

# Formulação variacional viscoelástica para simulação de tecidos conectivos moles

**Eduardo Alberto Fancello** - GRANTE - Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, e-mail: fancello@grante.ufsc.br, home-page: <http://grante.ufsc.br/fancello>

**Louise Reips** - GRANTE - Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, e-mail: louise@grante.ufsc.br

## Introdução

Os ligamentos e tendões são tecidos conectivos moles formados por famílias de fibras de colágeno arrançadas em uma matriz material e apresentam propriedades anisotrópicas dependentes das direções em que essas famílias se encontram.

Os modelos constitutivos, encontrados na literatura, utilizados para a representar adequadamente tais tecidos biológicos abordam teorias hiperelásticas e viscoelásticas, envolvendo anisotropia e a teoria de materiais compostos.

Fancello et al. (2006) propõe uma formulação constitutiva viscoelástica fazendo uso de variáveis internas, capaz de prever o comportamento de materiais viscoelásticos isotrópicos quando submetido à deformações finitas.

No presente trabalho incorpora-se a característica de anisotropia orientada à formulação constitutiva citada acima através da introdução de um potencial de energia de deformação que considera a contribuição das fibras.

## Problema Constitutivo

Considerando materiais viscoelásticos, o estado de tensão de um ponto material pode ser dado através da derivada de um potencial de energia incremental (ver Ortiz et al. (1999)):

$$P_{n+1} = \frac{\partial \Psi(F_{n+1}; \mathcal{E}_n)}{\partial F_{n+1}} = 2F_{n+1} \frac{\partial \Psi(C_{n+1}; \mathcal{E}_n)}{\partial C_{n+1}} \quad (1)$$

Nesta expressão,  $\mathcal{E}_n = \{F, F^i, Q\}$  é o conjunto das variáveis internas e externas. Os gradientes de deformação inelástico  $F^i$  e elástico  $F^e$  são obtidos a partir da decomposição multiplicativa de  $F$ , isto é,  $F = F^e F^i$  e  $Q$  contém o resto das variáveis internas do processo, calculadas através de equações de evolução. Em Ortiz et al. (1999), é mostrado que

um potencial com estas características pode ter a seguinte forma:

$$\Psi(F_{n+1}; \mathcal{E}_n) = \min_{F_{n+1}^i, Q_{n+1}} \{W(\mathcal{E}_{n+1}) - W(\mathcal{E}_n) + \Delta t \psi(\overset{\circ}{F}^i, \overset{\circ}{Q}; \mathcal{E}_n)\} \quad (2)$$

$$W(\mathcal{E}) = \varphi(F) + \varphi^e(F F^{i-1}) + \varphi^i(F^i, Q) \quad (3)$$

onde  $\varphi(F)$  é o potencial conservativo (elástico) dependente da do gradiente de deformação total,  $\varphi^e$  o potencial elástico dependente do gradiente de deformação elástica e  $\psi(\overset{\circ}{F}^i, \overset{\circ}{Q}; \mathcal{E}_n)$  é o (pseudo) potencial que fornece a dependência da tensão com a velocidade de deformação viscosa. Os símbolos  $\overset{\circ}{F}(F_{n+1}, \mathcal{E}_n)$ ,  $\overset{\circ}{F}^i(F_{n+1}, \mathcal{E}_n)$  e  $\overset{\circ}{Q}(Q_{n+1}, \mathcal{E}_n)$  são as aproximações incrementais das variáveis de taxa  $\dot{F}$ ,  $\dot{F}^i$  e  $\dot{Q}$  respectivamente. A diferença entre os diversos modelos de potencial reside nas características dos potenciais  $\varphi$ ,  $\varphi^e$ ,  $\varphi^i$  e  $\psi$ .

## Incorporação das fibras

O modelo aqui apresentado baseia-se na introdução de uma nova parcela do Potencial Incremental associada à contribuição das fibras sobre uma matriz viscoelástica isotrópica.

