

Modelagem matemática através do Método dos Elementos Finitos de um fêmur utilizando as Teorias da Elasticidade e da Poroelasticidade

Márcio da Silva, MOURA - Departamento de Mecânica Computacional – Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP.

e-mail: marciosm@fem.unicamp.br

Renato, PAVANELLO - Departamento de Mecânica Computacional – Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP.

e-mail: pava@fem.unicamp.br

Introdução

O estudo do comportamento mecânico de uma estrutura composta por duas fases, uma elástica e outra fluidica pode ser feito através da teoria da poroelasticidade. Neste modelo, a interação entre a deformação e o fluxo de fluido em um meio poroso é considerada (Biot, 1935). A aplicação deste modelo em estruturas complexas da bioengenharia requer o uso de métodos aproximados (Rybycki et al., 1972). Neste sentido, este trabalho tem o intuito de apresentar uma comparação do comportamento de um osso longo, através da teoria da poroelasticidade acoplada, com a teoria da elasticidade pura (Doblaré et al., 2002). Em ambos os casos o método dos elementos finitos é utilizado (Taylor, 2005). No caso do modelo poroelástico considera-se o acoplamento de uma porção sólida formada preponderantemente de cálcio e uma porção fluida composta de sangue e fluido ósseo (Cowin, 2004). Suas respostas de deslocamento e pressão indicam quais as regiões apresentam mais sensibilidade aos carregamentos, podendo assim contribuir, para o projeto de próteses e implantes, predição de falhas ósseas e intensidade de carregamento indicado para determinada morfologia. Tendo o osso geometria complexa, esta análise levou em conta as diferentes porosidades presentes no osso, definidas pelas regiões cortical e trabecular e a distribuição do fluido para o caso bidimensional. Carregamentos equivalentes ao de uma pessoa caminhando foi considerada.

Formulação numérica

O modelo mecânico poroelástico deriva das equações fundamentais da elasticidade acoplada a um campo de pressão fluída. Aplicando-se ao caso plano, tem-se:

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} - \alpha \nabla p &= 0 \\ G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} - \alpha \nabla p &= 0 \\ \kappa \nabla^2 p - \alpha \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal, ν o coeficiente de Poisson drenado, α o coeficiente de Biot, p a pressão nos poros, Q a constante poroelástica de proporcionalidade, κ o coeficiente de permeabilidade do fluido, ∇ o operador nabla de derivação, e a variação volumétrica e u e v os deslocamentos nas direções de x e y , respectivamente.

Reescrevendo a equação (1) em termos das tensões e pressão e aplicando a conservação do momento e massa na equação (1) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ \kappa \nabla^2 p - \alpha \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Sendo as tensões efetivas dadas pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right) - \alpha p \\ \sigma_y &= 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right) - \alpha p \end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados em (2) pode-se obter as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} \right) W d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) W d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \left(-\kappa \nabla^2 p + \alpha \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \right) W d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

sendo W a função peso e Ω o domínio do problema poroelástico. Separando-se os termos da direção x , y e a componente de pressão têm-se as equações para cada um desses termos. Aplicando-se o método de resolução de Galerkin e discretizando os termos derivados no tempo, por diferenças finitas e no espaço por elementos finitos, chega-se a seguinte expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} [K] & -[Q] \\ 0 & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ p_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [Q_n]^T & [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} \\ \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (5)$$

sendo $[K]$ a matriz de rigidez elástica, $[H]$ a matriz de rigidez do fluido, $[Q_n]$ a matriz de acoplamento, $[G]$ a matriz de amortecimento do fluido, $\{f\}$ vetor de cargas da parte elástica e $\{q\}$ vetor dos fluxos (Moura, 2007). O sistema da equação (5) pode ser resolvido de forma particionada que desacopla as matrizes da equação (5)

e recai em sistemas com matrizes simétricas, conforme equação seguinte.

$$\begin{aligned} [K]\{u_i\} &= \{f\} + [Q_n]\{p_i\} \\ [K_p]\{p_i\} &= [Q_n]^T \{\Delta u\} + [G]\{p_{i-1}\} + \{\Delta tq\} \end{aligned} \quad (6)$$

O elemento implementado para este trabalho foi o isoparamétrico quadrilateral linear para o sistema quase-estático (transiente).

O *solver* utilizado para o processamento do modelo poroelástico foi o MEFLAB, programa escrito em linguagem FORTRAN, pelo Grupo de Métodos Computacionais em Mecânica do Contínuo da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp (Moura et al, 2007).

