

## Soluções exatas para a Equação de Helmholtz em duas dimensões.

**Zabadal, J. R.**

jorge.zabadal@ufrgs.br

**Beck, D.**

dbeck@vortex.ufrgs.br

**Santiago, G.**

gfsant@terra.com.br

PROMEC - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Rua Sarmento Leite, 425 - sala 314  
Porto Alegre - RS  
CEP 90050-170

*Resumo: No trabalho proposto é apresentada uma nova solução analítica para a equação de Helmholtz em duas dimensões para domínios de formato arbitrário. Essa solução é obtida utilizando o fato de que qualquer transformação conforme constitui uma simetria de Lie admitida pela equação. Simulações para escoamentos turbulentos são apresentadas.*

*Palavras-chave: Equação de Helmholtz, Soluções exatas, simetrias de Lie.*

### 1. Introdução

O emprego de Simetrias de Lie na obtenção de soluções exatas para equações diferenciais parciais (Olver, 2000; Bluman, 1989; Zwillinger, 1992; Zabadal, 2001, 2002) tem-se mostrado um procedimento bastante vantajoso do ponto de vista computacional na análise de escoamentos viscosos (Zwillinger, 1992). Entretanto, suas aplicações em mecânica dos fluidos têm sido direcionadas, desde a década de setenta, para a resolução das equações de Navier-Stokes (Ibragimov, 1995). As principais desvantagens deste procedimento residem na impossibilidade de encontrar Simetrias associadas à produção de componentes flutuantes. Dessa forma, todas as soluções obtidas através do emprego de Simetrias para o sistema Navier-Stokes e continuidade resultam exatas apenas para escoamentos laminares.

No trabalho proposto são obtidas soluções exatas para a Equação de Helmholtz bidimensional transiente através do emprego indireto de Simetrias de Lie. Essas soluções, capazes de produzir componentes flutuantes na escala da rugosidade, são válidas para escoamentos viscosos em torno de corpos submersos com geometria arbitrária.

### 2. O conceito de simetria de Lie

Simetrias de Lie são mudanças de variáveis utilizadas para transformar soluções exatas de uma determinada equação diferencial em novas soluções exatas, capazes de satisfazer a um conjunto mais amplo de condições iniciais e de contorno. Como exemplo, a equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad , \quad (1)$$

admite como solução exata a função

$$T_1 = c_2(x^2 + 2t) + c_1x + c_0 \quad , \quad (2)$$

que obedece a um conjunto relativamente restrito de condições de contorno. Entretanto, a partir dessa expressão é possível construir novas soluções exatas contendo maior número de constantes arbitrárias. A solução

$$T_2 = c_3(x^3 + 6xt) + c_2(x^2 + 2t) + c_1x + c_0 \quad ,$$

obtida a partir de  $T_1$  através da aplicação de um operador integro-diferencial, contém maior número de constantes arbitrárias, e se reduz a  $T_1$  para  $c_3=0$  podendo, portanto, satisfazer a um conjunto mais amplo de restrições. Todas as mudanças de variáveis que transformam soluções exatas de uma determinada equação diferencial em novas soluções

s são denominadas *simetrias de Lie admitidas pela equação*, ou simplesmente simetrias. Dentre as diversas técnicas analíticas desenvolvidas para obter simetrias (Ibragimov, 1995; Dattoli, 1998; Chari, 1994), o esquema utilizado no trabalho proposto é chamado *método de substituição direta* (Bluman, 1989), sendo empregado na obtenção de soluções exatas para a equação de Helmholtz transiente em duas dimensões. Para tanto, se faz necessário obter ao menos uma solução para dar início ao processo. O processo através do qual é obtida a primeira solução exata é apresentado a seguir.

