seguintes definições:

$$\begin{aligned}
 D_{ij} &= -\overline{\rho u''_i u''_k} u_{k,j} - \overline{\rho u''_j u''_k} u_{k,i}, \\
 \tilde{S} &= \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}, \\
 \tilde{\Omega} &= \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{ij}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_I &= \sqrt{6}S_{ij}S_{jk}S_{ki}/(S_{ln}S_{ln})^{1.5}, \\
S_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i}, \\
\Omega_{ij} &= u_{i,j} - u_{j,i}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Escalando-se f_{w1} e f_{w2} por $(1 - A^{0.5})$, além das formas funcionais dependentes de Re_t , garante-se que as correções de não-homogeneidade (ou seja, de baixo número de Reynolds turbulento) sejam efetivas somente perto de paredes. O coeficiente c'_2 é modificado pela invariante S_I , que assume valores ± 1 em contrações ou expansões homogêneas axissimétricas, respectivamente, e tende a zero para cisalhamento bidimensional, de forma a se melhorar a representação de escoamentos axissimétricos com expansão, como jatos impingentes.

Dissipação turbulenta

O tensor de dissipação mistura termos isotrópicos, ϵ , e de baixo número de Reynolds, $\epsilon_{ij}^{(1)}$, além de um termo adicional, $\epsilon_{ij}^{(2)}$, que representa o afundamento da taxa de dissipação da tensão de Reynolds cisalhante entre as sub-camadas laminar e inercial da camada limite turbulenta, de forma que:

$$\epsilon_{ij} = (1 - f_\epsilon) \frac{\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}}{D} + \frac{2}{3} f_\epsilon \rho \epsilon \delta_{ij}, \tag{64}$$

em que:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ij}^{(1)} &= \frac{\epsilon}{k} \overline{\rho u''_i u''_j} \\
&+ \mu \frac{2}{\rho k} \left(\overline{\rho u''_l u''_n} \sqrt{k_{,l}} \sqrt{k_{,n}} \delta_{ij} \right. \\
&+ \left. \overline{\rho u''_l u''_i} \sqrt{k_{,j}} \sqrt{k_{,l}} + \overline{\rho u''_l u''_j} \sqrt{k_{,i}} \sqrt{k_{,l}} \right), \tag{65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{(2)} &= f_R \frac{\epsilon}{k} (2\rho \overline{u''_i u''_k} d_i^A d_k^A \delta_{ij} - \overline{\rho u''_i u''_i} d_i^A d_j^A \\ &\quad - \overline{\rho u''_i u''_j} d_i^A d_j^A), \end{aligned} \quad (66)$$

com os seguintes coeficientes e definições:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\epsilon_{kk}^{(1)} + \epsilon_{kk}^{(2)}}{2\rho\epsilon}, \\ f_R &= (1 - A) \min \left[(Re_t/180)^2, 1 \right], \quad f_\epsilon = A^{0.5}. \end{aligned} \quad (67)$$

Equação para taxa de dissipação turbulenta

Adota-se uma equação para a taxa de dissipação homogênea, ϵ^* , que é definida por:

$$\epsilon^* = \epsilon - 2\nu \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j}. \quad (68)$$

A vantagem de se usar essa variável é que ela tem uma condição de contorno de parede bastante simples, $\epsilon_{parede}^* = 0$. Essa equação incorpora algumas modificações para efeitos de baixo número de Reynolds, de forma que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \epsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho \epsilon^* u_k}{\partial x_k} &= C_{\epsilon_1} \frac{0.5 P_{kk}}{\tau} - C_{\epsilon_2} \frac{\rho \epsilon^*}{\tau} \\ &\quad - C_{\epsilon_3} \frac{(\epsilon - \epsilon^*) \rho \epsilon^*}{k} + C_{\epsilon_5} \frac{\rho \epsilon^*}{\tau} Y_P \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu \delta_{kl} + C_\epsilon \overline{\rho u''_k u''_l} \frac{k}{\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon^*}{\partial x_l} \right] \\ &\quad + C_{\epsilon_4} \nu \tau \overline{\rho u''_i u''_j} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}, \end{aligned} \quad (69)$$

com as seguintes definições:

$$\tau = \frac{k}{\epsilon}, \quad Y_P = \min \left\{ \max \left[F (F + 1)^2, 0 \right], 20 \right\},$$

$$F = \frac{1}{c_l} \left[\sqrt{\frac{\partial l}{\partial x_j} \frac{\partial l}{\partial x_j}} - \frac{\partial l_e}{\partial Y} \right], \quad (70)$$

$$\frac{\partial l_e}{\partial Y} = c_l [1 - \exp(-B_\epsilon Re_t) + B_\epsilon Re_t \exp(-B_\epsilon Re_t)],$$

e com as seguintes constantes de calibração, $c_l = 2.55$, $B_\epsilon = 0.1069$, $C_{\epsilon_1} = 1.44$, $C_{\epsilon_2} = 1.92$, $C_{\epsilon_3} = 1.0$, $C_{\epsilon_4} = 0.4$, $C_{\epsilon_5} = 0.2$ e $C_\epsilon = 0.18$.

Coefficiente de viscosidade de vórtice

Adota-se a definição isotrópica padrão para modelos k - ϵ de alto número de Reynolds, dada por:

$$\mu_t = C_\mu \frac{\rho k^2}{\epsilon}, \quad C_\mu = 0.09, \quad (71)$$

com $\sigma_k = 1$ para o cálculo do termo de transporte turbulento na Eq. 21.

StressBSL

Esse MTTR é, genericamente, um modelo linear de alto número de Reynolds, mais simples do que o MTTR modificado de Craft-Lauder, apresentado anteriormente.

Difusão completa

Adota-se uma difusão turbulenta isotrópica para esse modelo [3]. Essa opção tem as vantagens de ser simples e numericamente robusta [64]. A difusão por pressão, como usual para MTTRs, é desprezada para esse modelo. A difusão total, que inclui os termos de difusão

turbulenta e molecular, é dada por:

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu + \sigma_k \mu_t \frac{\partial \overline{u''_i u''_j}}{\partial x_k} \right], \quad \sigma_k = 0.5, \quad \mu_t = \frac{\rho k}{\omega}. \quad (72)$$

Correlação pressão-deformação

A correlação pressão-deformação linear adotada neste MTTR é dada por:

$$\Phi_{ij}^* = \Phi_{ij1}^* + \Phi_{ij2}^*, \quad (73)$$

em que Φ_{ij1}^* é sugerido em [49], e Φ_{ij2}^* é proposto em [33], resultando em:

$$\Phi_{ij1}^* = -\beta^* C_1 \omega \left(\overline{\rho u''_i u''_j} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right), \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij2}^* = & -\hat{\alpha} \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) - \hat{\beta} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) \\ & - \rho \hat{\gamma} \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right), \end{aligned} \quad (75)$$

em que:

$$\hat{\alpha} = \frac{8 + C_2}{11}, \quad \hat{\beta} = \frac{8C_2 - 2}{11}, \quad \hat{\gamma} = \frac{60C_2 - 4}{55},$$

$$C_1 = 1.8, \quad C_2 = 0.52. \quad (76)$$

Os termos Φ_{ij1}^* e Φ_{ij2}^* são modelados separadamente pois representam dois fenômenos distintos da correlação pressão-deformação, como detalhado em [33]. O primeiro termo, Φ_{ij1}^* , representa as interações entre as próprias variáveis turbulentas, enquanto Φ_{ij2}^* representa a interação entre as variáveis turbulentas e as variáveis de campo médio. Os coeficientes são obtidos considerando-se efeitos

distantes da parede, caracterizando assim esse modelo como de alto número de Reynolds.

Dissipação turbulenta

Já que a dissipação viscosa ocorre no nível das menores escalas turbulentas, a grande maioria dos modelos de alto número de Reynolds utiliza a hipótese de isotropia local de Kolmogorov, resultando em:

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3}\beta^* \rho k \omega \delta_{ij}, \text{ considerando } \epsilon = \beta^* k \omega. \quad (77)$$

Equação para taxa de dissipação turbulenta

A equação de ω do modelo BSL é usada neste MTTR, em conjunto com a definição do coeficiente de viscosidade de vórtice. Nenhuma recalibração do modelo BSL é utilizada para compor o StressBSL, como observado em [3].

0.5.3 Modelo de Viscosidade de Vórtice Não-Linear

MVVNL de Hellsten/Wallin-Johansson

A derivação deste MVVNL é baseada no conceito de um modelo algébrico e explícito para o tensor de Reynolds (MAETR) [62]. A derivação clássica de um MAETR se inicia com um MTTR *algébrico*, obtido a partir de um MTTR assumindo-se a turbulência em equilíbrio, o que é equivalente a se desprezar os termos de convecção e difusão das equações de transporte do MTTR. Para este modelo, de forma a se simplificar as operações algébricas, o MTTR é reescrito em termos do *tensor de anisotropia de tensões de Reynolds*, como definido na Eq. 57. As equações do MTTR *algébrico* são dadas, então, por:

$$\frac{\overline{\rho u''_i u''_j}}{\rho k} (\mathcal{P} - \epsilon) = P_{ij} - \rho \epsilon_{ij} + \Phi_{ij}^*, \quad (78)$$

em que $\mathcal{P} = 0.5P_{kk}$.