Resultados

Para demonstrar as capacidades da modelagem proposta, um caso bi dimensional foi resolvido. Foram consideradas as propriedades drenadas do modelo poroelástico para modelagem das diferentes regiões do fêmur elástico. A região cortical tem módulo de elasticidade de 20 GPa e Poisson de 0,325 e, a região trabecular 18 GPa e Poisson de 0,242. As condições de contorno aplicadas também foram às mesmas para os dois modelos, figura 1, sendo que para o problema elástico não foram incluídas as condições de pressão. Para comparação, utilizou-se as respostas do modelo poroelástico já estabilizado no tempo, o que ocorreu após 50 segundos após a aplicação da carga. As malhas foram às mesmas para os dois modelos, sendo que a malha construída no pré-processador do software GID foi exportada para o pré-processador do software Ansys para a modelagem elástica.

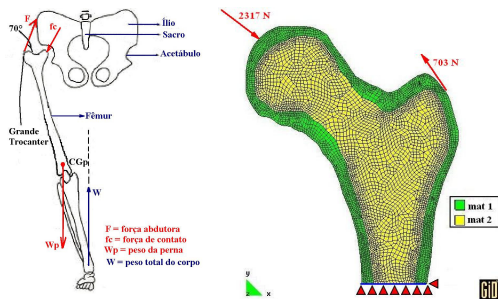


Figura 1: Carregamentos sobre o fêmur para uma pessoa caminhando e malha de elementos finitos.

Na figura 1 são apresentados as regiões referentes ao osso cortical, mat 1, e trabecular, mat 2.

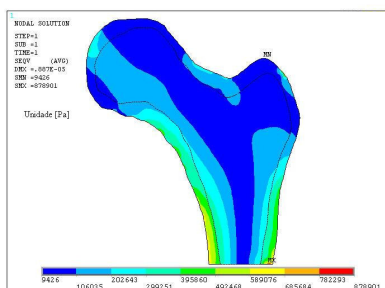


Figura 2: Tensões para o modelo elástico.

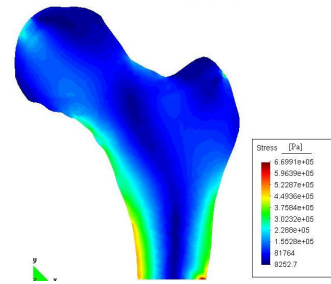


Figura 3: Tensões para o modelo poroelástico.

O efeito do fluido tende a acomodar melhor os carregamentos, fazendo com que as tensões para o modelo poroelástico sejam menores que as do modelo elástico. As distribuições das tensões, entre os dois modelos, são muito semelhantes, mas a maior diferença entre elas é de 23%. Nota-se que as regiões com maior valor de tensão são as mesmas nos dois modelos simulados.

Conclusão

O modelo poroelástico permite avaliar as tensões e as pressões sobre o fêmur. Testes experimentais devem ser realizados para validação dos modelos. O método particionado mostrou-se adequado para aplicação apresentada. A ferramenta desenvolvida pode ser aplicada ao projeto de próteses e componentes de reabilitação. Os resultados alcançados servem como base para estudos atuais sobre o modelo ósseo tridimensional e a modelagem desses com implantes.

Referências bibliográficas

- Biot, M. A.**, Le problème de la consolidation des matières argileuses sous une charge. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, B55, pp. 110-113, 1935.
- Cowin, S. C.**, Anisotropic poroelasticity: fabric tensor formulation. Mechanics of Materials, vol. 36, pp. 665–677, 2004.
- Doblaré, M., García, J. M., and Cegoñino, J.**, Development of an internal bone remodelling theory and applications to some problems in orthopaedic biomechanics, Meccanica, vol. 37, pp. 365–374, 2002.
- Moura, M. S.**, Elaboração de uma ferramenta computacional para modelamento de próteses e ossos através da poroelasticidade acoplada, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Dissertação de Mestrado, 2007.
- Moura, M. S., Pavanello, R., Dutra, D. L.**, Comparison between numeric solutions of direct method and staggered method applied to analyze poroelastic of bones, 19th International Congress of Mechanical Engineering, Proceedings of COBEM 2007, pp. 10, 2007.
- Rybicki, E. F., Simonen, F. A., and Weis, E. B.**, On the mathematical analysis of stress in the human femur. Journal of Biomechanics, vol. 5, pp. 203–215, 1972.
- Taylor, M. E.**, Finite element analysis on the resurfaced femoral head. Journal of Engineering in Medicine, vol. 220, pp.289–297, 2005.