

6. ANÁLISE DO ESCOAMENTO TURBULENTO COM A UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE VÓRTICES

Miguel Hiroo Hirata

Departamento de Mecânica e Energia – FAT / UERJ

Estrada Resende Riachuelo

Resende, RJ. 27501-000

e.mail: hirata@fat.uerj.br

Instituto de Engenharia Mecânica – UNIFEI

Av. BPS, 1303

Itajubá, MG.

Resumo

Nesta palestra, apresenta-se uma alternativa aos métodos que são usualmente utilizados para a simulação numérica do escoamento de um fluido viscoso. De uma maneira geral os métodos numéricos utilizam a descrição euleriana enquanto que a proposta apresentada utiliza a descrição lagrangiana.

A descrição lagrangiana permite que se realize a simulação numérica do escoamento sem a utilização de uma malha; desta maneira evita-se os problemas usualmente associados a esta prática (instabilidades numéricas, dificuldade da especificação das condições de contorno na região da esteira etc., além do próprio estabelecimento da malha).

A vorticidade presente na região fluida é discretizada com a utilização de uma nuvem de vórtices discretos livres; daí o nome: Método de Vórtices. Cada vórtice discreto é acompanhado, ao longo do tempo, num procedimento tipicamente lagrangiano. Com este procedimento, além de dispensar a utilização da malha, a atenção é dirigida apenas as partes da região fluida onde os fenômenos realmente importantes estão acontecendo. Neste aspecto o Método de Vórtices difere bastante dos métodos eulerianos que atuam em toda a região fluida simultaneamente.

Com a finalidade de analisar os fenômenos que ocorrem na maior gama possível da escala de comprimento (ou, da escala do número de onda), propõe-se analisar os fenômenos que ocorrem nas macro escalas com o Método de Vórtices e modelar os fenômenos que ocorrem nas micro escalas com a utilização de uma função de estrutura da velocidade.

Com esta proposta viabiliza-se a análise (com a utilização de máquinas de pequeno porte) das grandes estruturas do escoamento considerando as influências dos fenômenos associados a turbulência.

6.1. Introdução

A compreensão e a análise do escoamento ao redor de um corpo tem sido fundamental para o desenvolvimento de muitas áreas do conhecimento e, em particular, da tecnologia.

Os avanços da Aeronáutica só se concretizam com o estabelecimento dos fundamentos da Aerodinâmica; estes fundamentos, cientificamente estabelecidos, permitem a análise do escoamento que se realiza ao redor das aeronaves através de técnicas experimentais ou através de simulações numéricas. Da mesma maneira, o projeto das grandes embarcações, nas décadas de 60 e 70 tem

início com o cálculo da resistência à propulsão e das cargas hidrodinâmicas impostas sobre o casco dos navios, pelas ondas do mar; testes com modelos reduzidos são utilizados e modelos matemáticos que assumem o casco como um corpo esbelto são explorados a exaustão. A exploração de petróleo no mar, principalmente em águas profundas, só se viabiliza, a partir da década de 70, com o desenvolvimento de metodologias que permitem o cálculo dos movimentos de sistemas oceânicos e das cargas neles induzidas pelas ondas do mar. Novamente, testes com modelos

reduzidos e simulações numéricas simulando o movimento da água ao redor destes sistemas oceânicos são as ferramentas utilizadas. Com relação a este exemplo particular, pode-se mencionar o Tanque Oceânico, recentemente inaugurado nas instalações da UFRJ e o “Tanque Numérico” em operação na USP que possuem funções complementares nas pesquisas e desenvolvimentos necessários para a exploração do petróleo no mar.

Os exemplos mencionados são apenas alguns entre muitos outros que poderiam ser fornecidos. Eles são importantes não apenas pela importância que as duas áreas, a aeronáutica e a indústria de construção naval, representam, mas também, porque mostram a evolução da importância dos modelos matemáticos utilizados na análise dos fenômenos fluidodinâmicos. Os primeiros modelos utilizados na Aerodinâmica e na Hidrodinâmica do Navio utilizavam uma hipótese bastante restritiva; assumia-se que os corpos fossem esbeltos. A asa de um avião possui uma razão (espessura/largura) pequena e opera com ângulos de ataque pequenos; a fuselagem apresenta dimensões transversais pequenas quando comparadas com o seu comprimento, além de apresentar uma variação suave. Estas mesmas características, que são próprias de um corpo esbelto, estão presentes também nas partes submersas do casco dos navios.

O desenvolvimento tecnológico, no entanto, exige que novas fronteiras do conhecimento sejam desbravadas. Suplantar estas fronteiras é condição necessária para que se viabilize a análise de novas facetas das situações conhecidas ou de situações em que as soluções existentes não são mais suficientes ou adequadas.

Estes aspectos podem ser facilmente identificados no âmbito das áreas mencionadas. Na indústria de construção naval, novos desafios são impostos pela necessidade do cálculo de cargas hidrodinâmicas que atuam em corpos das mais diferentes formas que dificilmente poderiam ser consideradas como esbeltas. Estas formas rombudas, com baixa razão de aspecto e com arestas vivas são encontradas nos sistemas oceânicos, os quais são utilizados para a exploração do petróleo no mar. No setor aeronáutico, por sua vez, as aeronaves modernas operam, principalmente nos momentos mais críticos, com suas asas submetidas a grandes ângulos de ataque (incidência). Nestas condições, uma asa mesmo que fina, pode apresentar uma extensa zona descolada no dorso e uma generosa esteira viscosa (características, aliás, marcantes do escoamento de um fluido viscoso ao redor de um corpo rombudo). Como consequência, os resultados obtidos com a utilização da teoria de uma asa fina, operando com pequenos ângulos de ataque, tornam-se inadequados.

O desenvolvimento tecnológico propicia, também, o aparecimento de novas áreas de conhecimento. Entre estas novas áreas e entre aquelas já tradicionalmente estabelecidas pode-se identificar, com frequência cada vez maior, a necessidade do conhecimento e da análise do escoamento de um fluido viscoso ao redor de corpos rombudos.

Esta necessidade é encontrada nas aplicações de pequena escala e se estendem até aquelas aplicações que se inserem nas maiores escalas. Entre as aplicações caracterizadas pelas pequenas escalas pode-se mencionar o resfriamento de componentes eletrônicos (que possuem uma forma rombuda), exigindo a movimentação do ar sobre eles. Nas maiores escalas menciona-se o escoamento da água através dos grandes sistemas oceânicos utilizados para a exploração do petróleo no mar, o movimento do ar através dos conglomerados de edifícios, etc. e, nas escalas intermediárias, os exemplos são muitos: o cálculo das cargas aerodinâmicas que atuam sobre os veículos, sobre os cabos e torres das linhas de transmissão de eletricidade, a análise do escoamento no interior de trocadores de calor, etc.

Uma análise mais atenta destes exemplos mostra, ainda, um outro aspecto: fluidos movimentam-se ao redor de corpos de formas extremamente complexas e através de conjunto de corpos, onde alguns se localizam total ou parcialmente na esteira dos outros. Nestas situações torna-se importante dominar os mecanismos que controlam o desenvolvimento da vorticidade e sua interação com os corpos.

O escoamento ao redor de um corpo rombudo, ou mesmo o escoamento ao redor de um corpo esbelto operando com um ângulo de ataque considerável, é extremamente complexo. Ele apresenta

muitas questões em aberto que merecem atenção especial: o escoamento é separado, o regime é essencialmente turbulento e dependente do tempo, etc. Intensos trabalhos de investigação serão necessários para que elas possam ser entendidas e superadas. A análise destas questões deve impor esforços adicionais aos investigadores e às suas máquinas, nos próximos anos. Enfim, novas técnicas e enfoques inovadores tornam-se urgentemente necessários.

Dois aspectos, entre outros, dificultam a análise deste tipo de escoamento:

O primeiro é representado pela esteira viscosa que se forma a jusante dos corpos, Fig. 1. Toda a vorticidade, gerada na superfície do corpo, é lançada na esteira, através da camada limite, onde se desenvolve. As atividades importantes para o escoamento externo são, portanto, encontradas nesta região formada pela camada limite e pela esteira viscosa. Entender e estar apto a analisar a dinâmica da vorticidade é de fundamental importância!

O segundo aspecto importante do escoamento ao redor de um corpo está relacionado com o caráter turbulento do escoamento, particularmente no campo interno representado pela camada limite. O tratamento integrado de todos estes aspectos é uma característica que se deseja encontrar nas técnicas e enfoques a serem utilizados.

O propósito desta palestra consiste na apresentação de um enfoque alternativo para a análise do escoamento ao redor de um corpo, quando o número de Reynolds assume valores elevados. A característica principal deste enfoque reside na utilização da descrição lagrangiana (ao invés da descrição euleriana utilizada pelos métodos tradicionais como o Método dos Volumes Finitos, o Método dos Elementos Finitos, etc.) combinada com uma modelagem adequada da turbulência.

Neste enfoque, a vorticidade presente na região fluida de interesse é discretizada para fins de tratamento numérico. Esta discretização é feita com a utilização de uma nuvem de vórtices discretos (vórtices livres). Estes vórtices (assim como a vorticidade que eles representam) têm origem nas superfícies dos corpos e, como visto desenvolvem-se através da camada limite e são carregados formando a esteira viscosa. Cada vórtice livre da nuvem é acompanhado individualmente durante a simulação numérica, caracterizando-se assim a utilização de uma descrição lagrangiana. Este procedimento constitui-se, em essência, no Método de Vórtices, Chorin (1973), Sarpkaya (1989), Lewis (1991), Kamemoto et al.(1995).

Uma análise, mesmo que preliminar, do que foi acima exposto mostra imediatamente alguns aspectos inerentes ao método:

- Com a utilização de um esquema lagrangiano para descrever o escoamento, desnecessário se faz a utilização de uma malha de discretização da região fluida. Assim sendo, cuidados especiais para o tratamento das instabilidades numéricas que se fazem presentes quando se utilizam os métodos eulerianos, principalmente quando o número de Reynolds assume valores elevados, não se fazem necessários. Em adição a esta observação é oportuno mencionar que a geração da malha em si, nos métodos eulerianos, já se constitui num trabalho que está longe de ser irrelevante.
- A simulação lagrangiana propõe direcionar a sua atenção para as regiões de grandes atividades, que são aquelas onde se concentra a vorticidade, isto é, na camada limite e na esteira do corpo; afinal não se pode ter uma nuvem de vórtices em regiões onde a vorticidade se anula. Os métodos eulerianos, por outro lado, consideram simultaneamente toda a região fluida, independentemente do fato de que há regiões de menor importância nas quais nenhuma atividade, realmente relevante, se faz presente.
- Com o acompanhamento lagrangiano dos vórtices livres não se exige uma consideração explícita das condições de contorno a grandes distâncias do corpo. Esta é uma questão importante porque nos problemas que se propõe analisar a esteira é bastante desenvolvida; nesta região, como visto, as atividades são intensas e desconhecidas, a priori, como é ilustrado claramente pela superfície S_3 , na Fig. 1. Observe, ainda, que a situação torna-se mais delicada quando se propõe simular as variações que ocorrem em pequenos intervalos de tempo, como por exemplo, no desprendimento alternado das estruturas vorticosas da superfície dos corpos.
- O Método de Vórtices constitui-se num caso particular de uma categoria de métodos numéricos que poderiam ser denominados de Métodos de Partículas. Assim, por exemplo, se houver troca

de calor “partículas apropriadas de calor” podem ser utilizadas, Hirata e Hirata (1998), Alcântara Pereira e Hirata (2003).

Com relação à implementação numérica dos algoritmos, observa-se que o número de operações quando se utiliza o Método dos Vórtices é alto ou mais precisamente é da ordem de N^2 , onde N é o número de vórtices livres utilizados na simulação (a cada incremento de tempo da simulação, novos vórtices são adicionados à nuvem). Há propostas de algoritmos que utilizam expansões em multipolos, os quais permitem a redução do número de operações; os algoritmos conhecidos como partícula-célula, Guedes, et al (1999) reduzem a ordem do número de operações para $(N \log N)$ e nos denominados célula-célula, Greengard and Rokhlin (1987), o número de operações é da ordem de N . Estes aspectos, por serem muito específicos da implementação numérica do método, não serão abordados.

Ainda, com relação aos algoritmos, cabe mencionar a existência dos métodos híbridos que, embora conservem o aspecto lagrangiano de acompanhamento dos vórtices livres, utilizam uma malha auxiliar para o cálculo da velocidade induzida em cada vórtice livre; estes são os métodos denominados de Vórtices em Célula, Christiansen (1973), Meneghini and Bearman (1995) e, também, não são aqui considerados.

A experiência mostra que, mesmo utilizando os algoritmos que reduzem o esforço computacional, este esforço ainda é considerável se uma simulação fina, envolvendo os aspectos da turbulência, for desejável. Fica claro, portanto, a necessidade de se manter o número de vórtices dentro de uma faixa computacionalmente razoável.

É natural que se deseje utilizar, nas simulações numéricas, o maior incremento de tempo (Δt) possível, mas, mesmo assim, este incremento deve ser pequeno e compatível com as escalas de tempo dos fenômenos simulados. Estas tendências opostas mostram a necessidade de uma análise das escalas que se manifestam nos fenômenos de interesse.

De acordo com Lessieur, (1996), grande parte das atividades de interesse estão ocorrendo nas maiores escalas. Assim sendo, os fenômenos que se manifestam nestas macro-escalas podem ser analisados utilizando um número razoável de vórtices; esta análise deve fornecer as informações necessárias e que estão associadas as grandes estruturas do escoamento. Os fenômenos que se manifestam nas micro-escalas devem ser apropriadamente modeladas como ilustrado no texto que se apresenta a seguir, Alcântara Pereira, et al, (2000).

Para separar apropriadamente as escalas do número de onda (ou se conveniente, do comprimento de onda), um filtro passa-baixos é escolhido e que é caracterizado pela função $\bar{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. O campo filtrado é, então, definido, para cada quantidade f , como, Smagorinsky, (1963):

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\forall} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \bar{G}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (1)$$

A implementação desta idéias e detalhes do Método de Vórtices são apresentados, a seguir, neste trabalho.

6.2. Formulação do problema

Considere, para fins de apresentação, uma situação típica que corresponde ao movimento de um corpo, no interior de uma massa de fluido que se encontra em repouso.

Considere, ainda, que o problema possa ser analisado no plano e que o movimento do fluido ao redor do corpo não sofre influência de nenhum outro corpo ou fronteira próxima. É evidente que os efeitos da viscosidade são de maior interesse e que, para a maior parte das situações de interesse, o fluido possa ser considerado como newtoniano de propriedades constantes. Adicionalmente, considera-se que os efeitos da compressibilidade sejam desprezíveis, isto é, que o escoamento realiza-se a baixos valores do número de Mach.

Com o sistema de coordenadas fixo no corpo, a região fluida de interesse é definida, como mostra a Fig. 1, pela superfície S , vista como a união da superfície do corpo – S_1 – a superfície definida a grandes distâncias do corpo – S_2 – e pela intersecção desta superfície com a esteira que se forma a jusante – S_3 -.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

O escoamento incidente, que simula o movimento principal do corpo através do fluido, é caracterizado pela velocidade U . A este movimento principal, pode-se superpor movimentos secundários como, por exemplo, oscilações; estes por simplicidade de apresentação são considerados como inexistentes.

