

# 1. TURBULÊNCIA: FUNDAMENTOS

## **Sergio Viçosa Möller**

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
svmoller@vortex.ufrgs.br

## **Jorge Hugo Silvestrini**

Departamento de Engenharia Mecânica e Mecatrônica  
Faculdade de Engenharia  
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul  
jorgehs@em.pucrs.br

### 1.1 Introdução

Muitos escoamentos que ocorrem nas aplicações práticas em engenharia, ou mesmo na vida cotidiana são turbulentos, caracterizados por apresentarem flutuações de pressão e velocidade superpostas ao escoamento principal. Responsável por estas flutuações é a passagem de vórtices de várias escalas. A turbulência é responsável pelo aumento na resistência a um escoamento, pois tudo se passa como se a viscosidade fosse maior, mas ela também reduz o arraste de um corpo (cilindro, veículo) ao retardar o ponto onde ocorre a separação da camada limite.

É conhecido o experimento realizado por Osborne Reynolds, quem, em 1883, através da injeção de corante em um escoamento de água em um duto circular, observou os diferentes regimes de escoamento, iniciando-se com o escoamento laminar, onde as camadas de fluidos deslocam-se umas sobre as outras como se fossem lâminas. À medida que a velocidade do escoamento era aumentada, surgiam instabilidades na forma de oscilações no escoamento, até causar a mistura completa do corante com a água, devido à presença de flutuações de velocidade transversalmente à direção principal do escoamento. Este movimento que causa a mistura, chamado turbulência, é responsável pela transferência de quantidade de movimento e de massa, na direção transversal do escoamento. A quantidade de movimento na direção principal do escoamento é conservada durante este processo, fazendo com que o perfil de velocidades no escoamento turbulento em canais ou na camada limite seja mais uniforme que no escoamento laminar. No entanto, enquanto no escoamento laminar têm-se velocidades definidas, no escoamento turbulento os valores de velocidade variam ao longo do tempo em torno de um valor médio.

Reynolds mostrou com seu experimento que a transição laminar-turbulento ocorria sempre para, aproximadamente, as mesmas condições de experimento, sendo estas condições caracterizadas com o que hoje se denomina número de Reynolds. Este número de Reynolds crítico ( $Re_{crit} \cong 2300$ ) porém, depende do próprio escoamento, como as condições de entrada e a rugosidade do tubo. Outras perturbações presentes no escoamento, tais como ruídos ou vibrações no ambiente onde se encontra o tubo, desempenham um papel importante no processo de transição, de tal modo que sua ausência ou diminuição pode vir a retardar o processo de transição.

Além do escoamento em dutos, outros problemas são de importância na análise da transição. No caso de placas planas sem gradiente de pressão, o escoamento inicia-se laminar, e a transição ocorre para uma distância  $x_{crit}$  do bordo de ataque, definida através de um número de Reynolds local, dado por

$$Re_{crit} = \frac{U_{\infty} x_{crit}}{\nu} \cong 3,5 \cdot 10^5. \quad (1.1)$$

Este valor depende não apenas da magnitude da velocidade não perturbada da corrente livre  $U_{\infty}$  e da posição  $x$ , mas da intensidade de turbulência presente na corrente livre, do gradiente de pressão imposto, da rugosidade da placa, além da presença de transferência de calor da ou para a placa. Devido à transferência adicional de quantidade de movimento na direção transversal do escoamento devido à turbulência, a espessura da camada limite aumenta, assim como a força de arraste total sobre a placa.

No caso do escoamento transversal sobre cilindros, que constitui uma importante aplicação em diversas áreas da engenharia, a transição reduz a força de arraste movendo o ponto de separação da camada limite para jusante.

Não há consenso na aceitação de uma definição para a turbulência de forma a abranger todas suas características. A maneira clássica consiste em apenas estabelecer estas características, assim foi proposto por Tennekes e Lumley (1972) que um escoamento turbulento podia ser caracterizado através de:

- a) Irregularidade: uma análise determinística é impossível, trabalha-se com métodos estatísticos.
- b) Difusividade: produz a mistura do fluido, aumenta a transferência de calor, retarda a separação da camada limite.
- c) Altos números de  $Re$ : a turbulência surge normalmente por uma instabilidade do escoamento laminar, quando o número de Reynolds cresce.
- d) Tridimensionalidade da Vorticidade: a turbulência é rotacional e tridimensional, com flutuações tridimensionais da vorticidade. Escoamentos vorticiais bidimensionais não são considerados turbulentos.
- e) Dissipação: escoamentos turbulentos são sempre dissipativos e a viscosidade transforma o movimento turbulento de pequenas escalas em calor.
- f) Meio Contínuo: a menor escala da turbulência é maior que a escala molecular.
- g) “*Escoamentos turbulentos, são escoamentos*”: turbulência é uma característica do escoamento e não do fluido.

Nas últimas décadas, a descoberta de estruturas coerentes trouxe uma nova perspectiva no estudo da turbulência (Brown e Roshko, 1971; Hussain, 1983). A idéia predominante até então era de um movimento vortical, principalmente de pequenas escalas, em total caos (item a da definição anterior). A primeira revolução foi a da existência de estruturas quase-determinísticas, distribuídas de maneira aleatória no espaço e no tempo, responsáveis pelo transporte turbulento e geração de ruído. Determinou-se, também, que o transporte e a difusão turbulentos são mais guiados por indução que por gradientes (Hussain, 1983). Esta característica quase determinística é que permite que se represente o escoamento como ondas de vorticidade, uma vez que existem evidências de que a maior parte dos escoamentos com cisalhamento age como “guias de ondas”. Isto permite então que se represente o escoamento turbulento como uma superposição de ondas, o que pode facilitar a representação matemática do fenômeno.

Nesse mesmo artigo, Hussain define uma estrutura coerente como sendo uma massa de fluido turbulento com grande escala, com vorticidade correlata e em fase, sobre a região do fluido. A escala de uma estrutura coerente será proporcional à menor dimensão do canal. A extensão do escoamento sobre a qual as flutuações da velocidade se correlacionam demonstram a extensão da estrutura.

Com base neste conceito, pode-se estabelecer que turbulência é uma superposição de movimento coerentes e incoerentes (aleatórios), estes últimos se estendem além das fronteiras da estrutura coerente.

Na definição de estrutura coerente, fica implícito que seu tamanho seja comparável com o comprimento da camada de cisalhamento, sendo, portanto, responsável pelo transporte, nas grandes escalas, de massa, calor e quantidade de movimento, sem ser necessariamente altamente energética. As estruturas coerentes se caracterizam, portanto, mais por sua organização do que pela quantidade de energia cinética que contém, pois se originam de uma instabilidade de algum tipo como a de Kelvin-Helmholz ou os vórtices de Taylor no escoamento viscoso rotativo, dependendo, também das condições iniciais. Não havendo determinadas condições de formação, não ocorreriam necessariamente essas estruturas.

Outros autores caracterizam um vórtice coerente através de determinadas características. Por exemplo, Lesieur (1997) considera um vórtice como coerente se: a) possui uma concentração de vorticidade tal que as trajetórias de fluido girem ao redor dele, b) tem um tempo de vida maior que o tempo de rotação local e c) possui a propriedade de imprevisibilidade (no sentido da sensibilidade às condições iniciais).

Em um artigo mais antigo, coincidente com a época do surgimento do conceito de estruturas coerentes, Bradshaw (1978) apresenta uma discussão a respeito da identificação do que ele chamou de “estruturas ordenadas” (*orderly structures*), alertando para o fato de que picos em espectros, estruturas excepcionalmente bem organizadas, persistência de padrões organizados provenientes da transição laminar-turbulência, dependentes das condições iniciais e efeitos de ressonância, não constituem necessariamente essas estruturas. A identificação correta, então, seria feita através de processos de aquisição condicionada (*conditional sampling*), tomada não sobre todo o registro de dados, mas somente sobre aquelas porções que satisfazem alguma condição imposta pelo experimentador.

Deve-se também considerar o contorno do fluido como uma condição que leva à formação deste tipo de estrutura. Pode-se ter uma idéia da distribuição da vorticidade ao se analisar o campo do escoamento (Batchelor, 1967). Existem na engenharia e na física várias geometrias importantes de canais que são susceptíveis de propiciar a geração de estruturas coerentes (Meyer e Rehme, 1994).

As estruturas coerentes podem ser naturais ou induzidas. Estruturas coerentes estão relacionadas com o tempo de produção da energia. Tanto as condições iniciais como as de contorno se relacionam com a camada de cisalhamento do escoamento. Parte da energia produzida será pelas estruturas coerentes, a outra por estruturas não coerentes. Para qualquer variável instantânea  $f$  (vetorial ou escalar) pode-se fazer a decomposição em uma parte coerente e outra não coerente, que corresponderia à parte aleatória da turbulência

$$f(x,t) = f_c(x,t) + f_r(x,t), \quad (1.2)$$

onde:  $f_c(x,t)$  – função coerente  
 $f_r(x,t)$  – função não coerente.

Esta divisão em parte coerente e não coerente pode ser observada nas Fig. (1.1) e (1.2) (Meyer e Rehme, 1995). A Fig. (1.1) mostra um escoamento turbulento como ele é percebido normalmente. Observa-se uma distribuição aleatória de partículas que passam diante da câmera fotográfica estacionada diante do canal. Já na Fig. (1.2), a câmera acompanha o escoamento, permitindo que uma sucessão de vórtices (coerentes) seja visualizada. Estas fotografias são muito semelhantes a observações feitas em um canal por Nikuradse em 1929 (Schlichting, 1968).

A propriedade característica da estrutura coerente, portanto, é a vorticidade coerente:

$$\Omega_{c_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} u_{c_i}, \quad (1.3)$$

onde o subíndice *c* indica *coerente* e que difere da vorticidade que é o rotacional do vetor velocidade média temporal.

Escoamentos turbulentos são caracterizados por números de Reynolds muito altos, assim, é razoável esperar que qualquer descrição da turbulência funcione propriamente à medida que o número de Reynolds tende ao infinito. A esse critério dá-se o nome de *invariança assintótica* e permite que se estabeleçam critérios como a similaridade via número de Reynolds. Uma discussão acessória que surge ao se estabelecer este critério é a quantificação de números de Reynolds altos. Este problema não depende do valor do número de Reynolds do escoamento e sim do tipo do escoamento e o momento a partir do qual as características do escoamento serão independentes do número de Reynolds, o que significa que a estrutura do escoamento não mais dependerá da viscosidade. Esta é uma das bases do conceito de semelhança de Reynolds (Bernard e Wallace, 1998).

Num escoamento turbulento simples, as características do escoamento em um dado ponto ao longo do tempo são controladas apenas pela região imediatamente a sua volta. As escalas de tempo e comprimento vão variar ao longo do escoamento, do mesmo modo que as características do escoamento, de tal forma que uma vez adimensionalizadas por essas escalas, estas característica (adimensionais) permanecerão inalteradas. A este fato dá-se o nome de *invariança local* ou *autopreservação*.

No escoamento turbulento os vórtices são gerados por cisalhamento ou por gravidade, mas a turbulência não pode se manter por si só: uma fonte de energia deve haver, caso contrário a turbulência vai decair e o escoamento vai se relaminarizar. É o caso da turbulência de grade num túnel de vento que decai à medida que a distância à grade aumenta. Esta fonte de energia é o cisalhamento (com exceção das forças gravitacionais) do fluido com uma parede ou com outra camada de fluido.

