



**ENCIT<sub>88</sub>**

**II ENCONTRO NACIONAL  
DE CIÊNCIAS TÉRMICAS**

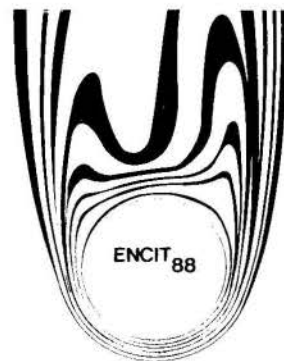
---

**ANAIS**

---

**EDITOR  
PAULO AFONSO DE OLIVEIRA SOVIERO**

**PROMOÇÃO: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas - ABCM**



---

# ANAIS

---

06 a 08 de Dezembro de 1988  
VACANCE HOTEL  
Águas de Lindóia - SP - Brasil



## APRESENTAÇÃO

O ENCIT'88 mantém a filosofia que levou a Associação Brasileira de Ciências Mecânicas - ABCM, em resposta aos anseios da comunidade, a organizar em 1986, no Rio de Janeiro, o primeiro Encontro dessa natureza.

Desta vez, no Estado de São Paulo, juntaram-se à ABCM, na organização do evento, o Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE e o Centro Técnico Aeroespacial - CTA e, consonante com a expectativa de nossos companheiros da Comissão Organizadora do ENCIT'86, os critérios básicos por eles sugeridos foram integralmente mantidos.

Daí, como consequência, o ENCIT'88 conta com temas aplicados e científicos que, em dezessete tópicos, associam assuntos tecnológicos de ponta com as últimas reflexões do conhecimento científico. Conta também com cinco trabalhos convidados e com um painel sobre o Programa de Termociências no contexto do curso de Graduação em Engenharia Mecânica. Finalmente, na busca da preservação da qualidade dos trabalhos aceitos para apresentação, o Comitê de Revisores foi triplicado, e, com a inestimável ajuda dos Professores Doutores Álvaro T. Prata e Clóvis R. Maliska (UFSC), Paulo R. de Souza Mendes (PUC/RJ), Antônio MacDowell (COPPE) e Carlos A. Altemani (UNICAMP), viabilizou-se um cuidadoso processo cruzado onde trabalhos de uma Instituição foram sempre revistos por grupos de outra. Assim é que o ENCIT'88 estabelece uma derivada positiva com 94 trabalhos aceitos (de um total de 146 recebidos), com um aumento de 50% em relação ao ENCIT'86

Na certeza do continuado sucesso dos nossos próximos eventos, em nome da Comissão Organizadora dou as boas vindas aos participantes do ENCIT'88, desejando a todos um proveitoso Encontro.



Demétrio Bastos Netto  
Presidente do ENCIT'88

## ORGANIZAÇÃO

- Associação Brasileira de Ciências Mecânicas - ABCM
- Ministério da Ciência e Tecnologia  
Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
- Ministério da Aeronáutica  
Centro Técnico Aeroespacial - CTA

## APOIO

- Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC
- Vacance Hotel
- Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro - FAPERJ

## COMISSÃO ORGANIZADORA

- Demétrio Bastos Netto - Presidente
- Maurício Nogueira Frota - Vice-Presidente
- João Luiz Filgueiras de Azevedo - Secretário
- Nehemias Lima Lacerda - Secretário
- Paulo Moraes Junior - Secretário
- Leon Sinay - Tesoureiro
- Carlos Frederico Estrada Alves - Tesoureiro
- Paulo Afonso de Oliveira Soviero - Editor

## COMISSÃO EDITORIAL

- Alcir de Faro Orlando - PUC/RJ
- Alvaro T. Prata - UFSC/SC
- Angela Ourivio Nieckele - PUC/RJ
- Antonio Candido Faleiros - ITA/SP
- Antonio Carlos Bannwart - UNICAMP/SP
- Antonio F.C. da Silva - UFSC/SC
- Antonio Mac Dowell de Figueiredo - COPPE/RJ
- Antonio Marmo de Oliveira - ITA/SP
- Atila P. Silva Freire - COPPE/RJ
- Carlos A. de Moura - LNCC/RJ
- Carlos Alberto C. Altemani - UNICAMP/SP
- Carlos Lineu de Faria Alves - ITA/SP
- Cláudio Melo - UFSC/SC
- Clóvis R. Maliska - UFSC/SC
- Durval Henriques da Silva Filho - EMBRAER/SP
- Eloí Fernandez y Fernandez - PUC/RJ
- Elisabeth Malta de Almeida - ITA/SP
- Euclides Carvalho Fernandes - ITA/SP
- Fred Nietzsche - EMBRAER/SP
- Gordiano de Faria Alvim Filho - ITA/SP
- Hyppolito do V. Pereira Filho - UFSC/SC
- Jerônimo dos Santos Travelho - INPE/SP
- Jacek Piotr Gorecki - ITA/SP
- João Azevedo - IAE/SP
- João Barbosa - PMO/SP
- João Carvalho Junior - INPE/SP
- José Alberto Reis Parise - PUC/RJ
- José Tomaz Vieira Pereira - UNICAMP/SP
- Kamal Abdel Radi Ismail - UNICAMP/SP
- Leonardo Goldstein Junior - UNICAMP/SP
- Leopoldo Eurico Gonsalves Bastos - COPPE/RJ
- Leopoldo P. Franca - LNCC/RJ
- Luis Fernando Azevedo - PUC/RJ
- Luiz Fernando Milanez - UNICAMP/SP
- Marcelo José Santos de Lemos - ITA/SP
- Marcio José do Prado Schmidt - ITA/SP
- Marco Antônio Raupp - INPE/SP
- Marcos Aurelio Ortega - IPD/SP
- Mario Roberto Granziera - UNICAMP/SP
- Mauricio Pazini Brandão - ITA/SP
- Miguel Hiroo Hirata - COPPE/RJ
- Nisio de Carvalho Lobo Brun - COPPE/RJ
- Nivaldo Hinckel - INPE/SP
- Oscar Daniel Corbella - UFRGS/RGS
- Osvaldo Vidal Trevisan - UNICAMP/SP
- Paulo Cesar Philippi - UFSC/SC
- Paulo Murilo de Souza Araújo - PUC/RJ
- Paulo Roberto de Souza Mendes - PUC/RJ
- Pedro Carajilescov - PUC/RJ
- Philemon Melo Cunha - PUC/RJ
- Raad Y. Qassim - COPPE/RJ
- Raúl A. Feijóo - LNCC/RJ



- Raymond Burnyeat Peel - UNICAMP/SP
- Renato Machado Cotta - COPPE/RJ
- Rogério Martins S. da Gama - LNCC/RJ
- Sérgio Colle - UFSC/SC

## COMISSÃO DE INFRA-ESTRUTURA E APOIO

- SETOR DE EVENTOS - INPE  
Andrea Marcia Loureiro Machado  
Cleonice Aparecida Orlandelli
- ASSESSORIA DE COMUNICAÇÃO VISUAL - INPE  
Carlos Alberto Vieira  
José Domingues Sanz  
Marina de Fátima Oliveira Moura
- SECRETARIA DO ENCIT 88 - INPE  
Maria Helena Nunes Petzold  
Sueli Aparecida de Godoi Guratti

## COMISSÃO DE PLANEJAMENTO FINANCEIRO

- Bernadete Soares
- Doroti Akico Tiba
- Yutaka Habe

- Sérgio Mourão Saboya - ITA/SP
- Silvio Almeida - COPPE/RJ
- Walter Gill - INPE/SP

## COORDENAÇÃO EDITORIAL

- Paulo Afonso de Oliveira Soviero - ITA

## DISTRIBUIÇÃO

- Secretaria Geral do ENCIT 88
- Associação Brasileira de Ciências Mecânicas-ABCM

## IMPRESSÃO

- Gráfica do INPE  
Av. dos Astronautas, 1758 - Jd. da Granja  
São José dos Campos - SP

## ENCADERNAÇÃO

- Gráfica do CTA  
Pça. Marechal Eduardo Gomes, s/n  
São José dos Campos - SP

# SUMÁRIO

## 1. AERODINÂMICA

- AERODYNAMICS FLOW SIMULATION USING A FINITE DIFFERENCE METHOD  
João Luiz F. Azevedo ..... 003
- NUMERICAL SIMULATION OF THE SUPERSONIC FLOW AROUND ARBITRARY SHAPES USING  
THE SHOCK-CAPTURING TECHNIQUE  
Diomar Cesar Lobão e Clovis Raimundo Maliska ..... 007
- UMA FORMULAÇÃO SEGREGADA EM VOLUMES FINITOS PARA ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS  
E/OU INCOMPRESSÍVEIS EM COORDENADAS GENERALIZADAS  
Antonio Fábio Carvalho da Silva e Clovis Raimundo Maliska ..... 011
- SUBSONIC FLOW COMPUTATION OF COMPLEX ROCKET CONFIGURATIONS USING PANEL METHOD  
Aigacyr Morgenstern Jr. .... 015
- AN ACOUSTIC-ENERGETIC ANALOGY FOR EXTERNAL FLOWS  
Maurício Pazini Brandão ..... 019
- DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DAS VARIÁVEIS TERMODINÂMICAS EM ESCOAMENTOS TRANSÔNICOS  
EM BOCAIS COM ONDA DE CHOQUE PARA REGIME NÃO PERMANENTE  
Carlos Frederico E. Alves e Demétrio Bastos Netto ..... 023
- ESTUDO DAS VIBRAÇÕES EÓLICAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO USANDO TÉCNICAS DE  
PERTURBAÇÃO  
Agamenon R.E. Oliveira e William M. Mansour ..... 026

## 2. PROPULSÃO

- DINÂMICA DE COMBUSTORES SUPERSÔNICOS  
Carlos Frederico E. Alves, Leon R. Sinay e Demétrio Bastos Netto ..... 033
- ESTABILIZAÇÃO DA CHAMA EM ESTADO-REACTORES DE COMBUSTOR DUPLO (DCR)  
Walter Gill, João A. Carvalho Jr., Jerônimo S. Travelho, Heraldo S. Couto e  
Demétrio Bastos Netto ..... 037
- SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE MODELO TRANSIENTE DE MICRO-PROPULSORES A HIDRAZINA  
Sônia M. Gomes e César Treviño ..... 041
- ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL PARA BOCAIS DE TRAÇÃO MÁXIMA  
Pedro Paglione e Roberto da Mota Girardi ..... 045
- INFLUÊNCIA DAS SÉRIES DE SAUER, HALL E KLIEGEL & LEVINE SOBRE BOCAIS DE  
EMPUXO MÁXIMO  
Gordiano de Faria Alvim Filho, Pedro Paglione e Luís Fernando Figueira da Silva ..... 049
- ESTUDO DE UM SISTEMA DE INJEÇÃO DIESEL OPERANDO COM QUEROSENE DE AVIAÇÃO  
Maria Cristina Vilela Salgado Barbosa, Marco Aurélio da Cunha Alves e Alex  
Guimarães Azevedo ..... 053
- AVALIAÇÃO DE COEFICIENTES DE PELÍCULA PARA ESTUDOS DE TRANSMISSÃO DE CALOR  
INSTANTÂNEA EM MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA  
Waldyr Luiz Ribeiro Gallo ..... 057



### 3. ENERGIA NUCLEAR

• DESEMPENHO TRANSITÓRIO DO ESCOAMENTO EM CIRCUITOS DE REATORES DO TIPO PWR Viviane Ruth Toledo Ribeiro Hirdes e Pedro Carajilescov .....	063
• SIMULAÇÃO NUMÉRICA SIMPLIFICADA DO CANAL QUENTE DE REATORES NUCLEARES REFRIGERADOS A SÓDIO Francisco de Assis S. da Fonseca e Elías Silva Filho .....	067
• STATIC PRESSURE DISTRIBUTION IN AN ANNULAR CHANNEL WITH HELICOIDAL WIRE Marcelo J.S. de Lemos .....	071
• HEAT TRANSFER PHENOMENA IN THE FIRST WALL OF THE RFX FUSION EXPERIMENT Ruy Marcelo de O. Pauletti .....	075
• ANÁLISE TÉRMICA DO TANQUE DE MISTURA DE SÓDIO E TUBULAÇÃO A SUA JUSANTE, DO CIRCUITO SS-050, DURANTE UM CHOQUE TÉRMICO Carlos Alexandre de J. Miranda e Anibal N. Gebrim .....	079
• AN INVESTIGATION OF LOADS GENERATED BY TEMPERATURE TRANSIENTS IN PIPES C.E. Maneschy .....	083
• LAMINAR FORCED CONVECTION INSIDE EXTERNALLY FINNED TUBES C.A.C. Santos, R.M. Cotta e M.N. Ozisik .....	087

### 4. INSTRUMENTAÇÃO E TÉCNICAS EXPERIMENTAIS

• DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA VELOCIDADE DE UM FLUIDO PELA ANÁLISE ESPECTRAL DAS FLUTUAÇÕES DE TEMPERATURA Michel Jean Foucrier e Artur J.G. Faya .....	093
• VIABILIDADE DA ELASTICIDADE PARA A MEDIDA DE VALORES REDUZIDOS DE VAZÃO DE FLUÍDOS AERIFORMES José Carlos Lauria e Douglas Lauria .....	097
• TRANSDUTOR DE IMPEDÂNCIA PARA A MEDIDA DA FRAÇÃO DE VAZIO José R. Simões Moreira e José M. Saiz Jabardo .....	101
• INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DA EBULIÇÃO DE MISTURAS REFRIGERANTE II - ÓLEO Celso Luiz da Silva e José Maria Saiz Jabardo .....	105
• MEDIDA CALOMÉTRICA DA ABSORVIDADE SOLAR NORMAL MÉDIA DE SUPERFÍCIES AO AR COM AUXÍLIO DE UM SIMULADOR SOLAR Luiz Antonio Waack Bambace .....	109
• CONSTRUÇÃO DE TERMOPILHAS PARA RADIÔMETROS SOLARES E DE LASERS João Francisco Escobedo, Evandro F. Passos e António C. Vieira .....	113
• DESENVOLVIMENTO DE UMA CÉLULA PARA MEDIDA DE CONDUTIVIDADE TÉRMICA DE LÍQUIDOS Glauce da Silva Guimarães, Paulo Roberto da Fonseca Santos e Alcir de Faro Orlando .....	117

### 5. SISTEMAS MULTIFÁSICOS E PARTICULADOS

• VELOCIDADE TERMINAL DE PARTÍCULAS EM SUSPENSÃO EM UM FLUXO TURBULENTO Roberaldo Carvalho de Souza .....	123
• COEFICIENTE DE ARRASTE PARA PARTÍCULAS EM SUSPENSÃO EM UM ESCOAMENTO TURBULENTO Roberaldo Carvalho de Souza .....	126
• CRITÉRIO OBJETIVO PARA A TRANSIÇÃO BOLHAS-PISTONADO EM UM ESCOAMENTO GÁS LÍQUIDO José Maria Saiz Jabardo .....	128

- MÉTODOS TÉRMICOS PARA RECUPERAÇÃO DE PETRÓLEO  
Dan Marchesin e Jesus Carlos da Mota ..... 132
- PRESENÇA DE PARTÍCULAS CILÍNDRICAS NO ESCOAMENTO DE FLUIDOS NEWTONIANO E  
NÃO-NEWTONIANOS  
Helder Gomes Costa, Roberto Guimarães Pereira, Washington Braga Filho e Maurício  
Nogueira Frota ..... 134
- TWO-PHASE FLOW AGGEGATE FORMATION THEORY BASED ON ENERGY DISSIPATION  
J. Militzer, J.M.Kan, A.M. Al Tawell e F. Hamdullahpur ..... 138
- A PSEUDO-LAGRANGIAN SOLUTION FOR THE KINETIC COAGULATION EMPLOYING  
SHAPE-PRESERVING SPLINES  
Emanuel Rocha Woiski ..... 141

## 6. AERODINÂMICA EXPERIMENTAL: TÚNEIS DE VENTO

- SIMPLIFIED ANALYSIS OF THE FLOW IN A TRANSONIC WIND TUNNEL TEST SECTION WITH  
VENTILATED WALLS  
J.P.C.Escosteguy e M.A.Ortega ..... 147
- INJECTION OPTIMIZATION AND ITS APPLICATION TO WIND TUNNELS  
S.L.Nogueira, M.A.Ortega, J.B.P.Falcão Fo. e N.G.C.R.Fico Jr. .... 151
- OTIMIZAÇÃO NO PROJETO CONCEITUAL DOS RESERVATÓRIOS PARA TÚNEL SUPERSÔNICO  
João B.P. Falcão F. e Sidney L. Nogueira ..... 154
- THE PRODUCTION OF HIGHLY SHEARED PROFILES IN WIND TUNNELS; A MATHEMATICAL  
ANALYSIS  
Sérgio Luiz Villares Coelho ..... 157
- APLICAÇÃO DE UMA TÉCNICA EXTENSOMÉTRICA NA MEDIÇÃO DE COEFICIENTES AERODINÂMICOS  
Raul José Marchesini Fonseca e Philemon Melo Cunha ..... 162

## 7. MÉTODOS NUMÉRICOS: ELEMENTOS FINITOS

- ON FINITE ELEMENT FORMULATIONS FOR THE STOKES FLOW PROBLEM  
Leopoldo P. Franca ..... 169
- NEW MIXED PETROV-GALERKIN FINITE ELEMENT FORMULATIONS FOR INCOMPRESSIBLE  
FLOWS  
José Karam Filho e Abimael F.D.Loula ..... 172
- DUAL AND PRIMAL MIXED PETROV-GALERKIN FINITE ELEMENT METHODS IN HEAT  
TRANSFER PROBLEMS  
Abimael D.D. Loula e Elson Magalhães Toledo ..... 176
- A MODIFIED OPERATOR ANALYSIS OF CONVECTION DIFFUSION PROBLEMS  
Paulo Augusto Berquo de Sampaio ..... 180
- NUMERICAL TRANSIENT ANALYSIS OF PARALLEL AND COUNTER FLOW HEAT EXCHANGERS  
Enrico Lorenzini, Marco Spiga e Mauro A. Corticelli ..... 184



## 8. CONVECÇÃO NATURAL

- CONVECÇÃO NATURAL NO INTERIOR DE CONCENTRADORES COM ABSORVEDORES CILÍNDRICOS  
Marco Antonio Rosa do Nascimento e Genésio José Menon ..... 191
- ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UM CANAL VERTICAL  
José Bezerra Pessoa Filho e Euclides Carvalho Fernandes ..... 195
- SECONDARY FLOW OBSERVATIONS IN NATURAL CONVECTION THROUGH OPEN-ENDED INCLINED CHANNELS  
L.F.A. Azevedo e J.G. Carvalho ..... 199
- HEAT FLUX ACROSS AN INCLINED SQUARE ENCLOSURE: IMPORTANCE OF THERMAL RADIATION  
Ulisses Lacoa e Antonio Campo ..... 203
- METODOLOGIA PARA PROJETO DE COMBUSTORES AUTO-ASPIRADOS  
Heraldo S. Couto , João A. Carvalho Jr. e Eduardo M. Queiroz ..... 207

## 9. TROCADORES DE CALOR

- REVISÃO DE CONCEITOS BÁSICOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM TORRES DE RESFRIAMENTO  
José Rocha Miranda Pontes e Paulo Fernando Nantes da Silva ..... 213
- DEPOSIÇÃO EM TROCADORES DE CALOR: II - DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS DE OPERAÇÃO  
Ronaldo Coutinho Fernandes, Eduardo Mach Queiroz e Cláudio Octávio M.M. Teixeira ..... 217
- SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE TUBOS CAPILARES UTILIZADOS COMO DISPOSITIVOS DE EXPANSÃO EM SISTEMAS DE REFRIGERAÇÃO  
Cláudio Melo e Cezar Otaviano Ribeiro Negrão ..... 221
- MODIFIED ONE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF RADIAL FINS  
João B. Aparecido e Renato M. Cotta ..... 225
- ANÁLISE DO DESEMPENHO TÉRMICO DE SUPERFÍCIES PINADAS E ALETADAS SUBMETIDAS À CONVECÇÃO  
Carlos Valois Maciel Braga e Francisco Eduardo Mourão Saboya ..... 229

## 10. TEORIA DA CAMADA LIMITE

- ON THE PREDICTION OF THE BEHAVIOR OF THE VELOCITY, TEMPERATURE AND HUMIDITY FIELDS ABOVE A THERMALLY STRATIFIED AIR-WATER INTERFACE  
Yannis A. Papadimitrakis ..... 235
- AIRFOIL BOUNDARY LAYER INDUCED BY TURBULENT PLANE JET  
Carlos Alberto Fialho Thompson Leite, José Carlos Albano do Amarante e Ivando Junqueira Junior ..... 236
- ON THE MATCHING CONDITIONS FOR TURBULENT BOUNDARY LAYER PROBLEMS WITH HEAT TRANSFER  
Atila P. Silva Freire e Miguel H. Hirata ..... 241
- ESTUDO PARAMÉTRICO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA EM FIOS E FIBRAS ADENTRANDO RESERVATÓRIO DE CALOR E MASSA  
S. Colle e S. Peters ..... 245
- FLOW OF A FALLING FILM AROUND A HORIZONTAL CYLINDER  
P.R. Souza Mendes ..... 249

## 11. MÁQUINAS DE FLUXO

• TRANSFERÊNCIA DE CALOR LAMINAR EM VÁLVULAS DE COMPRESSORES M.L. Todescat, A.T. Prata e R.T.S. Ferreira .....	255
• APLICAÇÃO DO MODELO $k-\epsilon$ PARA O ESCOAMENTO TURBULENTO EM VÁLVULAS DE COMPRESSORES C.J. Deschamps, R.T.S. Ferreira e A.T. Prata .....	259
• PARAMETROS DE DISEÑO INICIALES PARA QUEMADOR DE ASERRIN EN SUSPENSION Robinson Betancourt Astete, Rene Cifuentes Bobadilla e Alejandro Saez Carreño .....	263
• TURBINE FLOWMETER - A COMPARISON BETWEEN HELICAL AND STRAIGHT BLADE SHAPE Wilson Carlos da Silva Ferreira e Richard A. Furness .....	267
• MODELO DINÂMICO DE BOMBA CENTRÍFUGA PARA UTILIZAÇÃO EM APLICAÇÕES EM TEMPO REAL Luiz Valcov Loureiro e Antonio Carlos de Oliveira Barroso .....	271

## 12. ANÁLISE DE SISTEMAS TÉRMICOS

• APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXERGIA À ANÁLISE TERMODINÂMICA DE SISTEMAS DE COGERAÇÃO EM USINAS DE AÇÚCAR E ALCOOL Jorge I. Llagostera Beltran, George A. Oliva e Sérgio Salazar .....	277
• APLICAÇÃO DO MÉTODO DA CONVOLUÇÃO NA ESTIMATIVA DO COMPORTAMENTO ENERGÉTICO DE SISTEMAS DE COGERAÇÃO Luiz Augusto Horta Nogueira e Afonso Henriques Moreira Santos .....	281
• PROJETO DE REDES COMPLEXAS DE COLETORES SOLARES Leopoldo Eurico Gonçalves Bastos .....	285
• SOLUÇÃO DE REDES HIDRÁULICAS NA SIMULAÇÃO EM TEMPO REAL DE PLANTAS DE PROCESSO Anibal N. Gebrim e Antonio Carlos de O. Barroso .....	288
• GELADEIRA MOVIDA A FOÇÃO DE LENHA Evandro Ferreira Passos e João Francisco Escobedo .....	292

## 13. TÓPICOS ESPECIAIS EM MECÂNICA DOS FLUÍDOS

• DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DOS PARÂMETROS FENOMENOLÓGICOS, RELACIONADOS COM O FUNCIONAMENTO DE UM TENSÍOMETRO EM MEIOS POROSOS INSATURADOS Martinho B. Quadri e Paulo C. Phillippi .....	299
• TRANSFERÊNCIA DE UMIDADE EM MEIOS POROSOS INSATURADOS: A DINÂMICA DE RESPOSTA DE UM TENSÍOMETRO Martinho B. Quadri, Paulo C. Phillippi e Ariovaldo Bolzan .....	303
• THERMOHYDRAULICS IN LAMINAR FLOW OF IMMISCIBLE LIQUIDS FOR FOULING REDUCTION E. Nogueira e R.M. Gotta .....	307
• OBTENÇÃO DE PERFIS DE TEMPERATURA POR SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA DO TRANSPORTE DE CALOR EM ESCOAMENTO TURBULENTO CISALHANTE ANISOTRÓPICO ENTRE PLACAS PARALELAS Ralf Gielow, Dale W. Kirmse e Ray W. Fahien .....	311
• TRANSFERÊNCIA DE CALOR TRANSIENTE NO INTERIOR DE DUTOS COM TEMPERATURA VARIANDO PERIÓDICAMENTE NA ENTRADA Jerônimo dos Santos Travelho e Wilson Fernando Nogueira dos Santos .....	315

## 14. MÉTODOS NUMÉRICOS: DIFERENÇAS FINITAS

• NATURAL CONVECTION IN A CAVITY : A COMPARISON OF DIFFERENT NUMERICAL METHODS M. Behnia, F. Stella, G.de Vahl Davis e G. Cuj .....	321
--	-----



- A NOTE ON NUMERICAL DIFFUSION IN TWO-DIMENSIONAL CONVECTION-DIFFUSION PROBLEMS  
Carlos Magno Fernandes e Marcelo J.S. de Lemos ..... 325
- ANÁLISE NUMÉRICA DA INFLUÊNCIA DE DIMENSÕES FINITAS DE AMOSTRAS EM MEDIDAS DE  
CONDUTIVIDADE TÉRMICA PELA TÉCNICA DE FIO QUENTE  
Joaquim de Sylos Cintra Filho e Wilma Hehl Cintra ..... 328
- NUMERICAL SIMULATION OF LAMINAR FLOW IN A REFRIGERATED MOLD  
Norberto Mangiavacchi e Washington Braga ..... 332

## 15. CONDUÇÃO DE CALOR INCLUINDO MUDANÇA DE FASE

- ANÁLISE DE UM ARMAZENADOR TÉRMICO TIPO TUBO-CARCAÇA  
Carlos Lineu F. Alves, Nei C. Brazão e Orozimbo A.A. Rego ..... 337
- DISPOSITIVOS ELETRÔNICOS REFRIGERADOS POR MATERIAL DE MUDANÇA DE FASE  
Paulo Gilberto de Paula Toro e Carlos Lineu de Faria e Alves ..... 341
- MODELAMENTO NUMÉRICO DE UM ACUMULADOR TÉRMICO A CALOR LATENTE E CONTATO DIRETO  
Elizabeth Malta de Almeida e Carlos Lineu de Faria e Alves ..... 345
- ESTUDO EXPERIMENTAL DA FRENTE DE SOLIDIFICAÇÃO EM LÍQUIDO CONFINADO SUBMETIDO  
A SUPER-RESFRIAMENTO  
Kamal A.R. Ismail e Alcides Padilha ..... 349
- ANÁLISE DE RESFRIAMENTO DE BOBINAS DE FIO MÁQUINA  
José Rubens Gonçalves de Souza, Geraldo Augusto Campolina Franca, Ricardo  
Nicolau Nassar Koury e Newton Ribeiro Rocha ..... 353

## 16. DESEMPENHO DE SISTEMAS TÉRMICOS

- ANÁLISE EXPERIMENTAL DO DESEMPENHO TÉRMICO DE COBERTURAS VENTILADAS  
José Antonio Bellini da Cunha Neto, Vicente de Paulo Nicolau, Paulo César  
Phillippi e Fernando Oscar Ruttkay Pereira ..... 359
- SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO DESEMPENHO TÉRMICO DE COBERTURAS VENTILADAS  
Vicente de Paulo Nicolau, Paulo Cesar Phillippi e José Antonio Bellini  
da Cunha Neto ..... 363
- ANÁLISE DE DESEMPENHO DE UM SISTEMA DE AR CONDICIONADO SOLAR DO TIPO EVAPORATIVO  
Pedro Paulo Zucarato e Alcir de Faro Orlando ..... 367
- MÉTODO GENERALIZADO PARA A DETERMINAÇÃO DO DESEMPENHO TÉRMICO DE TROCADORES DE CALOR  
Otávio de Mattos Silveiras e Osvaldo Guillen Lopes ..... 371
- MODELO ANALÍTICO COMPUTACIONAL PARA DETERMINACION DEL ENMASCARAMIENTO SOLAR EN ZONAS  
URBANAS  
Alfredo Esteves, Carlos de Rosa e Jose Luis Cortegoso ..... 375

## 17. RADIAÇÃO

- DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO ENSAIO DO MODELO TÉRMICO DO SATÉLITE DE COLETA DE DADOS  
Fernando Manuel Ramos, Ezio Castejon Garcia e José Sérgio de Almeida ..... 381
- UM ALGORÍTMO PARA O PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA (CONDUÇÃO/RADIAÇÃO) EM  
CORPOS NEGROS SEPARADOS POR VÁCUO  
Rogério M. Saldanha da Gama ..... 385
- ESTUDO COMPARATIVO DE DIFERENTES MODELOS DE GERAÇÃO DE SÉRIES DE RADIAÇÃO SOLAR  
Arno Krenzinger e Mario H. Macagnan ..... 389

- USO DE FUNÇÕES DE GREEN NA ANÁLISE TRANSIENTE DE UM PIRANÔMETRO TERMORESISTIVO  
Guimarães, G., Lima, L.C. e Teodoro, E.B. .... 393
- ATENUAÇÃO DA RADIAÇÃO TÉRMICA COM ANTEPAROS PERFURADOS  
Antonio Mac Dowell de Figueiredo e Manoel Joaquim Magalhães de Queiroz ..... 397

AERODINAMICA



AERODYNAMIC FLOW SIMULATION USING A FINITE DIFFERENCE METHOD

JOAO LUIZ F. AZEVEDO  
 Instituto de Atividades Espaciais  
 12225 Sao José dos Campos, S.P. - Brasil

ABSTRACT

The aerodynamic flowfield about realistic launch vehicle configurations is simulated using the three dimensional, Reynolds Averaged Navier Stokes equations. Turbulent scales are taken into consideration by means of the two-layer Baldwin and Lomax algebraic eddy viscosity model. The formulation is implemented through finite difference techniques. The Beam and Warming implicit approximate factorization algorithm is used for the solution of the discretized finite difference equations. The calculations include the study of the flowfield about a hemisphere-cylinder and about a hammerhead payload configuration, at various flight regimes. These applications provide for a validation of the method against available experimental data or theoretical results calculated by other methods.

INTRODUCTION

The present work undertakes to describe a computational approach for the simulation of aerodynamic flows. The progress recently achieved in the field of Computational Fluid Dynamics (CFD), together with the enormous increase in the computational power of current computers, has allowed the calculation of flows of practical interest. The applications presented in this work are mostly concerned with typical launch vehicle configurations. One must observe, however, that the methodology developed can be applied to any aerospace vehicle.

Typically, CFD techniques represent a return to basic fluid dynamic formulations, instead of the extensive array of approximations introduced in classical aerodynamic calculations. The complexity of the formulation utilized in each application is usually dictated by the phenomena one wants to capture in the simulation. There is a tradeoff between complexity of the formulation and computational cost which the user must consider. In this fashion, a Navier Stokes solution might be orders of magnitude more expensive than a full-potential solution. Therefore, one must decide whether it is really worth going to the more complex formulations in light of the physical phenomena that are important in his problem.

In the present case, we sought to develop a computational code that would treat the subsonic, transonic, or even supersonic, flow over rather thick bodies. This means, for instance, that in the supersonic regime we must not content ourselves with weak shock solutions, since actually we would have a detached shock. Furthermore, especially in the transonic regime, the shock boundary layer interactions may be extremely important in order to accurately describe the flowfield. Finally, we were also very interested in configurations in which massive flow separation conditions might exist and, again, a viscous formulation would be advisable.

After we consider all the above, the aerodynamic formulation used in the present work is based on the Navier-Stokes equations. However, a full solution of these equations around complex geometries is still beyond the capabilities of current computers. For this reason, the method employed here undertakes to solve the Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations. In the sections that will follow, the formulation and its numerical implementation will be described, and applications of the method will be presented.

THEORETICAL BACKGROUND

The compressible Reynolds Averaged Navier-Stokes equations [1] can be written in strong conservation-law form for general three dimensional, body-conforming, curvilinear coordinates [2] as

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta} = 0 \tag{1}$$

where the vector of conserved quantities,  $\bar{Q}$ , is defined as

$$\bar{Q} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{Bmatrix} \tag{2}$$

The flux vectors  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  and  $\bar{G}$  can be written as [3]

$$\bar{E} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \rho u l^i + p \xi_x - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho l^i}{l^i} (\tau_{xx} \xi_x + \tau_{xy} \xi_y + \tau_{xz} \xi_z) \\ \rho v l^i + p \xi_y - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho l^i}{l^i} (\tau_{xy} \xi_x + \tau_{yy} \xi_y + \tau_{yz} \xi_z) \\ \rho w l^i + p \xi_z - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho l^i}{l^i} (\tau_{xz} \xi_x + \tau_{yz} \xi_y + \tau_{zz} \xi_z) \\ (e + p) l^i - p \xi_i - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho l^i}{l^i} (\beta_x \xi_x + \beta_y \xi_y + \beta_z \xi_z) \end{Bmatrix} \tag{3}$$

$$\bar{F} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \rho u V + p \eta_x - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho V}{l^i} (\tau_{xx} \eta_x + \tau_{xy} \eta_y + \tau_{xz} \eta_z) \\ \rho v V + p \eta_y - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho V}{l^i} (\tau_{xy} \eta_x + \tau_{yy} \eta_y + \tau_{yz} \eta_z) \\ \rho w V + p \eta_z - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho V}{l^i} (\tau_{xz} \eta_x + \tau_{yz} \eta_y + \tau_{zz} \eta_z) \\ (e + p) V - p \eta_i - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho V}{l^i} (\beta_x \eta_x + \beta_y \eta_y + \beta_z \eta_z) \end{Bmatrix} \tag{4}$$

$$\bar{G} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \rho u W + p \zeta_x - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho W}{l^i} (\tau_{xx} \zeta_x + \tau_{xy} \zeta_y + \tau_{xz} \zeta_z) \\ \rho v W + p \zeta_y - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho W}{l^i} (\tau_{xy} \zeta_x + \tau_{yy} \zeta_y + \tau_{yz} \zeta_z) \\ \rho w W + p \zeta_z - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho W}{l^i} (\tau_{xz} \zeta_x + \tau_{yz} \zeta_y + \tau_{zz} \zeta_z) \\ (e + p) W - p \zeta_i - \frac{M_\infty}{Re} \frac{\rho W}{l^i} (\beta_x \zeta_x + \beta_y \zeta_y + \beta_z \zeta_z) \end{Bmatrix} \tag{5}$$

In the above equations, the usual nomenclature is being used. Therefore,  $\rho$  is the density,  $u, v$  and  $w$  are the cartesian components of velocity, and  $e$  is the total energy per unit of volume. The equations have been non-dimensionalized following the work of Pulliam and Steger [2]. The freestream Mach number,  $M_\infty$ , is defined in its usual way, and the Reynolds number  $Re$ , is given by

$$Re = \frac{\rho_\infty U_\infty l_0}{\mu_\infty} \tag{6}$$

Here,  $U_\infty$  is the magnitude of the freestream velocity vector, and  $l_0$  is the reference length.

The pressure,  $p$ , can be obtained by the equation of state for perfect gases

$$p = (\gamma - 1) \rho \epsilon + (\gamma - 1) \left[ \epsilon - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right] \tag{7}$$

where  $\epsilon$  is the specific internal energy of the fluid, and  $\gamma$  is the ratio of specific heats. The contravariant velocity components are defined as

$$\begin{aligned} U &= \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ V &= \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\ W &= \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \end{aligned} \tag{8}$$

The  $\beta_x, \beta_y$  and  $\beta_z$  terms are given by

$$\begin{aligned} \beta_x &= \tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w - q_x \\ \beta_y &= \tau_{xy} u + \tau_{yy} v + \tau_{yz} w - q_y \\ \beta_z &= \tau_{xz} u + \tau_{yz} v + \tau_{zz} w - q_z \end{aligned} \tag{9}$$

Since a Reynolds-Averaged Navier Stokes formulation is being used, something must be said about the way in which the turbulent mixing processes are accounted for. In the present work, this is accomplished through the use of the "eddy viscosity" and "eddy conductivity" concepts [5]. By this approach, the "molecular" viscosity coefficient,  $\mu_e$ , is upgraded by an "eddy" (or "turbulent") viscosity coefficient,  $\mu_t$ , in order to obtain the viscosity coefficient used in the calculation of the viscous stress terms. A similar approach is followed with regard to the coefficient of thermal conductivity,  $k$ . The determination of  $\mu_t$  constitutes the science of turbulence.



Figure 2. Density contours for hemisphere-cylinder at  $Ma_\infty = 0.5$  and  $\alpha = 0^\circ$

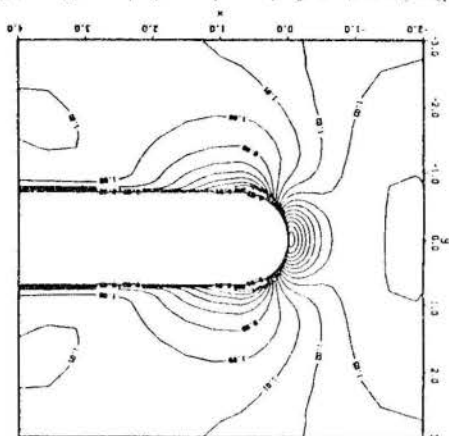
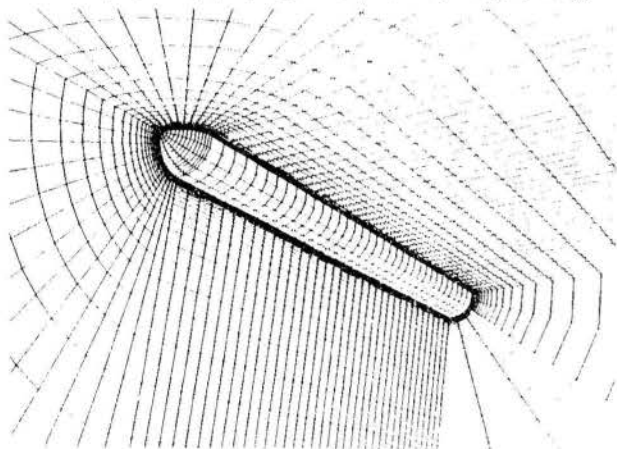


Figure 1. Three dimensional view of the hemisphere-cylinder grid



Two configurations were selected for application of the method described. As previously mentioned, these applications were restricted to typical laminar vehicle configurations. Initially, a hemisphere-cylinder configuration was studied at both subsonic and supersonic flight conditions. These cases were mostly intended at validating the code developed before its use to the analysis of the more complex hemispherical payload configuration. Hemisphere-cylinder configuration. The whole and the computational mesh used in this investigation can be seen in Figure 1. The grid was generated by algebraic methods, and it has 50, 40 and 20 points in the longitudinal, normal and circumferential directions, respectively. A 25% exponential grid stretching is used in the normal direction in order to cluster the grid points along the body surface. It must be emphasized that this is a very coarse grid system. Furthermore, it should be clear that the mesh just described only supports the so-called "thin layer" approximation to the Navier-Stokes equations, despite the fact that the viscous terms in all three coordinate directions were kept in the formulation. Density contours for the converged solution at  $Ma_\infty = 0.5$ , zero angle of attack and  $Re = 1.5 \times 10^5$  (based on the cylindrical section diameter) can be seen in Figure 2. The pressure coefficient distribution on the body obtained in this case is compared in Figure 3 with the one obtained from the FFD code [11,12]. This code uses the Suger and Warming scheme [13] which is a partially flux-split algorithm. It is clear from Figure 3 that the two results are in good agreement. Figure 4 shows March contours for the converged solution at  $Ma_\infty = 0.7$  and  $\alpha = 0^\circ$ . The Reynolds number in this case was chosen to match the experimental results by Hsieh [14]. A comparison of these computational results with their experimental values is given in Reference [15]. It suffices to say here that the two sets of results showed good correlation. A low supersonic case was also run, and Figure 5 shows the detached shock location for one longitudinal plane of the solution. The freestream Mach number in this case was 1.5, zero angle of attack was again assumed.

RESULTS

Artificial dissipation terms have been introduced in the operators described by Equation 15 in order to maintain the stability of the numerical solution process. Fourth order numerical dissipation terms were added to the right-hand side operators, and second order terms were used in the left-hand side operators. The Jacobian matrices  $A_n^m, B_n^m, C_n^m, M_n^E, M_n^E$  and  $M_n^E$  are described in detail in References [3] and [4].

$$\Delta_t \bar{Q}_n^m = \bar{Q}_n^{m+1} - \bar{Q}_n^m \quad (16)$$

In the above,  $\delta_t, \delta_n$  and  $\delta_c$  are central difference operators;  $\Delta_t, \Delta_n$  and  $\Delta_c$  are backward difference operators; and  $\Delta_t, \Delta_n$  and  $\Delta_c$  are forward difference operators in the  $\xi, \eta$  and  $\zeta$  directions, respectively. The  $\delta_t, \delta_n$  and  $\delta_c$  are midpoint central difference operators. All the left-hand side operators are finite difference using these midpoint operators in order to maintain a compact three-point scheme. This ensures that the left-hand side matrices will be tridiagonal and, therefore, that a cost efficient algorithm is obtained. The  $\Delta_t$  is a forward difference operator in time given by

$$\begin{aligned} R_t^E &= -\Delta t \delta_t \bar{Q}_n^m - \epsilon \Delta t \delta_t \bar{Q}_n^m \\ R_n^E &= -\Delta n \delta_n \bar{Q}_n^m - \epsilon \Delta n \delta_n \bar{Q}_n^m \\ R_c^E &= -\Delta c \delta_c \bar{Q}_n^m - \epsilon \Delta c \delta_c \bar{Q}_n^m \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} L_t^E &= (I + \Delta t \delta_t \bar{A}_n^m - \epsilon \Delta t \delta_t \bar{A}_n^m - \Delta t \delta_t \bar{A}_n^m) \bar{Q}_n^m \\ L_n^E &= (I + \Delta n \delta_n \bar{A}_n^m - \epsilon \Delta n \delta_n \bar{A}_n^m - \Delta n \delta_n \bar{A}_n^m) \bar{Q}_n^m \\ L_c^E &= (I + \Delta c \delta_c \bar{A}_n^m - \epsilon \Delta c \delta_c \bar{A}_n^m - \Delta c \delta_c \bar{A}_n^m) \bar{Q}_n^m \end{aligned} \quad (18)$$

The various operators are defined as

$$L_n L_t L_c L_t \bar{Q}_n^m = R_t^E + R_n^E + R_c^E \quad (19)$$

form as

The factored finite difference equations can be written in the delta only first order accurate in time due to the use of the implicit Euler method.

The factored finite difference equations can be written in the delta only first order accurate in time due to the use of the implicit Euler method. The second order accurate in space, as mentioned, but it is the difference equations in order to obtain a cost efficient algorithm. The factorization scheme [9,10] was used for the solution of the resulting finite and order central differences. The Beam and Warming implicit approximate method, and the spatial derivatives were approximated by three-point, second order central differences. The implicit Euler method was used for the time difference methods. The implicit Euler method was used for the time difference methods.

NUMERICAL IMPLEMENTATION

Expressions for the various metric relations can be found, among other references, in Pulliam and Steger [24].

$$J = (x \xi \eta \zeta + x \eta \zeta \xi + x \zeta \eta \xi + x \xi \eta \zeta - x \eta \zeta \xi - x \zeta \eta \xi - x \xi \eta \zeta) \quad (20)$$

The Jacobian of the transformation,  $J$ , can be expressed as

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z, t) \\ \eta &= \eta(x, y, z, t) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (21)$$

transformation of variables

the circumferential direction. This coordinate system is obtained from the such that  $\xi$  is the longitudinal direction,  $\eta$  is the normal direction, and  $\zeta$  is the circumferential direction. This coordinate system is obtained from the transformation of variables.

Throughout this work, the curvilinear coordinate system is defined the turbulent Prandtl number.

In the above,  $T$  is the temperature,  $Pr$  is the Prandtl number, and  $Pr_t$  is

$$Pr_t = -(\kappa_t + \kappa_1) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \zeta} \right) \quad (22)$$

written as

equation. In a similar way, the components of the heat-flux vector can be

thermodynamic, in the interest of brevity, the index notation and the Einstein convention for summation in the repeated index were used in the above where the Stokes hypothesis was used, and  $\delta_{ij}$  is the Kronecker delta. Furthermore, the index notation and the Einstein convention for summation in the repeated index were used in the above

$$\tau_{xx} = (\mu + \mu_1) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \right) + \frac{2}{3} (\mu + \mu_1) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \right) \delta_{ij} \quad (23)$$

The components of the viscous stress tensor can, then, be written

and Nakahashi [8].

Baldwin and Lomax [6] algebraic eddy viscosity model. The implementation of the model followed the work of Dewert [7], and Dewert, Andrews

modeling. The particular turbulence model adopted here was the two-layer

and  $R = 1.386 \times 10^5$ . The shock standoff distance of  $\approx 0.57$ , nondimensionally  $^{-1}$  with respect to the radius of the cylindrical section, compares well with the value of  $\approx 0.60$  obtained from experiment [14] for this case.

**Hammerhead Payload Configuration.** The simulations we want to address here concern the configuration shown in Figure 6. The computational mesh was again generated by algebraic methods. The longitudinal, normal and circumferential directions have, respectively, 105, 66 and 38 grid points. The grid is periodic in the circumferential direction. Exponential grid stretching is used in the normal direction, and both exponential and one parameter hyperbolic tangent grid stretching [16] techniques are used in the longitudinal direction with the objective of clustering grid points in the regions of higher flow gradients.

This configuration was considered at  $M_\infty = 0.85$ ,  $\alpha = 0^\circ$  and  $R = 1.2637 \times 10^5$ , based on the diameter of the afterbody cylindrical section.

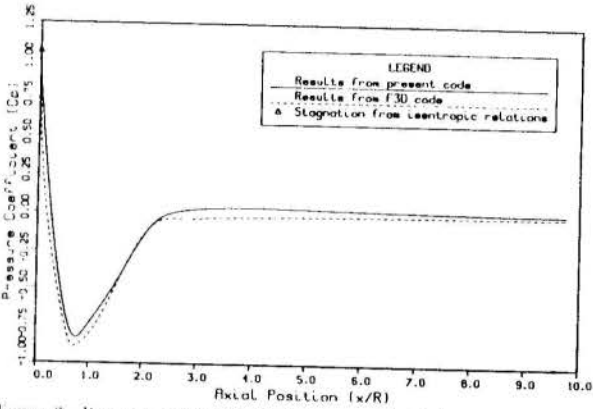


Figure 3: Pressure coefficient distribution on the body for hemisphere-cylinder at  $M_\infty = 0.5$ .

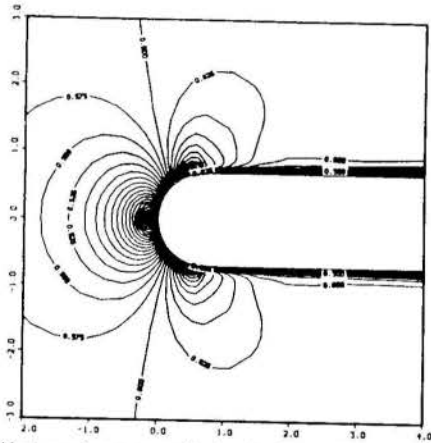


Figure 4: Mach number contours for hemisphere-cylinder at  $M_\infty = 0.6$  and  $\alpha = 0^\circ$ .

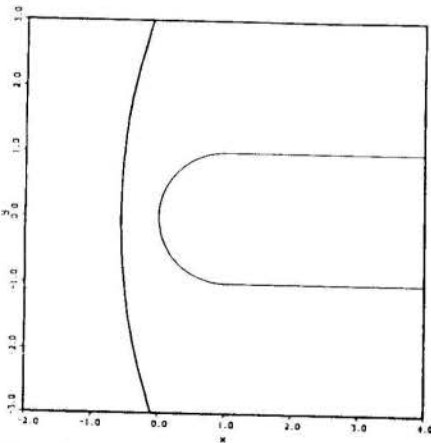


Figure 5: Shock location for hemisphere-cylinder at  $M_\infty = 1.5$  and zero angle of attack.

Converged Mach number contours for lee- and windward planes can be seen in Figure 7. The flowfield topology is best visualized through what amounts to computer generated oil flow lines, which are shown in Figure 8. These are essentially particle traces in which the "fluid particles" are restricted to remain in the second computational plane in the normal direction. Regions, or lines, where particles accumulate constitute lines of flow separation. On the other hand, lines of reattachment are characterized by regions in which all particles move away from it.

Figure 8 shows that there are two lines of separation over the side of the body. We can also identify a node of separation [17] on the lee-generator. We can see from the figure that the flow on the leeside separates just downstream of the ellipsoidal nose-cylinder intersection. The flow reattachment will only occur downstream of the boattail, already over the cylindrical afterbody section. The complete boattail is immersed in a reversed flow region. Finally, in order to provide further understanding of the flow topology in this case, Figure 9 gives unrestricted particle traces for a side view of the body. The flow separation is certainly evident from this last figure.

An explanation for the existence of this extensive region of flow separation can be obtained if we consider that the cylindrical forebody section is very short in this case. The supersonic region, due to the accelerated flow going over the ellipsoidal nose, is terminated by a shock. The interaction of this shock with the boundary layer causes the separation in the forward portion of the cylindrical forebody section, especially in the regions closer to the lee-generator. However, for such a short payload fairing, this shock induced separation region merges with the separation region due to the adverse pressure gradients in the boattail. The end result is a rather massive flow separation, as the previous figures have indicated.

#### CONCLUSIONS AND RECOMMENDATIONS FOR FUTURE WORK

A finite difference approach for flow simulation over complex, three-dimensional, launch vehicle configurations is described. The theoretical formulation and its numerical implementation are discussed in detail. The

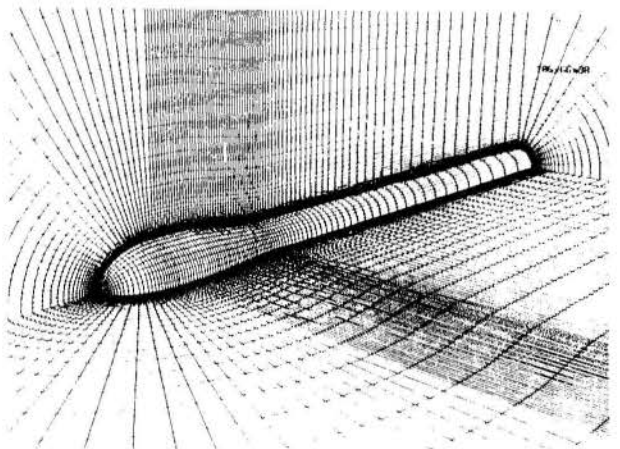


Figure 6: Three-dimensional view of the hammerhead configuration grid system.

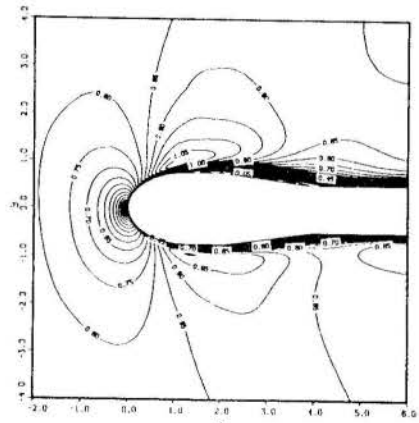


Figure 7: Mach number contours for hammerhead configuration at  $M_\infty = 0.85$  and  $\alpha = 0^\circ$  (side view).

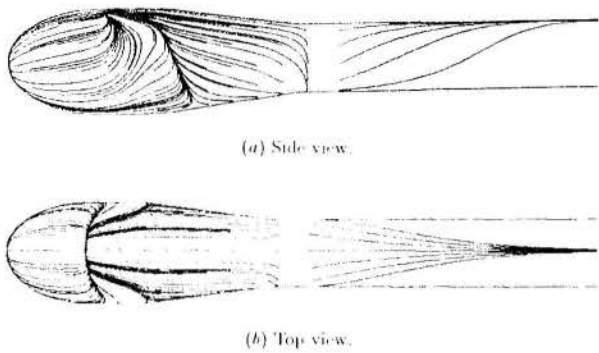


Figure 8: Oil-flow lines for hammerhead configuration at  $M_\infty = 0.85$  and  $\alpha = 6^\circ$ .

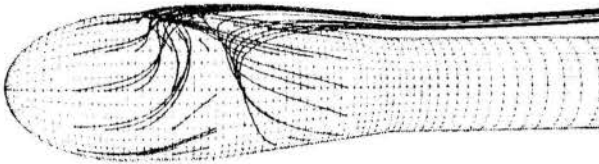


Figure 9: Particle traces for hammerhead configuration at  $M_\infty = 0.85$  and  $\alpha = 6^\circ$  (side view)

results presented illustrate the application of the method for various configurations and flight conditions. The present computational results correlate well with the available data.

The code developed was optimized to run in a CDC Cyber 205 computer. For the cases with the larger grid, the database is not core-contained. The code is highly vectorized and makes extensive use of asynchronous I/O in order to improve the efficiency of the read/write operations. Even with such enhancements, the computational cost of the calculations described here is not trivial. For the hammerhead cases, typically some 3500 to 4000 time steps were required to achieve convergence, assuming that the user started from "scratch", i. e., assuming freestream everywhere. It must be mentioned that, for these cases, approximately 10 CPU seconds in the Cyber 205 are spent per iteration. It should be clear, however, that once a solution for a certain flight condition has been obtained, it can be used as the starting guess to calculate the solution at a different flight condition. The convergence in such case can be obtained at a fraction of the cost.

Space limitations prevented the discussion of some difficulties observed with the turbulence model<sup>[3]</sup> in the cases with massive flow separation. The important outcome is that the simple turbulence model used here might not be the most appropriate for these flows with extensive separation. A recommendation would be to look into the possibility of implementing more sophisticated models. For instance, the Johnson and King<sup>[18]</sup> model seems to produce more robust results with very little increase in computational costs.

The present code was developed with the objective of having a time-accurate solver. Therefore, no convergence acceleration technique was incorporated into the algorithm. If only steady-state applications are of interest, enhancements such as variable time stepping or multigrid techniques are strongly recommended.

Finally, the author would like to close this discussion with a few words about the importance of good graphics in order to analyze these CFD results. This subject has been extensively discussed in the literature, but the author believes it cannot be overemphasized. The amount of data generated in these three dimensional simulations is enormous, and it would certainly be too much to ask of the analyst to try to make any sense out of a listing of numbers. Furthermore, colored scalar contour plots may not be enough in complex flowfield situations. The ability to generate particle trace plots or to represent vector fields, such as velocity or vorticity vectors, becomes a must in these complex flow cases in order to understand the results being calculated. In summary, good graphic capabilities is an essential part of these three dimensional flow simulations.

## REFERENCES

- [1] Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1984.
- [2] Pulliam, T.H., and Steger, J.L., "Implicit Finite-Difference Simulations of Three-Dimensional Compressible Flow," *AIAA Journal*, Vol. 18, No. 2, Feb. 1980, pp. 159-167.
- [3] Azevedo, J.L.F., "Transonic Aeroelastic Analysis of Launch Vehicle Configurations," PhD Thesis, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Stanford, CA, Feb. 1988.
- [4] Pulliam, T.H., and Steger, J.L., "Recent Improvements in Efficiency, Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithms," AIAA Paper 85-0360, *AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting*, Reno, Nevada, January 1985.
- [5] Deiwert, G.S., and Bailey, H.E., "Time-Dependent Finite-Difference Simulation of Unsteady Interactive Flows," In: *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows II*, T. Cebeci, ed., Springer-Verlag, New York, 1984, pp. 63-78.
- [6] Baldwin, B.S., and Lomax, H., "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA Paper No. 78-257, January 1978.
- [7] Deiwert, G.S., "Supersonic Axisymmetric Flow over Boattails Containing a Centered Propulsive Jet," *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 10, Oct. 1984, pp. 1358-1365.
- [8] Deiwert, G.S., Andrews, A.E., and Nakahashi, K., "Theoretical Analysis of Aircraft Afterbody Flows," AIAA Paper 84-1524, *AIAA 17th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics, and Lasers Conference*, Snowmass, Colorado, June 1984.
- [9] Beam, R.M., and Warming, R.F., "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation-Law Form," *Journal of Computational Physics*, Vol. 22, 1976, pp. 87-110.
- [10] Beam, R.M., and Warming, R.F., "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 4, April 1978, pp. 393-402.
- [11] Ying, S.X., Steger, J.L., Schiff, I.B., and Baganoff, D., "Numerical Simulation of Unsteady, Viscous, High-Angle-of-Attack Flows Using a Partially Flux-Split Algorithm," AIAA Paper 86-2179, *AIAA 13th Atmospheric Flight Mechanics Conference*, Williamsburg, Virginia, August 18-20, 1986.
- [12] Ying, S.X., "Three-Dimensional Implicit Approximately Factored Schemes for the Equations of Gasdynamics," SUDAAR No. 557, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Stanford, CA, June 1986.
- [13] Warming, R.F., "Topics in Computational Fluid Dynamics," Notes for course AA215A, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Stanford, CA, January-March 1984.
- [14] Hsieh, T., "An Investigation of Separated Flows About a Hemisphere-Cylinder at Incidence in the Mach Number Range from 0.6 to 1.5," AIAA Paper 77-179, *AIAA 15th Aerospace Sciences Meeting*, Los Angeles, CA, January 1977.
- [15] Azevedo, J.L.F., "Aeroelastic Analysis of Launch Vehicles in Transonic Flight," AIAA Paper No. 87-0708-CP, *28th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Monterey, CA, April 1987.
- [16] Vinokur, M., "On One-Dimensional Stretching Functions for Finite-Difference Calculations," NASA CR-3313, 1980.
- [17] Dallmann, U., "Topological Structures of Three-Dimensional Flow Separations," DFVLR Report No. 221-82 A 07, April 1983.
- [18] Johnson, D.A., and King, L.S., "A Mathematically Simple Turbulence Closure Model for Attached and Separated Turbulent Boundary Layers," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 11, Nov. 1985, pp. 1684-1692.

NUMERICAL SIMULATION OF THE SUPERSONIC FLOW AROUND ARBITRARY SHAPES USING THE SHOCK-CAPTURING TECHNIQUE



Diomar Cesar Lobão e Clovis Raimundo Maliska

Divisão de Projetos AED/ETP  
Inst. de Atividades Espaciais  
São José dos Campos - SP

Depto. Eng. Mecânica - UFSC  
Cx. Postal 476 - 88049  
Florianópolis - SC

ABSTRACT

The three-dimensional supersonic flow around complex configurations like a launch vehicle is determined using a shock-capturing technique embodied in a finite-difference approach in generalized coordinates. The equations are written in conservation-law form and integrated from an initial data plane downstream over the body. Existing shock waves are captured automatically. Results are compared with experimental data to demonstrate the ability of the model to accurately predict the inviscid flows around a space vehicle.

INTRODUCTION

In the design of a supersonic launch vehicle there are many effects that are of utmost importance to be determined. Among them are the aerodynamic loads necessary for the prediction of the vehicle trajectory. The ability of computing numerically the load distribution around launch vehicles is of considerable importance, mainly because the high costs of wind-tunnel tests. Careful and well chosen wind tunnel experiments, in conjunction with powerful numerical simulations are the less costly approach for designing a space vehicle. By its turn, the numerical solution of the three-dimensional flow field equations is not an easy task, with added complexity, when the solution domain is irregular.

In the present work a three-dimensional numerical model, using the second order non-centered finite-difference scheme of MacCormack in boundary-fitted coordinate, is employed to solve the inviscid flow field equations cast in conservation-law form. The shock-capturing technique is used which is capable of numerically predict the location and intensity of all predominant shock waves without the explicit use of any shock-fitting procedure.

GOVERNING FLOW EQUATIONS

The equations of motion can be written in conservation-law form, using vector notation in the Cartesian coordinate system as [1]

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

where  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  and  $\bar{G}$  are four-dimensional vectors defined by

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho u^2 + p \end{pmatrix} ; \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho w \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix} ; \quad (2)$$

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho v w \\ \rho w^2 + p \end{pmatrix}$$

The Eq.(1), which represent the mass conservation equation and three momentum equations, comprise a complete set when coupled with the energy equation in the following form

$$p = (1 - q^2) \quad (3)$$

where

$$q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (4)$$

Due to the irregular shape of the solution domain it is not convenient to use the conservation equations written in the Cartesian coordinate system, because of the boundary conditions application and code generality. A more general model can be obtained if the conservation equations are transformed to a new coordinate system, coincident with the calculation domain. The suitable transformation for the type of problem analyzed here is

$$\tau = z ; \quad \xi = \xi(x, y, z) ; \quad \eta = \eta(x, y, z) \quad (5)$$

Fig.1 shows two cross-planes and the corresponding transformed domains for the transformation given by Eq.(5). It is seen that with this transformation any calculation domain laid out over blunt bodies, even axially non-symmetric, can be transformed onto a parallelepiped in the computational plane.

The conservation-law form of the equations of motion, Eq.(1), can be retained in the new coordinate system as

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (6)$$

where the new variables are defined as follows

$$F = (\bar{E}\xi_z + \bar{F}\xi_x + \bar{G}\xi_y) / \bar{J}$$

$$G = (\bar{E}\eta_z + \bar{F}\eta_x + \bar{G}\eta_y) / \bar{J} \quad (7)$$

$$E = \bar{E} \tau_z / \bar{J}$$

The integration of Eq.(4) is performed with respect to  $\tau$ , since the equation is hyperbolic with respect to that coordinate. The flow variables



$p, \rho, u, v$  and  $w$  are, therefore, determined from the components of the conservative variable  $E$ .

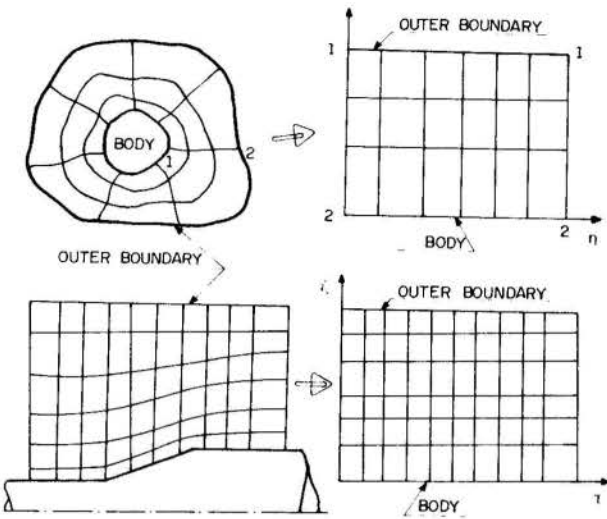


Fig. 1 - Cross-planes of the 3-D transformation

#### FINITE-DIFFERENCE TECHNIQUE AND SOLUTION PROCEDURE

Shock-capturing is one of the most widely used techniques for computing inviscid flow with shocks. The capability of an SCT to accurately predict the location and intensity of all shock waves, in addition to the continuous determination of the flow field, depend in part on the finite-difference scheme used. The shock waves predicted by these methods are indeed smeared over several mesh interval but the simplicity of this approach may outweigh the slight compromise in results compared to shock-fitting schemes.

The MacCormack second-order scheme [1], adopted in this work is

$$E_{i,j}^{(1)} = E_{i,j}^n - \alpha_1 \left\{ \Delta \tau (F_{i,j+1}^n - F_{i,j}^n) + \Delta \tau (G_{i+1,j}^n - G_{i,j}^n) \right\}$$

$$E_{i,j}^{n+1} = (E_{i,j}^n + E_{i,j}^{(1)}) / 2 - w_1 \left\{ \Delta \tau (F_{i,j+1}^{(1)} - F_{i,j}^{(1)}) + \Delta \tau (G_{i+1,j}^{(1)} - G_{i,j}^{(1)}) \right\} \quad (8)$$

where

$$\alpha_1 = 1.2 \quad ; \quad w_1 = 0.4 \quad ; \quad \Delta \xi = \Delta \eta = 1$$

The solution procedure is shown schematically in Fig. 2. Since the method employed here is valid only for the supersonic region, the solution in the plane AA' must be known. In the region I the flow is subsonic/supersonic and some other methodology must be employed in that region. The solution used in this work was obtained in [6], using a time-dependent methodology. The transfer of the information from region I to plane AA' is done through a grid overlapping procedure. The solution marches downstream from the  $z_i$  to  $z_{i+1}$  surface, taking advantage of the hyperbolic nature of the equation set. The compression and expansion shock-waves are

fully captured with this model. The size of the marching step is variable and changes to meet the stability conditions, as discussed latter.

#### BOUNDARY CONDITIONS

In this work two boundary conditions procedures are used. The reflection is used in the body sublayer and in the plane of symmetry fringe, and the Abbett [3] scheme for the surface tangency condition. The pressure, density, and tangential velocity at the sublayer point are set equal to their respective values at the first point above the body, while the normal velocity is set equal to the negative of its value.

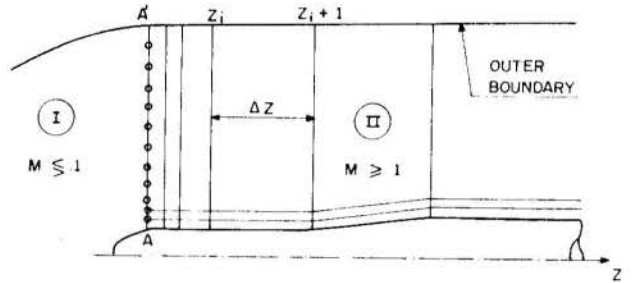


Fig. 2 - Schematic of the marching procedure

In applying the Abbett's scheme one first predicts values of the flow variables ( $p, \rho, u, v, w$ ) at  $\tau^{n+1} = \tau + \Delta \tau$ , using the Euler predictor and then correct these quantities using simple compression or expansion waves to invoke the surface tangency condition exactly. The details for the present problem can be found in [3].

#### STABILITY ANALYSIS

A finite-difference approximation to a partial differential equation may be consistent but the solution will not necessarily converge to the solution of the PDE. In numerical techniques it is very important to select a step size to guarantee the stability bound, such that the computation is performed with a minimum of computer time. The method applied in this work is based on a locally linear analysis of the governing partial differential equations, coupled with a von Neumann stability analysis [1].

When the linear approach analysis is applied to Eq.(6) the manipulation of the Jacobian matrixes and the computation of the eigenvalues are very cumbersome. To perform such computations the algebraic processor REDUCE is used and, to determine the eigenvalues the Brown method is employed [4].

The amplification matrix theory, at least for two-dimensional  $\tau, \xi$  space, requires that

$$\Delta \tau / \Delta \xi \leq 1 / (\partial \xi)_{\max}$$

$$\partial \xi = |\partial(\xi)|_{\text{local max}} \quad (9)$$

Where  $\partial \xi$  is defined to be the local maximum modulus of the eigenvalues of the Jacobian matrix to  $\xi$  direction, in a given grid point of the field. A similar condition is obtained in  $\tau, \eta$  space.

$$\Delta \tau / \Delta \eta \leq 1 / (\partial \eta)_{\max}$$

$$\partial \eta = |\partial(\eta)|_{\text{local max}} \quad (10)$$

The step size is determined by a minimum  $\Delta x$  predicted by the two relations 9 and 10. This planar analysis has been shown that the relations 9 and 10 can be replaced by

$$\begin{aligned} \Delta x / \Delta \xi &= \text{const} / (\partial \xi)_{\text{max}} \\ \Delta z / \Delta \eta &= \text{const} / (\partial \eta)_{\text{max}} \end{aligned} \quad (11)$$

The minimum value of relation 11 must be chosen, and  $\text{const} = 1$  can be varied during the computation with a usually assigned value of approximately 0,9.

#### NUMERICAL RESULTS

The numerical model is tested solving the supersonic flow over the SCOUT vehicle for several Mach numbers. The angle of attack was taken equal to zero, for comparison purposes, so the solution is two-dimensional due to the axial symmetry of the vehicle. The problem was kept three-dimensional with a discretization with 22x41 points in the  $\xi, \eta$  plane and, approximately, 600 marching steps in the direction. Figs 3, 4 and 5 reports the pressure coefficient for the SCOUT vehicle for several Mach numbers. There is some disagreement between the experimental[5] results and the numerical ones close to the compression corner. Up til now there is no explanation for such a behaviour.

The bow shock, which encompasses the supersonic marching region, although not presented here, is also well captured by this methodology

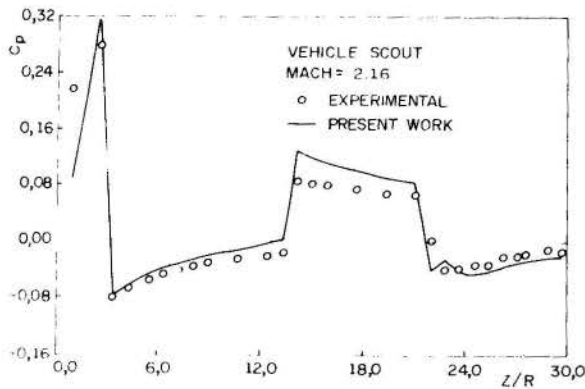


Fig. 3 - Pressure coefficients for Mach = 2.16

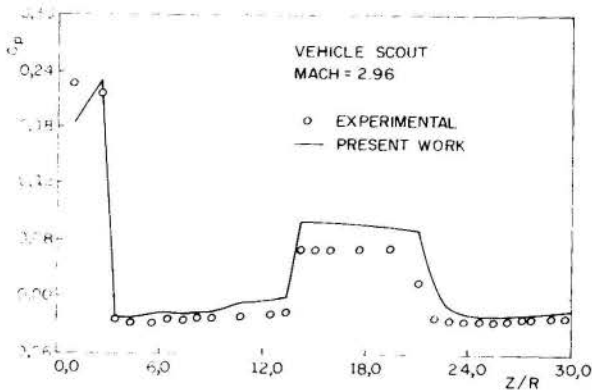


Fig. 4 - Pressure coefficients for Mach = 2.96

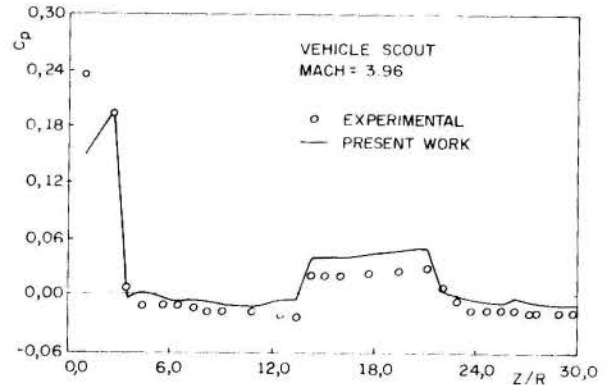


Fig. 5 - Pressure coefficient for Mach = 3.96

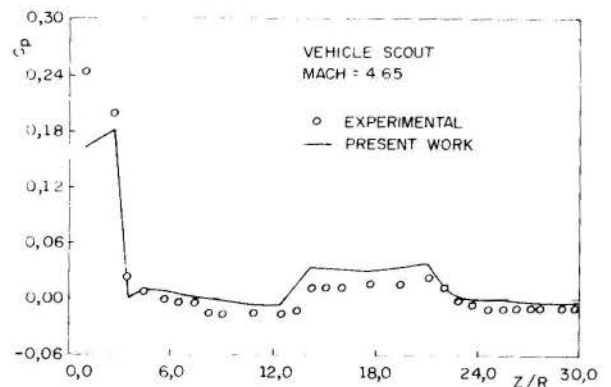


Fig. 6 - Pressure coefficient for Mach = 4.65

#### CONCLUSIONS

The calculations have shown that this procedure is capable of capturing weak shocks in the presence of strong ones, like the bow shock, with both shocks being well defined. Despite the discrepancies between the numerical and experimental results in the compression corner, the method predicted well the load distribution over the entire region analyzed.