Se os efeitos da compressibilidade são desprezados as expressões matemáticas dos princípios de conservação que governam os fenômenos são escritas como:

- Princípio de Conservação da Massa - (Equação da Continuidade)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2 \quad (2)$$

- Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Linear - (Equação de Navier-Stokes)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad i = 1,2 \quad (3)$$

onde a linguagem indicial, que representa a soma pelos índices repetidos, é utilizada. Deve-se observar que

$\mathbf{u} \equiv (u, v) \equiv (u_1, u_2)$ é o vetor velocidade do fluido

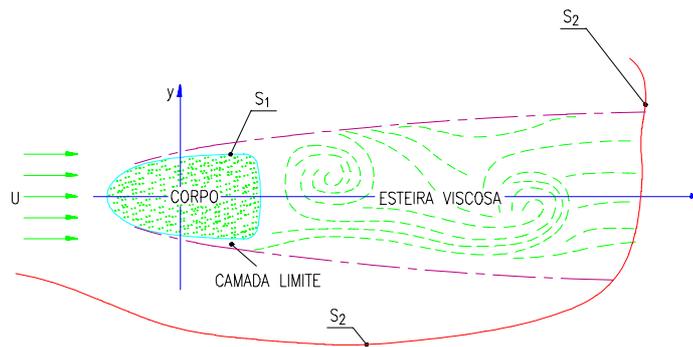


Figura 1. Escoamento ao redor de um corpo

Para a completa definição do problema deve-se impor as condições de fronteira:

- Em S_1 , as condições de impenetrabilidade e de escorregamento nulo são, respectivamente, escritas como:

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{n} \text{ é o vetor unitário normal} \quad (4.A)$$

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \boldsymbol{\tau} \text{ é o vetor tangente unitário} \quad (5.A)$$

O conjunto destas duas condições representa a condição de aderência.

A grandes distâncias, assume-se que a perturbação causada pelo corpo, no escoamento incidente, deve se desfazer gradualmente, ou:

$$|\mathbf{u}| \rightarrow U \quad (6)$$

Estas expressões são válidas para todas as escalas do número de ondas ou do comprimento de onda. No entanto, como discutido na introdução, a simulação direta dos fenômenos exigiria um número muito elevado de vórtices livres na esteira.

A proposta consiste, então, em filtrar as equações para que a simulação das grandes estruturas seja feita com a utilização de uma nuvem formada por um número razoável de vórtices livres. Reserva-se para uma modelagem apropriada os fenômenos que se manifestam através das micro-escalas.

De acordo com Smagorinsky (1963), tem-se

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) * H_{\Delta x}$$

$H_{\Delta x}$ é o filtro

* representa convolução, veja Eq (1)

e se escreve

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$$

onde: $\bar{\mathbf{u}}$ representa o campo filtrado ou campo das macro escalas

\mathbf{u}' representa o campo das flutuações ou campo das micro escalas, menores que Δx

Como consequência, as equações filtradas tomam a forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) + \dots \right] \quad (9)$$

onde se pode notar a presença de termos convectivos (não conhecidos) contendo informações de fenômenos que ocorrem nos campos caracterizados pelas escalas sub malhas; na equação apenas o primeiro destes termos é mostrado.

Ainda de acordo com a metodologia de Smagorinsky, a tensão, proveniente dos fenômenos que ocorrem nas micro-escalas, pode ser modelada de maneira análoga àquela utilizada para o tensor de Reynolds na teoria da turbulência não homogênea. Desta maneira a equação acima é escrita como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij} \right] \quad (10)$$

onde ν e ν_t representam os coeficientes de viscosidade molecular e turbulento, respectivamente e o tensor deformação do campo filtrado é definido como

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

O modelo proposto por Smagorinsky utiliza a seguinte formulação

$$v_t = (C_{SM} \ell)^2 \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}}$$

$$C_{SM} = 0.11$$

$$\ell = \sqrt{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}$$

que possui o inconveniente de utilizar a noção de taxa de deformação (derivadas).

Como alternativa, Lessieur e Metais, 1996, observam que não há a necessidade da modelagem submalha nas regiões de poucas atividades e que é essencial que se dissipe, nos domínios onde se identificam as escalas submalha, aquelas manifestações locais da turbulência, se elas tornarem-se muito intensas. Observam, ainda, que nas escalas submalhas os fenômenos são aproximadamente isotrópicos.

Com estas observações, Lessier e Metais propõem utilizar o espectro de energia cinética local, $E_x(k_c)$, para definir a viscosidade turbulenta

$$v_t(\mathbf{x}, \Delta) = \frac{2}{3} C_k^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{E_x(k_c)}{k_c}}$$

Em seguida, eles consideram a função estrutura de velocidade de segunda ordem, definida como:

$$\overline{F_2}(\mathbf{x}, \Delta, t) = \overline{\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)\|_{\|\mathbf{r}\|=\Delta}^2} \quad (11)$$

Nesta definição é importante observar que o operador “média” é aplicado sobre as velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t)$ calculadas sobre a superfície de uma esfera com o centro em \mathbf{x} e raio $|\mathbf{r}|$.

Esta função, juntamente com uma relação fornecida por Batchelor, 1953, permite que se exprima o espectro de energia cinética local, em k_c , de maneira mais conveniente.

Resulta

$$v_t(\mathbf{x}, \Delta) = 0.104 C_k^{-\frac{3}{2}} \Delta \sqrt{\overline{F_2}(\mathbf{x}, \Delta, t)} \quad (12)$$

$C_k = 1.4$ é a constante de Komolgorov

A grande vantagem desta formulação é que a função estrutura de velocidade utiliza flutuações de velocidade (diferenças) ao passo que o modelo de Smagorinsky, como visto, utiliza a taxa de deformação (derivadas).

Finalmente, pode-se resumir a estratégia proposta como:

1. Utilizar a equação da continuidade, Eq. (8), e as equações do movimento, Eq. (10), para simular os fenômenos que ocorrem nas maiores escalas, com a utilização do Método de Vórtices.

2. Levar em consideração os fenômenos que ocorrem nas menores escalas com a utilização do coeficiente de viscosidade turbulento, ν_t , Eq. (12).
3. O coeficiente de viscosidade turbulento é modelado com a utilização da função estrutura de velocidade, $\overline{F_2}$, definida pela Eq. (11).

6.3. O método de vórtices

Como estratégia para uma apresentação mais didática, propõe-se apresentar o Método de Vórtices sem considerar a modelagem de turbulência. Uma vez feita a apresentação dos aspectos básicos do método, a introdução da modelagem de turbulência deve ser feita de maneira bastante natural.

Assim sendo, de uma forma resumida, tem-se:

- o escoamento é considerado bidimensional e a região fluida de grandes dimensões.
- o fluido newtoniano possui propriedades constantes e os efeitos da compressibilidade não são considerados.

Nestas condições o escoamento é governado pela equação da continuidade, Eq.(8) e pelas equações de Navier-Stokes Eq.(10), além das condições de contorno (impenetrabilidade e escorregamento nulo), especificadas no corpo; a grandes distâncias do corpo, a perturbação provocada por ele no escoamento deve se dissipar gradualmente.

Estas equações adimensionalizadas em termos da velocidade do escoamento incidente, U , e de um comprimento característico, b , são escritas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (14)$$

onde se deve observar que

$$\text{Re} = \frac{Ub}{\nu} \quad \text{Número de Reynolds Molecular}$$

Observação importante: como mencionado acima, esta parte da apresentação não considera os efeitos da turbulência, embora se assuma que o número de Reynolds assuma valores elevados. Desta maneira, não faz sentido falar de campo filtrado ou de flutuação. Estes aspectos serão introduzidos a posteriori.

6.3.1. A separação dos efeitos viscosos.

Na busca da solução das equações acima, depara-se com uma dificuldade representada pela presença do termo de pressão nas equações de Navier-Stokes. Para contornar esta dificuldade toma-se o rotacional de ambos os lados da Eq. (14) e se utiliza a equação da continuidade; o resultado é expresso na forma:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (15)$$

Observe que a hipótese de que o escoamento é plano já foi utilizada para se escrever esta equação. De fato:

- ω representa a única componente não nula do vetor vorticidade, que é definido como

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}$$

- o termo correspondente a variação da vorticidade devido a deformação das linhas de vorticidade, não se faz presente.

A Eq. (15) é conhecida como a Equação da Vorticidade em duas dimensões (Batchelor, 1967) e ela governa o desenvolvimento da vorticidade; de fato, uma observação atenta identifica o seu lado esquerdo (LE) com a derivada substantiva da vorticidade, isto é,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{D\omega}{Dt}$$

Conclui-se, portanto que esta parcela da equação está associada ao processo de convecção da vorticidade, enquanto que o lado direito (LD), obviamente, representa o processo de difusão da vorticidade.

Com estas observações em mente, pode-se utilizar o Algoritmo de Separação da Parte Viscosa, inicialmente proposto por Chorin (1973) com o nome de "Viscous Splitting Algorithm".

Segundo este algoritmo, num mesmo incremento de tempo (suposto de pequena magnitude) da simulação numérica, a convecção da vorticidade é governada pela equação:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (16)$$

enquanto que a difusão é governada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (17)$$

A possibilidade desta divisão de efeitos representa a hipótese fundamental do que se denomina de Método de Vórtices. A grande vantagem do algoritmo consiste em se poder calcular separadamente os fenômenos da convecção e da difusão da vorticidade.

6.3.2. Convecção da vorticidade

De acordo com o algoritmo de separação da parte viscosa, a convecção da vorticidade é governada pela equação (16), a qual mostra claramente que a vorticidade é transportada por convecção como se fosse uma partícula de fluido, fato já reconhecido por Helmholtz (1858). Desta maneira, a versão discretizada desta equação (16) pode ser escrita como:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p, t), \quad p=1, NV \quad (18)$$

onde $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t)$ representa o vetor velocidade, calculado na posição onde se localiza o vórtice p , isto é, o vetor velocidade calculado no ponto \mathbf{x}_p . Evidentemente, NV representa o número de vórtices livres que formam a nuvem de vórtices.

Nesta equação dois aspectos essenciais para a solução, chamam a atenção de imediato:

- O primeiro refere-se ao cálculo da velocidade $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p(t), t)$, que deve ser repetido para cada vórtice da nuvem; à este cálculo é creditada a maior parte do esforço computacional necessário para a simulação numérica.

- De posse da velocidade, apresenta-se o segundo problema; este consiste na obtenção da solução da Eq. (18).

Estes aspectos são discutidos a seguir.

6.3.2.1. O Campo de Velocidades – u_p

Para facilitar a exposição referente ao cálculo da velocidade u_p faz-se conveniente particularizar um pouco mais o problema em análise.

De uma maneira geral, a vorticidade nos problemas de maior interesse prático, é gerada nas superfícies sólidas que delimitam a região fluida e em particular nas superfícies de corpos ao redor dos quais o fluido se movimenta.

Considera-se então uma situação típica, esboçada na Fig. 2, onde S_1 é a superfície do corpo e S_2 uma superfície localizada a grandes distâncias (veja a correspondente Fig. 1), isto é:

$$S = S_1 \cup S_2$$

A superfície S_1 é definida pela equação escalar $F_1(\mathbf{x}, t) = 0$, e a equação $F_2(\mathbf{x}, t) = 0$, define a superfície S_2 .

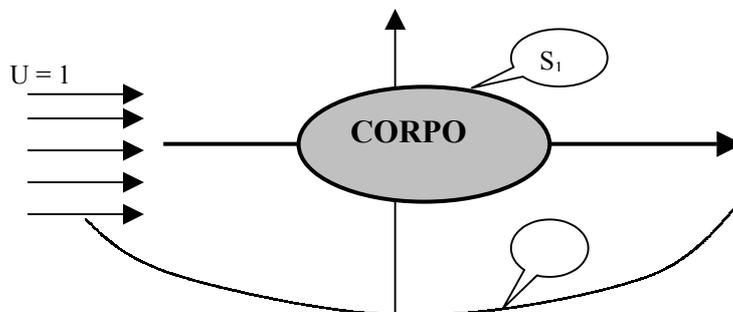


Figura 2. Definição da região fluida

Na superfície do corpo - S_1 - especifica-se a condição de aderência

“a velocidade - \mathbf{u} - da partícula de fluido em contacto com a superfície deve ser igual a velocidade - \mathbf{v} - desta superfície”

Para efeitos de formulação do problema é conveniente que esta condição seja explicitada em duas partes como feito na formulação do problema. Estas condições são, aqui, ligeiramente generalizadas incluindo os efeitos de um eventual movimento do corpo; as condições (4A) e (5A) são re-escritas como:

- condição de (im)penetrabilidade

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \Delta v = 0 \quad \text{em } S_1 \quad (4B)$$

- condição de escorregamento nulo (esta condição não deve ser imposta no problema que trata da convecção)

$$(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) - (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \text{em } S_1 \quad (5B)$$

Observa-se, a seguir, que o cálculo da velocidade u_p torna-se mais simples ao se atentar para o fato de que a equação (16), que governa o fenômeno da convecção da vorticidade, corresponde à equação de Euler. Duas conseqüências advêm deste fato:

- a velocidade pode ser calculada a partir do potencial complexo associado ao problema convectivo (o problema é bidimensional);
- a condição de escorregamento nulo (5B) não pode mais ser satisfeita no contexto do processo de convecção da vorticidade. Volta-se a abordar este aspecto no item referente a geração da vorticidade.

O potencial complexo associado ao problema convectivo pode ser expresso como a soma de três potenciais mais simples:

$$f(z) = f_i(z) + f_c(z) + f_v(z) \quad (19)$$

$f_i(z)$ – potencial complexo que representa o escoamento incidente.

$f_c(z)$ – potencial complexo que representa a perturbação causada pelo corpo.

$f_v(z)$ – potencial complexo que representa a nuvem de vórtices.

A correspondente velocidade complexa é, por sua vez, escrita como:

$$u(x, y) - iv(x, y) = \frac{df(z)}{dz}$$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left[\frac{df(z)}{dz} \right] \quad \text{e} \quad v(x, y) = -\operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} \right]$$

As componentes u e v da velocidade, calculada na posição do vórtice p , são escritas como:

$$u(\mathbf{x}_p(t), t) = u(x_p, y_p) = u_i(x_p, y_p) + u_c(x_p, y_p) + u_v(x_p, y_p) \quad (20)$$

$$v(\mathbf{x}_p(t), t) = v(x_p, y_p) = v_i(x_p, y_p) + v_c(x_p, y_p) + v_v(x_p, y_p)$$

onde u_i e v_i são associadas ao potencial $f_i(z)$, u_c e v_c ao potencial $f_c(z)$ e, finalmente, u_v e v_v ao potencial $f_v(z)$.

A Velocidade do Escoamento Incidente

O potencial complexo $f_i(z)$ representa o escoamento incidente. No caso mais comum o escoamento incidente reduz-se a um escoamento uniforme com velocidade constante $U = 1$ (observe que o problema foi adimensionalizado). O potencial complexo $f_i(z)$ e o respectivo campo de velocidade se escrevem como

$$\begin{aligned} f_i(z) &= z \\ \text{e} \\ u_i(x, y) &= 1 \quad \text{e} \quad v_i(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Observação: o escoamento incidente pode assumir formas extremamente complexas. Por exemplo, se o corpo em consideração localiza-se a jusante de outro corpo, o escoamento incidente é representado pela esteira do corpo localizado a montante.