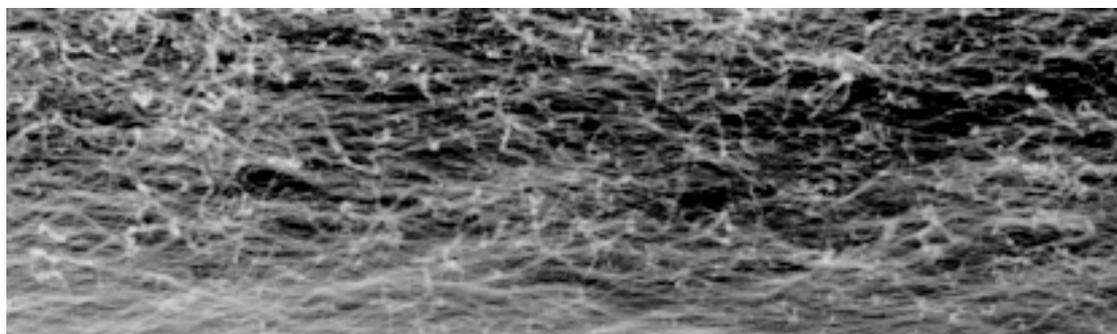


Figura 1.1. Visualização do escoamento turbulento em um canal (Meyer e Rehme, 1995).

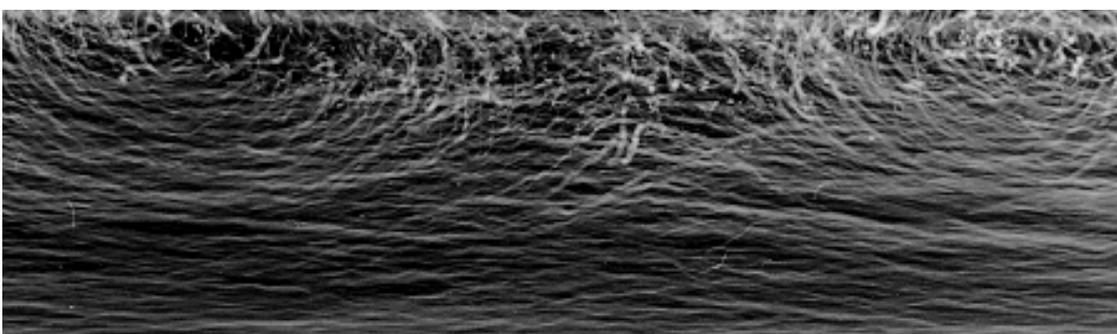


Figura 1.2. Visualização do escoamento turbulento em um canal – detalhe para os vórtices (Meyer e Rehme, 1995).

## 1.2 Equações governantes da turbulência

Do ponto de vista matemático, as equações que regem os escoamentos turbulentos, as equações de Navier-Stokes, que são a aproximação de segunda ordem de Chapman-Enskog da equação de Boltzmann para o movimento molecular (Bradshaw, 1978), são conhecidas há muito tempo (Navier, 1823; Stokes, 1843), porém nenhuma solução exata estável pode ainda ser obtida. Para o caso de fluidos incompressíveis de massa específica constante, estas equações, desenvolvidas a partir dos princípios de conservação de massa e quantidade de movimento, em notação indicial, são:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (1.5)$$

e, eventualmente, uma equação de conservação de escalar passivo,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (1.6)$$

Nas equações (1.4), (1.5) e (1.6)  $u_i$ ,  $p$  e  $\theta$  são, respectivamente, os campos de velocidade, pressão e escalar passivo,  $\nu$  a viscosidade molecular,  $\kappa$  a difusividade molecular e  $\rho$  a massa específica. O sistema de equações (1.4), (1.5) e (1.6) complementadas com as correspondentes condições iniciais e de contorno, constituem um problema fechado do ponto de vista matemático, no sentido de possuir igual número de equações que de incógnitas, e portanto, pode ser resolvido.

O termo viscoso na Equação (1.5) corresponde ao divergente das tensões viscosas,  $\tau_{ij}$ , na qual sua expressão foi simplificada usando a condição de incompressibilidade (1.4), na forma,

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \rightarrow \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j},$$

da mesma forma que na equação (1.6), o termo difusivo corresponde ao divergente do fluxo do escalar  $q_j$ ,

$$q_j = -k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \rightarrow -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j},$$

onde  $\mu$  e  $k$ , são a viscosidade dinâmica e condutividade térmica, respectivamente.

As principais dificuldades inerentes a sua solução estão nas características não-lineares das equações governantes e na complexidade da solução procurada. Em geral, a não-linearidade das equações pode ser interpretada como um mecanismo de geração de escalas e de transferência de energia entre diferentes escalas.

Devido a estas dificuldades, qualquer solução do sistema de equações apresentado, deve ser obtida através de métodos numéricos, abrindo-se um leque de possibilidade que vai

desde a Simulação Numérica Direta (DNS) onde todas as escalas espaciais e temporais são efetivamente resolvidas, até os diferentes métodos de modelização (Simulação de Grandes Escalas-LES, métodos baseados na decomposição em valores médios do tipo *Reynolds-averaged Navier-Stokes*-RANS, etc). Não está dentro dos objetivos deste capítulo a apresentação dos diferentes métodos de solução numérica das equações de Navier-Stokes, o leitor interessado pode consultar os diferentes textos de referência (Deschamps, 1998; Silveira Neto, 2002; Silvestrini, 2003).

Vorticidade é uma palavra chave em turbulência. A vorticidade é considerada essencial para identificar escoamentos turbulentos e entender sua dinâmica é indispensável para a compreensão da turbulência. Fala-se de vorticidade no escoamento de um fluido quando o rotacional da velocidade existe e não se anula em todos os pontos do domínio do escoamento. Matematicamente, a vorticidade é definida por

$$\Omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (1.7)$$

Aplicando-se o operador rotacional na Equação (1.5), obtém-se:

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} = \Omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (1.8)$$

ou, em forma vetorial

$$\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = \vec{\Omega} \cdot \nabla \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\Omega}. \quad (1.9)$$

O termo de pressão desaparece, pois a pressão e seu gradiente são campos irrotacionais. No lado esquerdo da equação da vorticidade, identifica-se o termo de variação local e o termo de transporte convectivo da vorticidade. No lado direito, o segundo termo,  $\nu \nabla^2 \vec{\Omega}$ , representa a taxa de variação de  $\vec{\Omega}$  devido à difusão viscosa da vorticidade, exatamente como  $\nu \nabla^2 \vec{u}$  na equação de Navier-Stokes representa a difusão viscosa da quantidade de movimento.

O termo  $\vec{\Omega} \cdot \nabla \vec{u}$ , não possui nenhum correspondente na equação de Navier-Stokes e dá à equação da vorticidade um caráter exclusivo. Ele descreve a variação da vorticidade pela torção ou extensão de uma linha de vórtices. Este efeito é muito importante no escoamento turbulento e desaparece na análise bidimensional (Batchelor, 1967).

A Figura (1.3) mostra como os termos de vorticidade são compostos e o fato de que o vetor vorticidade é perpendicular ao plano das velocidades que compõe cada uma de suas componentes. Pode-se ver que, em escoamentos bidimensionais, os vetores velocidade estão totalmente contidos no plano do escoamento e o vetor vorticidade será perpendicular ao plano que contém os vetores velocidade.

Este processo marcante pode ser observado na Fig. (1.4), no clássico estudo do escoamento sobre um degrau. Pode-se ver as superfícies de isovorticidade na direção transversal ao escoamento principal,  $\Omega_z$ , e na direção longitudinal,  $\Omega_x$  e seu valor recíproco, isto é  $-\Omega_x$ . Nos valores de  $\Omega_x$ , pode-se observar como as superfícies de isovorticidade positiva e negativa se entrelaçam, dando origem a um processo muito semelhante ao observado na esteira de vórtices (Fig. 1.5).

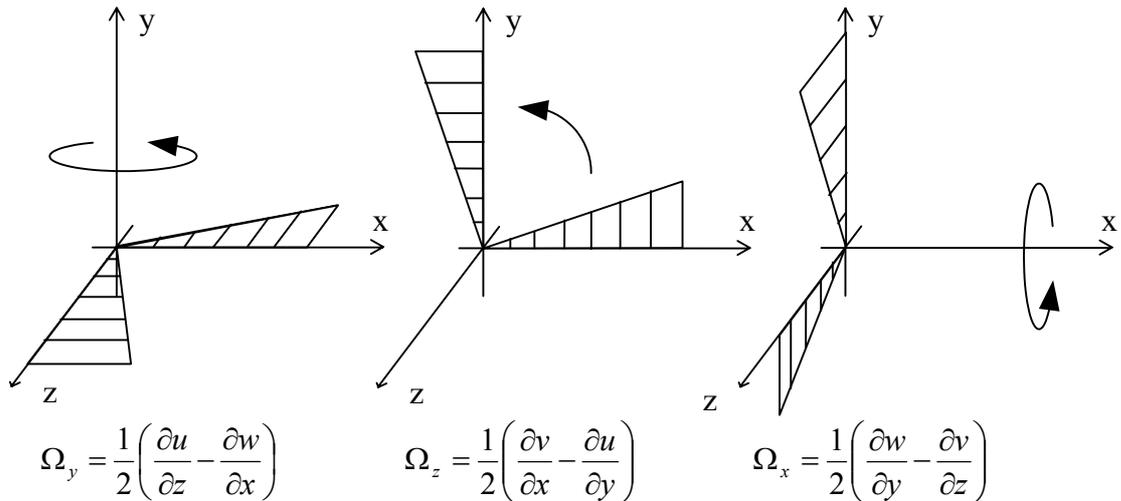


Figura 1.3. Componentes da vorticidade:  $\Omega_y$ ,  $\Omega_z$ ,  $\Omega_x$ .

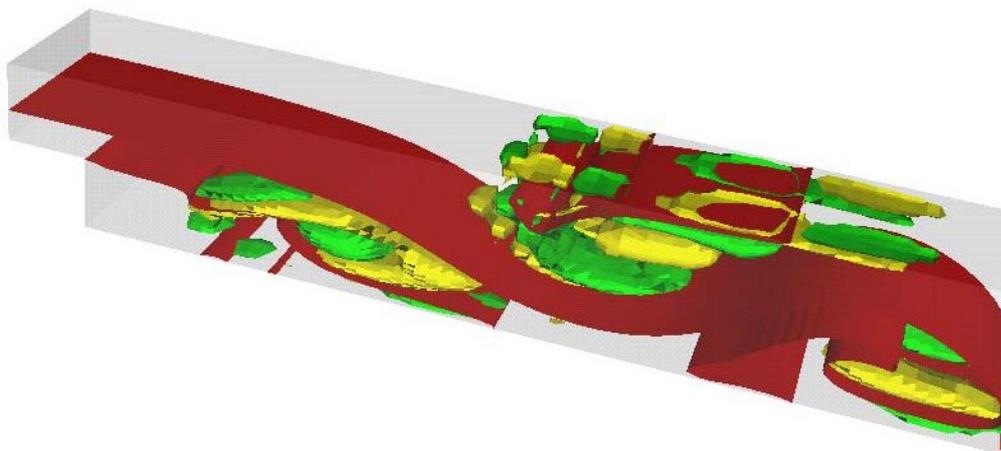


Figura 1.4. Campo de vorticidade no escoamento sobre um degrau, para  $Re=1,000$ :

◆ -  $\Omega_3=5.7 \times 10^1$ , ◆ -  $\Omega_1=4 \times 10^{-4}$  e ◆ -  $\Omega_1=-4 \times 10^{-4}$  (Petry e Awruch, 2004).

A Figura (1.5) apresenta um esquema do desprendimento de vórtices ferradura de um cilindro perpendicular a uma parede. Um processo semelhante é idealizado na Fig. (1.6), onde a formação de uma linha de vórtices junto a uma parede é esquematizada de forma a indicar as componentes do vetor vorticidade.

Dos resultados mostrados nas Figs. (1.5) e (1.6), pode-se observar, além da distribuição tridimensional da vorticidade, que esses processos ocorrem com um grande grau de organização que dá origem a distribuições harmoniosas das curvas de isovorticidade. Estas superfícies de isovorticidade tão bem ordenadas caracterizam as chamadas estruturas coerentes, já definidas anteriormente. É evidente, porém, que sua distribuição ocorre de forma aleatória no campo do escoamento.