This procedure can be applied to space vehicles of many shapes in supersonic regime. The strong wedges must be avoided because of the possibility of flow separation and upstream influence of pressure, causing the so called departure solutions. Smooth shapes with small wedge angles yield best results.

#### REFERENCES

- [1]. Kutler, P., Warming, R. F., Lomax, H., Computational of Space Shuttle Flowfields using Noncentered Finite-Difference Schemes. *AIAA J.* vol. 11, n- 2, Feb 1973.
- [2]. Maliska, C. R., A Solution Method for Three-dimensional Parabolic Fluid Flow in Nonorthogonal coordinates, *Ph.D. Thesis*, Waterloo, Ontario, Canada, 1981.
- [3]. Abbett, M. J., Boundary Condition Computational Procedures for Inviscid Steady Field Calculations, *Final Rept.* 71-41, 1971, Aerotherm Corp., Mt. View, Calif.
- [4]. Lobão, D. C., Um Critério de Estabilidade Aplicado as Equações da Dinâmica dos Gases, 10º

CNMAC, Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, set 1987, Gramado, RS.

- [5]. Jornell, L. S., Aerodynamic Loading Characteristics of The Three-Stage Scout Vehicle at Mach Number From 1.57 to 4.65, NASA TND-1930, Washington, USA, 1963.
- [6]. Nascimento, D.P. and Prakash, S., Análise do problema do corpo rombudo em escoamentos supersônicos/hipersônicos, RT 004 - ETP-AED/85, IAE/CTA, São José dos Campos -SP, 1985.

UMA FORMULAÇÃO SEGREGADA EM VOLUMES FINITOS PARA ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS E/OU INCOMPRESSÍVEIS EM COORDENADAS GENERALIZADAS



Antonio Fábio Carvalho da Silva  
Clovis Raimundo Maliska

Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC  
Cx. Postal 476 - 88049 - Florianópolis - SC

RESUMO

As equações diferenciais governantes do escoamento viscoso expressas em um sistema de coordenadas generalizado são discretizadas pelo método dos volumes finitos e resolvidas de forma segregada. O cálculo da densidade pela equação de estado e o tratamento das não linearidades na equação da continuidade tornam o método aplicável para escoamentos compressíveis e/ou incompressíveis. As equações resultantes permitem a solução de escoamentos bidimensionais planos ou axissimétricos. Resultados são apresentados para escoamento sobre cilindros e sobre o veículo espacial Scout.

INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos desenvolvidos para a solução de problemas de mecânica dos fluidos podem ser grosseiramente divididos entre os destinados a escoamentos compressíveis e os destinados a escoamentos incompressíveis. Poucos trabalhos são encontrados na literatura em que são apresentados métodos numéricos que buscam abranger os diversos regimes de escoamento. Esta constatação desperta o interesse nessa área haja vista que é comum a ocorrência em um mesmo escoamento de regiões supersônicas e regiões de escoamento baixo-subsônico.

Os métodos desenvolvidos para escoamentos compressíveis seguem, via de regra, um procedimento básico que é a solução das equações que modelam os princípios de conservação da massa, quantidade de movimento e energia de forma simultânea, isto é, um mesmo sistema de equações algébricas engloba todas as variáveis dependentes. Sempre que é necessário o valor da pressão, esta é calculada a partir de uma equação de estado. A esta característica é creditada a falha das formulações para baixos números de Mach. O texto de Anderson et al [1] reúne as principais características dessa metodologia.

Como em escoamentos incompressíveis (convecção natural incluída) a pressão não pode ser calculada pela equação de estado surge o bem conhecido problema do acoplamento pressão-velocidade. Neste tipo de formulação a equação da continuidade funciona como uma equação de restrição que é satisfeita iterativamente. O campo de pressões estará correto quando gerar velocidades, através das equações de conservação da quantidade de movimento, que satisfaçam a conservação da massa. Diversos métodos são conhecidos [2] para transformar erros na conservação da massa nos volumes de controle elementares em correções no campo de pressões. Além disso, cada variável dependente é calculada isoladamente e iterações são realizadas para atualização dos coeficientes. Por esse motivo esses métodos são conhecidos como métodos segregados, cujos fundamentos podem ser vistos em [3].

Recentemente, Van Doormaal [4] estendeu a capacidade dos métodos segregados para a solução de escoamentos compressíveis. Essa generalização foi conseguida através do novo tratamento dado a linearização da equação da continuidade. Silva e Maliska [5] reproduziram os resultados de Van Doormaal [4] e aplicaram a metodologia ao caso limite incompressível.

O presente trabalho é uma seqüência natural do anterior dos mesmos autores [5] cujo objetivo é, entre outros, a extensão da metodologia para discretização não ortogonal possibilitando o uso de sistemas de coordenadas que se ajustam às fronteiras (normalmente

irregulares) da região de solução.

A formulação a ser apresentada possui diversos aspectos inovadores em relação às existentes, a saber: a) apenas um conjunto  $u, v, U$  e  $V$  de componentes do vetor velocidade são armazenadas para cada ponto de pressão; b) não há superposição de volumes de controle para uma mesma equação de conservação e c) possibilita através da alteração de um único parâmetro transformar um problema bidimensional plano em um problema axissimétrico. Embora este último recurso seja comum em discretizações ortogonais, não é de conhecimento dos autores que o mesmo tenha já sido implementado em coordenadas generalizadas.

Outros aspectos que merecem atenção são a manutenção das componentes  $u$  e  $v$  como variáveis dependentes (e não as contravariantes  $U$  e  $V$ ) e o fato de, para malhas cartesianas ou cilíndricas, a formulação recuperar, exatamente, as características de uma metodologia ortogonal.

EQUAÇÕES GOVERNANTES

A equação de conservação de um escalar genérico  $\phi$  em um escoamento laminar bidimensional com  $k, \mu$  e  $c_p$  constantes, forças de campo e dissipação viscosa desprezíveis, pode ser representada por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho v \phi) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right) = P^{\phi} + S^{\phi} \quad (1)$$

onde os valores que  $\phi, P^{\phi}, S^{\phi}$  e  $P^{\phi}$  assumem para as diversas equações de conservação são os da Tab.1. Na Eq.(1) se  $x_1 = x, x_2 = y$  e  $j = 0$  obtém-se a forma

Tab.1. Valores assumidos por  $\phi, P^{\phi}, S^{\phi}$  e  $P^{\phi}$  para as diversas equações de conservação.

$\phi$	$P^{\phi}$	$P^{\phi}$	$S^{\phi}$
1	0	0	0
$\rho$	$\rho$	$\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho V_i)$
$u$	$u$	$\frac{\partial \rho}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u V_i) - \rho v \frac{\partial u}{\partial x}$
$T$	$k/c_p$	$\mu$	$\left[ \frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla_i (\rho V_i) - \rho V_i \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right] / c_p$

cartesiana. Se  $x_1 = z$ ,  $x_2 = r$  e  $j = 1$  a forma cilíndrica é recuperada. As velocidades  $u$  e  $v$  são as componentes do vetor velocidade nas direções  $x_1$  e  $x_2$  respectivamente.

A Eq.(1) para  $\phi = 1$ ,  $u$ ,  $v$  e  $T$  mais uma equação de estado do tipo

$$\rho = \rho(P, T) \quad (2)$$

formam um sistema de cinco equações e cinco incógnitas que, submetidas às condições de contorno e inicial completam a formulação do problema.

#### EQUAÇÕES GOVERNANTES TRANSFORMADAS

A Eq.(1), escrita para um sistema de coordenadas ortogonal, transformada para um sistema curvilíneo generalizado  $\xi - \eta$  resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho x_2^j U \phi) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho x_2^j V \phi) = \\ & + \frac{1}{x_2^j} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} [x_2^j (\Gamma^\phi J \alpha)] \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + x_2^j (-\Gamma^\phi J \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \\ & + \frac{1}{x_2^j} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} [x_2^j (\Gamma^\phi J \gamma)] \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + x_2^j (-\Gamma^\phi J \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) - \hat{P}^\phi + \tilde{S}^\phi \end{aligned} \quad (3)$$

onde

$$\begin{aligned} U &= u(x_2)_\eta - v(x_1)_\eta & V &= v(x_1)_\xi - u(x_2)_\xi \\ \alpha &= (x_1)_\eta^2 + (x_2)_\eta^2 & \beta &= (x_1)_\xi (x_1)_\eta - (x_2)_\xi (x_2)_\eta \\ \gamma &= (x_1)_\xi^2 + (x_2)_\xi^2 & J &= [(x_1)_\xi (x_2)_\eta - (x_1)_\eta (x_2)_\xi]^{-1} \end{aligned}$$

e as expressões de  $\hat{P}^\phi$  e  $\tilde{S}^\phi$  são dadas na Tab. 2.

Tabela 2. Expressões para  $\hat{P}^\phi$  e  $\tilde{S}^\phi$ .

$\phi$	$\hat{P}^\phi$	$\tilde{S}^\phi$
1	0	0
u	$\frac{\partial P}{\partial \xi} (x_2)_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} (x_2)_\xi$	$\frac{u}{3} [(x_2)_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - (x_2)_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\vec{v} \cdot \vec{v})]$
v	$\frac{\partial P}{\partial \eta} (x_1)_\xi - \frac{\partial P}{\partial \xi} (x_1)_\eta$	$\frac{v}{3} [(x_1)_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - (x_1)_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{v} \cdot \vec{v})] - \frac{j \mu v}{J x_2^2}$
T	0	$[\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{v} \cdot (P \vec{v}) - P \vec{v} \cdot \vec{v}] / (J c_p)$

#### DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

As equações discretizadas são obtidas através da integração aproximada da Eq.(3) sobre volumes de controle elementares e do instante  $t$  a  $(t+\Delta t)$ . Por exemplo, a integração do segundo termo do lado esquerdo da Eq.(3) resultará em

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left( \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho x_2^j U \phi) \right) x_2^j d\xi d\eta dt = [(\dot{M}\phi)_e - (\dot{M}\phi)_s] \Delta t \quad (4)$$

onde  $\dot{M}$  é o fluxo de massa na face do volume de controle indicada pelo subscrito.

A Eq.(4) antecipa que as equações algébricas resultantes, tanto para problemas bidimensionais planos como para problemas axissimétricos, terão exatamente a mesma forma.

O procedimento descrito acima resultará, para  $\phi = 1$ , em

$$(\dot{M}_p - \dot{M}_p^0) / \Delta t + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (5)$$

onde o superescrito "0" se refere ao tempo anterior. Esta equação será alvo de discussão posterior.

Para  $\phi$  igual a  $u$ ,  $v$  ou  $T$  a Eq.(4) resultará em

$$a_{p\phi} \dot{p} = \sum_{nb} a_{nb} \dot{\phi}_{nb} + (\dot{M}_p \phi_p) / \Delta t - I_1 [\hat{P}^\phi] / \Delta \xi \Delta \eta + I_2 [\tilde{S}^\phi] / \Delta \xi \Delta \eta \quad (6)$$

onde a notação  $I_1 [ ]$  representa a aproximação numérica do termo no interior dos colchetes.

A Eq.(6) permite que, para um conjunto de coeficientes e um dado campo de pressões, sejam calculados novos campos de  $u$  e  $v$  que satisfaçam as equações da conservação da quantidade de movimento nas direções  $x_1$  e  $x_2$ .

#### EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

Para que a presente formulação tenha capacidade de resolver problemas compressíveis e/ou incompressíveis é necessário que não só as velocidades como também as densidades sejam afetadas pelo campo de pressões no ciclo iterativo referente ao acoplamento pressão-velocidade. Tem-se portanto na realidade o acoplamento pressão-velocidade e o acoplamento pressão densidade.

Assim, o termo  $\dot{M}_e$  da Eq.(5) será aproximado por [4]

$$\dot{M}_e = (\rho^* x_1^j \dot{u} + \rho x_2^j \dot{v})^* - \rho^* x_2^j \dot{u}^* \Delta \eta \quad (7)$$

onde os valores com asterisco são assumidos conhecidos de um nível iterativo anterior.

Deve-se portanto relacionar os valores de  $\rho$  e  $U$  na Eq.(7) com correções no campo de pressões. Dessa forma a equação da continuidade se transforma em uma equação para  $P^1$ .

Expressão de  $\rho$  em função de  $P^1$ . Seja  $\rho^*$  o campo correspondente a um campo de pressões  $P^*$  (para um dado campo de temperaturas), isto é,

$$\rho^* = c^1 P^* + b^1 \quad (8)$$

Admita também que o campo  $P$  seja o campo que origina velocidades e densidades de forma a satisfazer a continuidade. O campo de densidades gerado será

$$\rho = c^1 P + b^1 \quad (9)$$

Das Eqs.(8) e (9) obtém-se que

$$\rho = \rho^* + c^1 P^1 \quad (10)$$

onde

$$P^1 = P - P^* \quad (11)$$

A Eq.(10) permite, conhecido um campo  $P^1$ , calcular, a partir de um campo estimado  $\rho^*$ , um campo de densidades  $\rho$  que satisfará a continuidade.

Expressão de  $U$  e  $V$  em função de  $P^1$ . Na formulação proposta no presente trabalho as variáveis armazenadas são as expostas na Fig.1. A conservação da quantidade de movimento nas direções  $x_1$  e  $x_2$  é aplicada apenas nos volumes centrados em  $u$  e  $v$  respectivamente. Dessa forma, não existe aqui qualquer superposição de volumes (para o mesmo princípio de conservação) comum a muitas metodologias não ortogonais.

A equação de conservação da quantidade de movimento na direção  $x_1$ , Eq.(6) para  $\phi = u$ , pode ser expressa na forma



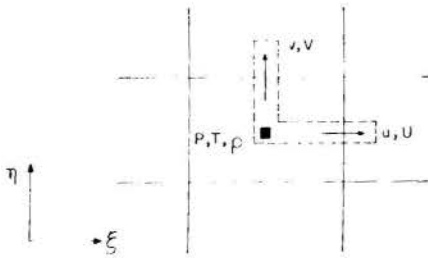


Figura 1. Arranjo das variáveis na malha.

$$-a_{ij}^* u_j^* + \sum_{nb} a_{nb}^* u_{nb}^* + b^u = L[\bar{p}^u] / \Delta t \quad (12)$$

Se  $u^*$  é um campo de velocidades gerado pelo campo  $P^*$ , o campo  $u$ , gerado por  $P$ , que satisfaz a continuidade, pode ser aproximado por [6]

$$u_P = u_P^* - a_{ij}^u L[\bar{p}^u] / \Delta t \quad (13)$$

Para uma componente  $v$  hipotética armazenada coincidentemente com  $u$  pode-se escrever que

$$v_P = v_P^* - a_{ij}^v L[\bar{p}^v] / \Delta t \quad (14)$$

Multiplicando-se a Eq. (13) por  $(x_j)_i$  e a Eq. (14) por  $(x_j)_i$ , subtraindo a segunda da primeira e da definição de  $U$  chega-se a

$$U_P = \frac{v_P^* - a_{ij}^v L[\bar{p}^v] - (P_N^* - P_S^*)}{(P_E^* - P_W^*)} - \frac{(P_N^* + P_S^* - P_E^* - P_W^*) \Delta t}{4V_P} \quad (15)$$

Note que  $U_P$  é a velocidade localizada na face este do volume de controle da continuidade, Fig. 1, e é portanto a velocidade desejada na Eq. (7). Expressões semelhantes à Eq. (15) podem ser obtidas para as velocidades contravariantes nas outras faces do volume de controle.

Se expressões análogas a Eq. (7) são substituídas na equação da continuidade, Eq. (5), é obtido um sistema de equações, com nove diagonais não nulas, do tipo

$$-a_{ij}^* P_j^* + \sum_{nb} a_{nb}^* P_{nb}^* + b^P \quad (16)$$

O campo  $P^*$  aplicado em expressões do tipo de (15) e (10) gera novos campos de velocidades e densidades que conservam a massa.

#### PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

O procedimento completo de solução envolve diversos ciclos iterativos, desde o mais externo, referente ao avanço no tempo, ao mais interno, referente a solução do problema do acoplamento pressão-velocidade-densidade. Como na maioria das situações esses ciclos internos são executados apenas uma vez, o procedimento de solução pode ser resumido nos seguintes passos:

- É gerada a malha e calculadas as métricas e componentes do tensor métrico;
- Conhecidos no instante  $t$  os valores de todas as variáveis dependentes são calculadas as velocidades  $U$  e  $V$  nas posições mostradas na Fig. 1. Este cálculo envolve um processo de média;
- São calculados os coeficientes e termos-fonte das equações de conservação da quantidade de movimento e determinados novos campos  $u^*$  e  $v^*$ . São calculadas as velocidades  $U^*$  e  $V^*$  que não conservam a massa;
- São calculados os coeficientes e termos-fonte da equação da continuidade e determinado um campo  $P^*$ . Com o campo  $P^*$  novos campos de  $u$ ,

$U$  e  $V$  que conservam a massa são calculados. Conhecidos  $U$  e  $V$  as velocidades  $u$  e  $v$  podem ser determinadas.

e) É resolvida a equação da energia, determinado um novo campo de temperaturas. Com  $P$  e  $T$ , é calculado um novo campo de densidades através da equação de estado.

f) A solução obtida até o momento passa a ser um campo inicial. Retorna-se ao item b) e itera-se até que o regime permanente seja atingido.

Para a solução dos sistemas de equações envolvidos no cálculo de  $u$ ,  $v$ ,  $P$  e  $T$  foi empregado o método MSI [7]. Para interrupção do processo iterativo foi aplicado um critério de convergência na pressão. No tratamento do acoplamento pressão-velocidade foi adotado o método SIMPLEX [2].

#### RESULTADOS

Para teste da metodologia foi construído um programa em FORTRAN, em precisão simples, e executado em uma máquina IBM 4341. O programa foi empregado na solução do escoamento contra cilindros infinitos e sobre esferas para números de Mach variando de 2.0 a 10.0. Foi resolvido também o escoamento de ar com Mach igual a 2.16, sem ângulo de ataque (axissimétrico portanto) sobre o veículo Scout.

Não se teve em todos os casos a preocupação de realmente obter a solução do problema o que implicaria em um grande refino na malha para a captação adequada da camada limite e também na região de choques, o que seria incompatível com as facilidades computacionais disponíveis. Dessa forma os choques e expansões aparecerão atenuados em uma região não tão estreita e a parte difusiva dos coeficientes é quase que anulada em relação a parte convectiva devido às dimensões da malha.

A Fig. 2 mostra linhas de Mach constante e vetores velocidade para o escoamento de ar contra um cilindro com  $M_\infty$  igual a 4.0. Na obtenção dessa solução os coeficientes de difusão foram feitos iguais a zero e a condição de contorno na superfície do corpo foi de impermeabilidade. Dessa forma, na verdade foram resolvidas as equações de Euler. Percebe-se que o choque está atenuado ao longo de uma certa espessura, o que é inevitável em técnicas numéricas que não tratam o choque como uma descontinuidade, isto é, nenhum tipo de relação termodinâmica é usada para o cálculo do salto das variáveis no choque. Evidentemente essa atenuação poderia ser minimizada com o uso de malhas adaptativas ou mesmo com o simples

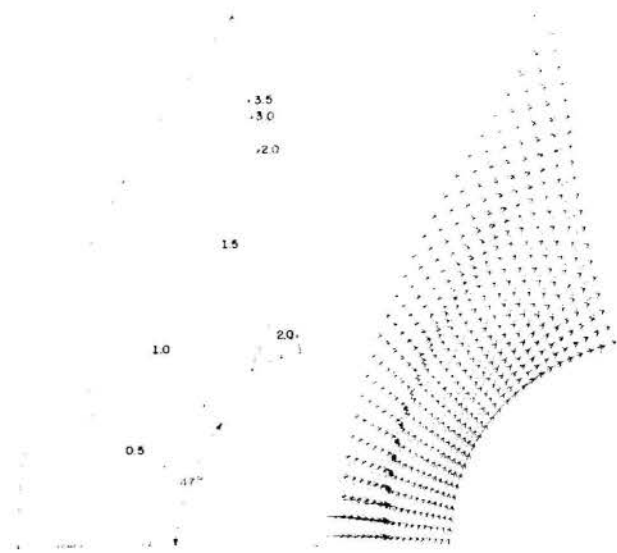


Figura 2. Linhas de Mach constante e vetores velocidade para  $M_\infty = 4.0$ .

refino da malha. A mesma figura mostra que a linha sônica encontra a superfície do cilindro em um ângulo de  $47^\circ$ . A fig. 6-6 de [8] mostra para essa situação também um ângulo de  $47^\circ$  embora o restante da linha sônica não apresente tão boa concordância.

A Fig. 3 mostra uma malha gerada sobre parte do veículo Scout. Na realidade, a malha adotada na solução teve os primeiros volumes próximos a superfície do corpo subdivididos em volumes menores. O programa foi executado para  $M_\infty = 2.16$  e condições ambientes idênticas às do ensaio em túnel de vento descrito em [9].

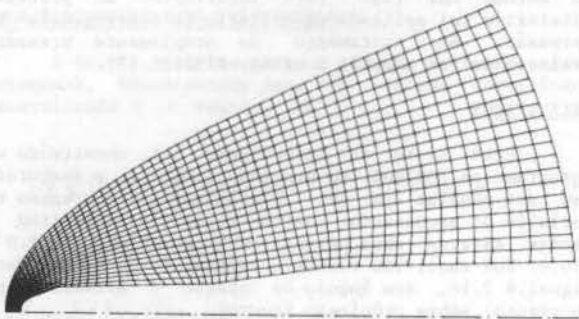


Figura 3. Malha gerada sobre o veículo Scout.

A Fig. 4 mostra a distribuição de pressão adimensional sobre o corpo obtida no presente trabalho e os resultados experimentais [9]. A concordância pode ser considerada excelente. Deve-se notar que a solução não apresenta oscilações, comuns em muitas metodologias, nas regiões próximas aos cantos de expansão e compressão.

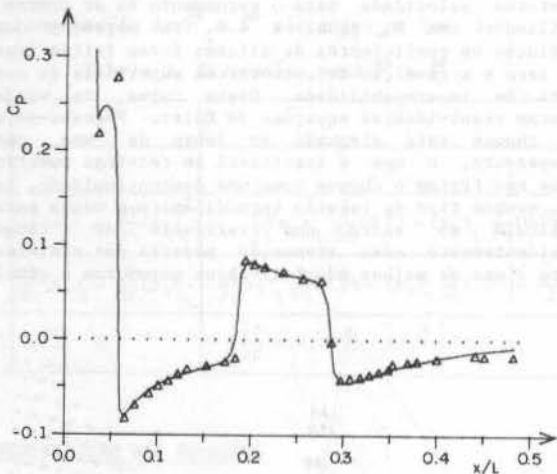


Figura 4. Distribuição de pressão sobre o veículo Scout.

#### CONCLUSÕES

Os testes já realizados com a metodologia demonstram que:

- O processo iterativo de solução converge estavelmente para uma ampla faixa de números de Mach de escoamentos que apresentam regiões supersônicas e regiões praticamente incompressíveis;
- Embora o incremento de tempo adotado tenha influência na taxa de convergência, a escolha de valor adequado não se constitui numa tarefa difícil;
- Seu comportamento independe do tipo de equações governantes, se Euler ou Navier-Stokes. Note que no primeiro caso todos os termos não ortogonais das equações de conservação da quantidade de movimento

e da energia se anulam assim como a parcela difusiva dos coeficientes restantes;

d) As soluções são fisicamente realistas e, dadas às limitações dos testes realizados, apresentam boa concordância com outros resultados.

#### AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido dentro do projeto de cooperação técnico-científico com o Instituto de Atividades Espaciais do CTA. Os autores agradecem o apoio recebido.

Os autores são gratos também ao estudante de graduação Carlos Henrique Marchi pelo processamento e pós-processamento de parte dos resultados.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Anderson, D.A.; Tannehill, J.C. and Fletcher, R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. McGraw-Hill, Washington (1984).
- [2] Van Doormaal, J.P.; Raithby, G.D. and McDonald, B.H., The Segregated Approach to Predicting Viscous Compressible Fluid Flows. A.S.M.E. Paper, no. 86-GT-196, presented at the International Gas Turbine Conference and Exhibit, Dusseldorf, West Germany, June 8-12 (1986).
- [3] Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. McGraw-Hill, New York (1980).
- [4] Van Doormaal, J.P., Numerical Methods for the Solution of Incompressible and Compressible Fluid Flows. Tese de Doutorado, University of Waterloo, Canada (1985).
- [5] Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., Avaliação no Limite Incompressível de uma Formulação para Qualquer Regime de Escoamento. IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, 1987. Anais do COBEM 87, pp. 241-244 (1987).
- [6] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., Desenvolvimento de Códigos Computacionais para a Solução de Problemas de Escoamentos de Alta Velocidade. Parte II, Relatório ao CTA / Instituto de Atividades Espaciais, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, dezembro (1987).
- [7] Schneider, G.E. and Zedan, M., A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems. Numerical Heat Transfer, vol. 4, pp.1-19 (1981).
- [8] Hayes, W.D. and Probstein, R.F., Hypersonic Flow Theory - Inviscid Flows, Academic Press, New York (1966).
- [9] Jernell, L.S., Aerodynamic Loading Characteristics of a 1/10-Scale Model of the Three-Stage Scout Vehicle at Mach Numbers from 1.57 to 4.65. NASA Technical Note D-1930 (1963).

#### ABSTRACT

The Navier-Stokes equations written in generalized coordinates are solved in segregated fashion using a finite volume method. The use of the equation of state to compute the density, instead of pressure, and the approach used to linearize the mass conservation equation allows the method to be applied to compressible and incompressible flows. The equations can be used to predict 2-D planar as well as axisymmetric flows. The results are computed for the supersonic flow over cylinders and the Scout launch vehicle.

SUBSONIC FLOW COMPUTATION OF COMPLEX ROCKET  
CONFIGURATIONS USING PANEL METHOD




ALGACYR MORGENSTERN JR.  
Instituto de Atividades Espaciais  
Centro Técnico Aeroespacial  
12225 - São José dos Campos - SP

ABSTRACT

The present paper shows and describes results obtained with a Panel Method program for pressure distributions on a STRAP-ON type Satellite Launch Vehicle. Special attention has been given to the calculation of the flow field between the cylindrical bodies and the influence of some characteristics parameters as for example gap, flow velocity and angle of attack. The results are compared with available wind tunnel data and show good agreement. It also indicate some interesting features of the flow about such configurations.

INTRODUCTION

The aerodynamic characteristics of a three-dimensional configuration with complex geometries remain as a challenge to the aerodynamicists until our days. A lot of effort has been exerted in the development of methods for the solution of such problems, mainly after the fast increase of the computational performance of the modern computers. However, due to the complexities of methods like Finite Differences or Finite Volumes to solve such problems, even when is available a powerful computer, it is still necessary the use of simpler methods but with the capability to treat this type of geometry.

Satellite Launch Vehicles (SLV), with Strap-On Boosters (multi-axisymmetric body system), aerodynamics is highly complex, characterized principally by strong interference effects. Unlike conventional configurations, the open literature doesn't present many works concerning the methods of solution to this type of configuration. An effort in this subject has been made by /1/ Devasia, et.al., where is applied the Panel Method to a parametric study of SLV with strap-on boosters in incompressible flow.

The Panel Method, first presented by /2/ Hess and Smith is a method capable to treat complex geometries in shock free compressible flow. Its mathematical foundations has been summarized by /3/ Hunt and many models were developed to its application to conventional configurations, among, then the works of /4/ Johnson and /5/ Magnus, et al.

In this paper, the model presented by /6/ Woodward, implemented and adapted to strap-on type configurations following /7/ Morgenstern, is applied to the calculation of the aerodynamic characteristics of a SLV with strap-on boosters where effects as i) interference, ii) angle of attack, iii) gap (lateral distance between the central body and the booster) and iv) flow velocity, are analysed for subsonic flow velocities. Available wind tunnel data, Ref. /8/, enable the comparison of calculated results with experimental data for the pressure distribution on the bodies, showing the good agreement of the results.

A brief description of the Panel Method to such problems and a discussion of the results are presented in the following sections.

PANEL METHOD

The steady, inviscid, irrotational and compressible fluid flow on a three-dimensional slender body is governed by the Prandtl-Glauert's equation. Through a convenient coordinate

transformation, Gothert Rule, this equation is reduced to Laplace's equation. Laplace's equation with Neumann boundary conditions is a well posed problem. Panel Method, or Surface Singularity Method, is well established for the solution of such problems. In this method the configuration geometry is represented by a set of quadrilateral panels on its surface. Fig. 1 schematically shows a typical paneling distribution on a multi-body system.

On each panel is applied a constant source distribution and is chosen a control point, at the panel centroid, where the boundary conditions are imposed and, therefore, where the flow properties are determined.

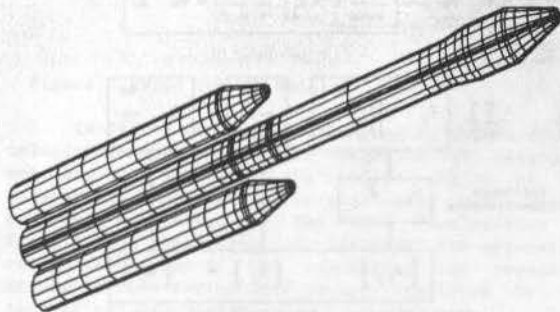


Figure 1. Typical Paneling Distribution on a Multi-Body System

An algebraic linear system of equations is formed relating the normal velocities induced by the source distribution of all panels in each control point with its strength. This system of equations is solved satisfying the boundary conditions of zero normal velocity at the body surface. Thus, with the source strength known, the potential velocities and the pressure distribution can be obtained. The basic equations of the method and the stages of computation are shown in Fig. 2, where:

- $A_{ij}$  - Aerodynamic Matrix Elements
- $\vec{a}_{ij}$  - Induced Velocity Coefficients
- $B_i$  - Right Hand Side
- $C_j$  - Solution Vector
- $C_p$  - Pressure Coefficient
- $F$  - Integration Variable
- $\vec{n}$  - Unit Outward Normal Vector
- $P$  - Point in the Flow
- $r(P,S)$  - Distance from the Panel to the Point P
- $S$  - Panel Surface
- $V_\infty$  - Onset Flow Velocity
- $x, y, z$  - Body Coordinates in the Physical Domain
- $x', y', z'$  - Body Coordinates in the Transformed Domain
- $\beta$  - Compressibility Factor,  $\beta = \sqrt{1-M_\infty^2}$
- $\phi$  - Perturbation Velocity Potential

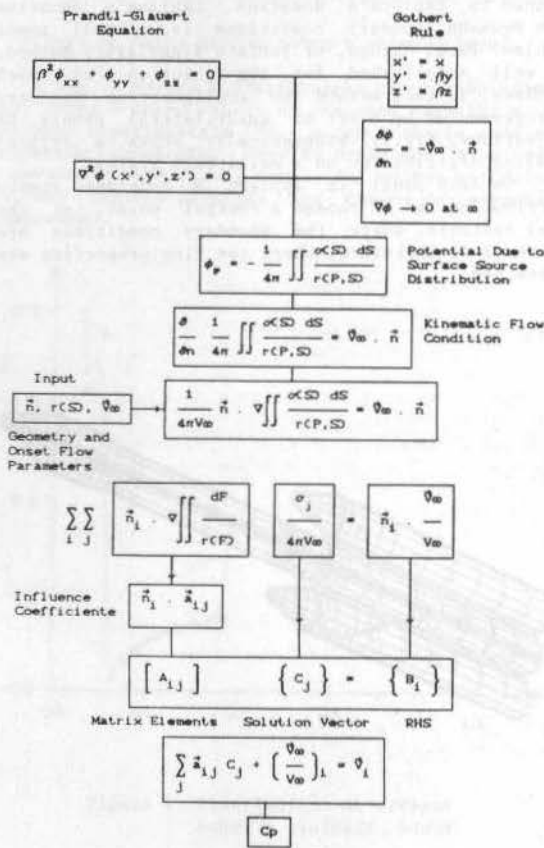


Figure 2. Panel Method Basic Equations

RESULTS AND DISCUSSION

The pressure distribution on a multi-body system at subsonic compressible flow presents some very interesting features. Calculation results obtained for Mach numbers equal to 0.0, 0.36 and 0.7, for a typical multi-body configuration with cylindrical central body, an intermediate reverse flare and cylindrical boosters with equal diameter placed at the yaw and pitch planes, are presented in

Fig. 3-7. A comparison of calculated results with experimental data, for Mach number equal to 0.36, is presented in Fig. 9 and 10.

The boosters are felt by the central body just after the reverse flare, as brought out by Fig. 3, where a smooth raise of pressure is presented when compared with the core alone pressure distribution. In the conical region of the boosters is observed a pressure raise in the pressure distribution on the core, due to the boosters, followed by a suction peak at the geometrical discontinuity of the boosters geometry. The pressure distribution on the boosters maintain the same qualitative behaviour of the isolated body. Fig. 4 shows the pressure distribution at diametrically opposite positions on the booster. Comparing the inward and outward pressure distribution on the booster, is observed a lateral force in the outward direction from the core in the conical region and a lateral inward force in the cylindrical region.

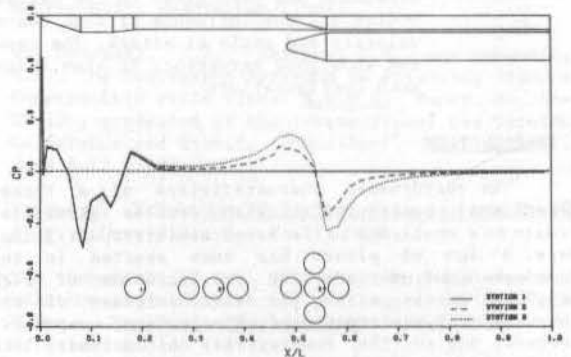


Figure 3. Pressure Distribution on a Isolated Body, a Two Boosters Configuration and a Four Boosters Configuration for Mach=0.0, Alpha=0.0 and Gap=100.0 mm.

Interference Effects. Fig. 3 and 4 show the pressure distribution on the central body and a booster. The considered configurations are: isolated body, central body with two boosters placed at the yaw plane, and central body with four boosters placed at the yaw and pitch planes. Fig. 3 shows that the increase in the number of boosters causes a raise in the pressure and suction peaks for the pressure distribution on the core, amplifying the interference effects upstream and downstream of such peaks. One of these effects is shown in Fig. 4, where can be seen an increase of the lateral force, outward in the conical region and inward in the cylindrical region of the booster.

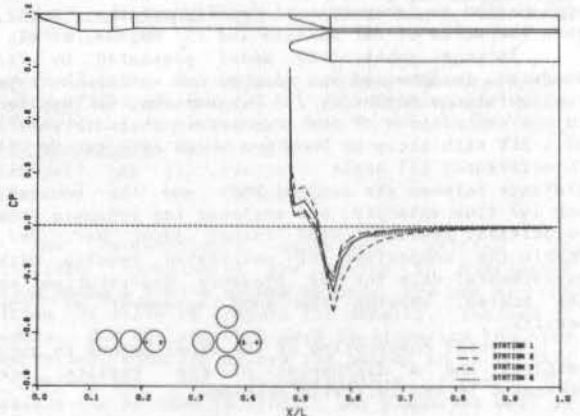


Figure 4. Pressure Distribution on a Lateral Booster Placed in the Yaw Plane of a Two and Four Boosters Configuration for Mach=0.0, Alpha=0.0 and Gap=100.0 mm.



**Angle of Attack Effect.** In Fig. 5 are shown the calculated results on the core and a booster placed in the yaw plane for angles of attack equal to 0.0 and 6.0 degrees in a four boosters configuration. The cross flow velocity, due to angle of attack, shifts the pressure distribution curve to a lower level when compared with the zero degree angle. This effect is very expressive at the cylindrical region of the booster. The pressure and suction peaks on the core goes to a lower level, however, on the booster such peaks almost doesn't change.

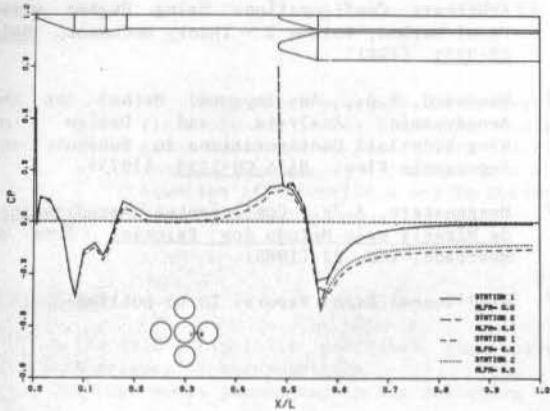


Figure 5. Angle of Attack Effect on Pressure Distribution on the Core and a Booster for Mach=0.0, Alfa=0.0 and 6.0 Degrees and Gap=100.0 mm.

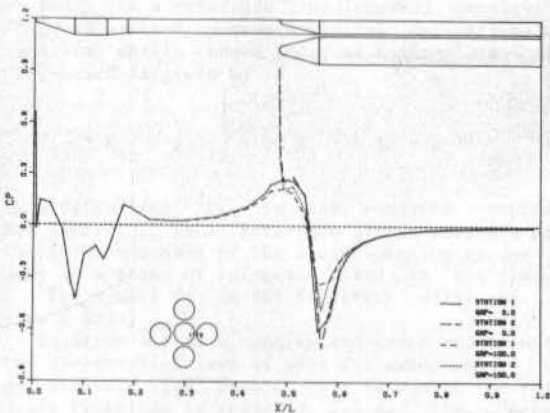


Figure 6. Gap Effect on Pressure Distribution on the Core and a Booster for Mach=0.0, Alfa=0.0 and Gap=0.0 and 100.0 mm.

**Gap Effect.** Fig. 6 shows that the pressure and suction peaks are as great as small is the gap. This effect is felt only on the regions where the peaks come out, where is observed that as the gap is increased the pressure distribution behaviour tends to smoother these effects until, for sufficient gap stance, the core alone behaviour is attained.

**Velocity Effect.** As shown in Fig. 7, increasing the Mach number makes that the pressure and suction peaks along the core grows. This effect is stronger in the conical and geometric discontinuity regions of the boosters, causing a considerable increase in the side forces outward in the conical region and inward in the cylindrical region of the booster.

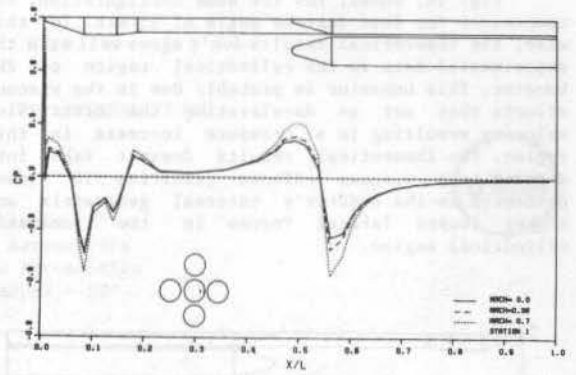


Figure 7. Flow Velocity Effect on Pressure Distribution on the Core and a Booster for Mach=0.0, 0.36 and 0.7, Alfa=0.0 and Gap=100.0 mm.

**Comparison with Experimental Data.** A comparison of calculated results with experimental data, obtained from wind tunnel tests at IPD/CTA facilities, was performed for Mach number equal to 0.36. The wind tunnel model, shown schematically in Fig. 8, presents a connecting rod just after the conical junction of the boosters, developing a stagnation point in front of it and a separation region downstream not simulated by the theoretical calculation.

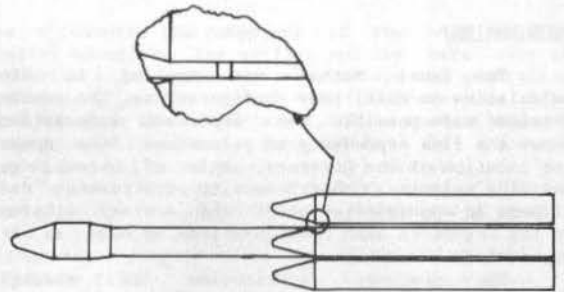


Figure 8. Wind Tunnel Model.

In Fig. 9 can be seen the good agreement of the calculated results with the experimental data for zero angle of attack. In the conical region of the booster the experimental curve remain with higher pressures attributed to the flow deceleration in front of the connecting rod. Likewise, the separation region downstream of the connecting rod create a strong suction region that is not predicted by the theoretical calculation.

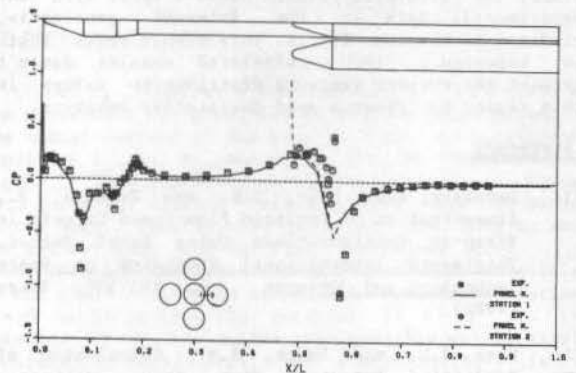


Figure 9. Pressure Distribution Comparison for Mach=0.36, Alfa=0.0 and Gap=100.0 mm.



Fig. 10, shows, for the same configuration, the comparison for four degrees angle of attack. In this case, the theoretical results don't agree well with the experimental data in the cylindrical region of the booster. This behavior is probably due to the viscous effects that act as decelerating the cross flow velocity resulting in a pressure increase in this region. The theoretical results doesn't take into account the viscous effects resulting in lower pressures in the booster's internal generatrix and higher inward lateral forces in the booster's cylindrical region.

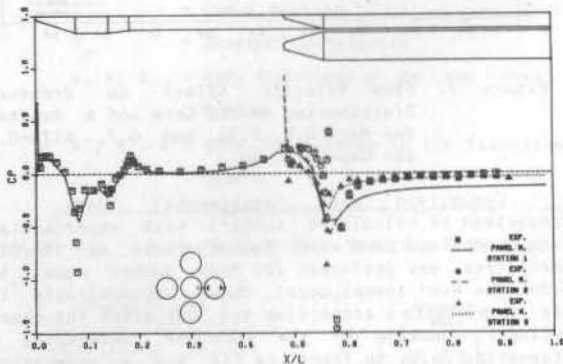


Figure 10. Pressure Distribution Comparison for Mach=0.36, Alfa=4.0 and Gap=100.0 mm.

#### CONCLUSION

The Panel Method was applied to flow calculation on multi-body configurations. The results obtained made possible get important informations about the flow dependency on parameters like number and location of the boosters, angle of attack, gap and flow velocity. Comparison with experimental data allowed an appreciation about the accuracy attained by the method to such configurations as well as its limitations.

The pressure distribution is strongly influenced by those parameters. The pressure and suction peaks raise with the increase in boosters number and flow velocity, and the opposite effect with the gap increase, are important features of this type of flow. The existence of a lateral force, even for zero angle of attack, and its dependence from the mentioned parameters is another interesting characteristic.

The comparison with experimental data showed the good agreement attained and proved the validity of the calculated results.

For non zero angle of attack, in the cylindrical region of the booster placed in the yaw plane, the calculated results doesn't agree with the experimental data in the internal generatrix, credited to viscous effects. This result shows that, as expected, the calculated results doesn't predict the correct pressure distribution values in this region but gives a good qualitative behavior.

#### REFERENCE

- /1/ Devassia, K.J., Nair, S.R. and Prakash, S., Investigation of Inviscid Flow-Field Effects in Strap-on Configurations Using Panel Method. Thirteenth International Symposium on Space Technology and Science, pp 553-558, Tokyo (1982).
- /2/ Hess, J.L. and Smith, A.M., Calculation of Nonlifting Potential Flow About Arbitrary Three-Dimensional Bodies. Journal of Ship Research, 8:22 (1964).

- /3/ Hunt, B., The Panel Method for Subsonic Aerodynamic Flows: A Survey of Mathematical Formulations and an Outline of the New British Aerospace Scheme. Von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series, 1974-4 (1974).
- /4/ Johnson, F.T., A General Panel Method for the Analysis and Design of Arbitrary Configurations in Incompressible Flows. NASA CR-3079 (1980).
- /5/ Magnus, A.E. and Epton, M.A., PAN AIR - A Computer Program for Predicting Subsonic or Supersonic Linear Potential Flows About Arbitrary Configurations Using Higher Order Panel Method, Volume I - Theory Document. NASA CR-3251 (1981).
- /6/ Woodward, F.A., An Improved Method for the Aerodynamic Analysis and Design of Wing-Body-Tail Configurations in Subsonic and Supersonic Flow. NASA CR-2228 (1973).
- /7/ Morgenstern, A.Jr., Coeficientes Aerodinâmicos de Mísseis pelo Método dos Painéis. Tese de Mestrado, IME, RJ (1986).
- /8/ Wind Tunnel Essay Report. To be published.

AN ACOUSTIC-ENERGETIC ANALOGY FOR EXTERNAL FLOWS



MAURÍCIO PAZINI BRANDÃO  
 Divisão de Engenharia Aeronáutica  
 Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
 12225 São José dos Campos - SP

ABSTRACT

This paper presents the derivation of a wave equation for the total energy of a fluid element in the flow about bodies of general shape in arbitrary motion. The derivation makes use of generalized function theory to describe the conservation of the energy flow vector, a concept from the physics of plasmas. The solution to the resulting equation will provide a way to obtain the temperature distribution in high-speed flows.

INTRODUCTION

In the 1950's Lighthill published the basis of the modern science of aeroacoustics [1], [2]. Some of his findings may be summarized in the following wave equation:

$$\square^2 c^2 (\rho - \rho_0) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1)$$

Here,  $c$  is the speed of sound in the undisturbed medium,  $\rho$  is the density of a fluid element in the perturbed state and  $\rho_0$  is a reference undisturbed density. The equation is excited by double spatial derivatives of a mathematical entity known today as Lighthill's stress tensor, which is given by

$$T_{ij} = P_{ij} - p_0 \delta_{ij} + \rho u_i u_j - c^2 (\rho - \rho_0) \delta_{ij} \quad (2)$$

In this definition,  $P_{ij}$  is the complete compressive stress tensor,  $p_0$  is a reference static pressure and  $u_j$  is the  $j$ -th component of the fluid velocity vector with respect to a frame of reference fixed to the fluid at rest. The symbol  $\delta_{ij}$  is the Kronecker delta of the indexes  $i$  and  $j$ .

Equation (1) is a concise and exact representation of the conservation laws of mass and momentum in terms of an "acoustic like" result. This is one of the reasons why this technique is referred to as the "Acoustic Analogy". The quantity being solved for is  $c^2(\rho - \rho_0)$ , which relates to the acoustic pressure  $p$  through the expansion

$$p = c^2(\rho - \rho_0) + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (3)$$

Here,  $\gamma$  is the ratio between the specific heat coefficients at constant pressure and volume, respectively.

Since for small perturbations the quantity  $c^2(\rho - \rho_0)$  is essentially equal to the acoustic pressure  $p$ , the technique has been used to study the noise generated aerodynamically by turbulence in jets and free flows.

In 1969 the Acoustic Analogy was extended by Ffowcs Williams and Hawkins [3] to account for the noise generated by a surface described by the equation  $f = 0$  moving through a fluid of reference density  $\rho_0$ . Using generalized function theory [4], equation (1) became

$$\square^2 c^2 (\rho - \rho_0) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_0 v_n \sqrt{|f|} \delta(f) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ P_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \right] + \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4)$$

Here,  $v_n$  denotes the component of the body absolute velocity normal to the surface and the bars over the derivative signs represent the concept of generalized derivative [5]. The symbol  $\delta(f)$  indicates the Dirac delta function of the surface  $f$ . Note that if there is no surface in the flow, equation (1) is recovered because the two terms involving  $\delta(f)$  vanish.

Equation (4) has three forcing terms. Due to their physical meaning and to the directivity pattern of the noise they generate, they are known in the literature, respectively, as monopole, dipole and quadrupole terms. Under this reasoning, Lighthill's equation (1) retains only the free field quadrupole sources.

Since only the continuity and momentum equations are used in the derivation of equations (1) and (4), they cannot give, a priori, information about changes in the temperature in high-speed flows. Studies are necessary to explore this issue. This paper is one of such studies.

Here, we explore the theoretical possibility of including the equation of energy into the picture, so that we have access to information about changes of temperature in the flow. The result, as we will see, is a wave equation for the fluid particle total energy.

THE BASIC ASSUMPTIONS

Let us consider a body of surface described by the equation  $f = 0$ . Also, let us replace hypothetically the actual content of the body by fluid in a reference condition  $p_0, \rho_0, T_0$ , and  $u_i = q_i = 0$ , as depicted in Figure 1. This condition is the same that would happen to a quiescent outside fluid if there were no motion of the body. Finally, let us allow the body to move but let us keep the interior conditions fixed.

This hypothetical set-up creates discontinuities in the fluid properties across the impenetrable surface  $f = 0$  as we go from the interior ( $f < 0$ ) to the exterior ( $f > 0$ ) region. One possible way to handle consistently these artificial discontinuities is to use the concept of generalized derivatives [5].

This concept reduces to the idea of regular derivative when dealing with smooth functions.

external conditions  
 $\rho, \rho_0, T, u_i, q_i, f > 0$

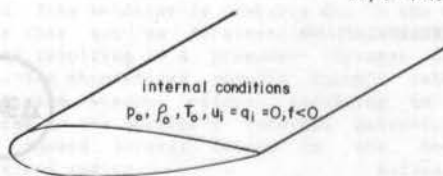


Figure 1. The basic hypotheses of the approach.

THE GENERALIZED ENERGY EQUATION

In the absence of body forces, the regular energy equation in conservative form reads:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [eu_i + q_i + P_{ij}u_j] = 0 \quad (5)$$

Here,

$$e = \rho c_v T + \frac{1}{2} \rho u^2$$

defines the total energy of a fluid element,  $c_v$  is the specific heat at constant volume and  $q_i$  is the  $i$ -th component of the heat flux vector.

The process of generalizing the derivatives of equation (5) yields

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [eu_i + q_i + P_{ij}u_j] = \Delta e \frac{\partial f}{\partial t} \delta(f) + [eu_i + q_i + P_{ij}u_j] \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \quad (6)$$

where

$$\Delta e = \rho c_v T + \frac{1}{2} \rho u^2 - \rho_0 c_v T_0$$

is the jump in total energy through the surface  $f = 0$ . Note that the regular energy equation (5) is recovered if there is no surface in the flow of equation (6).

THE ENERGY FLOW VECTOR

As we might understand the physical idea of momentum as the first moment of a fluid particle mass with respect to its velocity, we can also understand energy as a second order moment. Is there a third order moment? This idea is not usually found in texts of fluid mechanics, but is commonly discussed in studies of physics of plasmas, like references [6] and [7].

Therefore, let us denote  $eu_i$  as the  $i$ -th component of energy flow vector and state, for our purposes, its conservation law as follows: the rate of change of the material volume energy flow vector is equal to the sum of the directional power of surface and body forces and the directional heat flux through the volume boundary.

Mathematically, its conservation may be written as

$$\frac{d}{dt} \int_V eu_i dV = \int_V \rho G_j u_j u_i dV + \int_S T_{jj} u_i dS - \int_S q_{jj} u_i dS$$

Here,  $\rho G_j$  represents the  $j$ -th component of the body forces per unit of volume acting on any fluid element within  $V$ . Furthermore,  $T_j$  denotes the  $j$ -th component of the surface forces per unit of area acting on the boundary  $S$  of the volume  $V$ , as usual.

Using the theorems of Reynolds and Gauss [8] and the traditional argument of the arbitrariness of size of the material volume, we obtain

$$\frac{\partial (eu_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (eu_i u_j) = \rho G_j u_j u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{jk} u_k u_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} (q_j u_i)$$

In the absence of body forces, this result becomes

$$\frac{\partial (eu_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [eu_i u_j + P_{jk} u_k u_i + q_j u_i] = 0 \quad (7)$$

Equation (7), as written, is conservative. Note the resemblance between this result and equation (5). From both we obtain after simple algebra the following alternative expression for equation (7):

$$e \frac{\partial u_i}{\partial t} + [eu_j + P_{jk} u_k + q_j] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$$

As we did with the energy equation (5), we can now generalize the derivatives of equation (7) as follows:

$$\frac{\partial (eu_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [eu_i u_j + P_{jk} u_k u_i + q_j u_i] = eu_i \frac{\partial f}{\partial t} \delta(f) + [eu_i u_j + P_{jk} u_k u_i + q_j u_i] \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \quad (8)$$

As expected, equation (7) is obtained from equation (8) if there is no discontinuity surface in the flow.

THE GOVERNING WAVE EQUATION

In deriving the Ffowcs Williams and Hawkins' equation, we should apply a sequence of mathematical steps to the generalized laws of mass and momentum. These laws are, respectively, scalar and vector equations. So are also the generalized laws of energy and energy flow vector. Therefore, using a similar scheme, we should end up obtaining a wave equation for the total energy  $e$  of the fluid element. The scheme is described as follows:

- 1 - Take the generalized time derivative of the energy equation (6).
- 2 - Take the generalized derivative of the energy flow equation (8) with respect to  $x_i$ .
- 3 - Subtract the result of the second step from the first.
- 4 - Divide both sides of the result of step 3 by  $c^2$ .
- 5 - Subtract from both sides of the equation the term

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x_i \partial x_i}$$

- 6 - Define the generalized wave operator as

$$\square^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$$

7 - Use Lamb's non-penetration condition [9] to clear the algebra

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

After all these steps, the result is:

$$\begin{aligned} \square^2 \phi = & \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\rho_0 c_v^T u_i + q_i + P_{ij} u_j) \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \right] \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (P_{jk} u_k u_i + q_j u_i) \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \right] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ e u_i u_j + P_{jk} u_k u_i + q_j u_i - c^2 e \delta_{ij} \right] \\ & \left. - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i} \left[ q_i + P_{ij} u_j \right] \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

Comparing equations (9) and (4) we can observe that

- 1 - equation (9) has two surface and two volume source terms;
- 2 - the surface terms, in the order given, have the behavior of monopole and dipole;
- 3 - the first volume term is a free-field quadrupole as in Lighthill's equation (1); and
- 4 - the other volume term has a mixed behavior between monopole and dipole.

Finally, if we consider the incompressible limit of equation (9), i.e., if we make  $c$  go to infinity, we obtain the following identity:

$$\nabla^2 e = \frac{\partial^2 e}{\partial x_i \partial x_j} \delta_{ij} \quad (10)$$

This result was expected because the energy equation does not introduce new information in the analysis of incompressible flows. The "locking" phenomenon is well-known in Computational Fluid Dynamics for low Mach numbers. The reduction of equation (9) to the identity (10) is an equivalent manifestation of the same phenomenon.

#### THE GREEN'S FUNCTION SOLUTION

The impulsively excited wave equation in unbounded domain

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_i} = \delta(\vec{x}(t) - \vec{y}(\tau)) \delta(t - \tau) \quad (11)$$

where  $G$  is the dependent variable,  $\vec{x}$  is the observer point at time  $t$  and  $\vec{y}$  is the source point at time  $\tau$ , has a well-known solution [10] given by

$$G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) = \frac{\delta(g)}{4\pi r} \quad (12)$$

Here,

$$g = \tau - t + \frac{r}{c} = 0$$

is a sphere of signals emitted at the source point  $\vec{y}$  at time  $\tau$  and

$$r = |\vec{x}(t) - \vec{y}(\tau)|$$

is the distance travelled by the information.

The quantity  $\tau$  in the relations above is called retarded time. This quantity is always smaller than or equal to  $t$ , i.e.,

$$\tau = t - \frac{r}{c}$$

It accounts for the finite speed  $c$  of propagation of sound and, consequently, for compressibility effects. Note that if  $c$  goes to infinity,  $\tau$  becomes equal to  $t$  and the incompressible limit is attained.

The basic solution (12) may be used to transform the differential equation (9) into an integro-differential equation. The main advantage of this operation is to transform the surface terms involving the Dirac delta functions  $\delta(f)$  into surface integrals. After some intermediary steps [11], the result of this process is:

$$\begin{aligned} 4\pi c^2 e(\vec{x}, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \int_{f=0} \left[ \frac{\rho_0 c_v^T u_i + q_i + P_{ij} u_j}{r |1 - M_r| |\nabla f|} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{ret} dS \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{f=0} \left[ \frac{P_{jk} u_k u_i + q_j u_i}{r |1 - M_r| |\nabla f|} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right]_{ret} dS \\ & - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i} \int_V \left[ \frac{q_i + P_{ij} u_j}{r |1 - M_r|} \right]_{ret} dV + \\ & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \left[ \frac{Q_{ij}}{r |1 - M_r|} \right]_{ret} dV \quad (13) \end{aligned}$$

The right hand side presents two integrals over the body surface and two integrals over the whole volume surrounding the body in motion. All integrands should be evaluated at retarded time  $\tau$ , as indicated by the subscript  $ret$  of all brackets. Here,  $M_r$  is the source Mach number in the direction of radiation (source to observer), defined mathematically as

$$M_r = \frac{1}{c} \frac{r_i}{r} \frac{\partial y_i}{\partial \tau}$$

Finally, for the sake of conciseness, we define the energetic quadrupole tensor as follows:

$$Q_{ij} = e u_i u_j + P_{jk} u_k u_i + q_j u_i - c^2 e \delta_{ij}$$

Note that equations (9) and (13) are exact. No approximations were made besides neglecting the effects of body forces in the equations of conservation, something that is known to be of minor importance in aerodynamics. As they stand, these equations include all effects of compressibility, viscosity, three-dimensionality, non-linearity, and unsteadiness of fluid flows.

The major problem with the approach is that the content of the integrands on the right hand side of equation (13) is not entirely known. Possible alternatives would be either to use approximations for the unknowns or to iterate the solution with the help of other equations. In particular, the integral solution to the Ffowcs Williams and Hawkins' equation (4) is a possibility. Constitutive relations and turbulence modeling are also candidates. These speculations are left to be studied in future works.

Our preoccupation in this paper has been restricted to deriving the differential equation (9) and its integro-differential solution (13), which can provide information about the energy, and hence temperature, of the flow.



## CONCLUSIONS

This study extends ideas of the so-called Acoustic Analogy to flows where changes in temperature are significant. First, we worked on the task of generalizing the equation of conservation of energy. Second, the concept of energy flow vector was brought from the physics of plasmas, giving rise to the statement of its conservation law and to the generalization of its equation. Third, the equations of energy and energy flow vector were cast in the form of an inhomogeneous wave equation, which is the main result of this paper. Finally, the Green's solution of the wave equation was used to obtain the integral equivalent of the main result.

Equation (13) may be used in an iterative fashion to solve for the total energy or temperature at any point exterior to a moving body of surface  $f=0$ . Therefore, this work may find applications to the acoustics and dynamics of the flow around machines moving through fluids.

## ACKNOWLEDGMENTS

The author would like to acknowledge discussions on this subject with Professors Antonio Marmo de Oliveira and José Pantuso Sudano.

## REFERENCES

- [1] Lighthill, M.J., On Sound Generated Aerodynamically I - General Theory. Proc. Royal Society of London, A 211:564-587 (1952).
- [2] Lighthill, M.J., On Sound Generated Aerodynamically II - Turbulence as a Source of Sound. Proc. Royal Society of London, A222:1-32 (1954).
- [3] Ffowcs Williams, J. E. and Hawkings, D.L., Sound Generation by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion. Phil. Trans. Royal Society of London, A264 : 321-342 (1969).
- [4] Gel'fand, I.M. and Shilov G.E., Generalized Functions, Volume 1 - Properties and Operations. Academic Press, New York (1964).
- [5] Farassat, F., Discontinuities in Aerodynamics and Aeroacoustics: The Concept and Applications of Generalized Derivatives. Journal of Sound and Vibration, 55(2):165-193 (1977).
- [6] Shkanofsky, I.P., Johnston, T.W., and Bachynski, M. P., The Particle Kinetics of Plasmas - Addison - Wesley, Reading, Massachusetts (1966).
- [7] Bernstein, I.B., Transport in Axisymmetric Plasmas. The Physics of Fluids, 17:547-558 (1974).
- [8] Thompson, P.A., Compressible-Fluid Dynamics. McGraw-Hill, New York (1972).
- [9] Lamb, H., Hydrodynamics. Dover, New York (1945).
- [10] Morse, P.M. and Feshbach, H., Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill, New York (1953).
- [11] Brandão, M.P., On the Aeroacoustics, Aerodynamics, and Aeroelasticity of Lifting Surfaces. PhD Thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, February, (1988).

DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DAS VARIÁVEIS TERMODINÂMICAS  
EM ESCOAMENTOS TRANSÔNICOS EM BOCAIS COM ONDA DE CHOQUE  
PARA REGIME NÃO PERMANENTE




CARLOS FREDERICO E. ALVES  
Instituto de Atividades Espaciais - IAE  
DEMÉTRIO BASTOS NETTO  
Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE

## RESUMO

O comportamento da pressão, temperatura e densidade num escoamento transônico não permanente e isentrópico de um gás perfeito ao longo de um bocal com simetria axial é determinada através da técnica de expansões assintóticas. Um choque fraco está presente e perturbações foram impostas à jusante do mesmo. Apresentamos um resultado numérico para um escoamento acelerado, com choque, para um dado perfil de bocal e uma dada condição inicial.

termos das equações acima são funções de  $x$  (coordenada longitudinal),  $r$  (coordenada radial) e  $t$  (tempo).

Utilizando as equações da continuidade, da conservação da quantidade de movimento em relação a  $x$  e  $r$ , da equação da energia, equação de estado e algumas relações termodinâmicas conhecidas [6] e [7] e após a manipulação do conjunto de equações acima combinadas com as equações (1a) a (1f) encontramos, até a segunda ordem as seguintes expressões para temperatura, pressão e densidade, respectivamente:

$$\theta = 1 + E(1-\gamma)u_1 + E^2(1-\gamma)(u_2 + 0.5u_1^2) \quad (2)$$

$$p = 1 - E\gamma u_1 - E^2\gamma u_2 \quad (3)$$

$$\rho = 1 - Eu_1 - E^2[u_2 + 0.5(\gamma-1)(2\gamma-1)u_1^2] \quad (4)$$

onde todos os termos das expansões das variáveis termodinâmicas foram expressos em função de  $\gamma$  (razão dos calores específicos) e dos termos das expansões de  $U$  e  $V$  que são conhecidos [1] e [6].

De [1] ou [6] podemos escrever:

$$u_1 = \pm [4f(x)/(\gamma+1)]^{0.5} \quad (5a)$$

$$u_2 = 0.5 f''(x)r^2 + h_x + \zeta_x^* \quad (5b)$$

onde  $f(x)$  é uma função que fornece o perfil do bocal de escoamento dado por  $y_w = \pm [1+E^2f(x)]$  e  $f''(x) = d^2f(x)/dx^2$ . Da condição inicial obtemos  $h_x$  e  $\zeta_x^*$  que é um potencial de segunda ordem adicionado à solução para que o equacionamento seja válido na região vizinha a onda de choque [1]. Convém observar que  $\zeta_x^* = 0$  à montante da onda de choque e que os sinais superior e inferior da equação (5a) denotam escoamento supersônico à montante do choque e subsônico à jusante do choque respectivamente.

PROBLEMA DO VALOR INICIAL PARA  $h(x,t)$ 

Assumindo que a perturbação inicial é da forma:

$$h_x(q,0) = (h_x)_{ss} + H(q-\bar{q}) \cdot Z \quad (6a)$$

onde  $Z$  é uma função hipergeométrica do espaço e do tempo dada por [8]:

$$Z = \epsilon \alpha \beta \lambda^{-1} F(\alpha+1, \beta+1, \lambda+1, \chi) (dX/ds) + \Omega \quad (6b)$$

## INTRODUÇÃO

O conhecimento do comportamento das ondas de choque em escoamentos transônicos, não permanentes ao longo de bocais é importante no estudo das máquinas de fluxo interno. Estas transitoriedades podem ocorrer devido a instabilidade de combustão ou mudança súbita nos níveis de potência de motores dentre outras razões [1].

Duas técnicas têm sido utilizadas na manipulação deste tipo de problema: soluções por similaridade [2] e [3] ou por expansões assintóticas [1], [4] e [5].

Neste trabalho, utilizamos o método das expansões assintóticas para estudar as variações das propriedades termodinâmicas (pressão, densidade e temperatura) num escoamento transônico, não permanente, e isentrópico de um gás perfeito ao longo de um bocal com simetria axial. Uma onda de choque fraca estará presente à jusante da garganta e perturbações serão impostas à jusante deste choque.

## EQUACIONAMENTO

Consideramos o escoamento transônico de um gás térmico e caloricamente perfeito, compressível, em regime não permanente e isentrópico [1]. O número de Reynolds será grande o suficiente tal que os efeitos viscosos sejam desprezíveis.

Podemos expressar a temperatura,  $\theta$ , pressão,  $p$ , densidade,  $\rho$ , as componentes de velocidade,  $U$  e  $V$ , e o potencial  $\phi$ , respectivamente, na forma adimensional, em expansões assintóticas em função do parâmetro  $E$  (onde  $E$  é a raiz quadrada da razão entre o raio da garganta e o raio de curvatura do bocal na garganta), do seguinte modo:

$$\theta = 1 + E\theta_1 + E^2\theta_2 + \dots \quad (1a)$$

$$p = 1 + Ep_1 + E^2p_2 + \dots \quad (1b)$$

$$\rho = 1 + E\rho_1 + E^2\rho_2 + \dots \quad (1c)$$

$$U = 1 + Eu_1 + E^2u_2 + \dots \quad (1d)$$

$$V = Ev_1 + E^2v_2 + \dots \quad (1e)$$

$$\phi = x + E\phi_1 + E^2\phi_2 + \dots \quad (1f)$$

onde,  $\theta$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $U$ ,  $V$ , e  $\phi$  foram adimensionalizadas em relação a seus valores críticos [6] e os números subscritos denotam a ordem de aproximação. Todas os



onde  $H(q-\bar{q})$  é uma função degrau unitária,  $\bar{q}$  é a localização da perturbação tal que  $x = \bar{q}$  em  $t = 0$ , o subscrito ss denota regime permanente,  $\alpha$  e  $\beta$  são funções de  $x$  e  $r$  respectivamente,  $\lambda = 2\pi$  de modo a satisfazer a condição de convergência de  $Z$ ,  $\epsilon$  e  $\Omega$  são constantes e  $X$  é uma função do tempo dada por:

$$X = [\cos^2(4s)+1.0]^{-1} - [\cos^2(4t_{sh}) + 1.0]^{-1} \quad (6c)$$

que se assemelha à curva de Agnesi e onde  $t_{sh}$  é o tempo que a perturbação leva para atingir o choque. As relações entre as coordenadas  $(x,t)$  e  $(q,s)$ , onde  $q$  é constante ao longo das características, podem ser vistas em [1] e [6]. Notem que os valores de  $q$  são relacionados a  $x$  ao longo de  $t = 0$  para  $q < \bar{q}$  e a  $t$  ao longo de  $x = cte$  para  $q \geq \bar{q}$ .

Para um dado perfil de bocal de escoamento, a posição inicial do choque,  $x_0$ , estará associada com a pressão do reservatório à jusante do bocal,  $p_B$ , especificada a uma dada distância  $x_B$  no reservatório.

#### RESULTADOS NUMÉRICOS

Uma vez conhecidos o perfil do bocal de escoamento,  $h_x$  e  $u_2$  poderão ser calculados e desta forma podemos determinar  $\theta$ ,  $p$  e  $\rho$ . A onda de choque irá ser perturbada de forma que  $U_{sh} = E^2[(\gamma+1)/4]Z$  quando  $t > t_{sh}$  onde  $t_{sh}$  denota o tempo que a perturbação leva para atingir a onda de choque. Escolhendo  $\epsilon = 4.0$ ,  $\Omega = -0.2547$ ,  $\alpha = x$  e  $\beta = \sqrt{0.5}$  na Figura 1 encontramos as linhas de Mach ao longo do bocal em três instantes de tempo diferentes associadas com as curvas de temperatura, pressão e densidade ao longo do bocal em três níveis diferentes,  $r = 0.0$ ,  $r = 0.5$  e  $r = 1.0$ . A perturbação teve início em  $\bar{q} = x = 2.5$  e o choque encontra-se inicialmente em  $x_0 = 1.5$ .

A Figura 1a mostra as linhas de Mach constantes e a variação das propriedades temperatura,  $\theta$ , pressão,  $p$ , e densidade  $\rho$  ao longo do bocal de escoamento para  $t = 0.0$ . A mudança do perfil de escoamento em  $x = 1.0$  provoca a troca no sentido da curvatura das linhas de Mach da esquerda para a direita nesta vizinhança bem como uma leve descontinuidade nas propriedades. Podemos observar o salto das linhas de Mach devido ao acréscimo da pressão causada pela perturbação em  $x = 2.5$  (onde se localiza a frente da onda de perturbação no instante inicial). Este fato pode ser mais facilmente observado na curva de temperatura que dentre as propriedades é a que sofre maior variação. Além disso, apesar de termos assumido o choque como plano, ele possui uma pequena curvatura de segunda ordem o que faz com que o escoamento atrás dele primeiro se desacelere e então se acelere localmente próximo às paredes. Este fato é visto mais facilmente nas curvas de propriedades observando seus comportamentos logo à jusante da onda de choque. Em  $t = 0.22$ , Figura 1b, a perturbação se movimentou para montante até  $x = 2.01$ . A frente de perturbação atingirá o choque em  $x = 1.50$  num tempo  $t = t_{sh} = 0.45$ , como mostra a Figura 1c. A partir deste instante em qualquer lugar à jusante da onda de choque as propriedades do fluido serão função do tempo e a onda de choque começará a se mover sob a influência do sinal de perturbação [1].

#### CONCLUSÃO

Esta análise fornece uma visão qualitativa da natureza do escoamento transônico sem que se precise recorrer a soluções numéricas complicadas das equações de transporte. Esta solução é válida para escoamentos ao longo de bocais com variações de perfis suaves. Além disso as perturbações não deverão possuir uma frequência muito alta já que a solução adotada trata de casos com pequenas variações no tempo. Isto nos leva a escolha de um tempo característico na ordem de

$10^{-2}$  a  $10^{-3}$  sec. Finalmente como o escoamento transônico à montante da onda de choque foi considerado isentrópico o choque é suficientemente fraco, o que permite o emprego do potencial de velocidade até a ordem desejada.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Alves, C.F.E. e Bastos-Netto, D., Escoamentos Transônicos em Bocais com Onda de Choque para Regime Não Permanente. IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC, 1987. Anais do COBEM 87, pp. 185-188 (1987).
- [2] Sichel, M., The Effect of Longitudinal Viscosity on the Flow at a Nozzle Throat. J. of Fluid Mechanics, 25: 769-786 (1966).
- [3] Adamson, Jr., T.C., Messiter, A.F. and Rickey, G.K., On the Matching of Solutions for Unsteady Transonic Nozzle Flows. Archivum Mechanica Stosowane, 26: 617-628 (1974).
- [4] Rickey, G.K. and Adamson, Jr., T.C., Analysis of Unsteady Transonic Channel Flow with Shock Waves. AIAA Journal, 14: 1054-1061 (1976).
- [5] Messiter, A.F. and Adamson, Jr., T.C., On the Flow Near a Weak Shock Downstream of a Nozzle Throat. J. of Fluid Mechanics, 60: 97-108 (1975).
- [6] Alves, C.F.E., Escoamentos Transônicos em Bocais com Onda de Choque para Regime não Permanente. Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos, 1986.
- [7] Zucrow, M.J. and Hoffman, J.D., Gas Dynamics. John Wiley & Sons, Inc., New York (1976).
- [8] McLachlan, N.W., Bessel Functions for Engineers. Oxford U. Press, London (1948).

#### ABSTRACT

This work deals with the behavior of the pressure temperature and density in an inviscid unsteady transonic flow through an axisymmetric nozzle by asymptotic expansions technique.