A Velocidade Induzida pelo Corpo

O potencial complexo $f_c(z)$ representa a perturbação causada pela presença do corpo. Normalmente, este potencial é representado por um conjunto de singularidades que podem ser discretas ou distribuídas. De acordo com a escolha feita, pode-se ter diferentes implementações para

se simular o processo de convecção da vorticidade. Os tipos mais comuns de implementação são analisados a seguir.

As singularidades discretas apresentam a possibilidades de se trabalhar com uma formulação "exata" no contexto da Teoria Potencial; este enfoque, contudo, é restrito a formas bem definidas do corpo. Assim, por exemplo, se um cilindro circular for imerso num escoamento uniforme, a presença do corpo é representada por um dipolo; se ao escoamento uniforme for acrescentada uma singularidade (fonte, dipolo, vórtice) externa ao corpo, o escoamento resultante será representado por um conjunto de singularidades (além do dipolo) composto pelas imagens especificadas pelo Teorema do Círculo (Milne-Thompson, 1950); no caso particular de apenas um vórtice localizado em z_p , o potencial complexo é escrito como

$$fc(z) = Ur_0^2 \frac{1}{z} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_p) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - 0)$$

$$z_p = x_p + iy_p = r_p \exp(i\theta_p)$$

$$\bar{z}_p = \begin{pmatrix} r_0^2 \\ r_p \end{pmatrix} x_p + i \begin{pmatrix} r_0^2 \\ r_p \end{pmatrix} y_p = \begin{pmatrix} r_0^2 \\ r_p \end{pmatrix} \exp(i\theta_p)$$

onde se deve observar que:

- a condição de impenetrabilidade é satisfeita automaticamente, em todos os pontos da superfície do cilindro, qualquer que seja o valor assumido pela intensidade - Γ - do vórtice; aliás, este fato é extremamente relevante para o desenvolvimento do Método de Vórtices porque permite que os resultados assim obtidos possam ser utilizados como referências. As componentes da velocidade são expressas como:

$$uc(x,y) - ivc(x,y) = -Ur_0^2 \frac{1}{z^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - \bar{z}_p} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}$$

- na expressão de $fc(z)$ acima, aparentemente, o termo Uz foi omitido. Este, porém, não é o caso porque este termo já se fez presente no potencial complexo que representa o escoamento incidente.

O Método de Vórtices, no entanto trabalha com uma nuvem de NV vórtices e não apenas com um vórtice. As expressões acima devem, portanto, serem generalizadas, assumindo a forma:

$$fc(z) = Ur_0^2 \frac{1}{z} - \sum_{p=1}^{NV} \frac{\Gamma_p}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_p) + \sum_{p=1}^{NV} \frac{\Gamma_p}{2\pi} \ln(z - 0) \quad (22.A)$$

$$uc(x,y) - ivc(x,y) = -Ur_0^2 \frac{1}{z^2} - \sum_{p=1}^{NV} \frac{\Gamma_p}{2\pi} \frac{1}{z - \bar{z}_p} + \sum_{p=1}^{NV} \frac{\Gamma_p}{2\pi} \frac{1}{z - 0} \quad (23.A)$$

Este tipo de procedimento foi utilizado por vários pesquisadores e muito explorado por Mustto et al.(1997), Mustto (1998), Mustto et al. (1998) e Mustto (2004).

Para se analisar o escoamento ao redor de um corpo de forma qualquer, no entanto, torna-se necessário a utilização de singularidades distribuídas sobre a superfície do corpo (Moran, 1984). O potencial complexo associado, agora, é expresso como:

$$fc(z) = \frac{1}{2\pi} \oint g(\zeta)K(z, \zeta)d\zeta$$

onde a integral é efetuada sobre a superfície do corpo S_1 . A função $g(\zeta)$ representa a densidade da singularidade utilizada e é determinada com a utilização da condição de contorno imposta na superfície do corpo (condição de impenetrabilidade). A função característica $K(z, \zeta)$ define o tipo de singularidade utilizada.

Para situações mais comuns, tem-se uma distribuição de fontes e de vórtices:

$$g(\zeta) = \lambda + i \gamma$$

$$K(z, \zeta) = \ln(z - \zeta)$$

onde λ e γ são funções reais. Se a densidade da distribuição de vórtices for nula, $\gamma = 0$, tem-se uma distribuição de fontes e, se a densidade da distribuição de fontes se anular, $\lambda = 0$, tem-se apenas uma distribuição de vórtices.

Como caso particular, se a atenção for restrita a cilindros de seção circular, pode-se ter uma solução "exata" desde que se utilize uma distribuição só de fontes ou só de vórtices (Rand, 1989) e (Manzanares, 1998). As componentes da velocidade são escritas como

$$uc(x, y) - ivc(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint \lambda(\zeta) \frac{1}{(z - \zeta)} d\zeta \quad (23.B)$$

e a densidade das fontes, como visto, é obtida com a utilização da condição de (im)penetrabilidade, Eq.(4B). A aproximação, neste caso, é creditada ao procedimento numérico utilizado na obtenção do valor da integral. As expressões (23A) e (23B) são equivalentes quando a superfície é impermeável ($\Delta V = 0$ em (4B)). No entanto, a expressão (23B), ao contrário de (23A), permite considerar a situação em que a superfície é porosa ($\Delta V \neq 0$).

Nas situações mais comuns e de maior interesse prático, o corpo não possui uma forma especial e o cálculo das velocidades uc e vc deve ser feito de uma maneira aproximada. Com esta finalidade a expressão do potencial complexo é re escrita como

$$fc(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^{NP} \int_{\Delta S_q} g(\zeta)K(z, \zeta)d\zeta$$

onde NP representa o número de painéis utilizados para simular a superfície do corpo; o comprimento destes painéis é indicado por ΔS_q . A determinação da densidade $g(z)$ é feita com a utilização das condições de contorno especificadas sobre a superfície do corpo.

Casos particulares desta expressão são representados por uma distribuição só de fontes (Hess and Smith, 1966), isto é

$$fc(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^{NP} \int_{\Delta S_q} \lambda(\zeta) \ln(z - \zeta)d\zeta \quad (22C)$$

ou por uma distribuição só de vórtices (Martensen, 1971), isto é

$$f_c(z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{q=1}^{NP} \int_{\Delta S_q} \gamma(\zeta) \ln(z - \zeta) d\zeta \quad (22D)$$

Esta técnica que consiste em discretizar a superfície do corpo com a utilização de segmentos de reta sobre os quais se distribui singularidades é conhecida como Método dos Painéis (Katz and Plotkin, 1991), uma particularização do Método dos Elementos de Contorno (Brebia et al., 1984).

Como consequência, a expressão utilizada para o cálculo da velocidade deve ser modificada tomando a forma

$$uc(x, y) - ivc(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^{NP} \int_{\Delta S_q} g(\zeta) \frac{dK(z, \zeta)}{dz} d\zeta$$

No caso particular de uma distribuição só de fontes tem-se:

$$uc(x, y) - ivc(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^{NP} \int_{\Delta S_q} \lambda(\zeta) \frac{1}{(z - \zeta)} d\zeta \quad (23C)$$

Este procedimento foi bastante explorado por Kamemoto et al. (1990), por Araújo e Hirata (1993) e Araújo and Hirata (1993). Nestas referências podem-se encontrar detalhes sobre os procedimentos utilizados na determinação da densidade das distribuições de fontes sobre os painéis.

Se, por outro lado a distribuição for só de vórtices, tem-se

$$uc(x, y) - ivc(x, y) = \frac{i}{2\pi} \sum_{q=1}^{NP} \int_{\Delta S_q} \gamma(\zeta) \frac{1}{(z - \zeta)} d\zeta \quad (23D)$$

Este procedimento foi bastante explorado por Lewis (1991), Alcântara Pereira (1999) e Alcântara Pereira et al. (1999), Alcântara Pereira (2002) e Ricci (2002). Nestas referências podem-se encontrar detalhes sobre os procedimentos utilizados na determinação da densidade das distribuições de vórtices sobre os painéis.

A Velocidade Induzida pela Nuvem de Vórtices

Finalmente o potencial $f_v(z)$ representa a nuvem de vórtices discretos. A sua expressão pode ser escrita como

$$f_v(z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{q=1}^{NV} \Gamma_q B(z - z_q)$$

onde Γ_q é a intensidade do vórtice localizado em z_q e a função $B(z - z_q)$ está associada a distribuição da vorticidade de cada vórtice livre.

A velocidade e a distribuição da vorticidade associada são analisadas, a seguir, considerando-se quatro modelos de vórtices.

- **Vórtice potencial:** neste caso, toda a vorticidade está concentrada no seu centro e a distribuição de vorticidade é expressa pela função delta de Dirac, como ilustra a figura 3. A função B é expressa pela função logarítmica:

$$B = \ln(z - z_q)$$

A função distribuição de vorticidade assume a forma

$$KV(z - z_o) = \delta(z - z_q)$$

e, conseqüentemente

$$\omega = \Gamma KV(z - z_q) = \Gamma \delta(z - z_q)$$

O campo de velocidades é expresso como:

$$uv(x, y) - ivv(x, y) = \frac{i}{2\pi} \sum_{q=1}^{NV} \Gamma_p \frac{1}{(z - z_q)}$$

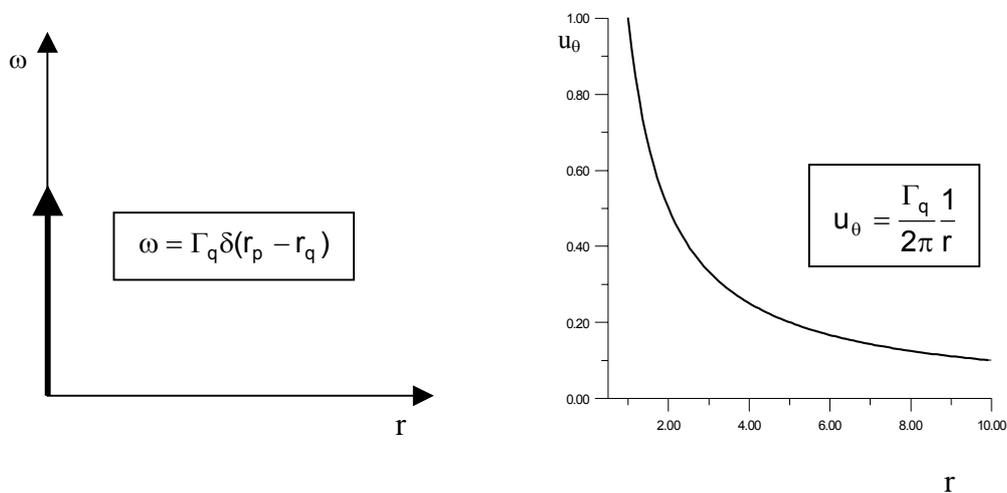


Figura 3. Vórtice Potencial: distribuição da vorticidade e da velocidade induzida

Dois aspectos importantes devem ser observados com relação a esta expressão. Considere um ponto do plano complexo, z_p , onde se deseja calcular a velocidade induzida pelo vórtice de intensidade Γ_q , localizado em z_q :

- o primeiro aspecto está associado ao fato de que um vórtice não induz velocidade sobre ele mesmo. Desta maneira, a contribuição do vórtice sobre ele mesmo deve ser excluída ao se utilizar os resultados da expressão acima na Eq. (20), ou seja:

$$uv(x_p, y_p) - ivv(x_p, y_p) = \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{NV} \Gamma_q \frac{1}{(z_p - z_q)} \quad (24)$$

- o segundo ponto a se observar refere-se ao comportamento singular da expressão. De fato, se $z_q \rightarrow z_p$ a velocidade induzida assume valores infinitamente grandes não retratando fielmente o comportamento real; aliás, este comportamento é esperado uma vez que o modelo potencial assume uma hipótese muito forte com relação à viscosidade. Há, portanto, a necessidade de se de-singularizar a expressão da velocidade, incorporando um núcleo, de raio σ_o , ao vórtice livre. Vários modelos podem ser adotados com esta finalidade, como é visto a seguir.

O **vórtice de Chorin** apresenta uma velocidade induzida constante no interior do núcleo e comporta-se como um vórtice potencial, fora deste. Este modelo apesar da simplicidade apresenta dois aspectos negativos

- a distribuição da vorticidade varia com o inverso da distância e é singular na origem.
- a distribuição da velocidade induzida apresenta uma descontinuidade na sua derivada quando a distância é igual ao raio, σ_o , que define o núcleo.

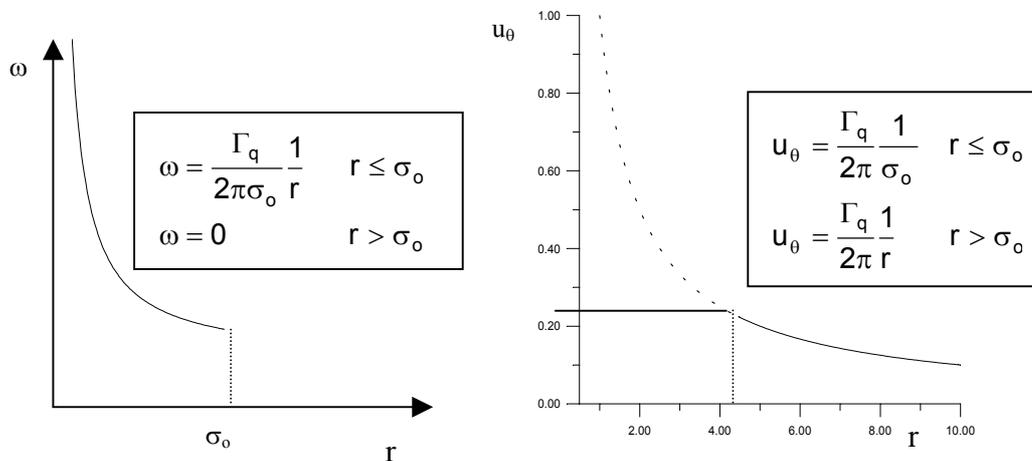


Figura 4. Vórtice de Chorin: distribuição da vorticidade e da velocidade induzida

O **vórtice de Rankine** apresenta uma velocidade induzida que varia linearmente com a distância no interior de seu núcleo, definido pelo raio σ_o ; neste caso o núcleo gira como um corpo rígido. Fora deste, o campo de velocidades comporta-se como um vórtice potencial.

Este campo de velocidades é causado por uma distribuição uniforme da vorticidade no interior do núcleo. O modelo representa um avanço com relação aos vórtices anteriores e simula razoavelmente bem os efeitos de amortecimento causados pela viscosidade. A dificuldade na sua utilização está associada a descontinuidade presente na derivada da distribuição da velocidade. O vórtice de Rankine foi bastante utilizado por Kamemoto et al. (1990), Araújo e Hirata (1993) e Araújo and Hirata (1993).