Na derivação deste MAETR, em [62], assume-se um tensor de dissipação turbulenta isotrópico, da mesma forma que na Eq. 77. Além disso, a correlação pressão-deformação adotado é linear e bastante semelhante ao usado no MTTR StressBSL, na Eq. 73. Substituindo-se esses termos na Eq. 78, reescritos para o tensor *de anisotropia* de tensões de Reynolds, obtém-se um MTTR *algébrico e implícito*, que pode ser escrito de forma simples através de uma notação tensorial por:

$$\begin{aligned} \left(C_1 - 1 - \frac{6C_2 + 4}{11} \tau u_{k,k} + \frac{\mathcal{P}}{\epsilon} \right) \mathbf{a} = \\ - \frac{8}{15} \tilde{\mathbf{S}} + \frac{7C_2 + 1}{11} \left(\mathbf{a} \tilde{\Omega} - \tilde{\Omega} \mathbf{a} \right) \\ - \frac{5 - 9C_2}{11} \left(\mathbf{a} \tilde{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{a} - \frac{2}{3} \{ \mathbf{a} \tilde{\mathbf{S}} \} \mathbf{I} \right). \end{aligned} \quad (79)$$

Nesta equação, o operador $\{ \}$ retorna o traço do tensor. Além disso, as seguintes notações são utilizadas: $\tilde{S}_{ij} = \tau S_{ij}$ e $\tilde{\Omega}_{ij} = \tau \Omega_{ij}$, em que τ tem uma forma um pouco diferente daquela na Eq. 71, *i.e.*:

$$\tau = \max \left(\tau, C_\tau \sqrt{\mu \frac{1}{\rho \epsilon}} \right), \quad C_\tau = 6.0, \quad (80)$$

de forma a se considerar o limite das escalas de Kolmogorov perto das paredes.

A solução dessa equação implícita é reconhecidamente complicada em termos numéricos. Assim, prefere-se adotar uma forma geral e *explícita* do tensor de anisotropia de Reynolds em função de \tilde{S}_{ij} e $\tilde{\Omega}_{ij}$, como em [62], de forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \beta_1 \tilde{\mathbf{S}} + \beta_2 \left(\tilde{\mathbf{S}}^2 - \frac{1}{3} II_S \mathbf{I} \right) \\ + \beta_3 \left(\tilde{\Omega}^2 - \frac{1}{3} II_\Omega \mathbf{I} \right) + \beta_4 \left(\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\Omega} - \tilde{\Omega} \tilde{\mathbf{S}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta_5 \left(\tilde{\mathbf{S}}^2 \tilde{\mathbf{\Omega}} - \tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{S}}^2 \right) + \beta_6 \left(\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{\Omega}}^2 + \tilde{\mathbf{\Omega}}^2 \tilde{\mathbf{S}} - \frac{2}{3} IV \mathbf{I} \right) \quad (81) \\
& +\beta_7 \left(\tilde{\mathbf{S}}^2 \tilde{\mathbf{\Omega}}^2 + \tilde{\mathbf{\Omega}}^2 \tilde{\mathbf{S}}^2 - \frac{2}{3} VI \right) + \beta_8 \left(\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{S}}^2 + \tilde{\mathbf{S}}^2 \tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{S}} \right) \\
& +\beta_9 \left(\tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{\Omega}}^2 + \tilde{\mathbf{\Omega}}^2 \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{\Omega}} \right) + \beta_{10} \left(\tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{S}}^2 \tilde{\mathbf{\Omega}}^2 + \tilde{\mathbf{\Omega}}^2 \tilde{\mathbf{S}}^2 \tilde{\mathbf{\Omega}} \right),
\end{aligned}$$

em que os coeficientes β_n podem ser funções das cinco invariantes independentes:

$$\begin{aligned}
II_S &= \{\tilde{\mathbf{S}}^2\}, \quad II_\Omega = \{\tilde{\mathbf{\Omega}}^2\}, \quad III_S = \{\tilde{\mathbf{S}}^3\}, \\
IV &= \{\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{\Omega}}^2\}, \quad V = \{\tilde{\mathbf{S}}^2 \tilde{\mathbf{\Omega}}^2\}. \quad (82)
\end{aligned}$$

A solução explícita do tensor de anisotropia depende agora somente da determinação dos coeficientes β_n .

Considerando-se os valores sugeridos de $C_1 = 1.8$ e $C_2 = 5/9$, a Eq. 79 resulta num MTTR *algébrico e implícito* simples:

$$\begin{aligned}
N \mathbf{a} &= -\frac{6}{5} \tilde{\mathbf{S}} + \left(\mathbf{a} \tilde{\mathbf{\Omega}} - \tilde{\mathbf{\Omega}} \mathbf{a} \right), \quad N = C'_1 + \frac{9 \mathcal{P}}{4 \epsilon}, \\
C'_1 &= \frac{9}{4} \left(C_1 - 1 - \frac{2}{3} \mathcal{D} \right), \quad (83)
\end{aligned}$$

em que o termo de dilatação compressível, \mathcal{D} , é definido por $\mathcal{D} = \tau u_{k,k}$. A expansão explícita do tensor de anisotropia da Eq. 82 é inserida na equação anterior, em que N é uma variável ainda indeterminada. Obtém-se um sistema linear de equações para os coeficientes β_n , que devem ser determinados como funções de N e das invariantes na Eq. 82, resultando em:

$$\beta_1 = -\frac{N(2N^2 - 7II_\Omega)}{Q}, \quad \beta_3 = -\frac{12N^{-1}IV}{Q},$$

$$\beta_4 = -\frac{2(N^2 - 2II_\Omega)}{Q} \beta_6 = -\frac{6N}{Q}, \quad \beta_9 = \frac{6}{Q}, \quad (84)$$

e o denominador Q é dado por:

$$Q = \frac{5}{6} (N^2 - 2II_\Omega) (2N^2 - II_\Omega). \quad (85)$$

O último passo é a determinação de N , obtido através da substituição da expansão do tensor de anisotropia, já com seus coeficientes β_n determinados, na definição de N na Eq. 83. Chega-se em uma equação algébrica de sexto grau:

$$\begin{aligned} N^6 - C'_1 N^5 - \left(\frac{27}{10} II_S + \frac{5}{2} II_\Omega \right) N^4 + \frac{5}{2} C'_1 II_\Omega N^3 \\ + \left(II_S^2 + \frac{189}{20} II_S II_\Omega - \frac{81}{5} V \right) N^2 \\ - C'_1 II_\Omega^2 N - \frac{81}{5} IV^2 = 0, \end{aligned} \quad (86)$$

que, infelizmente, não tem solução analítica. Para um caso bidimensional, essa equação se simplifica para terceiro grau, com uma solução exata para N , denominada N_c . Essa solução bidimensional é, então, utilizada como uma primeira aproximação para o caso tridimensional. Uma melhor aproximação pode ainda ser feita através de uma análise de perturbação da equação tridimensional, obtendo-se:

$$\begin{aligned} N = N_c + \frac{162}{D} \left[IV^2 + N_c \left(V - \frac{1}{2} II_S II_\Omega \right) \right], \text{ e} \\ D = 20N_c^4 \left(N_c - \frac{1}{2} C'_1 \right) \\ - II_\Omega (10N_c^3 + 15C'_1 N_c^2) + 10C'_1 II_\Omega^2. \end{aligned} \quad (87)$$

Com isso, tem-se a expansão do tensor de anisotropia de tensões de Reynolds completamente definido.

Integração com MVVLs de Suporte

O tensor de anisotropia de Reynolds expandido e já determinado pode ser inserido num MVVL de suporte de duas equações, como a equação BSL, por exemplo, descrita na Seção 0.5.1. O tensor é geralmente dividido em uma parte isotrópica e outra anisotrópica, como:

$$-\overline{\rho u''_i u''_j} = 2C_\mu^{eff} \rho k \tilde{S}_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \rho k a_{ij}^{nl}, \quad (88)$$

em que a_{ij}^{nl} é a contribuição *não-isotrópica* e a parte isotrópica é a mesma que a de modelos lineares, ou seja, representativa da hipótese de Boussinesq, em que a viscosidade de vórtice pode ser, portanto, escrita como:

$$\mu_t = C_\mu^{eff} \rho k \tau. \quad (89)$$

Note que se utiliza um coeficiente *efetivo* para a viscosidade de vórtice, definido em [62] por:

$$C_\mu^{eff} = -\frac{1}{2} (\beta_1 + II_\Omega \beta_6), \quad (90)$$

ao invés do coeficiente *constante* clássico, $C_\mu = 0.09$, dos modelos $k-\epsilon$ [26] e $k-\omega$ [64] padrões.

Esse coeficiente *efetivo* é uma das grandes contribuições de MAE-TRs para a melhoria da representação dos fenômenos de turbulência, já que o mesmo *adapta os níveis de viscosidade de vórtice aos campos de deformação e vorticidade locais*. Sob esse ponto de vista, pode-se entender, então, que os modelos RKE e SST também possuem um coeficiente *efetivo* adaptável em suas definições da viscosidade de vórtice, de forma que, se reescritas na forma da Eq. 89, tem-se:

$$\text{NLBSL:} \quad C_\mu^{eff} = -\frac{1}{2} (\beta_1 + II_\Omega \beta_6),$$

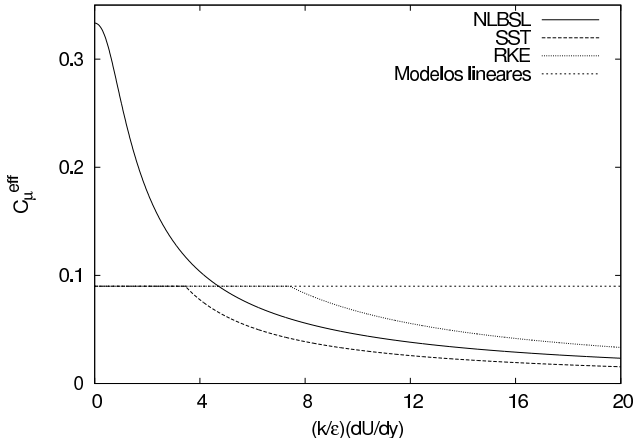


Figura 8: Curvas de coeficiente efetivo de viscosidade de vórtice para um escoamento cisalhante livre simples.

$$\text{SST: } C_\mu^{eff} = \min \left(0,09, \frac{a_1}{F_2} \frac{\epsilon}{k S} \right), \quad (91)$$

$$\text{RKE: } C_\mu^{eff} = \min \left(0,09, \frac{2}{3} \frac{\epsilon}{k S} \right).$$

Assim, recentemente, alguns autores denominam MVVLs como o SST e o RKE, cujo coeficiente efetivo seja adaptável ao campo de deformação e/ou vorticidade, de modelos *fracamente não-lineares*.