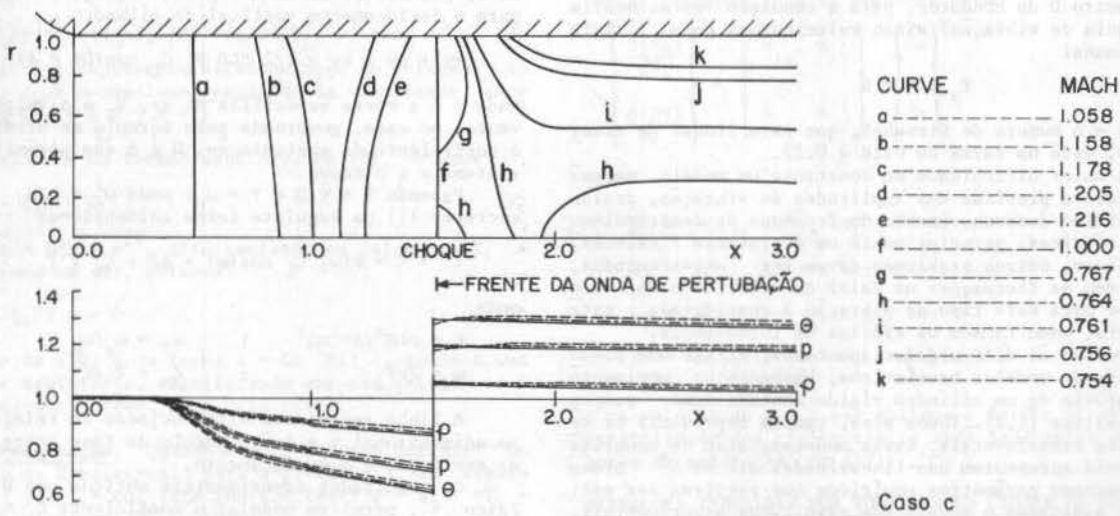
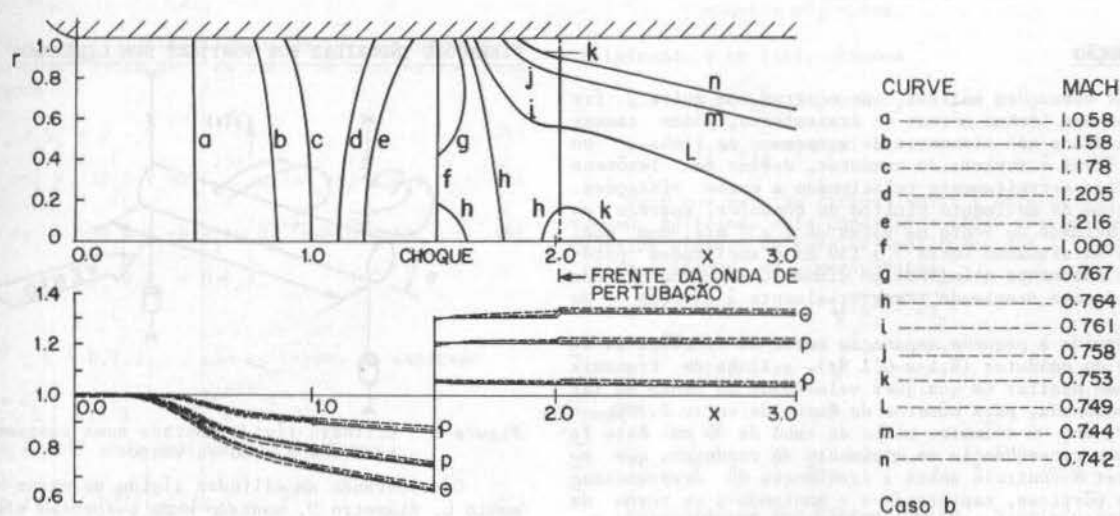
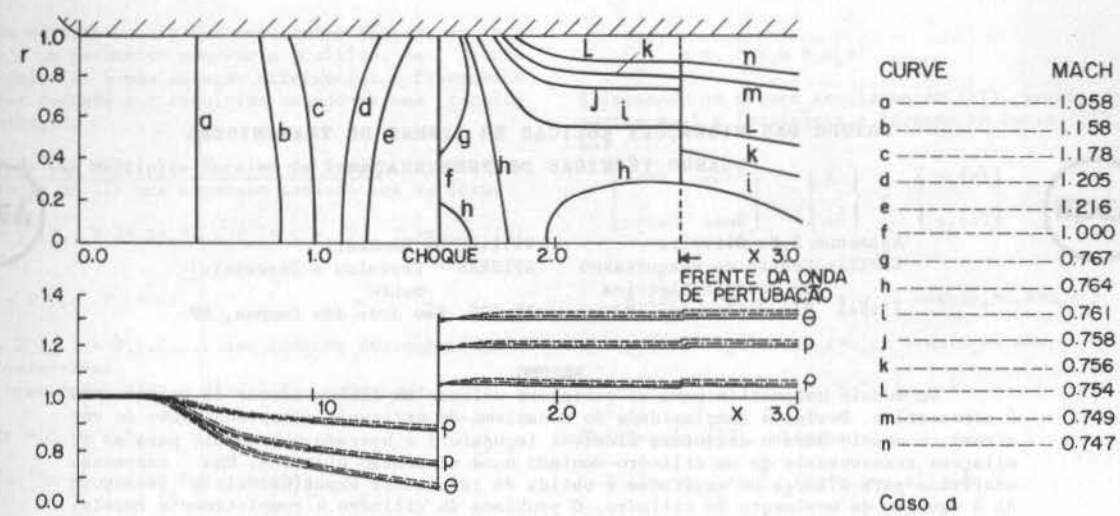


Fig. 1 - Curvas de Mach constante e distribuição das propriedades: pressão ( $p$ ), temperatura ( $\theta$ ) e densidade ( $\rho$ ), em três níveis diferentes: — para  $r = 0.0$ , -.- para  $r = 0.5$  e ---- para  $r = 1.0$  quando (a)  $t = 0.0$ , (b)  $t = 0.22$  e (c)  $t = 0.45$ .

ESTUDO DAS VIBRAÇÕES EÓLICAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO  
USANDO TÉCNICAS DE PERTURBAÇÃO



Agamenon R.E. Oliveira  
CEPEL - Centro de Pesquisas  
de Energia Elétrica  
21.941 Rio de Janeiro, RJ

William M. Mansour  
AVIBRAS - Pesquisa e Desenvolvimento  
12.200 São José dos Campos, SP

RESUMO

Um modelo matemático para as vibrações eólicas em linhas aéreas de transmissão é apresentado. Devido à complexidade do mecanismo de excitação (desprendimento de vórtices), o modelo para a estrutura flexível (condutor) é baseado num modelo para as oscilações transversais de um cilindro montado numa suspensão elástica. Uma expressão analítica para a força de excitação é obtida de resultados experimentais e incorporada à equação de movimento do cilindro. O problema do cilindro é completamente resolvido e o modelo proposto descreve adequadamente as principais características observadas experimentalmente.

INTRODUÇÃO

As vibrações eólicas, que ocorrem com muita frequência nas linhas aéreas de transmissão, podem causar sérios danos aos elementos de suspensão da linha, ou mesmo levar à ruptura do condutor, devido ao fenômeno da fadiga estreitamente relacionado a essas vibrações. Este tipo de movimento cíclico do condutor, aparece para a velocidade do vento na faixa de 1 a 7 m/s, com oscilações se situando entre 3 a 150 Hz e amplitudes pico-a-pico raramente atingindo um diâmetro do condutor, com as vibrações ocorrendo transversalmente à direção do vento.

Devido a pequena separação entre as frequências naturais do condutor (0.1 a 0.2 Hz), a linha de transmissão pode oscilar em qualquer velocidade do vento na faixa mencionada, para números de Reynolds entre 2.700 e 14.000, com um diâmetro médio de cabo de 30 mm. Este fato é uma consequência do movimento do condutor, que pode deter o controle sobre a frequência de desprendimento dos vórtices, capturando-a e mantendo-a em torno da frequência de vibração do condutor. A frequência de desprendimento dos vórtices  $f_s$ , a velocidade do vento  $V$  e o diâmetro  $D$  do condutor, para a condição estacionária (ausência de vibração) estão relacionados pela fórmula de Strouhal

$$f_s D/V = S$$

onde  $S$  é o número de Strouhal, que para linhas de transmissão, está na faixa de 0.18 a 0.22.

A maior dificuldade em construir um modelo matemático para a previsão das amplitudes de vibração, reside no relativo desconhecimento do fenômeno de desprendimento de vórtices, principalmente em estruturas flexíveis. Além disso, outros problemas devem ser acrescentados, tais como as flutuações no valor da velocidade do vento, que para este tipo de vibração é considerada estacionária, como também os efeitos de turbulência.

Devido às dificuldades apontadas, existe uma preponderância de modelos heurísticos, baseados no movimento oscilatório de um cilindro rígido montado numa suspensão elástica [1,2]. Todos eles, tentam reproduzir os resultados experimentais. Esses modelos, além de complicados, pois apresentam não-linearidades até de 5ª ordem [3], possuem parâmetros empíricos que precisam ser estimados, ajustando o modelo aos resultados experimentais.

O presente trabalho, propõe um novo modelo para o estudo do desprendimento de vórtices em estruturas cilíndricas circulares montadas numa suspensão elástica. O modelo baseia-se em resultados experimentais e devido a sua simplicidade e ao fato de descrever corretamente o fenômeno da sincronização, tornou possível também propor um modelo para o estudo das vibrações eólicas.

VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES NUM CILINDRO

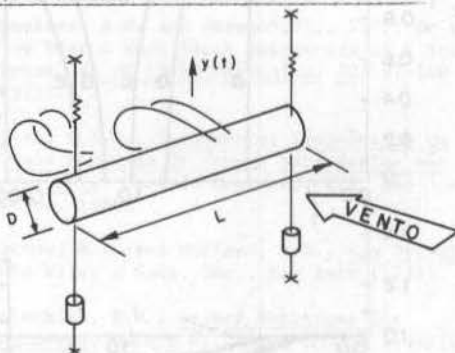


Figura 1 - Cilindro rígido montado numa suspensão elástica sob a ação do vento.

Considerando um cilindro rígido de massa  $m$ , comprimento  $L$ , diâmetro  $D$ , montado numa suspensão elástica de rigidez  $k$  e sendo a constante de amortecimento do sistema  $c$ , podemos escrever a seguinte equação diferencial para o deslocamento vertical do cilindro

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 1/2 \rho L D V_s^2 C_L \cos(\Omega t + \phi) \quad (1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do ar,  $V_s$  é a velocidade do vento, no caso, governada pela fórmula de Strouhal,  $C_L$  é o coeficiente de sustentação,  $\Omega$  e  $\phi$  são parâmetros do sistema e  $t$  o tempo.

Fazendo  $Y = y/D$  e  $\tau = \omega t$  onde  $\omega^2 = k/m$ , podemos escrever (1) na seguinte forma adimensional

$$Y'' + \zeta Y' = \epsilon \{ \omega_0^2 C_L \cos(\omega\tau + \phi) - \zeta_{sk} Y' \} \quad (2)$$

onde

$$\epsilon = \rho L D^2 / 8 \pi^2 m S^2 \quad ; \quad \omega_0 = \omega_s / \omega_n$$

$$\omega_s = 2\pi f_s \quad ; \quad \zeta_{sk} = 2\zeta / \epsilon \quad (2.a)$$

A linha representa diferenciação em relação ao tempo adimensional  $\tau$  e  $\phi$  é o ângulo de fase entre a força de excitação e o deslocamento.

Os resultados experimentais obtidos por Diana e Falco [4], permitem modelar o coeficiente  $C_L$  na seguinte forma

$$C_L = \alpha_0 + \alpha_1 \bar{Y} + \alpha_2 \bar{Y}^2 \quad (2.b)$$

onde  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes que melhor ajustam  $C_L$  aos resultados experimentais e  $\bar{Y}$  é a amplitude do deslocamento  $Y$ .

Para valores usuais das constantes físicas do problema,  $\epsilon$  é um parâmetro pequeno e positivo, de sorte que o modelo (2) é uma equação diferencial fracamente não-linear podendo ser resolvida usando-se uma técnica de perturbação.

**Método das Múltiplas Escalas de Tempo.** Adotamos para solução de (2) uma expansão assintótica da forma

$$Y = y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1) + \epsilon^2 y_2(T_0, T_1) + \dots \quad (3)$$

onde

$$T_0 = \tau ; \quad T_1 = \epsilon \tau$$

e  $y_j(T_0, T_1)$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots$  são funções desconhecidas a serem determinadas.

Os operadores  $d/d\tau$  e  $d^2/d\tau^2$  são dados por

$$d/d\tau = D_0 + \epsilon D_1 \quad (3.a)$$

$$d^2/d\tau^2 = D_0^2 + \epsilon(2D_0 D_1) + \epsilon^2(D_1^2)$$

onde

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0} ; \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}$$

Usando (3.a) em (3), substituindo em (2) e igualando os termos de mesma ordem em  $\epsilon$  em ambos os membros da equação, obtemos

$$D_0^2 y_0 + y_0 = 0 \quad (4)$$

$$D_0^2 y_1 + y_1 = -2D_0 D_1 y_0 + \omega_0^2 C_L^{(0)} \cos(\omega T_0 + \phi) - \zeta_* D_0 y_0 \quad (5)$$

$$D_0^2 y_2 + y_2 = -2D_0 D_1 y_1 - D_1^2 y_0 + \omega_0^2 C_L^{(1)} \cos(\omega T_0 + \phi) - \zeta_* (D_0 y_1 + D_1 y_0) \quad (6)$$

onde  $C_L^{(k)}$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$  são os termos da expansão

$$C_L = C_L^{(0)} + \epsilon C_L^{(1)} + \epsilon^2 C_L^{(2)} + \dots$$

A solução de (4) pode ser escrita na forma

$$y_0 = A(T_1) e^{jT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-jT_0} \quad (7)$$

Substituindo (7) em (5), obtemos

$$D_0^2 y_1 + y_1 = -j(2\bar{A} + \zeta_* A) e^{jT_0} + 1/2 \omega_0^2 C_L^{(0)} e^{j\psi} + cc \quad (8)$$

onde o til ( $\sim$ ) representa diferenciação em relação ao tempo  $T_1$ ,  $cc$  é o complexo conjugado da quantidade anterior,  $\psi = \omega T_0 + \phi$  e  $j = \sqrt{-1}$

Eliminando os termos seculares em (8), obtemos

$$2\bar{A} + \zeta_* A = 0 \quad (9)$$

Fazendo  $A = 1/2 a e^{j\theta}$ , diferenciando em relação a  $T_1$  e substituindo em (9), obtemos

$$\dot{a} + \zeta_* / 2 a = 0 \quad (10)$$

A solução de (10) é da forma  $a = C e^{-\zeta_* / 2 T_1}$ , sendo  $C$  uma constante arbitrária, significando que não existe oscilação auto-sustentável para este caso.

**Sincronização.** Quando  $\omega \rightarrow 1$ , podemos definir um parâmetro de dessincronia para a frequência, da seguinte forma:  $\omega - 1 = \epsilon \sigma$ . Isto implica fazer  $\psi = T_0 + \sigma T_1 + \phi$ . Substituindo em (8), obtemos

$$D_0^2 y_1 + y_1 = \left[ -j(2\bar{A} + \zeta_* A) + 1/2 \omega_0^2 C_L^{(0)} e^{j(\sigma T_1 + \phi)} \right] e^{jT_0} + \text{termos que não contribuem} \quad (11)$$

A primeira aproximação dada por (7) é equivalente a fazer  $y_0 = a \cos(T_0 + \theta)$ , o que implica em

$$C_L^{(0)} = \alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 \quad (12)$$

Eliminando os termos seculares em (11), separando as partes real e imaginária e levando em conta (12), obtemos

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(a) \\ p_2(a) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

onde

$$p_1(a) = -\zeta_* / 2 \sin\theta a - \omega_0^2 / 2 \cos\alpha (\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2)$$

$$p_2(a) = \zeta_* / 2 \cos\theta a - \omega_0^2 / 2 \sin\alpha (\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2)$$

$$\alpha = \sigma T_1 + \phi$$

Resolvendo (13), obtemos

$$\dot{a} = -\zeta_* / 2 a + \omega_0^2 / 2 (\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2) \sin \gamma \quad (14)$$

$$\dot{\theta} = -\omega_0^2 / 2 (\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2) \cos \gamma$$

$$\gamma = \alpha - \theta = \sigma T_1 - \theta + \phi$$

Eliminando  $\theta$  em (14), obtemos

$$\dot{a} = -\zeta_* / 2 a + \omega_0^2 / 2 (\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2) \sin \gamma \quad (15)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_0^2 / 2 (\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2) \cos \gamma + \sigma$$

Para que existam ciclos-limite é necessário que  $\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$ . Aplicando esta condição a (15), obtemos as seguintes expressões para as amplitudes dos ciclos-limite do cilindro, na sincronização.

$$a^{(1)} = 1/2 \{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\} \quad (16)$$

$$a^{(2)} = 1/2 \{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\}$$

onde

$$a_0 = \alpha_0 / \alpha_2 ; \quad a_1 = (\omega_0^2 \alpha_1 + \zeta_*^2 + 4\sigma^2) / \omega_0^2 \alpha_2$$

**Estabilidade dos Ciclos-limite.** O estudo da estabilidade dos ciclos-limite pode ser feito, perturbando-se as equações (15) da seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} \frac{d(\Delta a)}{dT_1} \\ \frac{d(\Delta \gamma)}{dT_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad (17)$$

onde

$$A_{11} = -\zeta_* / 2 + \omega_0^2 / 2 (\alpha_1 + 2\alpha_2 \hat{a}) \sin \hat{\gamma}$$

$$A_{12} = \omega_0^2 / 2 (\alpha_0 + \alpha_1 \hat{a} + \alpha_2 \hat{a}^2) \cos \hat{\gamma}$$

$$A_{21} = \omega_0^2 / 2 (-\alpha_0 / \hat{a}^2 + \alpha_2) \cos \hat{\gamma}$$

$$A_{22} = -\omega_0^2 / 2 (\alpha_0 / \hat{a} + \alpha_1 + \alpha_2 \hat{a}) \sin \hat{\gamma}$$

e os valores de  $\hat{a}$  e  $\hat{\gamma}$  são obtidos a partir de (16). A estabilidade dos ciclos-limite será dada pelos auto-valores da matriz  $[A]$  em (17).

#### VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES EM LINHAS DE TRANSMISSÃO

O modelo matemático que está sendo proposto para vibrações eólicas em linhas de transmissão, considera a estrutura flexível como sendo construída com um número infinito de cilindros circulares acoplados, de comprimento infinitesimal. Devido ao número infinito de graus de liberdade dessa estrutura, podemos esperar um



número infinito de regiões de sincronização. Estas regiões formarão um espectro praticamente contínuo, desde que suas frequências naturais sejam pouco espaçadas. Desse modo, as vibrações da linha, ocorrerão em qualquer velocidade do vento onde os números de Reynolds correspondentes pertençam a uma faixa possível de desprendimento de vórtices.

Outro aspecto importante na construção do modelo para a linha, é aquele relativo às forças de excitação. O estudo anterior, conduzido com um cilindro rígido montado numa suspensão elástica, mostrou que é possível representar de forma bastante aproximada o fenômeno da sincronização, modelando a força de excitação como uma função polinomial da amplitude de deslocamento, modulada por uma função periódica no tempo.

Algumas simplificações podem ser introduzidas no modelo do condutor, se considerarmos alguns aspectos que são inerentes às vibrações eólicas. A primeira delas, é confinar o movimento ao plano vertical, embora seja conhecido o fato de que existe um acoplamento entre as vibrações no plano e as vibrações fora do plano vertical. Entretanto, esse acoplamento é mais acentuado nos modos de frequências mais baixas do condutor, e as vibrações eólicas ocorrem nos modos mais elevados ( $30 < n < 500$ ). A segunda simplificação, diz respeito à rigidez flexional do cabo. No modelo aqui proposto, esta rigidez será considerada pequena e seu efeito desprezado. No entanto, deve ser enfatizado, que a rigidez flexional tem enorme importância no estudo das tensões dinâmicas que ocorrem próximas aos grampos de suspensão, sendo o seu conhecimento fundamental para a estimativa de vida útil dos condutores. Esses efeitos, entretanto, são sentidos nas extremidades da linha e para os objetivos do nosso estudo podem ser desprezados.

Todas as considerações anteriores conduzem-nos ao estudo das vibrações induzidas por vórtices numa corda vibrante. Se chamarmos de  $w$  a deflexão da corda e  $x_*$  sua coordenada espacial, podemos construir o seu modelo analítico, a partir das considerações feitas sobre o sistema discreto de cilindros rígidos como se segue: o movimento do cilindro é substituído pela deflexão da corda através das seguintes transformações

	cilindro	condutor
deflexão	$y(t)$	$w(x_*, t)$
amplitude	$Y$	$W(x_*)$
força de excitação	$F(Y, t)$	$F_*(W(x_*), t)$

A equação diferencial que governa as vibrações induzidas por vórtices no condutor é dada por

$$\mu \ddot{w}(x_*, t) + d \dot{w}(x_*, t) - T w''(x_*, t) = \frac{1}{2} \rho D V_S^2 C_L [W(x_*)] e^{i\Omega t} \quad (18)$$

onde  $\mu$  é a massa por unidade de comprimento,  $d$  é uma constante de amortecimento por unidade de comprimento,  $T$  é a força de tração,  $\rho$  é a massa específica do ar,  $D$  o diâmetro do condutor,  $V_S$  velocidade do vento,  $C_L$  o coeficiente de sustentação e  $\Omega$  a frequência de excitação. O ponto representa diferenciação em relação ao tempo  $t$  e a linha diferenciação em relação a  $x_*$ .

Introduzindo as variáveis  $x = x_*/D$ ,  $u = w/D$  e  $\tau = \omega t$ , sendo  $\omega$  a frequência de desprendimento de vórtices, podemos escrever (18) na seguinte forma adimensional

$$u_{\tau\tau}(x, \tau) - c_0^2 u_{xx}(x, \tau) = \delta f(u, u_\tau, \tau) \quad (19)$$

$$u(0, \tau) = u(1, \tau) = 0$$

$$0 < x < 1; \tau \geq 0$$

onde

$$c = \sqrt{T/\mu}; \quad c_0 = c/D\omega_S; \quad \delta = \rho D^2/8\pi^2 \mu S$$

$$f(u, u_\tau, \tau) = C_L [U(x)] e^{i\Omega\tau} - d_* u_\tau \quad (19.a)$$

$$d_* = 8\pi^2 S^2 d / \rho D^2 \omega_S$$

Analogamente ao que acontece com as vibrações induzidas no cilindro, para valores usuais das constantes físicas do condutor,  $\delta$  é um parâmetro pequeno e positivo, de tal maneira que (19) é uma equação diferencial parcial fracamente não-linear, devendo se anular nas extremidades ( $x = 0$  e  $x = 1$ ). Para que estas condições de contorno sejam satisfeitas  $f(-u, -u_\tau, \tau) = -f(u, u_\tau, \tau)$ . Assim, podemos propor para  $C_L [U(x)]$  a seguinte função polinomial

$$C_L [U(x)] = \beta_1 U - \beta_3 U^3 \quad (20)$$

Substituindo (20) em (19.a), obtemos

$$f(u, u_\tau, \tau) = \beta_1 u - d_* u_\tau - \beta_3 u^3 e^{-2i\Omega\tau} \quad (21)$$

A função (21) é composta de uma parte linear e outra não-linear. Para o caso das vibrações eólicas, onde os deslocamentos são pequenos, em primeira aproximação podemos propor um modelo para  $f(u, u_\tau, \tau)$  que contenha somente a parte linear. Além disso, conforme pode ser visto em (20),  $C_L = 0$  para  $U = 0$ , o que significa que o modelo proposto leva em conta somente o crescimento das amplitudes de vibração, ou seja, a sua evolução no tempo, face às forças de excitação produzidas pelo vento.

O modelo (19) também pode ser resolvido usando-se técnicas de perturbação [5]. Em trabalhos posteriores serão apresentados os resultados obtidos de sua solução, para os dois casos, em que  $f(u, u_\tau, \tau)$  é linearizada ou não, e seus efeitos comparados.

## RESULTADOS E COMPARAÇÕES

Com a finalidade de testar o modelo matemático proposto no presente trabalho, os seguintes valores foram adotados para as constantes físicas do problema do cilindro.

$$m = 1.0 \text{ kg}; \quad L = 0.5 \text{ m}; \quad D = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3; \quad S = 0.185$$

Os coeficientes que aparecem em (2b) são os mesmos adotados por Schäfer em [6] e valem

$$\alpha_0 = 0.09; \quad \alpha_1 = 3.37; \quad \alpha_2 = -2.67$$

A Figura 2, mostra uma comparação entre os resultados experimentais apresentados em [7] e os obtidos pelo modelo proposto. As amplitudes pico-a-pico estão adimensionalizadas pelo diâmetro do cilindro e plotadas em função do amortecimento reduzido, que é definido por

$$S_G = (2\pi S)^2 \cdot 2m / \rho L D^2 \cdot \zeta$$

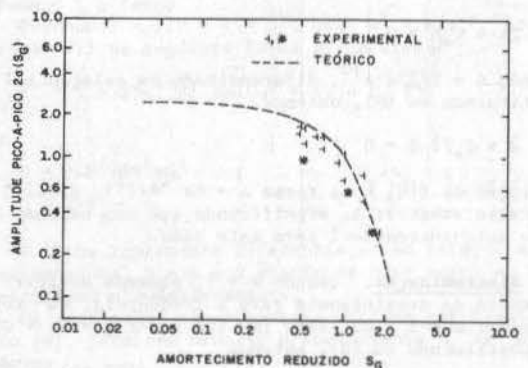


Figura 2 - Comparação entre resultados teóricos e experimentais para o deslocamento vertical do cilindro.

A Figura 3, mostra as amplitudes dos ciclos-limite estáveis, em torno da ressonância, para vários valores do fator de amortecimento.

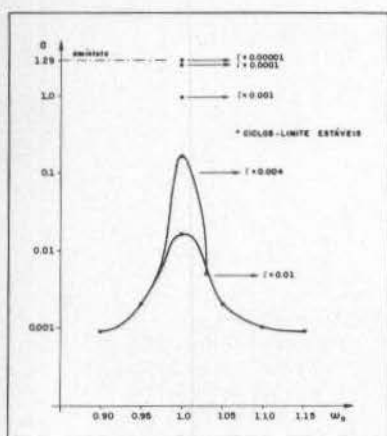


Figura 3 - Amplitudes dos ciclos-limite do cilindro em torno da ressonância.

#### COMENTÁRIOS E CONCLUSÃO

O estudo apresentado nos itens anteriores, permite fazer os seguintes comentários:

- O modelo proposto para as vibrações induzidas por vórtices no cilindro, acompanha de forma bastante aproximada a tendência geral dos pontos experimentais de [7], conforme é mostrado na Figura 2.
- Para valores muito pequenos do amortecimento reduzido  $S_r$ , o modelo evidencia o caráter auto-restritivo das oscilações do cilindro. Este fato, mencionado por [7] foi observado experimentalmente por [8]. O valor assintótico para o qual tendem as amplitudes quando o amortecimento tende a zero é 1,29, exatamente o mesmo encontrado em [6]. Esses resultados podem ser vistos nas Figuras 2 e 3.
- As comparações apresentadas na Figura 2, dizem respeito a uma série de experimentos realizados por vários pesquisadores com estruturas cilíndricas montadas numa suspensão elástica. Esses resultados foram sistematizados por Skop e Griffin e apresentados em [7]. A linha pontilhada, representa a resposta do modelo lançada sobre a nuvem de pontos experimentais. As amplitudes dos ciclos-limite plotadas no eixo vertical, são amplitudes de ciclos-limite estáveis, fato comprovado pela análise de estabilidade.
- A Figura 3, mostra a resposta do modelo em torno da ressonância, para diferentes valores do fator de amortecimento do sistema. Uma leve assimetria que se verifica, também é confirmada experimentalmente [9].
- Outra característica importante apresentada pelo modelo, pelo menos como possibilidade algébrica e que também se verifica experimentalmente [9], é o fenômeno de histerese em torno da ressonância. Em (16) vemos que existem 4 valores possíveis para as amplitudes dos ciclos-limite, para um dado estado vibratório do cilindro. No entanto, para os valores numéricos pesquisados, o modelo apresenta uma única solução estável.
- O modelo proposto, simplifica sobremaneira a análise do fenômeno de desprendimento de vórtices no cilindro, ao reduzir o número de graus de liberdade do sistema em relação aos modelos convencionais. Todos os modelos baseados em versões da equação de Van der Pol possuem 2 graus de liberdade, além de fazerem proposições heurísticas para a força de excitação do vento. Isto obriga a análise desses sistemas passar por uma estimativa dos parâmetros empíricos, através do ajuste de curvas teóricas aos resultados experimentais.

- A simplicidade do modelo proposto, que é fruto de uma modelação matemática baseada em resultados experimentais, permite passar ao estudo do desprendimento de vórtices na estrutura flexível (condutor), o que seria bem mais complicado caso o modelo das vibrações do cilindro fosse heurístico.
- A passagem do desprendimento de vórtices no cilindro para o desprendimento de vórtices na estrutura flexível, conduz a um problema não-linear de valor de contorno. O modelo (19), pode também ser estudado usando-se técnicas de perturbação, e em primeira aproximação pode ser linearizado em torno da configuração de equilíbrio do condutor, pois as vibrações eólicas apresentam pequenas amplitudes em relação ao diâmetro do condutor.
- As técnicas de perturbação demonstraram ser inteiramente adequadas à análise do fenômeno estudado, permitindo calcular de forma fechada as amplitudes dos ciclos-limite do cilindro, tornando o trabalho computacional extremamente simplificado e unificando o ponto de vista metodológico o ataque ao problema.

#### REFERÊNCIAS

- Myerscough, C.J., A simple model of the growth of wind-induced oscillations in overhead lines. *Journal of Sound and Vibration*, 28(4), pp. 699-713 (1973).
- Myerscough, C.J., Further studies of the growth of wind-induced oscillations in overhead lines. *Journal of Sound and Vibration*, 39(4), pp. 503-517 (1975).
- Landl, R., A mathematical model for vortex-excited vibrations of bluff bodies. *Journal of Sound and Vibration*, 42(2), pp. 219-234 (1975).
- Diana, G. and Falco, M., On the forces transmitted to a vibrating cylinder by a blowing fluid. *Meccanica* 6, pp. 9-22 (1971).
- Lardner, R.W., Asymptotic solutions of nonlinear wave equations using the methods of averaging and two-timing. *Quarterly of Applied Mathematics*, pp. 225-238 (1977).
- Schäfer, B., Dynamical modelling of wind-induced vibrations of overhead lines. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 19, Nº 5, pp. 455-467 (1984).
- Griffin, O.M. and Skop, R.A., The vortex-induced oscillations of structures. *Journal of Sound and Vibration*, 44(2), pp. 303-305 (1976).
- Blevins, R.D., *Flow-induced vibration*. Van Nostrand Reinhold, N. York (1977).
- Gowda, B.H.L. and Prabhu, D.R., Interference effects on the flow-induced vibrations of a circular cylinder. *Journal of Sound and Vibration*, 112(3), pp. 487-502 (1987).

#### ABSTRACT

A mathematical model is presented for the aeolian vibrations of overhead lines. Because of the complexity of the excitation mechanism (Karman vortex shedding), the model for the flexible structure is based on an appropriate non-linear model of a circular rigid cylinder mounted on a elastic suspension and oscillating transversally in a flowing fluid. An analytical expression for the exciting forces acting on the cylinder is derived from experimental data and incorporated in the equation for the oscillatory movement of the cylinder. The cylinder problem is completely solved and it is shown that the main characteristics observed experimentally can be described by this model.



PROBLEME DE LA PROPULSION ALTERNATIVE

LEONARD EISENHARTER, AVIATEUR  
MAITRISE DE LA PROPULSION ALTERNATIVE - 1987  
LEONARD EISENHARTER, AVIATEUR  
LEONARD EISENHARTER, AVIATEUR

PROBLEME

La propulsion alternative est un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années. Elle est devenue un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années. Elle est devenue un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années.

PROBLEME

Le développement de la propulsion alternative est un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années. Elle est devenue un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années.

PROPULSION

Le développement de la propulsion alternative est un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années. Elle est devenue un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années.

Le développement de la propulsion alternative est un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années. Elle est devenue un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années.

Le développement de la propulsion alternative est un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années. Elle est devenue un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années.



Equation 1: 
$$P = \rho \cdot A \cdot V^3 \cdot C_p$$
  
Equation 2: 
$$C_p = \frac{1}{2} C_{T0} \left( \frac{V}{V_{tip}} \right)^2$$
  
Equation 3: 
$$C_{T0} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{V}{V_{tip}} \right)^2 \left( \frac{V_{tip}}{V} \right)^2$$

Le développement de la propulsion alternative est un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années. Elle est devenue un domaine de recherche qui a connu un développement important ces dernières années.

DINÂMICA DE COMBUSTORES SUPERSÔNICOS



CARLOS FREDERICO E. ALVES  
 Instituto de Atividades Espaciais - IAE  
 LEON R. SINAY e DEMÉTRIO BASTOS NETTO  
 Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE

RESUMO

A possibilidade do emprego de Estato-Reatores a combustão supersônica ("scramjets") como meio de propulsão eficaz em regime de voo hipersônico é reconhecida há mais de duas décadas. Recente levantamento do estado-da-arte revela uma série de aspectos que carecem de cuidados especiais oferecendo áreas onde as oportunidades de P&D são óbvias e urgentes. Em particular este é o caso do Combustor Supersônico. Este trabalho propõe um modelo para a sua dinâmica e discute aspectos de sua otimização.

INTRODUÇÃO

A propulsão de veículos espaciais na atmosfera e das aeronaves hipersônicas de grande alcance ("aerospace plane") muito provavelmente será realizada por sistemas alimentados a ar, dos quais o mais forte candidato é o estato-reator a combustão supersônica ("scramjet"). Este ciclo opera numa faixa de número de Mach de Voo,  $M_0$ , muito mais ampla que os demais ciclos alimentados a ar ( $4 \leq M_0 \leq 25$ ) [1] e obviamente possui impulsão específica,  $I_s$ , muito maior que quaisquer motores foguete convencionais.

Assim é que o ciclo de propulsão, baseado na liberação de calor num escoamento supersônico, evoluiu de tal modo nas últimas décadas, que existem hoje uma plêiade de projetos de propulsores fundamentados neste princípio além de variações como aquela do DCR ("Dual Combustor Ramjet") que procuram incorporar ao combustor supersônico a flexibilidade do estato-reator a combustão subsônica no que tange a alimentação do sistema com combustíveis de simples armazenamento [1-3].

Um modo simples de se considerar o estato-reator a combustão supersônica é dividi-lo em seções como indicado na Figura 1. Cada componente (A Tomada de Ar (0-1), o Duto de Conexão (1-2), o Combustor (2-4) e a Tubeira (4-5)) pode ser analisado separadamente e resultados experimentais incorporados onde necessário. Este trabalho se dedica apenas ao estudo de aspectos da dinâmica do combustor.

ANÁLISE DO COMBUSTOR

Nesta região (Figura 1, Seções 2-4) o campo de escoamento é complexo, envolvendo eventos que, acoplados e de natureza fortemente não lineares, dificultam sobremaneira a descrição completa e precisa do fenômeno global, pois lá interagem num trem de ondas de choque, a injeção do combustível (em condições sônicas ou supersônicas), camadas limites e de cisalhamento, zonas de separação de camada limite, entre outros. Assim a obtenção de soluções completas das equações de Navier-Stokes - envolvem um tempo de computação enorme e pouco conveniente numa fase de anteprojeto. Daí, a análise aqui é feita considerando um volume de controle entre as seções 2 e 4. Nestas seções o escoamento pode ser considerado unidimensional. A seção 3 corresponde às condições que podem existir atrás de uma onda de compressão simples cujas propriedades à montante são aquelas da seção 2. A intensidade desta onda pode variar desde uma onda de Mach (isto é, sem choque), por uma família de ondas de choque oblíquos até, no limite, uma onda de choque normal. Isto posto, as equações de conservação para o escoamento através o volume de controle podem ser escritas:

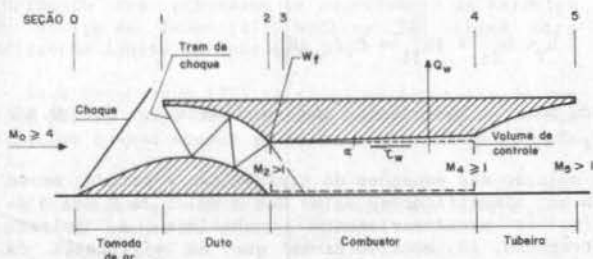


Fig. 1 - Esquema de um Estato-Reator a Combustão Supersônica.

$$\rho_2 u_2 A_2 + \dot{w}_f = \rho_4 u_4 A_4 \tag{1}$$

$$\rho_2 A_2 \int_2^4 p_w \sin \alpha dA_w - p_4 A_4 - \int_2^4 \tau_w \cos \alpha dA_w + p_f A_f \cos \beta =$$

$$= \rho_4 u_4^2 A_4 - \rho_2 u_2^2 A_2 - \rho_f u_f^2 A_f \cos \beta \tag{2}$$

$$h_2 + \frac{u_2^2}{2} + f \left( h_f + \frac{u_f^2}{2} \right) = (1+f) \left( h_4 + \frac{u_4^2}{2} \right) + \frac{1}{\dot{w}_2} \int_2^4 \dot{q}_w dA_w \tag{3}$$

$$p_4 = p_4(\rho_4, h_4) \tag{4}$$

onde  $\rho$  - densidade,  $u$  - velocidade,  $p$  - pressão,  $h$  - entalpia,  $\dot{w}$  - vazão em massa,  $\alpha$  - o ângulo de divergência do combustor,  $\beta$  - o ângulo de injeção do combustível,  $\tau$  - a tensão de cisalhamento,  $f$  - razão combustível/ar,  $(\dot{w}_f/\dot{w}_2)$ ,  $\dot{q}$  - fluxo de calor e os subscritos denotam: 2 e 4, seções 2 e 4 respectivamente,  $f$  - combustível e  $w$  - parede.

As equações (1) a (3) podem ser resolvidas com a escolha de uma equação de estado apropriada, equação (4), e se forem conhecidas expressões para a distribuição de pressões na parede, para o cisalhamento e a taxa de transferência de calor.

A equação de estado é obtida assumindo-se equilíbrio termodinâmico na seção 4 (Fig. 1) e usando-se o código NASA SP-273 [4] com a composição do ar previamente estabelecida e a descrição apropriada do combustível empregado.

Já a distribuição de pressões na parede, a técnica usada é a de se tomar

$$p_w A^{\epsilon/\epsilon-1} = \text{const} \quad (5)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante arbitrária,  $-\infty \leq \epsilon \leq \infty$ , como amplamente usado no tratamento analítico de escoamentos em dutos de área variável com adição de calor [5,6].

No que tange os efeitos de atrito e transferência de calor, aquelas integrais nas equações (2) e (3), embora passíveis de determinação rigorosa pela solução das equações da camada limite, podem com a vantagem da simplicidade, receber tratamento de correlação de dados, desde que se assuma como válida a analogia de Reynolds para este tipo de escoamento [6].

Das equações acima [usando-se (1), (2), (4) com  $p_4 = \rho_4 R_4 T_4$  e (5)] obtém-se

$$\frac{p_4}{p_2} = \left[ \frac{(1+\gamma_2 M_2^2) - (1-\epsilon) p_3/p_2 - f^*}{\epsilon + \gamma_4 M_4^2} \right]^2 \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{1-\epsilon} \quad (6)$$

$$\frac{A_4}{A_2} = \left[ \frac{(1+\gamma_2 M_2^2) - (1-\epsilon) p_3/p_2 - f^*}{\epsilon + \gamma_4 M_4^2} \right]^{1-\epsilon} \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\epsilon-1} \quad (7)$$

$$\frac{T_4}{T_2} = \left[ \frac{(1+\gamma_2 M_2^2) - (1-\epsilon) p_3/p_2 - f^*}{\epsilon + \gamma_4 M_4^2} \right]^2 \frac{\gamma_4 R_4 M_4^2}{\gamma_2 R_2 M_2^2} \frac{1}{(1+f)^2} \quad (8)$$

onde  $\gamma$  é a razão dos calores específicos,  $M$  o número de Mach,  $R$  a constante específica do gás e

$$-f^* = \left[ -\frac{1}{2} \tau_w \cos \alpha dA_w + p_f A_f \cos \beta + \rho_f u_f^2 A_f \cos \beta \right] \frac{1}{p_2 A_2} \quad (9)$$

É interessante notar que, fazendo  $p_3/p_2 = 1, \gamma_2 = \gamma_4 = \gamma, MW_2 = MW_4$  ( $MW$  - massa molecular da mistura) e tomando  $f^* = 0$  e  $(1+f) \sim 1$  encontra-se os resultados de Billig [5]. Entretanto vale observar que as equações (5) a (8) foram obtidas sem o emprego da equação da energia. Assim para compatibilizar-se (8) com (3) é necessário que:

$$f \frac{h_{Tf}}{h_{T2}} = \frac{K^2}{1+f} - 1 \quad (10)$$

onde o subscrito T se refere às condições de estagnação e  $K^2$  é definido por

$$K^2 = \frac{2+(\gamma-1)M_4^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \cdot \frac{M_4^2}{M_2^2} \cdot \left[ \frac{\epsilon+\gamma M_4^2}{\epsilon+\gamma M_2^2} \right]^2 \quad (11)$$

Como  $fh_{Tf}/h_{T2} > 0$  então  $f < K^2 - 1$ . Este resultado impõe um vínculo ao problema. Se as simplificações acima não forem empregadas então a relação de compatibilidade pode ser escrita:

$$\frac{\gamma_2 R_2}{\gamma_4 R_4} \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_2 - 1} \left[ 1 + f \frac{h_{Tf}}{h_{T2}} - \frac{Q_1}{h_{T2}} \right] = \frac{2 + (\gamma_4 - 1) M_4^2}{2 + (\gamma_2 - 1) M_2^2}$$

$$\cdot \left[ \frac{(1+\gamma_2 M_2^2) - (1-\epsilon) p_3/p_2 - f^*}{\epsilon + \gamma_4 M_4^2} \right] \frac{\gamma_4 R_4 M_4^2}{\gamma_2 R_2 M_2^2} (1+f)^{-1} \quad (12)$$

$$\text{onde } Q_1 = \frac{1}{\bar{w}_2} \int_2^4 \dot{q}_w dA_w$$

Fazendo [6]

$$Q_1 = \frac{\bar{Q}}{A_w} \frac{w_2}{A_2}$$

onde  $\bar{Q}/A_w$  é o fluxo médio de calor nas paredes do combustor, este parâmetro pode ser adimensionalizado pela diferença das entalpias médias do gás e da parede do combustor,  $\Delta h$ ,

$$\Delta h = h_{T2} + fh_{Tf} + 0.5 f \eta_c \Delta h_f - \bar{h}_w \quad (13)$$

onde  $\bar{h}_w$  é a entalpia do ar na temperatura média da parede,  $\eta_c$  a eficiência do processo de combustão,  $\Delta h_f$  o poder calorífico inferior do combustível e o fator 0.5 é usado na intenção de prover um valor médio para todo o combustor [6]. Com base nas correlações de dados experimentais envolvendo diversos combustíveis e geometrias de combustores numa faixa ampla de condições iniciais,  $Q_1/\Delta h$  pode ser plotado vs os parâmetro  $f \eta_c \Delta h_f$ . Uma aproximação daquelas correlações fornece a relação

$$Q_1/\Delta h = 9 \times 10^{-4} + 2.83 \times 10^{-7} f \eta_c \Delta h_f \quad (14)$$

onde  $\Delta h_f \approx [J/g]$ .

Se, como já mencionado, a analogia de Reynolds for válida para escoamentos com reações exotérmicas, então [6]:

$$(\bar{Q}/A_w)/(\bar{h}_r - \bar{h}_w) = \bar{\tau}_w/\bar{u} \quad (15)$$

onde  $\bar{\tau}_w = (1/A_w) \int_2^4 \tau_w \cos \alpha dA_w$ ,  $\bar{h}_r$  é o valor médio da entalpia de recuperação do gás, e  $\bar{u}$ , o valor médio da velocidade no combustor, pode ser tomado como  $\bar{u} \sim u_2$ , assumindo-se que os efeitos de desaceleração devidos aos choques e à adição de calor são compensados pela divergência do combustor.

Escolhe-se  $\bar{h}_r = C_1 \bar{h}_T$  onde  $C_1 = \{1 + \bar{\Gamma}[(\bar{\gamma}-1)/2] \bar{M}^2\} / \{1 + [(\bar{\gamma}-1)/2] \bar{M}^2\}$  onde  $(\bar{\gamma})$  - valores médios, e  $\bar{\Gamma} = Pr^{1/3}$ ,  $Pr$  o número de Prandt. (Para  $2 < \bar{M} < 4$ ,  $\bar{\Gamma} \approx 0.9$  e  $C_1 \approx 0.93$ , numa ampla faixa de combustíveis) e

$$\bar{h}_T = h_{T2} + fh_{Tf} + C_2 f \eta_c \Delta h_f$$

onde para o hidrogênio como combustível,  $C_2 = 0.9$  e  $\Delta h_f = 388185 J/g$

Na solução das equações de conservação e estado, mesmo com as simplificações acima nem o valor de  $\epsilon$  nem o de  $p_3/p_2$  são necessariamente conhecidos a priori. Entretanto, ao considerar-se que na vizinhança da seção 4 o escoamento é unidimensional e que lá está o final do combustor e mais, que o escoamento na tubeira (seções 4-5) é isentrópico, então é mister tomar-se os vínculos

$$\frac{dT}{T} + 0, A + A_4 \quad (16)$$

e

$$\left(\frac{\partial p}{\partial A}\right)_{\epsilon=\text{const}} = \left(\frac{\partial p}{\partial A}\right)_{\text{isentrópico}}, A \rightarrow A_4 \quad (17)$$

Da equação (7),

$$M = \frac{(p_2/p_3)(\gamma_4^{-1} + (\gamma_2/\gamma_4)M_2^2) - (1-\epsilon)/\gamma_4 - f_1^* p_2/p_3}{(A_4/A_2)^{1/1-\epsilon}} - \frac{\epsilon}{\gamma_4} \quad (18)$$

De novo, como na equação (8) mas para um volume de controle entre a seção 2 e uma seção  $x$  à juzante da seção 4, tem-se

$$\frac{T_T}{T_2} = \frac{2+(\gamma-1)M^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \left[ \frac{(1+\gamma_2 M_2^2) - (1-\epsilon)p_3/p_2 - f_1^*}{\epsilon + \gamma M^2} \right] \cdot \frac{\gamma_4 R_4}{\gamma R} \frac{M^2}{M_2^2} \frac{1}{(1+f)^2} \quad (19)$$

onde  $f_1^* = \left[ - \int_2^x \rho_w \cos \alpha dA_w - \rho_f A_f \cos \beta - \rho_f u_f^2 A_f \cos \beta \right] \frac{1}{p_2 A_2}$

daí

$$\frac{dT_T}{T_T} = \left\{ \left[ \frac{(\gamma-1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} + 1 - \frac{2\gamma M^2}{\epsilon + \gamma M^2} \right] + \frac{M^2}{\gamma} \left[ 1 - \frac{2\gamma M^2}{\epsilon + \gamma M^2} \right] \frac{d\gamma}{dM^2} - \left[ \frac{M^2}{MW} \frac{dMW}{dM^2} + \frac{2M^2}{1+f} \frac{df}{dM^2} \right] - \left[ \frac{M}{(1+\gamma_2 M_2^2) - (1-\epsilon)p_3/p_2 - f_1^*} \right]^2 \frac{df_1^{*2}}{dM^2} \right\} \frac{dM^2}{M^2} \quad (20)$$

Considerando-se as variações de  $\gamma$ ,  $MW$ ,  $f_1^{*2}$  e  $f$  como desprezíveis (aliás é interessante notar que o sinal negativo desta última corresponde ao efeito de apenas adição de massa no escoamento, efeito que sabidamente reduz a temperatura de estagnação), tem-se então o resultado obtido por Billig [5]:

$$\frac{dT_T}{T_T} = \left\{ \frac{\epsilon [1 + (\gamma-1)M^2] - \gamma M^2}{[1 + (\frac{\gamma-1}{2})M^2](\epsilon + \gamma M^2)} \right\} \frac{dM^2}{M^2} \quad (21)$$

aplicando-se a condição (16) obtém-se

$$M_4 = \left[ \frac{\epsilon}{\epsilon + \gamma_4(1-\epsilon)} \right]^{1/2} \quad (22)$$

ou

$$\epsilon = \gamma_4 M_4^2 / [1 + (\gamma-1)M_4^2] \quad (23)$$

Este resultado é análogo ao "ponto de entupimento" nos processos de aquecimento de Rayleigh e de atrito de Fanno [1]. Waltrup [6] chama esta condição de limite de entropia.

Vale notar que (22) e (23), ao contrário do que propõe Billig [1], são obtidos sem quaisquer outras restrições quando apenas se impõe o vínculo da relação (17).

Finalmente é simples a obtenção de (22) e (23) partindo-se apenas do vínculo (17):

Da equação (5)

$$\left. \frac{\partial p}{\partial A} \right|_{\epsilon=\text{const}} = - \frac{\epsilon}{\epsilon-1} p_2 A_2^{\epsilon/\epsilon-1} \left( \frac{p_3}{p_2} \right) A_4^{(1-2\epsilon)/(\epsilon-1)} \quad (24)$$

por outro lado, é fácil mostrar que, em condições de isentropia,

$$\left. \left( \frac{\partial p}{\partial A} \right)_{\text{isent}} = - \frac{p_4}{A_4} \left( \frac{p_4}{p_4} \right)^{2/\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p_4}{p_4} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \cdot \frac{A^{\gamma+1}}{A_4^{\gamma+1}} \left( \frac{p_4}{p_4} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{\gamma} \left( \frac{p_4}{p_4} \right)^{1/\gamma} \quad (25)$$

e (22) e (23) seguem-se imediatamente ao igualar-se (24) a (25).

Por outro lado embora seja perfeitamente aceitável tomar-se  $\partial\gamma/\partial M^2$ ,  $\partial MW/\partial M^2$ ,  $\partial f/\partial M^2$  e  $\partial f_1^*/\partial M^2$  tendendo a zero quando  $A \rightarrow A_4$ , só assim o vínculo (16) estará contido no vínculo (17), que, de per se, fornece (22) ou (23).

Assim (16) com as simplificações acima mencionadas e (17) são totalmente equivalentes, ambas conduzindo ao mesmo resultado (Equações 22 ou 23) que, substituído em (18) fornece:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon + \gamma_4(1-\epsilon)} = \frac{p_2}{p_3} \left( \gamma_4 + \frac{\gamma_2}{\gamma_4} M_2^2 \right) - (1-\epsilon)/\gamma_4 + f_1^* \frac{p_2}{p_3} - \frac{\epsilon}{\gamma_4} \quad (26)$$

Obter-se-á então uma solução única para uma dada quantidade de calor liberada no combustor para a qual também corresponderá um único valor de  $p_2/p_3$ .

### CONCLUSÕES

Assim é possível a determinação e otimização da dinâmica dos combustores supersônicos. Dentre os muitos aspectos que ainda não foram analisados encontram-se as possíveis variações temporais do fenômeno estudado, bem como de perturbações que simulem condições de voo real.

Aqui verificou-se a existência de um vínculo forte não mencionado na literatura (Equação 10) que limita o campo de soluções possíveis e mostrou-se que as aproximações normalmente sugeridas [5] para a obtenção das relações (22) e (23) não se fazem necessárias quando se utiliza apenas o vínculo imposto pela relação (17).

O objetivo deste trabalho foi o de analisar e identificar apenas alguns aspectos do combustor de um estado-reator a combustão supersônica e apresenta um problema atual no qual necessidades e oportunidades de pesquisa existem em todos os componentes deste sistema de propulsão que poderá em breve ser utilizado para impulsar veículos espaciais e aeronaves hipersônicas.

### REFERÊNCIAS

- [1] Billig, F.S. - "Combustion Processes in Supersonic Flow". *J. of Propulsion and Power*, 4 (3): 209-216 (1988).
- [2] Waltrup, P.J. - "Liquid-Fueled Supersonic Combustion Ramjets: A Research Perspective". *J. of Propulsion and Power*, 3 (6): 515-524 (1987).
- [3] Ferri, A. - "Supersonic Combustion Progress". *Aeronautics and Astronautics*, 2 (8): 32-37 (1964).
- [4] Gordon, S. and McBride, B.J. - "Computer Program for Calculations of Complex Chemical Equilibrium Compositions, Rocket Performance Incident and Reflected Shocks and Chapman Jouguet Detonations", NASA SP-273 (1971).

[5] Billig, F.S. "Design of Supersonic Combustors based on pressure - Area fields". Eleventh Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, Pittsburg, Pa, pp:755-769 (1967).

[6] Waltrup, P.J., Billig, F.S. and Stockbridge, R.D. - "A procedure for Optimizing the Design of Scramjet Engines" J. of Spacecraft and Rockets, 16 (3): 163-171 (1979).

ABSTRACT

The possible use of supersonic combustion ramjets (scramjets) as an efficient propulsion means for hypersonic flight has been known for several decades. A recent survey on the state-of-the-art points out several subjects in the development of scramjets that need special care thus showing areas where the R&D opportunities are obvious and urgent. In particular this is the case of the Supersonic Combustor. This work deals with some aspects of its optimization.





ESTABILIZAÇÃO DA CHAMA EM ESTADO-READORES DE COMBUSTOR DUPLO (DCR)

WALTER GILL, JOÃO A. CARVALHO JR.,  
 JERÔNIMO S. TRAVELHO, HERALDO S. COUTO,  
 DEMÉTRIO BASTOS NETTO  
 Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE

RESUMO

O desenvolvimento de veículos hipersônicos aponta os estado-reatores a combustão supersônica ("scramjets") como os sistemas de maior potencial para o avião aeroespacial. Tais ciclos permitem operação numa faixa mais ampla de número de Mach de vôo do que qualquer outro com alimentação a ar. Um deles, o estado-reator de combustor duplo (DCR) oferece as vantagens da combustão supersônica e combustão subsônica. Este trabalho investiga a estabilização da chama em DCR, a liberação da energia nos tempos de residência disponíveis em vôo hipersônico e sua interação com o processo de combustão.

1. INTRODUÇÃO

Estre os sistemas de propulsão alimentados a ar o estado-reator a combustão supersônica ("scramjet") se afigura como forte candidato para emprego nas aeronaves hipersônicas (o "aerospace plane") e na fase atmosférica do vôo dos veículos espaciais da próxima década.

De fato, embora existam hoje diversas configurações desse sistema, uma delas, a chamada DCR ("Dual Combustor Ramjet"), sem dúvida surge como uma das mais promissoras [1], com a grande vantagem de incorporar às virtudes da combustão supersônica aquelas do estado-reator subsônico, que permitem o emprego de combustíveis não exóticos e dispensam aditivos especiais e o uso de chamas piloto. Assim o DCR amplia a faixa de operação dos "scramjets" permitindo operação eficaz em números de Mach de vôo,  $M_0$ , de 3 a 10 com combustíveis líquidos e de até  $M_0 = 25$  com combustíveis gasosos [1].

O DCR em sua configuração padrão consiste basicamente, como sugerido na Figura 1, numa câmara de pré-combustão (ou "gerador de gases") onde ocorre queima parcial do combustível, em condições de estagnação, com o ar sangrado do escoamento principal. Esta mistura gasosa é então injetada com número de Mach  $\geq 1$  de volta naquele escoamento onde então se

completa a combustão em regime supersônico, passando daí os gases para uma tubeira divergente no modo clássico dos motores à reação.

Entretanto a complexidade deste processo tem conduzido ao emprego de técnicas de volume de controle e ao uso de uma relação de linearidade entre pressão e seção reta de escoamento [2-5] admitindo-se também o escoamento como unidimensional nas fronteiras daquele volume de controle. Tal procedimento, embora elegante e conveniente, nem sempre é satisfatório, pois é fato conhecido que, no combustor supersônico o transporte é turbulento com reação química. Assim parece pertinente este trabalho, que analisa qualitativamente o inter-relacionamento dos diversos fenômenos envolvidos naquele combustor, comparando tempos de mistura, difusão, indução, dissociação e recombinação, bem como da distribuição espacial das espécies lá presentes. Isto ajudará a se avaliar o nível de confiança nas técnicas e simplificações empregadas.

2. DESCRIÇÃO DO FENÔMENO

Como sugerido na Figura 1, o ar ainda em regime supersônico, pois tanto o choque na proa como o trem de choques no duto de alimentação são oblíquos, encontra a mistura sônica (ou supersônica) da câmara de pré combustão (gerador de gases), estabelecendo-se assim não apenas uma camada de cisalhamento (iniciada

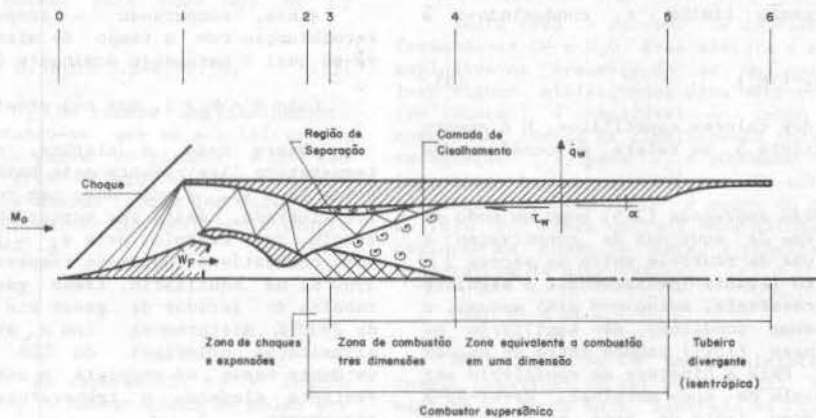


Fig. 1 - Esquema de configuração básica de um estado-reator tipo DCR. ( $\tau_w$  - tensão de cisalhamento na parede,  $\dot{q}_w$  - fluxo de calor na parede).



em 3), mas uma região de separação e uma zona de ondas de choque e expansão (entre 2 e 3). Assim a mistura ocorre em condições de plena turbulência concomitantemente com reações químicas definindo uma zona tridimensional de combustão (seções 3 a 4). Observe-se que a espessura da camada de cisalhamento é apenas função de seu comprimento, sendo seu crescimento linear pelo menos logo após sua formação. Essa camada, uma vez formada, induz o processo essencial de difusão turbulenta que cria a oportunidade para a ocorrência das reações químicas. Vale lembrar que, dependendo das relações entre os diversos tempos característicos, é possível ou não a obtenção do equilíbrio químico nessa região. Usualmente assume-se também que, a seguir, ocorre uma zona onde se obtém equilíbrio químico e que pode ser aproximada como de escoamento unidimensional (seções 4 a 5). Attingido o equilíbrio segue-se (ou não) uma tubeira divergente onde o escoamento pode ser tomado como isentrópico (seções 5 a 6). Naturalmente na seção 5 (saída do combustor/entrada da tubeira) há que se satisfazer as condições [6]:

$$\frac{dT_t}{T_t} \rightarrow 0 \text{ ou } \left(\frac{\partial p}{\partial A}\right)_{\epsilon=\text{const}} = \left(\frac{\partial p}{\partial A}\right)_{\text{isentrópico}} \quad (1)$$

quando  $A \rightarrow A_5$

onde: T - temperatura de estagnação; p - pressão estática; A - seção reta do escoamento e  $\epsilon$  - uma constante arbitrária, definida adiante na próxima seção.

### 3. DISCUSSÃO DO PROBLEMA

Embora o escoamento num combustor supersônico (seções 2 a 5, Figura 1) seja passível de tratamento através da solução das equações de transporte, as condições lá encontradas (turbulência com reação química) tornam o problema longo e complexo mesmo com o emprego de técnicas numéricas sofisticadas e com o uso de máquinas de processamento paralelo ou vetorial. Assim tal fenômeno tem sido alvo de diversas simplificações, uma das quais, hoje clássica, é aquela de se considerar a relação [2]:

$$p_w A^{\epsilon/\epsilon-1} = \text{constante} \quad (2)$$

(onde o subscrito w se refere às condições na parede do combustor e  $\epsilon$  é uma constante arbitrária,  $-\infty \leq \epsilon \leq \infty$ ), como válida não apenas entre as seções 4 e 5 da Figura 1, mas entre o plano de saída do gerador de gases (seção 2, Figura 1) e a saída do combustor (seção 4, Figura 1) [2]. É importante notar que a imposição do vínculo (1) da compatibilização dos gradientes de pressão limita  $\epsilon$ , conduzindo-o à expressão [6]:

$$\epsilon = \gamma_5 M_5^2 / [1 + (\gamma_5 - 1) M_5^2] \quad (3)$$

onde  $\gamma_5$  é a razão dos calores específicos, M o número de Mach e o subscrito 5 se refere às condições na seção 5 da Figura 1.

A equação (2) tem sido empregada [2-6] como um modo de fechamento do sistema de equações de conservação e estado, para o volume de controle entre as seções 2 e 5 da Figura 1. Isto levanta imediatamente a seguinte consideração: se constante, então  $p = p(A)$  apenas, o que a priori assume condições de equilíbrio ou "congelamento" ("frozen flow") também entre as seções 2 e 4 da Figura 1. Para a hipótese de equilíbrio ser aceitável (ainda assim de modo marginal), dever-se-á então ter uma variação lenta de área ao longo do combustor de modo que os tempos de relaxação química e de difusão turbulenta de quantidade de movimento e espécies sejam pequenos em relação ao tempo de residência do escoamento na região, o que implica em

combustores excessivamente longos. Isto por vez leva a perdas maiores de calor através das paredes com a conseqüente (e indesejável) queda de temperatura de estagnação. Isto é, se a distância entre 2 e 4 (Figura 1) for pequena comparada com a distância entre 4 e 5 (Figura 1), então esta última teria de ser excessivamente longa, com as implicações acima mencionadas (mais adiante essas distâncias serão relacionadas com os diversos tempos característicos). Um análise simples do problema de mistura de jatos livre turbulentos sugere que a distância entre 3 e 4 (Figura 1),  $d_{3-4}$ , deverá ser [7]

$$d_{3-4} \geq 5r_4 \quad (4)$$

onde  $r_4$  é o raio do combustor na seção 4 (Figura 1).

Esta distância apenas assegura que a camada de cisalhamento atinge as paredes do combustor, não garantindo absolutamente a unidimensionalidade do escoamento.

### 4. COMPARAÇÃO DE TEMPOS CARACTERÍSTICOS COM E SEM ESTEQUIOMETRIA

Considere-se agora o gás no interior da câmara de pré-combustão (gerador de gás) como tendo razão de equivalência  $\phi_g$ , aqui definida como

$$\phi_g = (\dot{w}_f/\dot{w}_a) / (\dot{w}_f/\dot{w}_a)_{\text{estequiométrica}}$$

(onde  $\dot{w}$  - vazão mássica e os subscritos a e f se referem ao ar e ao combustível, respectivamente). Então:

$$\text{Caso A} - \phi_g \sim 1$$

Neste caso, o combustível e o oxidante já estão na proporção estequiométrica, mas nem toda a energia química foi liberada, devido à alta temperatura da mistura. Por exemplo, para  $M_0 \approx 7.0$ , usando-se hidrogênio como combustível, temperaturas da ordem de 3500°K, ou superiores são obtidas no equilíbrio, no interior do gerador de gases (para  $\phi_g \sim 1$ ).

Esses gases saem do equilíbrio na expansão através da tubeira, indo se misturar já numa temperatura da ordem de 3100°K com a corrente principal de ar que está a cerca de 600°K na região entre 2 e 4 na Figura 1.

Portanto, a mistura desses gases com o ar estará a temperatura bem inferior aos 3100°K, ocasionando a recombinação de espécies e portanto liberação de energia ocasionando aumento desta temperatura.

Assim, comparando o tempo químico para a recombinação com o tempo de mistura com o jato frio, vê-se qual o parâmetro dominante do problema.

$$\text{Caso B} - \phi_g > 1, \text{ mas não próximo de um}$$

Neste caso a mistura, rica, encontra-se à temperatura ligeiramente mais baixa que aquela do caso acima ( $\phi_g \sim 1$ ), e, de novo nem toda a energia química foi liberada, desta vez porque nem todo o combustível reagiu. Por exemplo, para  $\phi_g \sim 1.3$  com  $M_0 \approx 7.0$  e H como combustível obtêm-se temperaturas da ordem de 3300°K, no equilíbrio. Esses gases após expansão na tubeira do gerador de gases até temperatura da ordem de 2900°K misturam-se com o ar a cerca de 600°K da alimentação principal do CDR. Aí a presença do oxidante nesse ar propicia a queima do combustível restante elevando a temperatura de estagnação do escoamento.

Assim, embora ocorram fenômenos distintos nos dois casos, é fundamental a mistura com o jato frio para a liberação do restante da energia química.

Uma vez estabelecida a camada de cisalhamento, o tempo de difusão turbulenta depende da espessura da mesma e da velocidade relativa dos jatos envolvidos. Esta aproximação perfeitamente aceitável no caso da mistura de jatos incompressíveis de mesma densidade [7], será estendida para a presente análise, pois o comportamento quantitativo do problema da mistura de jatos supersônicos ainda é pouco entendido [2].

Assim o tempo característico para difusão turbulenta  $t_{dt}$  é dado por:

$$t_{dt} = \frac{L^2}{D_{dt}} \quad (5)$$

onde L é um comprimento característico transversal à camada de cisalhamento, aqui tomado como sua própria espessura,  $\delta$ , e  $D_{dt}$  é o coeficiente de difusão turbulenta.

$D_{dt}$  pode ser estimado a partir da Analogia de Reynolds [7].

$$D_{dt} = 0.014 \delta V_r \quad (6)$$

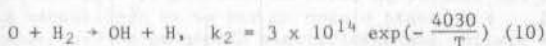
onde  $V_r$  é a velocidade relativa dos jatos.

Assim

$$t_{dt} = \frac{70\delta}{V_r} \quad (7)$$

Como  $\delta$  é função da distância ao longo da camada de cisalhamento,  $t_{dt}$  também é função desta distância.

No caso do emprego de hidrogênio como combustível, assumindo-se um sangramento de ar para o gerador de gases como de 25% da vazão total interceptada pelo DCR e tomando-se  $\phi_g = 2.0$  no interior do gerador de gases, pode-se estimar o tempo característico de reação na fase supersônica (isto é, na camada de cisalhamento),  $t_{ch}$ , escolhendo-se como principais reações



Onde os  $k_i$  ( $i=1,2,3$ ) são as taxas de reação [9], em  $\text{cm}^3/\text{mol}\cdot\text{sec}$  e  $T$  ( $^\circ\text{K}$ ) a temperatura no início da reação. Para um Mach de voo  $M_0 \sim 7.0$ , pode-se estimar [1,2]  $T = 1425^\circ\text{K}$  e  $p = 11.07 \text{ psia}$ .

No gerador de gases, para cada mol de  $H_2$  injetado,



A concentração de  $H_2$  na camada de cisalhamento pode ser estimada lembrando-se que no seu início ela consiste praticamente de gases do gerador e no seu final apenas de ar "frio" (isto é, da corrente principal). Assim toma-se massas iguais dos dois jatos (o que corresponde a um valor que certamente ocorre próximo ao meio da camada).

Assim,

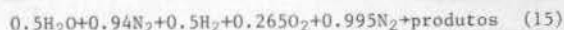
$$[H_2] = X_{H_2} n_T \quad (13)$$

onde  $[E]$  - concentração da espécie E,  $X_E$  - fração molar da espécie E e  $n_T$  - número total de moles por  $\text{cm}^3$ , que, para  $p$  em psia e  $T$  em  $^\circ\text{K}$ , é dado por

$$n_T = \frac{1}{22400} \frac{298}{T} \frac{p}{14.7} \quad (14)$$

ou seja,  $n_T = 7.03 \times 10^{-6} \text{ mol/cm}^3$ , para  $T = 1425^\circ\text{K}$  e  $p = 11.07 \text{ psia}$ , como acima sugerido.

Daf, como a massa molecular do ar é de 28.8 g/mol e como do gerador de gases (Equação 12), tem-se por mol de  $H_2$ , 36.3g. Então, assumidas as massas iguais para os dois jatos, tem-se para o ar  $n_{ar} = 36.3g / (28.8g/mol) = 1.26 \text{ moles}$  de ar na camada de cisalhamento, dos quais 0.265 moles de  $O_2$  e 0.995 moles de  $N_2$ . Assim na camada de cisalhamento,



Daf

$$X_{H_2} = \frac{0.5}{3.20} = 0.156, \quad X_{O_2} = \frac{0.26}{3.20} = 0.083$$

e (13) fornece  $[H_2] = 1.05 \times 10^{-6} \text{ mol/cm}^3$  e, semelhante mente,  $[O_2] = 5.62 \times 10^{-7} \text{ mol/cm}^3$ . Tais concentrações praticamente não variam no início das reações.

As equações (9) a (11) permitem escrever (desprezando-se por simples comparação as reações reversas),

$$\frac{d[H]}{dt} = -k_1[H][O_2] + k_2[O][H_2] + k_3[OH][H_2] \quad (16)$$

$$\frac{d[O]}{dt} = -k_2[H_2][O] + k_1[H][O_2] \quad (17)$$

$$\frac{d[OH]}{dt} = -k_3[OH][H_2] + k_1[H][O_2] + k_2[O][H_2] \quad (18)$$

O sistema acima mostra que as concentrações  $[H]$ ,  $[O]$  e  $[OH]$  tem soluções do tipo  $[E] = [E]_0 e^{\alpha t}$  onde  $[E]_0$  é a concentração da espécie E em  $t = 0$ . Assim, a constante de tempo pode ser facilmente inferida, obtendo-se  $\alpha = 6.6082 \times 10^5 \text{ seg}^{-1}$ .

Como  $t_{ch} = \alpha^{-1}$ ,  $t_{ch} \sim 1.5 \mu\text{sec}$  para o problema em pauta. Note-se que  $t_{ch}$  aumenta com o crescimento de  $[H]$ . Isto porque este radical é consumido na reação  $H + O_2 \rightarrow HO_2$ , que pode ser importante. Entretanto, mesmo assim,  $t_{ch} \sim 10 \mu\text{sec}$ .

Daf, a queima de  $H_2$  em combustores supersônicos não apresenta maiores problemas. O combustível extra queima como uma chama de difusão turbulenta, o que aliás foi verificado por Cookson et al. [10].

Já no caso de hidrocarbonetos ( $C_n H_{2m}$ ) a estabilidade é mais problemática. Aqui novamente dois casos devem ser salientados:

$$\text{Caso A: } 1 < \phi \leq \frac{2n+m}{n+m}$$

Neste caso o excesso de combustível é queimado formando-se CO e  $H_2O$ . Essa mistura é conhecida por ser explosiva na presença do ar. No entanto tal reação leva alguns milissegundos para ocorrer [8]. Este tempo (de indução) é comparável ao tempo de difusão no começo da camada de cisalhamento (como pode ser visto na equação (7), para  $V_r \sim 1000 \text{ msec}^{-1}$  e  $\delta \sim 0.1 \text{ m}$ ). É importante lembrar que o intervalo entre os limites de flamaabilidade para o CO é menor do que aquele para o H [8]. Por esses motivos essa difusão pode ocasionar extinção da chama (e mais, a própria difusão reduz a temperatura da mistura).

$$\text{Caso B: } \phi > \frac{2n+m}{n+m}$$

Aqui, além de CO tem-se hidrocarboneto que não reagiu (passível de ser pirolisado). A combustão dessa mistura é ainda mais demorada do que aquela do caso acima, pois o hidrocarboneto precisa primeiro ser transformado em aldeído para então formar-se o CO que será consumido posteriormente. Nesse caso a

possibilidade de ocorrer extinção aumenta, por um lado devido ao combustível poder se difundir mais ainda e, por outro, porque o intervalo entre os limites de flâmabilidade dos hidrocarbonetos é menor que o do CO [8]. Cookson et al [10], por exemplo, no estudo da queima em jato supersônico não conseguiram queimar metano, tendo tido sucesso apenas com o hidrogênio.