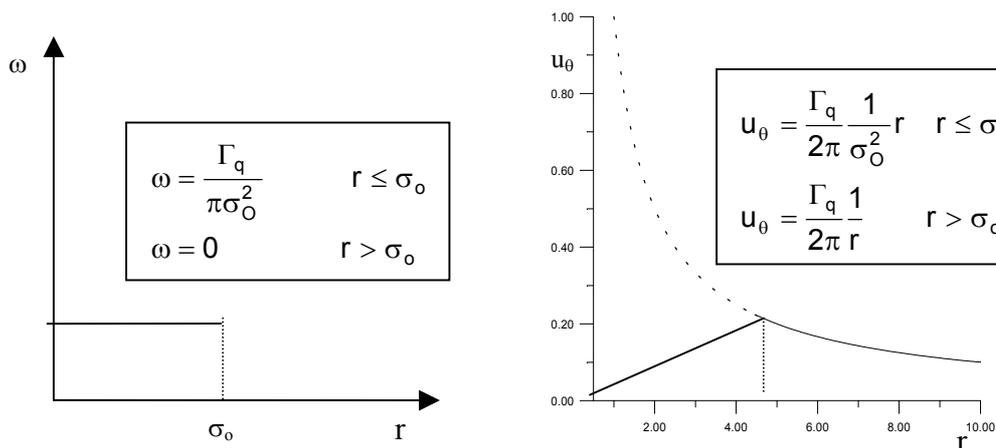


Figura 5: Vórtice de Rankine: distribuição de vorticidade e da velocidade induzida

O **vórtice de Lamb** (ou de Oseen) (Panton, 1984), contorna estas dificuldades assumindo uma distribuição normal para a vorticidade no interior do núcleo do vórtice. A distribuição de velocidades resultante assemelha-se a distribuição do vórtice de Rankine sem apresentar a descontinuidade na sua derivada. Atualmente este é o modelo mais utilizado.

A vorticidade neste caso é distribuída segundo a expressão:

$$KV(r-r_q) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(r-r_q)^2}{\sigma^2}\right)$$

logo

$$\omega(r, r_q, t) = \frac{\Gamma_q}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(r-r_q)^2}{\sigma^2}\right)$$

e, com esta distribuição de vorticidade, a velocidade tangencial induzida por este vórtice é expressa como:

$$u_\theta(r, r_q, t) = \frac{\Gamma_q}{2\pi(r-r_q)} \left[1 - \exp\left(-\frac{(r-r_q)^2}{\sigma^2}\right) \right] \quad (25A)$$

onde r define o ponto de campo e r_q a posição do vórtice de intensidade Γ_q . Conseqüentemente $(r-r_q)$ representa a distância radial a partir do centro do vórtice e σ representa uma escala de “comprimento viscoso”, definida pela expressão:

$$\sigma = \sqrt{4\nu t}$$

A Fig.6 mostra a distribuição de vorticidade e o comportamento da velocidade tangencial induzida por um único vórtice de Lamb.

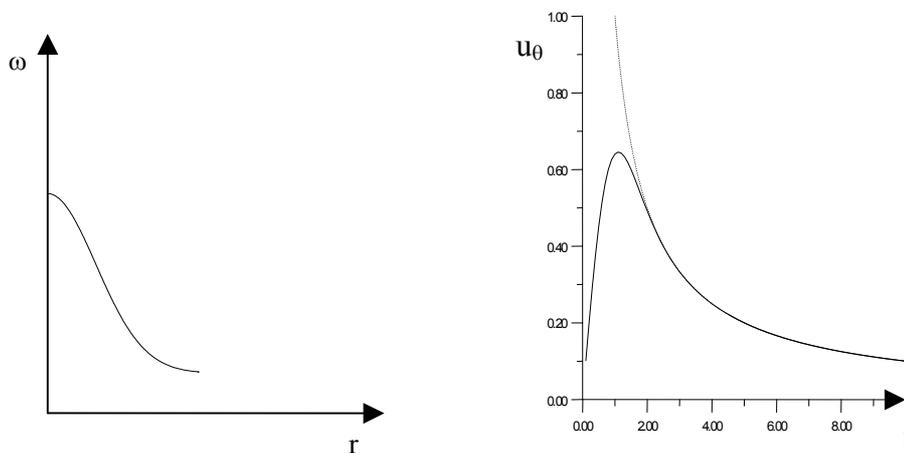


Figura 6. Vórtice de Lamb: distribuição de vorticidade e da velocidade induzida

Como pode ser observado, a distribuição da velocidade induzida por um vórtice discreto de Lamb apresenta um valo máximo. À medida que a distância $(r-r_q)$ do centro do vórtice aumenta, a velocidade induzida por um vórtice de Lamb aproxima-se da velocidade induzida por um vórtice potencial – linha pontilhada na Fig. 6. A velocidade máxima ocorre quando

$$r - r_q = R_{\max} = 1.1209\sigma$$

e a velocidade induzida, expressa em termos de R_{\max} , se escreve

$$u_{\theta}(r, r_q, t) = \frac{\Gamma_q}{2\pi(r - r_q)} \left[1 - \exp\left(-1.2564 \frac{(r - r_q)^2}{R_{\max}^2}\right) \right] \quad (25B)$$

Analisando a Fig. 6, no entanto, observa-se que quando $(r - r_q) \approx 2R_{\max}$ a velocidade induzida pelo vórtice de Lamb é aproximadamente igual a velocidade induzida pelo vórtice potencial. Desta maneira, é conveniente interpretar que o vórtice de Lamb possui um núcleo cujo raio é definido por:

$$\sigma_o = 2R_{\max}$$

Mustto (1998), explorando este fato, exprime o raio do núcleo e a velocidade induzida pelo vórtice através das expressões:

$$\sigma_o = 6.3408 \sqrt{\frac{\Delta t}{Re}} \quad (26)$$

$$u_{\theta}(r, r_q, t) = \frac{\Gamma_q}{2\pi(r - r_q)} \left[1 - \exp\left(-5.0257 \frac{(r - r_q)^2}{\sigma_o^2}\right) \right] \quad (25C)$$

onde Δt representa o incremento de tempo.

6.3.2.2. Avanço Convectivo

A equação (20) permite calcular a velocidade induzida na posição ocupada por cada vórtice p da nuvem. O avanço convectivo deste vórtice é definido pela solução da equação (18), que é abaixo transcrita

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p(t), t) \quad p=1, NV \quad (18)$$

O avanço convectivo de todos os vórtices que formam a nuvem simula o fenômeno de convecção da vorticidade.

Na expressão acima, a posição do vórtice p , no instante t , é definida pelo vetor $\mathbf{x}_p(t)$ e $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p(t), t)$ representa a velocidade nesta posição. Desta maneira a posição deste vórtice no instante seguinte da simulação pode ser calculada como:

$$\mathbf{x}_p(t + \Delta t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p(t), t) * \Delta t \quad (27)$$

Esta expressão é conhecida como solução de Euler e representa a aproximação de primeira ordem, em (Δt) , da solução da equação (18).

Aproximações de ordem superior permitem a utilização de incrementos de tempo (Δt) maiores, reduzindo consideravelmente o tempo computacional. A fórmula de Adams-Bashforth (Ferziger, 1981)

$$\mathbf{x}_p(t + \Delta t) = \mathbf{x}_p(t) + [1.5\mathbf{u}_p(t) - 0.5\mathbf{u}_p(t - \Delta t)]\Delta t \quad (28)$$

representa uma aproximação de segunda ordem. Esta expressão é bastante conveniente do ponto de vista computacional, uma vez que a velocidade $u_p(t-\Delta t)$ já fora computada no avanço anterior, (Alcântara Pereira, 1999).

6.3.3 Difusão da vorticidade.

De acordo com o algoritmo de separação da parte viscosa, a difusão da vorticidade é governada pela equação (17), a equação da difusão, que é transcrita abaixo.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (17)$$

Vários são os algoritmos numéricos que podem ser utilizados para se obter a solução desta equação. Descreve-se, a seguir, os três mais comumente utilizados.

6.3.3.1. Crescimento do núcleo do vórtice.

Este algoritmo foi bastante utilizado por Kamemoto et al. (1990), Araújo e Hirata (1993) e Araújo and Hirata (1993); nestes trabalhos uma nuvem de vórtices de Rankine foi o modelo utilizado para simular a vorticidade.

Embora Greengard (1985) argumente que a solução obtida com o algoritmo que utiliza a variação do núcleo para simular a difusão não apresente uma convergência para a solução das equações de N-S, os resultados numéricos obtidos são bastante satisfatórios. No entanto, Rossi (1996) propõe, basicamente, um limite máximo de crescimento que, uma vez alcançado, induz uma fissão com a conservação da circulação e de momentos linear e angular. Com esta modificação a solução obtida com o novo esquema proposto converge para a solução das equações de N-S.

A idéia básica para simular a difusão da vorticidade consiste em assumir que os efeitos da viscosidade encontram-se restritos ao núcleo dos vórtices livres; o fenômeno da difusão atua modificando o raio do núcleo.

Seja $\sigma_o(0)$ o raio do núcleo no instante $t = 0$. No instante $t = \alpha * \Delta t$, (onde α = número de incrementos de tempo Δt) o raio (adimensionalizado) do núcleo é calculado utilizando-se a expressão abaixo, na qual c assume o valor constante $c = 2.2418$.

$$\sigma_o(\alpha) = \sigma_o(0) + \alpha \left[\frac{c}{2} \sqrt{\frac{\alpha \Delta t}{Re}} \right] \quad (29)$$

Esta expressão pode ser obtida a partir das equações básicas que governam a difusão da vorticidade quando se tem um único vórtice de Lamb numa região fluida infinita (Panton, 1984). De fato, assumindo-se que $\sigma_o(t) = 2R_{max}$ tem-se aproximadamente que:

$$\sigma_o(t) \cong 2 * 2.2418 \sqrt{\frac{t}{Re}}$$

e, conseqüentemente

$$d\sigma_o = \frac{c}{\sqrt{Re}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_o}{t} dt$$

A utilização destas expressões permite obter-se, imediatamente a, a expressão (29) que governa a variação do núcleo com o tempo.

Cabe mencionar que, com a utilização deste procedimento para simular a difusão da vorticidade, o avanço de cada vórtice ao final de um incremento de tempo continua sendo calculado pela equação (27) ou pela equação (28), se um avanço de segunda ordem em Δt for desejado. O raio do núcleo continua sendo definido pela expressão (29).

6.3.3.2. O método de avanço randômico.

O Método de Avanço Randômico é, provavelmente, o mais utilizado para simular a difusão da vorticidade quando se utiliza o Método de Vórtices. Ele foi muito empregado por Lewis (1991) e, mostra-se particularmente útil quando o número de Reynolds assume valores elevados (Mustto et al., 1997), (Mustto et al., 1998) e (Alcântara Pereira, et al., 1999).

O Método de Avanço Randômico, utilizado para simular o processo de difusão da vorticidade, consiste em se impor, a cada vórtice da nuvem, um deslocamento difusivo em adição ao deslocamento convectivo.

Este procedimento foi desenvolvido por Chorin (1973), em analogia aos deslocamentos randômicos que ocorrem em moléculas e que foram estudados por Einstein (1956). De maneira independente, Porthouse and Lewis (1981), analisando a difusão da vorticidade desenvolveram um algoritmo equivalente ao de Chorin. Segundo este algoritmo, para cada incremento de tempo, cada vórtice deve sofrer um deslocamento randômico $\zeta = (\xi, \eta)$, com as componentes definidas como:

- na direção x $\rightarrow \xi(t) = (\Delta r) \cdot \cos \theta$
- na direção y $\rightarrow \eta(t) = (\Delta r) \cdot \sin \theta$

(30)

Nestas expressões Δr e θ são calculados da seguinte forma

$$\Delta r = \sqrt{\frac{8\Delta t}{Re} \ln(1/P)} \quad e \quad \theta = 2\pi Q$$

onde os números randômicos P e Q são definidos no intervalo 0 a 1, i.é.:

$$0 < P < 1 \quad e \quad 0 < Q < 1.$$

Assim sendo, se a fórmula de Euler ou a de Adams Bashforth for utilizada para simular o avanço convectivo, tem-se respectivamente

$$\mathbf{x}_p(t + \Delta t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p(t), t) * \Delta t + \zeta_p(t) \quad (31A)$$

$$\mathbf{x}_p(t + \Delta t) = \mathbf{x}_p(t) + [1.5 \mathbf{u}_p(t) - 0.5 \mathbf{u}_p(t - \Delta t)] \Delta t + \zeta_p(t) \quad (31B)$$

Cabe observar que a técnica do avanço randômico se aplica a simulação da difusão de qualquer grandeza (alem da vorticidade) cuja evolução seja governada pela equação (17). Ghoniem and Sherman (1985), observando a relação existente entre a densidade de probabilidade de uma distribuição Gaussiana e a função de Green da equação de difusão, mostram que a solução desta equação representa a distribuição da função erro e que a sua vazão (fluxo) é representada pela distribuição Gaussiana. Desta maneira desenvolvem um algoritmo capaz de simular a evolução da grandeza que é representada por uma nuvem de partículas. Hirata e Hirata (1998) e Alcântara Pereira e Hirata (2003) aplicaram a técnica para analisar alguns casos simples de difusão de calor.

6.3.3.3.O Método da velocidade de difusão

Este método foi proposto por Ogami and Akamatsu (1991). Eles empregaram o método para simular vários tipos de situações, incluindo escoamentos com números de Reynolds muito baixos. O método utiliza vórtices livres com núcleos de raio constante.

Kempka and Strickland (1993) argumentam, no entanto, que o método não simula completamente o fenômeno, se o núcleo possuir divergência nula, isto é, se possuírem um raio constante. Shintani and Akamatsu (1994), apresentam um algoritmo aproximado para o cálculo da expansão do núcleo.

Como o próprio nome diz, o método define uma velocidade de difusão, \mathbf{u}_d , a qual deve ser somada a velocidade de convecção - veja equação (20). Para se definir a velocidade de difusão é mais conveniente partir da equação do transporte de vorticidade

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega$$

Com o auxílio da equação da continuidade, esta equação é colocada numa forma mais conveniente

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \omega \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mathbf{v} - \frac{1}{\text{Re} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \omega \right] = 0$$

Esta expressão mostra claramente que a velocidade de transporte da vorticidade possui as seguintes componentes:

$$\left(\mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \left(\mathbf{v} - \frac{1}{\text{Re} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)$$

respectivamente, nas direções x e y.

Como u e v correspondem as componentes da velocidade de convecção, fica claro que a velocidade de difusão - \mathbf{u}_d - possui as seguintes componentes:

$$\mathbf{u}_d = - \frac{1}{\text{Re} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_d = - \frac{1}{\text{Re} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (32)$$

Para o cálculo de \mathbf{u}_d e \mathbf{v}_d , utilizando as expressões acima, torna-se necessário conhecer, de alguma maneira o campo de vorticidade. Como a vorticidade é simulada com a utilização de uma nuvem de vórtices livres, fica claro a necessidade de se definir o tipo de vórtice livre utilizado.