### 3. Obtenção de uma solução exata válida para subdomínios do campo de escoamento

A equação de Helmholtz bidimensional em regime transiente é dada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega. \quad (3)$$

A fim de obter uma solução particular para a equação (3), pode ser produzido um sistema auxiliar de equações homogêneas:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \nabla^2 \omega = 0 \quad (4)$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

A solução geral da equação (5) é uma função arbitrária da função corrente. De fato, substituindo  $\omega = f(\psi)$  em (5), aplicando a regra da cadeia e colocando  $\frac{df}{d\psi}$  em evidência, resulta

$$\frac{df}{d\psi} \left( u \frac{\partial \psi}{\partial y} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0, \quad (6)$$

uma vez que o termo entre parênteses é identicamente nulo. Dessa forma, a função corrente pode ser expressa como uma função arbitrária da vorticidade: se  $\omega = f(\psi)$ ,  $\psi = f^{-1}(\omega) = g(\omega)$ , sendo  $\omega$  qualquer solução da equação (4). Tomando uma solução particular dessa equação, dada por

$$\omega = e^{c_0 + c_1 x + c_2 y + \nu(c_1^2 + c_2^2)t} \quad (7)$$

a respectiva função corrente resulta

$$\psi = g(e^h) + \psi_0 \quad (8)$$

onde  $h$  é o argumento da exponencial presente na equação (7), e a parcela  $\psi_0$  corresponde à função corrente relativa ao escoamento potencial em torno do corpo submerso. Embora a expressão obtida não constitua a solução geral da equação de Helmholtz, a função arbitrária nela contida pode satisfazer identicamente às condições de não-deslizamento e não-penetração na interface do corpo submerso. Impondo as condições  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$  resulta  $g'(h) = 0$  na fronteira.

Além disso, a solução se reduz à função corrente relativa ao escoamento potencial à medida que são tomados pontos progressivamente mais afastados da interface sólida. Basta para tanto impor a condição

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} g(h) = 0. \quad (9)$$

Essa expressão constitui o ponto de partida para a obtenção de novas soluções exatas para equação de Helmholtz válidas para qualquer geometria a considerar. O processo de obtenção dessas soluções válida para todo o domínio, que consiste na aplicação de simetrias admitidas pela equação de Helmholtz, é apresentado a seguir.

#### 4. Construção de novas soluções exatas

A fim de construir novas soluções a partir de (8), são efetuadas as seguintes mudanças de variável:

$$x \rightarrow a(x,y), \quad y \rightarrow b(x,y), \quad (10)$$

onde  $a$  e  $b$  representam as partes real e imaginária de uma função de variável complexa  $f(z)$ , sendo  $z=x+iy$ . Isto ocorre porque qualquer transformação conforme constitui uma simetria admitida pela equação de Helmholtz, isto é, quando  $x$  for substituído por  $a$  e  $y$  por  $b$  em (3) uma nova solução exata é produzida. A aplicação de uma transformação conforme sobre a solução obtida tem por objetivo introduzir a rugosidade sobre a superfície do corpo submerso. Esse processo é descrito a seguir.

##### 4.1. Transformações conformes – simetrias admitidas pela equação de Helmholtz em regime estacionário

Efetuando as mudanças dadas por (10) na equação de Helmholtz obtém-se a seguinte equação auxiliar nas novas variáveis:

$$(ua_x + va_y - v \nabla^2 a) \frac{\partial \omega}{\partial a} + (ub_x + vb_y - v \nabla^2 b) \frac{\partial \omega}{\partial b} - v \left[ (a_x^2 + a_y^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} + (b_x^2 + b_y^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial b^2} + 2(a_x b_x + a_y b_y) \frac{\partial^2 \omega}{\partial a \partial b} \right] = 0 \quad (11)$$

Para que as mudanças dadas por (10) constituam simetrias admitidas pela equação de Helmholtz, basta que a equação permaneça invariante em relação a essa troca de variáveis, isto é, que a equação (11) assuma a forma

$$U \frac{\partial \omega}{\partial a} + V \frac{\partial \omega}{\partial b} - v \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial b^2} \right] = 0, \quad (12)$$

onde as componentes do vetor velocidade nas novas variáveis são definidas como

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial b} \quad e \quad V = - \frac{\partial \psi}{\partial a} \quad (13)$$

Essa definição é análoga à das componentes de velocidade presentes na equação em sua forma original:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (14)$$

Assim, o chamado *critério de invariância* (Olver, 2000; Bluman, 1989) consiste na preservação da forma da equação original, exceto pela troca de variáveis, e constitui uma condição suficiente para que a mudança transforme uma determinada solução da equação em uma nova solução exata. Isso ocorre porque, se  $f(x,y)$  é solução da equação original,  $f(a(x,y),b(x,y))$  será automaticamente solução da equação mapeada.