Esses coeficientes efetivos são plotados na Fig. 8 para um escoamento cisalhante livre simples.

Nota-se que, para valores crescentes de cisalhamento, o coeficiente efetivo torna-se cada vez menor, o que significa que a tensão de Reynolds cisalhante ($\tau_{xy}^t = C_\mu^{eff} \rho k (k/\epsilon) \partial u / \partial y$) não cresce tão rapidamente quanto para $C_\mu^{eff} = C_\mu = 0,09$. Esse comportamento é benéfico pois evita a produção excessiva de turbulência em escoamentos sob gradientes adversos de pressão, que é um problema típico dos modelos lineares, para os quais C_μ é constante. Em outras palavras, a adaptação da viscosidade de vórtice ao campo de deformação e/ou vorticidade local traz benefícios para a captura mais adequada de fenômenos de turbulência, principalmente aqueles que envolvam

gradientes adversos de pressão.

Desta forma, o modelo BSL de Menter foi recalibrado por Hellsten [22, 23] para receber um coeficiente C_μ^{eff} adaptável, ao invés do valor constante $C_\mu = 0.09$ original [39]. Além disso, essa recalibração considera também a presença dos termos anisotrópicos do tensor de Reynolds, de forma que o modelo BSL se comporte adequadamente num contexto não-linear.

0.6 Resultados Típicos e Discussões

0.6.1 Predição da Camada Limite Turbulenta Clássica

A camada limite turbulenta em uma placa plana ou em um canal semi-infinito de placas paralelas é um exemplo típico e clássico de um escoamento cisalhante turbulento. Modelos de turbulência devem representar esse escoamento pelo menos em termos dos *efeitos da turbulência sobre o escoamento médio*. Dessa forma, classicamente, o exercício de validação de modelos de turbulência deve considerar esses escoamentos [7]. Esse exercício, além disso, também mostra o nível de “fidelidade” do modelo quanto à predição do comportamento da turbulência, variando desde apenas os efeitos da turbulência sobre o escoamento médio até mesmo a descrição detalhada das propriedades turbulentas ao longo de toda a camada limite.

Os experimentos de simulação direta (DNS) em [28] são uma fonte confiável de dados de um escoamento turbulento em um canal de placas paralelas. O caso de número de Reynolds de fricção⁴ $Re_\tau = 180$ é reproduzido com os modelos de turbulência aqui discutidos. A malha computacional tem 90 pontos dentro da camada limite e $y^+ \approx 1$ para a primeira célula adjacente à parede. Essa configuração garante resultados que são independentes de parâmetros e topologia de malha. As camadas limite resultantes são plotadas na Fig. 9.

Nota-se que a representação da camada limite obtida com os modelos descritos é bastante aceitável.

Para esse escoamento, o parâmetro de turbulência que define a camada limite é a tensão de Reynolds *cisalhante*. Os modelos de tur-

⁴O número de Reynolds de fricção é definido por $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$, em que δ é a meia altura do canal.

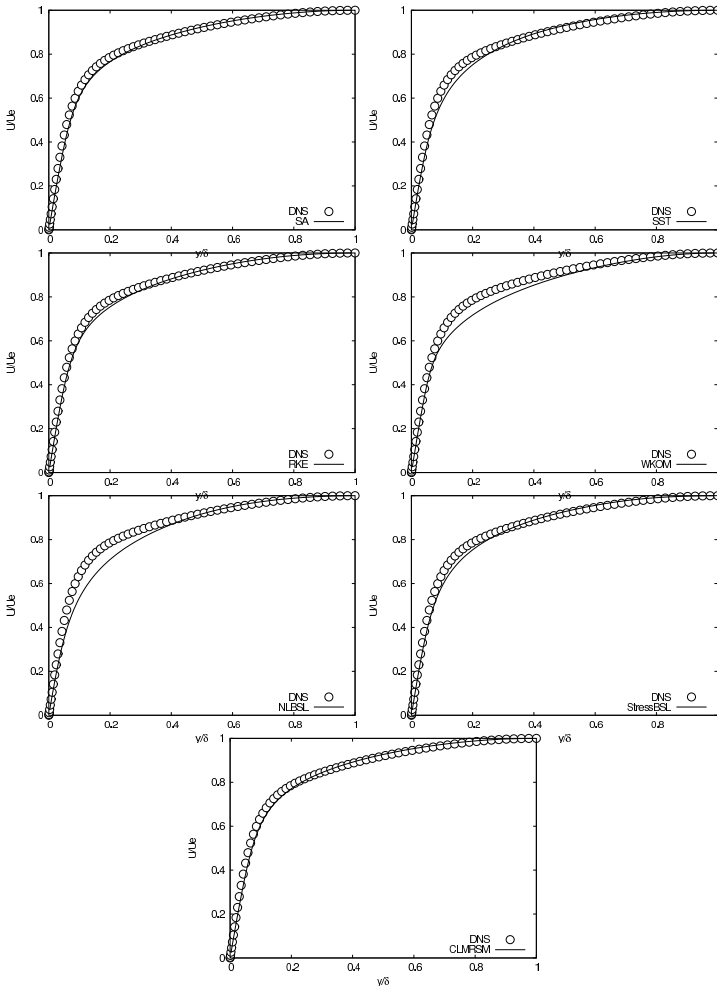


Figura 9: Camadas limite para um escoamento num canal de placas paralelas.

bulência, portanto, devem representar adequadamente pelo menos esse parâmetro para que se obtenha uma camada limite representativa. As tensões de Reynolds *normais*, por outro lado, são dinamicamente inativas. Assim, a representação desses parâmetros pelos

modelos de turbulência, *para escoamentos cisalhantes simples*, não é mandatória. Para aplicações mais complexas, entretanto, as tensões de Reynolds normais podem ter papel decisivo e a representação adequada dos mesmos pode diferenciar um modelo do outro. Desta forma, é interessante observar a representatividade não só da camada limite, como na Fig. 9, mas também das componentes do tensor de Reynolds para o escoamento em um canal de placas paralelas.

Assim, tensões de Reynolds normais e de cisalhamento são plotadas na Fig. 10.

É interessante observar que os modelos lineares SA, SST, RKE e WKOM, de fato, apresentam isotropia das tensões de Reynolds. No caso do modelo SA, na verdade, como não se define a energia cinética turbulenta, as tensões normais são nulas. No caso dos modelos RKE e WKOM, as modificações de baixo número de Reynolds produzem valores maiores de tensões normais de Reynolds perto da parede, embora com valores diferentes. As formulações *anisotrópicas* dos modelos NLBSL, StressBSL e CLMRSM conseguem reproduzir a separação das tensões de Reynolds normais. No caso dos dois primeiros, como são modelos de alto número de Reynolds, as tensões normais perto das paredes são bastante diferentes daquelas do escoamento de referência. O modelo CLMRSM apresenta anisotropia bem mais elevada e uma representação bastante adequada das tensões de Reynolds ao longo de toda a camada limite. Por mais que as tensões de Reynolds *normais* se diferenciem, entretanto, a tensão de Reynolds *cisalhante* prevista por todos modelos é bastante próxima daquela de referência, o que era esperado dada a qualidade dos resultados na Fig. 9.

0.6.2 Interação Onda de Choque/Camada Limite

Perfil Supercrítico

O perfil OAT15A [48] é um típico aerofólio supercrítico, em que o principal fenômeno aerodinâmico é a interação entre a camada limite e uma onda choque, como observado na Fig. 2. Os resultados experimentais gerados em túnel de vento para esse perfil são de excelente qualidade [48], tornando-o um caso-teste robusto e confiável para validação de modelos de turbulência para a interação entre camada limite e onda choque. As condições de escoamento são número de

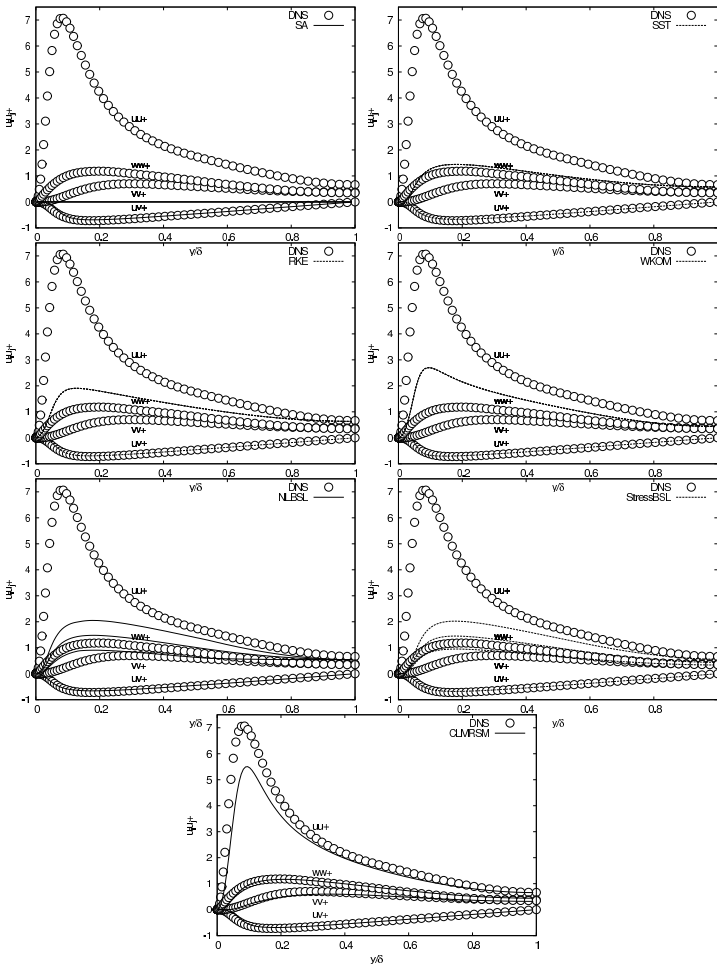


Figura 10: Tensões de Reynolds para um escoamento num canal de placas paralelas.