Assim, por exemplo, um vórtice de Lamb de intensidade Γ_q , cuja posição é definida por r_q , possui uma distribuição da vorticidade expressa por:

$$\omega(r, r_q, t) = \frac{\Gamma_q}{\pi \sigma^2} \exp \left(- \frac{(r - r_q)^2}{\sigma^2} \right)$$

A vorticidade na posição do vórtice p, é composta pela contribuição de todos os NV vórtices da nuvem

$$\omega_p = \frac{1}{\pi \sigma^2} \sum_q \Gamma_q \exp \left[- \frac{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}{\sigma^2} \right]$$

Com esta informação, as expressões (32) são utilizadas para calcular as componentes da velocidade de difusão

$$u_d = \frac{2}{Re \omega_p \pi \sigma^4} \sum_q \Gamma_q (x_p - x_q) \exp \left[-\frac{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}{\sigma^2} \right]$$

$$v_d = \frac{2}{Re \omega_p \pi \sigma^4} \sum_q \Gamma_q (y_p - y_q) \exp \left[-\frac{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}{\sigma^2} \right]$$
(33)

O avanço convectivo continua sendo calculado com a utilização das expressões (27), ou (28). Estas expressões, no entanto, devem ser apropriadamente modificadas com a inclusão da velocidade de difusão. Se a fórmula de Euler, equação (27), for utilizada, resulta:

$$\mathbf{x}_p(t + \Delta t) = \mathbf{x}_p(t) + [\mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t), t) + \mathbf{u}_d(\mathbf{x}_p(t), t)] * \Delta t$$
(34A)

Por outro lado, se um avanço de segunda ordem for desejado, a fórmula de Adams Bashforth, equação (28), deve ser utilizada e, após a inclusão da velocidade de difusão, resulta:

$$\mathbf{x}_p(t + \Delta t) = \mathbf{x}_p(t) + \{1.5 * [\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_d(t)] - 0.5 * [\mathbf{u}_p(t - \Delta t) + \mathbf{u}_d(t - \Delta t)]\} * \Delta t$$
(34B)

6.3.4. Geração da vorticidade

Nas partes III.3 e III.4 tratou-se do desenvolvimento da vorticidade, o que é feito com a utilização de uma nuvem de vórtices discretos que são submetidos aos processos de convecção e de difusão. Nos procedimentos tratados, assumiu-se tacitamente que a intensidade dos vórtices livres era conhecida, assim como a sua posição inicial. Nesta parte estes dois aspectos são analisados.

Com esta finalidade, deve-se observar, inicialmente, que a equação de N-S em duas dimensões pode ser escrita como:

$$\frac{D\mathbf{u}^*}{Dt^*} + \frac{1}{\rho p} \nabla p^* = -\nu [\nabla^* \times \omega^*]$$

OBS: a apresentação desta parte se faz sem a adimensionalização das equações;

por esta razão acrescenta-se um asterisco sobre as variáveis.

Supondo, em seguida, que o escoamento realiza-se no semiplano superior, o eixo real representa uma superfície onde a condição de aderência deve ser especificada. A utilização desta condição na equação acima fornece a expressão

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = -\mu \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \quad \text{em } y = 0$$
(33)

O LD (lado direito) pode ser interpretado como sendo o fluxo de vorticidade através do eixo real que coincide com a superfície. Logo, conclui-se que: se o gradiente de pressão é favorável haverá uma geração de vorticidade, já que o fluxo passa a ser positivo. Haverá uma geração negativa (aniquilamento) se o gradiente for desfavorável, ou seja, quando o escoamento é desacelerado.

Necessita-se, agora, quantificar de maneira apropriada a vorticidade criada na superfície sólida, normalmente a superfície do corpo. Para se desenvolver um algoritmo com esta finalidade é necessário entender o mecanismo de geração da vorticidade.

Considere, então, por um breve intervalo de tempo, a ação da convecção que desloca a vorticidade presente no fluido e, em especial perto de uma superfície; resulta numa nova distribuição da vorticidade a qual irá induzir um campo de velocidades ligeiramente diferente daquele anteriormente existente. Obviamente, a condição de escorregamento nulo será violada, induzindo-se uma velocidade tangencial - u_{τ}^* -. Para que isto não aconteça (afinal a condição de contorno deve ser obedecida) o escoamento desenvolve uma superfície de vorticidade, junto a superfície, cuja densidade é o suficiente para anular esta velocidade tangencial.

Para completar o quadro, deve-se observar que a vorticidade gerada na superfície do corpo é, inicialmente, difundida para o interior do fluido (o fluido encontra-se parada relativamente ao corpo) para, em seguida ser advectado; o resultado destes dois mecanismos é o que se conhece como convecção da vorticidade.

A implementação numérica destas idéias é feita de maneira discreta e, para isto, vários algoritmos podem ser desenvolvidos – veja Kamemoto (1994).

Uma alternativa de simples implementação consiste na geração de vórtices nascentes nas vizinhanças do corpo de modo a satisfazer a condição de escorregamento nulo; afinal, quando se calculou a componente da velocidade associada a perturbação induzida pelo corpo – u_c e v_c – a única condição exigida foi a de impenetrabilidade.

Duas questões se colocam: qual é a intensidade de cada vórtice nascente e onde eles devem ser posicionados? Torna-se cada vez mais claro que estas questões devem ser respondidas considerando os aspectos já analisados da convecção e difusão da vorticidade.

Considere, inicialmente a superfície do corpo sendo simulada com a utilização de NP painéis, sobre os quais se distribui fontes. Neste caso, a densidade da distribuição de fontes sobre cada painel é determinada com a imposição da condição de impenetrabilidade (condição de Neumann), Silva (2004). Nada se pode dizer sobre a componente tangencial da velocidade que, normalmente não se anula – veja discussão acima. Desta maneira, os vórtices nascentes representam a única alternativa para se anular a velocidade u_{τ}^* que, na implementação numérica é calculada no ponto de controle de cada painel; este procedimento é equivalente a satisfação da condição de escorregamento nulo e elucida a questão, colocada acima, sobre a intensidade dos vórtices nascentes.

A simulação numérica do processo de difusão junto à superfície do corpo pode apresentar alguns problemas; desta maneira, posicionam-se os vórtices nascentes sobre retas que passam pelos pontos de controle dos painéis e que sejam normais a eles. A distância - ε - sobre as retas, a partir do ponto de controle deve ser calculada levando-se em conta o processo de difusão da vorticidade junto das paredes; desta maneira, este deslocamento inicial dos vórtices nascentes que simula a difusão é denominado de difusão primária. É comum adotar-se este deslocamento como sendo igual ao raio do núcleo do vórtice - $\varepsilon = \sigma_0$ -, isto é, a núcleo do vórtice tangencia o painel no seu ponto de controle.

Uma alternativa à utilização de painéis de fontes para simular a superfície dos corpos, consiste em substituir a distribuição de fontes por uma distribuição de vórtices sobre os painéis. Esta alternativa utiliza basicamente as mesmas idéias e apresenta uma implementação mais fácil do processo de geração dos vórtices nascentes (Alcântara Pereira, 1999). Como anteriormente, cada vórtice livre, dos NP gerados a cada incremento de tempo, é posicionado a uma distância finita, ε , de cada ponto de controle dos painéis. O cálculo da intensidade destes vórtices nascentes é efetuado integrando a densidade de vorticidade sobre o respectivo painel

Se o Teorema de Círculo for utilizado, o mecanismo de geração é muito semelhante ao utilizado com os painéis de fontes. Vórtices nascentes são posicionados a uma distância finita, ε , da superfície do cilindro. As intensidades dos vórtices nascentes, num dado instante, são calculadas simultaneamente, impondo-se a condição de escorregamento nulo em NP posições sobre a circunferência.

Uma simplificação ainda maior pode ser utilizada conhecendo-se a posição do ponto de separação, como acontece quando o corpo possui arestas vivas. Nestes casos, os vórtices discretos são gerados apenas nestes pontos; resulta, como consequência, uma aproximação menos precisa (Lewis, 1991) e (Araújo and Hirata, 1993). Esta alternativa revela-se bastante econômica em termos computacionais. O preço desta simplicidade, como se pode perceber, é a incapacidade do método em simular os desenvolvimentos que ocorrem no interior da camada limite.

6.3.5. Conservação da vorticidade

Em um dado incremento de tempo, Δt , após simular os mecanismos de convecção e de difusão, alguns vórtices discretos podem migrar para o interior do corpo. Algumas alternativas existem para contornar este problema não desejável, porém inevitável num esquema numérico que utiliza avanços discretos.

Uma primeira alternativa consiste na reflexão dos vórtices de volta ao escoamento. Outra alternativa utiliza uma camada protetora próxima a superfície do corpo que, em princípio, evitaria que os vórtices ultrapassem a superfície do corpo.

A terceira alternativa, adotada por Mustto (1998) e Alcântara Pereira (1999) consiste na eliminação dos vórtices discretos que migram para o interior do corpo; a eliminação é mais utilizada na literatura, porque pode ser interpretada como um modelo ao processo de destruição de vorticidade, que ocorre nas regiões de gradiente de pressão adverso da superfície de um corpo presente em um escoamento real (Chorin, 1973).

Qualquer que seja o esquema adotado, o princípio de conservação da circulação não pode ser violado. A circulação, calculada ao longo de uma linha que pode ser coincidente com os limites da região fluida em consideração, deve manter-se inalterada. Assim sendo, os vórtices que migram para o exterior da região fluida, isto é, que migram para o interior do corpo ou ultrapassam os limites externos (se existirem) carregam consigo alguma vorticidade que deve ser compensada; o mecanismo utilizado para tal reside na criação da vorticidade na superfície do corpo. Assim sendo, o balanço da vorticidade na região fluida deve ser nulo durante toda a simulação numérica.

6.4. O método de vórtices com modelagem de turbulência

Tendo apresentado os fundamentos do Método de Vórtices, o desenvolvimento de um algoritmo para incluir a modelagem de turbulência torna-se relativamente fácil.

De fato, seja a Eq.(10), abaixo transcrita

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} [(v + v_t) \bar{S}_{ij}] \quad (10)$$

Verifica-se que o Método de Vórtices como apresentado na parte III e que foi desenvolvido a partir da Eq. (14), também apresentada a seguir, permite simular os fenômenos que ocorrem nas grandes escalas.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (14)$$

A diferença marcante que existe entre as duas equações reside na modelagem da turbulência – veja parte II: Formulação do Problema – que resulta na inclusão de um termo extra na Eq. (10) que denominaremos de viscosidade turbulenta $-v_t$ – para diferenciá-la da viscosidade molecular $-v$. A modelagem da turbulência, como já mencionado, permite simular os fenômenos que ocorrem nas menores escalas que não são considerados na formulação apresentada na parte III.

6.4.1. O algoritmo proposto.

A inclusão da viscosidade turbulenta permite que se defina o número de Reynolds Modificado, em adição ao já definido número de Reynolds Molecular, Alcântara Pereira et al (2002), Alcântara Pereira et al (2003) e Mustto (2004).

$$Re_c = \frac{Ub}{\nu + \nu_t} \quad \text{Número de Reynolds Modificado} \quad (34A)$$

$$Re = \frac{Ub}{\nu} \quad \text{Número de Reynolds} \quad (34B)$$

Desta maneira, o Método de Vórtices com Modelagem da Turbulência é desenvolvido a partir da equação:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (35)$$

Como consequência, o desenvolvimento da vorticidade passa a ser governado pela equação da vorticidade, que agora é escrita com a utilização de Re_c , isto é (compare esta equação com a Eq.(15)).

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \omega \quad (36)$$

Pela semelhança entre as duas equações (15) e (36), os desenvolvimentos do Método de Vórtices com Modelagem da Turbulência são análogos àqueles já apresentados na parte III.

Cabe notar que as grandezas presentes na Eq. (35) e Eq. (36) representam valores médios e que a barra utilizada acima destas grandezas foram omitidas para facilitar a apresentação.

Assim sendo, de acordo com o Algoritmo da Separação da Parte Viscosa, num dado incremento de tempo da simulação numérica, a convecção da vorticidade é governada pela equação

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (37)$$

enquanto que a equação

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \omega \quad (38)$$

passa a governar o processo de difusão da vorticidade.

A apresentação sobre a convecção da vorticidade, feita no item III.2, transfere-se quase que integralmente, exceção feita ao cálculo do raio do núcleo dos vórtices que deve ser feito com a utilização de Re_c ; veja os diferentes modelos de vórtices pontuais livres apresentados.

$$\sigma_{om} = 6.3408 \sqrt{\frac{\Delta t}{Re_c}} \quad (39)$$

Na apresentação dos processos de difusão da vorticidade, feita no item III.3, várias foram as observações feitas a respeito das diferentes alternativas para simular o processo. Naquela ocasião, uma certa preferência foi manifestada em favor da utilização do Método de Avanço Randômico porque ele se mostrava mais adequado para a simulação do escoamento com número de Reynolds elevados.

Nos fenômenos em que a turbulência se faz presente esta grandeza costuma assumir, também, valores elevados e, assim sendo, é conveniente utilizar o Método de Avanço Randômico para simular a difusão da vorticidade; as expressões para o cálculo do avanço randômico devem utilizar o Número de Reynolds Modificado

$$\text{na direção } x \rightarrow \xi(t) = (\Delta r) \cdot \cos \theta \quad (40)$$

$$\text{na direção } y \rightarrow \eta(t) = (\Delta r) \cdot \sin \theta$$

$$\text{onde } \Delta r = \sqrt{\frac{8\Delta t}{Re_c} \ln(1/P)} \quad \text{e} \quad \theta = 2\pi Q$$

Neste ponto, é oportuna uma análise do algoritmo proposto. Enquanto que o Método do Avanço Randômico simula o processo de difusão molecular da vorticidade, a difusão turbulenta desta grandeza é governada primariamente pelo crescimento do raio do núcleo dos vórtices livres embora esteja presente, também, no cálculo do avanço randômico, Alcântara Pereira, et. Al (2004).

Os demais procedimentos do Método de Vórtices, como apresentado na parte III, são transportados analogamente para o novo algoritmo, tomando-se o cuidado de substituir o Re por Re_c .

6.4.2. A modelagem da turbulência

De acordo com a proposta de Lessier e Metais, 1996, os fenômenos que se manifestam nas micro escalas podem ser considerados com a utilização da viscosidade turbulenta, ν_t ; esta é definida pela Eq. (12). Esta definição depende de uma função estrutura da velocidade, $\overline{F_2}$, definida pela Eq. (11).

O cálculo da função estrutura da velocidade, como proposto por Lessier e Metais deve ser feito considerando a velocidade em pontos situados sobre a superfície de uma esfera.

Na presente implementação, duas adaptações se fazem necessárias. A primeira é imposta pelo fato de que os problemas aqui tratados são bidimensionais. Assim sendo, os pontos sobre os quais as velocidades são calculadas devem situar-se sobre uma circunferência.

Este fato, porém, introduz uma carga computacional excessiva, já vez que estas velocidades são calculadas a cada instante, nas vizinhanças de cada vórtice da nuvem.