Apesar de não ser uma equação de balanço, a equação para o campo de pressão em um escoamento turbulento é de grande importância para a compreensão dos processos dinâmicos

resultantes. O campo de pressões é descrito pela equação de Poisson, obtida pela aplicação do operador divergente na Equação (1.5). Levando em conta (1.4), obtém-se,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (1.10)$$

Em particular, a Equação (1.10) fornece uma variável adicional para identificar vórtices ou estruturas coerentes. Este critério, denominado na literatura, de critério Q (Jeong e Hussain, 1995; Dubief e Delcayre, 2000), permite separar as estruturas coerentes das camadas de vorticidade (*vortex sheet*). Na Fig. (1.7), pode-se apreciar o campo de vórtices coerentes tridimensional obtido utilizando o critério Q comparado com a mesma imagem utilizando o módulo do vetor vorticidade, para o desprendimento oblíquo de vórtices de um cilindro por simulação numérica direta (Silvestrini e Lamballais, 2004).

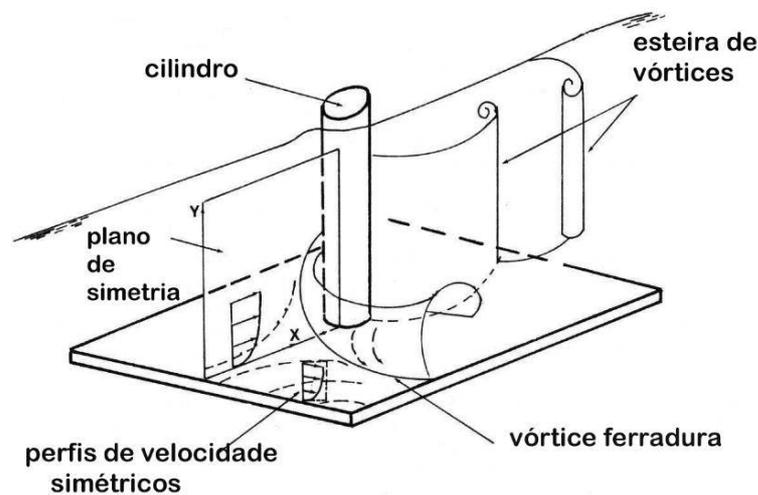


Figura 1.5. Vórtices desprendidos de um cilindro junto a uma parede.

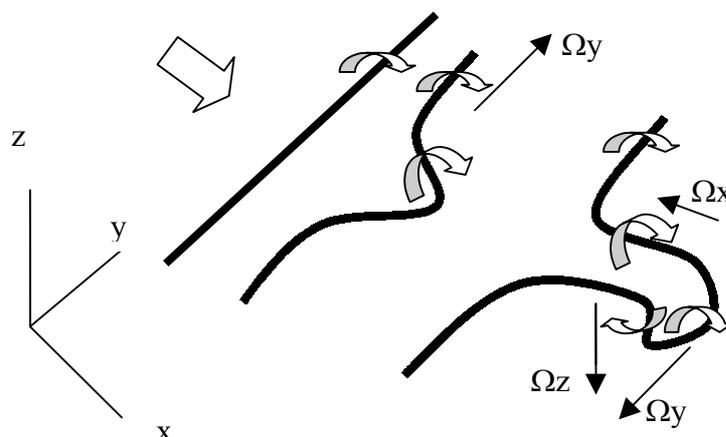


Figura 1.6. Esquema dos vetores vorticidade em uma estrutura de linhas de vórtices junto a uma parede.

A partir do campo de pressões, podem-se identificar estruturas coerentes através de superfícies de baixa pressão. Considerando um vórtice coerente isolado, em um referencial movendo-se a velocidade constante, a equação de movimento para fluidos perfeitos pode ser reduzida a,

$$\bar{\Omega} \times \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

o que mostra que o gradiente de pressão é orientado para o exterior e, portanto, o centro do vórtice coerente é de baixa pressão. Na Fig. (1.8) apresenta-se uma superfície de pressão de uma camada de mistura espacial obtida por simulação de grandes escalas.

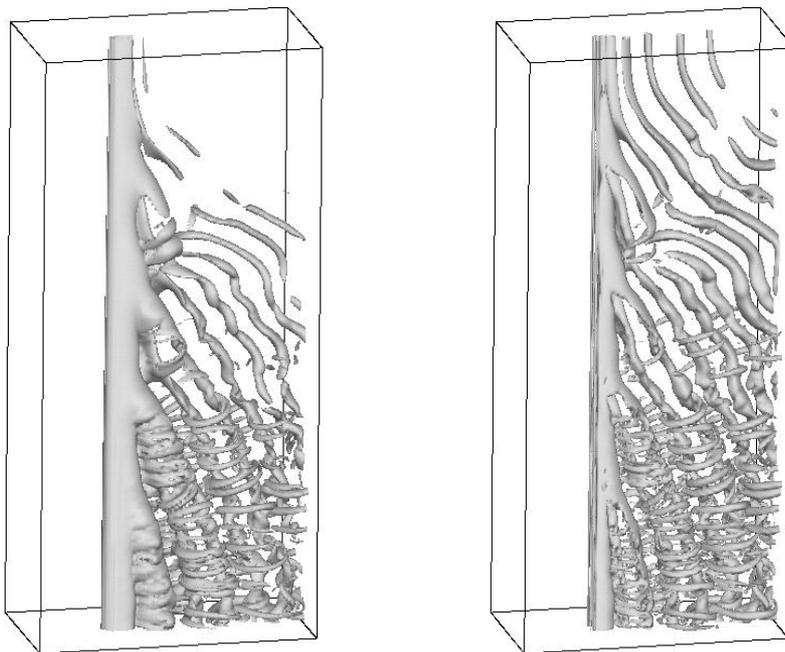


Figura 1.7. Desprendimento oblíquo de vórtices atrás de um cilindro: a esquerda, obtido pela visualização do módulo do vetor vorticidade, à direita utilizando o critério Q (Silvestrini e Lamballais, 2004).

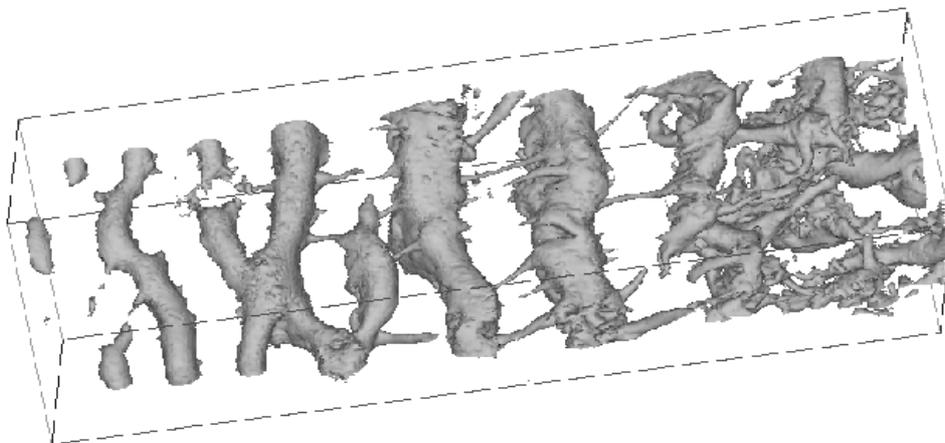


Fig. 1.8 – Iso-superfície de pressão obtida por simulação de grandes escalas de uma camada de mistura espacial (Silvestrini, 1996).

### 1.3 Origem da turbulência

Um fluido escoando em regime laminar pode tornar-se instável se existirem forças inerciais e/ou gradiente de energia potencial suficientemente grandes tais que vençam a resistência do escoamento (de origem viscosa) em mantê-lo laminar. Uma vez vencida essa resistência inicial, existirá uma série de fenômenos, mais ou menos conhecidos, que tornarão o escoamento, originalmente laminar, em turbulento. Este processo denominado transição à turbulência é altamente influenciado por diferentes fatores, como por exemplo: o nível de perturbação existente, a rugosidade da superfície em escoamentos parietais, o gradiente de pressão atuante, efeitos de compressibilidade, transferência de calor e estratificação em densidade, etc.

O processo de transição pode ser interpretado através da teoria de estabilidade, porém devido às dificuldades de origem matemática, toda análise fica restrita à teoria linearizada ou fracamente não linear. Serão apresentadas a seguir, as características e resultados mais importantes da teoria de estabilidade linear, enquanto que para a teoria não linear o leitor pode consultar diversas referências (Landau 1944; Drazin e Reid, 1981; Craik, 1985; Mendonça e Medeiros, 2002).

Uma primeira simplificação, importante para este estudo, é dada pelo Teorema de Squire (Squire, 1933), o qual garante para escoamentos incompressíveis e paralelos livres e parietais, que para cada perturbação tridimensional instável, existe uma perturbação bidimensional mais instável, isto é, com maior taxa de amplificação (ou, no caso dos escoamentos parietais, com número de Reynolds crítico mínimo). Isto limita o estudo da estabilidade hidrodinâmica linear à aproximação bidimensional.

O desenvolvimento da turbulência pode ser resumido, segundo Bradshaw (1978), em quatro estágios a partir de uma condição instável em uma camada de cisalhamento ou outra condição, tal como a variação da massa específica devido à ação de forças de campo: a) o crescimento de perturbações com flutuações periódicas de velocidade, pressão ou temperatura; b) o desenvolvimento de instabilidades bidimensionais; c) o estabelecimento da tridimensionalidade e de harmônicos de ordem mais alta; d) o estabelecimento de um processo aleatório quando o campo vortical fica suficientemente complicado, levando à transferência de energia das maiores para as menores escalas do escoamento.

Seja, portanto, um escoamento de um fluido com massa específica constante, denominado escoamento de base, que satisfaça as equações de Navier-Stokes, e uma perturbação de amplitude infinitesimal superposta ao escoamento de base paralelo da forma

$$\begin{cases} u(x, y, t) = U(y) + u'(x, y, t) \\ v(x, y, t) = v'(x, y, t) \\ p(x, y, t) = P(x) + p'(x, y, t) \end{cases} \quad (1.11)$$

O estudo da evolução temporal e espacial destas perturbações é o objetivo da estabilidade hidrodinâmica. Substituindo as Equações (1.11) nas Equações (1.4) e (1.5), e linearizando o sistema (isto é, não levando em conta termos de segunda ordem) obtém-se

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \nabla^2 v'. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

As Equações (1.12) devem ser completadas com as correspondentes condições de contorno. Nesse caso, as flutuações de velocidade se anulam quando  $y \rightarrow \pm d$  (sendo  $2d$ , a dimensão transversal do domínio considerado). Eliminando a pressão através do uso da vorticidade  $\omega$  e da função corrente  $\psi$ , considerando

$$\begin{aligned}\omega &= \Omega + \omega' \\ \psi &= \Psi + \psi'\end{aligned}$$

onde  $\Omega$  é a vorticidade do perfil de base ( $= -dU/dy$ ), obtém-se a equação linearizada para a flutuação de vorticidade

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + U \frac{\partial \omega'}{\partial x} + v' \frac{d\Omega}{dy} = v \nabla^2 \omega'. \quad (1.13)$$

Diferentes tipos de flutuações podem ser considerados. Como o sistema é linear e os coeficientes não dependem de  $x$  e  $t$ , deve-se procurar por soluções onde a flutuação é do tipo

$$\psi' = \Phi(y) \exp[i\alpha(x - ct)], \quad (1.14)$$

isto é, uma decomposição em modos normais, onde  $\Phi$  é uma função complexa,  $\alpha$  é o número de onda longitudinal e  $c$  a componente da velocidade de fase longitudinal. A partir de (1.14), dois tipos de problemas de estabilidade podem ser tratados. Se  $\alpha$  é real e  $c$  complexo, o problema é periódico em  $x$ , e portanto, será analisado o problema temporal, isto é, o crescimento de uma perturbação com o tempo. Se  $\alpha$  é complexo e  $c$  real, o problema tratado será espacial, isto é, ocorrerá o crescimento de uma perturbação na direção longitudinal. Considerando-se o problema temporal, onde  $\alpha$  é real e  $c$  complexo ( $c = c_r + i c_i$ ), escreve-se a Eq. (1.14) na forma

$$\psi' = \Phi(y) \exp(\alpha c_i t) \exp[i\alpha(x - c_r t)], \quad (1.15)$$

onde  $\alpha c_i$  é a taxa de amplificação temporal da perturbação. O objetivo central da análise de estabilidade do escoamento de base será a obtenção do sinal da taxa de amplificação da perturbação dado por (1.14), o qual indicará se a solução é instável (se amplifica), estável (se amortece) ou neutra (nem amplifica nem amortece), correspondendo, respectivamente se o sinal for positivo, negativo ou nulo.