Uma forma prática de estabelecer a invariância da equação consiste em dividir todos os termos por  $(a_x^2 + a_y^2)$ , e em seguida impor as restrições

$$\begin{cases} b_x^2 + b_y^2 = a_x^2 + a_y^2 \\ a_x b_x + a_y b_y = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} ua_x + va_y = (a_x^2 + a_y^2) \frac{\partial \psi}{\partial b} \\ \pm ua_{yy} \mp va_x = -(a_x^2 + a_y^2) \frac{\partial \psi}{\partial a} \end{cases} \quad (16)$$

Impondo as primeiras duas restrições, dadas por (15), obtém-se

$$b_x = \pm a_y \quad e \quad b_y = \mp a_x, \quad (17)$$

o que implica em

$$\nabla^2 a = \nabla^2 b = 0. \quad (18)$$

Assim, a equação (11) resulta

$$\left( \frac{ua_x + va_y}{a_x^2 + a_y^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial a} + \left( \frac{ub_x + vb_y}{a_x^2 + a_y^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial b} - v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial b^2} \right) = 0. \quad (19)$$

Impondo agora as restrições dadas por (16), obtém-se

$$\left( \frac{ua_x + va_y}{a_x^2 + a_y^2} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial b} \quad e \quad \frac{\pm ua_y \mp va_x}{(a_x^2 + a_y^2)} = -\frac{\partial \psi}{\partial a}. \quad (20)$$

Reescrevendo u e v em termos da função corrente, e utilizando a regra da cadeia, resulta

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = a_y \frac{\partial \psi}{\partial a} + b_y \frac{\partial \psi}{\partial b}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = a_x \frac{\partial \psi}{\partial a} + b_x \frac{\partial \psi}{\partial b}. \quad (21)$$

Substituindo as definições de u e v em (16), resulta

$$(\mp a_x^2 \mp a_y^2) \frac{\partial \psi}{\partial b} = (a_x^2 + a_y^2) \frac{\partial \psi}{\partial b} \quad (22)$$

e

$$(\pm a_y^2 \pm a_x^2) \frac{\partial \psi}{\partial b} = -(a_x^2 + a_y^2) \frac{\partial \psi}{\partial b} \quad (23)$$

Ambas as equações se reduzem a identidades ao especificar os sinais nas relações presentes em (17). Desse modo, para

$$b_y = a_x \quad (24)$$

e

$$b_x = -a_y \quad (25)$$

as equações (22) e (23) são identicamente satisfeitas. Entretanto, essas restrições constituem as condições de Cauchy-Riemann relativas a uma transformação conforme cujas partes real e imaginária correspondem, respectivamente, às funções b e a. Portanto, *qualquer transformação conforme é uma simetria de Lie admitida pela equação de Helmholtz.*

## 5. Resultados e conclusão

As figuras (1) e (2) mostram as isolinhas da função corrente para o escoamento viscoso em torno de um cilindro, para  $Re=10000$  e  $Re=100000$  respectivamente. Embora o modelo utilizado seja bidimensional, algumas características qualitativas relevantes dos escoamentos reais foram reproduzidas pela solução obtida, tais como o atraso no descolamento da camada limite e a redução das dimensões dos vórtices com o aumento do número de Reynolds.