Pode-se observar, no entanto, dois aspectos que se fazem presentes na implementação numérica do Método de Vórtices e que permitem contornar esta dificuldade:

- a cada instante, a velocidade na posição ocupada por cada vórtice da nuvem está disponível
- um vórtice da nuvem encontra-se cercado de inúmeros outros vórtices que se posicionam na sua vizinhança

Estes aspectos levam a segunda adaptação, de ordem prática, na implementação do cálculo da função estrutura de velocidade: os pontos onde as velocidades devem ser calculadas devem coincidir com a posição dos vórtices que se encontram na vizinhança do vórtice considerado; as posições destes vórtices certamente não pertencem a circunferência mencionada (quando se formulou a adaptação que trata da migração do espaço tridimensional para o bidimensional)

Propõe-se utilizar a velocidade nos pontos ocupados pelos vórtices que, no referido instante, localizam-se num anel definido pelos raios interno – R_i – e externo – R_e . Estes raios são definidos como:

$$Ri = f_1 \sigma_{om}$$

$$Re = f_2 \sigma_{om}$$

onde f_1 e f_2 assumem valores pré-determinados. Em geral, assume-se que

$$f_1 = 0.90 \quad e \quad f_2 = 2.00$$

As posições dos vórtices no interior da coroa variam aleatoriamente, não pertencendo portanto a uma circunferência de centro na posição ocupado pelo vórtice em consideração. Como a função estrutura de velocidade é calculada com os valores da velocidade nos pontos ocupados por estes vórtices há a necessidade de se corrigir a expressão (11) de maneira apropriada, o que é feito como:

$$\overline{F_2} = \frac{1}{NV} \sum_{i=1}^{NV} \|\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_t(\mathbf{x} + \mathbf{r}_i)\|_i^2 \left(\frac{\sigma_{om}}{r_i} \right)^{2/3} \quad (41)$$

onde

$$\|\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_t(\mathbf{x} + \mathbf{r}_i)\|_i^2 = [u_t(\mathbf{x}) - u_t(\mathbf{x} + \mathbf{r}_i)]^2 + [v_t(\mathbf{x}) - v_t(\mathbf{x} + \mathbf{r}_i)]^2$$

Na expressão (41), NV indica o número de vórtices presentes no anel e r_i exprime a distância entre o vórtice em consideração e os pontos do anel, onde as velocidades são calculadas.

Num dado instante de tempo, tendo calculado a função estrutura de velocidade para cada vórtice da nuvem, ela é utilizada para se determinar a viscosidade turbulenta, expressão (12). Esta por sua vez permite o cálculo do número de Reynolds modificado, expressão (34).

Na implementação numérica estes procedimentos são utilizados simultaneamente àqueles referentes ao Método de Vórtice.

6.4.3. Aplicação da modelagem da turbulência

Existem regiões da camada limite e da esteira onde as atividades que caracterizam a turbulência são mínimas e, fisicamente, não se justifica a utilização da modelagem da turbulência.

Este fato é levado em consideração na utilização da modelagem, quando se efetua a simulação numérica. Para isto considera-se que a modelagem da turbulência só se justifica se a densidade de vórtices assumir um valor maior do que um mínimo imposto, na coroa; afinal o valor da função estrutura de velocidade só faz sentido, estatisticamente falando, se houver um número mínimo de valores para o seu cálculo. Mustto (2004) apresenta uma análise exaustiva para a determinação da densidade mínima; apresenta também, análises relativas a outras grandezas utilizadas nas simulações numéricas.

6.5. Cargas aerodinâmicas

Nesta parte analisam-se as cargas aerodinâmicas que atuam sobre a superfície do corpo. A análise é restrita ao campo de pressões e as forças.

6.5.1. Forças de arrasto e de sustentação

As componentes da força aerodinâmica, força de arrasto - D - e força de sustentação - L -, podem ser calculadas integrando-se apropriadamente o campo de pressões sobre a superfície do corpo.

As fórmulas de Blasius, generalizadas para escoamentos dependentes do tempo, porém, permite o cálculo direto destas componentes. De fato, Graham (1980), fornece a expressão

$$D + iL = \rho C_m A \dot{U} - i\rho \sum_{p=1}^{NV} \frac{\partial(\Gamma_p z_p)}{\partial t}$$

onde A é uma área, \dot{U} é a derivada temporal de U e C_m o coeficiente de massa adicional; geralmente $\dot{U} = 0$.

Com relação a esta expressão é importante observar que NV indica o número total de vórtices discretos; no caso de se utilizar o Teorema do Círculo NV inclui os vórtices presentes na esteira e suas imagens (Mustto, 1998). Lembrando-se que Γ_p não varia com o tempo, a expressão acima pode ser desenvolvida um pouco mais, resultando:

$$D + iL = -i\rho \sum_{p=1}^{NV} \Gamma_p (u_p + iv_p) \quad (42A)$$

onde, evidentemente, u_p e v_p representam as componentes da velocidade na posição ocupada pelo vórtice de intensidade Γ_p . Em termos adimensionais esta expressão é escrita como:

$$C_D + iC_L = 2 \sum_{p=1}^{NV} \Gamma_p (v_p - iu_p) \quad (42B)$$

Como observação final, cabe mencionar a grande semelhança que existe entre as expressões (42) e a conhecida lei de Kutta para o cálculo da força de sustentação.

6.5. 2. A separação do campo de pressões.

Com argumentos análogos àqueles utilizados na separação dos processos de convecção e de difusão, pode-se separar o termo de pressão escrevendo-se, Lewis, 1991:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t^*}$$

Considerando que, em geral, deseja-se calcular o campo de pressões sobre uma superfície onde se especifica a condição de escorregamento nulo, tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{\partial \gamma^*(s)}{\partial t^*}$$

Tendo em vista a implementação numérica da expressão, ela é representada na forma alternativa

$$\Delta p^* = -\rho \frac{\gamma \Delta s^*}{\Delta t^*} = -\rho \frac{\Delta \Gamma^*}{\Delta t^*}$$

cuja integração fornece

$$p^*(s^*) = p_o^* - \frac{\rho}{\Delta t^*} \sum \Delta \Gamma^*$$

e que, na forma adimensionalizada se escreve

$$p = p_o - \frac{2}{\Delta t} \sum \Delta \Gamma \quad (43)$$

Nestas expressões p_o representa a pressão de referência.

6.5.3. O calculo do campo de pressões

Embora se possa utilizar os resultados do item anterior para se calcular o campo de pressões, a implementação numérica dos procedimentos necessários apresenta certa dificuldade no estabelecimento da pressão de referência; esta é normalmente tomada como a pressão de estagnação. Além desta dificuldade, a experiência mostra que os resultados obtidos com a integração do campo de pressões (forças de arrasto e de sustentação) assim calculado apresenta um nível de ruído muito alto.

Como alternativa mais interessante para o cálculo da pressão, adota-se o esquema proposto por Shintani & Akamatsu (1994). Para isto a identidade vetorial

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

é utilizada na equação de Navier Stokes. Em seguida, utilizando a função de Bernoulli, Uhlman

$$Y = \left(p + \frac{u^2}{2} \right)$$

resulta

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla Y + \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \mathbf{u}$$

Tomando-se o divergente desta equação, obtém-se

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = -\nabla^2 Y + \frac{1}{Re_c} \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u}$$

que é reduzida para

$$\nabla^2 Y = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (44)$$

com se os efeitos da compressibilidade puderem ser desprezados. A solução desta equação de Poisson tem que ser obtida, normalmente com a utilização de uma formulação integral, para cada geometria estudada, Ricci (2002), Alcântara Pereira et al, (2004) e ela permite calcular o coeficiente de pressão através da relação:

$$C_p = 2\bar{Y} - u^2 + 1 \quad (45)$$

onde $\bar{Y} = Y - Y_\infty$ e $u = 0$ nas superfícies sólidas (condição de aderência)

6.6. Resultados de algumas situações analisadas.

O Método de Vórtices tem sido utilizado com sucesso na análise de várias situações. Apresentam-se, a seguir, resultados obtidos com a análise de algumas destas situações.

6.6.1. escoamento ao redor de um cilindro de seção circular

O escoamento ao redor de um cilindro de seção circular representa situação ideal para ser analisada com a utilização do Método de Vórtices. Esta é uma situação de grande interesse prático e que se encontra bem documentada na literatura. Além destes fatos, o escoamento ao redor de um cilindro circular apresenta dois aspectos importantes para a análise do desempenho da metodologia:

- o cilindro de seção circular é um corpo rombudo sem arestas vivas e, como consequência, a sua camada limite apresenta um comportamento complexo e a sua esteira é generosa, características adequadas para simulações que utilizam uma descrição lagrangiana como o Método de Vórtices.
- por outro lado, a forma particular do cilindro circular permite a utilização de ferramentas bastante específicas e precisas como o Teorema do Círculo.

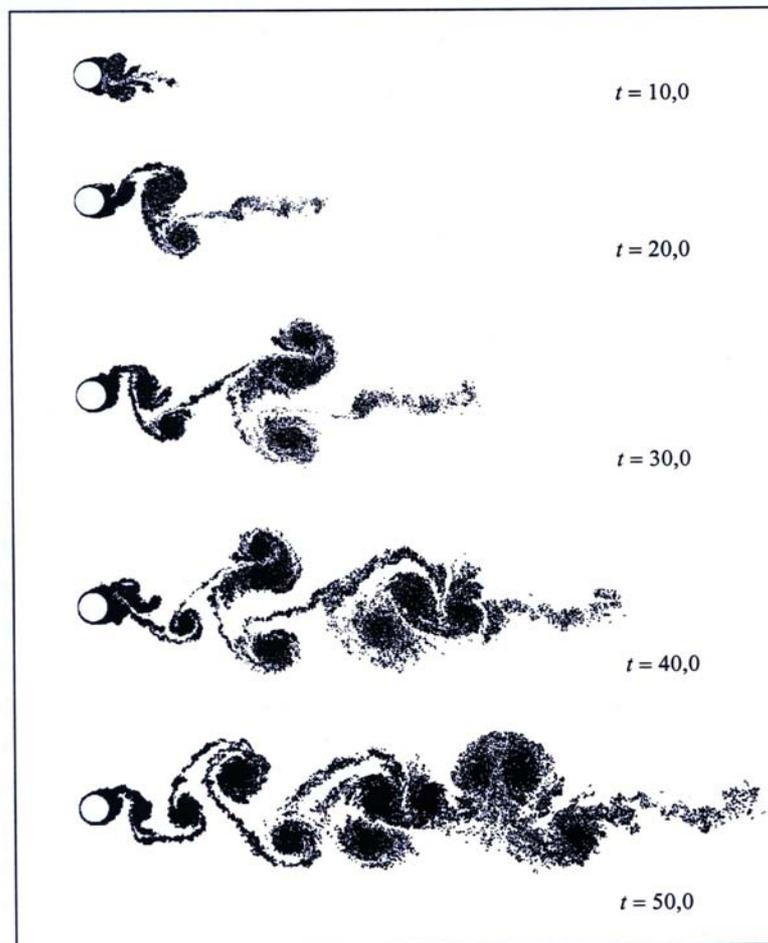


Figura 7. Evolução da esteira de vórtices, $Re = 10^5$

Mustto analisou exaustivamente o escoamento ao redor de um cilindro de seção circular explorando ao máximo o fato de ter uma geometria particular com a utilização do mencionado teorema; os resultados aqui apresentados são de Mustto (2004), exceto onde explicitamente mencionado.

A Fig. 7 mostra a evolução da esteira de vórtices durante uma simulação numérica; para tempo suficientemente longo da simulação ($t > 40$) já se pode observar claramente a formação de grandes estruturas vorticosas que se alternam formando a conhecida esteira de Von Karman.

Os instantes iniciais da simulação, para $Re = 10^5$ são detalhados na Fig. 8 onde se observa o processo de formação dos vórtices a jusante do corpo e para $t = 6.0$ já se pode notar que uma das estruturas começa a se desprender.

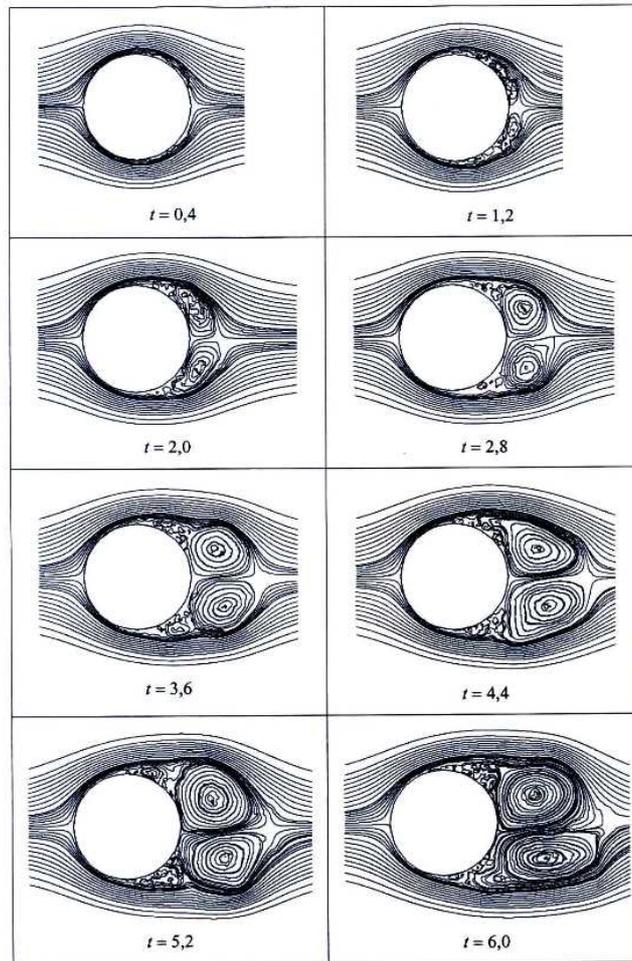


Figura 8. Linhas de corrente para diferentes instantes iniciais da simulação, $Re = 10^5$

A Fig 9, obtida por Alcântara Pereira (2000), mostra a distribuição da vorticidade na esteira, também, para $Re = 10^5$. Estes resultados foram obtidos utilizando o Método dos Painéis (painéis de vórtices com densidade constante).

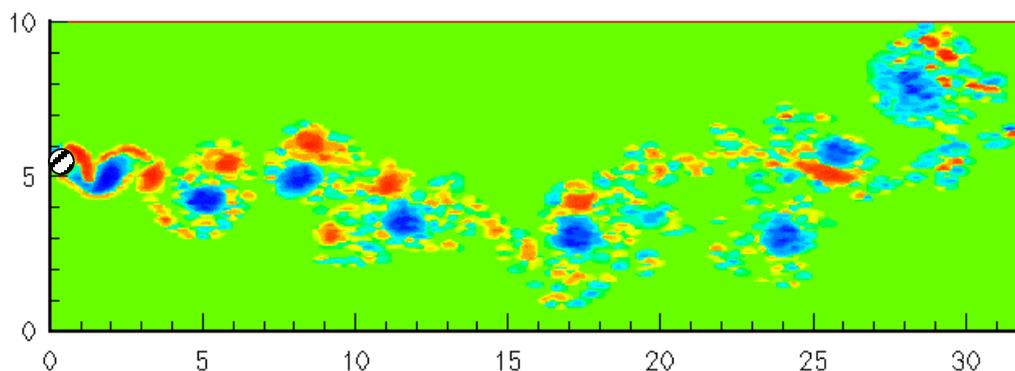


Figura 9. Distribuição da vorticidade na esteira

A distribuição de pressão na superfície do cilindro é mostrada na Fig 10, obtida do trabalho de Silva (2004). Para a simulação numérica do cilindro foi utilizado o Método de Painéis (painéis sobre os quais se distribuiu fontes com densidade constante). O cálculo da pressão foi efetuado utilizando a formulação integral apresentada no item IV.3, Eq. 45. Nesta figura observa-se uma boa concordância dos resultados numéricos com aqueles obtidos experimentalmente. Os resultados numéricos, porém, não conseguem acompanhar a curva experimental nas regiões vizinhas ao ângulo de 70° .