Substituindo (1.14) em (1.13) e operando algebricamente, obtém-se

$$(U - c)(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) - U''\Phi = -\frac{iv}{\alpha}(\Phi^{iv} - 2\alpha^2 \Phi'' + \alpha^4 \Phi), \quad (1.16)$$

que é denominada equação de Orr-Sommerfeld. A Equação (1.16) deve ser resolvida com as correspondentes condições de contorno homogêneas, as quais geralmente anulam as flutuações de velocidade quando  $y \rightarrow \pm d$ . Escolhendo uma escala de velocidade e comprimento característicos, a equação (1.16) pode ser adimensionalizada, obtendo-se

$$(U - c)(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) - U''\Phi = -\frac{i}{\alpha \text{Re}}(\Phi^{iv} - 2\alpha^2 \Phi'' + \alpha^4 \Phi). \quad (1.17)$$

A Equação (1.17) conjuntamente com suas condições de contorno, constituem um problema de autovalores. Quando o perfil de base  $U(y)$  é dado, a Equação (1.17) contém 4 parâmetros:  $\alpha, \text{Re}, c_r, c_i$ . Normalmente o número de  $\text{Re}$  e o comprimento de onda  $\lambda = 2\pi / \alpha$

da perturbação são especificados. Assim, a Equação (1.17) fornece uma autofunção  $\Phi(y)$  e um autovalor complexo  $c = c_r + i c_i$  para cada par de valores de  $(\alpha, \text{Re})$ . O sinal de  $c_i$  determina se a onda considerada, para o número de Reynolds escolhido, é amplificada (se  $c_i > 0$ ), amortecida ( $c_i < 0$ ) ou neutra ( $c_i = 0$ ).

Um caso particular da equação de Orr-Sommerfeld é considerado quando os efeitos viscosos são desprezíveis, e a Equação (1.17) se reduz a

$$(U - c)(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) - U''\Phi = 0, \quad (1.18)$$

denominada equação de Rayleigh. Dividindo-se a Equação (1.18) por  $(U - c)$ , multiplicando-se o resultado pelo complexo conjugado de  $\Phi$ ,  $\Phi^*$ , e integrando-se por partes entre  $(-d, d)$ , obtém-se

$$-\int_{-d}^d (|\Phi'|^2 + \alpha^2 |\Phi|^2) dy = \int_{-d}^d |\Phi|^2 \frac{U''(U - c^*)}{|U - c|^2} dy, \quad (1.19)$$

cuja parte imaginária fica reduzida a

$$c_i \int_{-d}^d |\Phi|^2 \frac{U''}{|U - c|^2} dy = 0. \quad (1.20)$$

Sem perder generalidade, pode-se restringir a procura para valores de  $\alpha > 0$ . Assim para toda solução amortecida,  $\alpha c_i < 0$ , pode-se associar uma solução amplificada  $\alpha(-c_i) > 0$ . Em outras palavras, a procura por uma solução instável se reduz à procura por modos não-neutros  $c_i \neq 0$ . Desta forma, a Equação (1.20) mostra que, para se achar soluções instáveis,  $U''$  deve-se anular para algum valor entre  $(-d, d)$ , isto é,  $U(y)$  deve ter ao menos um ponto de inflexão. Esta condição necessária é denominada *critério de instabilidade não-viscoso do ponto de inflexão de Rayleigh*. Como corolário deste critério, fica evidente que escoamentos parietais (camadas limites e escoamentos em canais) são estáveis segundo o critério de Rayleigh. De alguma forma, isto está indicando que os efeitos viscosos (desprezados na Equação 1.18), devem ser incorporados para se compreender a instabilidade desses escoamentos.

A condição suficiente foi abordada por Fjørtoft (1950), que demonstrou que, para se achar uma solução instável,  $U'' = 0$  devia corresponder a um ponto de  $U'$  máximo. Este resultado mostra que escoamentos livres e camadas limite separadas (onde as condições exigidas pelos critérios de Rayleigh e Fjørtoft são verificadas) são candidatos naturais para serem instáveis e, na presença de perturbações, transicionar à turbulência.

A solução da Equação (1.17) fornece, para cada perfil de base considerado  $U(y)$ , um diagrama de estabilidade na forma,  $f(\text{Re}, \alpha, c_r, c_i) = 0$ , a partir do qual pode se determinar, por exemplo, o valor crítico do número de Reynolds, isto é, o número de Reynolds mínimo sob o qual uma perturbação infinitesimal é amortecida segundo a teoria de estabilidade linear. Da mesma forma, pode-se também obter a onda que possui maior taxa de amplificação, isto é, a primeira onda que crescerá em um processo de transição, se todas as ondas fossem perturbadas da mesma forma.

Assim, a solução da equação de Orr-Sommerfeld para um perfil de velocidade do tipo tangente hiperbólica, uma camada de mistura por exemplo, fornece um número de Reynolds crítico igual a zero (Betchov e Szewczyk, 1963). Neste caso o número de Reynolds é definido na forma,  $\text{Re} = U\delta_0/\nu$ , baseado na velocidade característica  $U = U_1 - U_2$ , onde  $U_1$  e  $U_2$  são

as velocidades das correntes paralelas e  $\delta_0$  a semi-espessura de vorticidade do perfil de base. Este resultado indica que, em uma camada de mistura, sempre existirá uma onda que pode amplificar-se independentemente do número de Reynolds considerado. Para números de Reynolds superiores a valores entre 30 e 40, a taxa de amplificação torna-se constante e independente do número de Reynolds, sugerindo que, a partir desse valor, a instabilidade pode ser considerada como não-viscosa no sentido da equação de Rayleigh (1.18). Esta solução prediz um comprimento de onda mais amplificado  $\lambda_a \approx 14\delta_0$ , dando origem à instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

Para a esteira periódica, o número de Reynolds crítico, obtido a partir da solução da Eq (1.17), é aproximadamente igual a 4 e o comprimento de onda mais amplificado é  $\lambda_a \approx 13\delta_0$  (Mattingly e Criminale, 1972). As soluções para camada de mistura e esteira apresentadas, foram obtidas considerando em ambos os casos escoamentos paralelos. Claramente, efeitos de não paralelismo vão alterar esses resultados. Estas alterações podem ser consultadas em Betchov e Criminale (1967), Drazin e Reid (1981).

Para a camada limite sem gradiente de pressão, a solução da Eq. (1.17) indica um número de Reynolds crítico, definido a partir da espessura de deslocamento  $\delta^*$ ,  $Re_{\delta^*,crit} = 520$ , o que corresponde a um  $Re_{x,crit} \approx 91000$  (sem levar em conta efeitos não paralelos). O diagrama de estabilidade correspondente fornece os comprimentos das diversas ondas, denominadas ondas de Tollmien & Schlichting, e suas correspondentes taxas de amplificação. Em particular, a onda que possui a máxima taxa de amplificação tem um comprimento de onda  $\lambda_a \approx 40\delta^*$  o que corresponde, aproximadamente, a  $13\delta$ , sendo  $\delta$  a espessura da camada limite (Wazzan *et al.*, 1968).

Quando o perfil de base é o escoamento de Poiseuille (o canal plano), a teoria prediz um número de Reynolds crítico, baseado na altura do canal,  $L$ , e na velocidade média, igual a 5767, e um comprimento de onda mais amplificado  $\lambda_a \approx 8L$  (Nachtsheim, 1964). Finalmente, para o caso do escoamento em um tubo circular, a teoria de estabilidade linear prediz um escoamento estável para qualquer número de Reynolds (Drazin e Reid, 1981). Estes dois últimos resultados, devem ser entendidos no contexto da teoria linear, a qual considera unicamente perturbações infinitesimais. Assim, o clássico valor  $Re_{crit} \approx 2300$ , observado em escoamentos em tubos, em particular na experiência de Osborne Reynolds, como também o valor observado para o número de Reynolds em escoamentos em canais,  $Re_{crit} \approx 1000$ , podem estar relacionados com a existência de perturbações não-infinitesimais, e, nesse caso, deveriam ser analisados por teorias não lineares. Nos casos dos escoamentos mencionados, as perturbações não-infinitesimais podem ser, ou o resultado da evolução linear de perturbações na região de entrada do canal ou tubo circular (Tritton, 1988), ou devido à presença de outras perturbações de amplitude finita, que não podem ser consideradas infinitesimais.

## 1.4 Equações de Reynolds para escoamentos turbulentos

As equações de Reynolds, também denominadas de RANS, abreviatura de *Reynolds-averaged Navier-Stokes*, constituem a base matemática de boa parte das aplicações de engenharia de hoje em dia e, portanto, fazem parte da maioria dos programas computacionais para resolução de problemas de escoamentos turbulentos. Para desenvolver estas equações precisa-se em primeiro lugar introduzir algumas definições sobre processos aleatórios e a seguir sobre decomposição de Reynolds.

### 1.4.1 Algumas definições preliminares

Apresentam-se a seguir algumas definições preliminares que serão utilizadas nos capítulos subsequentes:

- I. Turbulência estacionária: Um processo físico que pode ser representado por uma série numérica é dito estacionário quando seus valores médios não variam com o tempo, isto é são invariantes ante uma translação no tempo.
- II. Turbulência homogênea: Um processo físico é dito homogêneo quando seus valores médios não se modificam com a posição, isto é, são invariantes ante uma translação. no espaço, exemplo: escoamentos uniformes.
- III. Turbulência isotrópica: A turbulência é dita isotrópica quando os seus valores médios independem da direção, isto é, são invariantes ante uma rotação. Tomando-se as intensidades de turbulência

$$\overline{u'_x u'_x} = \overline{u'_y u'_y} = \overline{u'_z u'_z}$$

Vê-se que, neste caso, a turbulência independe da direção. Para que isso possa acontecer, o tamanho dos vórtices deve ser pequeno. Somente pequenos vórtices podem ser isotrópicos. Grandes vórtices sofrerão efeito do cisalhamento do escoamento principal e de vórtices vizinhos, produzindo assim, através desse constante processo de deformação e divisão, intensidades de turbulência diferentes nas direções ortogonais.

- IV. Processo ergódico: Um dado processo físico é dito ergódico quando seus valores médios independem da amostragem (Bendat e Piersol, 1986). Em particular, a hipótese de ergodicidade, permite considerar que as médias de conjunto de realizações podem ser avaliadas através de médias no tempo se o processo é também estacionário, ou através de médias numa direção homogênea, se o processo é estatisticamente homogêneo nessa direção (Lesieur, 1997).

### 1.4.2 A decomposição de Reynolds

Este conceito considera que toda variável dependente escalar ou vetorial ( $u_i, p, \theta$ , ou em geral,  $f$ ) pode ser descomposta em uma parte média temporal mais uma parte flutuante,

$$f(t) = \bar{f} + f'(t), \quad (1.21)$$

onde o valor médio é definido como

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (1.22)$$

ou

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

se o período  $T$  é suficientemente grande, ou ainda como

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f_i,$$

para uma série numérica de comprimento  $N$ . Para esta decomposição ter sentido, o processo deve ser ergódico.