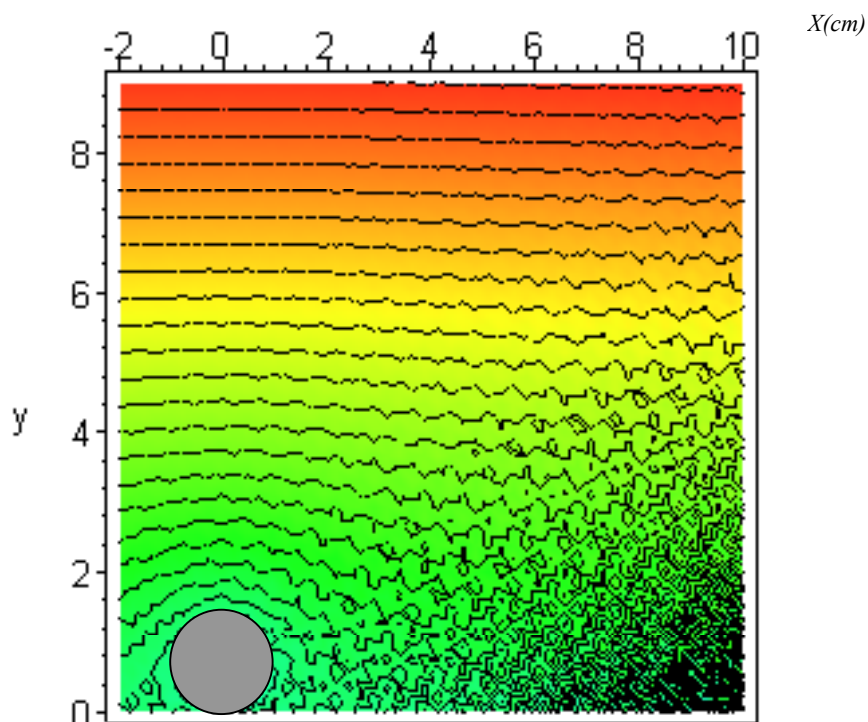


Figura 1 – Escoamento ao redor de um cilindro para  $Re=10000$

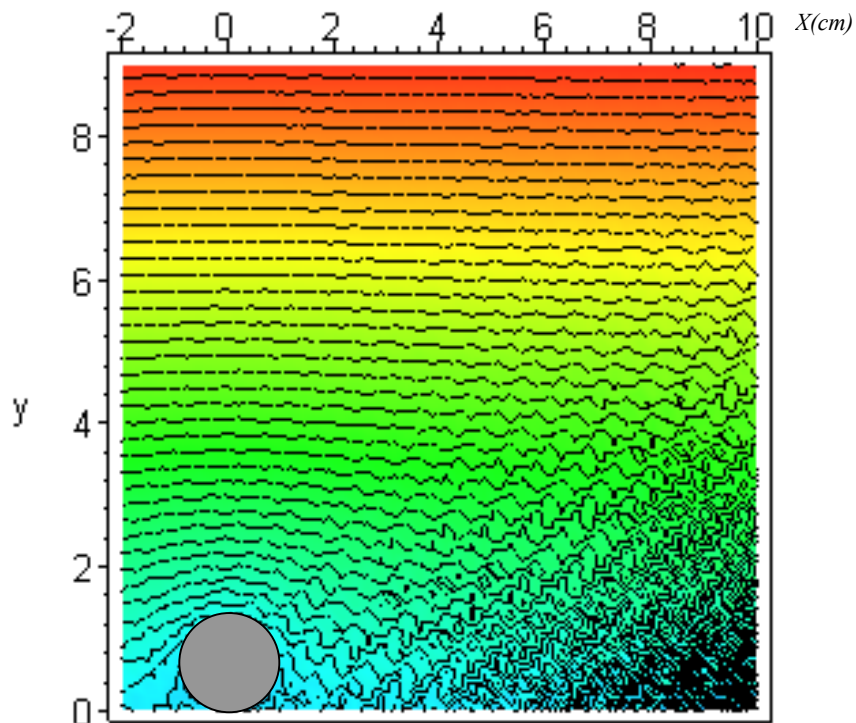


Figura 2– Escoamento ao redor de um cilindro para  $Re=100000$

Além disso, a solução é válida para corpos submersos de qualquer formato, como exemplificado na figura (3), que mostram o escoamento em torno de um perfil aerodinâmico, para  $Re=10000$ .