O caso em que  $\phi \approx 1$  não apresenta maiores problemas pois como já mencionado, aí ocorre apenas recombinação.

#### CONCLUSÕES

Assim a importância do tipo de combustível para a validação dos modelos ora empregados na descrição da dinâmica do DCR é fundamental.

Como se viu na análise acima o hidrogênio ocasional chama sempre difusiva, daí a estrutura do escoamento no combustor é sempre tridimensional e turbulenta.

Por outro lado, ao empregar-se um hidrocarboneto como combustível, dependendo do caso, a chama pode ser pré-misturada, o que valida a hipótese de região no combustor onde o modelo unidimensional é aceitável. Por outro lado é neste caso que podem aparecer instabilidades de combustão.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Billig, F.S., Waltrup, P.J. and Stockbridge, R.D., Integral Rocket Dual-Combustion Ramjets: A New Propulsion Concept. *J. of Spacecraft and Rockets*, 17(5):416-424 (1980).
- [2] Waltrup, P.J., Liquid Fueled Supersonic Combustion Ramjets: A Research Perspective. *J. of Propulsion and Power*, 3(6):515-524 (1987).
- [3] Billig, F.S., Design of Supersonic Combustors Based on Pressure - Area Fields. *Eleventh Symposium (International) on Combustion*, The Combustion Institute, Pittsburgh, Pa, 1967, pp.755-769.
- [4] Waltrup, P.J., Billig, F.S. and Stockbridge, R.D., A Procedure for Optimizing the Design of Scramjet Engines. *J. of Spacecraft and Rockets*, 16(3): 163-171 (1979).
- [5] Billig, F.S. and Dugger, G.L. The Interaction of Shock Waves and Heat Addition in the Design of Supersonic Combustors. *Twelfth Symposium (International) on Combustion*, The Combustion Institute, Pittsburgh, PA, 1969, pp. 1125-1139.
- [6] Alves, C.F.E., Sinay, L.R. e Bastos-Netto, D. Dinâmica de Combustores Supersônicos. Trabalho submetido ao ENCIT88, Águas de Lindóia, SP, Dez. 1988.
- [7] Schlichting, H. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill Book Co., N.Y., 1968, 6th Ed., Chapter 24, Sections C-2, p.690.
- [8] Strehlow, R.A. *Combustion Fundamentals*, McGraw-Hill Book Co., N.Y., 1984, 1st Ed., Chapter 6, p.218.
- [9] Slutsky, S., Tamagno, J. and Trentacoste, N. Supersonic Combustion in Premixed Hydrogen-Air Flows, *AIAA Journal*, 3 (9):1599-1605 (1965).
- [10] Cookson, R.A., Flanagan, P. and Penny, G.S. A Study of Free-jet and Enclosed Supersonic Diffusion Flames. *Twelfth Symposium*

(International) on Combustion, The Combustion Institute, Pittsburgh, PA, 1969, pp. 1115-1124.

#### ABSTRACT

The latest developments in supersonic combustion Ramjets (scramjets) suggest that these engines will propel the hypersonic vehicles of the next decade. As a matter of fact, these engines have the advantage of allowing operation over a much wider flight Mach number range than any other airbreathing engine cycles. One of them, the Dual Combustor Ramjet (DCR) seems to be quite promising as this hybrid engine cycle incorporates the best features of the conventional scramjet and the subsonic dump combustor. This work investigates the DCR flame stabilization, its energy release in the available hypersonic flight residence times and its interaction with the flame structure.



SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE MODELO TRANSIENTE DE  
MICRO-PROPULSORES A HIDRAZINA

ABCN

ABCN

SÔNIA M. GOMES\*  
CÉSAR TREVIÑO\*\*

## RESUMO

Neste trabalho estudamos o comportamento transiente de um micro-propulsor a decomposição catalítica da hidrazina. Consideramos um modelo simplificado mediante a hipótese de resposta quasi-estacionária na fase gasosa e tempo de pressurização pequeno em relação à inércia térmica do catalisador. Descrevemos um algoritmo numérico para integrar o sistema de equações diferenciais resultante e apresentamos os resultados para o regime contínuo de operação.

## INTRODUÇÃO

Micro-propulsores a hidrazina são frequentemente utilizados no controle de órbita e atitude de satélites artificiais. O terceiro satélite da Missão Espacial Completa Brasileira, previsto para ser lançado em 1993, utilizará este tipo de propulsão.

A figura 1 mostra um diagrama simplificado de um micro-propulsor. Consiste basicamente de um injetor, um leito fixo carregado com partículas de catalisador e uma tubeira convergente-divergente. As partículas são de alumina porosa impregnada de irídio, que é o catalisador propriamente dito. A hidrazina líquida ( $N_2H_4$ ) é injetada no leito catalítico onde se decompõe gerando uma mistura de gases a alta temperatura que ao acelerar-se através da tubeira dá como resultado o empuxo desejado.

Inicialmente, no controle de órbita, o sistema propulsivo é operado em forma contínua e, posteriormente, no controle de atitude, em forma de pulsos. Daí em tão a necessidade de se ter um modelo transiente. Em [2] apresentamos um modelo simplificado que reflete as principais características do processo e estudamos o caso estacionário. Neste trabalho, apresentamos um algoritmo para integrar numericamente o sistema de equações diferenciais resultantes e mostramos os resultados para o regime transiente contínuo. Este algoritmo está sendo adaptado para o caso de regime pulsado.

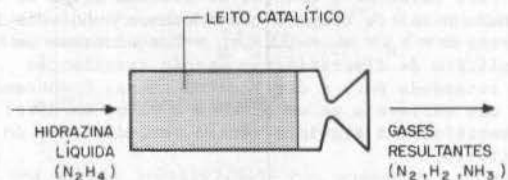


Figura 1. Esquema simplificado de um micro-propulsor.

## O MODELO

Dentro das condições normais de operação, o processo de decomposição catalítica pode ser representado em dois passos. O primeiro é a decomposição exotérmica da hidrazina



Esta reação é tão rápida que a taxa de reação é controlada pela difusão da hidrazina através da camada gasosa que circunda as partículas. O segundo passo é a decomposição da amônia



que é mais lenta e só é importante quando a temperatura do catalisador for suficientemente alta.

Devido à complexidade do processo foi formulado um modelo simplificado que reflete os aspectos mais significativos (cf. [2]). É um modelo unidimensional. São consideradas equações tanto para a fase gasosa quanto para a fase sólida (o catalisador) sendo que a temperatura e a concentração dos gases são assumidas constantes no interior das partículas. O transporte de calor e massa dos interstícios para a superfície do catalisador ocorre por difusão, representado por meio de coeficientes de transferência, sendo contrabalanceado pela taxa de reação catalítica. Não são consideradas difusão axial de calor e massa, decomposição homogênea da hidrazina nem perda de calor através das paredes do reator. Todos os coeficientes de transferência, calores específicos e de reação são considerados constantes. É assumida ainda resposta quasi-estacionária na fase gasosa, tempo de pressurização muito pequeno em relação ao tempo de aquecimento do catalisador e vazão de massa constante.

Na entrada do reator existe uma pequena região onde a hidrazina líquida é vaporizada. O nosso modelo começa onde esta região termina. Assim começamos com uma mistura gasosa a uma temperatura igual a  $T_b$ , a temperatura de vaporização da hidrazina correspondente à pressão do reator. A fração de massa da hidrazina  $Y_b^1$  neste ponto pode ser calculada pela correlação

$$Y_b^1 = 0,87 - 0,0006T_b$$

obtida a partir do balanço global da energia necessária para a vaporização e para elevar a temperatura até  $T_b$ . As frações de massa dos demais componentes são determinadas pela estequiometria da decomposição da hidrazina (a decomposição da amônia ainda não é significativa) (cf. [1]).

As equações resultantes são as seguintes.  
Energia na fase gasosa:

$$G_c \rho \frac{\partial T}{\partial x} = -hA(T - T_s)$$

para  $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$ , onde  $\Delta_{m+1} = r_{m+1} - r_m$ .

$$\psi_{m+1}^s = 0, \quad \psi_{m+1}^p = 0$$

$$\frac{z p}{\psi_{m+1}^p} = \frac{1}{\psi_{m+1}^p} + \frac{1}{\psi_{m+1}^p} + \frac{1}{\psi_{m+1}^p}$$

$$\frac{\Delta_{m+1}}{\psi_{m+1}^p} = \alpha \psi_{m+1}^p - \alpha \psi_{m+1}^p$$

$$\frac{z p}{\psi_{m+1}^p} = -(\psi_{m+1}^p)$$

Para calcular a solução do sistema acima em um determinado nível de tempo  $t$  consideramos subníveis inteiros  $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_M = R$  e adotamos um método implícito de discretização usando aproximação de Euler retardada para a derivada em um nível  $m$  o valor das variáveis em um nível  $m+1$  deve satisfazer a seguinte versão semi-discreta do sistema (1)-(6):

ALGORITMO NUMÉRICO

$$\text{onde } F(\psi^s) = D \exp \left[ \frac{1}{1+\beta\alpha} (1+\beta\alpha) \right]$$

$$\psi^s = \frac{1+\beta\alpha F(\psi^s)}{\psi^s + \beta}$$

conveniente escrever a equação (5) na forma

Observações. 1) Da equação (3) e da condição de contorno, segue-se que  $\psi(z, t) = \exp(-\alpha z)$ . 2)

Zeldovich.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$  são parâmetros adimensionais.  $D \ll 1$  é o número catalítico de Damkohler e  $Z \gg 1$  é o número

$$\psi(0, r) = 0, \psi(0, 1) = 1, \psi(x, 0) = \psi^s(x, 0) = \psi^s_0$$

$$(\psi^s) = D \exp \left[ \frac{1+\beta\alpha}{1+\beta\alpha} (1+\beta\alpha) \right] \psi^s - \psi^s$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -n(\psi - \psi^s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\alpha \psi$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = x \left\{ \psi - \exp \left[ \frac{1+\beta\alpha}{1+\beta\alpha} (1+\beta\alpha) \right] \psi^s \right\} + (\psi - \psi^s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -(\psi - \psi^s)$$

As equações adimensionais correspondentes são

$$Z = \frac{L_c}{\Delta h x} \quad e \quad 1 = \frac{r p_s c_p}{3h} t$$

$$\psi = \frac{r}{L} \quad \psi^s = \frac{r p_s}{p}$$

$$\psi = \frac{17}{32} \frac{k_2}{k_1} \frac{r}{L} \quad \psi^s = \frac{17}{32} \frac{k_2}{k_1} \frac{r}{L}$$

$$\theta = \frac{(T-T_c)(-H)}{L_c p_s c_p}$$

$$\theta_s = \frac{(T_s-T_c)(-H)}{L_c p_s c_p}$$

dimensionais:

É conveniente introduzir as seguintes variáveis

VARIÁVEIS ADMENSIONAIS

$$r_{het}^2 = 10^{-14} p_s^2 \exp(-27778/T^s) \text{ kg/m}^3 \cdot \text{s}$$

Observações. 1) Não é necessário considerar equações para o hidrogênio e nitrogênio pois suas frações de massa podem ser obtidas como combinações lineares das frações de massa da amônia e da hidrazina. 2) Lembrando que a reação catalítica da hidrazina é extremamente rápida, podemos assumir que  $\psi^s = 0$ . 3) A taxa de reação da amônia, segundo [3], pode ser considerada igual a

Nas equações acima  $T$  é temperatura e  $r$  é fração de massa e  $p$  é densidade. O subíndice  $s$  refere-se ao sólido,  $b$  às condições de vaporização e superíndice  $0$  às condições iniciais. Os superíndices  $1$  e  $2$  referem-se à hidrazina e à amônia respectivamente. As constantes  $A, r, c_p, h, k$  e  $H$  denotam a superfície do catalizador por unidade de volume, raio médio das partículas, calor específico, coeficiente de transferência de calor, de massa e calor de reação respectivamente.  $G$  é a vazão de meio da mistura gasosa,  $P$  é a pressão de operação do reator e  $r_{het}$  denota taxa de reação catalítica.  $x$  é a distância axial ao longo do leito catalítico e  $t$  é tempo.

$$T = T^p, \quad \psi_1 = \psi_1^p \quad e \quad \psi_2 = \psi_2^p \quad \text{em } x = 0$$

e as condições de contorno

$$T_s = T^s \quad \text{em } t = 0,$$

mas a condição inicial

$$p = \frac{M}{RT}$$

. Equação de estado:

$$r_{het}^2 = \frac{17}{32} \frac{r_{het}^2}{L} = \frac{1}{3k_2} (r_2 - r_2^s)$$

$$r_{het}^2 = \frac{1}{3k_1} (r_1 - r_1^s)$$

. Interface sólido-gás:

$$G \frac{\partial x}{\partial y^2} = -k_2 A (r_2 - r_2^s)$$

$$G \frac{\partial x}{\partial y^1} = -k_1 A (r_1 - r_1^s)$$

. Concentração dos reagentes na fase gasosa:

$$p_s c_p \frac{\partial t}{\partial t} = - \left[ H_1 r_{het}^1 + H_2 r_{het}^2 \right] + \frac{1}{3h} (T - T^s)$$

. Energia no sólido:



Usamos aqui a notação  $g^m(z) = g(z, \tau^m)$ . Agora consideramos uma rede de pontos equidistantes na variável  $z$ ,  $M = \{0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = z\}$  onde  $z = L/L_c$  e aproximamos as derivadas na variável  $z$  por diferenças finitas da forma

$$\left(\frac{dg}{dz}\right)_j = \frac{g_j - g_{j-1}}{\delta}$$

onde  $\delta = z/N$  (o subíndice  $j$  representa que estamos tomando o valor da função em  $z = z_j$ ). Desta maneira, o nosso problema consiste em determinar  $\theta_j^{m+1}$ ,  $\phi_j^{m+1}$  e  $\psi_j^{m+1}$  para  $m = 1, 2, \dots$  tais que

$$\theta_j^{m+1} (1+\delta) - \theta_{j-1}^{m+1} - \theta_{s_j}^{m+1} = 0$$

$$\phi_j^{m+1} (1+\delta^{m+1}) - \phi_j^{m+1} = \Delta^{m+1} \alpha \phi_j + \phi_{s_j}^m -$$

$$\Delta^{m+1} \left( \frac{\psi_j^{m+1} + \phi_j}{1 + \tau_j^m F(\theta_{s_j}^{m+1})} \right) F(\theta_{s_j}^{m+1})$$

$$\psi_j^{m+1} (1+\mu\delta) - \psi_{j-1}^{m+1} = \delta \mu \frac{\psi_j^{m+1} + \phi_j}{1 + \tau_j^m F(\theta_{s_j}^{m+1})}$$

nas condições de contorno. A segunda das equações acima é válida para  $j \geq 1$  e a primeira e a terceira para  $j \geq 2$ .

Observação. Para usar este algoritmo, e como só temos valores iniciais para  $\theta_s$ , necessitamos inicializar as outras variáveis. Para  $\theta_s = \theta_s^0$  e desprezando a decomposição da amônia ( $F(\theta_s) = 0$ ), a escolha natural é

$$\theta_s = \theta_s^0 [1 - \exp(-z)],$$

$$\psi = \frac{\mu}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha z)] + \psi_b \text{ e } \psi_s = \psi + \phi.$$

Denotamos  $V^m = (v_i^m)_{i=1,2,\dots,3(N+1)}$  o vetor definido por

$$v_{3j} = \psi_j^m, v_{3(j-1)} = \theta_{s_j}^m \text{ e } v_{3(j-2)} = \phi_j^m,$$

$j = 1, 2, \dots, N+1$ . Desta maneira,  $V^{m+1}$  é a solução de um sistema de equações não lineares da forma

$$M V^{m+1} = R(V^m) + H(V^{m+1}). \quad (7)$$

$M$  é uma matriz  $3(N+1) \times 3(N+1)$  com apenas 5 diagonais não identicamente nulas,  $H(V^{m+1})$  corresponde aos termos não lineares que aparecem no segundo membro das equações e  $R(V^m)$  é um vetor que depende apenas de  $V^m$ . Para resolver (7) usamos o método iterativo de Newton: a partir de um valor inicial  $V_0^{m+1}$ , que tomamos igual a  $V^m$ , calculamos  $V_k^{m+1}$  a solução do sistema linear

$$\left[ M - \frac{\partial H}{\partial V} (V_{k-1}^{m+1}) \right] (V_k^{m+1} - V_{k-1}^{m+1}) = R(V^m) - M V_{k-1}^{m+1} + H(V_{k-1}^{m+1})$$

para  $k = 1, 2, \dots$  até que o erro de iteração  $\|V_k^{m+1} - V_{k-1}^{m+1}\|$  seja suficientemente pequeno. Usamos também um critério adaptativo na escolha de  $\Delta^{m+1}$  baseada na convergência do método de Newton no passo  $m$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] Crespo A., Fraga E., Muñoz A. "Steady state behavior of hydrazine catalytic thrusters". Report AFOSR-TR 75-1238. Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial "Esteban Terrados", Madrid, 1975.
- [2] Gomes, S.M., Pavlu, L.C., Treviño, C. "Modelo Transitorio Simplificado de um micro propulsor a hidrazina". 3er Congreso Latinoamericano de Transferencia de Color y Materia. Guanajuato, México, 4-8 de 1988.
- [3] Kesten, A.S. Analytical study of catalytic reactors for hydrazine decomposition. Report NASA E910461-6 1966, F910461-12 1967, G910461-24 1968 e H910461-38 1969.
- [4] Bird, R.B., Stewart W.E. e Lightfoot E.N. "Transport Phenomena". John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

## OS RESULTADOS NUMÉRICOS

Apresentamos a seguir os resultados numéricos obtidos usando a seguinte configuração: o leito catalítico possui um comprimento  $L = 2,5$  cm e todas as partículas são de Shell 405 20-30 mesh; a pressão de operação é 15 bar e a vazão de massa é  $17,5 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{sec}$ ; a temperatura inicial do leito é assumida constante igual a  $400^\circ \text{K}$ .

Os coeficientes de transferência de calor e massa dependem de várias variáveis entre as quais as propriedades dos gases, a geometria do sistema e a velocidade do escoamento. Calculamos  $h$  e  $k$  usando as equações (14) e (13):

$$h = 0.74 (\text{Re})^{-0.41} c_p G \quad \text{J/m}^2 \cdot \text{sec}$$

$$k^i = 0.61 G (\text{Re})^{-0.41} (\text{Sc}^i)^{-2/3} \quad \text{kg/m}^2 \cdot \text{sec},$$

onde  $i = 1, 2$ ,  $\text{Re} = \frac{G}{\mu}$  e  $\text{Sc}^i = \frac{G}{\rho D^i}$ .  $\mu$  é a viscosidade da mistura gasosa e  $D^i$  é o coeficiente de difusão binária do gás  $i$  na mistura gasosa. Nos cálculos usamos valores médios tanto para  $c_p$  quanto para  $\mu$  e  $D^i$ .

As figuras abaixo mostram como a temperatura do sólido, a temperatura do gás e as frações de massa dos componentes evoluem com o tempo.

## COMPORTAMENTO TRANSIENTE DO MICRO REATOR

- - Temperatura na fase gasosa
- - Temperatura no sólido
- - Fração de massa de  $\text{N}_2\text{H}_4$  na fase gasosa
- ◇ - Fração de massa de  $\text{NH}_3$  na fase gasosa

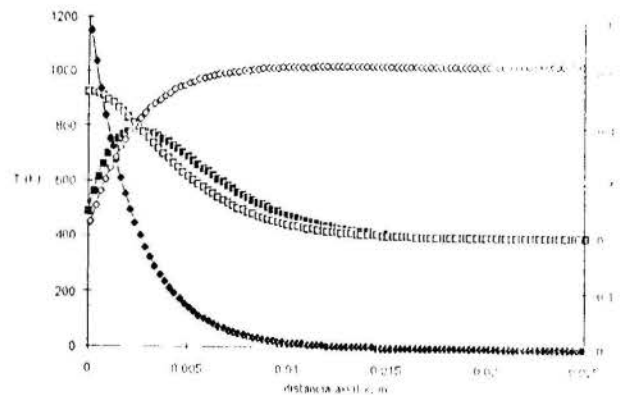


Figura 2 - Tempo = 0.06 segundos

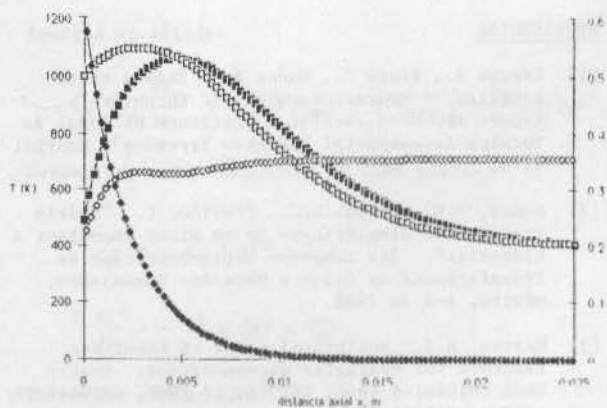


Figura 3 - Tempo = 0.18 segundos

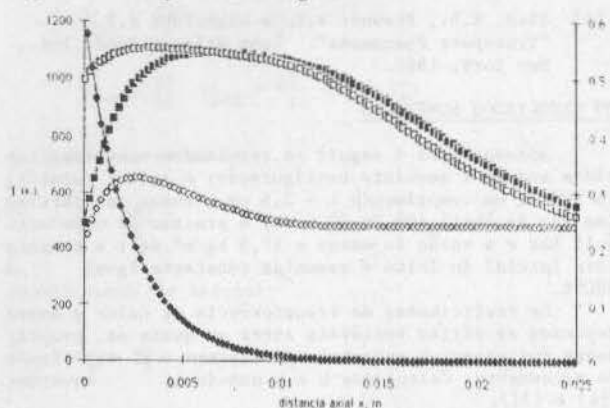


Figura 4 - Tempo = 0.35 segundos

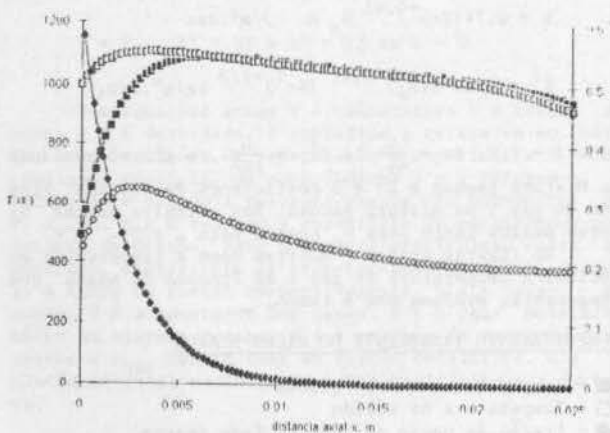


Figura 5 - Tempo = 0.65 segundos

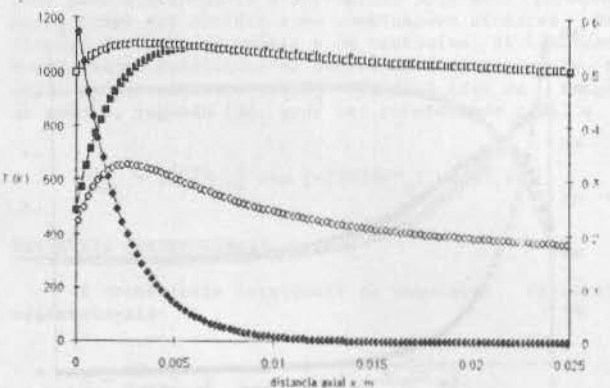


Figura 6 - Tempo = 0.88 segundos

Os resultados refletem bem as hipóteses feitas no modelo. Como podemos observar, a decomposição da hidrazina se concentra no início do reator. O calor liberado por esta reação química na superfície do catalisador faz a temperatura do sólido crescer rapidamente nesta região. Há então um fluxo de calor do sólido para o gás devido a diferença de temperaturas. O gás aquecido, por sua vez, irá aquecer as partículas do catalisador do final do leito onde quase não existe hidrazina se decompondo. A fração de massa da amônia cresce inicialmente devido à decomposição da hidrazina mas depois, quando a temperatura do sólido é suficientemente alta e a decomposição da amônia passa a ser significativa, a fração de amônia começa a decrescer ao longo do leito. Por sua vez, por ser endotérmica, a decomposição catalítica da amônia fará com que a temperatura no sólido diminua. Isto significa que, mesmo aumentando o comprimento do leito, não haveria uma decomposição total da amônia.

#### ABSTRACT

Analytical and numerical studies of catalysed hydrazine decomposition reaction chamber are performed in order to establish procedures capable of predicting the transient behavior of the system in continuous operation.

We base our analysis on a simplified model which takes into account the main aspects of the process.

We develop an implicit finite differences algorithm to integrate the resulting non linear balance equations.

We show the results of calculations for standard bed configuration and operation conditions.

ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL PARA BOCAIS DE TRAÇÃO MÁXIMA



Pedro Paglione  
 Roberto da Mota Girardi  
 IEA, ITA, CTA, S.J. Campos - SP

RESUMO

O método de Rao possibilita a obtenção do contorno de bocais que produzem tração máxima para um dado comprimento. Com base neste método, implementou-se um programa para a determinação do contorno ótimo de bocais, com correção de camada limite. A forma do bocal, a distribuição de pressão e os seus parâmetros de desempenho, calculados teoricamente, foram comparados com os resultados experimentais, obtidos para um bocal com razão de áreas 1025:1, observando-se excelente concordância.

INTRODUÇÃO

A missão espacial completa brasileira (MECB) tem como objetivo principal a fabricação de um satélite e de seu lançador. Uma das partes importantes desta missão é o projeto das tubeias (bocal convergente - divergente) para a utilização no veículo lançador (VLS), bem como na transferência de órbita e controle de atitude do satélite.

Para produzir tração máxima, o bocal ideal deve possibilitar expansão completa dos gases de descarga até a pressão ambiente, com escoamento uniforme e paralelo ao seu eixo na seção de saída.

Operando em altitudes elevadas, o bocal com estas características será por demais comprido e pesado. Para contornar este problema, procura-se projetar um bocal, com comprimento pré-fixado, mais leve, e que produza a tração máxima possível. Para tanto implementou-se um programa que utiliza o método de Rao, [1], para a determinação do contorno ótimo do bocal, considerando fluido ideal em seu interior. Através do cálculo de camada limite, efetuado pelo programa implementado por Rotta [2], obtém-se a espessura de deslocamento que é utilizada para a correção do contorno calculado anteriormente.

Com o objetivo de validação do programa, calculou-se um bocal com razão de áreas 1025:1, e comparou-se os resultados numéricos com os apresentados na referência [3], observando-se ótima concordância.

ANÁLISE TEÓRICA

Para tornar claro o modelo utilizado neste trabalho, vai-se apresentar resumidamente os pontos principais do desenvolvimento teórico e do método de cálculo de um bocal, que fornece tração máxima [1].

**Modelo Teórico:** A tração obtida pela expansão dos gases de descarga no interior de um bocal (vide fig.-1) é dada por

$$T = \int_c^E f_1 dr = \int_c^E [(p - p_a) + \rho V^2 \frac{\sin(\phi - \theta) \cos \theta}{\sin \phi}] 2\pi r dr \quad (1)$$

onde CE é a intersecção da superfície de controle com o plano meridional do bocal,  $\phi(r)$  é a inclinação de CE com relação ao eixo x,  $\theta, V$  e  $\theta$  são respectivamente a densidade, o módulo e a direção do vetor velocidade  $p_a$  é a pressão ambiente e  $p$  a pressão ao longo da superfície de controle.

O fluxo de massa que passa pela superfície de controle é dado por

$$\dot{m} = \int_c^E f_2 dr = \int_c^E \rho V \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin \phi} 2\pi r dr \quad (2)$$

O comprimento, L, do bocal é a soma de  $L_1 = X_C$  que depende da curvatura pré-estabelecida da parede do bocal na região da garganta, com  $L_2 = X_E - X_C$  que é mantida constante no processo de otimização do bocal.

$$X_E - X_C = \int_c^E f_3 dr = \int_c^E \cotg \phi dr \quad (3)$$

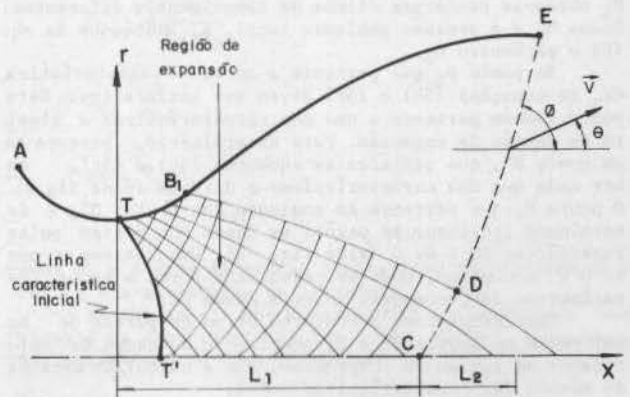


Figura 1 - Localização da linha característica inicial, região de expansão e superfície de controle CE

Tem-se como objetivo, maximizar a tração do bocal (1), tendo como vínculos as equações (2) e (3). Para tanto, monta-se o funcional J

$$J = \int_D^E (f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3) dr \quad (4)$$

onde as constantes  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são os multiplicadores de Lagrange. Da primeira variação do funcional (4) obtém-se as equações.

$$\phi = \theta + \alpha \quad (5a)$$

$$M^* \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} = M_E^* \frac{\cos(\theta_E - \alpha_E)}{\cos \alpha_E} \quad (5b)$$

$$\frac{r}{r_E} M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \sin^2 \theta = M_E^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_E^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \sin^2 \theta_E \cot \alpha_E \quad (5c)$$

ao longo de DE. No ponto E, tem-se que

$$\sin 2\theta_E = \frac{2\left(1 - \frac{p_a}{p_E}\right)}{\gamma M_E^2} \cot \alpha_E \quad (6)$$

onde M é o número de Mach,  $\gamma$  é a razão dos calores específicos e  $\alpha = \arcsin(1/M)$  é ângulo de Mach. A equação (5a) mostra que DE é uma linha característica a esquerda.

**Método de Cálculo.** O primeiro passo é a escolha conveniente da forma da parede do bocal na região da garganta (região transônica), com a finalidade de determinar a linha característica inicial [6].

No presente trabalho a região transônica é calculada através da série de Hall [7], válida para raio de curvatura adimensional ( $\rho = r/R_c$ ,  $R_c =$  raio de curvatura do contorno da região transônica e  $r =$  raio da garganta do bocal) maior que um.

A partir da linha característica inicial, gerada pela série acima, determina-se uma malha de curvas características (região de expansão), como pode ser visto na figura -1.

O próximo passo é a determinação do contorno ótimo B<sub>1</sub>E, que depende da localização do ponto D (vide fig. -1).

O comprimento L<sub>2</sub> é fixado indiretamente através do número de Mach no ponto E, M<sub>E</sub>, já que para cada valor de M<sub>E</sub> obtêm-se contornos ótimos de comprimentos diferentes. Dados M<sub>E</sub> e a pressão ambiente local, p<sub>a</sub>, obtêm-se da eq. (6) o parâmetro  $\theta_E$ .

No ponto D, que pertence a curva característica GE, as equações (5b) e (5c) devem ser satisfeitas. Este ponto também pertence a uma das características a direita da região de expansão. Para determiná-lo, procura-se um ponto D', que satisfaz as equações (5b) e (5c), sobre cada uma das características a direita (vide fig. -2). O ponto D, que pertence ao conjunto dos pontos D', é determinado igualando as vazões em massa que passam pelas superfícies DE e B<sub>1</sub>D (vide fig. -2). Uma vez que o ponto D é conhecido, pode-se calcular a forma e todos os parâmetros de escoamento sobre a curva DE.

Para determinar o contorno ótimo da parede do bocal entre os pontos B<sub>1</sub> e E, precisa-se do campo de velocidades na região de compressão, que é calculado através do método das características [8].

Conhecendo-se os parâmetros do escoamento nos pontos F<sub>1</sub> e G<sub>1</sub> calcula-se H<sub>1</sub>, como mostrada na figura -3. Em seguida, conhecendo-se G<sub>2</sub> e H<sub>1</sub> determina-se os parâmetros do escoamento em H<sub>2</sub> e assim sucessivamente até que a abscissa do ponto H<sub>N</sub> seja menor que o ponto B<sub>1</sub>. Prosseguindo com este esquema obtêm-se a malha de curvas características. A linha de corrente que une os pontos B<sub>1</sub> e E é o contorno do bocal que produz tração máxima, para o comprimento especificado por M<sub>E</sub>. Entretanto, o cálculo acima foi realizado considerando-se escoamento de um fluido ideal (não-viscoso). Para refinar o projeto, faz-se um cálculo da camada limite compressível e turbulenta, pelo método integral, utilizando o programa de J. Rotta [2]. A espessura de deslocamento é adicionada ao contorno do bocal, calculado anteriormente, de modo a levar em conta os efeitos viscosos.

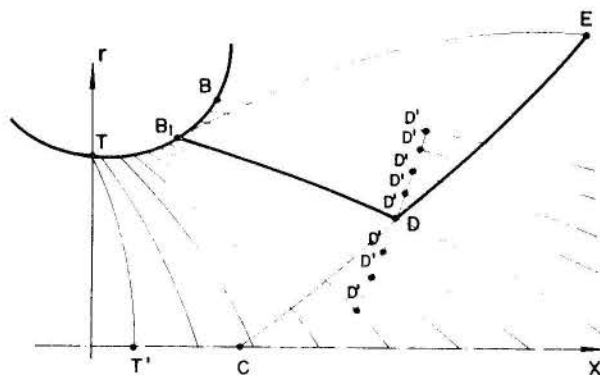


Figura -2: Localização do ponto D' sobre cada curva característica a direita

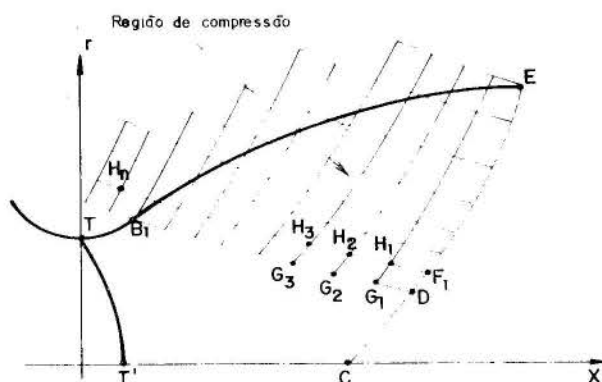


Figura -3: Malha de curvas características na região de compressão

#### ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A qualificação do programa, feito com base na teoria acima, é realizada comparando-se os resultados numéricos com os experimentais.

Na referência [3], utilizando-se o método de Rao, projetou-se um bocal com razão de áreas 10:1, que foi instalado na saída de uma câmara de combustão, onde se faz a reação entre o oxigênio e hidrogênio gasosos. Conhecendo-se as características físicas dos reagentes (tabela -1), através do programa para cálculo do escoamento reativo [12], determina-se as propriedades do gás, constituído pelos produtos da reação, que escoam no interior do bocal. (Vide tabela -2).

Tabela -1: Características físicas dos reagentes

Razão de mistura dos reagentes o/c	3,84
Temp. de injeção do combustível	285,6 K
Pressão de injeção do combustível	3061 KN/m <sup>2</sup>
Temp. de injeção do oxidante	502,5 K
Pressão de injeção do oxidante	2.809 KN/m <sup>2</sup>

Tabela -2: Características físicas dos produtos de combustão e dados geométricos do bocal.

Constante dos gases (R)	866,7
Temperatura dos gases na Câmara de combustão (T <sub>0</sub> )	3 036 K
Pressão dos gases na Câmara de combustão (P <sub>0</sub> )	2 482 KN/m <sup>2</sup>
Razão de calores específicos médio (γ)	1,23
Massa molecular média dos gases (M)	9,59
Raio da garganta (r <sub>g</sub> )	12,7 mm
Razão de áreas	1 022,4

As informações da tabela -2, juntamente com o número de Mach no ponto E, M<sub>E</sub>, e a pressão ambiente local, p<sub>a</sub>, são utilizadas como dados de entrada do programa desenvolvido neste trabalho.

Variando-se M<sub>E</sub>, que determina a razão de áreas e o comprimento L<sub>1</sub>, e a curvatura do contorno na região transônica, que ajusta o comprimento L<sub>1</sub>, obtêm-se, assim, a forma completa do bocal.

Para a razão de áreas de 1022,4, acima obtida, o número de Mach, M<sub>E</sub>, correspondente foi 6,54.

A forma do bocal ensaiado na ref. 3 é comparada com a forma obtida no presente trabalho (vide fig.-4), verificando-se excelente concordância exceto nas proximidades da garganta onde se tem um pequeno desvio, devido a diferenças na forma de cálculo do escoamento na região transônica.

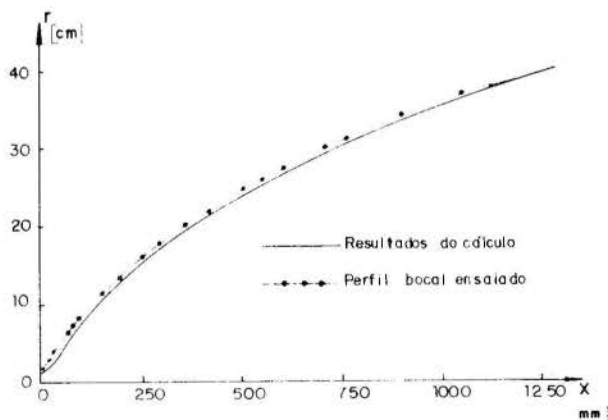


Figura -4: Comparação dos contornos dos bocais de tração máxima calculado e ensaiado, com razões de áreas 1022,4 e 1025 respectivamente.

Na figura -5, observa-se que a distribuição de pressão medida ao longo da parede do bocal está muito próxima da calculada. Os pequenos desvios da região da garganta, são devidos provavelmente a diferença de curvatura entre o bocal ensaiado e o calculado numericamente. Tal diferença não pode ser verificada devido a falta de dados relativos a região transônica do bocal ensaiado.

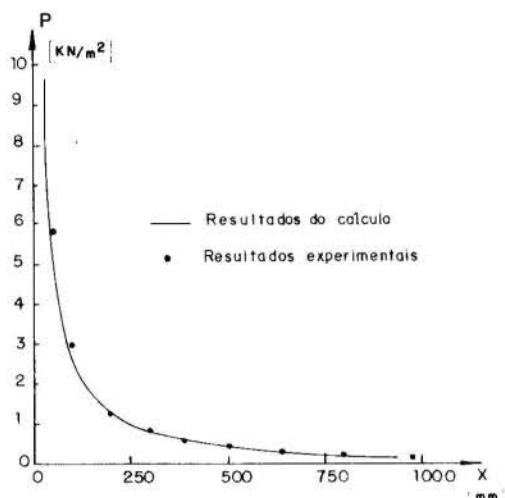


Figura -5: Distribuição da pressão ao longo da parede do bocal

O coeficiente de tração no vácuo C<sub>T,v</sub>, o impulso específico no vácuo, I<sub>v</sub>, e a velocidade característica de exaustão, C\*, são definidos respectivamente por

$$C_{T,v} = \frac{T}{P_0 \cdot A_g}$$

$$I_v = \frac{T}{\dot{m} \cdot g}$$

$$C^* = \frac{P_0 \cdot A_g}{\dot{m}}$$

onde A<sub>g</sub> é a área da seção transversal na garganta do bocal e g é a aceleração da gravidade.

Na tabela -3 são apresentados os resultados numéricos e os experimentais, bem como o desvio percentual dos parâmetros de desempenho do bocal.

Tabela -3:

	Resultado Numérico	Resultado Experimental	Desvio Percentual
Tração, T N	2 525	2 422	4,1
Vazão em massa $\dot{m}$ Kg/s	0,5105	0,5266	10,9
Coef. de Tração no vácuo, C <sub>T,v</sub>	2,000	1,917	4,2
Impulso específico no vácuo I <sub>v</sub> s	504,4	468,9	7,0
Veloc. característica de exaustão C* m/s	2 264	2 424	1,6



## CONCLUSÕES

Os resultados numéricos obtidos neste trabalho foram comparados com os resultados experimentais, mostrando uma boa concordância.

Os desvios da forma calculada, e da distribuição de pressão, próxima da região da garganta, são devidos a falta de especificação precisa da região transônica do bocal ensaiado (principalmente o raio de curvatura do mesmo).

No presente trabalho o campo de escoamento na região transônica é calculado usando-se a série de Hall, que é válida somente para casos onde o raio de curvatura adimensionalizado é maior que um. O desvio observado na figura -4 indica que o bocal ensaiado foi projetado com raio de curvatura menor que um. Neste caso, o escoamento na região transônica deve ser analisado, por exemplo, através da série de Kliegel & Levine [10], a qual está sendo implementado no programa desenvolvido neste trabalho.

Os parâmetros de desempenho do bocal, calculados numericamente concordam bem com os resultados experimentais (vide tabela -3). Deve-se lembrar que o modelo utilizado considera escoamento de fluido ideal, porém, no interior do bocal ensaiado o escoamento é reativo, sendo esta a causa principal dos desvios apresentados na tabela -3.

O próximo passo para a melhoria dos resultados é a implementação de um modelo de escoamento reativo, atualmente em curso.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Rao, C.V.R., Exhaust Nozzle Contour for Optimum Thrust, Jet Propulsion, June, 1958, pp. 377-382
- [2] Rotta, J.C., Fortran IV, Rechenprogramm für Grenzschichten bei kompressiblen ebenen und achsensymmetrischen Strömungen, DLR FB 71-51, Göttingen, 1971
- [3] Pavli, A.J., Kacynski, K.J. & Smith, T.A., Experimental Thrust Performance of a High-Area-Ratio Rocket Nozzle, NASA-TP 2720, 1987
- [4] Kacynski, K.J., Pavli, A.J. & Smith, T.A., Experimental Evaluation of Heat Transfer on a 1030:1 Area-Ratio Rocket Nozzle, NASA TP-2726, 1987
- [5] Smith, T.A., Pavli, A.J. & Kacynski, K.J., Comparison of theoretical and Experimental Thrust Performance of a 1030:1 Area Ratio Rocket Nozzle at a Chamber Pressure of 2413 KN/m<sup>2</sup> (350 psia), NASA TP-2725, 1987
- [6] Grümmer, K., Ein Rechenprogram für den Entwurf ebenen und rotationssymmetrischen Überschallwind Kanaldüsen, DLR-FB, Köln, B.R. Deutschland, 1976
- [7] Hall, I.M., Transonic Flow in Two-Dimensional and Axially-Symmetric Nozzles, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol. XV, 1962
- [8] Shapiro, A.H., The Dynamic and thermodynamics of Compressible Fluid Flow, The Ronald Press Company, New York, 1954, Vol. I e II
- [9] Sauer, R., General Characteristics of the Flow Through Nozzles at Near Critical Speeds, NASA TM-1147, 1947
- [10] Kliegel, J.R. & Levine, J.N., Transonic Flow in Small Throat Radius of Curvature Nozzles, AIAA Journal, Vol. 7, n<sup>o</sup> 7, 1969
- [11] Miele, A., Theory of Optimum Aerodynamic Shapes, Academic Press, U.S.A., 1965
- [12] Gordon, S. & McBride, B.J., Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium

Compositions, Rocket Performance, Incident and Reflected Shocks, and Chapman-Jouguet Detonation. NASA SP-273, 1976

## ABSTRACT

With a given length, the maximum thrust nozzle contour can be obtained by the Rao method. A computer program was implemented for determining the optimum nozzle contour, with boundary layer corrections, using this method.

The bocal shape, the pressure distribution and performance parameter theoretically calculated were compared with experimental results, for a 1025:1 area ratio nozzle [3], with excellent agreement.

INFLUÊNCIA DAS SÉRIES DE SAUER, HALL E KLIEGEL & LEVINE  
SOBRE BOCAIS DE EMPUXO MÁXIMO




GORDIANO DE FARIA ALVIM FILHO  
PEDRO PAGLIONE  
LUÍS FERNANDO FIGUEIRA DA SILVA  
DIVISÃO DE ENGENHARIA AERONÁUTICA - ITA  
SÃO JOSÉ DOS CAMPOS - SP

RESUMO

Neste trabalho investiga-se as diversas faixas de validade da utilização das séries de Sauer, Hall e Kliegel & Levine, na determinação de bocais que produzem empuxo máximo. Compara-se os níveis de empuxo obtidos através da utilização destas séries. É interessante observar que a maioria dos bocais são projetados utilizando-se a série de Sauer, a qual somente seria válida numa faixa relativamente estreita de raios de curvatura. Verifica-se que a série de Hall possui uma limitação análoga, enquanto que a série de Kliegel & Levine possibilita o projeto de bocais com pequenos raios de curvatura na garganta.

INTRODUÇÃO

O estudo do escoamento através de uma tubeira (bocal convergente-divergente com simetria axial), componente do motor foguete, é de importância fundamental para a obtenção dos valores máximos de desempenho (empuxo e impulso específico).

Neste motor é importante, por questão de peso, fixar o comprimento da tubeira. Na tubeira ocorrem escoamentos subsônico, transônico e supersônico nas regiões do convergente, da garganta e do divergente, respectivamente, sendo que os escoamentos subsônico e supersônico são descritos por equações elípticas e hiperbólicas respectivamente. Com o comprimento fixado, para encontrar os valores máximos do desempenho, adota-se o método numérico das características para descrever o escoamento supersônico [1].

Apenas o escoamento transônico influencia o escoamento supersônico [1], a qual é exercida na localização da linha inicial do método das características.

O objetivo é apresentar a influência das soluções de Sauer [2], Hall [3] e Kliegel & Levine [4] (normalmente aplicáveis ao escoamento transônico) sobre configuração de bocais de empuxo máximo, bem como um estudo sobre os limites de aplicabilidade destas séries.

A primeira solução deste escoamento foi proposta por Sauer, baseado numa série de potência da coordenada radial ( $y$ ) para função potencial ( $\phi$ ). Apesar de ser antiga, esta solução ainda é utilizada para o cálculo do escoamento transônico.

Hall propôs uma série cujas velocidades de perturbação são representadas por potências do inverso do raio de curvatura (adimensional:  $R = \rho_t / Y_t$ ;  $\rho_t$  = raio de curvatura da garganta;  $Y_t$  = raio da garganta).

Ambos os autores foram bem claros quanto à aplicabilidade de suas soluções, apenas em grandes raios de curvatura, onde a hipótese de pequenas perturbações é válida.

Preocupados com a resolução do escoamento para pequenos raios de curvatura, Kliegel & Levine propuseram uma solução baseada numa transformação da série de Hall, onde as velocidades de perturbação são expandidas em função de  $1/(R+1)$ . Obtiveram, assim, uma solução que não diverge para raios de curvatura menores que a unidade.

Frenchel [5] expõe uma dedução para ambas as séries de Hall e Kliegel & Levine, apresentando várias linhas características do escoamento - velocidade constante, ângulo nulo e linha do plano da garganta.

Alvim, Girardi & Paglione [6] implementaram o método de otimização de empuxo em tuberias, que utiliza a série de Hall, para obtenção da linha inicial do método das características.

O objetivo deste trabalho foi alcançado através das seguintes etapas:

a) Para diversos raios de curvatura foram traçadas as linhas de números de Mach constantes dadas para cada uma das séries.

b) O empuxo correspondente a cada um destes casos mencionados em (a) foi calculado visando obter parâmetros que pudessem ser úteis na análise dos limites de aplicabilidade das séries.

EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO

Admitir-se-á que o escoamento através do bocal seja estacionário isentrópico, axialmente simétrico, irrotacional e de um fluido considerado gás perfeito. De acordo com as referências [2], [3] e [5] as equações que descrevem estes escoamentos são as seguintes:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (1-u^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v^2) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4}{\gamma+1} uv \frac{\partial u}{\partial y} + \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (u^2 - v^2) \right] \frac{\partial v}{\partial y} + \\ + (1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v^2) \frac{v}{y} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

onde:  $\gamma$  é a razão entre calores específicos ( $C_p/C_v$ ),  $u$  e  $v$  são componentes adimensionais da velocidade do fluido ( $w$ ) nas direções adimensionais,  $x$  (direção axial) e  $y$  (direção radial, respectivamente).

As velocidades são adimensionalizadas dividindo-as pela velocidade do som onde o número de Mach é igual a 1 e as coordenadas pelo valor do raio da garganta do bocal ( $y_g$ ).

Aplicando este sistema de equações ao escoamento transônico que ocorre na garganta (e na sua vizinhança) do bocal pode-se encontrar a solução do mesmo impondo-se o perfil da tubeira (bocal) nesta região e fazendo as hipóteses adequadas para as condições de contorno.

Este procedimento é encontrado nas referências [2], [3] e [5] o qual será aqui reproduzido de forma bastante condensada:

- Perfil da tubeira na região transônica:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} x^2 + \dots$$

onde o subscrito  $\omega$  indica parede da tubeira e  $\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = \frac{1}{R}$ , razão entre os raios de curvatura e do interior da tubeira (bocal) na seção  $x=0$  (garganta).

- Condições de Contorno:

a) A velocidade ( $\tilde{w}$ ) do fluido é tangente ao perfil do bocal;

b) A componente radial ( $v$ ) da velocidade, no eixo de simetria, é zero.

As soluções do sistema de equações dadas por Hall [3] são obtidos expandindo  $u(z,y)$  e  $v(z,y)$  em séries de  $\frac{1}{R}$  e aplicando as condições de contorno

$$u(z,y) = 1 + \frac{u_1(z,y)}{R} + \frac{u_2(z,y)}{R^2} + \dots \quad (3)$$

$$v(z,y) = \left[ \frac{y+1}{2R} \right]^{1/2} \left[ \frac{v_1(z,y)}{R} + \frac{v_2(z,y)}{R^2} + \frac{v_3(z,y)}{R^3} + \dots \right] \quad (4)$$

onde a variável  $x$  do sistema original foi substituída pela variável  $z$  através da seguinte expressão

$$x = \left[ \frac{y+1}{2R} \right]^{1/2} z \quad (5)$$

Esta mudança de variável é apenas para tornar mais simples as expressões finais das soluções.

Substituindo os componentes  $u(z,y)$  e  $v(z,y)$  na expressão da velocidade de fluido

$$w = \sqrt{u^2(z,y) + v^2(z,y)} \quad (6)$$

e aplicando as condições de contorno [5], obtêm-se:

$$w = 1 + \frac{w_1(z,y)}{R} + \frac{w_2(z,y)}{R^2} + \frac{w_3(z,y)}{R^3} + \dots \quad (7)$$

$$\text{onde: } w_1(z,y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{4} + z \quad (7.a)$$

$$w_2(z,y) = \frac{2y+9}{24} y^4 - \frac{4y+3}{24} y^2 + \frac{10y+57}{288} + (y^2 - \frac{5}{8}) z - (\frac{2y-3}{6}) z^2 \quad (7.b)$$

$$w_3(z,y) = \left( \frac{5y^2+1899y+3231}{10368} \right) y^6 - \left( \frac{388y^2+1233+1953}{2304} \right) y^4 + \left( \frac{304y^2+858+1269}{1728} \right) y^2 - \left( \frac{2708y^2+7839y+14211}{82944} \right) + \left( \frac{52y^2+99y+375}{384} \right) y^4 - \frac{52y^2+99y+303}{192} y^2 + \frac{92y^2+180y+639}{1152} z + \left( -\frac{5y-5}{8} y^2 + \frac{13y-27}{48} \right) z^2 + \left( \frac{4y^2-57y+27}{144} \right) z^3 \quad (7.c)$$

Considerando apenas o 1º termo da série de Hall tem-se uma solução igual aquela de Sauer [2].

Em virtude das soluções de Hall e de Sauer divergem quando  $R$  é próximo ou menor do que um, surgiram soluções alternativas. Entre estas, destaca-se a de Kliegel, que expande as componentes de velocidade  $u(z,y)$  e  $v(z,y)$  em séries de  $\frac{1}{R+1}$ , ou seja:

$$u(z,y) = 1 + \frac{u_1(z,y)}{(R+1)} + \frac{u_2(z,y)}{(R+1)^2} + \frac{u_3(z,y)}{(R+1)^3} + \dots \quad (8)$$

$$v(z,y) = \left( \frac{y+1}{2(R+1)} \right)^{1/2} \left[ \frac{v_1(z,y)}{1+R} + \frac{v_2(z,y)}{(1+R)^2} + \frac{v_3(z,y)}{(1+R)^3} + \dots \right]$$

Analogamente ao procedimento anterior deve-se utilizar as condições de contorno para encontrar os valores de  $u_1(z,y)$ ,  $u_2(z,y)$ , ... e da velocidade do fluido dada pela equação (6).

$$W(z,y) = 1 + \frac{W_1(z,y)}{1+R} + \frac{W_2(z,y)}{(1+R)^2} + \frac{W_3(z,y)}{(1+R)^3} \quad (10)$$

$$\text{onde: } W_1 = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{4} + z \quad (10.a)$$

$$W_2 = \frac{2y+9}{24} y^4 - \frac{4y+3}{24} y^2 + \frac{10y+57}{288} + (y^2 + \frac{3}{8}) z - (\frac{2y-3}{6}) z^2 \quad (10.b)$$

$$W_3 = \left( \frac{5y^2+1899y+3231}{10368} \right) y^6 - \left( \frac{388y^2+1233+1953}{2304} \right) y^4 + \left[ \frac{304y^2+858+1269}{1728} \right] y^2 - \frac{2708y^2+7839y+14211}{82944} + \left( \frac{52y^2+99y+375}{384} \right) y^4 - \frac{52y^2+99y+303}{192} y^2 + \frac{92y^2+180y+639}{1152} z + \left( -\frac{5y-5}{8} y^2 - \frac{19y-21}{48} \right) z^2 + \left( \frac{4y^2-57y+27}{144} \right) z^3 \quad (10.c)$$

Para obtenção da característica inicial desejada é necessário encontrar a linha de número de Mach constante na fronteira entre os escoamentos transônico e supersônico a partir das soluções do sistema de equações aplicando a região transônica (equações 7 a 10). A fronteira mencionada é obtida por tentativa, admitindo-se diversos números de Mach, calculando-se as linhas de Mach constante a partir das quais obtêm-se valores do empuxo que são comparados com seus valores obtidos experimentalmente.

As linhas de Mach constantes são as mesmas que aquelas de  $W(z,y) = \text{constante}$ . Esta afirmativa pode ser mostrada analisando as hipóteses sobre o escoamento até o presente. O fato do escoamento ser isentrópico conduz a considerar a entalpia de estagnação constante.

$$H_t = H + \frac{W^2(z,y)}{2} = \text{constante}$$

A condição do fluido em escoamento comportar-se como gás perfeito implica que  $H = H(T)$ . Neste caso, fixando o valor de  $W(z,y)$ , e sendo  $H_t = \text{constante}$ , constante. Por definição, o número de Mach é  $M = W/a_{som}$ , onde  $a_{som} = (\gamma RT)^{1/2}$ . Desta forma,  $W(z,y) = \text{constante}$  é também uma linha de Mach constante.

Em resumo,

$$W(z,y) = \text{constante}$$

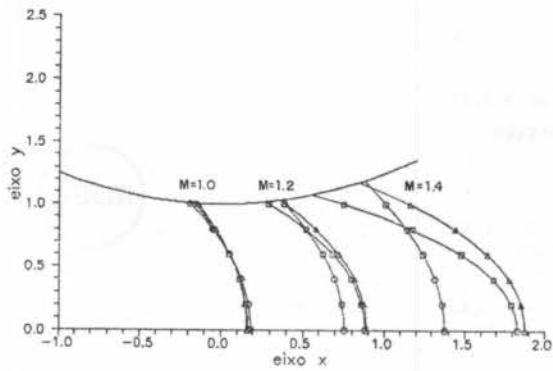
conduz a equação  $y=y(z)$  que é a equação correspondente a linha de número de Mach constante. As equações 7 e 10 possibilitam encontrar as linhas de número de Mach constante.

## RESULTADOS

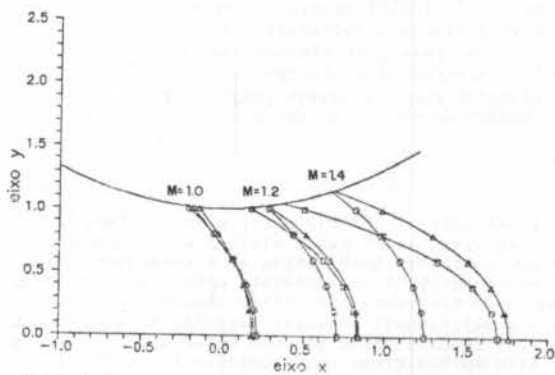
Utilizando-se as equações (7) e (10), foi possível traçar os gráficos de número de Mach constante em função do raio de curvatura, para diversos números de Mach.

Considerando o gráfico 1a, observa-se que para número de Mach até 1, a utilização das três séries apresenta pouca diferença. A medida que  $R$  diminui, a tendência é aumentar a diferença entre as soluções. Para  $R=0,5$  as três séries apresentam comportamentos bem distintos, sendo que em virtude das divergências as séries de Sauer e Hall não podem ser consideradas como solução do problema.

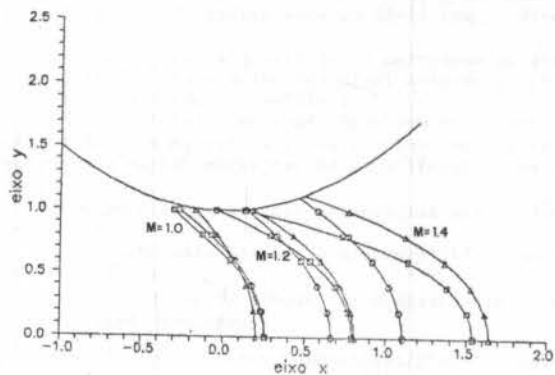
Nos gráficos anexo, quando se fez a variação do Mach para as diversas séries, pretendeu-se mostrar a relevância do correto posicionamento da fronteira entre o escoamento transônico e supersônico. Um estudo teórico e experimental desta localização será objeto de futuros trabalhos.



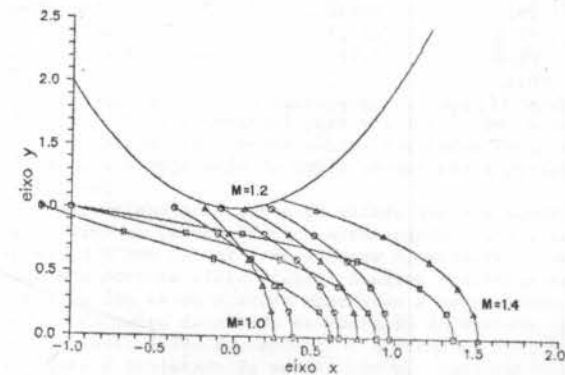
a)  $R=2,0$



b)  $R=1,5$



c)  $R=1,0$



d)  $R=0,5$

Figura 1. Linhas de Mach constante em função do raio da curvatura ( $R=R_c/y_g$ ).

o Sauer  
 □ Hall  
 Δ Kliegel & Levine

Enfatizando a importância deste aspecto, foi feito um gráfico do empuxo máximo em função do raio de curvatura. O MACH escolhido arbitrariamente para a linha de valor inicial é aquele da parede da garganta.

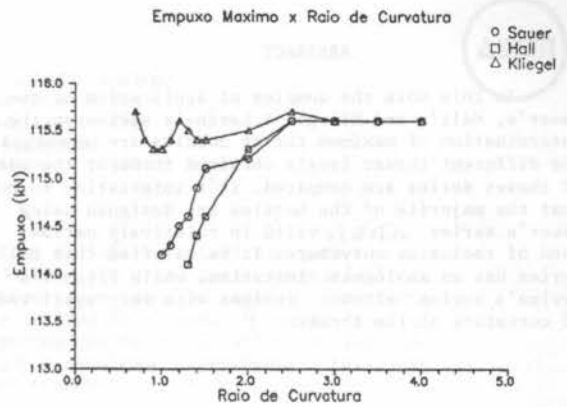


Figura 2. Empuxo máximo em função do raio de curvatura

Os resultados acima foram obtidos com os seguintes valores de grandezas típicas de um motor foguete a propulente sólido:  $\gamma=1,18$ ,  $M_g=26,6$  kg/Kmol,  $y_g=60,0$  mm,  $P_c=6,0$  MPa,  $P_o=0$  Pa e  $T_c=3250$  K. Obtendo a tubeira com as dimensões:  $X_e=307,6$  mm;  $y_e=201,9$  mm.

Foi verificado que as oscilações encontradas no valor do empuxo máximo (fig. 2) devem-se apenas a problemas numéricos (interpolações e tolerâncias).

Os diferentes valores de  $F_{m\acute{a}x}$  revelam a importância de localização exata da fronteira dos escoamentos transônico e supersônico.

Deve ser ressaltado que nenhum destes valores podem ser considerados representativos de um resultado real em virtude de não se ter trabalhos experimentais que permitam esta afirmação.

#### CONCLUSÃO

Considerando o número de Mach na parede da garganta como aquele que corresponde a intersecção entre os escoamentos transônico e supersônico, verifica-se que os valores dos empuxos (Fig. 2) variam significativamente para raios de curvaturas entre 1,0 a 2,5, dependendo da série utilizada para descrever o escoamento transônico. Este fato mostra a relevância da localização exata da fronteira entre escoamentos transônico e supersônico.

A partir de raio de curvatura superior a 2,5 (fig. 2) os valores dos empuxos não são influenciados pela série utilizada (fig. 2).

#### REFERÊNCIAS

- [1] Rao, G.V.R., Exhaust nozzle contour for optimum thrust. *Jet Propulsion*, 28, June 1958. pp. 377-382.
- [2] Sauer, R., General characteristics of the flow through nozzles at near critical speeds. *NASA TM 1147*, NACA, 1947.
- [3] Hall, I.M., Transonic flow in two dimensional and axially symmetric nozzle. *Quant.J.Mech and Appl. Math.*, V. XV, pt. 4, 1962, pp. 487-508.
- [4] Kliegel, J.R. & Levine, J.N., Transonic flow in small throat radius of curvature nozzle. *AIAA J. V. 7, nº 7, July 1969, pp. 1375-1378.*
- [5] Frenchel, H., *Escoamento transônico em tuberias*. Tese de M.C., ITA, São José dos Campos, SP, Brasil, 1982.

- [6] Alvim Filho, G.F.; Girardi, R.M. e Paglione, P., Mé todos numéricos para determinação de bocais convergente-divergente para motores a jato e túneis de ventos supersônicos. III Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional. São José dos Campos, SP. INPE, Maio 1987.

ABSTRACT

In this work the domains of application of the Sauer's, Hall's and Kliegel & Levine's series on the determination of maximum thrust nozzles are investigated. The different thrust levels obtained through the usage of these series are compared. It's interesting to note that the majority of the nozzles are designed using Sauer's series, which is valid in relatively narrow band of radius or curvature. It is verified that Hall's series has an analogous limitation, while Kliegel & Levine's series allows designs with very small radius of curvature at the throat.



ESTUDO DE UM SISTEMA DE INJEÇÃO DIESEL  
OPERANDO COM QUEROSENE DE AVIAÇÃO

ABCm

ABCm

MARIA CRISTINA VILELA SALGADO BARBOSA  
MARCO AURÉLIO DA CUNHA ALVES  
Divisão de Mecânica-CTA/IPD  
ALEX GUIMARÃES AZEVEDO  
Departamento de Aerodinâmica - ITA

## SUMÁRIO

Um estudo teórico-experimental em um sistema de injeção Diesel operando com querosene de aviação (QAV-1) foi desenvolvido tendo em vista o uso deste combustível como uma alternativa à gasolina de aviação. Utilizou-se um banco de ensaios instrumentado para medidas de pressão estática na linha de injeção do sistema. O modelo analítico, considerando a influência de fatores como propagação de ondas, atrito no duto de cavitação, apresentou concordância suficiente com o resultado experimental, tal que permite a sua aplicação na estimativa da pressão residual.

## INTRODUÇÃO

A gasolina de aviação 100/130, utilizada nas aeronaves com motores a pistão, tem um processo de obtenção bem elaborado e de grande complexidade tecnológica. Isto torna seu custo elevado e muito dispendioso para a aviação de pequeno porte, que compõe-se da aviação de treinamento de pilotos, pequenos transportes e aviação agrícola. Com a baixa demanda deste combustível, não se justifica o investimento em equipamentos para seu processamento nas várias refinarias do país.

A substituição deste combustível pelo querosene de aviação QAV-1 (equivalente ao JP-1) tem diversas vantagens:

- O controle da qualidade do querosene de aviação é bastante rigoroso, possuindo nível aeronáutico, e é utilizado na aviação comercial;
- O QAV-1 tem compatibilidade com os materiais utilizados nos motores a pistão, o que implica em não serem necessárias modificações significativas nos motores;
- O aproveitamento das tecnologias adquiridas nas turbinas;
- O custo mais baixo e a disponibilidade em todos os aeroportos.

Comparando-se os preços dos combustíveis, tem-se os seguintes resultados:

Combustível	Preço combustível/preço 1985	QAV-1 1988
QAV-1	1:1	1:1
AVGAS 100/130	2,2:1	3,68:1
Óleo Diesel	1,1:1	1,29:1
Gasolina automotiva	1,62:1	2,89:1
Alcool		2,0:1

Apesar de todas as vantagens, estudos [1] mostram que o QAV-1 é inviável para utilização em motores a pistão ciclo Otto. Sendo assim os estudos foram dirigidos para a aplicação do QAV-1 em motores a pistão ciclo Diesel.

Este trabalho é parte do estudo que vem sendo desenvolvido no Centro Técnico Aeroespacial (CTA), tendo em vista o uso do QAV-1 em motores alternativos associados a motores ciclo Diesel. Ensaio preliminares efetuados com esses motores mostraram a necessidade de um entendimento detalhado da operação do sistema de injeção Diesel e seu desempenho. O sistema de injeção existente é projetado de acordo com as características do óleo Diesel, e é necessário a determinação dos parâmetros de projeto a serem modificados para a sua adaptação ao querosene de aviação. A pressão de injeção, pulverização do combustível, compatibilização dos materiais do sistema de injeção em contato com o querosene de aviação, vazão de combustível e qualidade de injeção são aspectos que precisam ser analisados. Neste trabalho são apresentados alguns resultados teóricos -

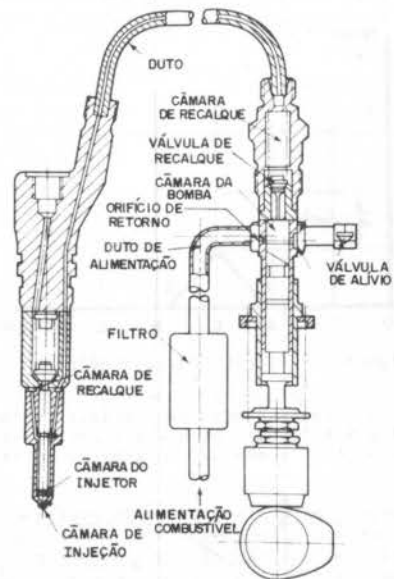


Figura 1 - Representação esquemática do sistema de injeção Diesel.

experimentais do comportamento da pressão num sistema de injeção operando com QAV-1. Um banco de ensaio foi montado e instrumentado para este estudo. Testes idênticos foram simulados no computador e comparados com os resultados experimentais.

## MODELO ANALÍTICO

O modelo analítico desenvolvido é simulado em função do tempo no computador, com descrições precisas das características geométricas e físicas do sistema, tão bem como as equações que descrevem a dinâmica do fluido e dos componentes mecânicos. Estas equações são resumidas abaixo. Mais informações sobre estas equações e o método de solução são apresentadas nas Refs. [2] e [3].

Uma representação esquemática do sistema de injeção é mostrada na Fig. 1.

As equações que descrevem o sistema de injeção são agrupadas em três categorias: duto, bomba e injetor.

**Equações para o duto.** O comportamento transiente do fluido compressível no duto pode ser descrito pelas equações da quantidade de movimento e continuidade aplicadas a um volume de controle de comprimento infinitesimal. É desnecessário repetir a derivação destas equações e suas soluções, desde que estas já estão apresentadas nas referências [2] e [3]. Quando estas equa-

ções são expressas na forma de diferenças finitas com aproximação de primeira ordem de integração, tem-se:

$$P_P - P_R + \rho_R a_R (V_P - V_R) + \frac{\rho_R a_R f_R V_R |V_R| (t_P - t_R)}{2D_R} + \rho_R a_R g \sin \alpha (t_P - t_R) = 0 \quad (1)$$

$$x_P - x_R = (V_R + a_R) (t_P - t_R) \quad (2)$$

$$P_P - P_S - \rho_S a_S (V_P - V_S) - \frac{\rho_S a_S f_S V_S |V_S| (t_P - t_S)}{2D_S} - \rho_S a_S g \sin \alpha (t_P - t_S) = 0 \quad (3)$$

onde: P = pressão; V = velocidade;  $\rho$  = massa específica; g = aceleração da gravidade; D = diâmetro do duto; f = fator de atrito Darcy-Weisbach; a = velocidade de propagação de onda no fluido (função da compressibilidade do fluido, elasticidade do duto e pressão);  $\alpha$  = ângulo de inclinação do duto com a horizontal; x e t = variáveis independentes, distância e tempo; R e S = índices referentes à posição no plano x-t, Fig. 2.

A equação (1) é chamada característica C<sup>+</sup> e é válida somente ao longo da linha RP descrita pela Eq. (2) e apresentada na Fig. 2. A Eq. (3) é chamada caracte-

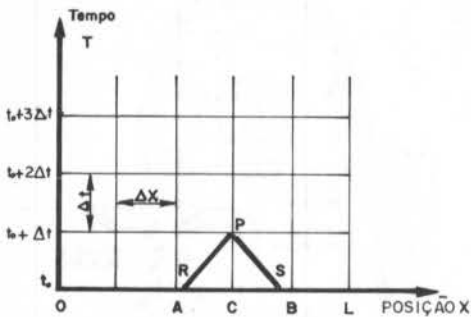


Figura 2 - Características no plano x-t.

rística C<sup>-</sup> e é válida ao longo da linha PS descrita pela Eq. 4. Com as condições iniciais conhecidas nos pontos R e S (Fig. 2), pressões e condições do escoamento no ponto P podem ser determinadas resolvendo (1) e (3).

**Equações para a bomba e o injetor.** As equações que descrevem a ação dinâmica da bomba e do injetor in cluem: (1) Uma equação da continuidade escrita para ca da volume e a descrição da compressibilidade do fluido (efeito capacitivo do volume), (2) equações do movimen to para descrever as forças e ação dinâmica de partes mecânicas tais como válvula de recalque e agulha do in jetor e (3) equações para descrever as vazões através dos vários orifícios. Abaixo são derivadas as equações para a câmara da bomba em seguida as equações para a câmara de recalque.

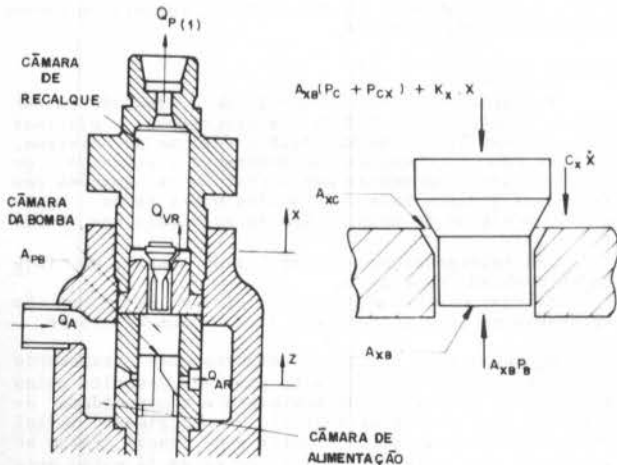


Figura 3 - (a) Vista seccional da bomba de injeção. (b) Forças sobre a válvula de recalque.