Em geral, considerando duas funções genéricas  $f$  e  $g$ , as seguintes propriedades do operador de média, podem ser demonstradas

$$\begin{aligned} \overline{f'} &= 0, & \overline{\overline{f}} &= \overline{f}, & \overline{f g} &= \overline{f} \overline{g}, & \overline{f' g} &= 0, & \overline{f + g} &= \overline{f} + \overline{g}, \\ \overline{f g} &= \overline{f} \overline{g} + \overline{f' g'}, & \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}, & \int \overline{f ds} &= \int \overline{f} ds. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Uma vez feita esta decomposição, substitui-se (1.21) nas equações de conservação de massa (1.4) e quantidade de movimento (1.5) para depois aplicar a média temporal. A motivação central nesta operação é de desenvolver equações de evolução para os valores médios e, partindo deles, poder obter as equações para diversas quantidades derivadas, como a energia cinética turbulenta, e as equações do escalar, a pressão e a vorticidade flutuante.

### 1.4.3 Balanço de Massa

A substituição da decomposição de Reynolds (1.21) na equação (1.4) resulta em

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i} + \overline{u'_i}) = 0. \quad (1.24)$$

Se agora aplicamos o operador média temporal (1.22) em (1.24), levando em conta as propriedades (1.23), obtém-se

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0, \quad (1.25)$$

que mostra que o campo médio de velocidades deve satisfazer continuidade. Fazendo a subtração de (1.24) a (1.25) têm-se

$$\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} = 0, \quad (1.26)$$

o que indica que o campo flutuante possui divergência nula. Dito de outra forma, ambos os campos devem satisfazer, independentemente entre si, o balanço de massa.

### 1.4.4 Balanço de Quantidade de Movimento

Substituindo a decomposição de Reynolds (1.21) para a velocidade e a pressão na Equação (1.5) e considerando as propriedades (1.23), tem-se

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j}. \quad (1.27)$$

Ao termo:  $-\rho \overline{u'_i u'_j} = \tau_t$ , dá-se o nome de tensão de Reynolds. O tensor de correlações,  $\overline{u'_i u'_j}$ , que compõem as tensões de Reynolds, é um tensor simétrico

$$\overline{u'_i u'_j} = \begin{bmatrix} \overline{u'_x u'_x} & \overline{u'_x u'_y} & \overline{u'_x u'_z} \\ \overline{u'_y u'_x} & \overline{u'_y u'_y} & \overline{u'_y u'_z} \\ \overline{u'_z u'_x} & \overline{u'_z u'_y} & \overline{u'_z u'_z} \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

É evidente que as tensões de Reynolds, na verdade, representam a recíproca dos fluxos de quantidade de movimento devido à presença das componentes flutuantes e não às tensões propriamente ditas. Por esse motivo, são também chamadas de tensões aparentes.

É comum unir-se a parte turbulenta com a tensão de Stokes (viscosa). Assim, a tensão geral ou total é  $\tau_g = \tau_t + \tau_l$ , isto é

$$\tau_{g_{ij}} = -\rho \overline{u'_i u'_j} + \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.29)$$

#### 1.4.5 Balanço de Energia

Considerando a decomposição de Reynolds aplicada sobre um escalar passivo

$$\theta = \bar{\theta} + \theta',$$

substituindo na Equação (1.6), aplicando o operador de média e levando em conta as propriedades (1.23), obtém-se

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_j \theta'}. \quad (1.30)$$

Analogamente à equação de quantidade de movimento, a equação de conservação do escalar, na aproximação de Reynolds, faz aparecer um novo termo denominado fluxo de escalar turbulento, o qual pode-se acrescentar ao fluxo molecular do escalar na forma

$$q_j = -k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \rho c_p \overline{u'_j \theta'}. \quad (1.31)$$

Claramente, a decomposição de Reynolds, introduz novas incógnitas e, portanto, o sistema não é mais fechado, no sentido de possuir igual número de equações que de incógnitas. Isto é denominado de *problema de fechamento*. Toda solução numérica de um escoamento turbulento fica sujeita à incorporação de equações adicionais, algébricas ou

diferenciais, ligando as tensões de Reynolds (1.28) e o fluxo do escalar turbulento (1.31) às variáveis médias  $(\overline{u_i}, \overline{\theta})$  correspondentes.

#### 1.4.6 Balanço de Tensões de Reynolds

Uma tentativa na busca de alternativas para contornar o problema de fechamento é procurar informações adicionais escrevendo uma equação de evolução para as tensões de Reynolds e para o fluxo do escalar turbulento (Hinze, 1975). Isto permite obter modelos matemáticos de segunda ordem para o cálculo de um escoamento turbulento. O procedimento para obter as equações das tensões de Reynolds é um ótimo exercício para todo aluno de turbulência. Em primeiro lugar deve-se obter a equação da flutuação de velocidade  $u'_i$ , para isso deve-se subtrair a Eq. (1.27) da Eq. (1.5) após prévia introdução da decomposição de Reynolds. Repete-se a operação para obter  $u'_j$ . A seguir, multiplica-se a equação de  $u'_i$  por  $u'_j$ , e a equação de  $u'_j$  por  $u'_i$ , e somam-se as duas equações. Finalmente, aplica-se o operador de média temporal Eq. (1.22). A equação resultante tem a seguinte forma

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = P_{ij}^u + T_{ij}^u + \Pi_{ij}^u + D_{ij}^u - \varepsilon_{ij}^u, \quad (1.32)$$

onde o termo do lado esquerdo representa a variação local e convectiva das tensões de Reynolds, enquanto que os outros termos são definidos por

$$P_{ij}^u = -(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}),$$

é o termo de produção de tensões de Reynolds,

$$T_{ij}^u = -\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k},$$

é o termo de transporte turbulento das tensões de Reynolds,

$$\Pi_{ij}^u = -\frac{1}{\rho} (\overline{u'_i} \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_i} + \overline{u'_j} \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_j}),$$

é o gradiente de pressão-velocidade,

$$D_{ij}^u = \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k},$$

é o termo de difusão viscosa de tensões de Reynolds,

$$\varepsilon_{ij}^u = 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_x} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k},$$

é o termo de dissipação.

Claramente, o fato de usar a decomposição nos termos não-lineares, introduz novas incógnitas, desta vez envolvendo novos termos de segunda ordem que também devem ser modelados, como por exemplo, no gradiente de pressão-velocidade, no termos de correlações triplas do tipo  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$  ou ainda no termo  $\overline{u'_j \theta'^2}$  na equação de evolução da flutuação do escalar passivo (Tennekes e Lumley, 1972).

#### 1.4.7 Balanço de Energia Cinética

Uma equação muito utilizada na modelagem da turbulência, é a equação de energia cinética da turbulência por unidade de massa,  $q'$ , dada pela soma dos valores quadráticos médios das flutuações de velocidade:

$$q' = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'_x u'_x} + \overline{u'_y u'_y} + \overline{u'_z u'_z}) \quad (1.33)$$

Uma equação de balanço é obtida igualando-se os termos de variação local e transporte convectivo com termos de geração, difusão e dissipação da energia cinética. Esta equação também pode ser obtida através da contração dos índices na equação de tensões de Reynolds (1.32), resultando em

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u_j \frac{\partial q'}{\partial x_j} = P^q - \varepsilon^q + D_c^q + D_v^q, \quad (1.34)$$

onde os dois primeiros termos representam a variação local e convectiva da energia cinética da turbulência, enquanto que os termos do lado direito da equação são definidos da seguinte forma

$$P^q = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j},$$

é o termo de produção de energia cinética, dado pelo trabalho de deformação do escoamento principal pelas tensões turbulentas; é o produto da tensão de Reynolds pelo rotacional da velocidade,

$$\varepsilon^q = \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}},$$

é a dissipação viscosa do movimento turbulento, por unidade de massa e de tempo; é a redução do movimento turbulento a movimento molecular,

$$D_c^q = -\overline{\frac{\partial}{\partial x_i} u'_i \left( \frac{p'}{\rho} + q' \right)},$$

é a difusão convectiva (feita pela turbulência) da energia mecânica total da turbulência ou trabalho total feito pela pressão dinâmica total da turbulência.

Por fim, o termo

$$D_v^q = \nu \frac{\partial}{\partial x_i} u'_j \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right),$$

é a difusão viscosa, ou seja, o trabalho realizado pelas tensões viscosas (de cisalhamento) no escoamento turbulento.

#### 1.4.8 Equação da Flutuação de Pressão

Usando a decomposição de Reynolds para a velocidade na equação de Poisson (Eq. 1.10) resulta em

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - 2\rho \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}'_j}{\partial x_i \partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 (u'_i u'_j)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.35)$$

A utilização desta equação para a determinação do campo de pressão é muito trabalhosa, e por isso, raramente usada. Porém ela fornece importantes informações sobre a flutuação de pressão. Para isto deve se introduzir a decomposição de Reynolds para a pressão, obtendo-se,

$$\nabla^2 p' = -2\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial^2 (u'_i u'_j)}{\partial x_i \partial x_j} + \rho \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.36)$$

Logo, as flutuações de pressão são geradas parte pela interação dos gradientes da velocidade média temporal com os gradientes da flutuação da velocidade, parte pela ação recíproca das diferentes componentes da flutuação da velocidade (Rotta, 1972). Pode-se concluir, de maneira geral, que é o campo flutuante vetorial que guia o campo flutuante escalar (Bradshaw, 1978).

### 1.5 Descrição Estatística da Turbulência

Neste capítulo serão introduzidas as diferentes funções estatísticas que são correntemente utilizadas na análise de sinais de escoamentos turbulentos.

#### 1.5.1 Análise de Fourier

A abordagem clássica para o estudo de fenômenos e processos aleatórios, amplamente aplicados ao estudo de escoamentos turbulentos, é a análise de Fourier. Usualmente, dados aleatórios, representando um determinado fenômeno, são apresentados em forma de séries temporais, obtidas a partir da digitalização (conversão A/D-analógico/digital) de um sinal contínuo (analógico), adquirido com uma frequência  $f_s$ , em forma de uma seqüência de números a intervalos  $\Delta t$  constantes. A metodologia para o estudo experimental pode ser obtida em Möller (2003). Na Fig. (1.9), são apresentados dois sinais da flutuação de velocidade de um escoamento turbulento,  $u'$  e  $v'$ , medidas simultaneamente no mesmo ponto no escoamento axial em um canal a um número de Reynolds  $Re=72000$ .

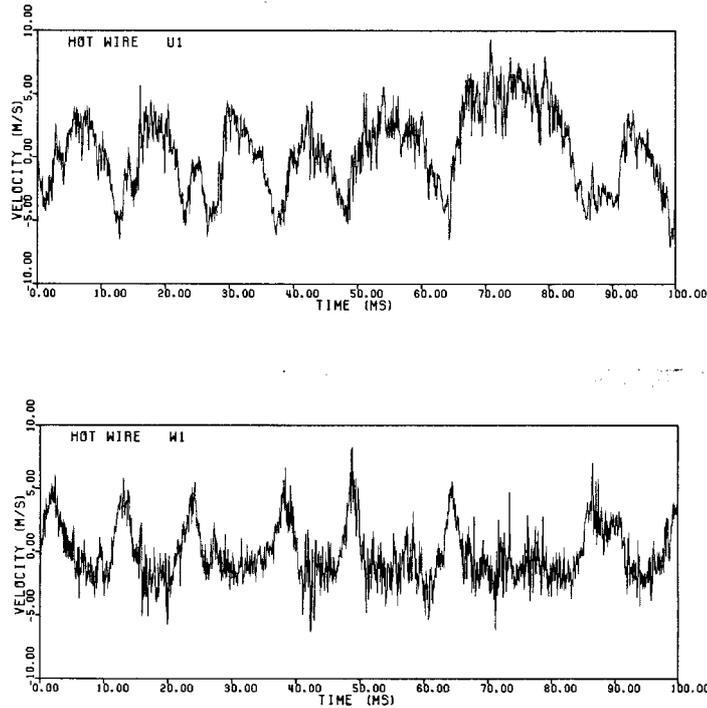


Figura 1.9. Registro temporal simultâneo de duas flutuações de velocidade  $U1=u'$ ,  $W1=w'$  (Möller, 1988, 2003).