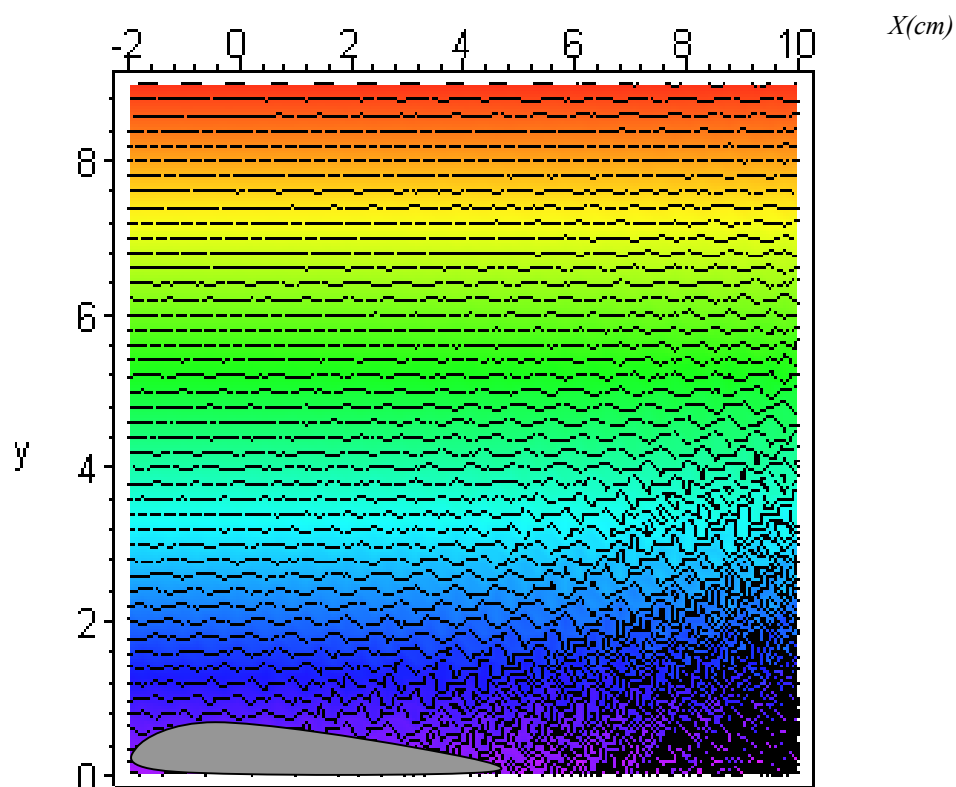


Figura 3 – Escoamento ao redor de um aerofólio para  $Re=10000$

Outra característica qualitativa importante da solução obtida reside na formação e na amplificação de componentes flutuantes, produzidas pela incorporação da rugosidade à geometria do corpo submerso, embora a média quadrática das flutuações ( $u'_{rms}$ ) seja inferior aos respectivos valores experimentais, representando cerca de 6% da velocidade da corrente livre. Naturalmente, a turbulência é um fenômeno essencialmente tridimensional, e produzido não apenas na escala da rugosidade, mas também em escala molecular, razão pela qual o modelo foi utilizado apenas para checar a consistência qualitativa da solução resultante com os respectivos fenômenos. Entretanto, a solução obtida está sendo utilizada para produzir novas soluções em três dimensões, contemplando o termo relativo ao “vortex stretching”. No estágio atual de desenvolvimento do método, soluções para a equação de Helmholtz tridimensional estão sendo pesquisadas com base em algumas simetrias que não foram utilizadas na formulação atual.

## 6. Referências

Olver, P.- Applications of Lie Groups to differential equations. Springer Verlag, N. York(2000)

Bluman, G.; Kumei, S.- Symmetries and differential equations.- Springer Verlag, N. York(1989).

Zwillinger, D.- Handbook of Differential equations.- Academic Press, Boston(1992)

Zabadal, J., Vilhena, M., Segatto, C. - The total photon cross-section formulation for a wide range of energy – Il Nuovo Cimento, V. 116B, N. 2, pp 183-190 (2001).

Zabadal, J. Vilhena, M., Segatto, C., Pazos, R. – Determination of a closed-form solution for the multidimensional transport equation using a fractional derivative – Annals of Nuclear Energy, V. 29, pp 1141-1150 (2002).

Ibragimov, N.- Lie Group Analysis of partial differential equations.- CRC Press, Boca Raton (1995).

Dattoli, G., Gianessi, M., Quattromini, M., Torre, A. – Exponential operators, operational rules and evolutional problems – Il Nuovo Cimento, V.113B, N.6, pp 699-710 (1998).

Chari, V. – A guide to Quantum Groups – Cambridge University Press (1994).

*Abstract: In this work an analytical solution for the two dimensional Helmholtz equation for complex-shaped domains is presented. The solution is obtained by showing that any conformal mapping is a Lie symmetry admitted by the equation. By analytical is meant that no approximation is made along its derivation. Simulations for turbulent flow scenarios are reported.*

*Keywords: Helmholtz Equation, exact solutions, Lie symmetries.*