Aplicando a equação da continuidade à câmara da bomba (Fig. 3(a)), tem-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{AC} \rho V_n dA = 0 \quad (5)$$

onde VC = volume de controle; AC = área de controle; V<sub>n</sub> = velocidade do fluido normal à área de controle; V = volume da câmara.

Sob a hipótese simplificadora de que a pressão é uniformemente distribuída em todas as partes da câmara, vem:

$$\frac{d}{dt} \rho_B V_B + \rho_B (Q_{VR} + Q_{AR}) = 0 \quad (6)$$

Introduzindo o módulo de elasticidade  $K = \frac{dp}{d\rho}$ , vem:

$$\frac{V_B}{K_B} \frac{dp_B}{dt} + \frac{dV_B}{dt} + Q_{VR} + Q_{AR} = 0 \quad (7)$$

onde:  $V_B = V_{B\phi} + A_{XB} \cdot X - A_{PB} \cdot Z$

$$\frac{dV_B}{dt} = A_{XB} \cdot \frac{dx}{dt} - A_{PB} \cdot \frac{dZ}{dt}$$

$A_{XB}$  = área da válvula de recalque;  $A_{PB}$  = área do pistão da bomba.

Então:

$$\frac{dp_{PB}}{dt} = \frac{K_B (A_{PB} \frac{dZ}{dt} - A_{XB} \frac{dX}{dt} - Q_{VR} - Q_{AR})}{(V_{B\phi} + A_{XB} \cdot X - A_{PB} \cdot Z)} \quad (8)$$

As vazões nos orifícios são dadas por:

$$Q_{VR} = C_{DV} A_{VR} \sqrt{2 \left( \frac{P_B}{\rho_B} - \frac{P_C}{\rho_C} \right)}; A_{VR} = A_{VR}(X) \quad (9)$$

$$Q_{AR} = C_{DV} A_{AR} \sqrt{2 \left( \frac{P_B}{\rho_B} - \frac{P_A}{\rho_A} \right)} \quad (10)$$

onde as áreas são representadas na Fig. 4 e dadas por

$$A_{AR} = \frac{D_{AR}^2}{4} \left[ \pi - \arccos \frac{D_{AR} - 2Z}{D_{AR}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sin \left[ 2 \arccos \frac{D_{AR} - 2Z}{D_{AR}} \right], \text{ para } Z < D_{AR}$$

$$A_{AR} = 0, \text{ para } D_{AR} < Z < Z_R$$

$$A_{AR} = \frac{D_{AR}^2}{4} \left[ \arccos \frac{D_{AR} - (Z - Z_R) 2 \cos \theta_B}{D_{AR}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sin \left( 2 \arccos \frac{D_{AR} - (Z - Z_R) 2 \cos \theta_B}{D_{AR}} \right) \right],$$

$$\text{para } Z_R < Z < Z_R + \frac{D_{AR}}{\cos \theta_B}$$

$$A_{AR} = \frac{\pi D_{AR}^2}{4}, \text{ para } Z \geq Z_R + \frac{D_{AR}}{\cos \theta_B}$$

$$A_{VR} = 0, \text{ para } X < X_A$$

$$A_{VR} = \pi (X - X_A) \sin \theta_X (D_{XB} + (X - X_A) \sin \theta_X \cdot \cos \theta_X), X > X_A$$

$$A_{VR} = A_{XM} \text{ se } A_{VR} > A_{XM}$$

$Z_R$  = posição na qual o pistão começa a descobrir o orifício;  $Z_A$  = posição na qual a válvula de recalque começa a descobrir a área de passagem;  $A_{XM}$  = área de passagem máxima da válvula.

De maneira análoga, obtêm-se as expressões para to das as outras câmaras.

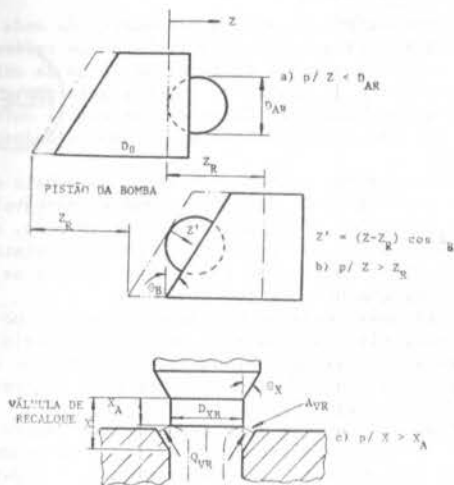


Figura 4 - Áreas dos orifícios.

As equações para a válvula de recalque são obtidas aplicando-se a segunda lei de Newton à válvula (Fig.3). Assim tem-se:

$$m_x \ddot{x} + C_x \dot{x} + K_x x = A_{XB} (P_B - P_C - P_{CX}) \quad (11)$$

onde:  $m_x$  = massa efetiva da válvula;  $C_x$  = coeficiente de amortecimento;  $K_x$  = constante de rigidez da mola;  $P_{CX}$  = pressão equivalente à pré-carga da mola; massa efetiva = massa da válvula +  $\frac{1}{3}$  massa da mola.

Note que a válvula só começa a movimentar se:

$$P_B \cdot A_{XB} \geq P_{CX} \cdot A_{XC} + P_C \cdot A_{XB}$$

Para a solução da Eq. 11, sua parte direita foi aproximada a um polinômio do 3º grau. Assim:

$$\ddot{x} + 2W_n \dot{x} + W_n^2 x = At^3 + Bt^2 + Ct + D \quad (12)$$

então a solução particular é da forma:

$$\ddot{x} = A't^3 + B't^2 + C't + D' \quad (13)$$

onde:  $A' = A/W_n^2$ ;  $B' = (B - 6W_n A')/W_n^2$ ;

$$C' = (C - 6A' - 4W_n B')/W_n^2; \quad D' = (D - 2B' - 2W_n C')/W_n^2.$$

De maneira análoga é obtida a equação do movimento da agulha no injetor.

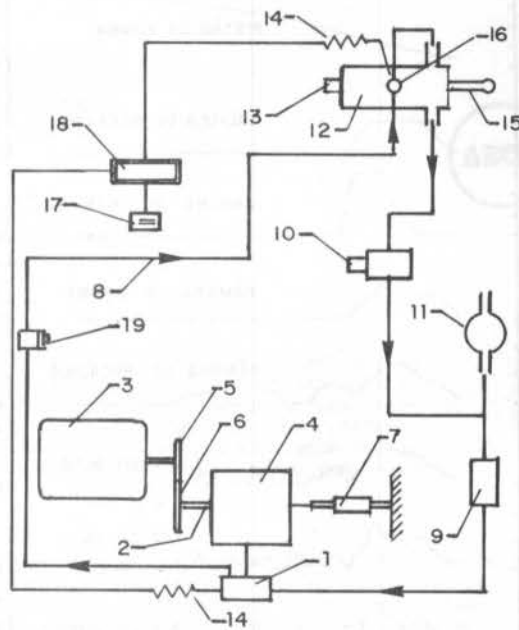
#### EQUIPAMENTO EXPERIMENTAL

Na Fig. 5 está representado esquematicamente o banco de testes.

A bomba injetora é do tipo pistão BOSCH PFR1K, com o diâmetro do pistão 7mm e é conectada a um injetor BOSCH 7B-33 pela linha de alta pressão consistindo de um duto de 1,8mm de diâmetro interno, diâmetro externo de 6,0mm e comprimento de 0,4m. O injetor é tipo de agulha e possui bico de 3 furos, de diâmetro 0,28mm cada. A bomba é acionada através de um motor elétrico de rotação uniforme tal que com uma redução obtêm-se a rotação de 920 rpm. O débito de combustível da bomba é controlado por um micrômetro que tem uma faixa entre 0 - 25,4mm (1.0 pol.), correspondendo a máxima e mínima vazão de combustível respectivamente com uma graduação mínima de 0.254mm (0,01 pol.).

Na linha de alimentação entre a bomba e o reservatório de combustível é conectada uma válvula solenóide e uma bureta calibrada que permite a determinação da vazão de combustível da bomba injetora.

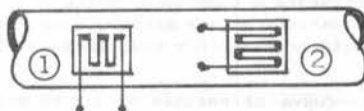
Extensômetros elétricos Tokyo Sokki Kenkyujo tipo FCA-1-17, localizados na linha de alta pressão, a 0,2m da bomba, são usados para medida da pressão estática. Estes extensômetros foram cuidadosamente posi-



- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| 01 - Bomba Injetora       | 11 - Bureta calibrada   |
| 02 - Eixo com came        | 12 - Reservatório       |
| 03 - Motor Trifásico      | 13 - Termostato         |
| 04 - Caixa-Came e Bomba   | 14 - Termopar           |
| 05 - Transmissão          | 15 - Resistência        |
| 06 - Corrente             | 16 - Injetor            |
| 07 - Micrômetro           | 17 - Horímetro Digital  |
| 08 - Duto de alta pressão | 18 - Indicador de Temp. |
| 09 - Filtro               | 19 - Extensômetro       |
| 10 - Válvula Solenóide    |                         |

Figura 5 - Esquemático do banco de ensaios.

cionados no duto (figura 6). A calibração estática dos mesmos foi realizada diretamente entre a pressão interna do duto e a indicação da tensão na saída do amplificador diferencial para o estabelecimento de uma pressão conhecida no duto. Utilizou-se uma balança de pressão, tipo peso morto HANNI.



- 1 - extensômetro mede  $\Delta a/a$  (tração)  
2 - extensômetro mede  $\Delta l/l$  (compressão)

Figura 6 - Posicionamento dos extensômetros.

Para a aquisição e processamento do sinal de saída utilizou-se um AVL Digital Analyser com um filtro General Radio 1952 - Universal Filter. O sinal foi também observado com um multímetro digital Fluke 8020A e um osciloscópio Tektronics 5031.

#### ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

O experimento foi realizado para a rotação de 920 rpm e a agulha do injetor levanta-se quando a pressão na câmara do injetor excede a pressão de abertura do injetor de 19,6 MPa (200kgf/cm<sup>2</sup>).

O micrômetro que controla o débito de combustível da bomba injetora foi utilizado na posição de 1,0 pol. (25,4mm), que corresponde ao débito máximo da bomba, que é 4,0 kg/h.

Condições idênticas foram simuladas no computador. A figura 7 (resultado teórico completo) apresenta os resultados deslocamento do pistão da bomba, válvula de recalque, agulha do injetor, variações de pressão em 8 (oito) posições do sistema de injeção, todos em função do ângulo do came.

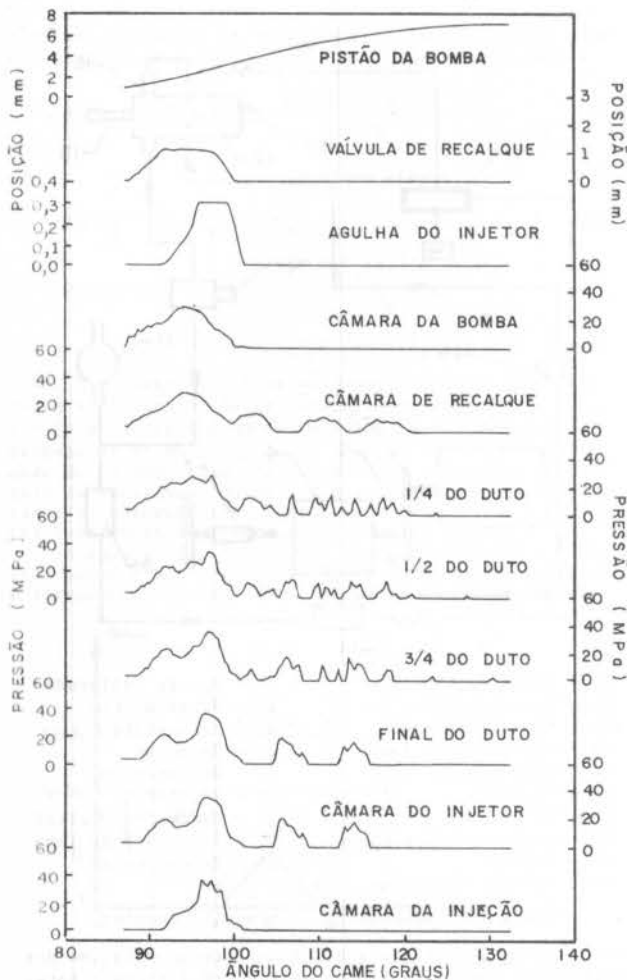


Figura 7 - Resultados do computador para velocidade de bomba 920 rpm e querosene de aviação QAV-1.

A figura 7 apresenta a comparação entre o resultado do teórico e experimental, para a pressão na posição 1/2  $\ell$  do duto de alta pressão ( $\ell$  = comprimento do duto).



Figura 8 - Comparação de resultados teórico e experimental.

Pode ser observado na Fig. 7 que o resultado da simulação apresenta uma reprodução das características da resposta do sistema durante o período de injeção. Por exemplo, a pressão na câmara de recalque sobe enquanto a válvula de recalque abre, e desce com a mesma. A agulha do injetor abre após a pressão na câmara do injetor exceder a pressão de pré-carga da mola sobre a agulha. Isto causa uma queda temporária na pressão na

câmara do injetor, que se propaga no duto, em direção à bomba. A pressão na câmara do injetor continua subindo após esta queda.

Características como a propagação da onda de pressão da bomba para o injetor, fenômeno de reflexão de onda, salto da válvula de recalque antes da estabilização, movimento da agulha do injetor para uma posição limite e estabilização durante a injeção e outros fenômenos são identificados com um estudo cuidadoso da Fig. 7.

A comparação entre o resultado do modelo analítico e o experimental, Fig. 8, apresenta razoável concordância no início e fim do período de injeção, e é desfavorável no pico de pressão. Do ponto de vista das características básicas do período de injeção os resultados apresentam uma boa concordância.

A pressão residual no sistema (pressão no sistema entre sucessivas injeções) é uma das variáveis mais importantes e infelizmente, um valor difícil de ser determinado para uma condição de operação de pressão de injeção. Em geral sua estimativa é realizada através do método das tentativas e erros com um número muito grande de testes no laboratório. Com o programa de simulação esta pressão pode ser estimada reduzindo-se consideravelmente os ensaios no laboratório. Outra investigação importante em que o programa está sendo utilizado junto com o banco de ensaios é no problema da injeção secundária.

Ainda não foi possível uma avaliação completa do comportamento do QAV-1 no sistema de injeção Diesel. Mais ensaios precisam ser realizados e para isto o banco de testes está sendo instrumentado mais adequadamente, com transdutores piezoelétricos (ao invés de extensômetros) em diversas posições do duto e das câmaras da bomba do injetor.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores desejam agradecer ao apoio do jovem pesquisador Carlos Keiji Okai e ao dedicado analista de sistemas Fernando de Araújo Faro.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Arima, S., Estudos de um Motor Ciclo Otto Utilizando Querosene como Combustível, TG, ITA (1985).
- [2] Okai, C.K., Simulação no Computador de um Sistema de Injeção de Óleo Diesel, TG, ITA (1987).
- [3] Azevedo, A.G., Okai, C.K., Simulation of Transient Flow in the Diesel Fuel Injection System, Submitted to ENCIT-88.

#### ABSTRACT

A theoretical-experimental study of a Diesel fuel injection system operating with aviation kerosene has been developed having in view the use of this fuel as an alternative to aviation gasoline. A diesel injection test bench was instrumented to measure the fuel line static pressure. The analytical model, which includes factors such as wave propagation phenomena, frictional effects and cavitation, presented sufficient concordance with the experimental results, in a way, that can be used to estimate the residual pressure.

AVALIAÇÃO DE COEFICIENTES DE PELÍCULA PARA  
ESTUDOS DE TRANSMISSÃO DE CALOR INSTANTÂNEA  
EM MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA



WALDYR LUIZ RIBEIRO GALLO  
Departamento de Energia - FEC/UNICAMP

RESUMO

Este trabalho apresenta uma comparação entre as mais difundidas correlações para a determinação do coeficiente de película para a transmissão de calor instantânea em motores de combustão interna. Os resultados obtidos são discutidos para cada fase de operação de um motor de ignição por centelha e as peculiaridades de cada correlação são explicitadas. Tal análise pode ser utilizada na seleção do coeficiente de película mais adequado para compor a simulação de desempenho de um dado motor com suas particularidades construtivas e térmicas.

INTRODUÇÃO

Um dos maiores problemas que se apresentam para a simulação do desempenho de motores de combustão interna é a obtenção de modelos que representem a transmissão de calor instantânea. A transmissão de calor é um fenômeno transiente, com o fluxo de calor podendo variar violentamente (de 0 até 10 MW/m<sup>2</sup>) em poucos milissegundos, com característica tridimensional, com importantes variações do fluxo de calor entre distâncias situadas a poucos centímetros uma da outra e com variações de ciclo a ciclo, dado o efeito de aleatoriedade sobre o padrão de turbulência dos gases dentro do cilindro.

Combinadas a essas dificuldades, as complexas geometrias das superfícies em que ocorre a transmissão de calor, tanto na câmara de combustão com fronteira móvel, quanto nos coletores de admissão e descarga, e nas passagens da água de refrigeração, tornam impossível uma solução analítica do problema.

Por outro lado, os modelos multi-dimensionais que consideram a solução numérica das equações diferenciais de conservação para massa, momento e energia necessitam também de hipóteses sobre o padrão de turbulência interna e, até hoje, apenas problemas bi-dimensionais ou com simplificações nas geometrias foram resolvidos. Uma formulação tridimensional, considerando a fronteira móvel, efeitos de radiação e a combustão ainda está por ser feita e há dúvidas quanto a praticidade de tal modelo, dada a sua complexidade [1].

A forma usual de se suplantar as dificuldades mencionadas acima, e que tem sido adotada pela maioria dos trabalhos sobre simulação de desempenho de motores, consiste em se trabalhar na hipótese de regime quase-permanente, com um coeficiente de película instantâneo para a transmissão de calor entre os gases e as paredes, obtido a partir de correlações empíricas ou semi-empíricas. Esta é a abordagem explorada neste trabalho.

O MODELO PARA A TRANSMISSÃO DE CALOR

Nos modelos globais para a transmissão de calor instantânea em motores de combustão interna é assumido um regime quase-permanente, isto é, supõe-se válida em cada instante a expressão

$$q = hA (T - T_w) \quad (1)$$

que relaciona, através de um coeficiente de película, a taxa de transmissão de calor com a área de troca instantânea e com a diferença de temperaturas entre as paredes e o gás. Dada a natureza transiente do fenômeno,

na verdade há uma defasagem entre a diferença de temperaturas e o fluxo de calor, como mostrado em [2]. Pelo mesmo motivo, a temperatura de parede num dado local também não é constante, mas varia ciclicamente.

Do ponto de vista prático, como o objetivo do modelamento é obter a quantidade de calor rejeitada para a água de refrigeração por ciclo, a defasagem instantânea entre a força motriz da transmissão de calor - diferença de temperaturas - e o fluxo de calor não é um fator fundamental. Da mesma maneira, a temperatura de parede é assumida constante, pois sua variação é da ordem de uma dezena de graus, bem menor do que as diferenças de temperatura envolvidas.

Algumas vezes, a expressão (1) é empregada considerando regiões do motor onde instantaneamente há diferenças de temperatura de gases, ou com diferentes temperaturas de parede locais, assumindo então a forma

$$q = \sum_1^n h_i A_i (T_i - T_{wi}) \quad (2)$$

onde  $T_i$ ,  $T_{wi}$ ,  $A_i$  e  $h_i$  são, respectivamente, a temperatura dos gases e de parede, a área de troca de calor e o coeficiente de película locais e instantâneos.

A AVALIAÇÃO DO COEFICIENTE DE PELÍCULA

A mais antiga correlação empírica para a determinação do coeficiente de película é devida a Nusselt [3]. Trabalhando a partir de uma bomba de combustão a volume constante, ele obteve correlações entre o estado do gás e o coeficiente de película para convecção. Para considerar o efeito da turbulência que ocorre no motor real, introduziu a velocidade média do pistão como parâmetro relevante:

$$V_p = 2.L.\Omega \quad [\text{m/s}] \quad (3)$$

onde  $L$  é o curso do pistão e  $\Omega$  é a velocidade angular em rotações por segundo. Para considerar os efeitos da radiação térmica, foi introduzido um coeficiente de película equivalente para radiação e o coeficiente total é dado por

$$h = C_1 (1 + 1,24 V_p) (P^2 T)^{1/3} + \frac{C_2 (T/100)^4 - (T_w/100)^4}{(1/\epsilon + 1/\epsilon_w - 1) (T - T_w)} \quad (4)$$



onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes,  $\epsilon$  e  $\epsilon_g$  são as emissividades do gás e das paredes, respectivamente.

Brilling [1] e Van Tien [1] utilizaram a expressão de Nusselt com modificações no termo dependente da velocidade média do pistão obtidas a partir de dados experimentais, obtendo para o termo convectivo, respectivamente:

$$h = C_1 (3,5 + 0,185V_p) (P^2 T)^{1/3} \quad (5)$$

$$h = C_1 (3,22 + 0,864V_p) (P^2 T)^{1/3} \quad (6)$$

Eichelberg [4] obteve também um coeficiente de película a partir de medidas do fluxo de calor instantâneo em motores de baixa rotação, mas não separou os efeitos convectivo e radiativo, obtendo

$$h = C_1 V_p^{1/3} (PT)^{1/2} \quad (7)$$

Esta expressão, bastante simples, tem sido extensamente utilizada por diferentes autores no modelamento de motores.

Partindo da análise dimensional, vários autores sugerem uma correlação semelhante aos modelos de convecção forçada turbulenta, com

$$Nu = C_1 Re^n \quad (8)$$

Baseado nesse tipo de análise, Annand [5] propôs

$$h = C_1 \frac{K}{D} Re^{0,7} + \frac{C_2 (T^4 - T_w^4)}{(T - T_w)} \quad (9)$$

onde

$$Re = \frac{\rho V_p D}{\mu} \quad (10)$$

ou seja, o número de Reynolds está baseado na densidade instantânea, na velocidade média do pistão e no diâmetro do cilindro. O termo que representa a radiação é incluído como um coeficiente de película equivalente, somado ao termo convectivo.

Utilizando a mesma conceituação, Woschni [6] desenvolveu uma expressão para o coeficiente de película explicitando, a partir do número de Reynolds, as influências do tamanho no motor (D), da pressão e da temperatura instantânea. Além disso, alterou a velocidade característica para uma função que depende não só da velocidade média do pistão mas também do aumento da turbulência causada pela combustão:

$$h = C_1 D^{-0,2} P^{0,8} T^{-0,53} [C_2 V_p + C_3 \frac{V_s T_1}{P_1 V_1} (P - P_0)]^{0,8} \quad (11)$$

onde  $T_1$ ,  $V_1$  e  $P_1$  são relativas a algum ponto conhecido,  $V_s$  é a cilindrada e  $P_0$  é a pressão que se obtém quando não há combustão. Evidentemente,  $P_0$  coincide com  $P$  na admissão e na compressão, afasta-se de fortemente durante a combustão e tende novamente a  $P$  para o fim da expansão e exaustão. Nesta formulação, a radiação é considerada de forma implícita.

Também partindo da análise dimensional, Sitkei [7] propôs:

$$h = C_1 (1+b) P^{0,7} V_p^{0,7} T^{-0,2} D^{-0,3} \quad (12)$$

onde  $b$  é uma constante adimensional para considerar o tipo de câmara de combustão e  $D$  é um diâmetro equivalente definido como

$$D = 4V/A \quad (13)$$

Tabela 1. Comparação entre as correlações.

CORRELAÇÃO	PRESSÃO	TEMP.	DIMENSÃO	VELOCIDADE
Nusselt	$P^{0,667}$	$T^{0,333}$	-	$(1+1,24V_p)$
Brilling	$P^{0,667}$	$T^{0,333}$	-	$(3,5+0,185V_p)$
Van Tien	$P^{0,667}$	$T^{0,333}$	-	$3,22+0,864V_p$
Eichelberg	$P^{0,5}$	$T^{0,5}$	-	$V_p^{0,333}$
Annand	$P^{0,7}$	$T^{-0,384}$	$D^{-0,3}$	$V_p^{0,7}$
Woschni	$P^{0,8}$	$T^{-0,53}$	$D^{-0,2}$	$[aV_p + b(P - P_0)]^{0,8}$
Sitkei	$P^{0,7}$	$T^{-0,2}$	$(4V/A)^{-0,3}$	$V_p^{0,7} (1+b)$
Hohenberg	$P^{0,8}$	$T^{-0,4}$	$V^{-0,06}$	$(V_p + a)^{0,8}$
Nishiwaki Adm.	$P^{0,807}$	$T^{-0,807}$	$D^{-0,193}$	$V_p^{0,807}$
Nishiwaki Exaus.	$P^{0,578}$	$T^{-0,199}$	$D^{-0,422}$	$V_p^{0,578}$

Reverendo o trabalho de Woschni, Hohenberg [8] modificou aquela expressão, abandonando o termo da velocidade característica dependente da combustão e trabalhando com o volume instantâneo como dimensão característica:

$$h = C_1 V^{-0,06} P^{0,8} T^{-0,4} (V_p + C_2)^{0,8} \quad (14)$$

Nishiwaki [9], percebendo a falta de correlações empíricas desenvolvidas especificamente para os processos de admissão e exaustão, e considerando a importância desses processos para a previsão do rendimento volumétrico e da temperatura de escape, propôs, para o processo de admissão e exaustão, respectivamente:

$$h = C_1 D^{-0,193} (V_p \cdot P)^{0,807} T^{-0,534} \quad (15)$$

$$h = C_1 D^{-0,422} (V_p \cdot P)^{0,578} T^{-0,199} \quad (16)$$

Uma comparação entre as estruturas das diversas correlações pode ser vista na Tabela 1. As quatro primeiras correlações são puramente empíricas, obtidas através de análise dos dados experimentais e não consideram o efeito da dimensão do motor. As demais foram obtidas a partir da análise de dados experimentais, mas obedecendo a relação expressa na equação (8). Deve-se observar que há uma grande discrepância entre as quatro primeiras e as demais quando se verifica o efeito da temperatura: num caso, e previsto o aumento do coeficiente da película com a temperatura e no outro caso o inverso. No caso da pressão, os expoentes variam de 0,5 a 0,8 e no caso da velocidade característica de 0,333 a 1,0.

Deve-se lembrar que algumas das correlações trazem implicitamente o efeito da radiação; é o caso das expressões de Eichelberg, Woschni, Hohenberg e Nishiwaki. As demais calculam separadamente esse efeito, definindo em coeficiente de película equivalente para a radiação térmica.

RESULTADOS OBTIDOS

Como base de dados para o cálculo comparativo dos coeficientes de película, foram utilizados os seguintes dados referentes ao motor MONZA 1.6 l a gasolina: diâmetro do cilindro, curso do pistão, comprimento da biela, taxa de compressão, relação ar-combustível, massa de combustível por ciclo. A partir do diagrama PxV medido foram obtidos a pressão e o volume como função do ângulo de manivela  $\theta$ . A temperatura instantânea média foi calculada pela equação dos gases perfeitos. Todas as expressões que avaliam o coeficiente de película devem ter suas constantes determinadas caso a caso; todavia, como não haviam dados disponíveis para o motor em questão, as constantes foram assumidas com seus valores originais.

Os resultados apresentados consideram apenas os efeitos convectivos, pois a radiação não é relevante nos motores de ignição por centelha (1) uma vez que só durante a combustão a radiação chega a representar cerca de 10% do fluxo de calor total, sendo substancialmente menor nos demais processos.

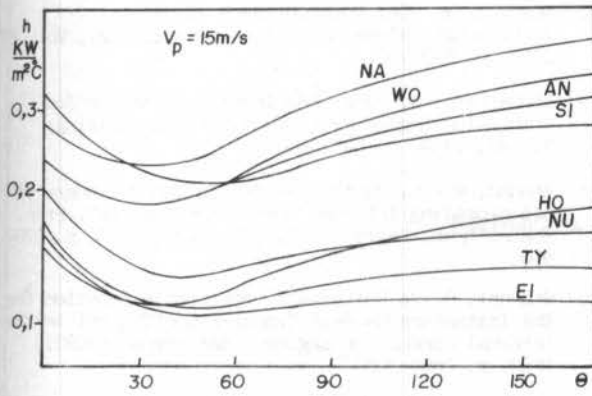


Fig. 1. Coeficientes de película instantâneos em função de ângulo de manivela. Processo de Admissão

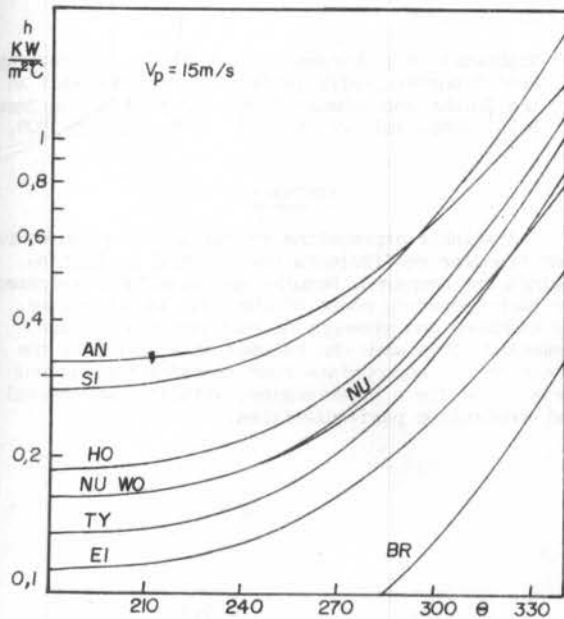


Fig. 2. Coeficientes de película instantâneos em função do ângulo de manivela. Processo de Compressão

A figura 1 apresenta os coeficientes de película para o processo de admissão. As únicas correlações desenvolvidas especificamente para esse processo são as de Nishiwaki (NA) e a de Woschni (WO). As correlações de Annand (AN) e de Sitkei (Si) também produzem bons resultados. As demais - Hohenberg (Ho), Nusselt (Nu), Van Tyen (Ty), Eichelberg (Ei) - produzem valores baixos. A correlação de Brilling (Br) sequer aparece na figura.

Na figura 2 podem ser vistos os resultados para o processo de compressão. Deve ser observado que a correlação de Woschni possui uma descontinuidade entre a admissão e a compressão, pois muda o valor da constante  $C_1$ ; o mesmo ocorre entre a expansão e a exaustão. As correlações de Eichelberg e Brilling dão valores baixos.

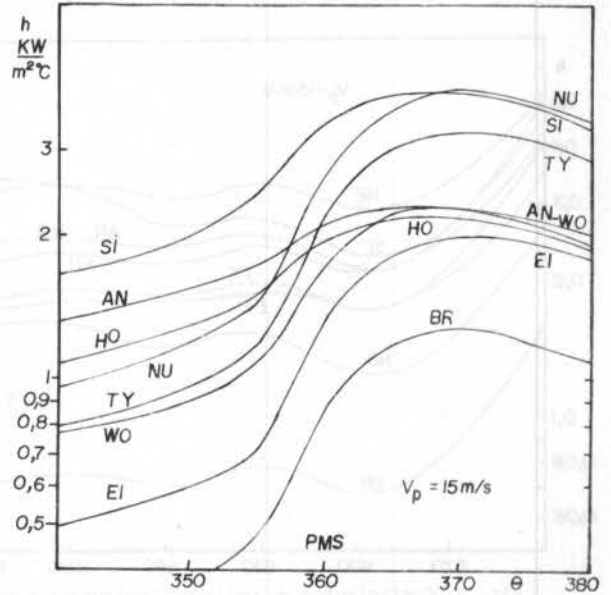


Fig. 3. Coeficientes de película instantâneos em função do ângulo de manivela. Processo de Combustão

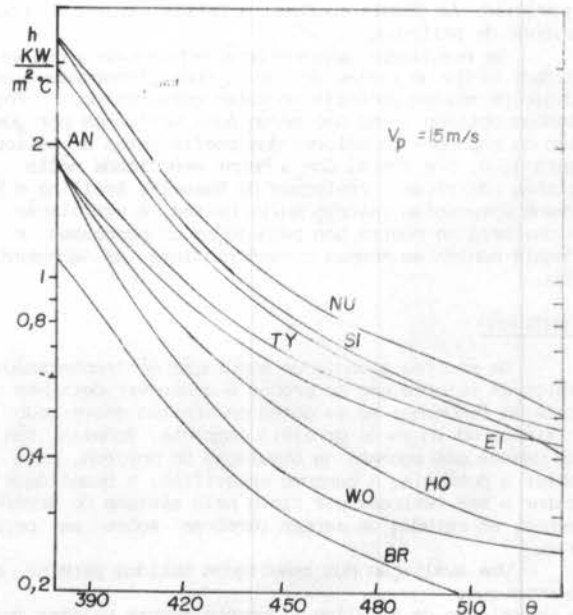


Fig. 4. Coeficientes de película instantâneos em função do ângulo de manivela. Processo de Expansão

Os resultados para o processo de combustão são apresentados na figura 3. As correlações que apresentam um coeficiente de película que aumenta com a temperatura possuem grande inclinação nas proximidades do ponto morto superior (PMS). Inversamente, as correlações de Annand e de Hohenberg variam menos pelo mesmo motivo. A grande variação na correlação de Woschni é devida ao termo de velocidade associado à combustão - equação (11).

Na figura 4 estão representados os resultados para o processo de expansão. Cabe ressaltar a abrupta queda das correlações de Woschni e Hohenberg, bem como os bons valores obtidos com a expressão de Eichelberg - ao contrário dos processos anteriores.

Finalmente, na figura 5 são mostrados os resultados para o processo de exaustão. As únicas correlações desenvolvidas especificamente para esse processo são as

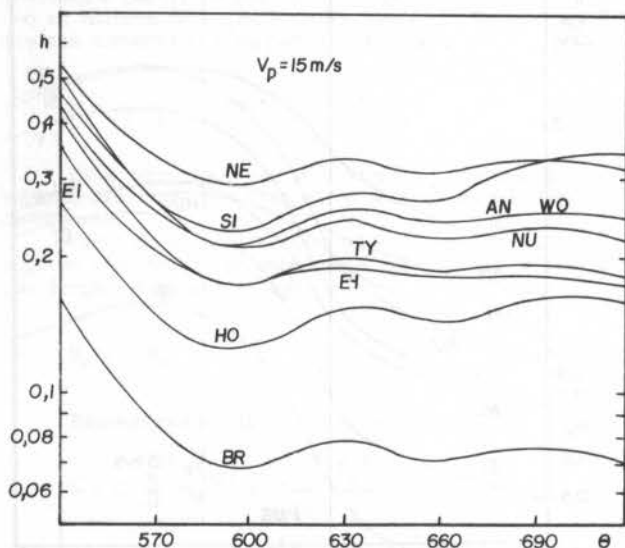


Fig. 5. Coeficientes de película instantâneos em função do ângulo de manivela. Processo de Exaustão

de Nishiwaki (NE) e a de Woschni; todavia, os valores obtidos pelas correlações de Annand e de Sitkei são comparáveis. As demais conduzem a baixos valores do coeficiente de película.

Os resultados apresentados referem-se a uma velocidade média de pistão de 15m/s, que corresponde a condição de máxima potência do motor considerado. Foram também obtidos - mas não serão aqui mostrados por questão de espaço - os valores dos coeficientes de película para 3, 6, 9 e 12m/s. Com a menor velocidade média de pistão (3m/s) as correlações de Nusselt, Brillling e Van Tyens apresentam valores muito baixos. A correlação de Eichelberg se mostra boa para todos os processos e as demais mantêm as mesmas características já apresentadas.

#### CONCLUSÃO

Os modelos globais de simulação de transmissão de calor em motores não se propõe a descrever detalhes locais do fenômeno; só se obtêm os efeitos sobre todo o cilindro ao longo de um ciclo completo. Todavia, têm sido usados com sucesso na simulação de motores, para se obter a potência, o consumo específico, a quantidade de calor a ser retirada por ciclo pelo sistema de arrefecimento, em estudos de cargas térmicas sobre as peças, etc.

Uma avaliação dos resultados obtidos permite observar que:

- Correlação de Brillling - fornece sempre valores muito baixos;
- Correlações de Nusselt e Van Tyen - fornecem valores muito baixos quando a velocidade média do pistão é

baixa.

- Correlação de Eichelberg - bons resultados são obtidos para baixas velocidades médias de pistão, piorando progressivamente.
- Correlação de Woschni - possui os inconvenientes de requerer o conhecimento prévio do diagrama indicador (PxV) e possuir descontinuidade entre os processos de admissão/compressão e expansão/exaustão (muda o valor da constante  $C_1$ ).
- As demais correlações - Annand, Hohenberg e Sitkei - são razoáveis, com vantagens e desvantagens em alguns processos.
- As correlações de Nishiwaki são recomendadas para os processos de admissão e de exaustão.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Borman, G. & Nishiwaki, K. "Internal Combustion Engine Heat Transfer". Prog. Energy Combust. Sci., 1987, V. 13, p. 1-46.
- [2] Overbye, V.D., Bennethum, J.E., Ueyehara, O.A. & Myers, P.A. "Unsteady Heat Transfer in Engines". SAE Trans. Vol. 69, 1961, p. 461-494.
- [3] Nusselt, W. "Der Wärmeübergang in der Verbrennungskraftmaschinen". Z. Verdt. Ing., Vol. 67, 1923, p. 692-708.
- [4] Eichelberg, G. "Some New Investigations on Old Combustion Engine Problems - II". Engineering, V. 148, 1939, p. 547-550.
- [5] Annand, W.J.D. "Heat Transfer in the Cylinders of Reciprocating Internal Combustion Engines". Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 177, N.36, 1963, p. 973-990.
- [6] Woschni, G. "A Universally Applicable Equation for the Instantaneous Heat Transfer Coefficient in the Internal Combustion Engine", SAE Trans. 670931, 1967, p. 3065-3083.
- [7] Sitkei, G. & Ramanaiah, G. "A Rational Approach for Calculation of Heat Transfer in Diesel Engines", SAE Trans. 720027, 1972, p. 165-174.
- [8] Hohenberg, G.F. "Advanced Approaches for Heat Transfer Calculations", SAE Trans. 790825, 1979, p. 2788-2806.
- [9] Nishiwaki, K.; Shimamoto, Y. & Miyake, K. "Average Heat Transfer Coefficients on a Cylinder Wall in the Intake and Exhaust Processes of Motoring Test" Bull. JSME, Vol. 22, N. 174, 1979, p. 1796-1809.

#### ABSTRACT

Available expressions to evaluate the convective heat transfer coefficients for internal combustion engines are compared. Results are shown and discussed for each operating phase of the same sample engine. The weakness and strength of each correlation are commented. This work can be used as a basis for the choice of the appropriate heat transfer coefficient correlation for a given engine, with its own thermal and constructive particularities.

ENERGIA NUCLEAR



DESEMPENHO TRANSITÓRIO DO ESCOAMENTO EM CIRCUITOS DE REATORES DO TIPO PWR



VIVIANE RUTH TOLEDO RIBEIRO HIRDES  
 Instituto de Estudos Avançados - IEAv/CTA  
 PEDRO CARAJILESCOV  
 Depto. Engenharia Mecânica - DEM-PUC/RJ

RESUMO

Geralmente, reatores nucleares do tipo PWR possuem diversos circuitos primários, sendo cada um dotado de uma bomba para circulação da água de refrigeração que remove o calor gerado no núcleo. O presente trabalho apresenta um modelo de simulação do escoamento devido a falhas de bombas em uma usina dotada de múltiplos circuitos, no qual baseia-se o programa SARDAN-FLOW. Diversas situações operacionais e acidentais foram simuladas com os dados de Angra-I

INTRODUÇÃO

As bombas do circuito primário de reatores do tipo PWR são responsáveis pela circulação do refrigerante que retira calor gerado no núcleo. Eventual falha em uma ou mais destas bombas provocaria queda de vazão do fluido e poderia acarretar mudanças de fase do refrigerante e temperaturas excessivas nos componentes.

O presente trabalho consiste no desenvolvimento de um programa que simula transitórios provocados por parada de bombas do circuito primário de reatores PWR, obtendo-se o tempo e a margem de segurança disponíveis para as ações a serem adotadas após os acidentes.

O modelo abrange diversas situações transitórias, acidentais ou de operação, em sistemas com um ou mais circuitos. As curvas características das bombas são utilizadas, permitindo análises de vazões e rotações negativas para qualquer combinação de bombas ativas e inativas.

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS E MODELO TEÓRICO

Figura 1 apresenta, esquematicamente, uma central PWR típica com dois circuitos primários de refrigeração.

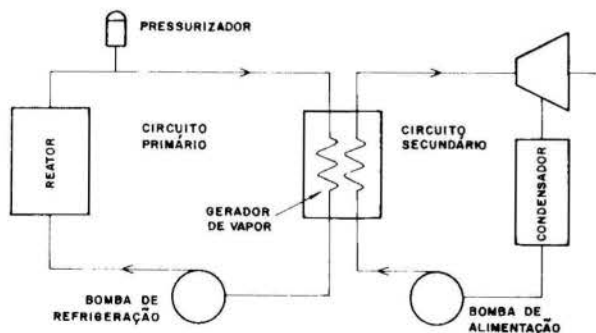


Figura 1. PWR típico com dois circuitos primários

A análise baseia-se nas equações da conservação da quantidade de movimento e da continuidade, aplicadas aos circuitos, e na equação do momento angular, aplicada às bombas.

Circuito Primário. Para um circuito genérico i, a equação da conservação da quantidade de movimento é a seguinte:

$$\frac{1}{g_c} \cdot \left[ \left( \frac{L}{A} \right)_R \cdot \frac{dQ_R}{dt} + \left( \frac{dQ_i}{dt} \right) \cdot \sum \left( \frac{L}{A} \right)_{ci} \right] = \Delta P_{Ri} - \Delta P_R - \Delta P_{ci} \quad (1)$$

onde:  $g_c$  - constante gravitacional;  
 $(L/A)_R$  e  $(L/A)_{ci}$  - relação comprimento/área do reator e de cada componente do circuito i;  
 $Q_R$  - vazão no reator;  
 $Q_i$  - vazão em cada circuito i;  
 $\Delta P_{Ri}$  - pressão fornecida pela bomba i; e  
 $\Delta P_R$  e  $\Delta P_{ci}$  - variação da pressão no reator e nos componentes do circuito i.

O termo da esquerda da equação representa a variação da vazão devido à inércia do fluido no reator e em cada componente do circuito i. O termo da direita representa os esforços que agem sobre o fluido: variação de pressão fornecida pela bomba e queda de pressão no reator, no gerador de vapor e na tubulação do circuito.

Pela equação da continuidade, a vazão no reator é dada por:

$$Q_R = \sum_i Q_i \quad (2)$$

As quedas de pressão podem ser escritas na forma [1]:

$$\Delta P_R = \Delta P_{R0} \cdot \left| \frac{Q_R}{Q_{R0}} \right| \quad ; \quad e \quad (3)$$

$$\Delta P_{ci} = \Delta P_{ci0} \cdot \left( \frac{Q_i}{Q_{i0}} \right)^N \cdot \left| \frac{Q_i}{Q_{i0}} \right|^{N-1} \quad (4)$$

sendo  $N = 1,8$ , quando o componente for o gerador de vapor, e  $N = 2,0$ , quando se tratar de uma parte da tubulação [2]. O índice "0" corresponde às condições normais de operação.

Modelo da Bomba. A pressão fornecida pela bomba i ao fluido é dada pela equação:

$$\Delta P_{Ri} = \rho \cdot \frac{g}{g_c} \cdot H_i \quad (5)$$

A altura dinâmica,  $H_d$ , é uma função da vazão e da rotação e obtida das curvas características de quatro-quadrantes da bomba [3]. Uma curva típica é apresentada, esquematicamente, na Figura 2. Pelo método dos mínimos-quadrados, estas curvas são representadas por polinômios do tipo:

$$h = q^2 \cdot [C_1 + C_2 \left(\frac{\alpha}{q}\right) + C_3 \left(\frac{\alpha}{q}\right)^2 + C_4 \left(\frac{\alpha}{q}\right)^3 + C_5 \left(\frac{\alpha}{q}\right)^4 + C_6 \left(\frac{\alpha}{q}\right)^5], \quad (6)$$

onde:  $h = \frac{H}{H_0}$ ;  $q = \frac{Q}{Q_0}$ ;  $\alpha = \frac{W}{W_0}$ . Ainda,  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  e  $C_6$  são os coeficientes correspondentes a cada curva.

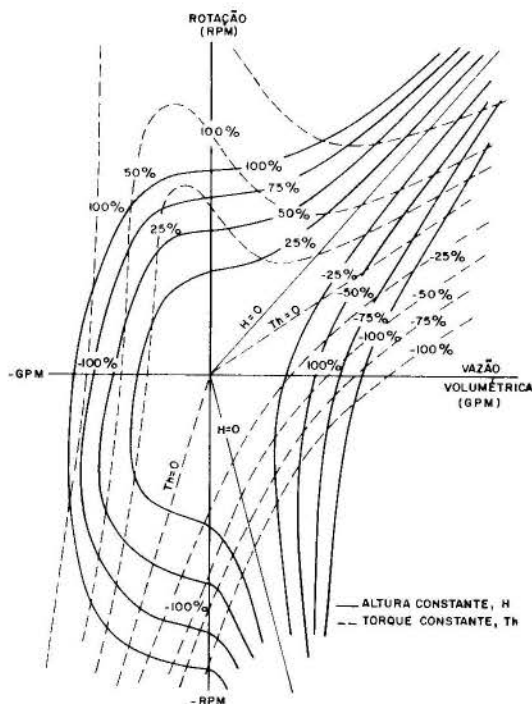


Figura 2. Curva característica de quatro-quadrantes de uma bomba centrífuga de PWR.

A dinâmica da bomba é obtida aplicando-se a 2ª Lei de Newton para as partes rotativas da bomba:

$$I \frac{dW}{dt} = \Sigma T = T_{el} - T_v - T_h. \quad (7)$$

onde:  $W$  - rotação da bomba;  
 $T$  - torque resultante no rotor da bomba;  
 $T_{el}$  - torque elétrico fornecido pela rede;  
 $T_v$  - torque de viscosidade e atrito; e  
 $T_h$  - torque hidráulico.

Durante o funcionamento normal do sistema, a energia fornecida pela rede elétrica é suficiente para suprir a energia requerida pelo fluido e pelas eventuais perdas existentes. Neste caso,  $\Sigma T = 0$ .

Quando existe parada total da bomba, o torque elétrico é considerado nulo. Para cortes parciais na potência da bomba, o torque elétrico é obtido da curva torque elétrico x rotação, fornecida pelo fabricante.

O torque hidráulico, da mesma forma que a altura dinâmica, é tirado das curvas de quatro-quadrantes e apresentado na forma de polinômio de 5º grau.

As perdas nos mancais, rolamentos e labirintos da bomba são obtidas por [3]:

$$T_v = T_{v0} \cdot \frac{W}{W_0} \cdot |W|^{1,7}. \quad (8)$$

#### MÉTODO DE SOLUÇÃO

Para cada circuito primário, um sistema de duas equações diferenciais, que são associadas aos polinômios das curvas da bomba, é resolvido pelo método de integração numérica de Runge-Kutta.

Desta forma, foi desenvolvido o programa SARDAN-FLOW [4], em linguagem FORTRAN, o qual fornece as variações temporais da vazão, rotação, altura dinâmica, além dos torques hidráulico, elétrico e de atrito.

#### RESULTADOS

Utilizando os dados de operação do circuito primário de refrigeração do reator da Central Nuclear de Angra-1 [5], dois exemplos de aplicação do programa SARDAN-FLOW são apresentados.

Caso 1. Perda de torque elétrico de uma das bombas do sistema, que opera com dois circuitos de refrigeração.

Este caso consiste no acidente mais grave de parada de bombas, pois o corte de potência de uma delas ocorre quando o reator está operando à plena carga e as travas de segurança não atuam.

Figura 3 mostra os resultados obtidos nesta simulação. A vazão da bomba inativa cai rapidamente e inverte o sentido de fluxo 35 s após o acidente. A partir deste ponto, o refrigerante atua como 'treio' sobre o rotor e faz a rotação decair mais rapidamente e inverter o sentido, aos 110 s. O circuito tende a se estabilizar no terceiro quadrante, por volta dos 200 s.

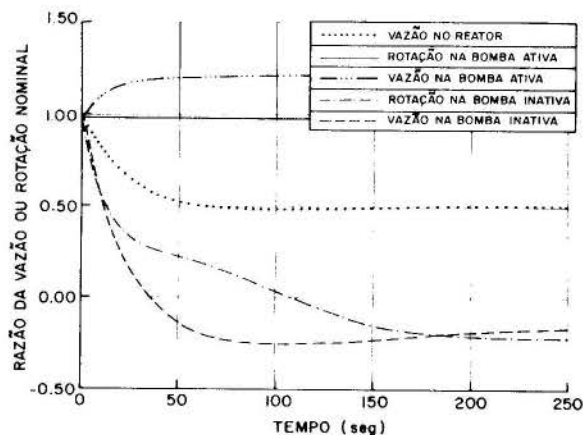


Figura 3. Perda de torque elétrico de uma das bombas do circuito primário de Angra-1.

Figura 4 apresenta uma comparação dos resultados obtidos com o programa SARDAN-FLOW e os dados fornecidos pelo fabricante [5]. A maior discrepância observada está em torno de 5%.

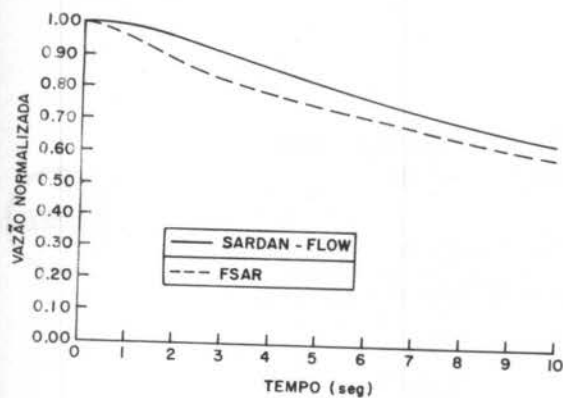


Figura 4. Comparação entre o SARDAN-FLOW e o FSAR [5] para parada de uma das bombas do circuito primário de Angra-I.

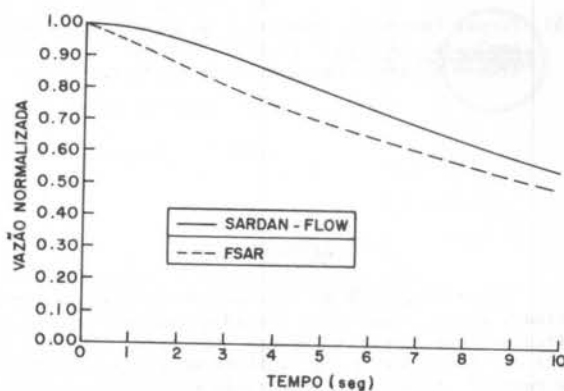


Figura 6. Comparação entre o SARDAN-FLOW e o FSAR para parada das duas bombas do circuito primário de Angra-I.

Caso 2. Parada simultânea das duas bombas do circuito primário.

Este caso representa o desligamento do sistema de refrigeração do reator. Conforme mostrado na Figura 5, a vazão e a rotação decrescem, tendendo a zero, mas não mudam o sentido, permanecendo sempre no mesmo quadrante. Observa-se, ainda, que a queda da vazão é mais lenta do que aquela obtida para o caso 1.

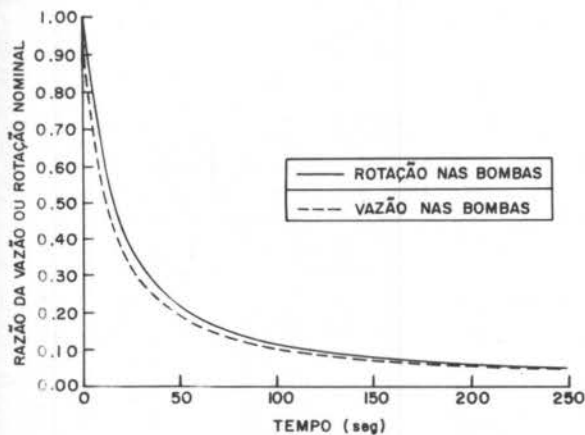


Figura 5. Perda de torque elétrico das duas bombas do circuito primário de Angra-I.

Figura 6 mostra a comparação entre a vazão obtida com os dados fornecidos pelo FSAR [5] e a vazão dada pelo SARDAN-FLOW. A maior diferença obtida é menor do que 8%.

#### CONCLUSÕES

Embora poucos dados experimentais estejam disponíveis para comparações, os resultados obtidos podem ser considerados satisfatórios. As maiores discrepâncias apresentadas, de 5% e 8%, em relação aos dados do fabricante, podem ser atribuídas às diferentes correlações utilizadas na determinação de perdas de pressão e nos métodos usados para obtenção dos polinômios.

A utilização das curvas características de quatro-quadrantes, apesar de tornar trabalhosa a entrada de dados, é preferível ao uso de relações empíricas que não permitem a análise dos transitórios para todos os quadrantes. Por outro lado, a curva do torque elétrico em função da rotação não influi de forma significativa nos acidentes simulados, embora seja de fundamental importância na análise de início de operação das bombas.

Dos resultados obtidos, observa-se que o momento de inércia influi de forma significativa na dinâmica da bomba e, por isso, o volante superior do motor é um dos componentes mais importante do sistema. Com ele, é possível retardar-se os transitórios, garantindo circulação de refrigerante por um intervalo de tempo maior, até que os dispositivos de segurança possam atuar.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Fuls, G.M., Flot-1-Flow transient analysis of a pressurized water reactor during flow coastdown, Report WAPD-TM-428, (1928).
- [2] Bordelon, F.M., PHOENIX CODE - Calculation of flow coastdown after loss of reactor coolant pump. Westinghouse Electric Corporation, Pittsburg-PA, Report WCAP-7973, (1970).
- [3] Knapp, R.T. and Passadena, C., Complete characteristics of centrifugal pumps and their use in transient behaviour. Trans. ASME, Vol 59, (1937).

- [4] Hirdes, V.R., Modelo para simulação do comportamento dinâmico de circuitos hidráulicos de reatores do tipo PWR. Dissertação de Mestrado, Divisão de Engenharia Mecânica, ITA, S.J.Campos, SP, 1987.
- [5] Furnas Centrais Elétricas S.A., Final Safety Analysis Report. Central Nuclear Almirante Álvaro Alberto. Usina Nuclear Angra-I, (1976).

ABSTRACT

Generally, PWR's are designed with several primary loops, each one provided with a pump to circulate the coolant through the core. If one or more of these pumps fail, there would be a decrease in reactor flow rate which could cause coolant phase change in the core and components overheating. The present work establishes a simulation model for pump failure in PWR's and the SARDAN-FLOW computes code was developed, considering any combination of such failures. Based on the data of Angra I, several accident and operational transient conditions were simulated.





## SIMULAÇÃO NUMÉRICA SIMPLIFICADA DO CANAL QUENTE DE REATORES NUCLEARES REFRIGERADOS A SÓDIO



FRANCISCO DE ASSIS S. DA FONSECA, Faculdade de Formação de Professores da Mata Sul, Palmares, PE  
ELIAS SILVA FILHO, Departamento de Energia Nuclear - UFPE, Recife, PE

### RESUMO

Os valores dos parâmetros termohidráulicos que limitam o funcionamento de um reator nuclear refrigerado a sódio não são estabelecidos pelas condições médias do refrigerante no núcleo do reator e sim, pelas condições extremas no canal mais quente do núcleo. O presente trabalho visa a análise de canal quente do núcleo de reatores refrigerados a sódio, adaptando-se, para eles, um modelo simplificado já existente para canal quente de núcleo de reatores a água leve pressurizada. O modelo foi aplicado para um reator a sódio típico, obtendo-se resultados satisfatórios.

### INTRODUÇÃO

O núcleo de um reator nuclear refrigerado a sódio é constituído de varetas de combustível formadas de pastilhas de dióxidos de plutônio e urânio encapsuladas em tubos cilíndricos de aço inoxidável. Estas varetas são dispostas segundo um arranjo triangular (Figura 1) e distanciadas entre si, geralmente, por espaçadores helicoidais dispostos verticalmente ao longo das varetas. A região compreendida entre três varetas é chamada subcanal típico, por onde escoam o sódio exercendo a função de refrigerante.

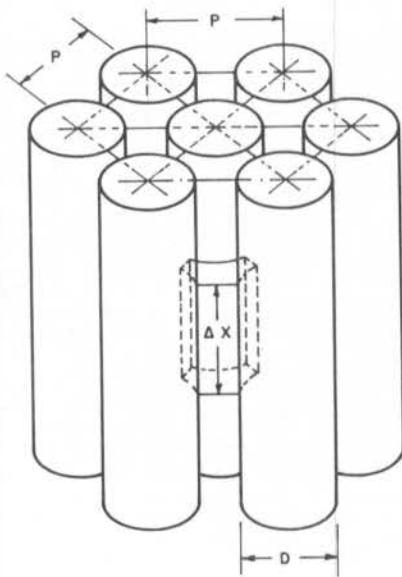


Figura 1. Arranjo triangular das varetas de combustível.

Para se garantir que sob condições normais e anormais de operação do reator não ocorrerá fusão no combustível ou danos no revestimento das varetas, torna-se necessário conhecer o comportamento dos parâmetros termohidráulicos tais como entalpia, pressão, vazão em massa do refrigerante, etc., no canal termicamente mais crítico do reator, o chamado canal quente. Esta análise é executada atualmente mediante métodos

de cálculos colocados na forma de programas de computador, tal como o COBRA IIIC[1]. Neste programa um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem (equações da continuidade, energia e quantidade de movimento) é resolvido para todos os volumes de controle em que o sistema a ser analisado é dividido. As equações são resolvidas por processos iterativos até se conseguir pressão uniforme na saída de todos os subcanais determinando-se assim valores de pressão, entalpia e vazão em massa do refrigerante nas posições verticais ocupadas por cada volume de controle. Escoamento transversal (crossflow) entre subcanais causado por gradientes laterais de pressão entre eles bem como mistura turbulenta de entalpia (mixing) entre subcanais adjacentes são considerados nos cálculos. Como o núcleo do reator é constituído por um grande número de subcanais, os quais, como já foi mencionado, são divididos em volumes de controle, o cálculo termohidráulico efetuado por programas computacionais complexos como o COBRA IIIC acarreta, desta maneira, um tempo de computação relativamente grande, sendo portanto, muito dispendioso.

O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de se prever o comportamento dos parâmetros termohidráulicos no canal mais quente do núcleo de um reator refrigerado a sódio a partir de um modelo simplificado desenvolvido por Silva Filho e Carajilescov [2] para reatores a água leve pressurizada, adaptado para as condições de reatores a sódio. Neste modelo o núcleo do reator é modelado por, apenas, dois canais paralelos acoplados, um deles operando em condições nominais e outro nas condições mais críticas.

### MODELO TEÓRICO

O modelo considera que as condições críticas do núcleo ocorrem no subcanal mais quente, determinado simplesmente por inspeção da distribuição radial de potência do núcleo. Este canal é acoplado concêntricamente a um canal nominal, Figura 2. Tal acoplamento é basicamente representado pelo escoamento transversal (crossflow). Os canais são divididos verticalmente em volumes de controle idênticos, com a extremidade superior de um volume de controle coincidindo com a extremidade inferior do volume de controle imediatamente acima.

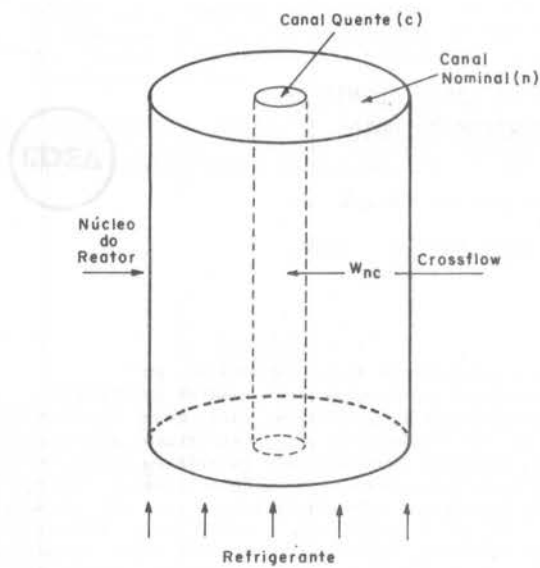


Figura 2. Acoplamento entre os canais quente e nominal.

O escoamento transversal é obtido impondo-se uma distribuição axial de pressão ao longo do canal quente igual àquela obtida para o canal nominal. Matematicamente, impõe-se

$$\bar{P}_c = \bar{P}_n \quad (1)$$

onde  $\bar{P}_c$  e  $\bar{P}_n$  são calculados pela média aritmética das pressões nas extremidades inferior (entrada) e superior (saída) dos volumes de controle dos canais quente e nominal, respectivamente.

As seguintes hipóteses são consideradas no modelo:

- as propriedades termohidráulicas do sódio no canal nominal não são alteradas pelo acoplamento com o canal quente,
- na entrada dos canais (entrada do núcleo do reator) os valores das propriedades termohidráulicas do sódio são as mesmas nos dois canais,
- o mixing turbulento entre os canais é desprezível.

A primeira hipótese é imposta devido à grande quantidade de subcanais que formam o canal nominal, já que este é tomado como sendo o núcleo do reator, comportando-se de maneira homogenizada.

A segunda hipótese é justificada pela presença da câmara plena inferior na entrada do núcleo, que homogeniza o sódio nesta região.

Já a última condição será considerada para simplificar a solução do problema. Este fato, todavia, não representa uma simplificação muito drástica uma vez que, geralmente, o efeito de redistribuição de entalpia devido ao mixing é muito pequeno comparado àquele devido ao crossflow.

As equações de conservação, em regime permanente, para cada volume de controle do canal mais quente podem ser escritas na forma:

a. Conservação de massa

$$\dot{M}_{c,1} + \dot{W}_{nc} = \dot{M}_{c,2} \quad (2)$$

b. Conservação de energia

$$\dot{M}_{c,1} H_{c,1} + \dot{Q}_c + \dot{W}_{nc} \bar{H}^* = \dot{M}_{c,2} H_{c,2} \quad (3)$$

c. Conservação de quantidade de movimento

$$A_c \cdot P_{c,1} + \dot{M}_{c,1} V_{c,1} + \dot{W}_{nc} \bar{V}^* = A_c \cdot P_{c,2} + \dot{M}_{c,2} V_{c,2} + f \cdot \frac{\Delta Z}{D_h} A_c \frac{\bar{\rho}_c \bar{V}_c^2}{2} + A_c \bar{\rho}_c \Delta Z g \quad (4)$$

onde

A: área do escoamento vertical

$D_h$ : diâmetro hidráulico do canal

f: coeficiente de atrito

g: aceleração local da gravidade

H: entalpia

M: vazão em massa do sódio

P: pressão

Q: taxa de geração térmica no canal

V: velocidade do sódio

$\dot{W}_{nc}$ : vazão em massa do escoamento transversal

(crossflow) do canal nominal para o canal quente.

Obviamente  $\dot{W}_{nc} = -\dot{W}_{cn}$

$\Delta Z$ : altura dos volumes de controle

Os subscritos (1) e (2) indicam, respectivamente, entrada e saída dos volumes de controle e o subscrito (c) indica o canal quente. Os valores médios de velocidade ( $\bar{V}_c$ ) e densidade ( $\bar{\rho}_c$ ) em cada volume de controle são calculados pela média aritmética dos valores daqueles parâmetros na entrada e saída do volume de controle. Os parâmetros  $\bar{H}^*$  e  $\bar{V}^*$  são respectivamente entalpia e velocidade do sódio do canal doador de crossflow, definidos por

$$\bar{H}^* = \bar{H}_c = (H_{c,1} + H_{c,2})/2, \text{ se } \dot{W}_{nc} \leq 0 \quad (5)$$

$$\bar{H}^* = \bar{H}_n = (H_{n,1} + H_{n,2})/2, \text{ se } \dot{W}_{nc} > 0 \quad (6)$$

$$\bar{V}^* = \bar{V}_c = (V_{c,1} + V_{c,2})/2, \text{ se } \dot{W}_{nc} \leq 0 \quad (7)$$

$$V^* = \bar{V}_c = (V_{n,1} + V_{n,2})/2, \text{ se } \dot{W}_{nc} > 0 \quad (8)$$

No caso de núcleos de reatores a sódio, as varetas de combustível geralmente são envolvidas por espaçadores helicoidais. Neste caso um fator multiplicador M do coeficiente de atrito f é inserido na equação de quantidade de movimento. Os valores de M são determinados experimentalmente.

A primeira etapa, para aplicação do presente modelo, consiste na determinação das condições termohidráulicas no canal nominal para todos os volumes de controle. Isto é feito a partir das três equações de conservação, substituindo-se o índice c pelo índice n e impondo-se  $\dot{W}_{cn} = 0$ , de acordo com a hipótese (a).

A segunda etapa consiste em se determinar as condições termohidráulicas no canal quente para o primeiro volume de controle (contado a partir da entrada do canal) impondo-se  $\dot{W}_{nc}^{(0)} = 0$ . Calcula-se  $P_{c,2}$  e em seguida  $\bar{P}_c^{(1)}$  pela média aritmética de  $P_{c,1}$  e  $P_{c,2}$ . Calcula-se a diferença entre  $\bar{P}_c^{(1)}$  e  $\bar{P}_n$  do volume de controle correspondente do canal nominal. O escoamento transversal é estimado pela expressão

$$\dot{W}_{nc}^{(1)} = \dot{W}_{nc}^{(0)} + \frac{\bar{P}_n - \bar{P}_c^{(1)}}{C} \quad (9)$$

onde C é uma constante genérica. Com este valor de crossflow os cálculos com as equações de conservação são refeitos para o volume de controle em questão do canal quente. Calcula-se, então, o novo valor  $\bar{P}_c^{(2)}$  e consequentemente o novo crossflow, dado por:

$$\dot{W}_{nc}^{(2)} = \dot{W}_{nc}^{(1)} + \frac{\bar{P}_n - \bar{P}_c^{(2)}}{C} \quad (10)$$

O procedimento descrito repete-se iterativamente. Após i iterações, o crossflow é dado por:

$$\dot{W}_{nc}^{(i)} = W_{nc}^{(i-1)} + \frac{\bar{P}_n - \bar{P}_c^{(i)}}{C} \quad (11)$$

Este processo é interrompido quando

$$|\bar{P}_n - \bar{P}_c^{(i)}| < \epsilon \quad (12)$$

sendo  $\epsilon$  um erro admissível, previamente escolhido.

Após a obtenção de convergência, pode-se passar para o cálculo do volume de controle seguinte. Observe que a constante  $C$  não tem influência no valor de  $\dot{W}_{nc}$  obtido após a constatação de convergência. Sua influência é apenas notada no número de iterações necessário.

O procedimento descrito prossegue até atingir-se o topo dos canais.

As principais correlações empíricas, para o sódio, utilizadas no modelo apresentado são as mesmas da referência [1].

## RESULTADOS

O método foi aplicado para o núcleo de um reator típico refrigerado à sódio da classe de potência de 300 MW (térmicos), cujos dados de projeto são apresentados na referência [3].

Os canais quente e nominal foram divididos em 20 volumes de controle, na direção do escoamento.

A Figura 3 apresenta a queda de pressão ao longo dos canais. A queda total de pressão obtida foi de 115KPa.

A Figura 4 mostra o comportamento da entalpia ao longo dos canais. A relação entre os acréscimos de entalpia nos canais quente e nominal é de cerca de 1,3, que é o mesmo valor encontrado na literatura disponível para o reator analisado.

A Figura 5 mostra que até 0,30m de altura, a vazão em massa no canal quente diminui, significando uma expulsão de refrigerante do canal quente. A partir de 0,30m, o comportamento se inverte, ocorrendo, então, uma entrada de refrigerante no canal quente. Considerando-se a distribuição média da vazão ao longo do canal quente, pode-se afirmar que ocorreu um incremento da vazão de refrigerante neste canal. Esse mesmo comportamento foi verificado também por Agrawal e Rahbar [4] na análise termohidráulica de subcanais do reator de Clinch River, onde verificou-se um incremento de vazão nos subcanais com altas taxas de calor. Isto constitui, portanto, a causa da tendência ao achatamento do perfil da temperatura do sódio, na direção radial do núcleo de reatores refrigerados com aquele metal líquido, observada na prática.

A distribuição de temperatura na superfície externa do revestimento da vareta de combustível, Figura 6, apresenta o valor máximo, igual a 603°C, enquanto que o valor encontrado na referência [3] é 616°C. A diferença de 13°C deve-se à correlação empírica empregada para cálculo do coeficiente de transferência de calor. Não foi encontrado, todavia, na literatura disponível uma correlação mais adequada que conduzisse a temperatura máxima da superfície externa do revestimento a um valor mais próximo de 616°C.

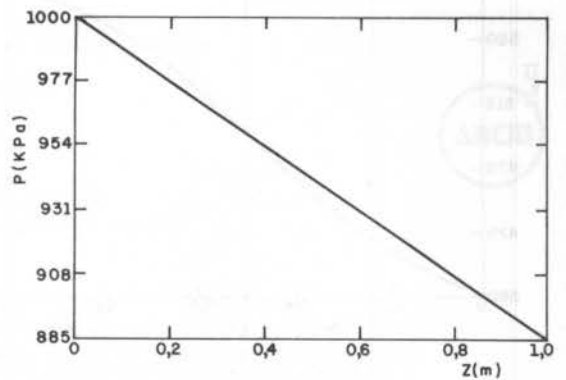


Figura 3. Queda de pressão ao longo dos canais.

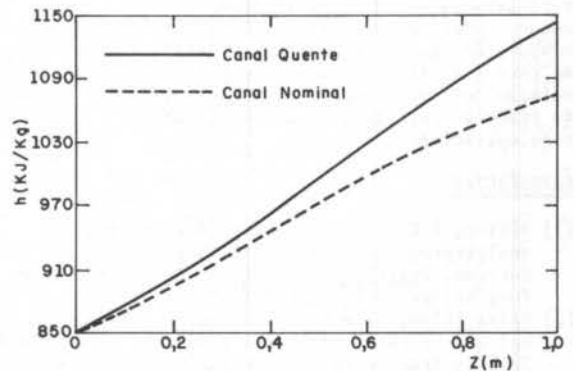


Figura 4. Entalpia ao longo dos canais.

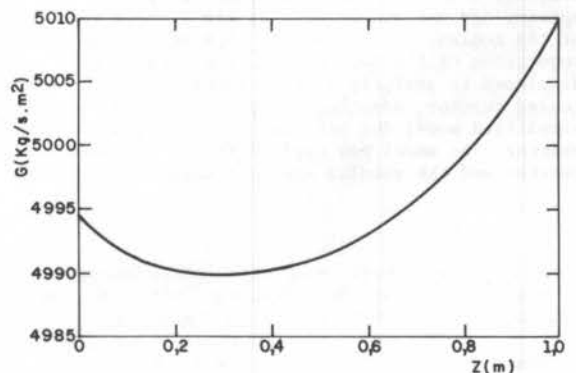


Figura 5. Vazão em massa ao longo do canal quente.

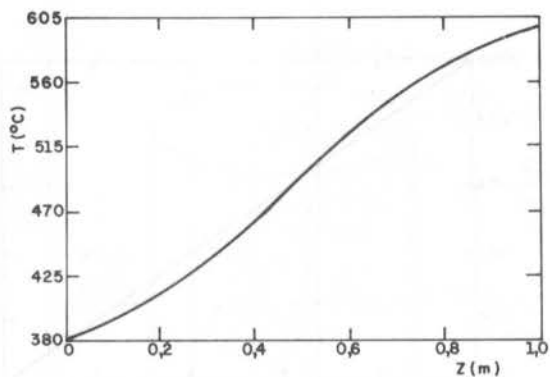


Figura 6. Temperatura na superfície do revestimento da vareta de combustível.