Mach $M = 0.724$, número de Reynolds $Re = 3 \times 10^6$, e ângulo de ataque $\alpha = 1.15$.

Distribuições de coeficientes de pressão numéricas são plotadas contra os dados de referência na Fig. 11.

Nos resultados mostrados nessa figura, as formulações anisotrópi-

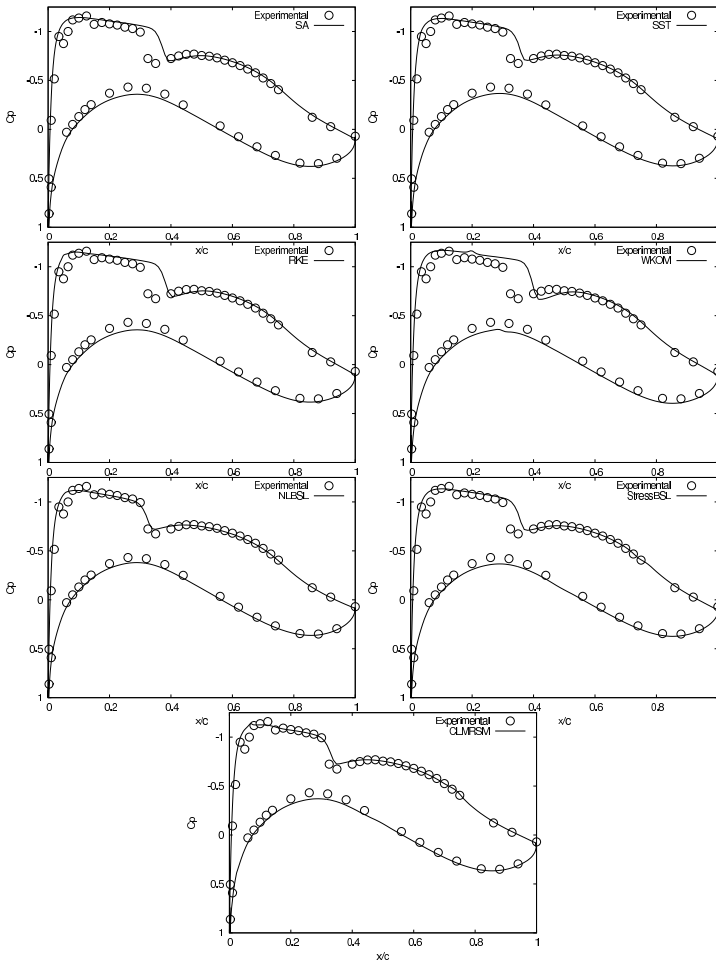


Figura 11: Distribuições de C_p sobre um perfil transônico, $M = 0.724$ e $Re = 3 \times 10^6$.

cas se destacam ao se comparar com as formulações lineares, mesmo embora apresentem diferenças entre si. Como uma tendência geral, as formulações lineares tendem a produzir turbulência em excesso nas regiões do choque, fortalecendo a camada limite e resultando em ondas de choque mais à jusante do que esperado. As modifica-

ções de realizabilidade dos modelos lineares SST e RKE (*fracamente não-lineares*) podem ajudar, mas dependem fortemente da calibração adotada. A diferença da calibração é mostrada na Fig. 8, em que se percebe que o modelo SST é *mais sensível* à deformação do escoamento médio, como através de um choque. Desta forma, a previsão da posição da onda de choque pelo modelo SST é melhor do que a do RKE, e já bastante parecida com a prevista por um modelo anisotrópico, o StressBSL, nesse caso.

Uma outra avaliação interessante é o da descrição da camada limite turbulenta próxima ao bordo de fuga do perfil, após sofrer influência da onda de choque e do próprio gradiente adverso de pressão até o bordo de fuga. Os resultados das simulações com os modelos de turbulência citados são comparados ao dado de referência a 95% da corda do perfil na Fig. 12.

Nota-se que as camadas limite previstas pelos modelos lineares são mais aceleradas do que a de referência. Isso é explicado pelo fato já discutido de que esses modelos produzem mais turbulência através do choque, promovendo uma camada limite mais turbulenta e, portanto, mais energizada. As camadas limite computadas pelos modelos anisotrópicos são mais próximas ao dado de referência, embora também não sejam parecidas entre si. O resultado do modelo NLBSL é impressionantemente próximo do resultado experimental, para esse caso.

Os resultados de distribuição de pressão e camadas limite são dados interessantes para se diferenciarem os comportamentos dos modelos de turbulência. Para uma aplicação de engenharia, entretanto, esses dados são de pouca utilidade, já que se quer o comportamento aerodinâmico do perfil em termos de sustentação, arrasto, entre outros, e para uma faixa de condições de operação. Assim, resultados como a curva de coeficiente de sustentação por ângulo de ataque, na Fig. 13(a), ou a curva de coeficiente de arrasto por ângulo de ataque, na Fig. 13(b), são usualmente levantadas com códigos computacionais.

Nestas figuras, os resultados numéricos são comparados a dados obtidos em dois túneis de vento distintos, mostrando que, mesmo experimentalmente, existem variações consideráveis dos dados obtidos. Observa-se que a representação numérica dos dados integrados é aceitável e dentro das variações experimentais observadas, com destaque para o modelo CLMRSM para toda a faixa de ângulo de ataque

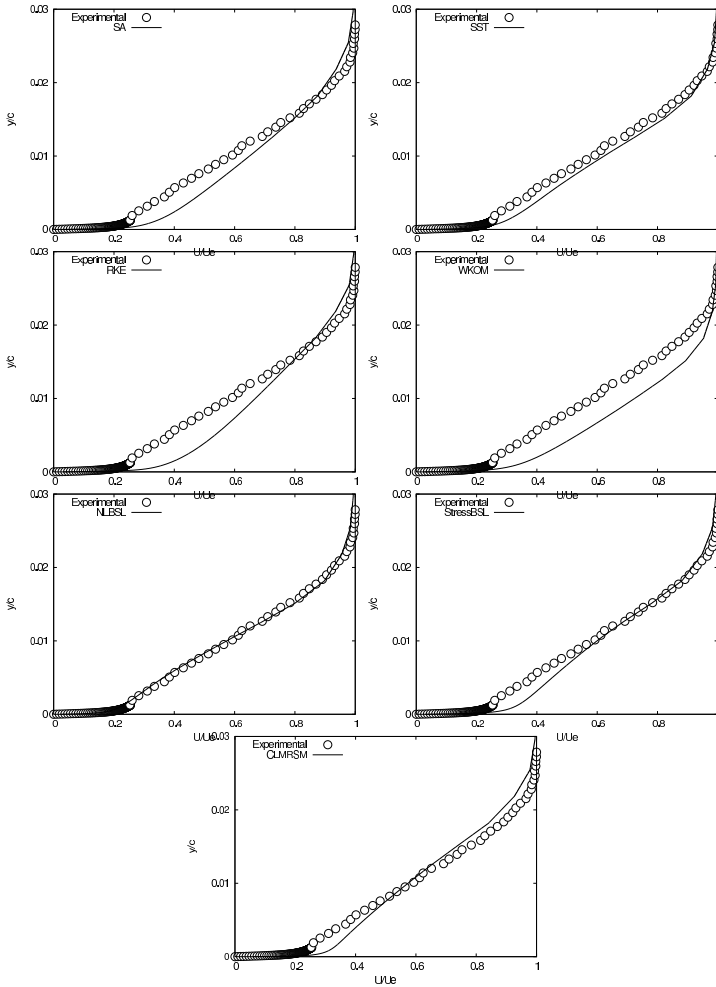


Figura 12: Camadas limite próximas ao bordo de fuga de um perfil transônico, $M = 0.724$ e $Re = 3 \times 10^6$.

considerada. É interessante destacar o comportamento interessante, porém indesejável, do promissor modelo NLBSL ao computar um estol adiantado do perfil, em torno de $\alpha = 3$ graus. Resultados adequados também são obtidos com o modelo SST.

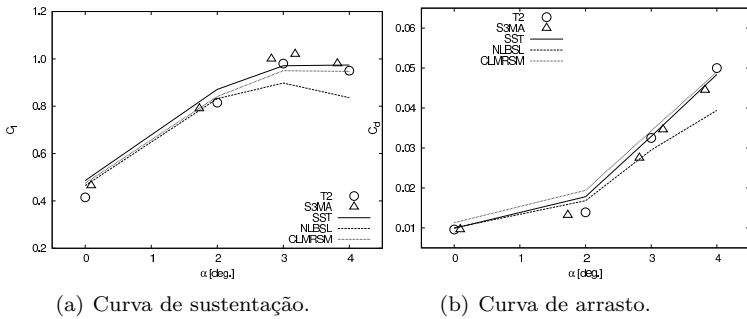


Figura 13: Curvas polares de um perfil transônico, $M = 0.724$ e $Re = 6 \times 10^6$.

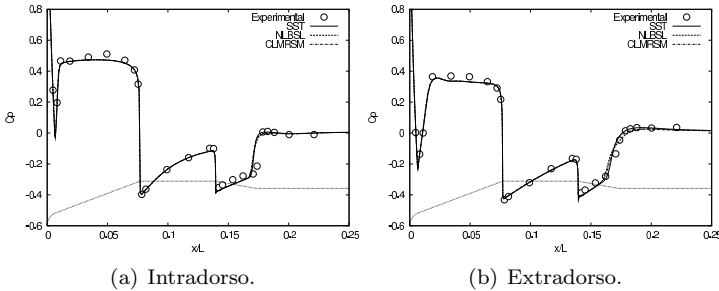


Figura 14: Distribuições de C_p sobre o corpo central do VLS em $M = 1.25$ e $\alpha = 4$ graus.