A densidade autoespectral, também chamada espectro de potência (*power spectrum*) representa a razão de variação do valor quadrático médio de uma dada função  $x(t)$  com a frequência  $f$  (Bendat e Piersol, 1990):

$$\phi_{xx}(f) = \frac{1}{Be T} \int_0^T x^2(f, Be, t) dt, \quad (1.37)$$

onde  $T$  é um tempo adequado de observação e  $Be$  a largura de banda de frequências, ou seja, a resolução da função densidade autoespectral, doravante chamada simplesmente espectro. A integral do espectro de  $f = 0$  até  $f = \infty$ , é o valor quadrado médio da referida função.

No estudo do escoamento turbulento, a função mencionada  $x(t)$  é a flutuação da velocidade ou da pressão, dada pela decomposição de Reynolds (Eq. 1.21). Responsável pelas flutuações é a passagem de vórtices de vários tamanhos (escalas), cada escala é responsável por uma frequência no espectro.

Para uma dada função do tempo, pode-se determinar o espectro de frequência desta função que será o valor quadrado médio, por exemplo,  $\overline{u'^2}$ , como uma função de cada frequência nela contida. Isto pode ser obtido via um processo de filtragem “passa banda” que permite a passagem de uma banda de frequências apenas, de forma sucessiva, cobrindo toda a faixa de frequências presentes no sinal, como mostrado na Figura (1.10).

A frequência 0 Hz indica o valor da média temporal de  $u'$  ou o resíduo do mesmo (é comum haver resíduo de  $\overline{u}$  após a remoção da média) para cada termo  $u'_{i,n}$  da série

$$u'_{i,n} = u_{i,n} - \overline{u}_i. \quad (1.38)$$

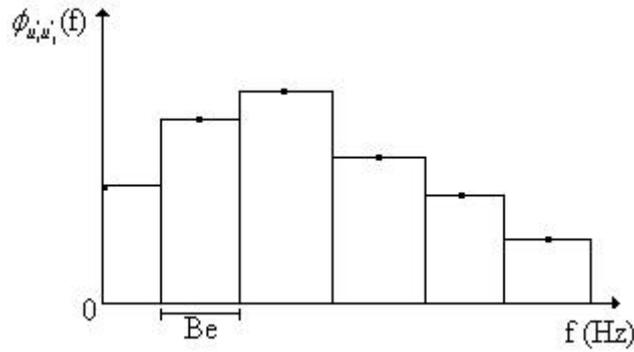


Fig. 1.10. Representação esquemática da obtenção de um espectro de frequências através de filtros passa banda.

Normalmente o espectro é apresentado em escala logarítmica, desprezando-se assim, a priori, o termo para  $f = 0$ . No espaço de Fourier, a densidade autoespectral será definida como a transformada de Fourier da função de autocorrelação  $R_{xx}(t)$ , definida como o valor médio do produto desta função a um tempo  $t$ , com o seu próprio valor a um tempo  $t + \tau$ , onde  $\tau$  é chamado tempo de defasagem.

Sejam, então,  $x(t)$  e  $y(t)$  duas funções genéricas do tempo, tal que uma função de correlação entre ambas pode ser escrita como,

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau) dt, \quad (1.39)$$

ou

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)}. \quad (1.40)$$

A função definida pela Equação (1.39) é chamada função de correlação cruzada. Ao ser normalizada pelos valores RMS de  $x(t)$  e  $y(t)$ , será denotada por  $C_{xy}$  e chamada função do coeficiente de correlação cruzada. O caso particular de  $x(t)=y(t)$  é a função de autocorrelação. Em ambos os casos, a interpretação é direta e o valor de  $C_{xy}$  estará entre  $-1$  e  $1$ . Se, para um dado tempo  $t$ ,  $C_{xy} = 1$ , as funções são idênticas (correlatas), se  $C_{xy}=0$  não há correlação entre as mesmas. O sinal negativo indica mudança de fase.

A densidade espectral cruzada será dada por

$$\phi_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (1.41)$$

que é uma função complexa, podendo ser representada por seu módulo e ângulo de fase. O caso particular de  $x(t)=y(t)$  é a função densidade autoespectral que é uma função real de  $f$ .

A análise espectral é essencialmente uma modificação da análise de Fourier, mais verdadeira para funções temporais aleatórias que funções determinísticas. A análise de Fourier é basicamente a aproximação de séries temporais através de uma soma de senos e cossenos chamada de série de Fourier (Chatfield, 1980).

Seja  $x(t)$ , definida em um intervalo  $(-\pi, \pi)$  que satisfaça as condições de Dirichlet:

- absolutamente integrável em  $(-\pi, \pi)$ ,
- tenha um número finito de descontinuidades,
- tenha um número finito de máximos e mínimos.

Então  $x(t)$  pode ser aproximada por uma série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^k (a_r \cos(rt) + b_r \text{sen}(rt)) \quad (1.42 - a)$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt \\ a_r &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(rt) dt \\ b_r &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \text{sen}(rt) dt \end{aligned} \right\} \quad (r = 1, 2, 3 \dots) \quad (1.42 - b)$$

Pode ser demonstrado que esta série converge para  $x(t)$  quando  $k \rightarrow \infty$ , exceto em pontos de descontinuidade, onde converge para  $\frac{1}{2}[x(t \rightarrow 0^-) + x(t \rightarrow 0^+)]$ , isto é: a média dos valores à esquerda e à direita da descontinuidade, suavizando a função neste ponto.

### 1.5.2 Correlações Espaciais e Temporais Eulerianas

A função de correlação cruzada, definida através das Equações (1.39) e (1.40), pode ser utilizada como ponto de partida para a análise estatística da turbulência, substituindo-se as funções genéricas  $x(t)$  e  $y(t)$  por componentes da flutuação da velocidade ou da pressão. Tomando-se, por exemplo, duas componentes da flutuação de velocidade  $u'_i$  e  $u'_j$ ,

$$R_{u'_i u'_j}(\tau) = \overline{u'_i(\vec{r}, t) u'_j(\vec{r}, t + \tau)}, \quad (1.43)$$

que normalmente é normalizada pela amplitude de  $u'_i$  e  $u'_j$ , definindo-se assim o coeficiente de correlação cruzada

$$C_{u'_i u'_j} = \frac{\overline{u'_i(\vec{r}, t) u'_j(\vec{r}, t + \tau)}}{\sqrt{u_i'^2} \sqrt{u_j'^2}}. \quad (1.44)$$

$C_{u'_i u'_j}$  é uma correlação temporal Euleriana, que assume valores entre  $-1$  e  $1$ . Se o seu valor for igual a  $1$ , então as duas funções  $u'_i$  e  $u'_j$  são idênticas, ou seja,  $100\%$  correlacionadas, se o sinal de  $C_{u'_i u'_j}$  for negativo, indica oposição de fase e se  $C_{u'_i u'_j} = 0$  não há correlação entre elas. Assim, esta função quantifica o grau de correlação entre duas funções ao longo do tempo.

A partir das Equações (1.43) e (1.44) pode-se estabelecer uma série de funções importantes para a descrição e análise dos escoamentos turbulentos. A primeira delas é a função de autocorrelação, tomando-se, por exemplo,  $u'_i$ , e observando-se qual o grau de correlação que mantém consigo próprio ao longo do tempo. Nesse caso,  $C_{u'_i u'_i}$  é a função coeficiente de autocorrelação.

O caso particular em que  $\tau = 0$ , leva às correlações espaciais Eulerianas, que podem ser calculadas entre duas componentes da flutuação de velocidade no mesmo ponto ou em

diferentes pontos do escoamento. Por exemplo, as correlações duplas velocidade – velocidade (tensor de segunda ordem) é dada por

$$R_{u'_i u'_i} = \overline{u'_i u'_i} , \quad (1.45)$$

sendo seu coeficiente de correlação para dois pontos A e B (Schlichting, 1969)

$$C_{u'_i u'_i} = \frac{\overline{u'_i u'_i}}{\sqrt{\overline{u'^2_{iA}}} \sqrt{\overline{u'^2_{iB}}}} . \quad (1.46)$$

Se A e B não coincidem, a função de correlação introduzida por Taylor vai dar a distribuição espacial de  $C_{u'_i u'_i}$ , onde  $\bar{x}$  é a posição

$$C_{u'_i u'_i}(\bar{x}_0) = \frac{\overline{u'_i(\bar{x}) u'_i(\bar{x} + \bar{x}_0)}}{\sqrt{\overline{u'^2(\bar{x})}} \sqrt{\overline{u'^2(\bar{x} + \bar{x}_0)}}} . \quad (1.47)$$

A integral da função de correlação  $C_{u'_i u'_i}(\bar{x})$ , leva à escala integral da turbulência como será visto adiante.

Além disso, são importantes as correlações vetor-escalar, por exemplo: velocidade – pressão

$$R_{u'_i p'_B} = \overline{u'_i p'_B} . \quad (1.48)$$

O caso particular é quando a posição A e B coincidem. O coeficiente de correlação é dado por:

$$C_{u'_i p'_A} = \frac{\overline{u'_i p'_A}}{\sqrt{\overline{u'^2_{iA}}} \sqrt{\overline{p'^2_A}}} . \quad (1.49)$$

Outros exemplos são:

- Correlação velocidade – temperatura na Equação da energia (1.30)

$$R_{u'_i \theta'_B} = \overline{u'_i \theta'_B} , \quad (1.50)$$

- Correlação velocidade-concentração

$$R_{u'_i c'_B} = \overline{u'_i c'_B} ,$$

usada no estudo da transferência de massa ou em analogias para transferência de calor, e também em estudos da dispersão de poluentes.

## 1.6 O Espectro da Turbulência

A função densidade autoespectral de uma dada função temporal, definida através da Eq. (1.37) aplicada a uma dada componente da flutuação de velocidade, apresenta a variação do valor quadrado médio dessa componente como função da frequência  $f$ . A cada frequência pode-se associar um tamanho (escala) de vórtices, responsável por aquela flutuação.

É comum falar no espectro tridimensional da turbulência. Ocorre que não se pode “medir os vórtices” e sim as flutuações que eles causam. Assim, o espectro é dividido em três componentes, cada uma correspondendo a uma flutuação de velocidade e que são interseções daquela componente com o espectro tridimensional. Considerando-se, também, as densidades espectrais cruzadas, pode-se concluir que, junto com as densidades espectrais, elas formam um tensor simétrico com nove elementos.

Com  $\overline{u_x}$  como a velocidade na direção principal do escoamento, define-se um “número de onda” unidimensional dado pela equação,

$$k_x = \frac{2\pi f}{\overline{u_x}}, \quad (1.51)$$

que corresponderia ao inverso do diâmetro de um vórtice que gera uma determinada frequência  $f$ . Para se calcular um número de onda deve-se lançar mão à hipótese de Taylor da “turbulência congelada”: a estrutura da turbulência não se altera para altos números de Reynolds e a condição de que a velocidade média  $\overline{u_x} \gg \sqrt{u'^2}$  pode ser deduzida como condição necessária para sua aplicação (Rotta, 1972).

O espectro pode então ser escrito como função do número de onda. A este novo espectro damos o nome de espectro do número de onda. A relação entre o espectro de frequência e de número de onda é dada pela equação,

$$\phi_{ii}(k_x) = \frac{\overline{u_x}}{2\pi} \phi_{ii}(f). \quad (1.52)$$

O espectro tridimensional é um escalar e representa o espectro de vórtices como função de um número de onda  $k$  resultante de números de onda unidimensionais  $k_x$ ,  $k_y$ , e  $k_z$ . Pode-se identificar no espectro várias regiões a partir de uma reflexão sobre tamanho de vórtices, tomando como base o espectro da turbulência isotrópica.

Os três espectros das 3 componentes da flutuação da velocidade são, como já descrito, as interseções que podem ser medidas dos espectros unidimensionais com os 3 dimensionais. Se a turbulência está decaindo, por exemplo na a turbulência gerada por uma grade, então o espectro  $\phi$  é função do número de onda  $k$  e também do tempo.