#### CONCLUSÕES

Os resultados apresentados demonstram que o modelo simplificado considerado está em condições de simular satisfatoriamente o comportamento termohidráulico do canal quente de núcleos de reatores nucleares refrigerados a sódio utilizando-se computadores de pequeno porte e necessitando-se de reduzido tempo de computação. Ainda, o presente modelo pode ser adaptado para a análise de canal quente em programas de simulação do comportamento termohidráulico de núcleos de reatores refrigerados a sódio, durante transições operacionais.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Nissen, K.L., Eine Anwendung des Unterkanal-analyseprogramms COBRA IIIC fuer fluessiges Natrium. Bericht GKSS 81/E/24, GKSS - Institut fuer Anlagentechnik, RFA (1981).
- [2] Silva Filho, E. e Carajilescov, P., Modelo de canal quente para reatores a água leve pressurizada. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, v.1, pp. 11-19 (1979).
- [3] Waltar, A.E. and Reynolds, A.B., Fast Breeder Reactors. Pergamon Press, New York (1981).
- [4] Agrawal, A.K. and Rahbar, M.K., Dynamic Simulation of LMFBR Systems. Atomic Energy Review, v. 18, Number 2 - IAEA (1980).

#### ABSTRACT

The thermal-hydraulic parameter values that restrict the operation of a liquid sodium cooled reactor are not established by the average conditions of the coolant in the reactor core but by the extreme conditions of the hot channel. The present work was developed to analysis of hot channel of a sodium cooled reactor, adapting to this reactor an existent simplified model for hot channel of pressurized water reactor. The model was applied for a standard sodium reactor and the results are considered satisfactory.

## STATIC PRESSURE DISTRIBUTION IN AN ANNULAR CHANNEL

WITH HELICOIDAL WIRE

ABCN

ABCN

Marcelo J.S. de Lemos  
Departamento de Energia, ITA/CTA  
São José dos Campos, São Paulo 12225, Brasil

## ABSTRACT

This work reports data on pressure drop distribution along a channel formed by a wire-wrapped rod placed inside a circular tube. This geometry simulates the flow field in the vicinity of a typical fuel rod of a LMFBR (Liquid-Metal Fast Breeder Reactor) fuel assembly. The working fluid was air and the range for the Reynolds number extended from  $2.26 \times 10^4$  to  $4.52 \times 10^4$ . The aspect ratio,  $P/D$ , and the lead-to-diameter ratio,  $l/D$ , were 1.2 and 15, respectively.

## INTRODUCTION

Thermal-hydraulic analysis of nuclear reactor fuel elements is of primary importance regarding safety, economical and efficiency aspects of nuclear power plants. The most common engineering design concept for fuel elements is to have the coolant flowing through a bundle of geometrically arranged rods. In that concept, fissile material is encapsulated inside the rods in form of cylindrical pellets.

Extensive experimental work carried out over the years has contributed to the understanding of the flow pattern in bare rod-arrays [1,2], and yet, recent studies emphasize the difficulties of such complicated flow phenomena [3]. In LMFBRs (Liquid-Metal Fast Breeder Reactors) complications in determining flow field and heat transfer characteristics further arise due to the introduction of helicoidal wires wrapped around the rods. A typical LMFBR fuel assembly is illustrated in Figure 1. The wires, working primarily as rod spacer and fluid mixer, make understanding of the full three-dimensional flow even more difficult, clearly identifying the need for reliable experimental information in that kind of flow. Contributing to this goal one can find in the literature flow visualization techniques applied to this kind of geometry [4] and data reported for the velocity field in a 37-rod assembly [5].

Considering the above mentioned demand for data in wire-spaced assemblies, the objective of the present work is to report measurements on the static pressure distribution along a channel formed by placing a wire-wrapped rod inside a circular tube. This flow configuration yields an annular channel with a helicoidal spacer. The main idea here is to separately investigate flow characteristics of a single rod, free of interference from the others in a full bundle. Friction factors are also presented, covering a range for the Reynolds number from  $2.26 \times 10^4$  to  $4.52 \times 10^4$ .

## EXPERIMENTAL APPARATUS

The experimental apparatus used is schematically shown in Figure 2, and consists basically of an air blowing section and a test section, coupled in an open loop configuration.

Air is blown into the loop with a centrifugal fan having a by-pass valve located downstream the fan exit. The by-pass valve was used to control the test section mass flow rate with the fan operating always at full power. A honey-comb was inserted after the valve in order to homogenize the flow. The piping connecting the fan and the plenum had an internal diameter equal to 12.7 cm and was 2400 cm long. A Pitot static tube was

mounted on the pipe wall for mass flow rate estimates. Another honey-comb cell was installed at the plenum entrance to reduce secondary currents induced by the pipe elbow. The ratio of the plenum cross-section area to the pipe cross-section area was equal to 31.

The test section simulated the flow around a typical LMFBR fuel rod. An enlargement of five times in the actual design dimensions was considered in order to facilitate instrumentation installation as well as improve measuring accuracy. Main test section parameters were  $P/D=1.2$ ,  $l/D=15$  and  $L/D_h=141$ , where  $D$  is the rod diameter,  $P$  the rod pitch in a triangular lattice,  $l$  the wire lead length, and  $D_h$  the annulus hydraulic diameter.

The static pressure taps, in a total of 13, were installed on the outside tube wall following a helicoidal path of the same lead length as the wire. This was done in order to obtain pressure losses along the main flow streamlines. A schematic is shown in Figure 3(a). Pressure was read with a DWEYER "U" manometer and taps were selected with a pressure connector as shown in Figure 3(b). For measurements at the same axial distance and different angular positions (different streamlines), a pressure tap angular displacement  $\theta$  was simulated by rotating the rod of the same angle but in the opposite direction.

## RESULTS AND DISCUSSION

Test section pressure losses were referred to the plenum and measured along the helix for several angles  $\theta$ . In the results to be presented,  $\theta$  is counted in the counterclockwise direction starting from the wire position for a certain tap location. Small values for  $\theta$  therefore correspond to regions right "below" the wire, whereas angles close to  $360^\circ$  identify a region "above" the helix. Results are presented in the non-dimensional form:

$$\frac{\Delta P}{\rho U_x^2/2} \times \frac{X}{l/h}$$

where  $X$  is the axial distance from the test section entrance,  $\Delta P$  the pressure differential between the plenum and the axial position  $X$ ,  $\rho$  the fluid density and  $U_x$  the mean axial velocity.

Figures 4 shows data for the non-dimensional pressure drop in terms of the Reynolds number and the lateral positioning angle  $\theta$ . The figure clearly shows the spreading of data in the flow developing region for all three  $Re$ . It is interesting to notice that, in this region, pressure drops below the helix ( $\theta \approx 30^\circ$ ) are systematically lower than losses above the wire ( $\theta \approx$



300°. These results are somewhat expected since the flow at the test section entrance is nearly vertical. Increasing the local pressure at positions right upstream to any obstacle in the channel. These data clearly indicate that this transverse pressure difference is the driving mechanism by which air is pushed tangentially, forced to a spiral pattern induced by the flow passage.

Using the same argument it is also interesting to note the above mentioned transverse pressure drop for all measured axial stations in Figure 4. For the lowest Re case, pressure drops for small angles can be seen to be consistently lower than for higher angles at nearly all axial positions. The strong pressure difference in the entrance region dumps out as the fluid moves along into the channel, but a residual lateral pressure drop still indicates a pushing action in the direction of the helix. The data also seem to indicate that the flow can be considered fully developed ( $\Delta P/\Delta X = \text{constant}$ ) for  $X/D_h \leq 30$ , regardless of the value of Re. The developing length  $X_d$  is here considered as the average distance, in the axial direction, for which a situation of constant pressure drop can be considered along the measured streamlines. Limitation of the range of Re investigated, however, precludes the drawing of any conclusion about the effect of Re on the developing distance  $X_d$ .

The friction factor,  $f$ , defined as:

$$f = \frac{\Delta P}{\Delta X} \left[ \frac{D_h}{\rho U_x^2 / 2} \right] \quad (2)$$

is calculated for the developed region ( $\Delta P/\Delta X = \text{constant}$ ) and shown in Table 1. Also shown is the pressure gradient and the developing length  $X_d$  along with other measuring parameters.

Table 2 compares the experimentally obtained friction factors with results from the literature for tube and annular channel. The present data are lower than the  $f$  given by the Blasius formula and by the correlation of Brighton and Jones[6]. An explanation for this behavior is difficult to be obtained, since the geometry and experimental conditions were different in each case. Nevertheless, Table 2 is here included for the sake of completeness in presenting available information on channels with geometry as close as possible to the present test section. By inspecting Table 2 it is also interesting to note that a minimum appears for  $f$  at  $Re = 35500$ , whereas the correlations for the other two geometries indicate decreasing functions with Re. With such a narrow range for Re, however, definitive conclusions on the overall dependence of  $f$  on Re are equally difficult to be drawn.

#### CONCLUDING REMARKS

This paper presented experimental data on pressure losses for flow of air in annular channel with a helicoidal wire. Results clearly show a developing region for the pressure field followed by a fully-developed constant-pressure-drop section along the streamlines. Data for friction factors are compared with correlations for tubes and annular channel. The narrow range for Re measured limits observations on the general behavior of  $f$  as a function of the important flow parameters, but the results here shown are expected to contribute and provide some insight to further studies on the flow field in reactor fuel assemblies.

#### ACKNOWLEDGEMENT

Preparation of this paper was made possible by the support of CNPq, Brazil, under contract #30.2278/86.

#### REFERENCES

- 1] Trupp, A.C., THE STRUCTURE OF TURBULENT FLOW IN TRIANGULAR ARRAY ROD BUNDLES, PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of Manitoba, Winnipeg, Canada, 1973
- 2] Caraiilescov, P., Todreas, N.E., EXPERIMENTAL AND ANALYTICAL STUDY OF AXIAL TURBULENT FLOW IN AN INTERIOR SUBCHANNEL OF BARE ROD BUNDLES, ASME Publication, 75-WA/HT-51, 1976
- 3] Rehme, K., THE STRUCTURE OF TURBULENT FLOW THROUGH ROD BUNDLES, Proc. 3rd International Topical Meeting on Reactor Thermal Hydraulics, Rhode Island, vol. 2, pp. 16-A.1, 16.A-8, 1985
- 4] Lafay, J., Menant, B., LOCAL PRESSURE MEASUREMENTS AND PERIPHERAL FLOW VISUALIZATION IN A WATER 19-ROD BUNDLE COMPARED WITH FLICA II B CALCULATIONS: INFLUENCE OF HELICOIDAL WIRE-WRAP SPACER SYSTEM, ASME Publication, 75-HT-22, 1976
- 5] Ohtake, T., Uruwashii, S., Takahashi, K., VELOCITY MEASUREMENTS IN THE SUBCHANNEL OF THE WIRE-SPACED SUBASSEMBLY, Nuclear Technology, vol. 30, pp. 333-349, 1976
- 6] Brighton, J.A., Jones J.B., FULLY DEVELOPED TURBULENT FLOW IN ANNULI, J. Basic Eng., vol. 9, p. 835, 1964

Table 1 - Pressure Gradient and Friction Factors

$X_d/D_h$	$Re \times 10^{-4}$	$U_x$ [m/s]	$\Delta P/\Delta X$ [kg/m <sup>2</sup> /m]	$f \times 10^{-3}$
≥30	2.26	21.85	29	5.0
≥30	3.55	34.21	73	4.64
≥30	4.52	43.56	123	4.71

Table 2 - Comparison of Friction Coefficients

Author Geometry	Correlation for " $f$ "	$f \times 10^{-3}$		
		$Re=$ 22600	$Re=$ 35500	$Re=$ 45200
Blasius Pipe	.079 $Re^{-.25}$	6.44	5.75	5.42
Brighton & Jones[6] Annulus	.087 $Re^{-.25}$	7.10	6.34	5.97
Present Work Annulus w/ Helic. wire	-----	5.0	4.64	4.71

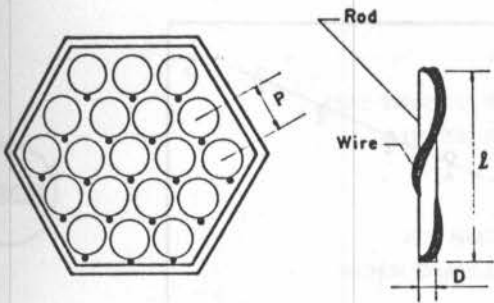


FIG. 1 - LMFBR 19-ROD FUEL ELEMENT GEOMETRY

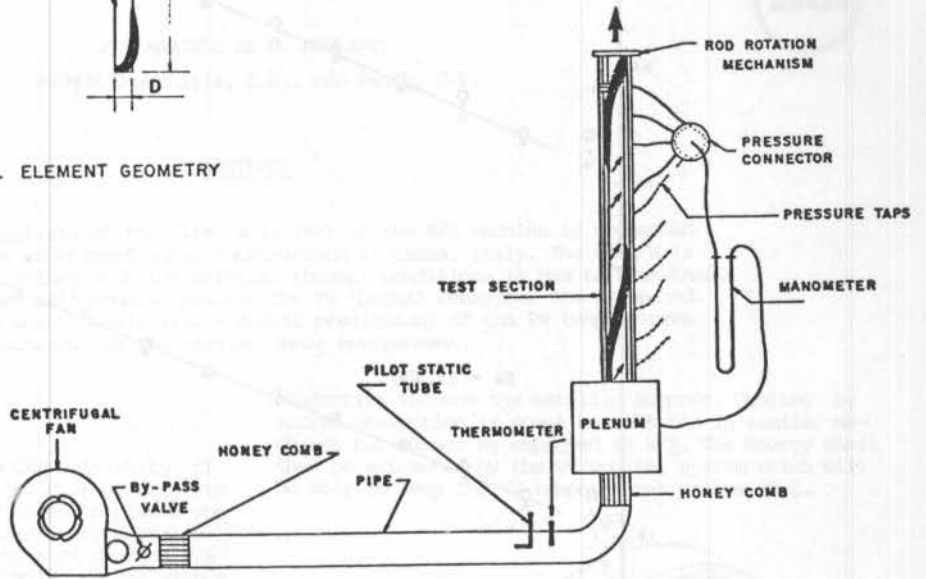


FIG. 2 - EXPERIMENTAL APPARATUS

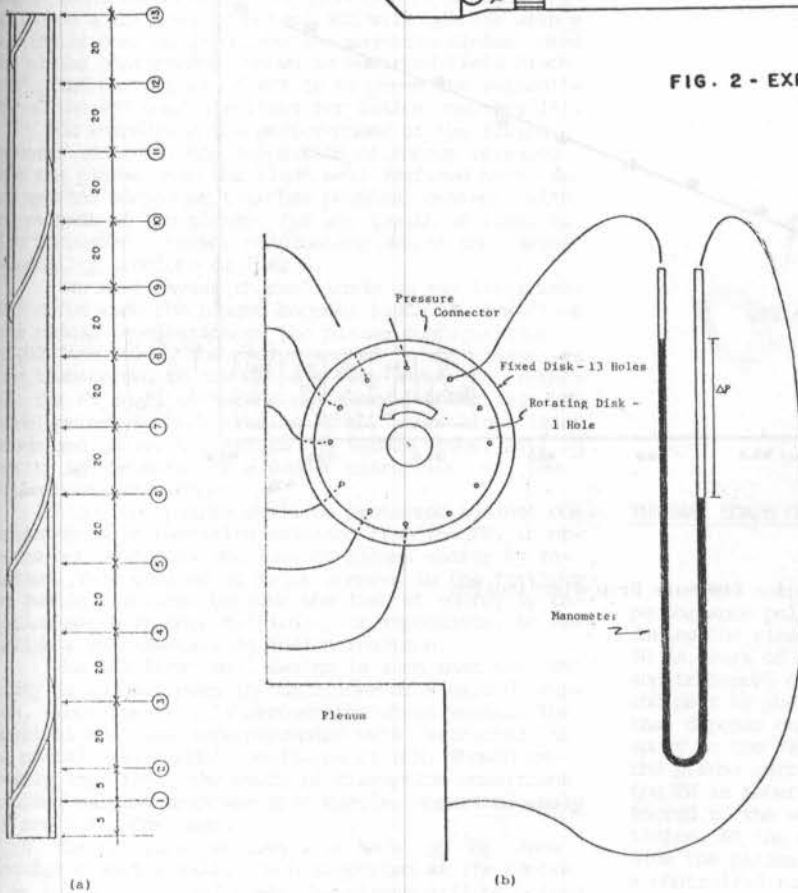
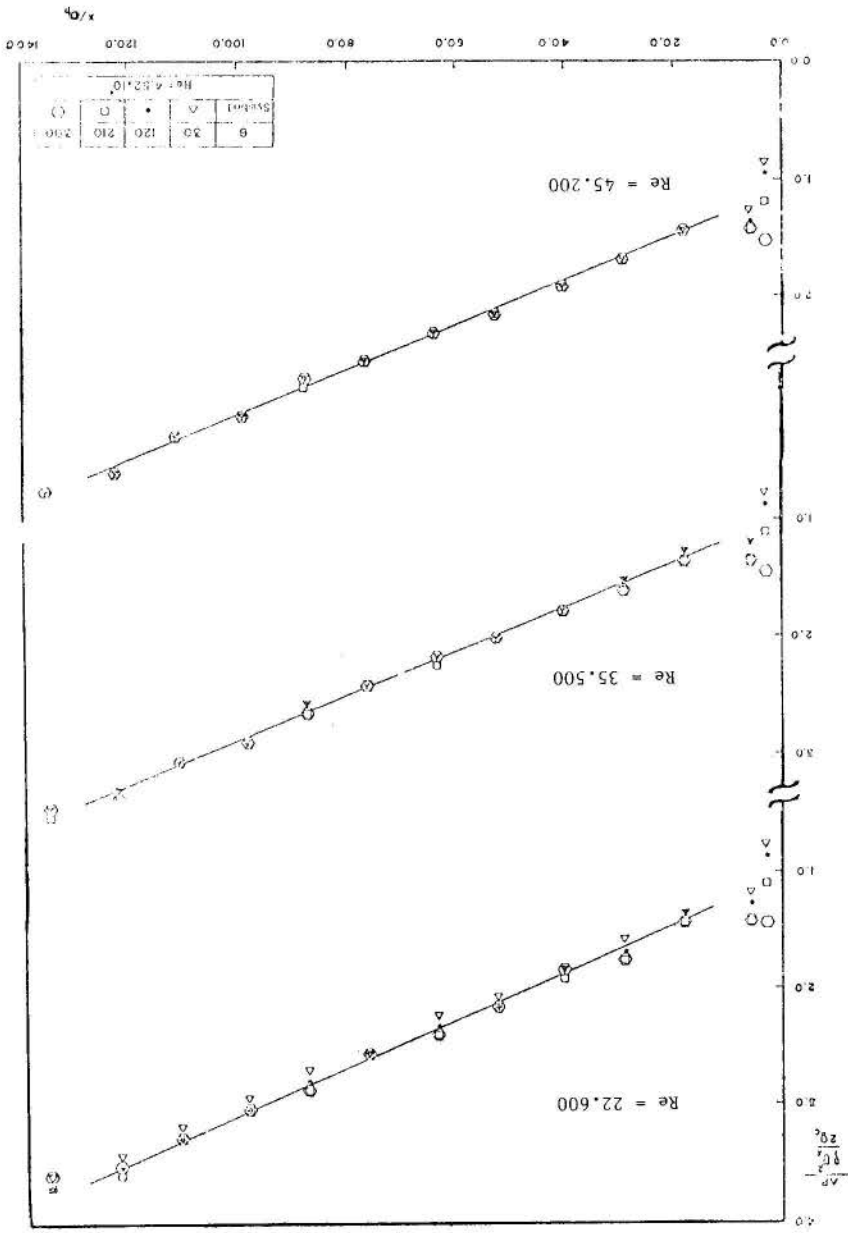


Fig. 3 - Pressure Taps Location: (a) Axial Distribution, (b) Pressure Connector

Fig. 4 - Pressure Drop Characteristics



HEAT TRANSFER PHENOMENA IN THE FIRST WALL  
OF THE RFX FUSION EXPERIMENT



RUY MARCELO DE O. PAULETTI  
PROMON Engenharia, S.A., São Paulo, S.P.

ABSTRACT

The thermal analysis of the first wall (FW) of the RFX machine is presented. RFX is a large fusion experiment under construction at Padua, Italy. The RFX FW is briefly described, together with the critical thermal conditions it has to withstand. The numerical analyses performed to predict the FW thermal behaviour are presented. 1-D and 2-D finite element models give accurate predictions of the FW temperatures and of the thermal exchanges in the machine inner environment.

INTRODUCTION

The RFX Project (an EURATOM-CNR-University of Padua Association) is among the major current projects on controlled thermonuclear fusion based on plasma confinement with magnetic fields. Like many other research machines presently in operation or design, RFX will have a toroidal geometry, and will operate with a particular configuration for the magnetic fields used for plasma confinement, known as Reversed Field Pinch (RFP). The basic goal of RFX is to prove the suitability of the RFP configurations for fusion reactors [1].

On increasing the performances of the fusion research machines, the deposition of energy released from the plasma onto the first wall (defined here as any reactor component that has physical contact with any segment of the plasma, for any length of time) is also increased, thereby originating one of the major feasibility problems of fusion.

The most severe thermal loads on the first wall (FW) occur when the plasma becomes instable, resulting in a sudden termination of the plasma configuration, called disruption. The energy stored in the plasma is then transferred to the FW in a very short time interval. The FW shall withstand the thermal power flux of normal pulses without erosion or any other significant damage and, moreover, assure the vacuum vessel (VV) integrity in the event of a sudden disruption of the plasma configuration.

Also, the plasma shall be protected against contamination with particles released from the FW, in order to not intensify the loss of plasma energy by radiation. This will be of major concern in the forthcoming fusion reactors, because the loss of energy by radiation makes it more difficult, or impossible, to establish a self-sustaining fusion reaction.

The RFX first wall design is such that the W safety is assured even in conditions of a hard disruption, since the FW will recover the whole vessel. The numerical analyses here presented were restricted to the normal operational conditions of RFX. Though extremely important, the study of disruption conditions involves so many unknowns that complex numerical analyses are not undertaken.

The RFX first wall will be made up by rectangular graphite tiles, each supported at its centre by an austenitic steel clamp. The clamps will be bolted to the 72 massive rings of the W (fig. 1) [2]. Tiles will have dimensions varying from a minimum of 90mm x 126mm inside the torus, to a maximum of 90mm x 208mm at the outside, and will have a thickness of about 20 mm.

Heat transfer from the FW towards the W will occur by radiation from the rear tile surface and by

conduction through the metallic support. Cooling by forced convection is sometimes adopted in similar machines but cannot be employed in RFX. The energy shall then be extracted by the W cooling system which will be able to keep the W temperatures below 90 C.

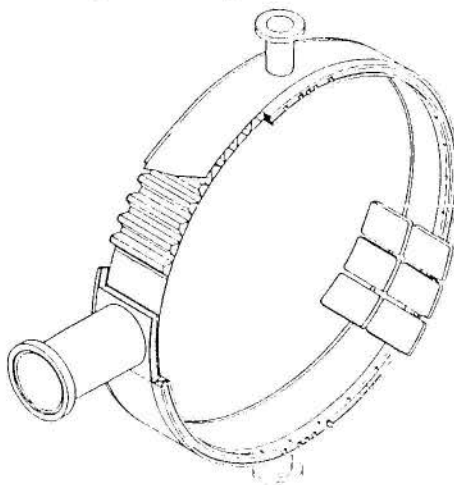


Fig. 1 Wedge shaped vessel element

THERMAL LOADS ON THE FIRST WALL

The energy dumped onto the FW during a full-performance pulse ( $I_p = 2$  MA) is estimated to be 6 MJ during the rise of the plasma current, which lasts about 30 ms. Part of this energy is transferred by radiation and transport of neutrons, with uniform distribution, and part by charged particles, with a flux distribution that depends on the eccentricity of the plasma with respect to the FW toroidal axis. During the flat-top of the plasma current (250 ms), the energy deposited on the FW is about 9 MJ, which are presumed to be transferred to the wall mainly by transport of charged particles. At the end of the pulse, the energy stored inside the plasma, about 5 MJ, is dumped onto the FW. In a controlled rundown of the plasma pulse, the current termination may be soft, with a timescale similar to that of current rise, that is, 30 ms.

Fig. 2 shows the poloidal distribution of the thermal flux, symmetrical with respect to the equatorial plane and independent of the toroidal coordinate. It assumes a plasma displacement of 3.0 cm from the machine axis and the whole thermal flux coming from particle transport.

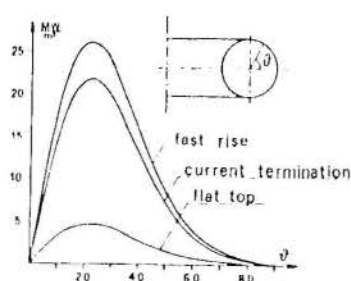


Fig. 2. Thermal load on the first wall

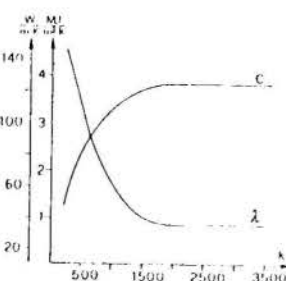


Fig. 3. Physical properties of graphite

#### NUMERICAL ANALYSIS

Due to the geometrical and loading complexities as well as the many types of heat transfer process and the nonlinear material properties involved, the analysis of the thermal behaviour of the RFX first wall had to be performed by means of numerical methods.

**One-dimensional analysis.** An 1-D model, with the ADINA code [3], determined the operational temperature range of the FW and considered the variations of the thermal response as function of the properties of the tile materials. The dependence of the graphite physical properties on temperature is shown in fig. 3.

In order to correctly describe the high thermal gradients near the tile surface facing the plasma (front surface), the distances between the nodes near the surface were kept very small.

As far as the temperature range in a single pulse was concerned, the FW could be approximated by a semi-infinite solid [4]. However, over larger time-scales, the energy transferred during several plasma discharges raises the FW temperatures and radiation towards  $\gamma$  to  $\mu$  rays. After some cycles, a balance is achieved between the heat absorbed by the FW during the pulse and the heat drained by the WV during the dead time. The minimum dead time prescribed to RFX is 10 minutes.

Initially, radiative heat exchange between grey surfaces, given by Lambert's law, Eq. (1), was assumed to occur between FW and WV.

$$q = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 (T_1^4 - T_2^4)}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_2} \quad (1)$$

where  $T_1$  and  $T_2$  are the temperatures of surfaces  $I_1$  and  $I_2$ ;  $\epsilon_1, \epsilon_2$  is an exchange coefficient between the surfaces and  $F_{12}$  is a shape factor, a function of the surfaces geometry. The FW-WV exchange factor is mainly influenced by the Inconel (the WV material) emissivity, for it is considerably lower than graphite one. Varying the Inconel emissivity from 0.4 to 0.3, typical values, the time needed to reach thermal equilibrium rises from two to two and a half hours from the beginning of the operation, that is, 12 to 18 plasma discharges (Fig. 4).

The transients were determined applying a simplified thermal flux (such that the incident energy and pulse duration were preserved). When the thermal equilibrium was achieved, the model was loaded with a more refined stepped transient, in order to determine the peak temperatures. With the former Inconel emissivity, the maximum temperature at the tile surface rose up to 1450 K, at the end of the pulse. After about 3 seconds, the temperatures along the tile thickness became practically uniform at 740 K, decaying then to 640 K, after 10 minutes of dead time. With the second value, these characteristic temperatures increased to about 1500 K, 790 K and 690 K, respectively. Fig. 5 shows temperatures at several depths along the tile, with the Inconel emissivity equal to 0.3.

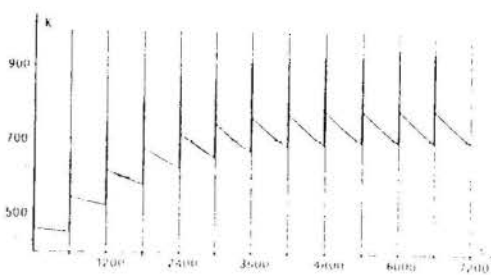


Fig. 4. Long time analysis of graphite tile temperature in the hottest zone

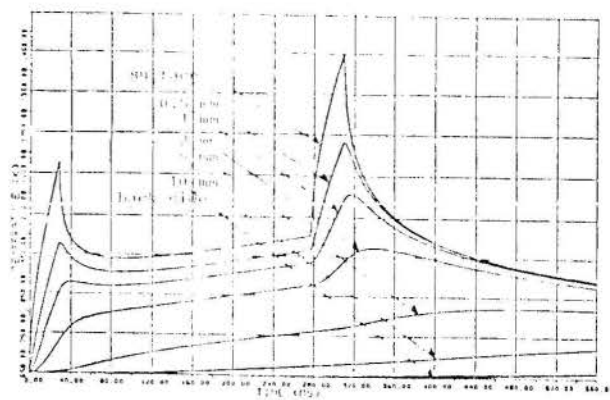


Fig. 5. Temperatures along the tile thickness

The calculations reported above indicated that, was the FW cooled only by the radiation towards the WV, the temperatures at the tiles would lead to undesirable operational conditions, in terms of chemical damage to the wall and plasma pollution [4]. A model of increased complexity was therefore necessary to validate the FW design. The radiative exchanges between the tiles at different temperatures were then considered.

The model was assumed to radiate to a black body, which assimilated the whole FW, and which temperature followed the equilibrium temperature transient of the FW under the average thermal load (if the plasma is perfectly controlled with respect to the machine torus, the FW is submitted to an uniform average load and its behaviour is perfectly described by the 1-D model). Equilibrium is reached after three hours of operation, the FW temperature rising up until 625 K, at the end of the pulse, then falling until 505 K at the end of the dead time.

Now the temperature at the wall surface rose up to 1310 K at the end of the discharge; after some seconds it was equal to 660 K and decrease to 560 K at the end of the dead time.



2-D models. Considerable simplifications were introduced in the 1-D model, so that the previous results could only be taken in their magnitude. An accurate analysis should consider the radiative heat exchanges between several mutually irradiating surfaces, disposed in a well defined geometry.

Due to the geometrical and loading axisymmetry, the general, 3-D thermal problem was reduced to a two dimensional one. On the other hand, the equatorial symmetry was not considered, because it holds only for the specific load case under examination [5].

Radiative exchanges between tiles at different temperatures depend upon the fourth power of their temperatures and upon their mutual shape factors. The shape factors have been analytically calculated, after approximating the toroidal enclosure with a cylindrical one. Integration of expression (2) over the whole FW inner surface, for every radiative segment, led to the determination of the required values.

$$F_{ij} = \frac{1}{L_i} \int_{L_i} \int_{L_j} \frac{\cos\theta_i \cdot \cos\theta_j}{2 \cdot d} dL_i \cdot dL_j \quad (2)$$

where  $\theta_i$  and  $\theta_j$  are the angles between the normals to the line segments  $i$  and  $j$  and the line connecting their centres, and  $d$  is the distance between them.

It was assumed that the FW screened the whole WV and that its meridional section had the shape of a circular ring 20 mm thick. Between two adjacent tiles, no heat transfer was considered, since they are separated by vacuum and their mutual radiative heat exchange is negligible. The FW rear surface considered radiative exchange with the WV wall. Each rear radiative segment had a unit shape factor and the WV temperature was 363 K. Conduction through the tile supports was initially disregarded. Graphite was considered to behave like a grey body.

The phenomenon was simulated with the code TOPAZ [6]. The model had a mesh with 1200 nodes, and the whole FW was divided into 840 2-D solid elements with nonlinear material properties. Each tile was defined by 28 elements regularly disposed in a set of  $4 \times 7$  elements with different sizes in the radial direction (very thin near the front tile surface and thicker towards the rear surface); the poloidal width of the tile was equal to 3 degrees.

Beginning with the whole FW at 505K (equilibrium temperature just before a plasma shot, when the average thermal load is applied), a series of pulses was simulated, until another state of equilibrium was achieved. The temperature transients obtained were in agreement with those calculated with the 1-D model. For the more stressed tile, the maximum equilibrium temperature reached 1250 K at the end of the pulse. After some seconds the temperatures along the thickness became uniform at 635 K, falling until 545 K at the end of the dead time. The front surface temperatures are shown in fig. 6, for several instants during the thermal cycle. It is remarkable that the temperatures in the internal zone of the torus are practically uniform and constant in time, at 475 K.

The maximum flux towards the inside (fig. 7) is  $93 \text{ kW/m}^2$  at the end of the discharge, falls to about  $5 \text{ kW/m}^2$  after some seconds and returns to  $1.3 \text{ kW/m}^2$  when the thermal cycle is completed. The radiative exchanges among the tiles do not contribute to damp the rise of surface temperatures during the pulse, for the radiative flux is three orders of magnitude lower than the incident flux. However, their contribution does become important during the dead time between two successive pulses, cooling the hottest tiles by redistribution of the incident heat.

Whilst the flux towards the inside of the cavity has an abrupt variation during the pulse, the flux towards the WV (fig. 8) has a much softer variation. Even if the WV temperature is lower than that of the FW, in the zones of maximum temperatures the flux towards the inside is always higher than the flux towards the out-

side. Therefore, for the hottest tiles, the redistribution of heat by radiation towards the inside of the FW cavity counts more than the flux towards the WV. This happens because the exchange coefficient between graphite and Inconel is very low, due to the low Inconel emissivity.

In overall scale, the energy transfer from FW to WV is almost linear with time and fairly uniform in space. The FW provides an efficient thermal shield to the WV, absorbing heat impulsively and releasing it continuously.

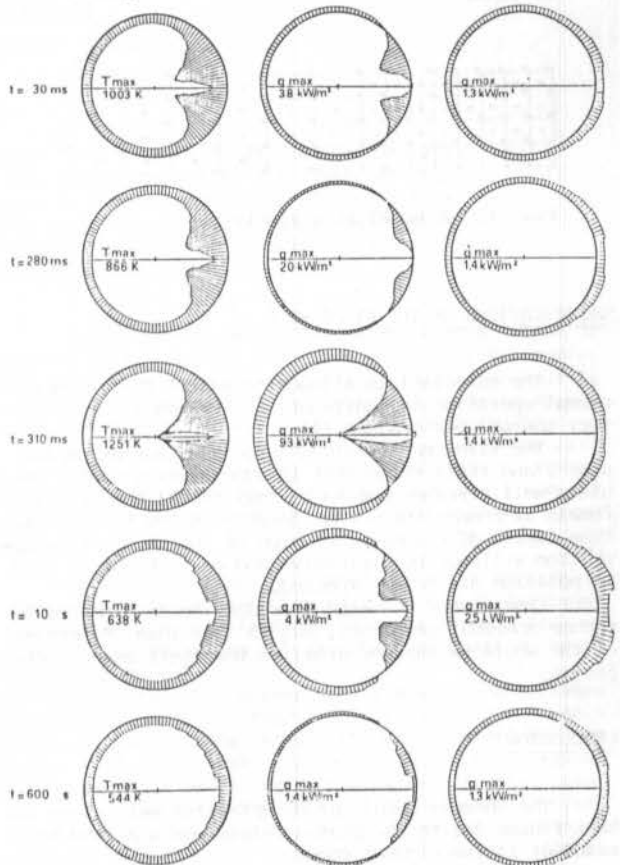


Fig. 6 Inner surface temperature Fig. 7 Radiation heat flux towards the inside Fig. 8 Radiation heat flux towards the vessel

**The effects of thermal conduction.** Thermal conduction through the tile supports was evaluated with a 2-D model of a single tile, using the code ADINAT, (fig. 9). The model had 108 nodes, and was constituted by 3 groups of elements. Graphite was divided into a group of 56 elements with nonlinear material behaviour, the stainless steel clamp into a group of 20 linear elements and the contact resistance between graphite and steel into a group of 6 thin elements with a suitable thermal conductivity.

Compared to the case in which only radiation was assumed to act, inclusion of conductive heat transfer led to equilibrium temperatures nearly 100 K lower. With a contact conductance of  $1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ , the maximum temperature rose to 1100 K; as the temperatures became uniform along the tile thickness, they fell to 545 K; at the end of the dead time, they were about 450 K.

This substantial decrease in the equilibrium temperatures tends to reduce the radiative flux among the tiles, thus the actual fluxes towards the WV are not so uniform as determined before. Disregarding conduction is, however, a conservative figure to the FW verifications.

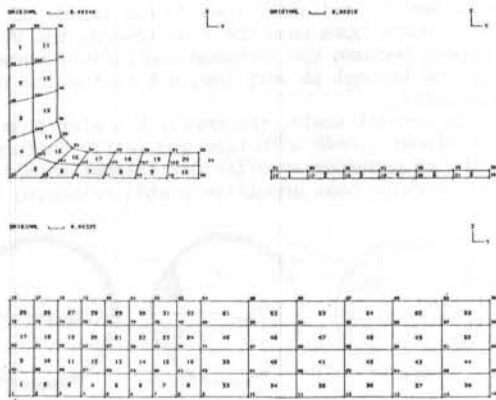


Fig. 9. 2-D model of a single tile

#### VERIFICATIONS OF THE FIRST WALL

The calculations allowed to assert that, under normal operational conditions, the FW has a satisfactory thermal performance [4].

The tiles may freely undergo the thermal expansion, and it is known that in such cases graphite resists well stresses due to thermal shock; the FW will remain at temperatures considerably below the sublimation limits of graphite; erosion of the FW due to evaporation will not be expressive and no problems of plasma pollution are to be expected.

Erosion due to methane production is expected to become somewhat important, but in less than 10 percent of the whole FW surface area, in the limit case studied herein.

#### CONCLUSION

The thermal behaviour of RFX first wall under the heat fluxes due to the plasma pulses was analysed by means of finite element codes.

The temperature transients related to the assumed thermal flux define the upper bound of the FW temperatures and was calculated with a 2-D model. The lower bound corresponds to a perfectly centred plasma, and was studied in an 1-D model. Starting with the FW at the same uniform temperature of the WV, the FW heats until a cyclic equilibrium is reached, after 2 or 3 hours of operation, with a temperature field bounded by the two limit cases. Good mechanical and chemical performances are expected under this thermal field.

The radiative heat flux from the hottest to the coldest tiles was shown to be essential to cool the hottest tiles themselves. Although its intensity is very low, compared to the incident flux, the radiative flux among the tiles subsists all along the time, and constitutes the more important phenomenon in cooling the more stressed tiles.

The heat flux towards the WV is low, if compared to the energy flux released from the plasma. It has a very soft variation in space and time. This confirms the shielding effect of the FW, which transforms the pulsed thermal load from the plasma into a continuous load, globally linear, towards the WV.

#### FINAL REMARKS

All the computational work presented herein was performed during the author's enrolment in the Specialization Course on Plasma and Controlled Thermonuclear Fusion Engineering, held at the University of Padua. The author wishes to thank PROMON Engineering for making available time during his activities there to work in the preparation of this paper.

#### REFERENCES

- [1] Rostagni, G. et al., *The RFX Project: A Design Review*, 13th Symposium on Fusion Technology, (1984).
- [2] Elio, F. et al., *RFX First Wall and Vacuum Vessel Design*, 11th Symposium on Fusion Engineering, Austin, USA, (1985).
- [3] ADINAT - Automatic Dynamic Incremental Analysis of Temperatures, *Adina Engineering*, (1981).
- [4] Pauletti, R., *Analisi Termica della Prima Parete del Esperimento RFX*, Tesi del Corso di Perfezionamento in Ingegneria del Plasma e della Fusione Termonucleare Controllata, Istituto di Elettrotecnica e di Elettronica, Università di Padova, Italia, (1986).
- [5] Elio, F., Gnesotto, F. Pauletti, R., Sonato, P., *Performance Analyses of a Full Graphite Armour for RFX*, 14th Symposium on Fusion Technology, Avignon, France, (1986).
- [6] Shapiro, A., *TOPAZ - A Finite Element Heat Conduction Code for Analysing 2D Solids*, Lawrence Livermore Laboratories, USA, (1984).

ANÁLISE TÉRMICA DO TANQUE DE MISTURA DE SÓDIO E TUBULAÇÃO A SUA JUSANTE, DO CIRCUITO SS-050, DURANTE UM CHOQUE TÉRMICO

ABCM

ABCM

CARLOS ALEXANDRE DE J. MIRANDA  
ANIBAL N. GEBRIM

Departamento de Reatores - IEN/CNEN

RESUMO

Neste trabalho desenvolve-se um procedimento para a obtenção da evolução das temperaturas do sódio entre o tanque de mistura, com volume constante, e o tanque de drenagem do circuito de testes de sódio SS-050, para um choque térmico de  $-200^{\circ}\text{C/s}$ . Este circuito a sódio será instalado em breve na área do IEN/RJ. A partir das curvas com a evolução das temperaturas do sódio durante o transiente, obtém-se a evolução/distribuição das temperaturas nas paredes da tubulação e bocais.

INTRODUÇÃO

**Descrição do Circuito.** O circuito a sódio SS-050 foi projetado para a realização de provas termomecânicas e de pequenos componentes em sódio e é um instrumento capaz de permitir o desenvolvimento de competência na área. Em particular são possíveis estudos de materiais e equipamentos projetados para funcionarem com sódio líquido a temperatura da ordem de  $500^{\circ}\text{C}$  e  $600^{\circ}\text{C}$ , como bombas eletromagnéticas e centrífugas, trocadores de calor sódio-sódio e sódio-ar, medidores de vazão e pressão, sondas de nível contínuas e descontínuas, detectores de sódio, etc. Também é possível estudar o comportamento dos materiais a estes níveis de temperatura sob o efeito de choques térmicos repetidos em presença de esforços mecânicos que podem ser aplicados durante longos períodos, dando origem a fenômenos de "ratchetting", "creep" e danos por fadiga oligocíclica, etc. [1].

A parte do circuito SS-050 que interessa ao presente trabalho está esquematizada na fig. 1, onde são indicados os principais componentes.

Imediatamente após a SdP encontra-se o tanque de mistura (TM), contendo uma certa quantidade de sódio, inicialmente a temperatura final do transiente, cuja finalidade é atenuar o choque térmico no restante do circuito a sua jusante, até o tanque de drenagem (TD).

O sódio penetra no TM por um tubo com furos laterais imerso no sódio do TM, criando um fluxo radial aproximadamente constante e forçando a mistura com o sódio que se encontra no TM, após o que o mesmo segue para o TD.

**Objetivo do Trabalho.** Neste trabalho apresenta-se uma formulação analítica para a obtenção das temperaturas em um fluido (sódio) que escoar através de um tanque de mistura (com volume constante), até um outro tanque (de dreno).

São obtidas as curvas da variação da temperatura do sódio ao longo do tempo e da tubulação para dois casos. O primeiro caso é uma situação hipotética com temperatura de ingresso constante a  $600^{\circ}\text{C}$  e o segundo caso representa uma situação típica do circuito: choque térmico na SdP de  $-200^{\circ}\text{C/s}$ . Para o segundo caso calcula-se o campo de temperatura na região do bocal de saída do TM através de um modelo de elementos finitos.

MODELO DE CÁLCULO ADOTADO NA ANÁLISE TERMOHIDRÁULICA

A discretização espacial do TM e da tubulação a sua jusante, até o reservatório TD, em um determinado número de pontos  $N1$  e  $N2$  respectivamente, é mostrado na fig. 2.

A taxa líquida de energia que permanece no volume  $\Delta Vi$ ,  $i=1, N1$ , indicado esquematicamente na figura 3, é resultante do seguinte balanço energético:

- Taxa de calor que penetra pelo lado esquerdo,  $m^*CT^*$ , onde  $m^*$  é a vazão constante do trecho de tubo furado,  $C$  é o calor específico, e  $T^*$  é a temperatura imposta causadora do choque térmico.
- Taxa de calor que chega por cima,  $m^{**}CT^{**}$ , onde  $m^{**} = (i-1)m^*$  e  $T^{**} = T_{i-1}$  é a temperatura média do volume  $\Delta Vi-1$ .
- Taxa de calor que sai por baixo,  $m^{***}CT^{***}$ , onde  $m^{***} = im^*$  e  $T^{***} = T_i$  é a temperatura média no volume  $\Delta Vi$  que queremos determinar.
- Taxa de calor entre a parede metálica e o sódio,  $Qi$ .

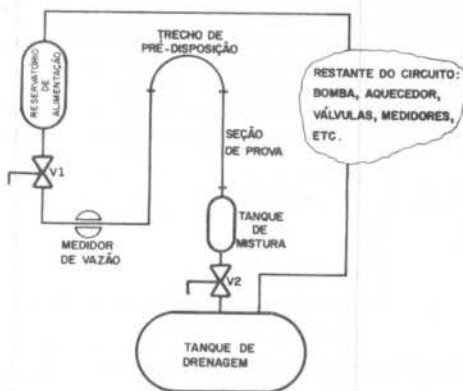


Figura 1 - Trecho do circuito SS-050

**Mecânica dos Testes de Choque Térmico.** Após a regulagem da válvula V1 e com a válvula V2 fechada, cria-se o perfil de temperatura desejado do sódio, por exemplo, de  $600^{\circ}\text{C}$  a  $400^{\circ}\text{C}$ . A válvula V2 de acionamento rápido é aberta por cerca de 10 seg, dando início ao fluxo de sódio. O transiente de temperatura na seção de provas (SdP), dura 1 seg, portanto a mesma sofre um choque térmico de  $-200^{\circ}\text{C/s}$ , para uma vazão máxima de  $30 \text{ m}^3/\text{h}$ .



Figura 2 - Discretização do TM e da tubulação a sua jusante ( $L_1=72,3$  cm,  $L_2=7,70$  m)

A equação que descreve o balanço energético no volume  $\Delta Vi$  é expressa como:

$$\rho \cdot C \cdot \Delta V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = m^* C T^* + (i-1) m^* C T_{i-1} - i m^* C T_i - \dot{Q}_i \quad (1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do sódio.

A taxa de calor recebida ou perdida para a parede é avaliada da seguinte maneira:

$$\dot{Q}_i = H_{tot} (\pi \phi_i \Delta Z) (T_i - T_{wi}) \quad (2)$$

onde  $H_{tot}$  é o coeficiente global de transferência de calor entre o sódio no volume  $\Delta Vi$  e a parede.  $T_{wi}$  é a temperatura média no volume  $\Delta Vi$  da parede e  $\phi_i$  é o diâmetro interno da parede (parte hachurada da fig. 3).

A temperatura média na parede é avaliada através da integração espacial da equação de conservação de energia aplicada na parede:

$$\rho_w C_w \Delta V_{wi} \frac{\partial T_{wi}}{\partial t} = \dot{Q}_i \quad (3)$$

onde  $\rho_w, C_w$  são respectivamente a densidade e o calor específico da parede.

As propriedades físicas do sódio e do metal (calor específico, densidade, etc) são considerados dependentes das temperaturas.

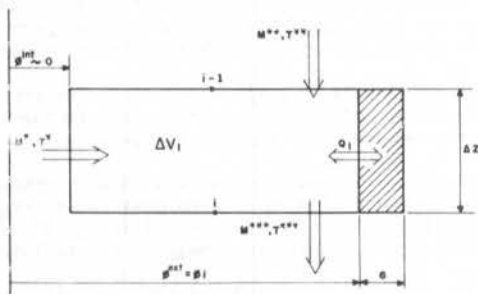


Figura 3 - Balanço energético no volume  $V_i$

O esquema numérico de integração temporal de Euler é utilizado na avaliação do comportamento das temperaturas,  $T_i$  e  $T_{wi}$ , no tempo, cujas seguintes expressões finais são obtidas.

$$T_i^{n+1} = \frac{(1 - m^* \cdot i \cdot \Delta t)}{\rho \cdot \Delta V_i} T_i^n + \frac{(i-1) \cdot m^* \cdot T_{i-1} \Delta t}{\rho \cdot \Delta V_i} + \frac{m^* \cdot T^* \Delta t}{\rho \cdot \Delta V_i} - \frac{Q_i \Delta t}{\rho \cdot C \cdot \Delta V_i} \quad (4)$$

$$T_{wi}^{n+1} = T_{wi}^n + \frac{Q_i \Delta t}{\rho_w C_w \Delta V_{wi}} \quad (5)$$

Assim, as expressões acima permitem o cálculo das temperaturas médias nos volumes  $\Delta Vi$  e  $\Delta V_{wi}$  no instante  $t^{n+1}$ , a partir dos valores já conhecidos no instante  $t^n$ .

O vazão  $m^*$  existe apenas nos NSV pontos iniciais em que foi discretizado o componente TM.

O procedimento anterior aplica-se, também, nos volumes  $\Delta V_j$ ,  $j=1, N_2$  da tubulação, onde não existe o fluxo lateral  $m^*$ .

#### TESTE REALIZADO

O teste a ser descrito abaixo mostra uma situação hipotética e serve para verificar o procedimento e o programa computacional elaborado.

'Step' na Temperatura. Criou-se uma situação hipotética, na qual a temperatura de ingresso no tanque de mistura (TM), mantém-se constante a  $600^\circ\text{C}$ . Como o volume do sódio é constante e o mesmo é renovado a cada instante, a temperatura final no tanque de mistura tem que ser  $600^\circ\text{C}$ . Este valor é realmente obtido, como é apresentado na figura 4. Nesta figura vê-se a evolução das temperaturas do sódio nos pontos 34 (extremidade do tubo furado), 40 (bocal de saída) do TM e no ponto 30 da tubulação (bocal do TD).

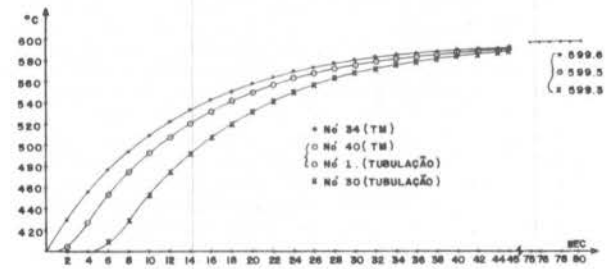


Figura 4 - Variação das Temperaturas em três pontos típicos durante um escoamento estacionário.

#### CHOQUE TÉRMICO FRIO

Análise Termohidráulica. Esta é a situação típica de funcionamento do circuito SS-050, durante uma campanha de provas onde se testa uma seção de provas a choques térmicos. Esta situação é a mais crítica para o circuito a jusante da seção de provas.

A evolução da temperatura do sódio de ingresso ( $T^*$ ), no tanque de mistura é apresentada na figura 5.

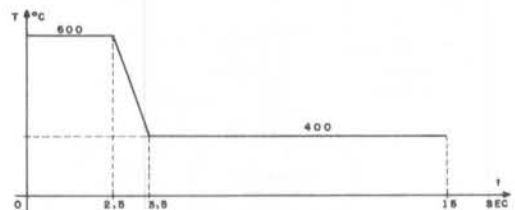


Figura 5 - Choque térmico frio de  $-200^\circ\text{C/s}$ .

O resultado da análise termohidráulica, em termos da evolução das temperaturas do sódio em 3 pontos do modelo, é apresentado nas figuras 6.a e 6.b. Pela figura 6.b pode-se notar que, no nó 34 (extremidade do tubo furado), a temperatura aumenta a taxa de  $15,5^\circ\text{C/s}$  aproximadamente e no bocal de saída do tanque de mistura, no nó 40, esta taxa cai para  $12,5^\circ\text{C/s}$ , enquanto que no nó 30 da tubulação (bocal do TD), cai para  $10^\circ\text{C/s}$ . Estes resultados mostram como a presença do tanque de mistura

reduz sensivelmente a gravidade do choque térmico no bocal de saída deste e na tubulação a jusante do mesmo.

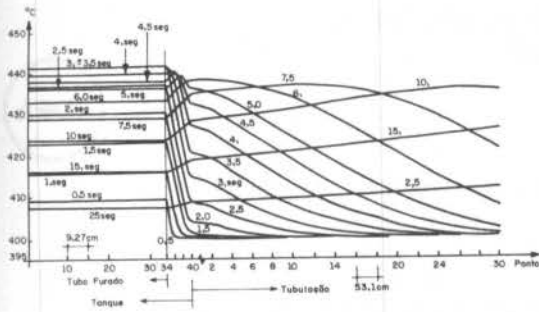


Figura 6.a - Variação das temperaturas, ao longo do trecho modelado, para alguns instantes de tempo.

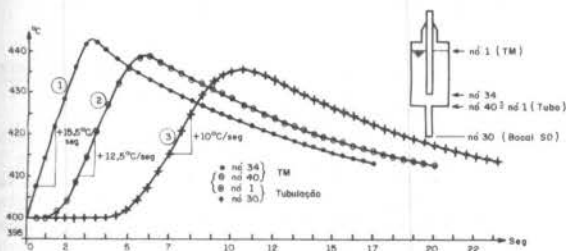


Figura 6.b - Variação das temperaturas, ao longo do tempo, em três pontos do modelo.

O intervalo de tempo usado nos dois transitórios mostrados acima, respeitou a seguinte expressão:

$$\text{Interv. de tempo} < \frac{Li}{Ni \cdot VELi} \quad (6)$$

onde  $L1, L2, N1, N2$  estão definidos na figura 2 e  $VELi$  é a velocidade do sódio no trecho  $Li$  (para  $i = 1, 2$ ).

#### ANÁLISE TÉRMICA NO FUNDO DO TM

A partir dos resultados obtidos com a análise termodinâmica, apresentada no item anterior, é possível efetuar análises térmicas nas paredes metálicas em qualquer ponto do circuito entre o TM e o TD, devido a variação de temperatura sofrida pelo sódio durante um choque térmico em uma campanha de provas.

**Bocal do Fundo Torosférico do TM.** A geometria do fundo do TM é apresentada na figura 7. A forte variação geométrica do fundo induz uma forte variação no coeficiente de troca de calor por convecção ( $h$ ) de 21950 até 1500  $W/m^2 \cdot ^\circ C$ .

Assim, existem no fundo do TM e em seu bocal de saída em particular, dois efeitos que se somam:

Gradiente Térmico na Espessura - produzido pela variação da temperatura do sódio no tempo.

Gradiente Térmico ao Longo do Fundo - devido a variação de  $h$  ocorre a variação da temperatura média, em um mesmo instante de tempo, em pontos diferentes do fundo.

**Análise Térmica.** Para a obtenção do campo de temperaturas foi utilizado o modelo a elementos finitos apresentado na figura 7. O programa térmico utilizado é capaz de efetuar análises térmicas em regime estacionário ou transiente.

Devido ao isolamento térmico previsto e a curta duração do transiente, a superfície externa do fundo/mo delo foi considerada adiabática. Na superfície interna foram definidos valores de  $h$  por zonas, como indicado

na figura 7. A temperatura do sódio imposta ao modelo é aquela apresentada na figura 6.b, curva 2.

A partir dos 12 s cessa o fluxo [1] portanto a temperatura do sódio permanece constante no valor alcançado neste instante.

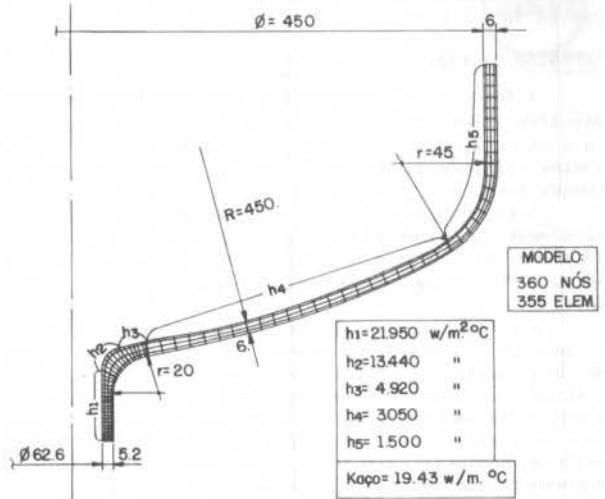


Figura 7 - Modelo de elementos finitos do fundo do TM utilizado na análise térmica.

As partes cilíndricas do modelo se estendem por um comprimento mínimo de  $2 \cdot \sqrt{rt}$ , onde  $r$  e  $t$  são, respectivamente, o raio e a espessura da parte interessada.

**Resultados.** Os resultados obtidos, em termos de temperaturas na seção onde ocorre o máximo  $\Delta T$  na espessura (seção no meio do "joelho" do bocal), são apresentados na figura 8, para alguns instantes de tempo selecionados. Na mesma figura também são apresentadas as temperaturas médias na referida seção e na calota esférica que a circunda,  $Tf$ .

Na figura 8 se observa: a) o  $\Delta T_{max} = 16^\circ C$ ; b) o gradiente max. entre a calota esférica e o bocal é de  $9^\circ C$ ; c) os valores máximos ocorrem praticamente no

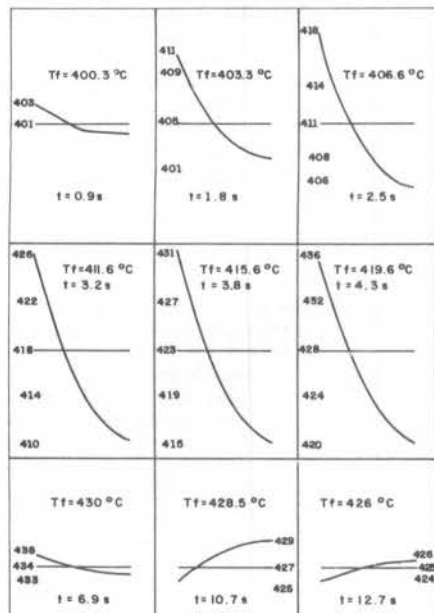


Figura 8 - Resultados da análise térmica



mesmo instante; d) verifica-se uma inversão no  $\Delta T$  na espessura, o que provocará tensões térmicas de flexão alternadas; e) idem, no  $\Delta T$  entre o bocal e a calota que o circunda, provocando tensões térmicas alternadas de membrana.

Tais resultados comportam-se dentro do previsto e permitirão o cálculo das tensões térmicas neste bocal, oriundas do choque térmico produzido na seção de provas do circuito.

#### COMENTÁRIOS FINAIS/CONCLUSÕES

A formulação desenvolvida para a análise termohidráulica apresentou resultados satisfatórios e permitirá a obtenção das curvas de variação da temperatura nos pontos críticos da tubulação para diversas hipóteses de choque térmico.

A existência do tanque de mistura (TM) reduz sensivelmente o choque térmico nos componentes a jusante do mesmo (de  $-2000^{\circ}\text{C/s}$  na seção de provas para cerca de 10 ou  $12^{\circ}\text{C/s}$ ) como evidenciado na análise termohidráulica.

A partir dos resultados desta última foi obtido o campo de temperaturas no bocal do fundo do TM para um choque térmico, na SdP, de  $-2000^{\circ}\text{C/s}$ . Os resultados mostram o caráter cíclico que terão as tensões térmicas oriundas de um choque térmico, cujo conhecimento preciso é necessário para a verificação a fadiga de um componente ou equipamento nuclear, principalmente se os mesmos são de uma central rápida refrigerada a sódio.

#### REFERÊNCIAS

- [1] CBR 05.00.NO209/0 - Nota Descrittiva e di Funzionamento.

#### ABSTRACT

In this work a thermo-hydraulic model was developed in order to obtain the sodium temperature time-history between the mixup tank (TM) and the drain tank of the SS-050 sodium test loop.

Results are presented relative to a thermal shock with initial and final sodium inlet temperatures of  $600^{\circ}\text{C}$  and  $400^{\circ}\text{C}$  respectively, with a thermal gradient of  $-2000^{\circ}\text{C/s}$ .

This sodium loop will be briefly installed in the IEN/RJ area.

From the sodium temperature time-history during the thermal shock transient the temperature field for the walls of the TM bottom and outlet nozzle is obtained.

AN INVESTIGATION OF LOADS GENERATED BY TEMPERATURE TRANSIENTS IN PIPES



C.E. MANESCHY

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-RJ

ABSTRACT

An analysis is presented of the effect of a transient temperature on the stress distribution in pipes. The temperature distribution due to a fluid flowing through a pipe, is analytically determined using the definition of a variable called in this paper as "shifted time". This variable, which is related to the axial coordinate, the average fluid velocity and the real time, is defined to make the transient thermal problem one-dimensional. The stresses are then calculated from the temperature solution using the linear theory of viscoelasticity.

INTRODUCTION

Thermal stresses can be generated by the non uniform heating (or cooling) of solids. With the variation of temperature, the body tends to deform and, if this variation is not the same at all points of the solid, the deformation generally can not proceed freely. This imposed constraint on deformation will develop thermal stresses.

Problems involving thermal loads have been solved for a wide variety of initial and boundary conditions including an instantaneous change in surface temperature [1] and heat transfer by convection [2]. Thermal stresses can also result from placing two bodies initially at uniform dissimilar temperature in thermal contact, with the transfer of heat occurring by direct conduction across the interface.

The thermal stress generation in polymeric material has been analyzed more recently. This type of material shows a time dependent response under constant loading which characterizes a viscoelastic body. The determination of stresses in a glass plate undergoing heat treatment, is an example of a problem of great industrial interest that is solved using the linear theory of viscoelasticity [3].

The purpose of this paper is to extend the theory used in the references cited above to determine the loads generated in a polymeric pipe when a safety valve is suddenly opened and a fluid is driven through the pipe. The pipe is initially at a uniform temperature and free of stresses. The fluid has a constant velocity and higher temperature. Under certain assumptions the analytic temperature distribution in the tube is determined and the thermal stresses, up to the time at which the front fluid reaches the pipe exit, are calculated from the temperature solution using the basic equations of viscoelasticity.

THE THERMAL PROBLEM

Consider the cylindrical pipe shown in Figure 1.a, of internal and external radius  $R_i$  and  $R_e$ , at a uniform temperature  $T_0$ . The tube geometry is such that the thickness is much smaller than the length ( $H = R_e - R_i \ll L$ ). Suddenly a security valve is opened at the pipe entrance and a fluid with an average velocity  $V_0$  and temperature  $T_f$  starts to flow. It is desired to determine the temperature distribution in the pipe wall up to the time at which the fluid front reaches the end of the tube.

In order to determine this temperature solution the following assumptions are made:

- 1) The internal wall temperature reaches the fluid temperature immediately after the contact.
- 2) Heat is lost from the fluid without changing

its temperature ( $T_f = cte$ ).

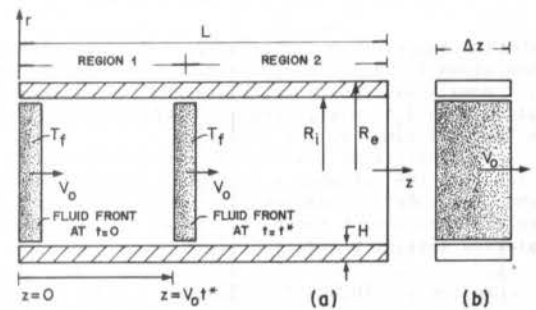


Figure 1: a) Pipe Geometry  
b) Element Located at Entrance of the Pipe

- 3) Convective heat transfer between the outside pipe surface and the external ambient.
- 4) Axial heat conduction in the pipe wall can be neglected ( $H/L \ll 1$ ).

As it can be seen from the Figure above, two regions are defined inside the pipe at each instant  $t = t^*$ : The region behind the fluid front (Region 1) and the region ahead of the fluid front (Region 2). According to the assumption 4, axial heat conduction is not to be considered and, therefore, the temperature solution in the two regions are of the form:

$$\text{Region 1: } T_1 = T_1(r, z, t^*) \quad 0 \leq z < V_0 t^* \quad (1)$$

$$\text{Region 2: } T_2(r, z, t^*) = T_0 \quad V_0 t^* < z \leq L \quad (2)$$

Consider now a pipe element of length  $\Delta z$  positioned at the tube entrance. This element is shown in Figure 1b at the time the valve is opened. Because axial heat conduction is neglected, the transient temperature distribution in this element, valid for all  $t > 0$ , is found by solving the following one-dimensional problem

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\bar{T}(r, 0) = T_0 \quad (4)$$

$$\bar{T}(R_i, t) = T_f \quad ; \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}(R_e, t) = -\frac{h}{k} [\bar{T}(R_e, t) - T_0] \quad (5)$$

where the new variable  $\bar{T}(r,t)$  is defined to emphasize that the thermal problem for the element is independent of the axial coordinate.

The transient problem for another element located at a distance  $z$  downstream from the previous one, will be initiated only after a time interval equal to  $z/V_0$ , i.e., after the fluid front reaches it. The solution of the problem for this new element, defined for all  $t \geq z/V_0$ , must satisfy a differential equation of the same form of equation (3). Therefore, if a "shifted time" variable is defined as

$$\tau = t - z/V_0 \quad (6)$$

Then the solution of the problem

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \quad (7-a)$$

$$\bar{T}(R_i, 0) = T_0 \quad (7-b)$$

$$\bar{T}(R_i, \tau) = T_f; \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}(R_e, \tau) = -\frac{h}{k} [\bar{T}(R_e, \tau) - T_0] \quad (7-c)$$

yields the temperature distribution for any element taken along the axial coordinate. This solution in the  $(r, \tau)$  domain is used to calculate the two-dimensional distribution  $T_1(r, z, t)$ , through direct substitution of the "shifted time" by the real time.

The analytical solution for equations (7) is found in [4]. If the variable  $\tau$  is, then, substituted by the right hand side of equation (6), the following temperature distribution in the pipe wall is determined at an arbitrary instant  $t = t^*$ :

Region 1:  $(0 \leq z < V_0 t^*)$

$$T_1(r, z, t^*) = T_0 + (T_f - T_0) \left[ \frac{k - R_e h \ln(r/b)}{k + R_e h \ln(b/a)} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 (t^* - z/V_0)} \frac{[k \lambda_n J_1(R_e \lambda_n) - h J_0(R_e \lambda_n)] C_0(r, \lambda_n) (T_f - T_0) [k \lambda_n J_1(R_e \lambda_n)]}{F(\lambda_n)} \right] \quad (8)$$

where  $\lambda_n$  are the roots of the eigenvalue equation

$$k \lambda [Y_0(R_i \lambda) J_1(R_e \lambda) - J_0(R_i \lambda) Y_1(R_e \lambda)] + h [J_0(R_i \lambda) Y_0(R_e \lambda) - Y_0(R_i \lambda) J_0(R_e \lambda)] = 0$$

$F(\lambda_n)$  is defined by

$$F(\lambda_n) = (k^2 \lambda_n^2 + h^2) [J_0(R_i \lambda_n)]^2 - [k \lambda_n J_1(R_e \lambda_n) - h J_0(R_e \lambda_n)]^2$$

and  $C_0(r, \lambda_n)$  is given by,

$$C_0(r, \lambda_n) = -Y_0(r \lambda_n) J_0(R_i \lambda_n) - J_0(r \lambda_n) Y_0(R_i \lambda_n)$$

Region 2:  $(V_0 t^* < z \leq L)$

$$T_2(r, z, t^*) = T_0 \quad (9)$$

### THE STRESS PROBLEM

The cylinder of Figure 1a, initially free of stresses, conveys a fluid with constant velocity and constant temperature. The fluid flow generates a temperature distribution in the pipe wall given by equations (8) and (9). This temperature transient field will develop stresses in the pipe that are to be determined. The pipe is assumed to be made of a polymeric material with viscoelastic characteristics and, therefore, a constitutive model that incorporates elastic and viscous effects should be derived.

Since, under hydrostatic stresses, materials behave almost perfectly elastically, it is convenient to decompose the stress and strain tensor,  $\sigma_{ij}$  and  $\epsilon_{ij}$ , into their mean portions  $(1/3)\sigma_{kk}$  and  $(1/3)\epsilon_{kk}$ , and deviatoric portions,  $S_{ij}$  and  $e_{ij}$ .

Then the mean strain rate is given by

$$\frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{1-2\nu}{3E} \dot{\sigma}_{kk} + \alpha' \dot{\Delta T} \quad (10)$$

where the superposed dot is used for differential with respect to time,  $\nu$  is Poisson's ratio,  $E$  is Young's modulus,  $\alpha'$  is the coefficient of linear thermal expansions, and  $T$  is temperature.

The deviatoric strain rate may be taken as the sum of two parts, elastic and viscous:

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^E + \dot{e}_{ij}^V \quad (11)$$

The elastic strain rate is given by the usual relation

$$\dot{e}_{ij}^E = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} \quad (12)$$

where  $G = E/2(1+\nu)$  is the elastic shear modulus.

For the viscous strain rate, we use the relations of the same form as that for the Maxwell body of viscoelasticity theory [5], that is

$$\dot{e}_{ij}^V = \frac{1}{2\eta} \dot{S}_{ij} \quad (13)$$

where  $\eta$  is the coefficient of viscosity. This equation can be used to represent a wide range of viscoelastic behavior.

Equations (10), (11), (12) and (13) can be combined into the single relation

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} + \frac{1}{2\eta} (\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk}}{3}) + \delta_{ij} \alpha' \dot{\Delta T} \quad (14)$$

In order to simplify the analysis, the pipe will be considered as a beam of circular cross section and only the axial components of stress and strain are taken into account. Under this assumption, equation (14) yields, after integration

$$\sigma_z + E \int_0^t \frac{\sigma_z}{3\eta} dt = E \epsilon_z - E \alpha \Delta T \quad (15)$$

The axial and transversal displacements of the beam, can be written as

$$U = u_0 - \zeta \frac{dw}{dz} \quad (16)$$

$$w = w_0 \quad (17)$$

where  $u_0$  and  $w_0$  are the axial and transversal displacements of a point on the neutral axis, respectively. The variable  $\zeta$  is the coordinate normal to the beam axis, which can be made to coincide with the radial coordinate of Figure 1a.

The longitudinal strain is related to the displacement through the expression

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_0}{\partial z} - \zeta \frac{d^2 w}{dz^2} \quad (18)$$

Since the pipe is free from external force, the equilibrium states

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} = 0 \quad (19)$$

with the bending moment, defined as

$$M_z = - \int_A \sigma_z \zeta dA \quad (20)$$

If the pipe deformation is not restricted in the axial direction, then

$$N_z = 0 \quad (21)$$

where the axial stress resultant is given by

$$N_z = \int_A \sigma_z dA \quad (22)$$

Equations (15) through (22) can be reduced to a single expression for the axial stress

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z}{E} + \int_0^t \frac{\sigma_z}{3\eta} dt' &= \frac{1}{EA} \left[ \int_0^t \bar{N} dt' + N_{zT} \right] - \\ &- \frac{\zeta}{EI} \left[ \int_0^t \bar{M} dt' + M_{zT} + Q_0 z + M_0 \right] - \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (23)$$

where

$$\bar{N} = \int_A \frac{\sigma_z}{3\eta} dA \quad (24)$$

$$\bar{M} = \int_A \frac{\sigma_z}{3\eta} \zeta dA \quad (25)$$

$$N_{zT} = \int_A E \alpha \Delta T dA \quad (26)$$

$$M_{zT} = \int_A E \alpha \Delta T \zeta dA \quad (27)$$

and  $Q_0$  and  $M_0$  are the static boundary conditions in  $z=0$ .

Equation (22), along with the boundary conditions  $Q_0$  and  $M_0$ , and zero initial condition, represent the boundary value problem to be solved after the temperature distribution is found from equations (8) and (9).

## RESULTS AND DISCUSSIONS

To illustrate the analysis the equations derived in the previous sections are applied to a pipe with the following geometry,

$$Re = 15 \times 10^{-2} m ; Ri = 5 \times 10^{-2} m ; L = 100m$$

The thermal and mechanical properties required in the calculation of temperature and stresses are:

$$k = 0,2 W/m^{\circ}C ; \alpha = 8,85 \times 10^{-8} m^2/sec ;$$

$$h = 7 W/m^2^{\circ}C \quad T_F = 90^{\circ}C ; T_0 = 20^{\circ}C$$

$$\eta = 83 \exp \left( \frac{18,65}{T+46} \right) \text{ for } T > 50^{\circ}C ; \frac{1}{\eta} = 0 \text{ for } T \leq 50^{\circ}C$$

$$E = 289 MPa ; \nu = 0,4$$

The temperature distribution was found from (8) and (9), with the first sixteen roots of the eigenvalue equation determined by a modified Newton-Raphson method. The solutions to the eigenvalue equations were checked against known results and were found to be well within the required accuracy. Figure 2 shows a typical temperature curve for various instants of time. It should be observed that for the two sections shown, the temperature pattern is the same. The thermal effect on the section located at a distance  $L/10$  apart from the pipe entrance, will not be noted until the fluid front reaches that section ( $t > 20$  sec).