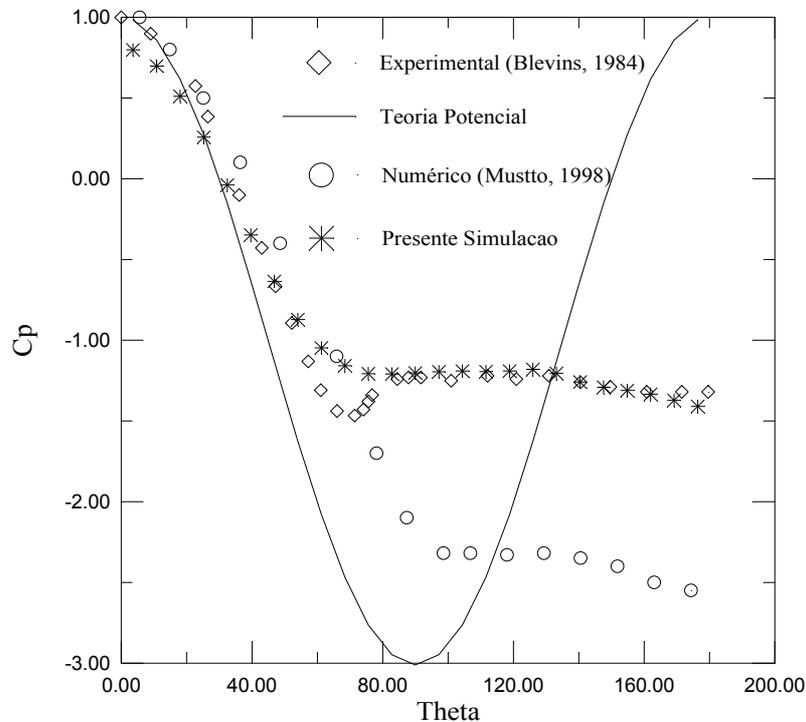


Figura 10. Coeficiente de pressão na superfície do cilindro

A evolução dos coeficientes de arrasto e sustentação durante a simulação numérica é ilustrada na Fig. 11. A figura apresentam superpostos os resultados obtidos através da integração da pressão e aqueles calculados com a utilização das Fórmulas de Blassius generalizadas, Eq. (42B).

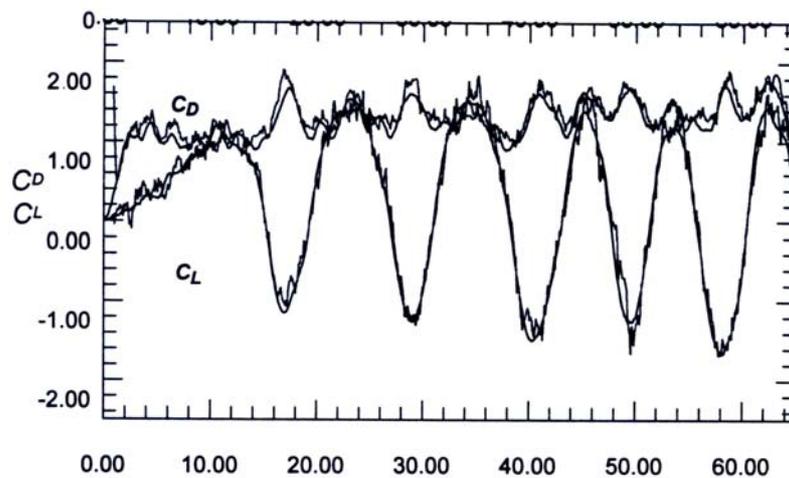


Figura 11. Comparação do comportamento de C_L e C_D : Cálculos efetuados integrando se a distribuição de pressão e utilizando as fórmulas de Blasius

Pode-se notar uma boa concordância dos resultados e se observa claramente que os resultados obtidos pela integração da pressão apresentam-se com bastante ruídos; no caso a pressão foi calculada com a utilização da Eq. (43) ligeiramente modificada para incluir termos convectivos. Na figura verifica-se claramente que a curva de C_L , como era de se esperar, oscila em torno do valor nulo e que o valor médio de C_D é da ordem de 1.3.

6.6.2. Escoamento ao redor de um aerofólio naca 0012

Ao contrário do cilindro circular, um aerofólio de pequena espessura – o aerofólio NACA 0012 foi tomado como exemplo – apresenta uma esteira viscosa muito fina e não se observa a separação da camada limite se operando com pequenos ângulos de ataque.

A Fig. 12 mostra a esteira viscosa, num instante da simulação numérica do escoamento ao redor do aerofólio operando com um ângulo de ataque de 5° . A comparação com a esteira do cilindro circular mostra claramente que a esteira desta simulação, como era de se esperar é mais concentrada e de pequena espessura; aliás, este fato é confirmado analisando a Fig. 13 que mostra a distribuição da vorticidade sem uma alternância clara de valores das grandes estruturas vorticosas.

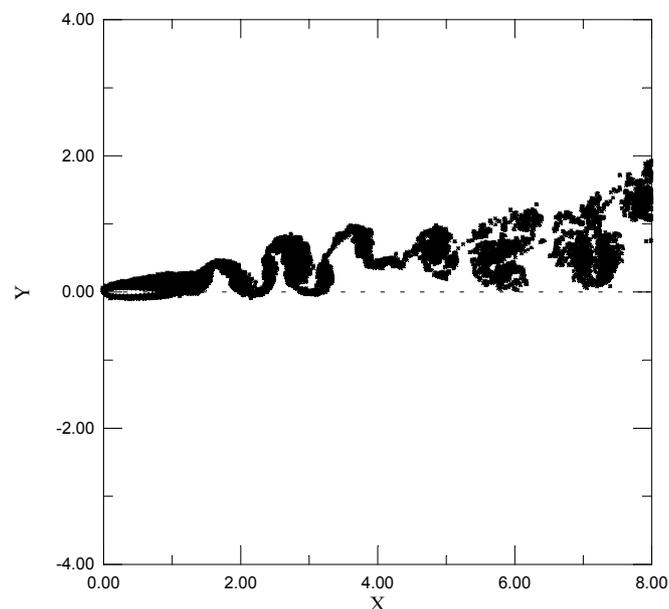


Figura 12. Esteira de um aerofólio NACA 0012, $Re = 10^6$ e $\alpha = 5^\circ$

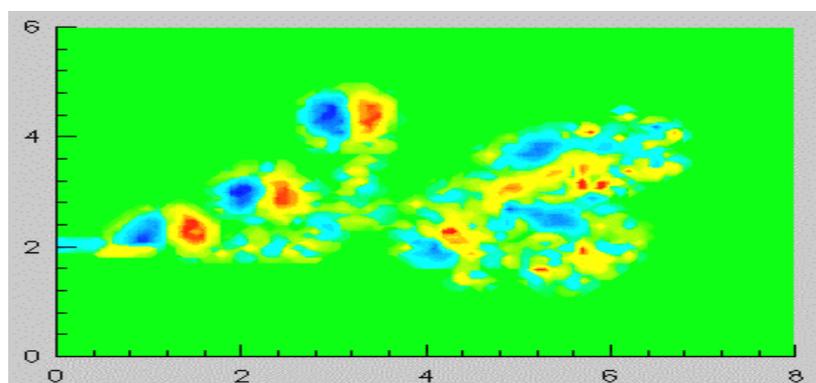


Figura 13 Distribuição da vorticidade na esteira de um aerofólio NACA 0012, $Re = 10^6$ e $\alpha = 5^\circ$

A Fig. 14 mostra a evolução dos coeficientes de arrasto e de sustentação durante a simulação numérica. Estes coeficientes foram calculados utilizando a integração numérica da pressão que, por sua vez foi obtida com a formulação integral apresentada no item IV.3, Eq. 45. Como era de se esperar o coeficiente de arrasto oscila nas vizinhanças do valor nulo; no entanto, os valores absolutos obtidos não são precisos porque no seu computo levou-se em consideração apenas o arrasto de forma. O valor médio do coeficiente de sustentação é da ordem de 0.66, quando o valor experimental obtido da literatura é de 0.54.

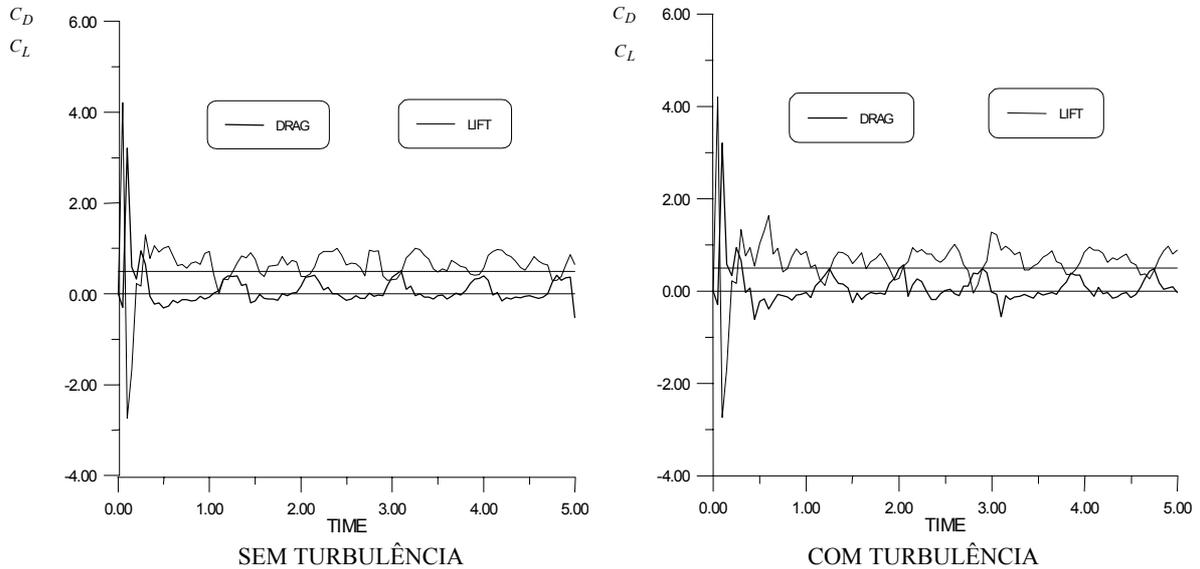


Figura 14 Coeficientes de arrasto e de sustentação de um aerofólio NACA 0012, $Re = 10^6$ e $\alpha = 5^\circ$

6.6.3. Escoamento ao redor de corpos de formas complexas

O escoamento ao redor ou através de corpos com geometria complexa (aqui vista como forma complexa ou múltiplos corpos) é de grande interesse para os problemas atuais da engenharia. O rotor de uma turbomáquina é tomado como um exemplo representativo deste tipo de escoamento.

A análise do escoamento através do rotor (sem considerar a influência da voluta) é, normalmente, realizada utilizando uma grade linear composta de infinitos aerofólios idênticos distribuídos equidistantemente, formando uma grade linear de passo constante. Como exemplo foi simulado o escoamento através de um grade formada por aerofólios NACA 65-410, como mostra a Fig. 15, Alcântara Pereira, et al (2004).

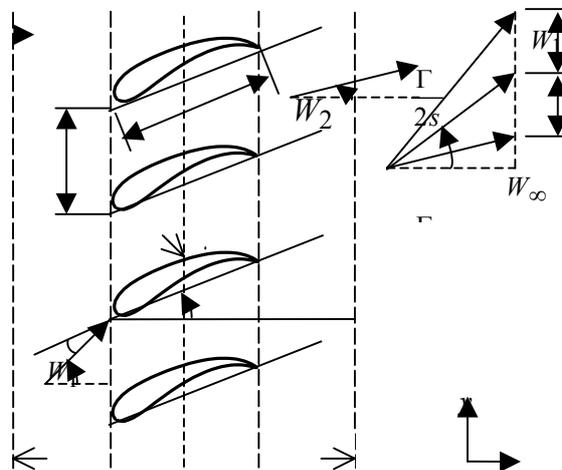


Figura 15 Escoamento através de uma grade linear (de turbomáquinas)

A simulação numérica foi realizada utilizando o Método de Painéis, com distribuição de vorticidade de densidade constante em cada painel. O cálculo da pressão foi realizado utilizando uma formulação integral análoga à apresentada no item IV.3, com as devidas modificações para levar em consideração a presença de corpos vizinhos

A Fig. 16 mostra a esteira instantânea, para três elementos da grade, no instante definido por $t = 10$ da simulação.

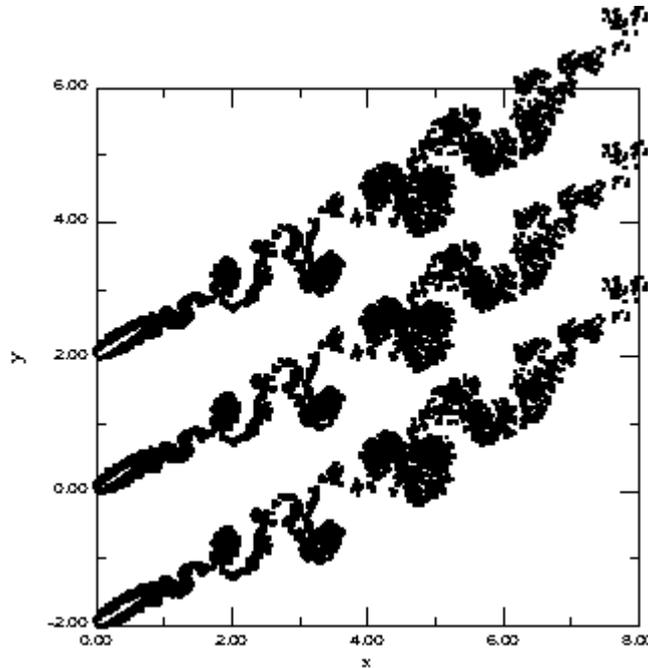


Figura 16 Esteira de três elementos de uma grade linear de aerofólios NACA 65-410

Para as mesmas condições, a distribuição de pressão sobre a superfície de um aerofólio foi calculada e é mostrada na Fig. 17. Como pode ser observado há uma boa concordância dos resultados calculados quando comparados com os dados experimentais. As discrepâncias aparecem nos bordos de fuga e de ataque, onde os resultados numéricos não conseguem acompanhar os picos elevados de pressão.

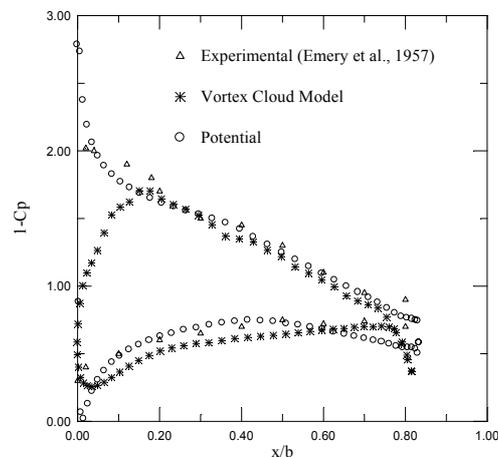


Figura 17 Distribuição de pressão na superfície de um aerofólio de uma grade linear
Aerofólio NACA 65-410, $Re = 4.45 \times 10^5$, $\beta = 33.60^\circ$ e $\beta_1 = 45.00^\circ$

Do ponto de vista de um projetista, no entanto, mais relevante do que a distribuição de pressão na superfície do aerofólio é o cálculo do ângulo de deflexão, definido como: $\theta = \beta_1 - \beta_2$. Este ângulo é plotado em função do ângulo de ataque na Fig. 18. A figura mostra os resultados usualmente obtidos com a utilização da Teoria Potencial e os resultados obtidos usando o Método de Vórtices; estes resultados são comparados com aqueles obtidos experimentalmente. Da análise dos resultados fica clara a importância da utilização do Método de Vórtices e principalmente da utilização do Método de Vórtices com Modelagem da Turbulência.