Nos escoamentos turbulentos os vórtices são gerados por cisalhamento ou por gravidade em várias escalas. Os grandes vórtices retiram energia do escoamento principal e a transferem para os vórtices menores até sua redução a movimento molecular, na escala de energia de Kolmogorov. Este processo é denominado cascata de Kolmogorov.

Num espectro a energia é distribuída conforme os vórtices diminuem de tamanho, isto implica no crescimento do número de onda. Para baixos números de onda, identifica-se primeiramente a região dos grandes vórtices, que dependem das condições de formação e tendem a se manter ao longo de todo o escoamento (tendem a não decair). Pode-se, assim, distinguir, de forma simplificada, as seguintes regiões:

- Região com baixa frequência onde as escalas são limitadas pelas dimensões do domínio considerado. É a região dos grandes vórtices.
- A região dos vórtices portadores de energia, concentrando a maior parcela de energia cinética da turbulência. Tem sua origem no termo de produção, estando associada à escala integral que será vista a seguir. Na turbulência de grade esta escala é da ordem do tamanho da grade.
- A última região foi chamada por Kolmogorov de região do equilíbrio universal, dado que ela se encontra em qualquer escoamento turbulento. É onde a dissipação ocorre. A propriedade importante dessa região é a isotropia local (local no espectro). É caracterizada por duas sub-regiões

$$\begin{array}{ll}
 - \phi \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} & \text{Sub-região inercial (Kolmogorov).} \\
 - \phi \sim k^{-7} & \text{Dissipação viscosa (Heisenberg).}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}} \right\} \quad (1.53)$$

A existência de isotropia local é condição necessária para a existência de uma subregião inercial, além de um valor de número de Reynolds que permita sua ocorrência. A simples existência de um expoente de  $-5/3$  no espectro não implica necessariamente na existência de uma subregião inercial, pois o espectro, ao assumir um expoente  $-7$  para a dissipação viscosa deverá passar pelo expoente  $-5/3$  (Bradshaw, 1967). A sub-região inercial é caracterizada, como descrito por von Weiszäcker (1948), por *elementos de turbulência pequenos diante dos maiores e grandes diante dos menores*. Nesta região os vórtices giram por inércia enquanto decaem em vórtices menores.

A dissipação ocorre principalmente a partir de um tamanho de vórtice (dado pelo correspondente  $k_x$ ) a partir do qual os efeitos da viscosidade aparecem. Esta região dada por um expoente  $k^{-7}$  é chamada região de dissipação viscosa estabelecida por Heisenberg (1948).

Na turbulência de parede, pode-se identificar basicamente duas regiões de importância. Na região dos grandes vórtices, encontra-se, apenas na componente longitudinal, uma região correspondente à produção da energia cinética. Essa é região dos vórtices que contém energia e que se originam no rotacional do vetor velocidade e é chamada “produção” porque é nela que a energia da turbulência é gerada, através da interação da vorticidade com as tensões de Reynolds (vide balanço de energia cinética da turbulência). Se existe um forte gradiente de velocidade como por exemplo junto a parede, o espectro assume um expoente  $-1$ , assim

$$\phi_{u_x u_x} \sim k_x^{-1}, \quad (1.54)$$

este expoente porém, só vai existir no espectro da componente da flutuação da velocidade na direção principal do escoamento, ou seja, na direção da força resultante da tensão de cisalhamento.

Nos estudos experimentais, deve-se considerar nas mais baixas frequências, a presença dos efeitos do canal (ondas planas, efeitos do ventilador) assim como resíduos da média na série numérica, etc.

As regiões típicas do espectro estão ilustradas na Figura (1.11), que mostra as três regiões de importância no espectro (Vicari, 1996). As medições foram feitas utilizando-se técnica de anemometria de fio quente em um tubo circular a um valor do número de Reynolds  $Re=54000$ , a valores crescentes da distância y medida a partir da parede do tubo. Pode-se observar que a região com expoente  $-1$  é mais evidente para valores pequenos da distância adimensional  $y/R$ , que corresponde à região onde ocorrem os mais intensos gradientes de velocidade, sendo a produção da energia cinética mais elevada (Lawn, 1971).

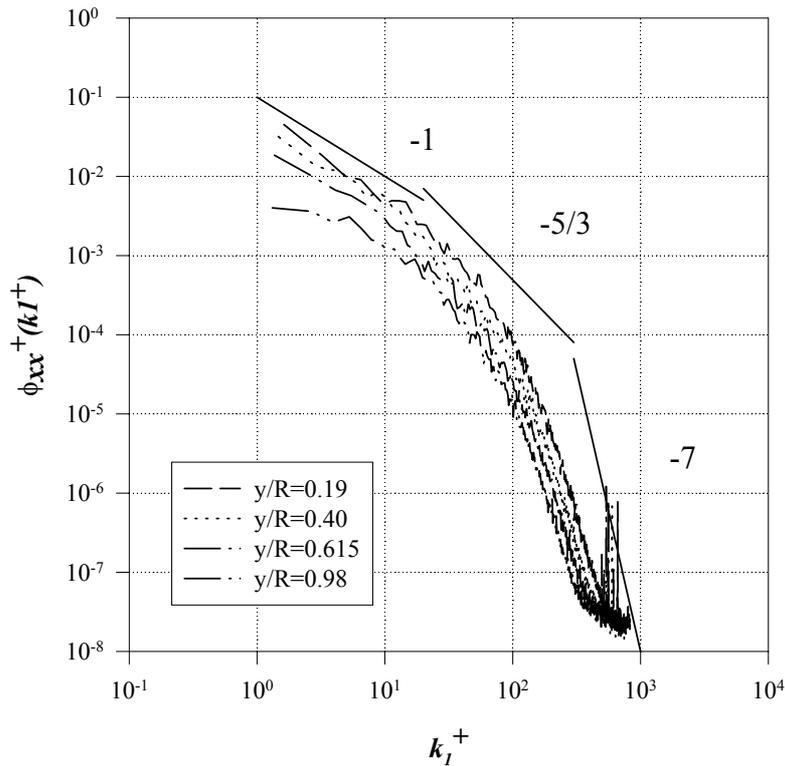


Fig. 1.11. Espectro da componente axial da flutuação de velocidade em um duto circular para várias distâncias da parede. As linhas retas indicam as declividades (Vicari, 1996).

### 1.7. Escalas da Turbulência

A dinâmica dos escoamentos com números de Reynolds altos é caracterizada pela existência de várias escalas de comprimento, dadas, num extremo, pelas dimensões do canal, e na outro pela ação difusiva da viscosidade molecular (Tennekes e Lumley, 1972). Um exemplo de aplicação de escalas é a análise de ordem de grandeza feita por Prandtl na simplificação da camada limite.

Tomando-se o número de Reynolds para a camada limite laminar junto a uma placa plana (Fig. 1.12)

$$\text{Re} = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\rho U^2 / L}{\mu U / L^2} \left( = \frac{\rho U^2 L^3}{\rho U L^2} \right), \quad (1.55)$$

onde o numerador da fração entre parêntesis é as forças de inércia e o denominador as forças viscosas por unidade de volume, e  $L$  é um comprimento característico, por exemplo, o comprimento da placa plana.

Em altos números de Reynolds, as forças viscosas podem ser negligenciadas diante das forças de inércia, exceto junto à parede, devido à condição de não deslizamento. Pode-se identificar aqui a primeira escala: o comprimento característico  $L$ . Uma escala para o tempo seria dada por  $L/U$ .

Próximo à parede, as forças viscosas têm a mesma ordem de magnitude que as forças de inércia. Pode-se escolher um novo comprimento  $l$  tal que:

$$\rho U^2 / L \sim \mu U / l^2, \quad (1.56)$$

Os comprimentos se relacionam, portanto por:

$$\frac{l}{L} \sim \left( \frac{\nu}{UL} \right)^{1/2} = \text{Re}^{-1/2} \quad (1.57)$$

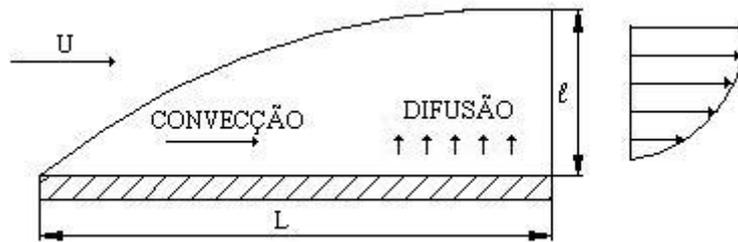


Figura 1.12. Escala de comprimento, difusão e convecção em uma camada limite laminar sobre uma placa plana.

Na camada limite turbulenta têm-se a difusão turbulenta associada aos processos presentes na camada limite laminar, como mostrado esquematicamente na Fig. (1.13).

As escalas de comprimento  $L$  e de tempo convectiva  $L/U$  são mantidas. A espessura da camada limite  $l$  vai variar com o tempo conforme a flutuação da velocidade:

$$\frac{dl}{dt} \sim u'. \quad (1.58)$$

Pode-se escrever que

$$\frac{l}{L} \sim \frac{u}{U} \Leftrightarrow \frac{l}{u} = \frac{L}{U}. \quad (1.59)$$

São consideradas, assim, apenas as escalas para os grandes vórtices. À medida, porém, que o tamanho dos vórtices for diminuindo, outras escalas serão consideradas. Estabelece-se aqui o conceito de “cascata de energia” de Kolmogorov, que descreve o fluxo de energia cinética dos maiores vórtices para os menores até a sua transformação em calor através da dissipação viscosa.

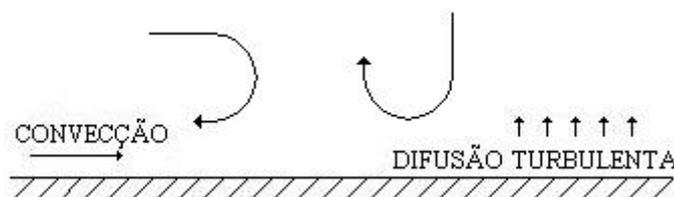


Figura 1.13. Escalas de comprimento e velocidade em uma camada limite turbulenta.

À medida que as escalas do escoamento se tornam tão grandes que os efeitos da viscosidade poderiam ser desprezados, o próprio escoamento cria o movimento nas pequenas escalas, mantendo os efeitos da viscosidade (e as taxas de dissipação  $\varepsilon$ ) em níveis finitos.

Como os movimentos de pequena escala tendem a ter pequenas escalas de tempo, pode-se assumir que elas são estatisticamente independentes dos movimentos de grande escala. Se esta hipótese é válida (*e é*), este movimento de pequena escala depende somente da energia que recebe das grandes escalas e da viscosidade cinemática, e a taxa de energia recebida seria igual à taxa de energia dissipada. Esta seria a base da teoria do equilíbrio universal de Kolmogorov.

A idéia de que a energia é transferida das maiores escalas para as menores, até sua dissipação em calor através da ação da viscosidade leva ao conceito chamado Primeira Hipótese de Kolmogorov, que estabelece que para altos números de Reynolds, as pequenas escalas são estatisticamente independentes, isotrópicas e independentes das grandes escalas (Pao, 1965).

As micro escalas (ou escalas internas) são: a escala de comprimento

$$\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}, \quad (1.60)$$

a escala de tempo

$$\tau = (\nu / \varepsilon)^{1/2}, \quad (1.61)$$

e a escala de velocidade

$$v = (\nu \varepsilon)^{1/4}. \quad (1.62)$$

O número de Reynolds para estas escalas é

$$\eta v / \nu = 1, \quad (1.63)$$

o que indica que o escoamento nestas escalas é viscoso e que a dissipação viscosa se ajusta à energia fornecida ajustando as escalas de comprimento. Com base nestes primeiro conceitos introduzidos, pode-se ver como estas escalas se relacionam entre si e com o escoamento propriamente dito.