The average velocity,  $V_0$ , plays an important role in the analysis. As it can be seen from the definition of the "shifted time" given by (6), high values of velocity will make the thermal problem dependent only on the radial variable. However, for small values of  $V_0$ , considerable temperature variation along the axial coordinate is established as it can be seen from Figure 3. All the graphs shown below were plotted assuming an average velocity of  $5 \times 10^{-2}$  m/sec.

The stress distribution in the pipe is shown in Figure 4. The initial response is invariable high compressive stresses on the inner surface of the tube. This is due to the immediate heating of the inner surface layer and the restraint of adjacent layers which restrict the expansion due to the instantaneous heating. As time increases, the magnitude of stresses decreases and it will tend to a residual value that is achieved when the temperature distribution in the pipe wall reaches the steady state condition.

The transient stresses were calculated up to 2000 sec, which is the time the fluid front reaches the pipe exit, and free-end boundary condition was assumed.

The stress level obtained with this model was found to be lower than the one that would be established had the constitutive equations incorporated only elastic effects. This is in accordance with the viscoelastic characteristics of polymeric material.

All the obtained results seem to be consistent and the theory here developed is believed to represent the real stress behavior of a viscoelastic pipe carrying a fluid.

[4] CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C., "Conduction of Heat in Solids", (Oxford: Clarendon Press, 1959), pp 331-333.

[5] FREUDENTHAL, A.M., "The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structure", John Wiley and Sons, N. York, N.Y., 1950.

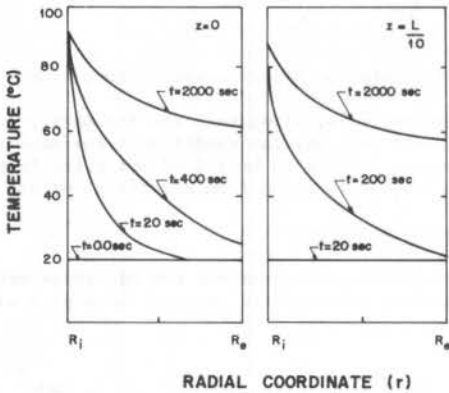


Figure 2- Radial Temperature Distribution at two Sections of the Pipe

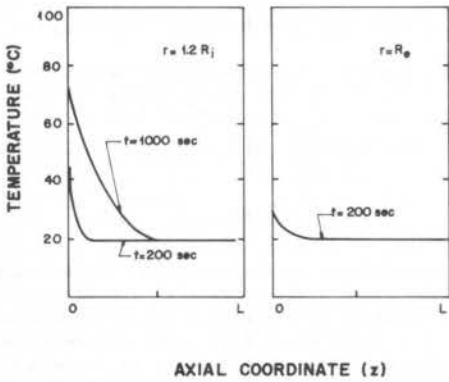


Figure 3- Axial Temperature Distribution at two Radial Positions.

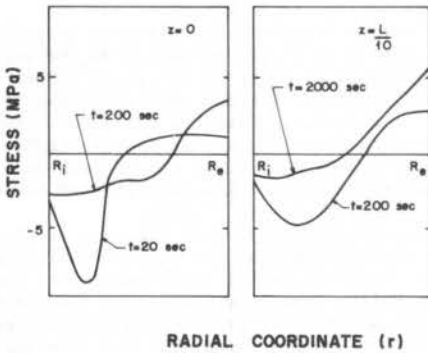


Figure 4- Stress History at two Sections of the Pipe

REFERENCES

- [1] GRUENBERG, G., "State of Stress in an Isotropic Sphere with Non-Uniform Heating", Z. Phys., vol. 35, pp 548-555, 1925
- [2] JAEGER, J.C., "On The Thermal Stresses in Cylinders", Philos. Mag. vol. 36, pp. 418-425, 1965.
- [3] LEE, E.H., ROGERS, R.G. and WOO, T.C., "Residual Stresses in a Glass Plate Cooled Symmetrically from Both Surfaces", J. Amer. Ceram. Soc., vol. 48, n9 9, pp 480-487, 1965.



LAMINAR FORCED CONVECTION  
INSIDE EXTERNALLY FINNED TUBES



C.A.C.Santos e R.M. Cotta  
Programa de Engenharia Mecânica - COPPE/UFRJ  
M.N. Ozisik  
Mechanical & Aerospace Eng.Dept. - North Carolina State Univ.

ABSTRACT

Analytical solutions are obtained for thermal entry region problems inside ducts with axially varying heat transfer coefficient, by making use of the ideas in the recently advanced generalized integral transform technique. The analysis is applied to stepwise variations of Biot number that simulate intermittent rows of external fins. Numerical results are obtained for different fin arrangements, in a systematic manner, so as to critically examine the relative merits of wider and/or more numerous fin rows.

INTRODUCTION

Heat transfer enhancement by external finning of ducts, such as in condensers and evaporators, might be a must in achieving the desired thermal performance, specially for tube-side laminar flow conditions in the heat exchange equipment. Although various detailed analysis seem to be available for laminar forced convection within internally finned tubes, it wasn't until recently [1] that the first attempt was made in describing the effects of equally spaced external radial fins on local behavior of quantities of practical interest such as bulk fluid temperature and Nusselt number, for laminar tube flow. This conjugated heat transfer problem was then modelled by assuming that the intermittent rows of external fins could be simulated by stepwise variations of heat transfer coefficient (or Biot number) along the duct's length as shown in [2]. Calculations were then performed through the finite differences method, but the computational task demonstrated to be quite unpractical, due to the steeply varying nature of the boundary condition coefficient, and numerical results were obtained for a very limited number of situations. On the other hand, an analytical solution for this Graetz-type problem was not feasible through classical approaches, due to the non-separable boundary equation. Approximate analytical solutions [3-5] were then developed so as to avoid costly discrete approaches, but introduced the need for numerically solving a Volterra-type integral equation for the fluid temperature at the wall, which can be quite cumbersome as well.

In the present note, the ideas in the generalized integral transform technique [6-11], as applied to transient diffusion problems with variable boundary condition coefficients [6], are employed to provide analytical expressions for laminar convective heat transfer inside circular tubes subjected to stepwise axial variations of Biot number. The computational effort is equivalent to that of solving a Graetz-type problem with third kind boundary condition, and numerical results are provided for various fin arrangements allowing for a more definitive parametric study.

ANALYSIS

We consider laminar forced convection within the thermal entry region of a circular tube, subjected to an axially varying heat transfer coefficient that simulates an external arrangement of radial fins. By assuming constant physical properties and neglecting viscous dissipation and axial conduction effects, the problem formulation is given in dimensionless form as:

$$W(R) \frac{\partial \theta(R,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial R} \left[ R \frac{\partial \theta(R,Z)}{\partial R} \right], \quad 0 < R < 1, Z > 0 \tag{1.a}$$

with inlet and boundary conditions given respectively by

$$\theta(R,0) = 1, \quad 0 \leq R < 1 \tag{1.b}$$

$$\frac{\partial \theta(R,Z)}{\partial R} \Big|_{R=0} = 0, \quad Z > 0 \tag{1.c}$$

$$\frac{\partial \theta(R,Z)}{\partial R} \Big|_{R=1} + Bi(Z)\theta(1,Z) = 0, \quad Z > 0 \tag{1.d}$$

where various dimensionless groups are defined as:

$$R = \frac{r}{r_w}; \quad Z = \frac{\alpha z}{u D_h^2}; \quad \theta(R,Z) = \frac{T(r,z) - T_{\infty}}{T_e - T_{\infty}}$$

$$W(R) = \frac{1}{2} R(1-R^2) = \frac{1}{4} R \frac{u(r)}{u}; \quad Bi(Z) = \frac{h(z)r_w}{K} \tag{2}$$

Clearly, the analytical solution of problem (1) above through the classical approaches is not possible, due to the Z-dependent coefficient in boundary condition (1.d), which does not allow for the separation of independent variables. However, the so-called generalized integral transform technique [6-11] can still be utilized to provide approximate analytic expressions, as now shown. The following auxiliary problem, with Z-dependence, is then chosen:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[ R \frac{\partial \psi_i(R,Z)}{\partial R} \right] + \mu_1^2(Z) W(R) \psi_i(R,Z) = 0, \quad 0 < R < 1 \tag{3.a}$$

with boundary conditions

$$\left. \frac{\partial \psi_i(R, Z)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi_i(R, Z)}{\partial R} \right|_{R=1} + Bi(Z) \psi_i(R, Z) = 0 \quad (3.b, c)$$

allowing for the development of the following integral transform pair:

$$\bar{\theta}_i(Z) = \int_0^1 W(R) \psi_i(R, Z) \Theta(R, Z) dR, \quad \text{Transform} \quad (4.a)$$

$$\Theta(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i(Z)} \psi_i(R, Z) \bar{\theta}_i(Z), \quad \text{Inversion} \quad (4.b)$$

where the norm,  $N_i(Z)$ , is obtained from

$$N_i(Z) = \int_0^1 W(R) \psi_i^2(R, Z) dR \quad (4.c)$$

By following the formalism in [6], we now operate on eq.(1.a) with  $\int_0^1 \psi_i(R, Z) dR$  to find, after some manipulations

$$\frac{d\bar{\theta}_i(Z)}{dZ} + \mu_i^2(Z) \bar{\theta}_i(Z) - \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}^*(Z) \bar{\theta}_j(Z) = 0, \quad Z > 0 \quad (5.a)$$

where the coefficients in the coupling infinite sum are given by

$$A_{ij}^*(Z) = \frac{1}{N_j(Z)} \int_0^1 W(R) \frac{\partial \psi_j(R, Z)}{\partial Z} \cdot \psi_i(R, Z) dR \quad (5.b)$$

or,

$$A_{ij}^*(Z) = \frac{1}{N_j(Z)} \left[ \delta_{ij} \frac{\partial N_i(Z)}{\partial Z} - N_i(Z) A_{ji}^*(Z) \right] \quad (5.c)$$

and,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (5.d)$$

Besides the inlet condition(1.b) is transformed through the operator  $\int_0^1 W(R) \psi_i(R, Z) dR$  to yield

$$\bar{\theta}_i(0) = \bar{f}_i(0) = \int_0^1 W(R) \psi_i(R, 0) dR \quad (5.e)$$

System(5) above form a denumerable system of coupled linear ordinary differential equations with variable coefficients. Although the analysis is so far formal and exact, it is highly unlikely that system(5) can be solved exactly; it could, however, be numerically solved after truncation to a finite system of sufficiently high order as illustrated in [7-11], but since numerical solutions have been obtained elsewhere, we

focus on finding approximate analytical solutions to the problem here proposed. Therefore, a lowest order solution can be readily obtained by neglecting non-diagonal elements in the coefficients matrix of eq.(5.a), by letting  $i=j$  in the infinite summation, which can produce quite accurate results provided the matrix is diagonally dominant. Then, the resulting decoupled system becomes:

$$\frac{d\bar{\theta}_i(Z)}{dZ} + A_{ii}(Z) \bar{\theta}_i(Z) = 0, \quad Z > 0, \quad i=1, 2, \dots \quad (6.a)$$

$$\bar{\theta}_i(0) = \bar{f}_i(0) \quad (6.b)$$

where,

$$A_{ii}(Z) = \mu_i^2(Z) - A_{ii}^*(Z) \quad (6.c)$$

and,

$$A_{ii}^*(Z) = \frac{1}{2} \frac{d}{dZ} \left[ \ell_n(N_i(Z)) \right] \quad (6.d)$$

Eqs.(6) are readily solvable to yield

$$\bar{\theta}_i(Z) = \bar{f}_i(0) \exp \left[ - \int_0^Z A_{ii}(Z') dZ' \right] \quad (7.a)$$

Or, after recalling the inversion formulae (4.b)

$$\theta_e(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_i(0)}{[N_i(0)N_i(Z)]^{1/2}} \cdot \psi_i(R, Z) \cdot \exp \left[ - \int_0^Z \mu_i^2(Z') dZ' \right] \quad (7.b)$$

The explicit relation(7.b) above provides an approximate solution for the temperature field within the fluid, and reduces to the exact solution of Graetz problem with third kind boundary condition when  $Bi(Z) = \text{const.}$ . Once the eigenvalues,  $\mu_i$ 's, have been determined for various axial positions, the integral in eq.(7.b) can be evaluated and the dimensionless temperature estimated. Quantities of practical interest, such as fluid temperature at the wall, wall heat flux, and bulk temperature are then evaluated, respectively, from:

$$\theta_w(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(1, Z)}{[N_i(Z)N_i(0)]^{1/2}} \cdot \bar{f}_i(0) \cdot \exp \left[ - \int_0^Z \mu_i^2(Z') dZ' \right] \quad (8.a)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial R} \right|_{R=1} = - Bi(Z) \theta_w(Z) \quad (8.b)$$

$$\theta_b(Z) = \frac{\int_0^1 W(R) \theta(R, Z) dR}{\int_0^1 W(R) dR} = 2 \int_0^1 W(R) \theta(R, Z) dR \quad (8.c)$$

The bulk temperature can be more appropriately computed through the energy balance obtained from the integration of eq.(1.a) over the tube's cross section, to yield:

$$\frac{d\theta_b(Z)}{dZ} = 8Bi(Z)\theta_w(Z) \quad (9.a)$$

and after integration along the axial distance

$$\theta_b(Z) = 1 - 8 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{F}_i(0)}{N_i^{1/2}(0)} \int_0^Z \frac{\mu_i^2(Z') \bar{F}_i(Z')}{N_i^{1/2}(Z')} \exp \left[ - \int_0^{Z'} \mu_i^2(Z'') dZ'' \right] dZ' \quad (9.b)$$

The total heat exchanged, from the tube's entrance to a certain location Z, can then be determined in dimensionless form as:

$$Q(Z) = - \int_0^Z \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=1} dZ = 1 - \theta_b(Z) \quad (10)$$

## RESULTS AND DISCUSSION

As an application we take the situation of equally spaced radial fins of same thicknesses, modelled in the form of stepwise variations of Biot number [1,3], or:

$$Bi(Z) = \begin{cases} Bi_1 = \text{const.}, & \text{for } N(\sigma+\tau) < Z < N(\sigma+\tau) + \sigma \\ Bi_2 = \text{const.}, & \text{for } N(\sigma+\tau) + \sigma < Z < (N+1)(\sigma+\tau) \end{cases} \quad (11)$$

where,

$\sigma$  = spacing between fins

$\tau$  = fin thickness

$N = \text{int} \left( \frac{Z}{\sigma+\tau} \right) = \text{number of cycles completed up to axial distance } Z$

Therefore, to the finned portion of the duct's wall corresponds a larger effective Biot number,  $Bi_2$ , while for the bare tube the effective thermal conductance is represented by  $Bi_1$ .

The Z-dependent eigenvalue problem(3) then degenerates into two Z-independent problems, for the eigenvalues  $\mu_{i,1}$  and  $\mu_{i,2}$ ,  $i=1,2,\dots$ , that can be readily handled by the recently advanced Sign-count method for Sturm-Liouville type problems. Once the related sets of eigenquantities have been evaluated, for each Biot number, the integral in equation(7.b) is obtained as:

$$\int_0^Z \mu_i^2(Z') dZ' = \begin{cases} N\sigma\mu_{i,1}^2 + [Z - N(\sigma+\tau)]\mu_{i,1}^2 + N\tau\mu_{i,2}^2 & \text{for } N(\sigma+\tau) < Z < N(\sigma+\tau) + \sigma \\ (N+1)\sigma\mu_{i,1}^2 + N\tau\mu_{i,2}^2 + [Z - N(\sigma+\tau) - \sigma]\mu_{i,1}^2 & \text{for } N(\sigma+\tau) + \sigma < Z < (N+1)(\sigma+\tau) \end{cases} \quad (12)$$

Due to space limitations, we concentrate the presentation of results on just one quantity, namely, the dimensionless heat exchange, given by eq.(10). Also, the numerous configurations and Biot combinations considered are here condensed to only a few cases. For instances, in Figure 1, we consider the situations of finned tubes with  $Bi_1=1$  and  $Bi_2=50$ , and different fin arrangements. However, the ratio  $\sigma/\tau$  was kept constant and equal to three, so as to conserve the fin material; in other words, this analysis is aimed at finding the effects of considering thicker but more widely spaced fins instead of more closely packed thinner ones, keeping constant the amount of material utilized. As far as the present simplified model allows, it can be said that such variations have very little effect on the resulting heat exchange rates, since the three curves plotted are practically coincident, once their finned portions start. Also shown are the curves for constant Biot number, with  $Bi=Bi_1$  or  $Bi_2$ , that illustrate the relative heat transfer enhancement obtained with these fin configurations, from the bare tube situation (lowest curve,  $Bi=1$ ), and the maximum enhancement attainable (upper curve,  $Bi=50$ ), according to this model. Figure 2 presents results for fin arrangements where the spacing is kept constant  $\sigma=0.003$ , and the fins are made progressively thicker. Apparently, after an initial and considerable enhancement for a moderate thickness, relative improvements might behave asymptotically and, eventually, not be worth for the increase in fin material. Figure 3 looks into the same aspects from the perspective of taking a larger number of fins ( $\tau=0.01$ ), of constant thickness, through reducing the spacing between them.

In reference [1] an attempt was made to simulate the same problem through an average Biot number, obtained from the following weighting:

$$\bar{Bi} = \frac{Bi_1\sigma + Bi_2\tau}{\sigma + \tau} \quad (13)$$

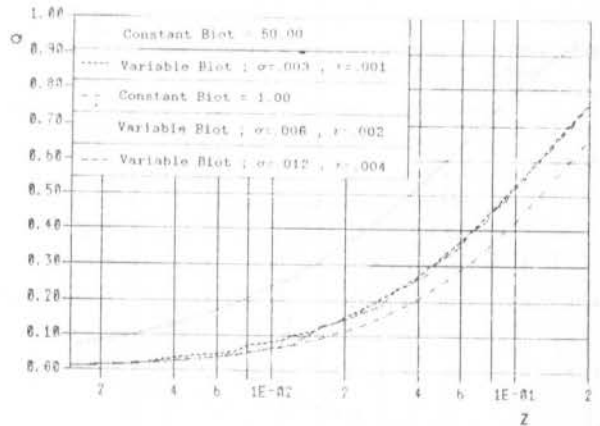


Fig.1-Heat transfer rates for finned tubes with constant ratio  $\sigma/\tau$ .

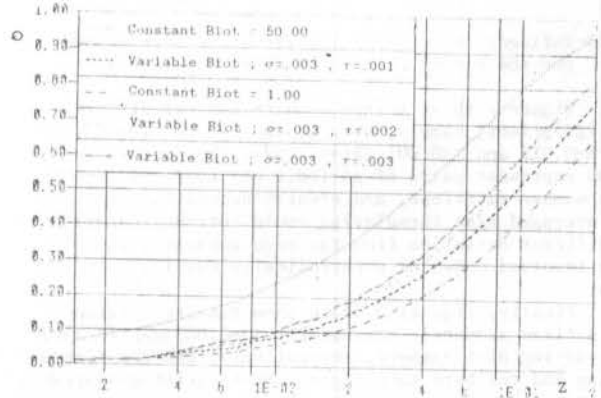


Fig.2-Heat transfer rates for varying fin thickness,  $\tau(\sigma=0.003)$ .

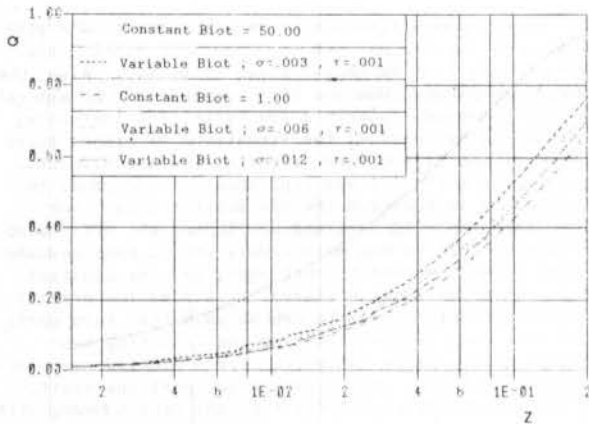


Fig. 3- Heat transfer rates for varying tube spacing,  $\sigma(\tau=0.001)$

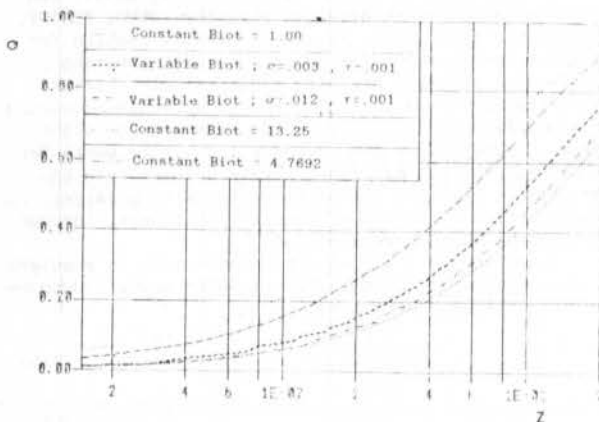


Fig. 4- Comparison of stepwise periodic and average Biot number solutions.

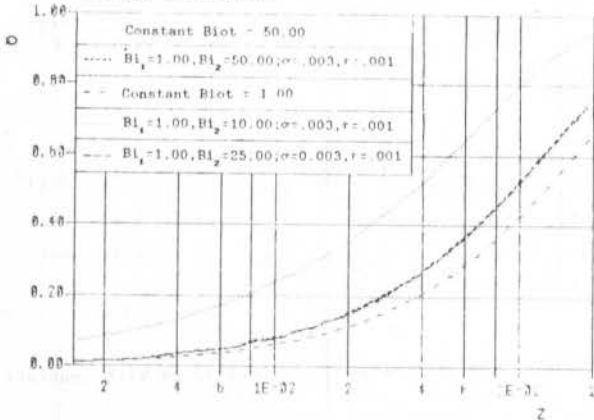


Fig. 5- Influence of varying the effective Biot number for the finned portion of tube,  $Bi_2(Bi_1=1)$ .

Figure 4 above brings results for two different configurations, namely,  $\sigma=0.003$  and  $\tau=0.001$  ( $Bi=13.25$ ) and  $\sigma=0.012$  and  $\tau=0.001$  ( $Bi=4.7692$ ). The four curves shown represent pairs of periodic and averaged constant Biot number solutions, and clearly demonstrate that the averaged Biot formulation could introduce a quite significant deviation from the more accurate, though more involved model of a periodically varying coefficient.

Finally, figures 5 and 6 show results obtained for a fixed geometric arrangement ( $\sigma=0.003$  and  $\tau=0.001$ ), but varying Biot numbers, respectively, for the finned region and the bare tube region. Such variations could for instances, be attained by changing either fin or tube material and height. From these results, it is apparent that the total heat exchange rate was quite

sensitive to an increase in  $Bi_1$ , up to a certain point, but quite insensitive to significant variations in  $Bi_2$  (fig. 6). Therefore, the finning enhancement seems to be highly dependent on the thermal resistance imposed by the bare tube configuration and, eventually, attempting to improve the efficiency of a certain fin type within a fixed configuration might provide a negligible improvement on overall heat transfer performance.

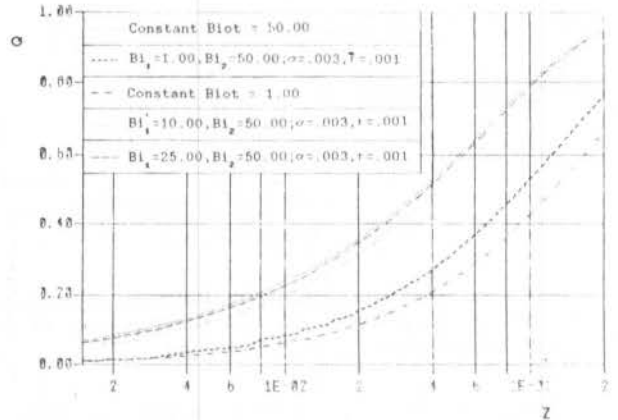


Fig. 6- Influence of varying the effective Biot number for the bare tube portion,  $Bi_1(Bi_2=50)$ .

#### REFERENCES

1. Sparrow, E.M. and M. Chermachi, "Laminar Heat Transfer in an Externally Finned Circular Tube", *J. Heat Transfer*, V.102, pp.605-611 (1980).
2. Santos, C.A.C., "Forced Convection Problems for Finned Ducts", D.Sc. Thesis, Depto. de Energia/ITA/CTA, in preparation.
3. Vick, B. and R.G. Wells, "Laminar Flow with an Axially Varying Heat Transfer Coefficient", *Int. J. Heat Mass Transfer*, V.29, n° 12, pp.1881-1889 (1986).
4. Vick, B., J.H. Beale, and J.I. Frankel, "Integral Equation Solution for Internal Flow Subjected to a Variable Heat Transfer Coefficient", *J. Heat Transfer* V.109, pp.856-860 (1987).
5. Frankel, J.I., "An Alternative Integral Equation Solution for Internal Flow Subjected to a Variable Heat Transfer Coefficient", *J. Heat Transfer*, (submitted).
6. Ozisik, M.N. and R.L. Murray, "On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters", *J. Heat Transfer*, V.96, pp.48-51 (1974).
7. Cotta, R.M. and M.N. Ozisik, "Transient Forced Convection in Laminar Channel Flow with Stepwise Variations of Wall Temperature", *Can. J. Chem. Eng.*, V.64, pp.734-742 (1986).
8. Cotta, R.M. and M.N. Ozisik, "Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, V.29, n°10, pp.1495-1501 (1986).
9. Cotta, R.M. and M.N. Ozisik, "Diffusion Problems with General Time-Dependent Coefficients", *Brazilian J. Mech. Sciences*, RBCM, V.9, n°4, pp.269-292 (1987).
10. Cotta, R.M., "Diffusion in Media with Prescribed Moving Boundaries: Application to Metals Oxidation at High Temperatures", II Latin American Congress of Heat & Mass Transfer", V.1, pp.502-513, Sao Paulo, Brasil (1986).
11. Cotta, R.M. "Steady-State Diffusion with Space Dependent Boundary Condition Parameters", *Proc. of the First National Meeting on Thermal Sciences*, ENCIT-86, pp. 163-166, Rio de Janeiro, Brasil (1986).



## INSTRUMENTAÇÃO E TÉCNICAS EXPERIMENTAIS



DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA VELOCIDADE DE UM FLUIDO PELA ANÁLISE ESPECTRAL DAS FLUTUAÇÕES DE TEMPERATURA.



MICHEL JEAN FOUCRIER and ARTUR J. G. FAYA  
 Depto. Tecnologia de Reatores - IPEN  
 Div. Termodinâmica e Termohidráulica  
 Caixa Postal 11049 - São Paulo

RESUMO

As velocidades locais de um escoamento turbulento em canal fechado foram medidas aplicando-se a técnica de análise de ruídos para os sinais vindos de dois sensores de temperatura separados por uma distância conhecida. Bons resultados foram encontrados quando comparou-se os dados experimentais com medidas precisas. Faixas para o número de Reynolds, separação entre sensores e constante de tempo dos mesmos são recomendados.

INTRODUÇÃO

A análise de ruídos é reconhecida como uma poderosa ferramenta analítica com uma grande faixa de aplicações. O sinal de ruído produzido por detectores de nêutrons em um reator nuclear fornece informações sobre os modos de vibração dos internos, da dinâmica e da função transferência do reator, vida média do nêutron térmico, coeficiente global de transferência de calor entre o combustível e o refrigerante, etc. [1,2]. O tempo de resposta de sensores como termistores pode ser estimado através da análise de funções como a autocorrelação [3].

O propósito deste trabalho é aplicar a técnica de análise de ruídos para a medida de velocidade local em fluidos monofásicos em regime turbulento. Os sinais obtidos por sensores de temperatura são correlacionados no tempo e na frequência e a velocidade é estimada do diagrama fase versus frequência da densidade espectral de potência cruzada.

CONDIÇÕES EXPERIMENTAIS

O arranjo experimental é mostrado na figura 1. Este consiste de uma tubulação de acrílico com 2500 mm de comprimento e 92 mm de diâmetro interno no qual o ar é conduzido por um ventilador axial em uma das extremidades. O ar é aquecido por uma resistência elétrica (22 ohms) com 8 mm de diâmetro externo concêntrica à tubulação.

A vazão de ar foi variada colocando-se uma restrição na entrada do ventilador. A máxima vazão de ar (sem restrição) foi de 0,042 m<sup>3</sup>/s a pressão ambiente e 21°C. O número de Reynolds nesta condição é da ordem de 33.000. Dois níveis de potência foram usados para aquecer o ar: 550 W e 225 W.

Algumas perfurações foram feitas ao longo da tubulação para permitir o posicionamento dos dois sensores no fluxo de ar, de modo que a distância entre eles pudesse ser variada.

Medidas precisas necessitam de sensores com constante de tempo na faixa de milissegundos. É recomendável que os sensores de temperatura sejam do mesmo tipo e dimensões, mas não necessário. Neste trabalho foram usados termopares de 0,95 mm de junção exposta do tipo K, de 0,32 mm de junção exposta do tipo T e termoresistências de platina do tipo miniatura.

Em resumo, os quatro parâmetros abaixo foram variados para executar a análise: potência, número de Reynolds (Re), distância entre sensores e constante de tempo.

Sendo pequenas, as flutuações foram inicialmente amplificadas e então enviadas a um Analisador Dinâmico de Sinais HP-3562A o qual executou todos os cálculos necessários.

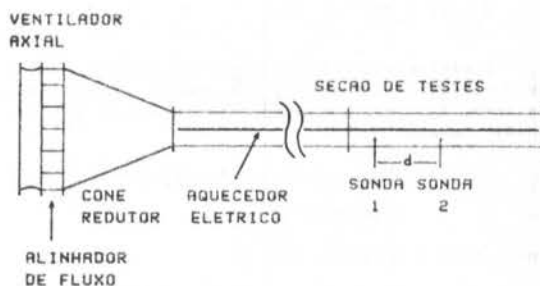


Figura 1. Arranjo Experimental.

TEORIA

Supondo que  $x(t)$  representa as flutuações de voltagem produzidas por um sensor e  $y(t)$  a segunda. Idealmente, para um regime plenamente desenvolvido, se as sondas estão separadas por uma distância  $d$ ,  $y(t)$  reproduz  $x(t)$  a menos de uma mudança na fase e na amplitude, isto é,

$$y(t) = ax(t - \tau), \quad (1)$$

onde  $\tau$  é o tempo de atraso entre os dois sinais dos sensores e pode ser obtido por

$$\tau = d/u(r), \quad (2)$$

com  $u(r)$  a velocidade local na posição radial  $r$  que se procura. Portanto se um método é disponível para estimar  $\tau$ ,  $u(r)$  pode ser facilmente calculado pois  $d$  é um parâmetro fixado experimental.

A equação (1) pode ser reescrita no domínio da frequência como

$$Y(f) = a \exp(-j2\pi f\tau) X(f) \quad (3)$$

ou

$$G(f) = Y(f)/X(f) = a \exp(-j2\pi f\tau) \quad (4)$$

onde  $G(f)$  é a função transferência que relaciona  $Y(f)$  a  $X(f)$ .

A função densidade espectral de potência  $S_{xx}(f)$  do sinal  $x(t)$  é relacionada à função auto-correlação  $R_{xx}(\tau)$ . Para sinais estacionários as duas funções são relacionadas pela transformada de Fourier,

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (5)$$

com

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau) dt \quad (6)$$

Similarmente, a função densidade espectral de potência cruzada  $S_{xy}(f)$  de um par de sinais aleatórios  $x(t)$  e  $y(t)$  pode ser relacionado à função correlação cruzada  $R_{xy}(\tau)$ ,

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (7)$$

com

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-\tau) dt \quad (8)$$

Pode-se mostrar que ao se aplicar um sinal aleatório  $x(t)$  com uma função densidade espectral de potência  $S_{xx}(f)$  na entrada de um sistema, a função densidade espectral de potência cruzada da entrada  $x(t)$  e da saída  $y(t)$  é dada por,

$$S_{xy}(f) = G(f) S_{xx}(f) \quad (9)$$

Entretanto, no experimento em questão, supõe-se que o primeiro sinal seja, por exemplo, ruído branco. Portanto,  $S_{xx}(f) = \text{constante} = C$ . Substituindo  $S_{xx}(f)$  e  $G(f)$  de (4), obtemos

$$S_{xy}(f) = a' \exp(-j2\pi f\tau) = a' \cos(2\pi f\tau) - a' j \text{sen}(2\pi f\tau), \quad (10)$$

como a fase  $\tilde{\epsilon}$  definida por

$$\phi(f) = \text{arc tan} \left( \frac{\text{Im} |S_{xy}|}{\text{Re} |S_{xy}|} \right) = -2\pi f\tau, \quad (11)$$

obtem-se deste modo uma relação linear entre a fase e a frequência, cuja inclinação é  $\tau$ . Portanto, o tempo de atraso  $\tau$  pode ser obtido graficamente num diagrama fase versus frequência.

#### RESULTADOS EXPERIMENTAIS

As figuras 2, 3 e 4 apresentam os resultados experimentais na forma de dois diagramas: coerência média (abaixo de 10 Hz) e erro relativo em função do número de Reynolds, para o termopar tipo K a 550 W e 225 W e pa

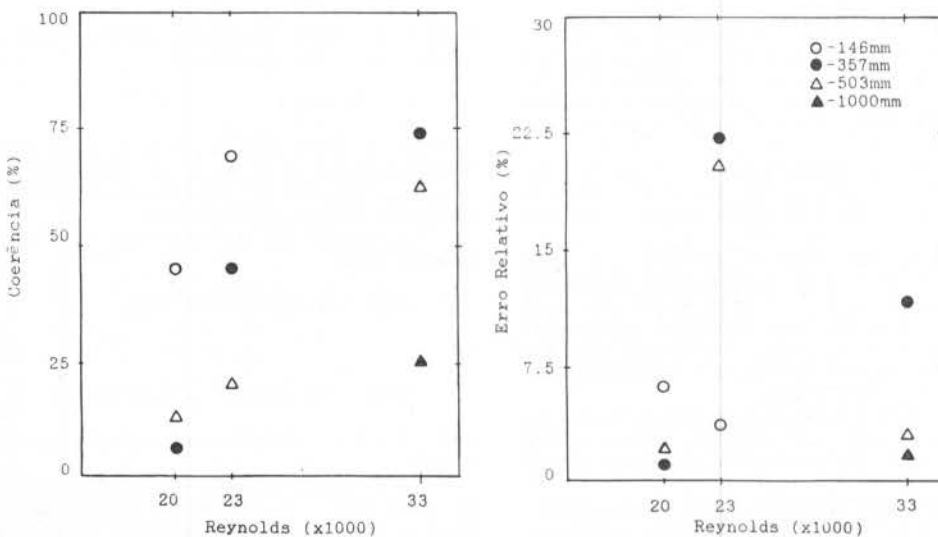


Figura 2. Termopar tipo K para 550W.

ra o termopar tipo T a 550 W. O erro relativo foi definido como sendo a diferença entre a velocidade local obtida pelo método proposto e a velocidade local medida com um tubo de PITOT calibrado associado a um manômetro com 0,1 mm H<sub>2</sub>O de precisão.

Para pequenos valores de Reynolds (<23.000) as flutuações de baixa frequência detectadas pelo primeiro sensor tendem a dispersar antes de alcançar o segundo sensor, produzindo baixos valores de coerência, isto é, sinais pouco correlacionados. Altos números de Reynolds e curtas distâncias entre sondas aumentam a coerência e diminuem o erro relativo fornecendo melhores estimativas para a velocidade local. Os resultados não mostraram dependência sensível para a potência utilizada.

A figura 5 apresenta os resultados em dois diagramas: a coerência média e o erro relativo em função da constante de tempo para a potência de 550 W.

Obtêm-se melhores resultados para valores pequenos de constante de tempo. Pequena constante de tempo significa uma faixa maior de frequência no sinal, portanto maior quantidade de informações para a análise.

A figura 6 mostra o desvio padrão da velocidade local obtida pelo diagrama de fase (média de três medidas) em função do Reynolds. A tendência dos desvios confirma os melhores resultados para altos Reynolds.

É importante notar que 70% dos dados coletados forneceram um erro relativo inferior a 10%.

#### CONCLUSÃO

A aplicação da técnica de análise de ruídos para a medida da velocidade local de um fluido com a componente flutuante da temperatura num escoamento em regime turbulento em tubulações foi de simples utilização e forneceu resultados satisfatórios quando comparados com medidas precisas. Para tanto recomenda-se altos Reynolds, distâncias pequenas entre sensores e pequenos valores de constante de tempo. No caso, Reynolds da ordem de 30.000, distâncias menores que 500 mm e constante de tempo da ordem de 100 ms.

Estudos futuros irão aplicar a mesma técnica em outros circuitos com água como fluido e altas pressões e temperaturas de operação.

É importante notar que o método pouco perturba o escoamento e portanto pode ser aplicado "on-line" numa planta onde existam sensores de temperatura e transferência de calor esteja ocorrendo.

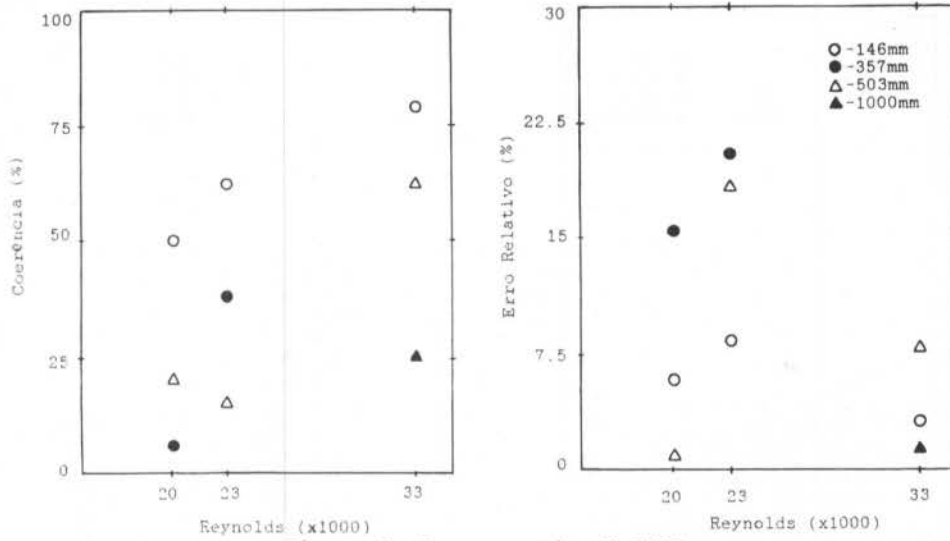


Figura 3. Termopar tipo K 225W.

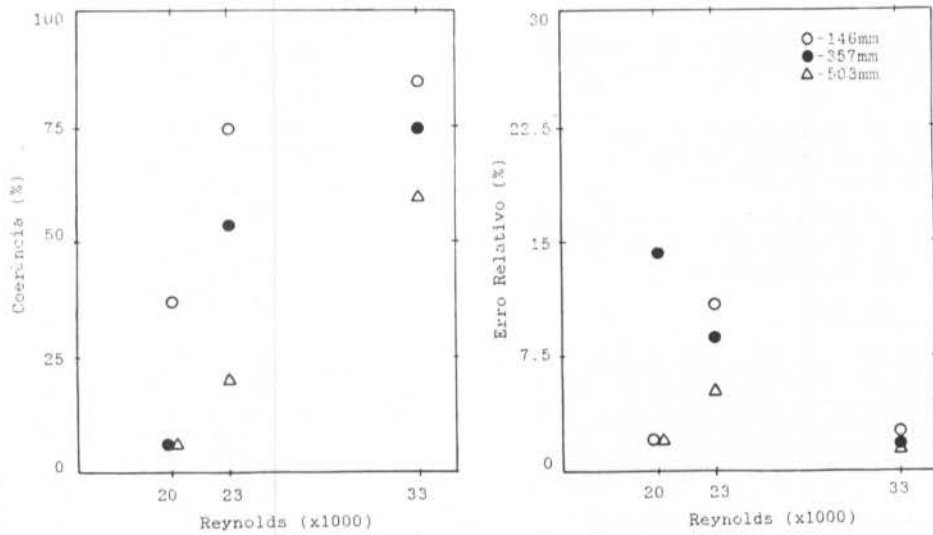


Figura 4. Termopar tipo T para 550W.

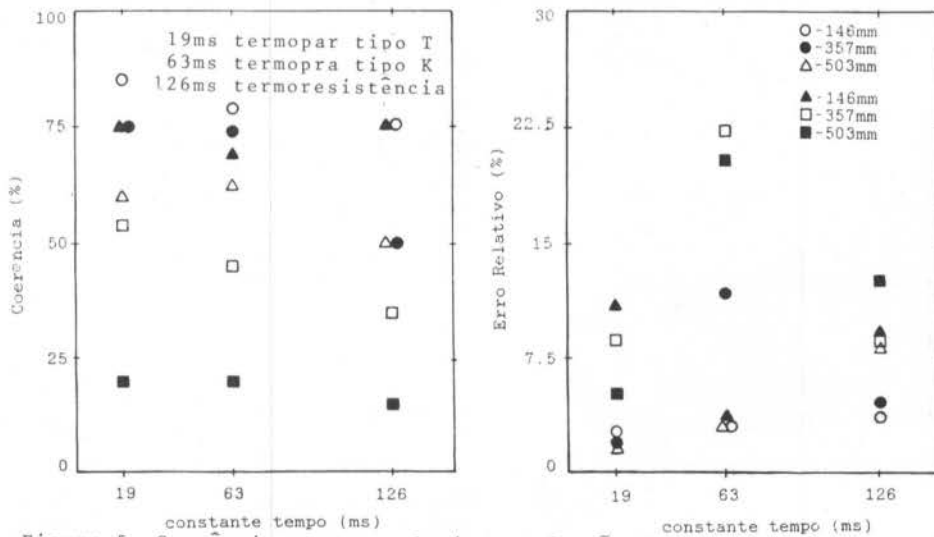


Figura 5. Coerência e erro relativo em função da constante de tempo

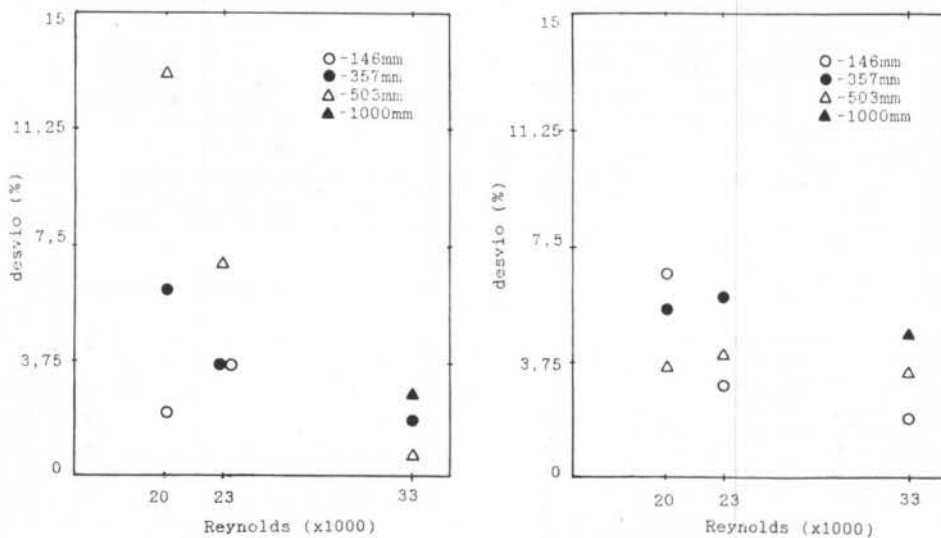


Figura 6. Desvio padrão em função do Reynolds.

REFERÊNCIAS

- [1] Bendat, J. and Piersol, A., Random Data: Analysis and Measurement Procedures. Wiley-Interscience (1986).
- [2] Max, J., Methodes et Technics de Traitement du Signal et Applications aus Mesures Physiques. Tome Premier, Ed. Masson et Cie. (1972).
- [3] Upadhyaya, B.R. and Kerlin, T.W., In-Situ Response Time Testing of Platinum Resistance Thermometers. EPRI NP-834, Volume 204, July 1978.

ABSTRACT

Local velocities of turbulent closed channel flow were measured applying the noise analysis technique to signals coming from two sensors separated by a known distance. Good agreement was found when comparing experimental data to more accurate measurements. Ranges of Reynolds number and thermocouple spacial separation are recommended.

VIABILIDADE DA ELASTICIDADE PARA A MEDIDA DE VALORES  
REDUZIDOS DE VAZÃO DE FLUÍDOS AERIFORMES

ABCm

ABCm

JOSÉ CARLOS LAURIA  
DOUGLAS LAURIA  
Escola de Engenharia Mauá  
Departamento de Engenharia Mecânica

RESUMO

A característica elástica de fluídos aeriformes tem sido há muito utilizada para a avaliação de vazamento em dutos. Os autores identificaram uma elevada discordância entre valores determinados por esse método e por placa de orifício. O presente trabalho é uma consequência da procura de respostas para essa constatação. A partir dum modelo simplificado apresenta-se uma equação de escoamento descrita graficamente de modo a relacionar os parâmetros envolvidos em forma adimensional. Procura-se explicar fisicamente que esse método proporciona um baixo grau de confiabilidade quando aplicado a sistemas com variações de pressão relativamente reduzidas.

INTRODUÇÃO

Na determinação de vazamentos em dutos de ar condicionado ou portas estanques é colocada frequentemente a opção de medida da vazão de fuga por intermédio da elasticidade do meio. Tal procedimento encontra ampla receptividade por ser uma aplicação imediata da equação de Clapeyron, talvez o primeiro conceito de engenharia a ser incorporado pelos engenheiros.

Tivemos a oportunidade de calcular e instalar um medidor deprimôgeno de vazão para tais ensaios. Paralelamente foram obtidos alguns dados para a verificação do vazamento por elasticidade. Em virtude das elevadas discrepâncias encontradas procurou-se uma resposta para o fato.

Verificou-se que nesse assunto a bibliografia disponível relata esforços dirigidos para métodos numéricos referentes a regimes transitórios ou modelagem do escoamento através das áreas de passagem, sem contudo verificar os limites de aplicabilidade do método ou relatar o comportamento esperado para as variações de vazão.

O conhecimento, ou pelo menos a avaliação, desses aspectos é de interesse relevante não só pelo largo emprego do método como também pela sua especificação em normas.

OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo inicial proporcionar uma visão da aplicabilidade da elasticidade como meio de avaliar vazamentos de fluídos aeriformes, com ênfase em valores reduzidos.

A partir de um modelo simplificado para a análise do escoamento em regime quase-estático, apresenta-se um diagrama adimensional para avaliação do intervalo de tempo requerido para o esvaziamento de recipientes contendo fluído aeriforme pressurizado. Pretende-se explicar as discrepâncias verificadas experimentalmente, bem como generalizar os resultados, como o recurso desse diagrama.

ESTIMATIVAS DE VAZAMENTO

Fixada a configuração das fronteiras que encerram um meio fluído, e assegurado o contato entre ambas, variações de pressão são realizáveis por acréscimo ou diminuição de massa do meio, tendo como consequência variações na massa específica.

Para meios onde se verifica uma relação funcional entre massa específica e pressão, variações dessa última permitem determinar variações da primeira, e como consequência identificar alterações de massa ou volume em sistemas. A relação constitutiva mais empregada é a equação de Clapeyron.

A noção geral de elevada elasticidade de fluídos aeriformes, de imediato, leva à aceitação da premissa de boa precisão para medidas de pequenas variações de pressão no tempo como estimativas de reduzidas vazões de vazamento. Na sequência objetiva-se verificar tal premissa.

VAZÃO MÉDIA DE VAZAMENTO

Na figura 1 é esquematizado um reservatório rígido de volume  $V$ , confinando um gás sob pressão acima da ambiente ( $p_b$ ), e por onde ocorre um vazamento cuja vazão em massa é  $\dot{m}$ . Delimita-se também o volume de controle empregado. São estabelecidas como premissas:

- a) o gás comporta-se como perfeito
- b) o escoamento é adiabático e reversível
- c) a variação de massa no interior do reservatório é reduzida a ponto de aí ser considerada temperatura ( $T$ ) constante e a massa específica ser função apenas do tempo  $\rho = \rho(t)$

A aplicação das equações da Continuidade e de Clapeyron permite determinar a vazão média de vazamento devido à variação de pressão de  $p_0$  a  $p$ :

$$\bar{m} = \frac{V}{RT} (p_0 - p) \quad (1)$$

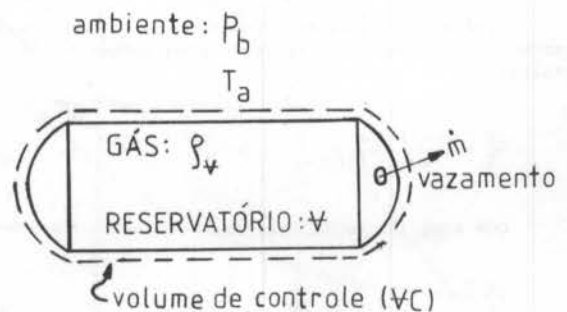


Fig. 1 - Esquema do problema



EQUAÇÃO REPRESENTATIVA DO ESCOAMENTO

A aplicabilidade do método para fluidos aeriformes deve ser condicionada à variação das pressões no tempo, visando possibilitar a medida adequada das grandezas e garantir uma precisão aceitável. Para tanto procura-se uma expressão descritiva dessa condição, consideradas as premissas estabelecidas.

O volume de controle da figura 2 engloba o fluido em movimento na região de vazamento. Deprezando-se as variações no interior do volume de controle face ao fluxo, a equação da energia, na forma conservativa, é simplificável para a conservação de entalpia (h) mais a energia cinética por unidade de massa na saída. Deprezando-se as variações do calor específico de pressão constante do gás ( $c_p$ ), tem-se:

$$\frac{v^2}{2} = h - h_a = c_p (T - T_a) \quad (2)$$

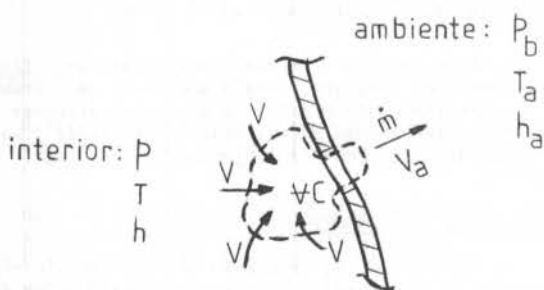


Fig. 2 - Esquema da região de vazamento

A equação de processo para o escoamento é:

$$\frac{T_a}{T} = \left( \frac{p_a}{p} \right)^{\left( \frac{k-1}{k} \right)} \quad (3)$$

Considerando-se  $\Delta p$  e  $\Delta T$  variações de pressão e temperatura entre o interior do volume de controle e o ambiente, a eq.(3) resulta:

$$1 - \frac{\Delta T}{T} = \left( 1 - \frac{\Delta p}{p} \right)^{\left( \frac{k-1}{k} \right)} \quad (4)$$

Fazendo-se o desenvolvimento binomial do segundo membro de (4) e retendo apenas o termo linear em  $\Delta p$ , resulta:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{k-1}{k} \frac{\Delta p}{p} \quad (5)$$

Com a eq.(5) em (2) tem-se:

$$\frac{v^2}{2} = c_p \frac{k-1}{k} \frac{\Delta p}{p} T \quad (6)$$

Aplicando-se as relações de gás perfeito para a massa específica e o calor específico, chega-se à expressão de  $v$  na forma da equação de Torricelli. Sendo  $A$  a área de vazamento e como a massa específica é função do tempo e não do ponto, resulta a vazão em massa instantânea de vazamento:

$$\dot{m} = \rho v_a A = A \sqrt{2\rho \Delta p} \quad (7)$$

Sendo  $\Delta p = p - p_b$  e referindo a massa específica pela equação de Clapeyron:

$$\dot{m} = A \sqrt{\frac{2}{RT} p (p - p_b)} \quad (8)$$

Como a passagem de gás pelas superfícies permeáveis do volume de controle corresponde ao vazamento a equação da continuidade proporciona uma segunda expressão da vazão correspondente:

$$\dot{m} = - \frac{v}{RT} \frac{dp}{dt} \quad (9)$$

Igualando-se essas duas últimas expressões e separando-se as variáveis:

$$dt = - \frac{v}{A \sqrt{2 RT}} \frac{dp}{\sqrt{p (p - p_b)}} \quad (10)$$

Integrando-se entre  $p_0$  e  $p$  para um intervalo  $\Delta t$ , resulta:

$$\Delta t = \frac{v}{A \sqrt{2 RT}} \left[ \ln \left( \frac{2 \sqrt{p_0^2 - p_0 p_b} + 2 p_0 - p_b}{2 \sqrt{p^2 - p p_b} + 2 p - p_b} \right) \right] \quad (11)$$

ADIMENSIONALIZAÇÃO

Fazendo-se:

$$\alpha = \frac{p}{p_0} \quad (12)$$

resulta num parâmetro adimensional representativo das variações de pressão no escoamento, e cujos valores se restringem ao intervalo de zero a um.

Definindo-se:

$$n = \frac{p_0}{p_b} > 1 \quad (13)$$

tem-se a proporção entre as pressões internas e externas ao volume de controle. Dessa maneira tem-se uma indicação adimensional da máxima variação de pressão no fenômeno.

Com as expressões (12) e (13) em (11) chega-se a uma expressão adimensional representativa do escoamento

$$\frac{A \sqrt{2 RT}}{V} \Delta t = \ln \left( \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1 - \frac{1}{2n}}{\sqrt{\alpha \left(\alpha - \frac{1}{n}\right) + \alpha - \frac{1}{2n}}} \right) \quad (14)$$

O primeiro membro dessa equação representa um intervalo de tempo adimensional ( $\tau$ ), independente da configuração do volume de controle. Esse intervalo de tempo corresponde a variações de pressão a partir da condição inicial até uma condição genérica.

O intervalo de tempo limite ( $\tau^*$ ) para a duração do fenômeno corresponde à igualdade entre pressões interna e externa. Fazendo-se  $p = p_0$ , de (12) e (13) tem-se o limite entre variações e pressão:

$$\alpha^* = \frac{1}{n} \quad (15)$$

a qual aplicada em (14) proporciona o limite de duração mencionado:

$$\tau^* = \ln ( 2 \sqrt{n^2 - n} + 2n - 1 ) \quad (16)$$

Na figura 3 são representadas as curvas de  $\tau$  versus  $\alpha$ , tendo como parâmetro  $n$ . É lembrado que tais curvas apresentam significado apenas até o valor de  $\tau^*$ .

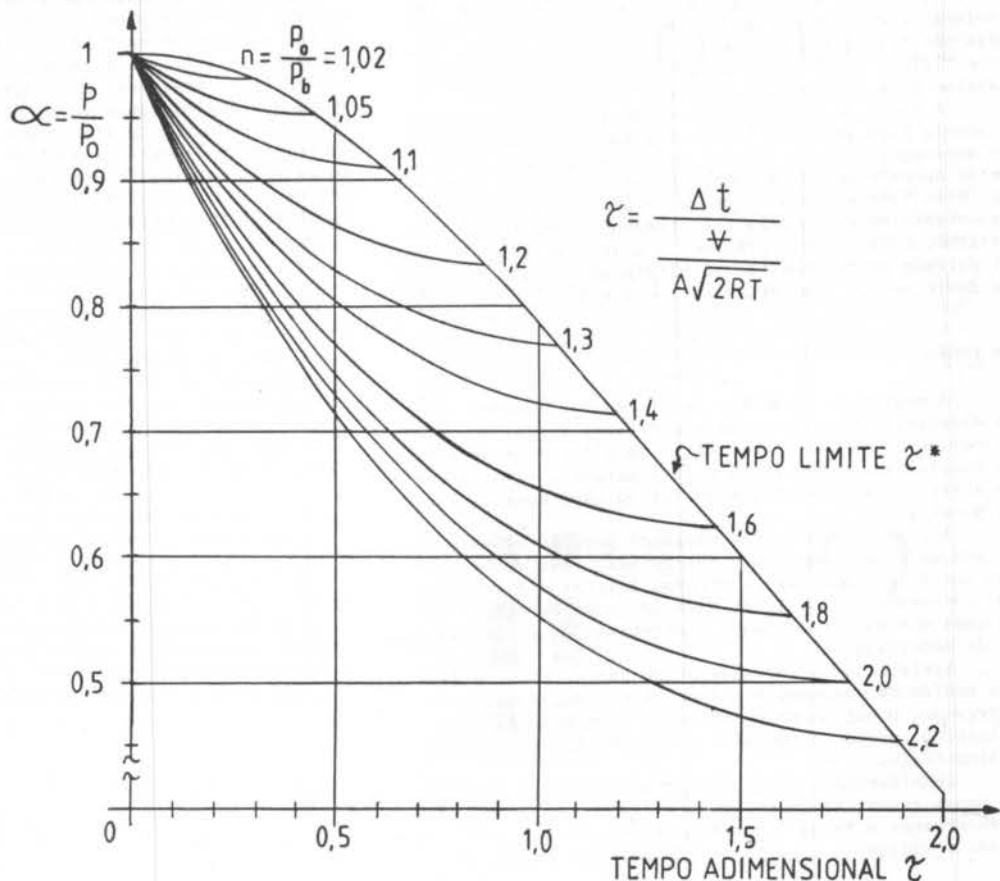


Fig. 3 - Curvas de escoamento

#### ANÁLISE DO MODELO

O diagrama da figura 3 permite uma noção física da aplicabilidade da elasticidade para medidas de vazamentos. Com o modelo apresentado verifica-se a ocorrência de significativas variações de pressão no início do fenômeno, para depois gradativamente se reduzirem as variações relativas.

Esse comportamento é tanto mais característico quanto mais próximo da unidade é o parâmetro  $n$ . Como a vazão de vazamento é proporcional à diferença de pressão, a saída de massa do sistema ocorrerá preponderantemente no início do escoamento. Por outro lado, elevados valores de  $n$  são indicativos de regime transitório, situação não abrangida pelo modelo.

Analisando-se o modelo, prevê-se que, se o vazamento for determinado por diferença de pressão desde a condição inicial até a ambiente, no intervalo de tempo medido uma parcela corresponderá a vazões de pouco significado. Deve-se esperar resultados da vazão de vazamento inferiores ao real. Tal comportamento revela-se mais significativo à proporção que o parâmetro  $n$  tende à unidade.

#### VERIFICAÇÕES EXPERIMENTAIS

O presente trabalho foi motivado por discrepâncias verificadas no ensaio de dutos de ar condicionado. Nesses sistemas a pressão de operação ou de ensaio é da ordem de grandeza da pressão barométrica; assim, de acordo com o modelo proposto, as determinações de vazamento por elasticidade resultarão aquém do real.

Para os ensaios realizados tem-se resultados mais prováveis na tabela 1, onde a vazão de referência foi determinada por placa de orifício. Estima-se uma incerteza de dez por cento para a vazão de referência e de quinze por cento para a vazão média.

$P_0 = 101,3 \text{ kPa}$		$T = 305 \text{ K}$		$V = 0,2 \text{ m}^3$		vazão de referência [ $10^{-3} \text{ kg/s}$ ]	variação percentual [%]
$P_0$ [mmH <sub>2</sub> O]	$P$ [mmH <sub>2</sub> O]	$\alpha$	$n$	$\Delta t$ [s]	$\bar{m}$ [ $10^{-3} \text{ kg/s}$ ]		
400	0	0,963	1,039	25	0,4	1,6	-75
360	160	0,985	1,035	5	0,9	1,4	-35
340	0	0,968	1,033	30	0,3	1,3	-75
340	40	0,996	1,033	20	0,3	1,3	-75

Tab. 1 - Resultados experimentais

Nota-se uma significativa diferença para menos das vazões estimadas por intermédio de elasticidade ( $\bar{m}$ ). Destaca-se o fato de a menor discrepância ser verificada para o menor intervalo de tempo medido, o qual corresponde a uma pressão final acima da atmosférica.

Tais resultados apoiam a coerência do modelo proposto, apesar das várias ampliações realizadas.

#### DISCUSSÃO

O enfoque do trabalho é mais físico do que analítico. Pretendeu-se estabelecer o comportamento generalizado das variações de volume de meios aeriformes para ter-se um ponto de apoio para explicar discrepâncias encontradas experimentalmente, bem como ressaltar a baixa confiabilidade do emprego da elasticidade para medir vazões de reduzidas variações de pressão.

Um enfoque numérico resultará em conclusões específicas, dependentes das características particulares do problema, conforme apresentado por Wiggert [5] e Streeter, Keitzer e Bohr [2]. Soluções analíticas do problema de escoamento por passagens de áreas são abordadas por Egli [1] e Tuck [3] com menor ênfase na parte física. Desse modo, verifica-se que o presente trabalho e os citados são esforços complementares.

A noção de a equação de Clapeyron ser um excelente modelo para gases em torno de pressões e temperaturas ambientes induz o seu uso para verificações de vazamentos decorrentes de escoamento próximos dessa condição. Esse fato é apoiado porque os aparelhos comumente disponíveis em engenharia não atendem a essa faixa de trabalho. Porém, com o presente trabalho verifica-se uma dificuldade operacional de nível elevado para a aplicação desse método com certo grau de precisão.

#### CONCLUSÃO

A medida de vazamento de fluídos aeriformes por sua elasticidade torna-se mais confiável à medida que crescem as dimensões do sistema e as diferenças de pressão envolvidas. Esta última está limitada a valores que não acarretem regimes transitórios ou expansões de cara ter acentuado.

A pressão mínima determinável deve estar mais afastada da pressão ambiente quanto mais próxima da unidade for a relação entre a pressão inicial e a ambiente. Como consequência, os intervalos de tempo de medida serão cada vez mais reduzidos, acarretando em dificuldades de determinação.

Verifica-se a inadequação do uso da elasticidade para medida de vazamentos quando de reduzidos valores de pressão. O método pode ser usado como procedimento indicativo, porém mantendo-se a pressão final afastada da atmosférica.

Considerando-se que elevadas diferenças de pressão podem causar os inconvenientes já mencionados, resta determinar a faixa intermediária de pressão onde o método é válido.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Egli, A., The leakage of gases through narrow channels. *ASME Transactions*, 59: A-63-A-67 (1937)
- [2] Streeter, V.L., Keitzer, W.F. and Bohr, D.F. Pulsatile Pressure and Flow Through Distensible Vessels. *Circulation Research*, 13 nº 1 July, 1963
- [3] Tuck, E.O., Matching problems involving flow through small holes. *Advances in Applied Mechanics*, Chia-Shum Yih (editor). Ed. Academic Press, New York, vol. 15 (1975)
- [4] van Wylen, G.J. and Sonntag, R.E., *Fundamentals of classical thermodynamics*. Ed. John Wiley, New York (1978)
- [5] Wiggert, D.C., Unsteady flow in lines with distributed leakage. *Journal of the Hydraulics Division - ASCE*, 94 : 143-162 (1968)
- [6] Young, H.D., *Fundamentals of mechanics and heat*. Ed. McGraw-Hill, New York (1964)

#### ABSTRACT

From years now, the elastic characteristics of aeriform fluids has been used to evaluate the flowrate due to leakage in fluid lines. The authors verified a high disagreement between values given by this method and the ones determined by orifice plate when they tested a ventilation duct. As consequence of searching a answer to this verification the present work appeared. A simplified model was developed to describe the phenomenon and a flow equation is presented in graphical form which shows the relation between the parameters concerned in dimensionless form. An attempt is made to explain by physical means that this method allows a low degree of confidence when applied to systems having relatively little values of pressure variations.

TRANSDUTOR DE IMPEDÂNCIA PARA A  
MEDIDA DA FRAÇÃO DE VAZIO



JOSÉ R. SIMÕES MOREIRA  
 JOSÉ M. SAIZ JABARDO  
 Departamento de Enga. Mecânica da EPUSP  
 Caixa Postal 8174 - São Paulo - SP

RESUMO

Transdutores de impedância de dois eletrodos para a medida do Escoamento Bifásico do tipo líquido-gás foram desenvolvidos e ensaiados em uma seção vertical, com água da rede em repouso. A calibração dos sensores desenvolvidos, realizada pelo método gravimétrico, mostrou uma característica fortemente linear para frações de vazios entre 0 e 15%. Os resultados mostraram-se compatíveis com os da literatura. Testes adicionais para avaliar o desempenho dos transdutores foram realizados, envolvendo os efeitos dos eletrodos de guarda e assimetria na distribuição da fase gasosa.

INTRODUÇÃO

A fração de vazios,  $\alpha$ , é um parâmetro fundamental na caracterização do escoamento bifásico. O conhecimento dessa grandeza é necessário para a determinação da densidade e aceleração média do fluido e para o estabelecimento das correlações de perda de carga [1] e transferência de calor. Como consequência, um dos principais objetivos dos pesquisadores do assunto nas últimas décadas tem sido o desenvolvimento de um instrumento capaz de medir a fração de vazios [2].

Uma das técnicas de determinação experimental da fração de vazios, baseia-se na medida da impedância média do meio bifásico [1,5,6,8,11,12]. O seu princípio de funcionamento está fundamentado no fato de que, em geral, ocorrem diferenças significativas entre as propriedades elétricas das fases (condutividade elétrica e constante dielétrica), o que possibilita relacionar a impedância média do escoamento com a fração de vazios. Nesse sentido, diversas geometrias de transdutores de impedância têm sido construídas e testadas [2].

Algumas vantagens dos transdutores de impedância são sua simplicidade construtiva, rápido tempo de resposta (o que os torna adequados para medidas de transitórios [1,3,4,5,11,14]), os eletrodos podem ou não ser do tipo intrusivo, além da facilidade de operação e de custo reduzido. Entre as desvantagens podem ser incluída a necessidade de compensação do valor do sinal elétrico devido às variações das propriedades elétricas com mudanças de temperatura e concentração de impurezas [3]. Deve se acrescentar ainda, conforme assinala Delhaye [6], que esse sistema sensor deve ser montado numa seção cujas paredes sejam isolantes elétricos.

Diversos modelos teóricos foram propostos no sentido de prever a dependência das propriedades elétricas médias de um meio bifásico em função da fração de vazios (ver [7] e [8]). Entre eles, os modelos clássicos de Maxwell [9] e Bruggeman [10] se destacam. Sendo  $K$  a condutividade elétrica média do meio bifásico,  $K_0$  a condutividade elétrica da fase contínua (líquido) e  $\alpha$  a fração de vazios, as seguintes relações foram obtidas por Maxwell e Bruggeman, respectivamente:

$$\frac{K}{K_0} = 1 - \frac{3 \cdot \alpha}{2 + \alpha} \quad (1)$$

$$\frac{K}{K_0} = (1 - \alpha)^{1/3} \quad (2)$$

Os resultados experimentais de alguns autores têm-se mostrado relativamente próximos das premissas teóricas. Isso acontece particularmente com Evangelisti & Cimorelli [1] e Michaeli [11]. Já Gombert [12] obteve alguma discrepância.

O presente trabalho objetiva apresentar os resultados experimentais resultantes de um transdutor de impedância de campo fixo e eletrodos montados de modo a não perturbar o escoamento. Sua curva de calibração foi levantada e comparada com os modelos clássicos e curvas de outros autores. Outros testes foram conduzidos no sentido de explorar algumas características de funcionamento desse tipo de transdutor.

ARRANJO EXPERIMENTAL

O tipo de transdutor empregado é formado por um par de eletrodos, ditos principais, guarnecidos por dois outros pares de eletrodos, denominados eletrodos de guarda. A função desses últimos elementos é minimizar os efeitos de borda, de forma a produzir um campo elétrico uniforme entre os eletrodos principais. A geometria dos eletrodos acompanha a curvatura da tubulação, de forma a não interferir no escoamento da mistura bifásica, conforme ilustrado na Figura 1.

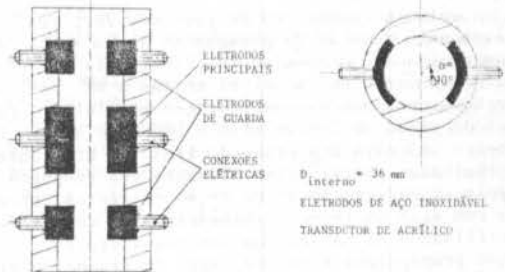


Figura 1. Esquema do transdutor de impedância.

Sendo  $\epsilon$  a constante dielétrica média do meio bifásico, a condição  $(\omega\epsilon/K)^2 \ll 1$ , onde  $\omega$  é a frequência angular do sinal da fonte de alimentação, indica que a resistência ôhmica do meio interior aos eletrodos do transdutor é o efeito elétrico principal, uma vez que a frequência adotada neste trabalho foi de 20 KHz. Nessas condições, a curva de calibração é do tipo  $K/K_0 = f(\alpha)$ . Costuma-se adimensionalizar a condutividade elétrica média,  $K$ , referindo-a a condutividade elétrica da fase contínua (líquido),  $K_0$ , com a finalidade de compensar os efeitos comuns, como a dependência da temperatura e concentração de impurezas. Na pesquisa relatada neste trabalho foram ensaiados dois transdutores.

Uma seção de ensaio foi especialmente construída. A simulação do escoamento bifásico (vertical, ascendente e adiabático) foi realizada com ar e água. O esquema da instalação encontra-se na Figura 2.

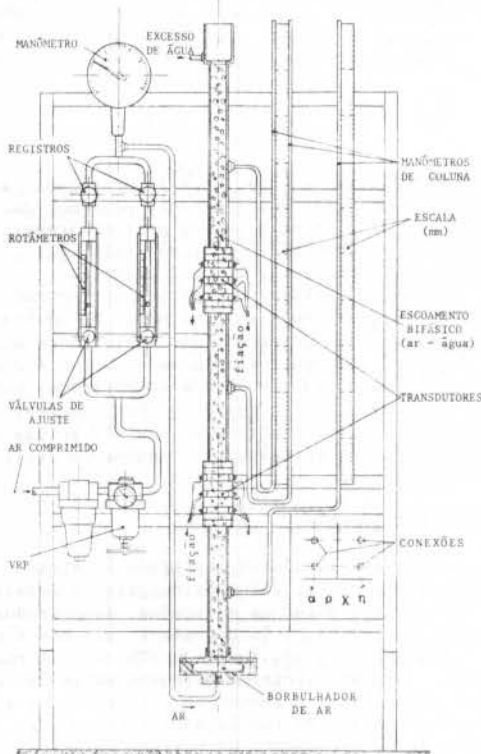


Figura 2. Esquema da seção de ensaio.

A válvula reguladora de pressão, VRP, era responsável pela redução da pressão do ar da linha de ar comprimido até a pressão de trabalho (~ 100 KPa). A medida da vazão foi possível graças a um par de rotâmetros operando em configuração paralela, com faixas de vazão de 10-100 NI/h e 100-1000 NI/h. Um manômetro indicava a pressão do fluxo de ar antes do borbulhador. Este último elemento era responsável pela introdução do ar na seção de testes, preenchida com água em repouso. Manômetros de coluna foram utilizados na calibração dos transdutores, uma vez que proporciona a medida exata da fração de vazão (método gravimétrico).

Um circuito eletrônico foi desenvolvido para tratar os sinais dos transdutores, o qual incluía

um estágio de demodulação do sinal, visto que a fonte de alimentação era de 20 KHz. O projeto do circuito previu duas saídas: sinal instantâneo ( frequência de corte = 100 Hz) e sinal médio ( frequência de corte = 0,06 Hz). Na Figura 3 o diagrama de blocos do circuito empregado é ilustrado.