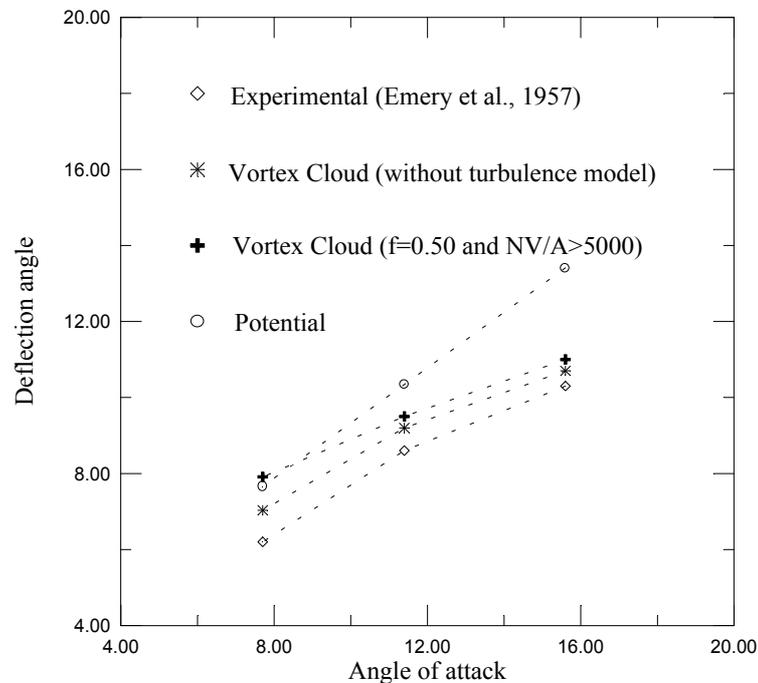


Figura 17 Ângulo de deflexão numa grade linear

Aerofólio NACA 65-410, $Re = 4.45 \times 10^5$, $\beta = 33.60^\circ$ e $\beta_1 = 45.00^\circ$

7. Conclusões

Os resultados apresentados referem-se a três situações bem distintas: o escoamento ao redor de um corpo rombudo, o escoamento ao redor de um corpo esbelto e finalmente o escoamento ao redor de um corpo com geometria complexa.

A análise destes resultados mostra claramente a importância do Método de Vórtices, especialmente quando utilizado com uma modelagem de turbulência. A modelagem apresentada já se mostra madura a ponto de produzir resultados confiáveis e importantes do ponto de vista da engenharia.

Há pontos, no entanto, merecem uma atenção mais cuidadosa; alguns destes pontos foram destacados e outros não foram explicitamente mencionados; entre eles merece destaque a necessidade da utilização de versões mais precisas do Método de Painéis, por exemplo, utilizando distribuições mais complexas de singularidades.

Tão importantes quanto estes aspectos que merecem uma atenção maior, são as enormes possibilidades de melhorias e avanços que podem ser incorporados para expandir a aplicabilidade dos procedimentos apresentados. Neste sentido pode-se mencionar:

- necessidade de incluir efeitos tridimensionais, uma vez que muitas manifestações da turbulência só podem ser analisadas completamente levando-se em conta estes aspectos.
- necessidade da análise comparativa de outras modelagens para simular os efeitos que se manifestam nas menores escalas.

- possibilidade de inclusão dos efeitos da rugosidade, uma vez implementada a modelagem de turbulência.

6.8. Agradecimentos

Desejo agradecer a organização da IV ESCOLA DE PRIMAVERA TRANSIÇÃO E TURBULÊNCIA pelo amável convite feito para a apresentação desta palestra. Este convite torna-se mais importante para mim, tendo em vista que, reconhecidamente, não sou um militante ativo da área. Desta maneira, espero ter dado alguma contribuição para os participantes deste evento e espero ter correspondido as expectativas da organização.

Como ficou claro da exposição do trabalho, os resultados apresentados foram obtidos por vários colegas; desejo agradecer-los por me permitir usar seus resultados como ilustração e, principalmente, pela possibilidade de ter com eles interagido durante todos estes anos. Um agradecimento especial devo ao Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira.

Finalmente quero dedicar este trabalho a Geni, que me incentiva nas horas difíceis e me compreende quando, por necessidade, me ausento por horas e dias seguidos. Sem seu apoio eu não estaria escrevendo esta palestra.

6.9. Referências

- ALCÂNTARA PEREIRA L.A.,1999, “Simulação Numérica do escoamento Em Torno de Um Corpo de Forma Arbitrária Utilizando o Método de Vórtices Discretos”. EFEI/IEM/DME, Itajubá, MG, BRASIL, Dissertação de Mestrado.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L.A., HIRATA, M.H. e OLIVEIRA, W., 1999, “Cálculo de Cargas Aerodinâmicas (Simulação Numérica Utilizando uma Nuvem de Vórtices)”. XIV COBEM, Águas de Lindóia, SP.
- ALCANTARA PEREIRA, L.A., HIRATA, M.H. e SILVEIRA NETO, A., 2000, “Simulação Numérica do escoamento de um Fluido Newtoniano Usando uma Nuvem de Vórtices e Modelagem Sub-Malha de Turbulência”, IV Simp. Mineiro de Mecânica Computacional, Uberlândia, MG.
- ALCÂNTARA PEREIRA L.A., RICCI J.E.R., HIRATA, M. H. and SILVEIRA NETO, A., 2002, “Simulation Of Vortex-Shedding Flow About A Circular Cylinder With Turbulence Modeling” - Computational Fluid Dynamics Journal, vol. 11, No. 3, pp 315-322.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L.A., HIRATA, M.H. and SILVEIRA NETO, A., 2003, “Vortex Method With Turbulence Sub-Grid Scale Modeling” RBCM – Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences & Engineering, Vol XXV, No. 1, pp140-146.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L.A. and HIRATA, M.H., 2003, “Heat Transfer in the Wake Behind a Body Using a Particle Method”, Anais do 16º. Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica- XVII COBEM, S. Paulo.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L.A., HIRATA, M.H. and MANZANARES FILHO, N., 2004, “Wake and Aerodynamics Loads in Multiple Bodies – Application to Turbomachinery Blade Rows” – J.of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 92 (2004) 477-491.
- ARAÚJO, Z.A. e HIRATA, M.H., 1993, “Determinação de Cargas Aerodinâmicas Atuantes em um Cilindro Oscilante”. XI COBEM, Brasília, DF.
- ARAÚJO, M.R.O.P. and HIRATA, M.H., 1993, “Analysis of the Flow Around Bluff Porous Body by Discrete Vortex Method”. XI COBEM, Brasília, DF.
- BATCHELOR, G.K., 1953, “The Theory of Homogeneous Turbulence”, Cambridge University Press.
- BATCHELOR, G.K., 1967, “An Introduction to Fluid Dynamics”. Cambridge University Press.
- CHORIN, A. J., 1973, “Numerical study of slightly viscous flow”. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 57, pp. 785-796.

- CHRISTIANSEN, J.P., "Numerical Simulation of Hydrodynamics by the Method of Point Vortices", *J. Comp. Phys.*, Vol 13, pp.363-79
- EINSTEIN, A., 1956, "Investigation On The Theory Of Brownian Motion". Dover, NY.
- FERZIGER, J.H., 1981, "Numerical Methods for Engineering Applications". John Wiley & Sons.
- GHONIEM, A.F. and SHERMAN, F.S., 1985, "Grid-Free Simulation of Diffusion Using Random Walk Methods". *J. of Comput. Physics*, 61, 1-37, pp1-35.
- GRAHAM, J.M. R., 1980, "The Forces On Sharp-Edged Cylinders In Oscillatory Flow At Low Keulegan-Carpenter Numbers". *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 97, part 1, pp. 331-346.
- GREENGARD, C., 1985, "The Core Spreading Vortex Method Approximates the Wrong Equation". *J. Comp. Phys.* 61: 345-348.
- GREENGARD, L. and ROKHLIN, V., 1987, "A Fast Algorithm for Particle Simulations", *J. Comp. Phys.*, vol 72, pp 325-348.
- GUEDES, V.G., HIRATA, M.H. and BODSTEIN, G.C.R., 1999, "Vortex Methods Simulation of the Flow Around a Circular Cylinder Using the Multipole Expansion Algorithm". *Proceedings of the International Conference on Computational Heat and Mass Transfer*, Gazimagusa, North Chipre.
- HELMHOLTZ, H., 1858, "On Integrals of the Hydrodynamic Equations which Express Motion Translation" P.G., Tait, in *Phil. Mag*(4) 1467, vol 33, pp 44485-512.
- HESS, J.L. and SMITH, A.M.O., 1966, "Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies", *Progress in Aeronautical Sciences*, vol 8, pp 1-138
- HIRATA, S.C. e HIRATA, M.H., 1998, "Simulação do Processo de Difusão de Calor Utilizando um Método de Partículas", *Textos em Engenharia Mecânica No. 02/98*, Departamento de Mecânica da EFEI, Itajubá, MG.
- HIRATA, M. H. e ALCÂNTARA PEREIRA, L.A., 1999, "O Método de Vórtices: Algoritmos e Implementação Numérica", *Textos em Engenharia Mecânica No. 04/99*, Departamento de Mecânica da EFEI, Itajubá, MG.
- KAMEMOTO, K., Nakahara, N., Kawata, Y., Imamura, K. & Kaneko, T., 1990, "Numerical Simulation of Vortex Flows Interacting with Vibrations Under Flow Gates". *IAHR Symposium*, Belgrade, Yugoslave.
- KAMEMOTO, K., 1994, "Development Of The Vortex Methods For Grid-Free Lagrangian Direct Numerical Simulation". *Proc. Third JSME-KSME*, Sendai, Japan.
- KAMEMOTO, K., MATSUMOTO, H. and YOKOI, Y., 1995, "On the Extensive Applicability of the Vortex Methods to the Prediction of Flow Induced Vibrations Problems", *Yokohama National University*, Yokohama, Japan.
- KATZ, J. & PLOTKIN, A., 1991, "Low-speed aerodynamics: from wing theory to panel Methods". McGraw - Hill, Inc., International Edition.
- KEMPKA, S.N. and Strickland, J.H., 1993, "A Method To Simulate Viscous Diffusion of Vorticity by Convective Transport of Vortices at a Non-Solenoidal Velocity". SAND93-1763 Report. Sandia Laboratories.
- LESIEUR, M. & METAIS, O., 1996, "New trends in large-eddy simulation of turbulence". *An. Review in Fluid Mechanics*, Vol. 28, pp. 45-82.
- LEWIS R. I., 1991, "Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems". Cambridge University Press, Cambridge.
- MANZANARES, N., 1998, "Procedimento simplificado para a Aplicação do Teorema do Círculo nos escoamentos Rotacionais", *Textos em Engenharia Mecânica No. 03/98*, Departamento de Mecânica da EFEI, Itajubá, MG.
- MARTENSEN, E., 1971, "The calculation of the pressure distribution on a cascade of thick airfoils by means of Fredholm Integral Equation of the Second Kind". NASA TT F-702. Translation of "Die Berechnung der Druckverteilung an Dicken Gitterprofilen mit Hilfe von Fredholmschen Integralgleichungen Zweiter Art." Nr. 23, *Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt*, Göttingen, 1959.

- MENEGHINI, J.R. and BEARMAN, P.W., 1995, "Numerical Simulation of High Amplitude Oscillatory Flow About a Circular Cylinder", *J. Fluid Struct.*, Vol 9, pp 435-55.
- MILNE-THOMPSON, L.M., 1950, "Theoretical Hydrodynamics", Macmillan & Co., London.
- MORAN, J., 1984, "An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics", John Wiley & Sons.
- MUSTTO, A.A., HIRATA, M.H. and BODSTEIN, G.C.R., 1997, "Análise do escoamento ao redor de um Cilindro de Seção Circular" XIII COBEM, Bauru, SP.
- MUSTTO, A. A., 1998, "Simulação numérica do escoamento em torno de um cilindro circular com e sem rotação utilizando o método de vórtices discretos". Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, PEM/COPPE/UFRJ, Dissertação de Mestrado.
- MUSTTO, A.A., HIRATA, M.H. and BODSTEIN, G.C.R., 1998, "Discrete Vortex Method Simulation of the Flow Around a Circular Cylinder with and Without Rotation", AIAA paper 98-2409, Proc. Of the 16th AIAA Applied Aerodynamics Conf., Albuquerque, NM, USA
- MUSTTO, A. A., 2004, "Simulação Numérica do Escoamento Turbulento em Torno de um Cilindro Circular Via o Método de Vórtices" – Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Engenharia Mecânica – COPPE/UFRJ.
- OGAMI, Y. and AKAMATSU, T., 1991, "Viscous Flow Simulation Using The Discrete Vortex Model -The Diffusion Velocity Method". *Computers & Fluids*, vol 19, N° 3/4, pp433-441.
- PANTON, R.L., 1984, "Incompressible Flow". John Wiley & Sons.
- PORTHOUSE D.T.C. and LEWIS, R. I., 1981, "Simulation of Viscous Diffusion for Extension of the Surface Vorticity Method to Boundary and Separated Flows". *J. Mech. Eng. Sci., I. Mech. E.*, 23, No 3, 157-167.
- RAND, O., 1989, "Extension of the Circle Theorems by Surface Sources Distributions", *ASME J. of Fluids Engineering*, vol. 111, pp234-247.
- RICCI, J. E. R., 2002, "Simulação Numérica do Escoamento ao Redor de um corpo de Forma arbitrária, Estacionado nas Imediações de uma superfície Plana, com o Emprego do Método de Vórtices", Tese de Doutorado apresentado ao Departamento de Mecânica – IEM/EFEI, Itajubá, MG.
- ROSSI, L.F., 1996, "Resurrecting Core Spreading Vortex Methods: A new scheme that is both deterministic and Convergent", *SIAM, Sci. Comput.*, vol 17, n. 2, pp 370-379.
- SARPKAYA, T., 1989, "Computational Methods with Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture" *J. Fluids Engineering*, vol 111, pp5-52
- SHINTANI, M. and AKAMATSU, T., 1994, "Investigation Of Two Dimensional Discrete Vortex Method With Viscous Diffusion Model". *Computational Fluid Dynamic, Journal*, Vol. 3, N° 2, pp. 237- 254.
- SHERMAN, F. S., 1990, "Viscous Flow", McGraw-Hill, International Editions Mechanical Engineering Series.
- SILVA, H., 2004, "Análise do Escoamento ao Redor de um Corpo Oscilante que se Desloca com Velocidade Constante", Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Mecânica da UNIFEI, Itajubá.
- SMAGORINSKY, J., 1963, "General circulation experiments with the primitive equations", *Mon. Weather Rev.* 91, 3, 0099-164.
- UHLMAN, J.S. "An integral equation formulation of the equation of an incompressible fluid" Naval Undersea Warfare Center, T.R. 10-086

6.10. Copyright Notice

O autor é o único responsável pelo material contido neste trabalho.