Veículo Lançador de Satélites (VLS)

A tridimensionalidade do escoamento traz um fator complicante a mais para a simulação do fenômeno de interação entre onda de choque e camada limite, como no caso do VLS brasileiro em regime de voo supersônico, mostrado na Fig. 3. Os modelos SST, NLBSL e CLMFSM são utilizados para simular o escoamento a $M = 1.25$, $Re = 22.4 \times 10^6 m^{-1}$ e $\alpha = 4$ graus sobre o corpo central desse veículo. Resultados numéricos são comparados a resultados experimentais disponíveis [43].

Distribuições de C_p no plano de arfagem do VLS são plotadas na Fig. 14.

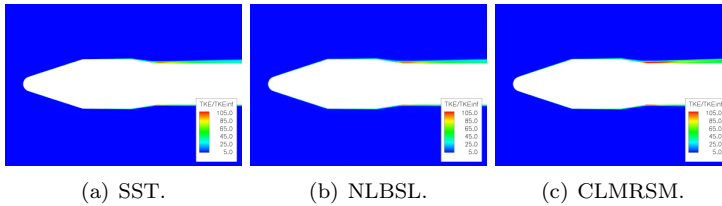


Figura 15: Contornos de energia cinética turbulenta sobre o corpo central do VLS em $M = 1.25$ e $\alpha = 4$ graus.

A predição do escoamento pelos modelos de turbulência é bastante adequada, incluindo a interação entre a onda de choque e a camada limite turbulenta no final do compartimento de carga. É interessante observar, no entanto, a diferença na distribuição das propriedades turbulentas para cada um dos modelos na Fig. 15.

Nesta figura, contornos de energia cinética turbulenta adimensionalizada pelo valor de escoamento não-perturbado são mostrados. Os valores máximos de energia cinética turbulenta, bem como a região em que os mesmos ocorrem, são diferentes para cada modelo.

Breve Revisão da Literatura

Os resultados aqui apresentados para a interação entre onda de choque e camada limite mostram que a anisotropia para modelos de turbulência é, de fato, um passo na direção de melhores previsões dos fenômenos de interação entre camada limite e ondas de choque, mesmo que a anisotropia seja considerada apenas qualitativamente no modelo. Pode-se observar também que a forma de se considerar a anisotropia, assim também como toda a calibração do modelo de turbulência, ainda é decisiva e diferencial para o comportamento do modelo para as aplicações de interesse. Essencialmente, o que se quer destacar com esses comentários é que a previsão da interação entre camada limite e ondas de choque é beneficiada pela anisotropia da turbulência, porém ainda dependente do modelo de turbulência. Muito embora ainda não se tenha uma forma definitiva para tal, resultados bastante adequados para fins de aplicação prática são obtidos [12, 27, 46, 8, 6, 34, 36, 19].

Resultados adequados também são obtidos com o modelo SST,

ao se aplicar uma modificação *ad-hoc* porém bem-sucedidamente calibrada para limitar o crescimento da turbulência em gradientes adversos de pressão. Por esse motivo, o modelo SST se mantém como um dos modelos prediletos para *aplicações práticas de engenharia aeroespacial* que envolvam a interação de onda de choque e camada limite ou gradientes adversos de pressão [42, 45]. Por ser uma modificação simples, garantindo assim uma combinação muito aceitável de baixo custo numérico e resultados superiores, o conceito de limitação, ou transporte, da tensão de Reynolds cisalhante tem sido estudado em mais detalhes na literatura e cada vez mais utilizado em novas versões de modelos de turbulência de duas equações [65, 45].

Finalmente, um esforço de validação extensa de modelos de turbulência para aplicações aeronáuticas típicas, mais precisamente para configurações de aeronaves transônicas de transporte civil, é o evento realizado pela instituição *AIAA – American Institute of Aeronautics and Astronautics* denominado *DPW – Drag Prediction Workshop* [30, 61]. Esse esforço de validação é guiado por um processo formal de validação de ferramentas numéricas [1], e não somente os modelos de turbulência são validados, mas também os códigos computacionais utilizados. Um grande número de códigos computacionais são testados em termos de convergência de malha para valores integrados de coeficiente de arrasto e em termos de representatividade física dos fenômenos aerodinâmicos encontrados. Essas configurações variam desde somente asas transônicas até mesmo a configuração completa da aeronave, envolvendo pilones e naceles. Os principais fenômenos aerodinâmicos são a interação entre onda de choque e camada limite ao longo da envergadura da asa, bem como efeitos adversos nas junções da asa com a fuselagem e do pilone com a asa. A maioria das simulações são executadas com o modelo SA, porém os resultados obtidos com o SST geralmente são mais representativos dos fenômenos físicos. Modelos não-lineares, como o MAETR de Hellsten (aqui denominado NLBSL) ou mesmo MTTRs, têm a tendência de serem ainda mais representativos dos fenômenos físicos, refinando os valores integrados de coeficiente de sustentação e arrasto [61].

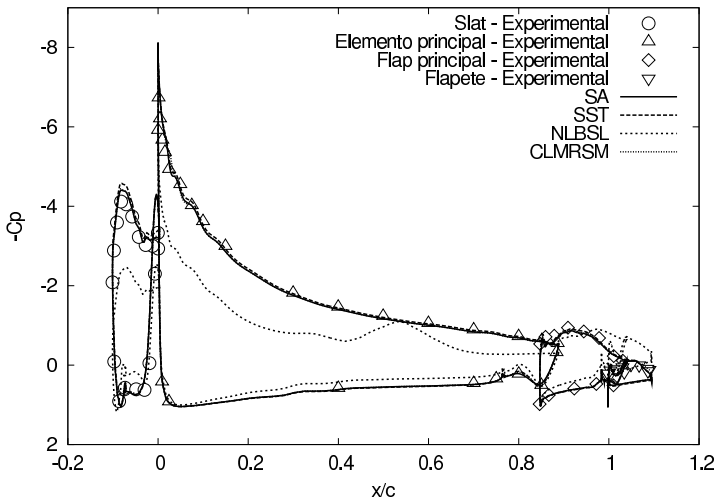


Figura 16: Distribuições de C_p sobre um perfil hiper-sustentador.

0.6.3 Configurações Hiper-Sustentadoras

Perfil Hiper-Sustentador

O perfil TR1332 [11] é uma configuração hiper-sustentadora típica, com quatro elementos, representativa de uma seção de uma asa de uma aeronave transônica de transporte civil em configuração de decolagem, Fig. 1. Da mesma forma que o perfil transônico OAT15A, os dados experimentais do perfil TR1332 são de alta qualidade e, portanto, excelentes referências para validação de modelos de turbulência. O escoamento ensaiado nessa configuração é subsônico, com $M = 0.11$, $Re = 1.55 \times 10^6$ e $\alpha = 15.5$ graus. Os modelos SA, SST, NLBSL e CLMRSM são considerados nas avaliações a seguir. As distribuições de C_p obtidas com os modelos de turbulência citados são comparadas aos resultados experimentais na Fig. 16.

As distribuições obtidas são bastante representativas do resultado experimental, com exceção do resultado obtido com o NLBSL, que da mesma forma que no caso transônico anterior, apresenta um estol antecipado do perfil.

É interessante olhar com atenção a representação dos parâmetros do escoamento como camadas limite e perfis de tensões de Reynolds

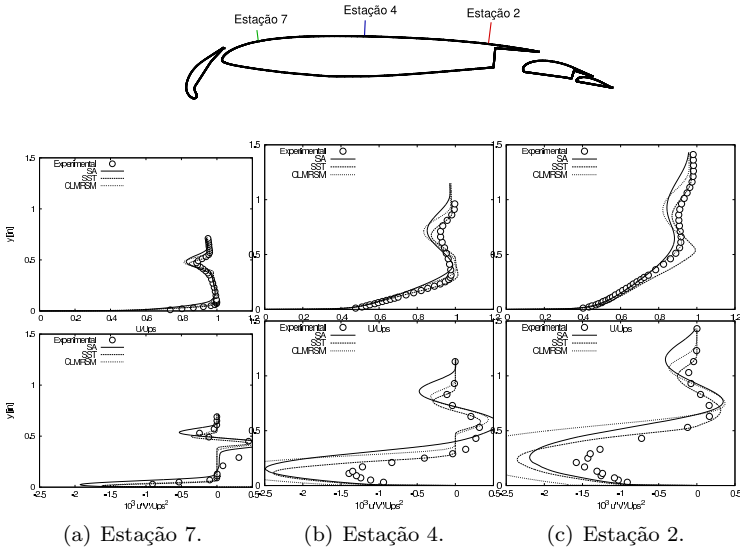


Figura 17: Camadas limite e perfis de tensão de Reynolds cisalhante sobre um perfil hiper-sustentador.

em algumas estações ao longo da corda do perfil, como na Fig. 17.

Algumas limitações nos resultados numéricos podem ser observadas, tais como perdas maiores de quantidade de movimento na esteira do slat ou mesmo uma interação mais fraca entre a esteira e a camada limite, quando comparados aos dados experimentais. Nota-se também que a representação das propriedades turbulentas, para esse escoamento tão complexo, não é completamente adequada. Apesar de tudo, no entanto, é importante destacar como os modelos de turbulência avançados capturam a complexidade do escoamento, pelo menos qualitativamente.