A inclusão das fibras no modelo isotrópico se dá de maneira análoga a Holzapfel (2000), através de uma decomposição aditiva de potenciais incrementais:

$$\Psi = \Psi_{iso} + \Psi_f \quad (4)$$

onde  $\Psi_{iso}$  corresponde à expressão de energia do modelo isotrópico proposto por Fancello et al. e  $\Psi_f$  corresponde à contribuição das fibras.

Para o caso das fibras, essa energia depende dos invariantes dos tensores de Cauchy,  $\mathbb{C}$  e do tensor

estrutural  $A_f = a_f \otimes a_f$  das fibras, orientadas na direção  $a_f$  na configuração de referência, Holzapfel (2000).

Neste trabalho as fibras de colágeno são governadas pela função exponencial proposta por Holzapfel et al. (2001).

$$\varphi = \frac{k_1}{2k_2} \{ \exp[k_2(I_f - 1)^2] - 1 \} \quad (5)$$

$$\varphi^e = \frac{k_1}{2k_2} \{ \exp[k_2(I_f^e - 1)^2] - 1 \} \quad (6)$$

onde  $I_f^e = (\lambda_f^e)^2$ . Esta expressão é válida para alongamentos  $\lambda_f \geq 1$ , sendo que para alongamentos compressivos ( $\lambda_f < 1$ ) o potencial é nulo.

### Exemplos numéricos

Apresenta-se aqui uma membrana sujeita a pressão por um fluido de  $1N/mm^2$ , com condição de engaste nas bordas. O teste é realizado utilizando elementos sólidos hexaédricos com 8 nós e a pressão aplicada é linear. O exemplo foi implementado no código acadêmico *METAFOR*<sup>®</sup> [14]. A malha utiliza elementos regulares com uma discretização de  $16 \times 16 \times 4$  elementos. A matriz isotrópica é representada pelo potencial (Neo-Hookean) e a incorporação das fibras é dada através do potencial de Holzapfel. Para esse caso, foi utilizada somente uma família de fibras na direção  $X$ .

Os parâmetros materiais correspondentes utilizados foram retirados de Limbert et al. (2004) e os resultados para cada caso estão apresentados na Fig. 1 e Fig. 2 respectivamente.:

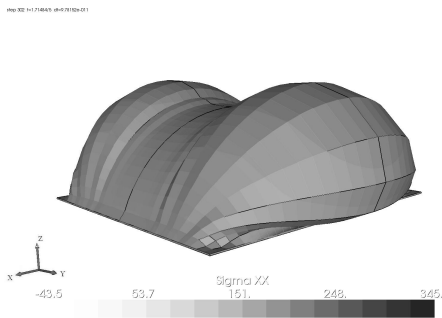


Figura 1: Tensão na direção das fibras

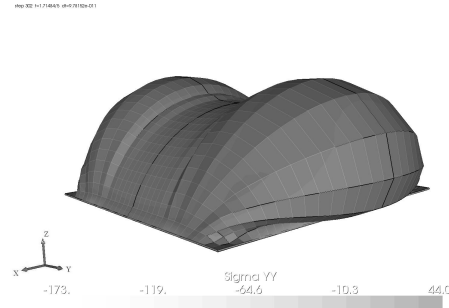


Figura 2: Tensão na direção Y

### Referências Bibliográficas

Fancello, E.; Ponthot J-P.; Stainier L. A variational formulation of constitutive models and updates in nonlinear finite viscoelasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.65, p. 1831-1864, 2006.

Holzapfel, G. A. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*, John Wiley, 2000.

Holzapfel, G.A.; Gasser, T. C. A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 4379-4403, 2001.

Limbert, G.; Taylor, M.; Middleton, J. Three-dimensional finite element modelling of the human ACL: simulation of passive knee flexion with a stressed and stress-free ACL, *Journal of Biomechanics*, v. 11, p. 1723-1731, 2004.

*METAFOR* - Software for thermo-mechanical analysis of structures in large strain regime, *Mécanique Numérique Non Linéaire - Département Aérospatiale & Mécanique*, Université de Liège, Belgium. <http://www.ltas-mnl.ulg.ac.be>.

Ortiz, M. ; Stainier L. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 171, p. 419-444, 1999.