As Micro e Macro Escalas de Taylor (Bernard e Wallace, 1998) são definidas a partir da função de autocorrelação

$$R_{u'_x u'_y}(r) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta u'_x(t) u'_y(t) dt = \overline{u'_x u'_y}, \quad (1.64)$$

e do coeficiente de auto-correlação

$$C_{u'_x u'_y}(r) = \frac{\overline{u'_x u'_y}}{u_x'^2}. \quad (1.65)$$

A micro escala  $\lambda$  é definida como a distância da origem aonde  $C_{u'_x u'_y}$  pode ser aproximada por uma parábola, chamada parábola osculatória. Para um escoamento homogêneo pode-se provar que

$$\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2} = \frac{2\overline{u'^2}}{\lambda^2}. \quad (1.66)$$

A integral da função coeficiente de autocorrelação  $C_{u'_x u'_y}$  dá a escala Euleriana de tempo

$$\tau_{EU} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C_{u'_x u'_y}(\tau) d\tau. \quad (1.67)$$

Já a escala integral de comprimento (Macro Escala de Taylor) será dada pela integral da função de correlação cruzada da componente longitudinal da flutuação de velocidade medida colocando-se um anemômetro de fio quente a uma posição fixa, por exemplo, no centro do canal estudado e uma segunda sonda em posições variáveis, tal que

$$\Lambda = \int_0^{\infty} C_{u'_x u'_y}(\bar{r}) d\bar{r}. \quad (1.68)$$

Esta expressão dá a escala dos grandes vórtices em um escoamento turbulento. O experimento realizado por Taylor (1936), pioneiro na utilização de anemometria de fio quente para a determinação de parâmetros do escoamento turbulento em um duto circular, mostrou que, para este tipo de canal, a escala  $\Lambda$  é aproximadamente igual ao raio do duto. Pode-se concluir que, para um canal ou para a camada limite, o valor de  $\Lambda$  é da ordem da espessura da camada de cisalhamento.

Pode-se tomar, como estimativa

$$\Lambda \cong ky, \quad (1.69)$$

onde  $k$  é uma constante que lembra a relação entre comprimento de mistura e distância da parede utilizada por Prandtl na dedução da Lei da Parede (Schlichting, 1968).

A parede é quem impõe a “restrição” importante ao escoamento por causa da viscosidade: a condição de não deslizamento. Isto vai dar origem a um comprimento característico, ditado pela viscosidade, e uma velocidade característica  $u^*$ , chamada velocidade de fricção, respectivamente

$$l = \frac{\nu}{u^*}, \quad (1.70)$$

onde

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (1.71)$$

onde  $\tau_w$  é a tensão de cisalhamento na parede.

Adimensionalizando-se a escala de Kolmogorov,

$$\eta^* = \frac{\eta u^*}{\nu} \cong (ky^+)^{1/4}, \quad (1.72)$$

e, igualmente a escala integral

$$\Lambda^+ = \frac{\Lambda u^*}{\nu} \cong ky^+, \quad (1.73)$$

onde  $y^+$  é a distância adimensional à parede dada por

$$y^+ = \frac{yu^*}{\nu}. \quad (1.74)$$

Pode-se ver destas relações que se  $y^+$  é pequeno, a escala integral se torna menor que a escala de Kolmogorov, o que é impossível, donde se conclui que a turbulência não pode se sustentar e não pode gerar tensões de Reynolds se  $y^+$  é pequeno (Tennekes e Lumley, 1972).

## 1.8 Conclusões

Este capítulo procurou estabelecer alguns conceitos necessários para a compreensão da turbulência nos escoamentos de fluidos. Espera-se, assim, permitir um melhor acompanhamento dos capítulos subsequentes.

A partir de uma formulação clássica são introduzidos conceitos “modernos”, como o de estruturas coerentes, passando por informações importantes do processo de transição para a turbulência e a presença da vorticidade tridimensional.

O intrincado processo da turbulência, desde sua geração até sua dissipação em movimento molecular por ação da viscosidade, é descrito através das equações governantes, das escalas da turbulência, do espectro e das energias nele envolvidas.

Para finalizar, o verso de L. F. Richardson (Pao, 1965) que descreve o fluxo de energia das maiores para as menores escalas da turbulência no processo chamado “cascata de energia” de Kolmogorov:

*Big whirls have little whirls,  
That feed on their velocity,  
And little whirls have lesser whirls,  
And so on to viscosity.*

## Agradecimento

Os Autores agradecem ao Dr.-Ing. Leonhard Meyer, Forschungszentrum Karlsruhe, Alemanha, pela cessão das fotografias das figuras 1.1 e 1.2.

## Referências Bibliográficas

- BATCHELOR, G. K., 1967. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- BENDAT, J. S. AND PIERSOL, A. G., 1990. *Random Data – Analysis and Measurement Procedures*, 2<sup>nd</sup> Ed., Wiley, New York.
- BERNARD, P. S. AND WALLACE, J. D., 1998. Turbulent Flows, *Encyclopedia of Applied Physics*, vol. **22**, 339.
- BETCHOV, R., SZEWCZYK, A., 1963. Stability of shear layer between parallel streams, *Physics of Fluids*, vol. **6**, 1391.
- BETCHOV, R., CRIMINALE, W., 1967. *Stability of parallel flows*, Academic, New York.
- BLEVINS, R. D., 1990. *Flow induced vibration*, Van Nostrand-Reinhold, New York.
- BRADSHAW, P., 1967. *Conditions for the existence of an inertial subrange in turbulent flow*. NPL Aero Report 1220.
- BRADSHAW, P., 1978. *An introduction to turbulence and its measurement*. Pergamon, Oxford.
- BROWN, G. ROSHKO, A., 1971. On density effects and large structure in turbulent mixing layers, *J. Fluid Mechanics*, vol. **64**, 775.
- CHATFIELD, C., 1980. *The Analysis of Time Series – An Introduction*, Chapman & Hall, New York.
- CRAIK, A., 1971. Non-linear resonant instability in boundary layers, *J. Fluid Mechanics*, vol. **50**, 393.
- DESCHAMPS, C., 2002. Modelos Algébricos e Diferenciais. *Turbulência*, vol. **1**, Eds. A. Silva Freire, P. Menut e J. Su, pp. 101,155. ABCM, Rio de Janeiro, RJ.
- DRAZIN, P., REID, W., 1981. *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, Cambridge.
- DUBIEF, Y., DELCAYRE, F., 2000. On coherent-vortex identification in turbulence, *J. of Turbulence*, vol. **1**, 1.
- FJORTOFT, R., 1950. Application of integral theorems in deriving criteria of stability of laminar flow and for the baroclinic circular vortex, *Geofys. Publ.*, vol. **17**, 1.
- HEISENBERG, W., 1948. Zur statistischen Theorie der Turbulenz, *Zeitschrift für Physik*, vol. **124**, 628.
- HINZE, J. O., 1975. *Turbulence*, Mc Graw-Hill, New York.
- HUSSAIN, F., 1986. Coherent structures and turbulence, *J. Fluid Mechanics*, vol. **173**, 303.
- JEONG, J., HUSSAIN, F., 1995. On the identification of a vortex, *J. Fluid Mechanics*, vol. **285**, 69.
- LANDAU, L., 1944. Turbulence, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. **44**, 339.
- LAWN, C. J., 1971. The Determination of the Rate of Dissipation in Turbulent Pipe Flow, *J. Fluid Mechanics*, vol. **48**, 477.
- LESIEUR, M., 1997. *Turbulence in fluids*, 3<sup>rd</sup> Ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- MATTINGLY, G. CRIMINALE, W., 1972. The stability of an incompressible two-dimensional wake, *J. Fluid Mechanics*, vol. **51**, 233.
- MEDEIROS, M. AND MENDONÇA, M., 2002, Estabilidade hidrodinâmica. 9th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, Caxambú, Outubro 15-18, ABCM, Rio de Janeiro, RJ.
- MEYER, L. REHME, K., 1994 Large-scale turbulence phenomena in compound rectangular channels, *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. **8**, 286.
- MEYER, L.; REHME, K., 1995, Periodic vortices in flow through channels with longitudinal slots or fins. 10th Symp. on Turbulent Shear Flows, University Park, Pa.

- MÖLLER, S. V., 1988. *Experimentelle Untersuchung der Vorgänge in engen Spalten zwischen den Unterkanälen von Stabbindeln bei turbulenter Strömung*, Dissertation Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, RFA, também: KfK 4501, 1989.
- MÖLLER, S. V., 2003. Experimentação em turbulência, *Turbulência*, vol. 2, Editores: A. Silveira Neto e S. S. Mansur, pp. 217-220, ABCM, Rio de Janeiro, RJ.
- NACHTSHEIM, P., 1964. *An initial value method for the numerical treatment of the Orr-Sommerfeld equation for the case of plane Poiseuille flow*, National Aeronautics and Space Administration Technical Note D-2414.
- NAVIER, C. L., 1823. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, *Mém. Acad. Roy. Sci.*, vol. 6, 389.
- NIKURADSE, J., 1932. Gesetzmässigkeit der Turbulenten Strömung in Glatten Rohren, *VDI-Forschungsheft* 356.
- PAO, Y-H, 1969. The Structure of Turbulent Velocity and Scalar Fields at Large Wavenumbers, *Physics of Fluids*, vol. 8, 1063.
- PETRY, A. P. AND AWRUCH, A. M., 2004. Large eddy simulation of three-dimensional turbulent flows by the finite element method, *Anais da ETT 2004 – Escola de Primavera de Transição e Turbulência*, Porto Alegre, RS.
- ROTTA, J. C., 1972. *Turbulente Strömungen*, B. G. Teubner, Stuttgart
- SCHLICHTING, H., 1968. *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York.
- SILVEIRA, A., 2002. Simulação de grandes escalas de escoamentos turbulentos, *Turbulência*, vol. 1, Eds. A. Silva Freire, P. Menut e J. Su, pp. 101,155. ABCM, Rio de Janeiro, RJ.
- SILVESTRINI, J.H., 1996. *Simulation des grandes échelles des zones de mélange: application à la propulsion solide des lanceurs spatiaux*, Thèse de Doctorat, Institut Nationale Polytechnique de Grenoble, França.
- SILVESTRINI, J.H., 2003. Simulação numérica direta e de grandes escalas de escoamentos transicionais e turbulentos, *Turbulência*, vol. 2, Editores: A. Silveira Neto e S. S. Mansur, pp. 1-73, ABCM, Rio de Janeiro, RJ.
- SILVESTRINI, J.H., LAMBALLAIS, E., 2004. Direct numerical simulation of oblique vortex shedding from a cylinder in shear flow, *Int. Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 25, 461.
- SQUIRE, H., 1933. On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel flows, *Proc. Royal Soc. London, Ser A* vol. 142, 621.
- STOKES, G., 1843. On some cases of fluid motion, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, vol. 8, 105.
- TAYLOR, G. I., 1936. Correlation measurement in a turbulent flow in a pipe, *Proc. Royal Soc. London, Ser A* vol. 157, 537.
- TENNEKES, H. AND LUMLEY, J.L., 1972. *A First Course in Turbulence*, The MIT Press, Cambridge, MA.
- TOWNSEND, A. A. 1976. *The structure of turbulent shear flow* (2<sup>nd</sup> Ed.), Cambridge University Press, Cambridge.
- TRITTON., D., 1988. *Physical fluid dynamics* (2<sup>nd</sup> Ed), Oxford Science Publications, Osford.
- VICARI, K. F. F., 1996, Estudo experimental do escoamento turbulento em um duto circular com promotores de turbulência internos, Dissertação de Mestrado, PROMEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre.
- VON WEISZÄCKER, R., 1948, Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen, *Zeitschrift für Physik*, vol. 124, 614.
- WAZZAN, A., OKAMURA, T., SMITH, A., 1968. The stability of water flow over heated and cooled flat plates, *J. Heat Transfer*, vol. 90, 109.
- WILLMARTH, W. W. 1975. Pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers, *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 7, 13.