Breve Revisão da Literatura

Problemas de perfis hiper-sustentadores aparentemente não têm tido tanta atenção da comunidade científica quanto o problema da interação entre onda de choque e camada limite, mas não por isso são menos importantes ou menos complexos. Geralmente, perfis hiper-sustentadores são incluídos em estudos voltados para o problema da

determinação da sustentação máxima de perfis [52, 51, 9, 22], o que envolve não só perfis multi-elementos mas também mono-elementos. É interessante ressaltar que alguns dos modelos não-lineares mais citados na comunidade aeroespacial foram propostos especificamente para esse tipo de aplicação [51, 22]. Vale ressaltar também que o trabalho [9] apresenta resultados bastante adequados, obtidos com um modelo de turbulência *algébrico*, implementado em um código *dedicado* a configurações aeroespaciais típicas, como asas e geometrias asa-fuselagem. O fato de ser um código dedicado a geometrias específicas favorece a implementação desse tipo de modelamento.

Os desafios da determinação da sustentação máxima são relacionados aos complicados fenômenos aerodinâmicos presentes nesse tipo de escoamento. O nível de complexidade é elevado o suficiente para que mesmo a obtenção experimental de dados com confiabilidade seja dificultada. Por esse motivo, poucos casos de referência são encontrados na literatura, e a maioria para configurações bidimensionais, para as quais o controle sobre a metodologia experimental é maior. Além disso, tais fenômenos, mesmo que decisivos para a definição do comportamento aerodinâmico de perfis próximo da condição de sustentação máxima, ainda não são completamente considerados nos modelos de turbulência por diversos motivos. Os principais fenômenos são relacionados à transição laminar-turbulenta; mas mesmo o problema aparentemente simples da evolução de uma esteira turbulenta se mostra complicado num contexto de modelamento URANS [65]. Por estes motivos, formulações não-lineares ou mais complexas agregam relativamente pouco ainda ao modelamento desse tipo de problema.

Para perfis multi-elementos, comportamentos e resultados similares aos aqui mostrados são encontrados nas publicações relacionadas anteriormente. Com relação a perfis mono-elementos, o nível de complexidade é um pouco menor e resultados numéricos ainda mais representativos dos dados de referência são obtidos.

Da mesma forma que a instituição americana *AIAA* promove o evento *DPW*, uma comissão européia organizou um amplo esforço, denominado *Eurolift I e II*, para o estudo de configurações hipersustentadoras [21, 50]. Esse esforço é maior do que somente simulações numéricas, envolvendo também geração de dados experimentais para configurações de referência, estudos detalhados de transição da camada limite, entre outros. No que tange simulações numéricas, es-

tudos detalhados também são realizados, considerando vários tipos de modelos de turbulência (SA, SST, NLBSL, MTTRs, etc.), estudos de refinamento de malhas e mesmo a simulação numérica da transição. Um esforço semelhante em termos de simulações numéricas foi feito pela comunidade científica e industrial canadense [17]. Esses esforços indicam que o modelo SA, seguido do SST, ainda são os mais bem sucedidos para *aplicações práticas de configurações hiper-sustentadoras*.

0.6.4 Transição e Alguns Efeitos Relacionados

Como previamente citado, alguns fenômenos da turbulência são fracamente, ou mesmo não o são, considerados em modelos de turbulência. Talvez, desses fenômenos, o mais importante para escoamentos aeroespaciais seja o da transição da camada limite laminar para turbulenta. Nesse sentido, o principal efeito da transição é o de definir a altura da camada limite que sofrerá ações de gradientes de pressão e ondas de choque. Sabe-se que a camada limite laminar tem espessura bem menor do que a camada limite turbulenta. Assim, caso a transição num perfil ocorra mais a jusante ao longo da corda, o trecho laminar é maior, restando, portanto, menos extensão de corda para que a camada limite turbulenta se desenvolva. A espessura final da camada limite, desta forma, é menor do que caso a camada limite fosse turbulenta desde o bordo de ataque. Por outro lado, caso o trecho laminar seja muito extenso, chegando a ser submetido aos fortes gradientes adversos de pressão após o bordo de ataque, por ser a camada limite laminar menos energizada e portanto menos resistente aos gradientes adversos de pressão, pode haver um descolamento adiantado do perfil, o que não ocorreria caso a camada limite fosse turbulenta desde o bordo de ataque.

Para a interação entre onda de choque e camada limite, quanto menos espessa for a camada limite, menor será a influência da onda de choque nela. Nas condições de vôo usuais em que ondas de choque acontecem, entretanto, o número de Reynolds é tão alto que a camada limite, para perfis transônicos clássicos, sofre transição logo no bordo de ataque. No entanto, caso se possa estender o trecho laminar no bordo de ataque do perfil, mesmo que artificialmente, o ganho em termos de desempenho desse perfil (e asa, por conseqüência) é grande.

Essa discussão pode ser exemplificada com os resultados obtidos com os modelos NLBSL e WKOM para o perfil OAT15A, na Fig. 11. Como já discutido, o modelo WKOM é calibrado para computar o ponto de transição devido a alguns fenômenos específicos de transição. Na curva de C_p desse modelo, na Fig. 11, pode-se observar claramente um pequeno pico em torno de $x/c \approx 20\%$ para o lado da curva referente ao extradorso do perfil, que é a indicação de que o modelo computou ali um pico de energia cinética turbulenta. Este pico é característico de um ponto de transição *numérico*. Como referência, o ponto de transição experimental desse perfil ocorre em $x/c \approx 7\%$. Devido a esse ponto de transição numérico previsto pelo modelo WKOM ser mais a jusante na corda, é interessante notar o quão mais a jusante ficou também a onda de choque, mesmo que não seja uma solução exatamente realista. Dos resultados das simulações, a relação de sustentação sobre arrasto desse perfil – típica medida de desempenho transônico – prevista pelo modelo WKOM é $L/D = 70$, enquanto, para o modelo NLBSL, é $L/D = 55$. Caso fosse possível, então, manter o ponto de transição *real* próximo daquele artificialmente computado pelo modelo WKOM, o ganho em desempenho seria bastante grande.

Para perfis multi-elementos, como o TR1332, a espessura das camadas limite e esteiras têm papel fundamental no desempenho do perfil, principalmente para a sustentação máxima do mesmo. A otimização dos vãos entre elementos de um perfil hiper-sustentador depende sensivelmente dessas espessuras, já que, caso esteiras e camadas limite tenham uma região muito grande de interação, o perfil perde sustentação máxima devido a interações viscosas, enquanto se esteiras e camadas limite estiverem muito distantes entre si, os elementos do perfil também estarão distantes e as interferências positivas diminuirão. Da mesma forma que para o perfil transônico, o ponto de transição das camadas limite define suas respectivas espessuras e, portanto, o desempenho final do perfil hiper-sustentador. Caso o ponto de transição esteja muito à frente, as camadas limite serão mais espessas e com maiores chances de ocasionarem perdas por efeitos viscosos. Caso contrário, se a extensão laminar antes da transição for muito ampla, a camada limite poderá se submeter a altos gradientes adversos de pressão e sofrer um descolamento adiantado. Existe, portanto, uma faixa aceitável de variação do ponto de transição para perfis hiper-sustentadores.

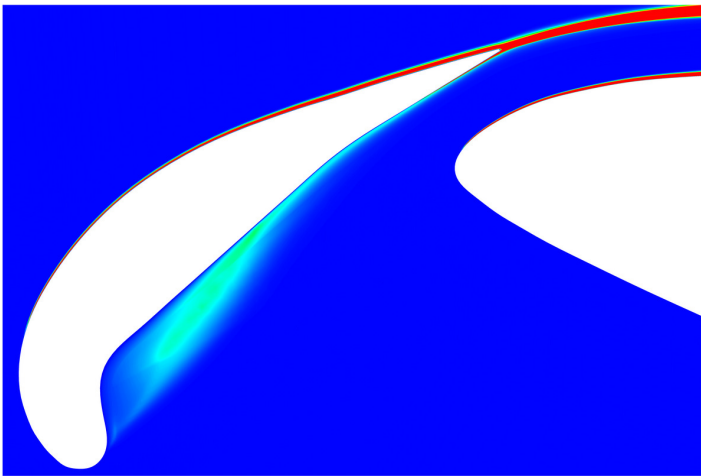
Um outro fenômeno importante relacionado à transição da camada limite é a relaminarização. Embora soe como um fenômeno raro, ele é mais presente do que se imagina em aplicações aeroespaciais. Alguns exemplos típicos são bordos de ataque de elementos hiper-sustentadores ou em quinas de expansão de veículos espaciais em condições de vôo supersônicas, já que nessas regiões se localizam elevados gradientes *favoráveis* de pressão. Na Fig. 18, pode-se observar os fenômenos de transição e relaminarização previstos pelo modelo CLMRSM para o perfil TR1332.

É interessante observar que o modelo CLMRSM, de baixo número de Reynolds, é capaz de capturar qualitativamente extensões laminares ou relaminarizadas no slat do perfil, enquanto o modelo SST, de alto número de Reynolds, ignora todos esses efeitos.

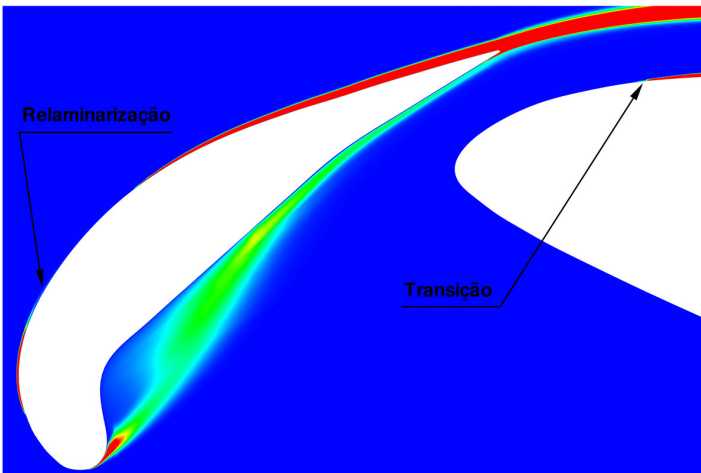
Um outro caso bastante interessante é a relaminarização que ocorre para veículos espaciais. Na Fig. 19, as distribuições de C_p para o VLS a $M = 3.00$, $\alpha = 0$ grau e $Re = 9 \times 10^6 m^{-1}$ mostram que os resultados obtidos com os modelos de turbulência SST, NLBSL e CLMRSM não capturam o descolamento na região do final do compartimento de carga.

Por outro lado, uma simulação simplificada, sem modelamento de turbulência, captura com bastante consistência o descolamento, o que indica que, na região da onda de choque, o escoamento no ensaio em túnel de vento não é exatamente turbulento e, na verdade, mais parecido com o que seria um escoamento “laminar”. Embora, para esse elevado número de Reynolds, o escoamento seja turbulento nas camadas cisalhantes, os gradientes de pressão favoráveis nas duas quinas de expansão à montante da região do final do compartimento de cargas promovem a relaminarização da camada limite, tornando-a menos resistente a gradientes adversos de pressão, podendo então sofrer separação como através da onda de choque no final do compartimento de cargas. Esse fenômeno é típico de veículos espaciais [4, 53, 20].

Vale ressaltar que a camada limite relaminarizada não é exatamente uma camada limite laminar típica, mas sim, uma camada limite num estado transicional “latente” e cineticamente instável, que pode se manter por um comprimento de cerca de 200 espessuras de camada limite. Assim, mesmo que um modelo seja calibrado para capturar o ponto de transição, ainda se trata do ponto de transição e não do modelamento de toda a mecânica da transição. Por esse mo-



(a) SST.



(b) CLMRSM.

Figura 18: Fenômenos de transição e relaminarização num perfil hiper-sustentador.

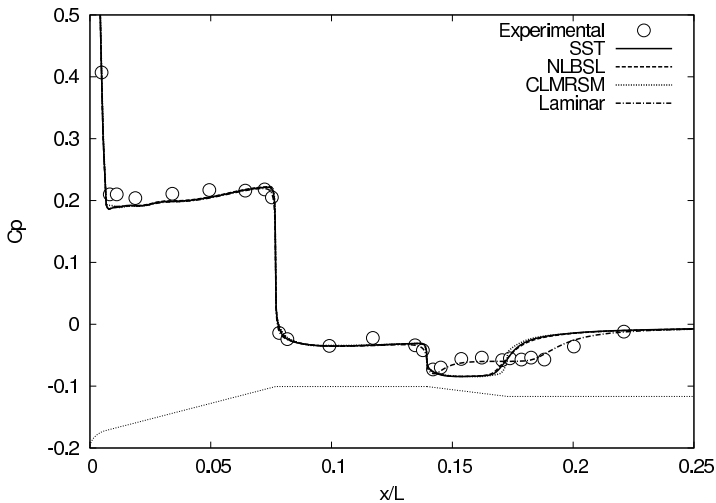


Figura 19: Distribuições de C_p sobre o corpo central do VLS em $M = 3$ e $\alpha = 0$ grau.

tivo, mesmo que o modelo CLMRSM possa indicar qualitativamente pontos de transição e relaminarização, como na Fig. 18, a mecânica da relaminarização não é capturada, levando ao resultado observado no caso do VLS, em que o modelo não pôde prever a separação na base da onda de choque.

0.7 Comentários Finais

Uma ampla faixa de conceitos de modelamento de turbulência para aplicações práticas de engenharia, com códigos numéricos baseados na solução das equações de Navier-Stokes com média de Reynolds, foi discutida. Foram mostradas algumas evidências de que modelos lineares baseados na hipótese de Boussinesq fundamentalmente falham para escoamentos com fortes gradientes adversos de pressão, separação ou com interações entre ondas de choque e camadas limite. Entretanto, para aplicações em que somente uma tensão cisalhante é dominante, esses modelos podem ser calibrados para retornarem soluções adequadas. Como essa situação é representativa

de grande parte das aplicações diárias de engenharia, os modelos lineares adquiriram um nível elevado de utilização.

A adição de limitadores de tensão para modelos lineares, como no modelo SST, permitiram que modelos com esse tipo de modificação produzissem resultados bastante satisfatórios mesmo para escoamentos em que a hipótese de Boussinesq é, por definição, inadequada. Com isso, o modelo SST é um dos modelos prediletos para aplicações aeroespaciais, em conjunto com o modelo SA, que, embora seja um modelo linear puro, foi calibrado para fenômenos turbulentos de engenharia aeroespacial e tem mostrado resultados adequados para as aplicações do dia-a-dia da engenharia. Mesmo que esses modelos não descrevam em detalhes os fenômenos de turbulência, ainda assim seus comportamentos e qualidade de resultados são amplamente conhecidos, podendo ser, inclusive, inseridos em processos de engenharia com seus resultados eventualmente re-calibrados contra outros conjuntos de dados de referência tabelados.

Um dos pontos importantes que ainda favorecem esses modelos, e que é de alta relevância num contexto de desenvolvimento de engenharia, são os baixos custos e recursos computacionais necessários para se desenvolver uma solução numérica. Os modelos de turbulência para aplicações do dia-a-dia devem unir resultados aceitáveis a baixos custos e dificuldades numéricas. Modelos de uma ou duas equações, quando calibrados para os fenômenos de interesse da engenharia aeroespacial e cujo comportamento numérico seja robusto, são favorecidos, como é o caso dos modelos SA e SST. No caso do SST, modelos de duas equações baseados na equação da dissipação turbulenta, ω , tendem a se destacar devido à maior robustez numérica.

É difícil prever o futuro do modelamento de turbulência para aplicações práticas de engenharia. Entretanto, uma família de modelos que é promissora é de modelos de viscosidade de vórtice não-lineares. Embora ainda desprezem alguns fenômenos importantes da turbulência, como o transporte das tensões de Reynolds, e também sejam ainda baseados em modelos simples para a correlação pressão-deformação e para a dissipação turbulenta, esses modelos agregam alguns outros aspectos da mecânica da turbulência, principalmente o da anisotropia, a custos computacionais essencialmente similares àqueles de modelos de duas equações. O modelo NLBSL aqui discutido é um dos modelos dessa família que tem se destacado na

comunidade aeroespacial.

Modelos baseados no transporte das tensões de Reynolds carregam mais física da turbulência em suas equações de transporte, no sentido de que mais se aproximam da representação exata do tensor de Reynolds. Esses modelos apresentam resultados qualitativamente melhores, com maior representatividade dos fenômenos da turbulência, do que os obtidos com modelos lineares. Porém, ainda são dependentes de uma equação postulada para a dissipação turbulenta e do modelamento de uma correlação complexa entre pressão e deformação. Desta forma, não se pode garantir que consistentemente produzem resultados quantitativamente melhores na prática. São modelos complexos, computacionalmente caros e com desafios numéricos bastante elevados, porém já utilizáveis para algumas aplicações práticas e com resultados bastante adequados para aplicações aeroespaciais complexas.

Soluções numéricas do tipo *LES* são uma aposta como substituição do conceito de modelamento de turbulência de todas as escalas turbulentas, como em soluções do tipo (U)RANS. Entretanto, para aplicações aeroespaciais, usualmente descritas por altos números de Reynolds e pela presença de paredes, parecem ainda ser um desafio. Os requisitos de malha e passo no tempo computacionais para resolver o estiramento dos vórtices perto das paredes, sob altos números de Reynolds, são muito elevados na prática. Assim, num futuro próximo, códigos baseados em soluções *LES* devem ser uma ferramenta de auxílio à engenharia, mas para escoamentos em que fenômenos viscosos próximos a paredes não sejam mandatórios.

Finalmente, embora se tenha focado em algumas deficiências do modelamento de turbulência para ferramentas URANS, ainda assim resultados de qualidade podem ser gerados com essas ferramentas para aplicações práticas da engenharia aeroespacial. Dessa forma, os esforços para o desenvolvimento desse tipo de ferramenta devem se prolongar ainda por um bom tempo dada a boa relação custo-benefício inerente a essas metodologias. Produtos da engenharia aeroespacial continuarão, assim, a se beneficiar dos últimos avanços da ciência através de resultados de qualidade cada vez mais elevada, permitindo níveis de otimização de projeto impensáveis a cada década que se passar.

Referências Bibliográficas

- [1] AIAA. *AIAA Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations*. Number G-077-1998 in AIAA Standard Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1801 Alexander Bell Drive, Reston, VA, 1998.
- [2] J D Anderson, Jr. *Fundamentals of Aerodynamics*, chapter 15, page 647. McGraw-Hill International Editions, New York, NY, USA, second edition, 1991.
- [3] Ansys Inc. *CFX 5.7 Manual. Solver Theory*.
- [4] S A Arnette, M Samimy, and G S Elliot. The effects of expansion regions on the turbulence structure of compressible boundary layers. In *34th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper No. 96-0656, Reno, NV, Jan. 1996.
- [5] B S Baldwin and H Lomax. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. In *AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting*, AIAA Paper No. 78-257, Huntsville, AL, USA, Jan. 1978.
- [6] G. Barakos and D. Drikakis. Investigation of nonlinear eddy-viscosity turbulence models in shock/boundary-layer interaction. *AIAA Journal*, 38(3):461–469, 2000.
- [7] J E Bardina, P G Huang, and T J Coakley. Turbulence modeling validation, testing, and development. NASA Technical Memorandum 110446, NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA, USA, 1997.
- [8] P Batten, T J Craft, M A Leschziner, and H Loyau. Reynolds-stress-transport modeling for compressible aerodynamics applications. *AIAA Journal*, 37(7):785–796, 1999.
- [9] E Besnard, O Kural, and T Cebeci. Prediction of stall and post-stall in two- and three-dimensional flows. In *38th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper No. 2000-0979, Reno, NV, Jan. 2000.

- [10] E D V Bigarella. *Advanced Turbulence Modelling for Complex Aerospace Applications*. PhD thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brazil, Oct. 2007.
- [11] G W Brune. Two-dimensional high-lift airfoil data for CFD code validation. In *A Selection of Experimental Test Cases for the Validation of CFD Codes*, number AGARD-AR-303. NATO Advisory Group for Aerospace Research & Development, Aug. 1994. Case A13.
- [12] John R. Carlson. Applications of algebraic Reynolds stress turbulence models. part 2: Transonic shock-separated afterbody. *Journal of Propulsion and Power*, 13(5):620–628, 1997.
- [13] T J Craft and B E Launder. A Reynolds stress closure for complex geometries. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 17(3):245–254, 1996.
- [14] T J Craft, B E Launder, and K Suga. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 17(2):108–115, 1996.
- [15] B Daly and F Harlow. Transport equation in turbulence. *Physics of Fluids*, 13:2634–2649, 1970.
- [16] L Davidson. An introduction to turbulence models. Chalmers Publication 97/2, Chalmers University of Technology, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Göteborg, Sweden, Nov. 2003.
- [17] I. Fejtek. Summary of code validation results for a multiple element airfoil test case. In *28th AIAA Fluid Dynamics Conference*, AIAA Paper No. 1997-1932, Snowmass Village, CO, June-July 1997.
- [18] Fluent Inc., Centerra Resource Park, 10 Cavendish Court, Lebanon, NH 03766A. *FIDAP 8 – Tutorial Manual*, 1998.
- [19] G. A. Gerolymos, E. Sauret, and I. Vallet. Oblique-shock-wave/boundary-layer interaction using near-wall Reynolds-stress models. *AIAA Journal*, 42(6):1089–1100, 2004.

- [20] M A Goldfeld, R V Nestoulia, and A N Shplyuk. Relaminarization of a turbulent boundary layer with a Mach number $M_\infty = 4$. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 43(1):76–82, 2002.
- [21] H Hansen, P Thiede, F Moens, R Rudnik, and J Quest. Overview about the european high lift research programme eurolift. In *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper No. 2004-0767, Reno, NV, Jan. 2004.
- [22] A Hellsten. *New Two-Equation Turbulence Model for Aerodynamics Applications*. PhD thesis, Helsinki University of Technology, Laboratory of Aerodynamics, P.O.Box 4400, Finland, Jan. 2004.
- [23] A Hellsten. New advanced $k-\omega$ turbulence model for high-lift aerodynamics. *AIAA Journal*, 43(9):1857–1869, Sept. 2005.
- [24] R R Hwang and S-Y Jaw. Second-order closure turbulence models: Their achievements and limitations. *Proceedings of the National Science Council (NSC) of Taiwan*, 22(6):703–722, 1998.
- [25] D A Johnson and L S King. A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers. *AIAA Journal*, 23(11):1684–1692, Nov. 1985.
- [26] W P Jones and B E Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(2):301–314, Feb. 1972.
- [27] G Kalitzin. An implementation of the v^2-f model with application to transonic flows. In *NASA Ames/Stanford CTR, Annual Research Briefs*, Center for Turbulence Research, Stanford University, Stanford, CA, 1998.
- [28] J Kim, P Moin, and R Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177:133–166, Apr. 1987.
- [29] P S Klebanoff. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. NACA TR- 1247, National Advisory Committee for Aeronautics, National Bureau of Standards, Washington D.C., 1955.

- [30] K R Laffin, O Brodersen, M Rakowitz, J C Vassberg, E N Tinoco, R A Wahls, J H Morrison, and J.-L. Godard. Summary of data from the second AIAA CFD drag prediction workshop (invited). In *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper No. 2004-0555, Reno, NV, Jan. 2004.
- [31] R B Langtry and F R Menter. Transition modeling for general cfd applications in aeronautics. In *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper No. 2005-0522, Reno, NV, Jan. 2005.
- [32] J Larsson. *Numerical Simulation of Turbulent Flows for Turbine Blade Heat Transfer Applications*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1998.
- [33] B E Launder, G J Reece, and W Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*, 68(3):537–566, 1975.
- [34] M A Leschziner, P Batten, and H Loyau. Modelling shock-affected near-wall flows with anisotropy-resolving turbulence closures. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21(3):239–251, June 2000.
- [35] M A Leschziner and D Drikakis. Turbulence modelling and turbulent-flow computation in aeronautics. *The Aeronautical Journal*, 106(1061):349–383, July 2002.
- [36] M A Leschziner and H Loyau. Numerical investigation of three-dimensional transonic flow with large separation. In *Proceedings of the 22nd International Congress of Aeronautical Sciences – ICAS 2000*, Paper No. 262, Harrogate, UK, 2000.
- [37] J L Lumley. Computational modeling of turbulent flows. In C -S Yih, editor, *Advances in Applied Mechanics*, volume 18, pages 123–176. Academic Press, New York, 1978.
- [38] M T Mendonça. Laminar flow stabilit: Linear theory. In Aristeu da Silveira Neto (Org.), editor, *Anais da II Escola Brasileira de Primavera de Transição e Turbulência*, volume 1, pages 98–147, 2000.

- [39] F R Menter. Zonal two equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows. In *24th AIAA Fluid Dynamics Conference*, AIAA Paper No. 93-2906, Orlando, FL, July 1993.
- [40] F R Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, Aug. 1994.
- [41] F. R. Menter and H. Grotjans. Application of advanced turbulence models to complex industrial flows. In *Second International Conference on Advances in Fluid Mechanics*, Udine, Italy, May 1998.
- [42] F R Menter, M Kuntz, and R Langtry. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. In K Hanjalic, Y Nagano, and M Tummers, editors, *Turbulence, Heat and Mass Transfer*, volume 4. Begell House Inc., 2003.
- [43] P Moraes Jr. and A Augusto Neto. Aerodynamic experimental investigation of the Brazilian satellite launch vehicle (VLS). In *Proceedings of the 3rd Brazilian Thermal Sciences Meeting – ENCIT 90*, volume 1, pages 211–215, Itapema, SC, Brazil, Dec. 1990.
- [44] G L Oliveira. *Analyse Numérique de l’Effet du Défilement des Sillages liés aux Interactions Rotor-Stator en TurboMachines*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique - UMR 5509, Lyon, France, Mar. 1999.
- [45] S-H Peng, P Eliasson, and L Davidson. Examination of the shear stress transport assumption with a low-Reynolds number $k-\omega$ model for aerodynamic flows. In *37th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, AIAA Paper No. 2007-3864, Miami, FL, June 2007.
- [46] D P Rizzetta. Evaluation of explicit algebraic Reynolds-stress models for separated supersonic flows. *AIAA Journal*, 36(1):24–30, 1998.
- [47] C M E Robinson. *Advanced CFD Modelling of Road-Vehicle Aerodynamics*. PhD thesis, University of Manchester Institute of Science and Technology, Manchester, UK, May 2001.

- [48] A M Rodde and J P Archambaud. OAT15A airfoil data. In *A Selection of Experimental Test Cases for the Validation of CFD Codes*, number AGARD-AR-303. NATO Advisory Group for Aerospace Research & Development, Aug. 1994. Case A11.
- [49] J Rotta. Statistischer theorie nichthomogener turbulenz 1. *Zeitschrift für Physik*, 129(6):547–572, 1951.
- [50] R. Rudnik and H. Geyr. The european high lift project eurolift ii objectives, approach, and structure. In *25th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, AIAA Paper No. 2007-4296, Miami, FL, June 2007.
- [51] Christopher L. Rumsey and Thomas B. Gatski. Recent turbulence model advances applied to multielement airfoil computations. In *18th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, AIAA Paper No. 2000-4323, Denver, CO, June 2000.
- [52] Christopher L. Rumsey, Thomas B. Gatski, Susan X. Ying, and Arild Bertelrud. Prediction of high-lift flows using turbulent closure models. *AIAA Journal*, 36(5):765–774, 1998.
- [53] S P Schneider. Fligh data for boundary-layer transition at hypersonic and supersonic speeds. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 36(1):8–20, Jan.-Feb. 1999.
- [54] U Schumann. Realizability of Reynolds-stress turbulence models. *Physics of FLuids*, 20(5):721–725, 1977.
- [55] T.-H Shih, W W Liou, A Shabbir, Z Yang, and J Zhu. A new eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows – development and validation. NASA TM 106721, National Aeronautics and Space Administration, Lewis Research Center, Cleveland, Ohio 44135-3191, Aug. 1994.
- [56] P R Spalart. Strategies for turbulence modelling and simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21(3):252–263, June 2000.
- [57] P. R. Spalart and S. R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In *30th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper No. 92-0439, Reno, NV, Jan. 1992.

- [58] P R Spalart and S R Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *La Recherche Aeropastiale*, 1:5–21, Jan.-Feb. 1994.
- [59] K Suga. Recent developments in eddy viscosity modelling of turbulence. *R&D Review of Toyota CRDL*, 33(1):1–11, 1998.
- [60] H Tennekes and J L Lumley. *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1972.
- [61] J. Vassberg, E. Tinoco, M. Mani, O. Brodersen, B. Eisfeld, R. Wahls, J. Morrison, T. Zickuhr, K. Laffin, and D. Mavriplis. Summary of the third AIAA CFD drag prediction workshop. In *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper No. 2007-0260, Reno, NV, Jan. 2007.
- [62] S Wallin and A V Johansson. An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 403:89–132, Jan. 2000.
- [63] D C Wilcox. Comparison of two-equation turbulence models for boundary layers with pressure gradient. *AIAA Journal*, 31(8):1414–1421, Aug. 1993.
- [64] D C Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, CA, second edition, 1998.
- [65] D C Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, CA, third edition, 2006.