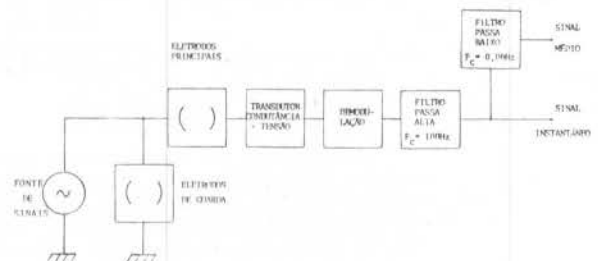


Figura 3. Diagrama de blocos do circuito eletrônico de processamento do sinal.

### RESULTADOS E ANÁLISE

Um total de 794 pontos de calibração foram obtidos, sendo 412 pontos para o transdutor inferior (Figura 2) e 382 pontos para o outro transdutor. Os transdutores foram calibrados pelo método gravimétrico, através dos manômetros de coluna acima referidos. Esse método é suficientemente preciso quando os efeitos de atrito são desprezíveis, como aconteceu no presente trabalho. Quando se verificava o início do regime pistonado, as oscilações nos manômetros de coluna dificultavam as leituras. Nessas condições, somente frações de vazão até 15% puderam ser ensaiadas. Assim, apenas o regime de escoamento bolhas foi verificado; o regime pistonado foi simplesmente observado. O resultado da regressão linear dos pontos experimentais pelo método dos mínimos quadrados é o seguinte:

$$\frac{K}{K_0} = 1,00 - 1,15 \cdot \alpha \quad (3)$$

O coeficiente de correlação linear correspondente é  $r = 0,9955$ . A curva acima juntamente com os pontos experimentais foram incluídos no gráfico da Figura 4.

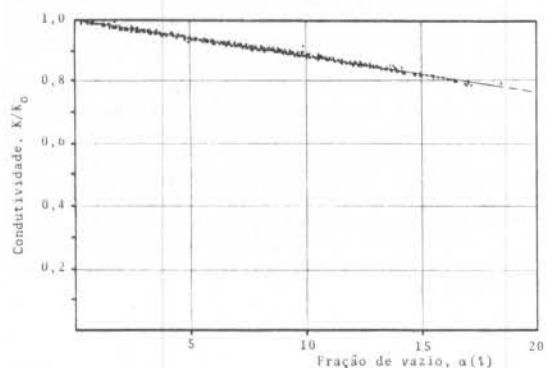


Figura 4. Resultados experimentais.



A tabela 1 apresenta um quadro comparativo de algumas curvas de calibração disponíveis na literatura, além dos modelos teóricos. Para efeito de comparação, as curvas que não eram originalmente lineares, foram linearizadas pelo método dos mínimos quadrados na faixa de fração de vazio de 0-15%, sendo designadas por um asterisco (\*).

Tabela 1. Quadro comparativo de distintas curvas de calibração.

AUTOR	Ref.	CURVA	$\alpha$ (%)
Evangelisti & Cimorelli	1	$C/C_0 = 1 - 1,41\alpha^*$	0-15
Delhaye e outros	2	$K/K_0 = 1 - 1,32\alpha$	0-40
Maxwell	9	$K/K_0 = 1 - 1,39\alpha^*$	0-15
Bruggeman	10	$K/K_0 = 1 - 1,44\alpha^*$	0-20
Michaeli	11	$K/K_0 = 1 - 1,40\alpha$	0-20
Gombert	12	$K/K_0 = 1 - 1,25\alpha$	0-20
Presente trabalho	—	$K/K_0 = 1 - 1,15\alpha$	0-15

Evangelisti & Cimorelli foram os únicos que trabalharam na faixa de operação capacitiva.

A modelagem de Maxwell considera pequenas esferas distribuídas uniformemente de forma matricial num meio contínuo. A distância entre as esferas é tal que não se verifica perturbação alguma no campo elétrico junto a uma esfera devido à presença das demais. Bruggeman, por sua vez, a partir de uma configuração aleatória admitiu a validade da lei de Maxwell.

Em escoamento bifásico, e particularmente nas condições do presente trabalho, dificilmente as hipóteses formuladas por Maxwell são satisfeitas, mesmo no regime em bolhas, de forma que deve se esperar alguma discrepância entre os modelos teóricos e resultados experimentais.

Verificou-se que o sinal elétrico do tipo de transdutor analisado no presente trabalho é sensível à distribuição da fração local na seção transversal [13]. Por outro lado, há concordância entre diversos pesquisadores [1,4,11,12,14] no sentido de que a distribuição dessa grandeza é afetada pela vazão da fase líquido. Isto explica a proximidade dos resultados do presente trabalho e o de Gombert: ambos obtiveram suas curvas com vazão de líquido nula, o que não ocorreu com os demais pesquisadores.

**Efeito dos eletrodos de guarda.** Experimentos foram conduzidos com a finalidade de avaliar os efeitos dos eletrodos de guarda. O primeiro teste consistiu em verificar o comportamento da curva de calibração do transdutor quando os eletrodos de guarda permaneceram desativados. Fundamentalmente, na faixa de fração de vazio investigada (0-15%), não se verificaram variações significativas nem na linearidade, nem na equação da curva de calibração.

Outra experiência visou observar os efeitos de borda. Basicamente, mediu-se a variação do sinal absoluto do transdutor com e sem a operação dos eletrodos de guarda. A análise desse ensaio revelou que o sinal varia cerca de -20%, quando os eletrodos de guarda são acionados. Isso indica que os eletrodos de guarda minimizam os efeitos de borda no sentido de estabelecer um campo elétrico uniforme entre os eletrodos principais, condição importante, sobretudo, para a medida de transitórios.

**Efeitos de assimetria.** Uma esfera de material isolante (vidro) foi introduzida entre os eletrodos principais do transdutor em diversas posições angulares, variando de 15 em 15° e varrendo toda a circunferência da seção transversal do transdutor, como mostrado na Figura 5.

Esquema do ensaio do efeito de assimetria.

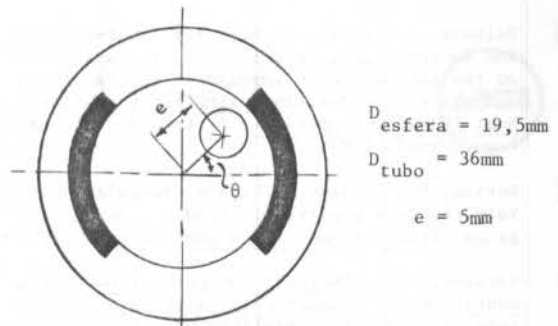


Figura 5. Esquema do ensaio do efeito de assimetria.

Além dessas medidas, a esfera foi posicionada no centro da seção e anotando-se os valores dos sinais correspondentes. A fração de vazio calculada, devido a inclusão dessa esfera, foi de 21,4% o que, da curva de calibração (equação 3), resulta em  $K/K_0 = 0,754$ . O gráfico correspondente a esse ensaio encontra-se na Figura 6.

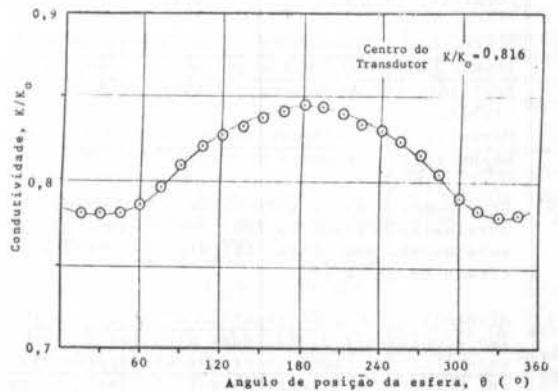


Figura 6. Variação do sinal  $K/K_0$  no ensaio de assimetria.

Essa experiência revela o significativo efeito da assimetria sobre o sinal do transdutor.

#### CONCLUSÕES

O tipo de transdutor construído apresenta uma curva de calibração acentuadamente linear e deve, preferencialmente, ser calibrado na faixa de vazão da fase líquido próximo às condições de trabalho. A uniformidade do campo elétrico entre os eletrodos principais do transdutor pode ser alcançada com o auxílio dos eletrodos de guarda, condição importante na medida de transitórios no escoamento. Verificou-se que existe uma forte dependência da resposta deste instrumento em relação à distribuição da fração local na seção transversal. Caso o escoamento seja reconhecidamente assimétrico, deve ser considerada a utilização de um transdutor de campo elétrico girante [2,3,11,12].

#### REFERÊNCIAS

- [1] Evangelisti, R. and Cimorelli, L., The application of the capacitance method for void

fraction measurement in bulk boiling condition. International Journal of Heat and Mass Transfer, 10: (1967).

- [2] Delhay, J.M., Favreau, C., Saiz Jabardo, J.M. and Tournaire, A., Experimental investigation on the performance of impedance sensors of two and six electrodes. 24th ASME/AIChE National Heat Transfer Conference, Pittsburgh, PA- USA August 9-12, 1987.
- [3] Merilo, M., Dechene, R.L. and Cichowlas, W.M. Void fraction electrical field conductance gauge. Transactions of the ASME, 99: (1977).
- [4] Bernier, R.J., Unsteady two-phase flow instrumentation and measurement. California Institute of Technology, Pasadena, CA-USA, (1982).
- [5] Subbotin, V.I., Pokhvalov, Y.E., Leonov, V.A. e Kronin, I.V., Resistance and capacitance methods of measuring steam contents. Teploenergetika, 21: (1974).
- [6] Delhay, J.M., Multiphase instrumentation and experimental techniques. I Simposio Brasileiro de Transferência de Calor e Massa, Campinas, SP, Julho, (1987).
- [7] Meredith, R.E. and Tobias, C.W., Conduction in heterogeneous systems. Advances in Electrochemistry Engineering, 2: (1962).
- [8] Oisen, H.O., Theoretical and experimental investigation of impedance void meters. Institutt For Atomenergi, Kjeller, Norway, (1967).
- [9] Maxwell, J.C., A treatise on electricity and magnetism. Clarendon Press, Oxford, 2ª ed., V. 1, (1881).
- [10] Bruggeman, D.A.G., Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen substanzen. Ann. Phys. Leipzig, 24: (1935) - citado em [7] e [8].
- [11] Michaelli, J.C., Propagation d'ondes dans les écoulements diphasiques a bulles a deux constituants. Etude Theorique et experimentale. Université Scientifique et Medicale et Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, França, (1982).
- [12] Gombert, F., Etude d'un capteur a impedance a champ tournant pour la mesure de taux de vide. Centre Etudes Nucleaires de Grenoble, Grenoble, França, (1986).
- [13] Simões Moreira, J.R., Transdutor de impedância para a medida da fração de vazio. Escola Politécnica da USP, São Paulo, (em fase de redação).
- [14] Saiz Jabardo, J.M., Investigação experimental sobre a propagação de ondas de fração de vazio em condutos verticais. IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC, 1987. Anais do COBEM 87, (1987).

#### ABSTRACT

Impedance sensors of two electrodes for liquid-gas Two-Phase Flow measurements have been developed and tested in a vertical test section, filled with stagnant water. The calibration curve was obtained by the gravimetric procedure, indicating a strongly linear characteristic for void fractions in the range from 0 up to 15%. The obtained results have been found to be consistent with those from

the literature. In addition, tests have been conducted in order to evaluate effects over the electrical signal by the guard electrodes as well as by the asymmetric distribution of the gas phase.

INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DA EBULIÇÃO DE  
MISTURAS REFRIGERANTE 11 - ÓLEO




CELSO LUIZ DA SILVA  
 Depto. de Física - FUFMT  
 JOSÉ MARIA SAIZ JABARDO  
 Depto. de Eng<sup>a</sup> Mecânica-EPUSP - C.P. 8174  
 01051 São Paulo - SP

RESUMO

A Ebulição Nucleada de misturas Refrigerante 11-óleo com concentrações de óleo na base massa variando de 0 a 10%, foram investigadas. A superfície de aquecimento utilizada era constituída de um tubo cilíndrico de latão de 0,0142m de diâmetro, aquecido interiormente por uma resistência do tipo cartucho. A pressão adotada foi de 0,13 MPa. Os resultados foram correlacionados por uma equação semelhante à de Rohsenow, apresentando pequena dispersão, principalmente em baixas concentrações de óleo. Diversos modelos da literatura foram comparados aos resultados obtidos, resultando discrepâncias significativas.

INTRODUÇÃO

A técnica da "produção de frio" por ciclos frigoríficos de compressão a vapor (ou mesmo de absorção) tem sido aplicada com frequência crescente nos últimos cinquenta anos. Com as exigências cada vez mais severas no controle ambiental de edifícios e mesmo de aplicações industriais, a utilização de equipamentos condicionadores de ar tem se generalizado, aumentando a importância das técnicas de produção de frio. Apesar dessas técnicas apresentarem uma tecnologia consolidada, a necessidade de produzir equipamentos compactos e eficientes em termos energéticos impeliu as indústrias do setor, nos países avançados, a desenvolver pesquisas de alguns aspectos do processo. Assim, além das pesquisas de desenvolvimento de novos compressores, por exemplo, tem-se investigado mecanismos para intensificar a transferência de calor em evaporadores, tornando possível a redução de seu tamanho e, conseqüentemente, de seu custo inicial.

O problema do transporte de óleo de lubrificação do compressor pelo refrigerante é sobejamente conhecido. Como o óleo é solúvel no refrigerante, resulta o transporte do mesmo para o evaporador. Lá a evaporação progressiva do refrigerante faz com que o óleo se deposite. Este depósito não só reduz o coeficiente de transferência de calor mas promove um acréscimo de perda de carga resultante da maior velocidade que se deve imprimir ao refrigerante gasoso para que ocorra o arrasto do óleo, permitindo que o mesmo retorne ao compressor. Percebe-se, assim, a importância do problema da presença de óleo nas regiões de baixa pressão do ciclo frigorífico. Tal importância, entretanto, não tem encontrado eco na comunidade de pesquisa como o comprovam as poucas publicações encontradas sobre o assunto. Em parte, a deficiência de publicações se deve ao fato do problema apresentar características relativamente complexas. Assim, o problema tem sido estudado através da ebulição em piscina de misturas refrigerante-óleo, com a superfície de transferência de calor sendo aquecida eletricamente. Tal problema é representativo dos denominados evaporadores inundados.

O mecanismo de ebulição de misturas em geral tem recebido alguma atenção nos últimos anos. No caso específico de misturas refrigerante-óleo, devem se destacar os trabalhos de Stephan et alii. [1], [2]. Nesses, misturas de distintas concentrações de óleo em refrigerantes R12 e R22 foram investigadas. Trabalhando com superfícies planas de cobre ou inconel, submetidas a tratamentos superficiais, Stephan et alii determinaram um efeito significativo da concentração do óleo no mecanismo de transferência de calor junto à superfície de ebulição. Sauer et alii. [3], [4] investigaram o comportamento de misturas de óleo com os refrigerantes R11 e R12, complementando o trabalho experimental com

algumas tentativas de correlacionar os resultados através de relações do tipo da de Rohsenow [4] e [5] ou resultantes da análise dimensional, obtendo relativo sucesso. Posteriormente, Jensen et alii [6] abordaram o problema, investigando a ebulição de misturas R113 - óleo à pressão atmosférica. Fizeram também experimentos com respeito à obtenção de propriedades termofísicas e de transporte das misturas. Mais recentemente Bergles et alii [7] e [8] publicaram trabalho sobre efeito do óleo, abordando especificamente as questões das propriedades da mistura e da distribuição de temperatura em seções de testes cilíndricas.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar resultados sobre a ebulição de misturas R11 - óleo obtidos experimentalmente e correlacionados através do procedimento dos mínimos quadrados tendo como base a equação proposta por Rohsenow.

MONTAGEM EXPERIMENTAL E PROCEDIMENTO

Os testes foram realizados em uma cuba de aço inox 304 de 0,30x0,20x0,30m, onde instalaram-se duas janelas de vidro plano temperado para observações e obtenção de fotos. Uma tampa do mesmo material da cuba dotada de parafusos uniformemente distribuídos pressionando a junta de borracha especial anti-solventes, proporcionando condições para que se investigue a ebulição de diversos tipos de fluidos à várias pressões. O vapor era condensado em uma serpentina, por onde circulava água da rede. O acionamento de válvulas instaladas nas linhas de vapor, condensado e da água permitiram controlar a pressão, com o que a temperatura do banho pode ser estabelecida. A Fig. 1 apresenta uma representação esquemática do arranjo experimental.

A superfície aquecida era constituída por um cilindro de latão de 0,10m de comprimento e espessura de parede de 0,0070m. Uma resistência do tipo cartucho fornecia o aquecimento necessário, atingindo-se densidades de potência de até 250 KW/m<sup>2</sup>. O controle da potência elétrica fornecida foi feito por dois Variacs, conforme se mostra na Fig. 1.

As temperaturas na superfície de aquecimento foram obtidas através de quatro termopares instalados em orifícios longitudinais, como ilustrado na Fig. 2, com o que foi possível obter a temperatura superficial média ao longo do cilindro [8]. A temperatura do banho foi obtida por um termopar com blindagem de aço inox, colocado a 0,10m de distância da superfície de aquecimento. Um manovacuômetro instalado na tampa da cuba fornece a pressão do sistema.

A carga de sistema era precedida de uma limpeza adequada. O volume de R11 era 0,011m<sup>3</sup>. A energia fornecida era gradualmente aumentada em incrementos de 5KW/m<sup>2</sup> até um máximo de 65KW/m<sup>2</sup>, e depois reduzida até o menor patamar. A cada nível de potência fazia-se as

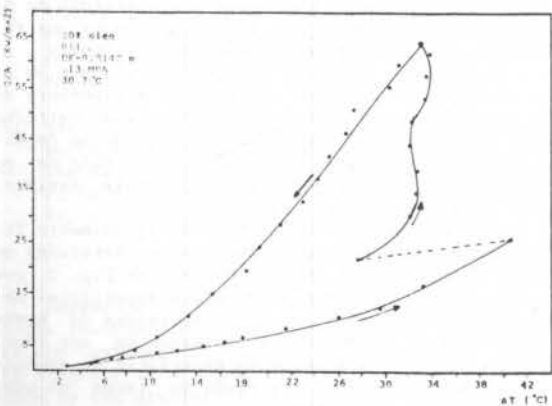
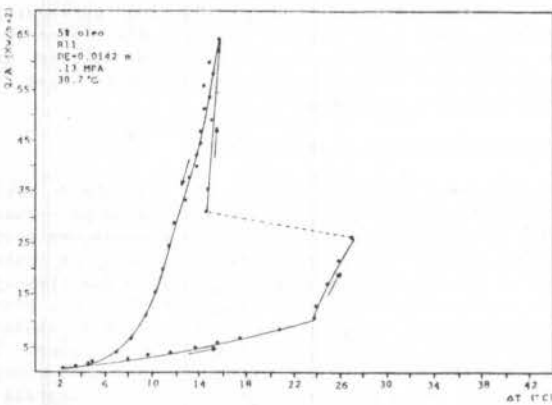
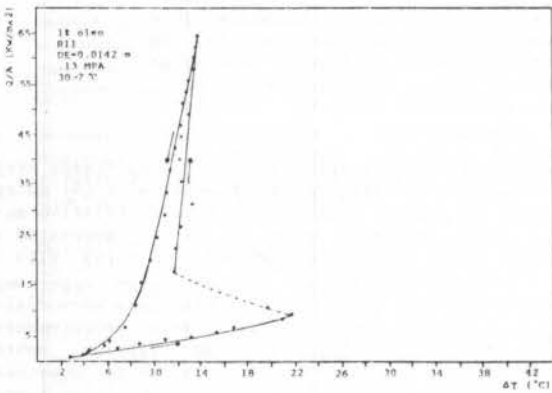
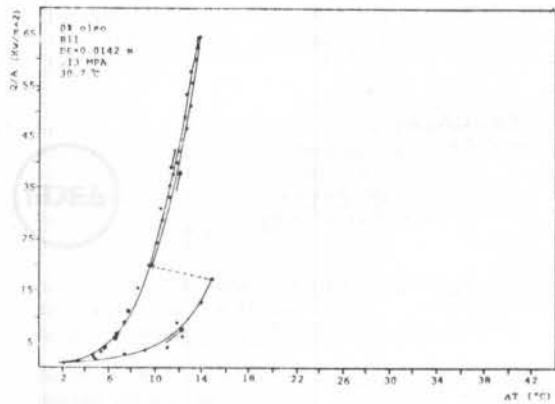


Figura 3. Resultados experimentais para o R11 puro e com 1,5 e 10% de óleo.

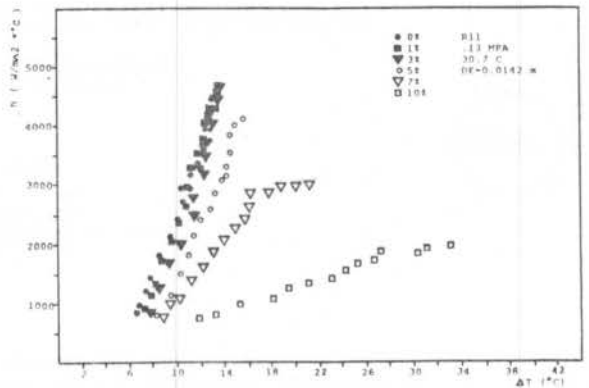


Figura 4. Efeito do óleo no coeficiente de transferência de calor obtido na ebulição de misturas de óleo com R11 à pressão de 0,13 MPA.

$$T_S - T_{SAT} = C_S (Q/A)^m Pr^n \quad (2)$$

onde  $T_S$  é a temperatura superficial,  $(Q/A)$  é o fluxo de calor por unidade de área,  $Pr$  é o Número de Prandtl do líquido e  $C_S$  um parâmetro que depende de propriedades termodinâmicas e de transporte do líquido, além do tipo de combinação superfície-fluido. Diversos pesquisadores têm verificado a adequação de uma correlação do tipo Eq. (2) para representar situações em que ocorre ebulição nucleada. Tal será, portanto, a equação de partida adotada para correlacionar resultados experimentais obtidos para a ebulição nucleada de soluções R11-óleo.

#### AVALIAÇÃO DA CORRELAÇÃO

Como a viscosidade parece ser a única propriedade que é significativamente afetada pelo óleo, seu efeito sobre a ebulição nucleada da mistura refrigerante-óleo foi avaliada através do Número de Prandtl. Nessas condições, da adimensionalização da Eq. (2), resulta:

$$Y = C_S X^m Pr^n \quad (3)$$

$$\text{onde } Y = \frac{C_P (T_S - T_{SAT})}{h_{LV}} ; X = \frac{(Q/A)D}{h_{LV} \mu}$$

$$Pr = \frac{\mu C_P}{k} ; D = \left[ \frac{\sigma}{g(\rho_m - \rho_v)} \right]^{0.5}$$

em que as propriedades se referem a mistura.

Considerando um total de 125 pontos experimentais, os parâmetros "m", "n" e " $C_S$ " da Eq. (2) foram levantados através do procedimento dos mínimos quadrados resultando os seguintes valores:

$$C_S = 0.00413$$

$$m = 0.32448$$

$$n = 1.90728$$

A dispersão média observada foi de 0,00023, e o desvio médio padrão 0,01510. Observe-se que o efeito da viscosidade, através do Número de Prandtl, é significativo. Na Fig. 5 são comparados os resultados experimentais com aqueles resultantes da Eq. (3) para os valores de m, n e  $C_S$  acima, tendo o Número de Prandtl como parâmetro. Observa-se uma correlação razoável dos resultados experimentais, resultante de uma significativa variação do Número de Prandtl em virtude da varia

leituras da temperatura do banho, temperaturas da superfície e pressão.

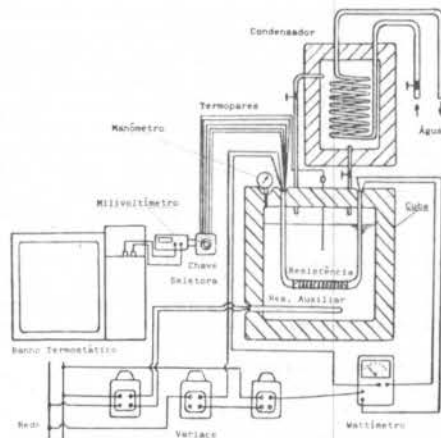


Figura 1. Diagrama esquemático do circuito experimental.

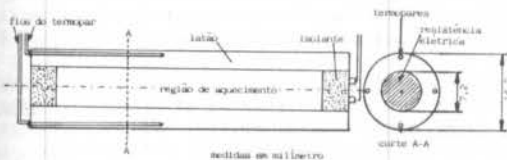


Figura 2. Detalhe da resistência de aquecimento e da disposição dos termopares.

Depois que uma rodada usando R11 puro era completada adicionava-se óleo usado em compressores frigoríficos (Polar Oil da Atlantic) numa quantidade previamente calculada para que a massa de óleo representasse 1% da massa total da mistura R11-óleo. Isto feito, variava-se novamente a potência elétrica fornecida e repetia-se a rotina anteriormente descrita para o R11 puro. Testaram-se misturas com 1,3,5,7,10 e 20% de óleo.

Os dados obtidos foram processados levando-se em consideração as equações de calibração de cada termopar. Perdas axiais pelos cilindros verticais que sustentam a resistência de aquecimento foram avaliadas de terminando-se que elas variavam de 0,5% a 2,0% na região de ebulição plenamente desenvolvida. Correções na temperatura da superfície devido a espessura da parede do tubo ( $x=0,001m$ ) foram estimadas através da solução do problema de condução radial de calor em um cilindro, obtendo-se valores que variavam de 0,1 a 0,5°C.

As propriedades de transporte do R11 foram obtidas das tabelas da Ashrae e Du Pont Inc. As do óleo foram consideradas como sendo aquelas do tipo 3GS, como o comprovaram levantamentos experimentais de sua densidade e viscosidade. As propriedades de transporte da mistura refrigerante-óleo foram avaliadas através de uma ponderação adequada das propriedades dos componentes [6]. Tais correlações, proporcionam desvios que variam de 1,5 a 4,0%.

As incertezas no coeficiente de transferência de calor foram estimadas em torno de 6% quando determinada através de um estudo de propagação do erro.

## RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os parâmetros mais importantes da transferência de calor na ebulição nucleada plenamente desenvolvida podem ser considerados como sendo o fluxo de calor por unidade de área ( $Q/A$ ) e a diferença de temperatura entre a superfície e o banho líquido ( $\Delta T$ ). Essas duas

variáveis são descritas pela Lei do Resfriamento de Newton:

$$h = Q/A \Delta T \quad (1)$$

Resultados obtidos da ebulição de R11 puro e de misturas de R11 com 1,5 e 10% de óleo na base massa são mostrados na Fig. 3, em termos do fluxo de calor e do superaquecimento da superfície. Observa-se que para pequenos superaquecimentos da superfície, o sistema apresenta características de Convecção Natural. À medida que o superaquecimento da superfície é incrementado, bolhas isoladas começam a aparecer sobre a superfície. O aparecimento dessas bolhas depende da concentração de óleo. Assim, para refrigerante puro, este ponto ocorre por volta de  $6,5KW/m^2$  de potência, de 1 a 5% este patamar é elevado para  $10,5KW/m^2$  e, para concentrações de 7, 10 e 20%, as bolhas surgem em potências da ordem de  $12,5KW/m^2$ .

Com o aumento do fluxo de calor a população de bolhas na superfície é incrementada, no que se convencionou chamar de Região de Transição, até que, por volta de  $15KW/m^2$  toda a superfície de aquecimento é tomada por bolhas e atinge-se a denominada Ebulição Plenamente Desenvolvida. Depois de atingir um nível máximo de  $65KW/m^2$ , diminui-se o fluxo de calor, observando-se que para a mesma potência, o superaquecimento ( $\Delta T$ ) é menor que no caso em que a potência era incrementada, caracterizando efeitos de histerese, os quais se acentuam à medida que a concentração do óleo é aumentada.

A Fig. 4 mostra que o efeito do óleo no coeficiente de transferência de calor para a região de Ebulição Nucleada Plenamente Desenvolvida se dá no sentido de diminuí-lo à medida que a concentração de óleo na mistura aumenta. Não se observam aumentos significativos no coeficiente de transferência de calor para concentrações de 1% e 3% em relação ao R11 puro, as variações se situam dentro da faixa de incerteza de 6%, não caracterizando, portanto, certa anomalia referida na literatura [1] e [9], segundo a qual o coeficiente de transferência de calor para essas concentrações deve ser maior que para o refrigerante puro. Pode-se notar também que a inclinação destas curvas tende a diminuir com o aumento da porcentagem de óleo, efeito que é atribuído ao retardamento do despreendimento das bolhas ocasionado pela formação de uma camada rica em óleo na região próxima a superfície de aquecimento.

## CORRELAÇÃO DOS RESULTADOS

Dentre os mecanismos propostos para interpretar o processo de transferência de calor na ebulição de fluidos junto a superfícies sólidas aquecidas, aquele proposto por Rohsenow, é um dos que melhor tem correlacionado os resultados experimentais. Esse modelo considera que o mecanismo responsável pela remoção de calor junto à superfície seria o de convecção local resultante da agitação promovida pelas bolhas. Nessas condições, admitindo como dimensão característica o diâmetro de despreendimento das bolhas, a relação funcional entre os parâmetros adimensionais que caracterizam o fenômeno pode ser escrita por:

$$Nu_D = f(Re_D, Pr)$$

O Número de Nusselt,  $Nu_D$ , é dado em termos do coeficiente de transferência de calor médio, o qual é referido ao superaquecimento da superfície. Por outro lado, o Número de Reynolds,  $Re_D$ , é caracterizado por uma velocidade do líquido junto à superfície determinada pelo deslocamento médio promovido pelas bolhas. Para isso, modelos de distribuição de cavidades ativas na superfície, função do fluxo de calor,  $Q/A$ , e da frequência de despreendimento de bolhas devem ser introduzidos. Através da argumentação acima Rohsenow obteve uma relação do tipo:



ção da concentração de óleo, como havia sido anteriormente sugerido. A maior dispersão dos pontos experimentais se dá para a concentração de 10% de óleo. Esse resultado ocorre provavelmente devido aos efeitos significativos da maior concentração do óleo sobre as características de despreendimento das bolhas, além de sua população e frequência. Tais efeitos poderiam alterar a forma da Equação de Rohsenow que seria inadequada na forma como é mostrada na Eq.(2). Esforços maiores de modelagem no sentido de interpretar aqueles resultados estão sendo objeto de estudo por parte dos autores.

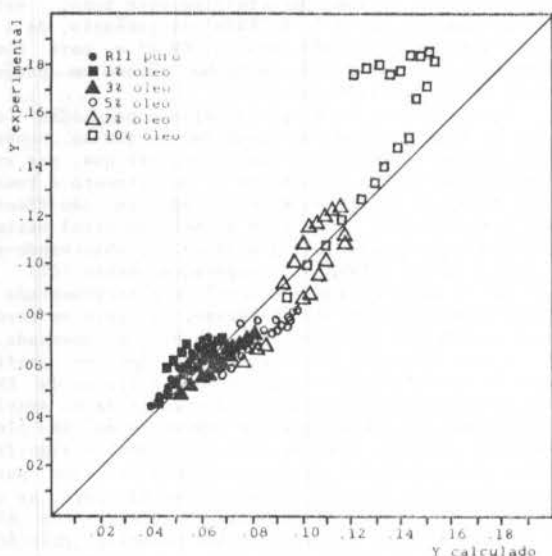


Figura 5. Parâmetro Y experimental e calculado.

Na Fig. 6 os resultados da Eq.(3) são comparados a correlações clássicas da literatura para a ebulição nucleada de substâncias puras [10]. O modelo de McNeilly, é o que melhor correlaciona os resultados experimentais obtidos neste trabalho.

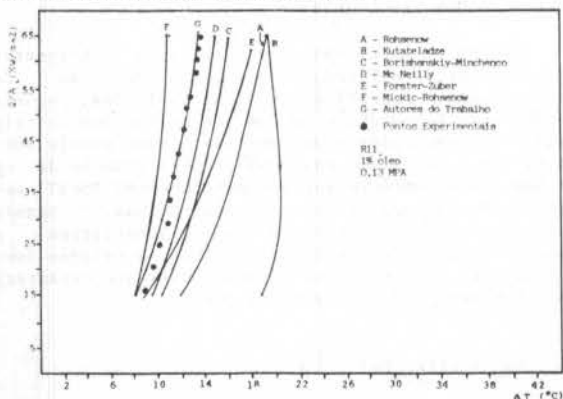


Figura 6. Comparação de correlações da literatura com a proposta, obtidas para concentrações de 1% de óleo na base massa.

## CONCLUSÕES

Os resultados experimentais mostram que o coeficiente de transferência de calor é pouco afetado ( $\pm 5\%$ ) para concentrações de óleo até 3%. Acima de 3%, entretanto, os efeitos são bastante significativos, proporcionando uma diminuição de até 51% no coeficiente de

transferência de calor para 10% de óleo. Assim, pode-se afirmar que a concentração de óleo é um parâmetro significativo na mudança de fase de misturas refrigerante-óleo, muito comuns em aplicações frigoríficas.

Equações do tipo Rohsenow tem se mostrado eficientes na correlação de misturas óleo-refrigerante. No presente trabalho, resultados experimentais obtidos para misturas de distintas concentrações de óleo comercial com R11 foram correlacionados com sucesso por equações do tipo acima mencionado. A maior dispersão se deu em concentrações de óleo de 10%, quando outros efeitos, além da viscosidade, podem se tornar significativos, exigindo uma reavaliação do modelo original de Rohsenow. Experiências com misturas de R12, R113 e R114 estão sendo realizadas no intuito de se obter resultados que possibilitarão a obtenção de uma correlação geral que proporcione coeficientes de transferência de calor que levem em consideração o efeito do óleo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Stephan, K., "Influence of Oil on Heat Transfer of Boiling Refrigerant 12 and Refrigerant 22", *XI International Congress of Refrigeration*, 1963
- [2] Stephan, K. e Mitrovic, J., "Heat Transfer in Natural Convective Boiling of Refrigerant-Oil Mixtures", *International Heat Transfer Conference*, vol.4, Hemisphere Publishing Corporation Washington, D.C. - pp.73-87, 1982.
- [3] Sauer, H.J., Medrow, R.A. e Sinnarwalla, A.M., "Effects of Surface Condition on Nucleate Boiling of R11", *Transactions of ASHRAE*, vol.81, part II, pp. 274, 1975.
- [4] Rohsenow, W.M., "A Method of Correlating Heat Transfer for Surface Boiling of Liquids", *Transactions of ASME*, vol.73, pp.969, 1951.
- [5] Rohsenow, W.M., "Heat Transfer with Boiling", *ASHRAE Semianual Meeting in Houston-Texas*, Jan. pp.24-27, 1966.
- [6] Jensen, M.K. e Jackman, D.L. "Prediction of Nucleate Pool Boiling Heat Transfer Coefficients of Refrigerant-Oil Mixtures", *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, vol. 106, p.184, Fev., 1984.
- [7] Baustian, J.J. e Pate, M.B. e Bergles, A.E., Properties of Oil-Refrigerant Liquid Mixtures with Applications to Oil Concentration Measurement- Part I - Thermophysical and Transport Properties", *Transactions of ASHRAE*, vol. 92, pp.55, 1986.
- [8] Chyu, M.C. e Bergles, A.E., "Thermal Analysis of the Electrically Heated Cylindrical Test Section for Heat Transfer Experiments", *Experimental Thermal and Fluid Science*, nº 1, pp.19-27, 1988.
- [9] Sauer, H.J. e Gibson, R.K. e Chongrungreong, S., "Influence of Oil on the Nucleate Boiling of Refrigerants", *Proceedings from 6th International Heat Transfer Conference*, Toronto, vol.1, pp.181-186, 1978.
- [10] Chongrungreong, S. e Sauer, H.J., "Nucleate Boiling Performance of Refrigerants and Refrigerant-Oil Mixtures", *Journal of Heat Transfer*, pp. 701-705, vol.102, Nov., 1980.

## ABSTRACT

Nucleate Boiling of oil-refrigerant 11 mixtures with oil concentration (mass based) varying from 0 up to 10% have been investigated. A cylindrical heating surface made out of a thickwall brass pipe of 0.0142m of external diameter was adopted for the experiments, which were run at a pressure of 0.13 MPa. The obtained results have been correlated by a Rohsenow type of equation, presenting a small dispersion at low concentrations of oil. Several models from the literature have been compared to the obtained results. significant discrepancies have been observed.

MEDIDA CALOMÉTRICA DA ABSORVIDADE SOLAR NORMAL MÉDIA DE SUPERFÍCIES AO AR COM AUXÍLIO DE UM SIMULADOR SOLAR



LUIZ ANTONIO WAACK BAMBACE  
 Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE  
 Caixa Postal 515 - 12201 - São José dos Campos, SP

RESUMO

Este trabalho apresenta um método de medida da absorvidade solar normal média, onde obtém-se esta propriedade a partir da razão de potência elétrica necessária para reequilibrar o sistema em uma temperatura idêntica a obtida iluminando-se o mesmo com um simulador solar. Um modelo teórico simples permite atenuar os erros devido as resistências térmicas internas da montagem e da amostra, garantindo precisões satisfatórias mesmo que as propriedades térmicas da amostra não sejam exatamente conhecidas.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é descrever um método calorimétrico de medida da absorvidade solar normal média ( $\alpha$ ), definida como a fração da energia luminosa que incide perpendicularmente a uma amostra, com composição espectral idêntica a luz solar num dado ambiente, que é absorvida por esta amostra. O presente método foi desenvolvido para medir ao ar livre esta propriedade e para ser empregado no controle das tintas e demais revestimentos a serem empregados no sistema de controle térmico do satélite de Coleta de Dados I, usando apenas facilidades já existentes no Instituto de Pesquisas Espaciais.

Dois são as classes de métodos para esta medida; os óticos e os calorimétricos. De acordo com a literatura [1 a 4], o método mais preciso é o clássico método do ótico no qual se ilumina a amostra, colocada dentro de uma esfera integradora e se analisa a radiação refletida com um monocromador e um fotodetector. Este sistema permite obter-se a absorvidade com erros de 2 a 5%, conforme a qualidade da instrumentação, método de calibração e faixa do valor desta propriedade. Métodos óticos que não utilizam todos estes instrumentos geralmente são calibrados contra o método anterior, destacando-se dentre estes a técnica que usa apenas um fotodetector plano, uma esfera integradora tipo Ulbricht e uma fonte com espectro próximo ao do Sol. Finalmente, os métodos calorimétricos já existentes na literatura foram concebidos para trabalhar em vácuo ( $10^{-4}$  Pa) em câmaras com paredes criogênicas. Métodos calorimétricos são em geral mais precisos que os óticos que não utilizam monocromador pela ausência do erro associado a mudança de resposta do fotodetector com o comprimento de onda, e a amplificação do sinal. Os custos associados tanto a operação como aos equipamentos exigidos tem sido até aqui a maior restrição ao uso de tais métodos. Medir ao ar livre calorimetricamente é altamente interessante quando já se dispõe de um simulador solar, pois neste caso não há investimentos em equipamentos, as medidas são realizadas rapidamente e a baixo custo operacional. Com o método proposto, pode-se medir com precisão suficiente a absorvidade solar normal média.

FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE MEDIDA

O método de medida aqui proposto baseia-se no fato de que em conjuntos com baixo número de Biot, a posição real onde o calor é gerado pouco afeta a temperatura do meio. Em decorrência disto em um conjunto com esta característica poderia-se gerar calor com um resistor elétrico de modo a equilibrar a temperatura do conjunto em valores iguais aqueles nos quais o sistema se equilibra quando iluminado pelo simulador solar. Sabendo-se qual a quantidade de energia luminosa incidente na amostra ter-se-ia a absorvidade como a razão da potência elétrica pela luminosa. Contudo mesmo com os valores de Biot mais baixos obtíveis, limitado pela resistência térmica de contato, há um erro residual que pode ser corrigido pelo modelamento do arranjo experimental. Erros relativos de até 20% nesta correção não representam mais de 1,5% no resultado final, em virtude da faixa de Biot das montagens experimentais. Mesmo somando-se a este erro aqueles devidos a instrumentação empregada, obtém-se em decorrência disto erros finais relativamente baixos.

Conforme já citado a absorvidade será obtida por:

$$\alpha = \frac{P_{ab}}{I.S} = \frac{P_{el}.f}{I.S} \quad (1)$$

onde: I é a intensidade do fluxo luminoso, S é a área da amostra, P<sub>ab</sub> é a potência luminosa absorvida pela amostra, P<sub>el</sub> é a potência elétrica gerada e f é o fator de correção.

O arranjo relativo entre sensor, amostra e base do aparelho, bem como um esquema do modelo térmico adotado são apresentados na Figura 1.

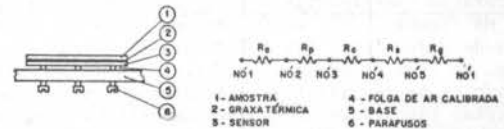


Figura 1 - Arranjo sensor base amostra e seu modelo térmico.

Da Figura 1, pode-se obter as resistências térmicas equivalentes entre os nós 2 e 5 e o nó 1 (ar), respectivamente  $R_{2-1}$  e  $R_{5-1}$ , bem como a temperatura do nó 3 para geração de calor nos nós 2 e 5,  $T_{3-2}$  e  $T_{3-5}$ , como se segue:

$$R_{2-1} = (S-R_0)R_0/S \quad (2)$$

$$R_{5-1} = (S-R_5)R_5/S \quad (3)$$

$$T_{3-2} = q_2 R_{2-1} (R_g + R_s) / (S-R_0) \quad (4)$$

$$T_{3-5} = q_5 R_{5-1} (R_0 + R_p + R_c) / (S-R_g) \quad (5)$$

$$S = R_0 + R_p + R_c + R_g + R_s \quad (6)$$

Forçando-se  $T_{3-2}$  e  $T_{3-5}$  serem iguais:

$$q_5/q_2 = \frac{R_0}{R_g} \frac{(R_g + R_s)}{(R_p + R_0 + R_c)} = \frac{(1 + h_g \cdot \delta s / k_s)}{(1 + h_0 / h_c + \delta \cdot p \cdot h_0 / k_p)} \quad (7)$$

onde:  $h_g$  e  $h_o$  são os coeficientes de troca de calor por convecção entre o ar e o conjunto pelo topo e pela folga,  $\delta_s$ ,  $\delta_p$ ,  $k_s$  e  $k_t$  respectivamente as espessuras do sensor e da amostra e as respectivas condutividades térmicas, e  $h_c$  é o coeficiente de troca de calor por contato.

Da expressão 7, observa-se que para somas de resistências da peça, sensor e contato muito menores que  $R_g$  e  $R_o$ , Biot baixo, tem-se da imposição de igualdade de temperaturas que  $q_2$  tende a  $q_s$ . Do mesmo modo quando existe proporcionalidade entre  $R_g$  e  $R_o$ , e  $R_s + R_g$  e a soma de  $R_p$ ,  $R_o$  e  $R_c$  o erro é nulo.

A condutibilidade térmica do ar e sua viscosidade dinâmicas podem ser obtidas por:

$$k_{ar} = 2,6464 \times 10^{-3} T^{1.5} / [T + 245,5 \times 10^{-(12/T)}] \quad (8)$$

$$u_{ar} = 1,458 \times 10^{-6} T^{1.5} / (T + 110,4) \quad (9)$$

onde:  $T$  é a temperatura média em Kelvin entre o ar e o conjunto sensor amostra.

Para cálculo de  $h_o$  usou-se a fórmula de MacAdams:

$$h_o * L k_{ar}^{-1} = a (Gr Pr)^n \quad (10)$$

onde:  $Gr$  e  $Pr$  são os números de Grashoff e Prandtl,  $a$  e  $n$  são respectivamente 0,54 e 0,25 para regime laminar e 0,14 e 1/3 para regime turbulento ( $Gr * Pr < 2 \times 10^5$ ).

Para cálculo do coeficiente de troca de calor pela folga de ar usa-se outra fórmula de MacAdams:

$$h_g \delta k_{ar}^{-1} = a (Gr \delta Pr)^n \quad (11)$$

onde:  $\delta$  é a folga,  $a$  e  $n$  0,195 e 0,25 para regime laminar ( $10^4 < Gr * Pr < 4 \times 10^5$ ), 0,068 e 1/3 para regime turbulento, calculando-se  $h_g$  considerando-se apenas condução pelo ar quando  $Gr * Pr$  é o menor que  $10^4$ .

Aos valores de  $h_o$  e  $h_g$  calculados por 10 e 4, acrescenta-se a parcela devido à radiação,  $0,6 \epsilon_a (T_3^2 + T_{amb}^2) (T_{amb} + T_{sensor})$ , e  $\delta G_f \cdot (T_s^2 + T_{amb}^2) (T_{amb} + T_{sensor})$  para  $h_o$  e  $h_g$  respectivamente, onde  $G_f$  é o fator de acoplamento de Gebhart com o meio e  $\sigma$  a constante de Boltzman.

**Montagem experimental e resultados.** O sensor apresentado na Figura 1, foi feito com uma chapa de lamina de fibra de vidro-epoxi FR4 (60% fibra de vidro) da Perstorp, de 1 mm de espessura. Este laminado quando não processado tinha de cada lado uma folha de cobre de 18  $\mu$ m, por processo fotográfico formou-se uma trilha composta de 165 barras de cobre remanente de 136  $\mu$ m de largura, espaçadas de 136  $\mu$ m, e ligadas em série. Expondo a placa a uma atmosfera fracamente corrosiva com monitoração de sua resistência esta foi ajustada para 100  $\Omega$  a 25°C. Na outra face da placa formou-se por processo fotográfico um outro resistor análogo, formado porém por 83 barras de 270  $\mu$ m espaçadas de outros 270  $\mu$ m, também ligadas em série mas giradas de 90° em relação as barras da outra face. Este segundo resistor foi feito com 25  $\Omega$ . Estes resistores receberam tão logo ajustadas suas resistências uma pintura acrílica isolante.

Em cada um dos 4 cantos do sensor foram soldados pinos de aço de 0,25mm de diâmetro, soldados após esta montagem em furos metalizados. Estes pinos tinham duas funções: contato elétrico e referências de posicionamento do sensor. Como fêmea dos contatos elétricos usou-se contatos dourados para chips de computador.

Três parafusos de teflon M3, foram usados para controle da folga de ar entre o sensor e a placa terra térmica. Uma chapa de alumínio de 3mm de espessura, sob a qual se formou um fluxo de ar com o auxílio de um ventilador, foi usada como suporte.

Uma coluna encaixada a base, feita com chapas e tubos de PVC, serviu de suporte ao colimador ao mesmo

tempo que evitou a existência de correntes de ar no sensor. Na montagem empregada forçou-se o maior desacoplamento possível entre o colimador e a base.

O resistor do sensor foi ligado a outro resistor idêntico colado a base e a dois potenciômetros de carbono como mostra a Figura 2. A ponte assim executada mostrou excelente sensibilidade, dado o elevado coeficiente de temperatura do cobre ( $3,93 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ).

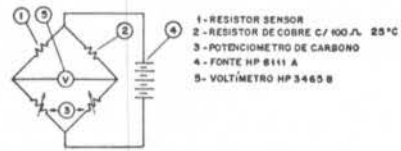


Figura 2 - Ponte de Wheastone.

A ponte usada tem a propriedade de dar um sinal dependente da diferença de temperatura entre o sensor e o ambiente. A temperatura do ambiente foi medida com um termômetro de platina.

O arranjo experimental usado é apresentado na Figura 3, sendo a ponte de Wheastone (Figura 2) zerada a cada medida.

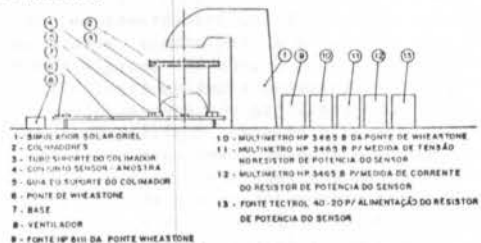


Figura 3 - Arranjo Experimental

Com o auxílio de resistores elétricos com geração de calor praticamente uniforme, calibrou-se o aparelho.

O primeiro destes resistores era uma chapa de alumínio de 50x50x0,5mm com uma camada de nitreto de tantalum e duas faixas de ouro de 1mm de largura em duas laterais (contatos). Dado que para peças metálicas a resistência de contato  $R_c$  é muito maior que a da peça  $R_p$ , peças como esta, pintadas de branco, preto ou pintadas com verniz isolante e metalizadas foram usadas para representar as peças de um extremo do intervalo de utilização do aparelho.

Para representar-se o outro extremo usou-se chapas de circuito impresso FR4 de 1,6mm de espessura, onde se formou um resistor de 25  $\Omega$ , igual ao resistor de mesmo valor do sensor. Da mesma forma tais peças receberam pintura branca e negra e metalização sobre verniz isolante.

Para acoplar termicamente o sensor as amostras usou-se glicerina loira ( $k = 0,206 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ).

Regulou-se a folga para 1,1mm com o intuito de ter-se idênticos erros para amostras com propriedades nos dois limites do intervalo útil do aparelho. Para esta folga o fator Gebhart  $G_f$  vale 0,0813.

Três operadores diferentes, realizaram medidas de  $q_2/q_5$  para iguais sinais da ponte, tendo cada operador executado 6 medidas com cada padrão, em quatro diferentes níveis padronizados de potência aplicada (-9V, 7,5V, 5V, 3,5V).

Com base nestas 126 medições, obteve-se valores de  $h_c$ ,  $k_s/b_s$ ,  $\delta_{ar}$  conforme a Tabela 1. Tais valores ajustados de propriedades levaram a erros totais inferiores a 2,7% para todos os pontos. Os maiores erros foram justamente para os pontos de menor nível de potência, devido a resolução do voltímetro. O valor de  $h_c$ , engloba a glicerina e a pintura do sensor.

Tabela 1 - Valores Experimentais de Alguns Parâmetros

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE
$h_c$	968	W/m <sup>2</sup> / °C
$k_s/b_s$	429	W/m / °C
$b_{ar}$	1.13	m

Executada esta calibração, testou-se com o uso direto do simulador solar, 6 amostras de alumínio pintadas com a tinta negra Chemglaze Z306 e o primer AP131 sobre o alumínio decapado, 6 amostras de alumínio decapado pintadas com a mesma tinta mas com o primer BR127 da Cynamid, e seis amostras pintadas com o primer AP131 e a tinta Chemglaze Z306 sobre Alodine 1200, 18 amostras, 6 com cada uma das preparações já citadas foram pintadas com a tinta Z202 (branca).

A Tabela 2 apresenta os resultados desta medição.

Tabela 2 - Resultados da Medida de Absortividade em Amostras Pintadas

AMOSTRA	MÍNIMO $\alpha$	MÁXIMO $\alpha$	MÉDIA DE $\alpha$	DEVIDO PADRÃO	FAIXA DE SUPORTE DO FABRICANTE
decap + AP131 + Z306	0,941	0,958	0,958	0,008	0,92 a 0,97
decap + BR127 + Z306	0,948	0,961	0,953	0,007	0,92 a 0,97
Alod 1200 + AP131 + Z306	0,939	0,955	0,947	0,008	0,92 a 0,97
decap + AP131 + Z202	0,232	0,241	0,236	0,005	0,23 a 0,27
decap + BR127 + Z202	0,236	0,242	0,239	0,003	0,23 a 0,27
Alod 1200 + AP131 + Z202	0,238	0,246	0,241	0,006	0,23 a 0,27

- Absorvidade solar média.

Duas de cada uma destas amostras foram submetidas a 300 ciclos de -60°C a 80°C em vácuo medindo-se novamente as propriedades de todas estas amostras. Notou-se como mostra a Tabela 3, sensível alteração nas amostras pintadas com tinta negra e preparação diferente da usualmente normalizada para esta tinta: primer AP131 sobre alumínio decapado. Para as tintas brancas não houve alteração sensível de resultados. No caso das peças com Alodine 1200, acredita-se que houve oxidação do pigmento das tintas negras (negro de fumo) pelo cromo hexavalente presente no alodine. Para a tinta branca, as normas normalmente permitem a pintura sobre Alodine, o que reforça esta idéia.

Tabela 3 - Valores das Propriedades Óticas após Ciclagem.

AMOSTRA	$\alpha_{min}$	$\alpha_{máx}$
decap + AP131 + Z306	0,92	0,94
decap + BR127 + Z306	0,75	0,78
Alod 1200 + AP131 + Z306	0,85	0,88
decap + AP131 + Z202	0,24	0,25
decap + BR127 + Z202	0,235	0,24
Alod 1200 + AP131 + Z202	0,235	0,24

A Tabela 4 mostra a contribuição relativa de algumas fontes de erro.

Tabela 4 - Fontes de Erro

TIPO DE FONTE DE ERRO	ERRO TÍPICO	CONTRIBUIÇÃO NO ERRO PARA $\alpha = 0,15$	CONTRIBUIÇÃO NO ERRO PARA $\alpha = 0,95$
Ruído na ponte	0,1mV	0,54%	0,08%
Erro de estabilização da ponte	0,4mV	2,14%	0,32%
Erro da calibração (levantamento de $h_c, k_s, b_{ar}$ )		2,7%	2,7%
Efeitos de 2ª ordem na ponte devido a mudança no ambiente		1,06%	1,06%
Variações da resistência térmica de contato amostras metálicas	0,05mm na folga	0,23%	0,36%
Estimativa de propriedades de amostras plásticas	15% k/b	0,37%	0,60%
Flutuações de potência iluminação incidente	6,78W/m <sup>2</sup>	0,50%	0,50%
Ajuste do nível de iluminação do simulador	1,94W/m <sup>2</sup>	1,02%	0,14%
Erro no cálculo de $b_{ar}$ e $b_{ar}$ devido ao erro de cal. ponte		0,2%	0,6%

Deve-se notar que o simulador solar da Oriel, tinha controle de nível de iluminação em malha fechada, para os níveis de iluminação ajustados no dial, aferido com uma célula padrão. A máxima variação entre a temperatura ambiente e a de referência (zeragem da ponte) considerada foi de 2,5, devido a existência da ar condicionado na sala. O erro inerente as fórmulas de Mac Adams, foi absorvido através do ajuste dos parâmetros por mínimos quadrados. Aos erros da Tabela 4, deve-se acrescentar o devido a pequenas diferenças de espectro entre o simulador e o espectro real do Sol. Notar que o erro de calibração de 2,7% da Tabela 4, refere-se ao máximo erro observado na calibração elétrica, e assim já engloba o erro devido a ruído e estabilização da ponte, bem como efeitos de 2ª ordem no sinal da ponte devido a mudança de temperatura da sala, e variações de resistência térmica de contato e erros tendenciosos do modelo.

O erro total, excetuado o devido ao espectro, é da ordem de 2,8% para amostras de alta absorvidade e 0,03 para a amostra de baixa absorvidade.

A constante de tempo do sistema varia de 2 a 4 minutos dependendo da amostra. A redução da espessura da chapa de circuito impresso parece interessante do ponto de vista da constante de tempo. Tanto a redução de espessura de placa de circuito impresso como o aumento da folga, não diminuirão sensivelmente a diferença entre  $q_2/q_5$  máximo e mínimo relativos aos vários tipos de peça.

#### CONCLUSÕES

O método proposto pode ser considerado eficaz para a medida da absorvidade normal solar média de revestimentos termo-óticos, em vista da sua excelente repetibilidade e precisão, já que os únicos erros não tratados no capítulo anterior foram a equivalência espectral da luz do Sol e do simulador e as eventuais oscilações de potência deste aparelho. As oscilações de potência do simulador solar foram levantadas pelo pessoal de desenvolvimento de células solares e ficaram abaixo de 0,5%. O erro devido ao espectro é pequeno segundo os dados do fabricante, e pouco relevante para amostras de propriedades óticas pouco dependentes do comprimento de onda. A maior dificuldade encontrada foi o ajuste manual do nível de potência elétrica que levava a igualdade de sinais da ponte, que resultou numa repetibilidade de 1,2%. Futuramente em decorrência disto, poderá se adotar algum tipo de controle automático. Além disto o método se mostrou útil na detecção de alterações de propriedades óticas. Futuramente, espera-se reduzir pela metade da espessura da placa de circuito impresso para diminuir a constante de tempo e reduzir o valor das correções. O aumento da folga muito mais promissora quanto ao aspecto Biot, esbarra no problema do aumento da constante de tempo.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Dunkle, R.V.; Edwards, D.K.; Gier, J.T.; Devans, J. T. Solar Reflectance Integrating Sphere, 1963.
- [2] Fussel, W.B.; Triolo, S.S.; Henninger, J.H. A Dinamic thermal vacuum thechnique for mearuring the solar absortance and thermal emittance of spacecraft coating. NASA TND 1716, March 1963.
- [3] Gordon, G.D. "Measurement of ratio of absortivity of Sun light to thermal emissivity". Rev. Sci. instr. 31 1204 (1960).
- [4] Jacquez, J.A.; Kuppenheim "Theory of the integrating sphere". Journal Optical Soc. America 45(6):460-470, June 1955.
- [5] 1976 U.S. Standard Atmosphere.
- [6] Kreith, F. Principios de Transmissão de Calor. Ed gard Blucher, 1977.

#### ABSTRACT

This work presents a new method for measuring the solar normal absortivity. This method is based in the fact that for low Biot numbers, by changing the heat source from the light to a electrical resistor, adjusting the power of the latter to achieve the same temperature level, the absortivity can be obtained as the ratio of eletrical power dissipated and the incoming light flux. To account the limitations for the Biot number, a correction is calculated to assure greater accuracy.



## CONSTRUÇÃO DE TERMOPILHAS PARA RADIÔMETROS SOLARES E DE LASERS

ABCM

ABCM

João Francisco Escobedo  
 Dep. de Biofísica - UNESP - 18610 - Botucatu (SP)  
 Evandro F. Passos e Antonio C. Vieira  
 Dep. de Física - U.F.V. - 36570 - Viçosa (MG)

## RESUMO

O trabalho descreve um método de construção de termopilhas usando processo foto-gráfico e técnica de evaporação de metais. Com esta metodologia foram obtidos dois modelos de termopilhas do tipo preto-branco (Estrela com 36 e 60 termopares e disco concêntrico com 36) e um modelo de termopilha do tipo preto com 30 termopares. Os pares metálicos empregados na construção foram o cobre/constantan e bismuto/antimônio, depositados em absorvedores de mica e kapton. A mica-cobre/constantan foi satisfatória para constante de tempo, enquanto kapton-bismuto/antimônio, para sensibilidade.

## INTRODUÇÃO

Os principais radiômetros solares, de Lasers, e outros detectores de radiação, utilizam como elemento sensível, a termopilha. As razões da escolha deste sensor estão associadas à característica da não seletividade na absorção da luz; por responder linearmente, além de não necessitar de fonte externa de alimentação.

Atualmente o Brasil é um país importador destes instrumentos pois ainda não possui tecnologia para construção de termopilhas em escala comercial, muito embora, já se tenha investido em métodos como eletrodeposição e soldagem em atmosfera controlada. Este sensor somente é produzido em países mais desenvolvidos tecnologicamente, que dominam o mercado da radiometria em geral, e mantém os métodos de construção na forma de segredo industrial.

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um método de construção de termopilhas com tecnologia inteiramente nacional, utilizando-se processo fotográfico e técnica de evaporação de metais. {1}

## PRINCÍPIOS BÁSICOS

Uma termopilha é constituída basicamente por uma bateria de termopares associados em série, isto é, um circuito termoelétrico e um absorvedor de luz. A função do circuito termoelétrico é converter a energia da radiação luminosa em energia elétrica indiretamente, através de um efeito térmico do absorvedor.

O princípio de funcionamento está fundamentado no efeito Seebeck: quando duas junções de metais diferentes A e B, formando um circuito fechado (termopar) são expostas a um gradiente de temperatura  $\Delta T$ , surge no circuito uma força eletromotriz de origem térmica,  $\epsilon_{AB}$ , que induz no circuito uma corrente elétrica contínua. A junção mais quente à temperatura T é denominada junção de teste ou ativa e a outra, de referência ou junção passiva (Tr).

A força eletromotriz se produz porque a densidade dos transportadores de carga difere de um condutor para outro. Assim, quando os dois condutores diferentes são conectados formando duas junções e estas submetidas a diferentes temperaturas, a difusão dos transportadores de carga nas junções se produz em ritmos diferentes, dando origem a um movimento dos transportadores de carga como se fossem impulsionados por um campo não eletrostático. A integral curvilínea deste campo ao longo do circuito é a força eletromotriz de Seebeck.

$$\epsilon_{AB} = \int_{Tr}^T (\alpha_A - \alpha_B) \cdot dT = \int_{Tr}^T \alpha_{AB} \cdot dT \quad (1)$$

onde  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$  são denominados coeficientes de Seebeck, definidos como sendo o potencial elétrico por unidade de temperatura (mV/K). Esses coeficientes dependem da natureza do material e da temperatura. A diferença  $\alpha_{AB} = \alpha_A - \alpha_B$ , é denominada constante termoelétrica, sendo constante para o par metálico a pequenas temperaturas.

Se a termopilha tiver N termopares, o sinal elétrico será amplificado por um fator de N e a força eletromotriz gerada é expressada por:

$$\epsilon_{AB} = N \int_{Tr}^T \alpha_{AB} \cdot dT \quad (2)$$

Com base no absorvedor, podemos distinguir, dois tipos principais de termopilhas: preto-branco e somente preto.

No primeiro tipo, o sinal gerado pelo circuito termoelétrico deve-se à absorção diferencial da energia radiante: a parte preta absorve enquanto a branca reflete, gerando assim um gradiente de temperatura entre as duas seções. O circuito termoelétrico mede a diferença de temperatura, com as junções ativas localizadas na parte preta e as junções passivas na parte branca. Existem várias geometrias da combinação preto-branco, sendo que as duas mais importantes são as de disco-concêntrico e tipo estrela. Na geometria disco-concêntrico, o circuito dos termopares é distribuído radialmente no absorvedor, com as junções ativas localizadas no disco preto e as junções passivas no disco branco. Na geometria estrela, o circuito de termopares é distribuído em espiral, com as junções ativas e passivas dispostas de forma igual à geometria disco-concêntrico, ativa no preto e passiva no branco.

No segundo tipo, o absorvedor é totalmente preto, e o sinal é gerado pela diferença de temperatura entre as junções ativas em contacto com o absorvedor preto e as junções passivas não atingidas pela radiação. A temperatura das junções passivas pode ser mantida constante mediante contacto com uma massa metálica isolada eletricamente afastada do absorvedor preto.

## MODELOS DE TERMOPILHAS CONSTRUÍDOS

Dois tipos de termopilhas foram projetados e construídos neste trabalho: preto-branco e somente preto. O tipo preto-branco foi desenvolvido nos dois modelos clássicos: Estrela com circuitos termoelétricos de 36 e 60 termopares (Figura 1 e 2) e disco-concêntrico com circuito termoelétrico contendo 36 termopares, (Figura 3). O segundo tipo preto, foi desenvolvido em apenas um circuito termoelétrico com 30 termopares, (Figura 4). As especificações das termo-

pilhas quanto às dimensões, absorvedores e pares metálicos são apresentadas a seguir como mostram as Figuras (1,2,3 e 4). O metal A está representado pelas linhas cheias (—) e o metal B em linhas brancas (—).

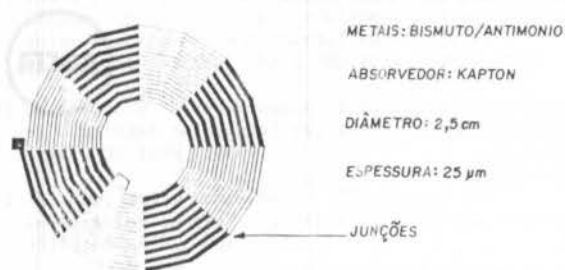


Figura 1 - Esquema da termopilha estrela com 36 termopares.

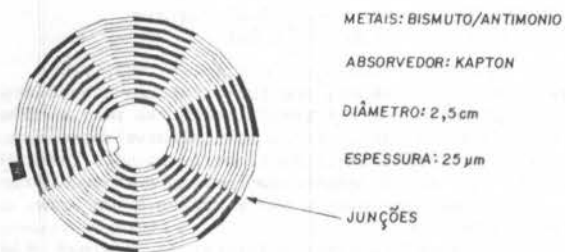


Figura 2 - Esquema da termopilha estrela com 60 termopares.

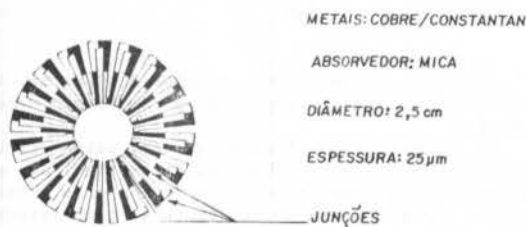


Figura 3 - Esquema da termopilha disco-concêntrica com 35 termopares.

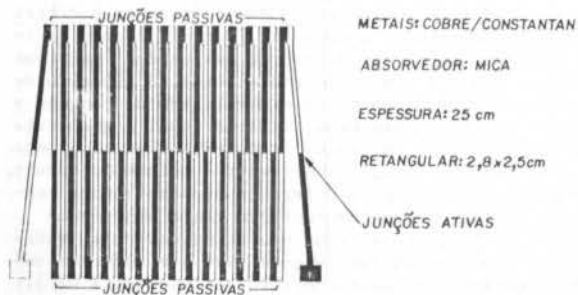


Figura 4 - Esquema de termopilha plana com 30 termopares.

#### MÉTODO DE OBTENÇÃO DAS TERMOPILHAS

No método proposto, as termopilhas foram obtidas em duas etapas. A primeira consistiu em se obter o circuito termoeletrico sobre o absorvedor. Na segunda, realizou-se a montagem do mesmo sobre um extrator de calor metálico (isolado eletricamente), e depositou-se as substâncias preto-branco no absorvedor ou, somente preto, de acordo com o tipo da termopilha.

**Circuitos Termoeletricos** - Os circuitos termoeletricos foram obtidos pelo processo de evaporação de metais, que consistiu fundamentalmente em se depositar os dois metais, um por vez, sobre um substrato, no caso, o absorvedor da termopilha, coberto por máscaras metálicas.

**Máscaras Metálicas** - O processo de obtenção das máscaras metálicas foi semelhante aos processos usados nos laboratórios de circuito impresso, ou seja, o fotografico (KPM da Kodak), constituindo-se de 4 etapas. Tome-mos como exemplo, a obtenção da termopilha tipo estrela de 60 termopares, para melhor visualização do processo. Primeiramente, projetou-se em lay-out o circuito termoeletrico definindo-se para cada uma das termopilhas, a geometria, nº de termopares, largura e espessura das linhas condutoras (Figura 5 a). A partir deste desenho foram extraídas duas Figuras A e B com as mesmas dimensões, cada qual contendo metade do circuito, tal que, com a superposição de ambas tem-se a figura inicial, porém com linhas do circuito A e B alternadas, (Figuras 5 b e 5 c).

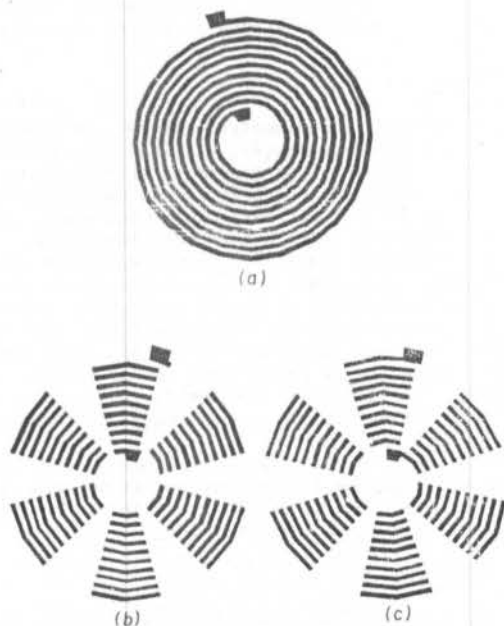


Figura 5 - Desenho da Termopilha estrela em Lay-Out: e as duas figuras A e B. (dimensões 4,1 cm de diâmetro)

Na segunda etapa as Figuras A e B do circuito foram transportadas de papel vegetal para filmes fotograficos denominados fotolitos. Posteriormente, os filmes foram reduzidos até atingir as dimensões pré-estabelecidas para cada termopilha. Os fotolitos finais mantiveram o circuito com o impresso ou filme iguais ao desenho original ou seja, filme positivo (Figura 6 a).

Numa terceira etapa transportou-se os impressos dos fotolitos A e B para lâminas metálicas. Primeiro uma fina camada de emulsão foi depositada no metal e após estarem secas, os folitos A e B foram gravados com exposição de luz. Neste processo as partes emulsionadas atingidas pela luz polimerizaram-se enquanto que as partes abaixo do filme onde a luz não atingiu, não ocorreu a polimerização, gravando o filme do fotolito nas lâminas metálicas.

Na última etapa, após a revelação das lâminas, estas foram mergulhadas em solução de perclorato de ferro onde ocorreu a corrosão das partes não polimerizadas (Figura 6 b).

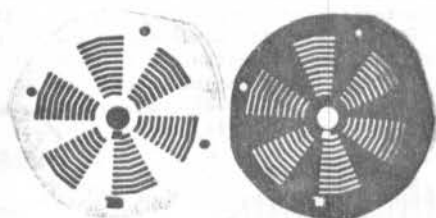


Figura 6 - a) Fotolito A (esquerda); b) máscara metálica A (direita), da termopilha estrela 60 termopares.

**Evaporação** - Os circuitos termoelétricos foram obtidos com duas evaporações. Na primeira fixou-se a máscara A sobre o substrato absorvedor, em suporte de alumínio próprios da câmara de evaporação, e o vapor do metal A foi depositado exatamente sobre as linhas definidas pelas perfurações da máscara. Em seguida, a máscara do tipo A foi retirada e colocada a do tipo B de modo a fechar o circuito. O metal B foi evaporado de forma idêntica ao metal A.

A espessura dos filmes depositados foram da ordem de  $10^3 \text{ \AA}$  e o valor do parâmetro operacional de temperatura e pressão da câmara durante as evaporações, situou-se na faixa de  $120^\circ\text{C}$  e  $10^{-5}$  Torr, respectivamente. Utilizou-se para a produção dos filmes uma evaporadora Balzers Bak 600 do Instituto de Física e Química de São Carlos.

**Montagem e Revestimento** - A montagem dos absorvedores com o circuito já depositado em uma das faces foi feito através de cola nos extratores metálicos devidamente isolados eletricamente, e projetados para cada uma das termopilhas.

A substância preta e branca usada como revestimento nos absorvedores das termopilhas, foram depósitos de fuligem de óxido de carbono e fuligem de óxido de magnésio. Para a termopilha preta o revestimento foi feito com depósito de fuligem de óxido de carbono. Os depósitos das fuligens foram realizados também através de máscaras metálicas. A Figura 7 mostra a termopilha antes e após a montagem e o revestimento.

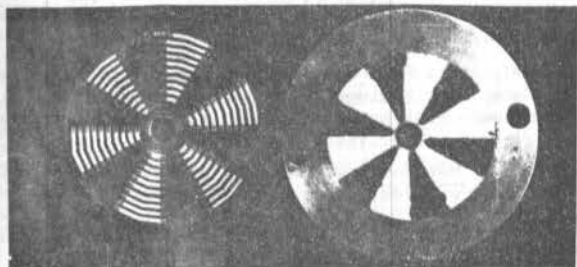


Figura 7 - Termopilha estrela 60 Termopares antes e após a montagem e revestimento preto e branco.

#### MÉTODOS DE CALIBRAÇÃO

As termopilhas foram calibradas através de ensaios experimentais a nível de laboratório (luz artificial e campo (luz natural), determinando-se os parâmetros operacionais: constante de tempo e sensibilidade de resposta. As termopilhas do tipo preto-branco foram testadas, uma a uma, como sensor de um piranômetro (instrumento que mede a potência solar global) e a termopilha preta como sensor de um pireliômetro (instrumento que mede a componente direta da luz solar). (1.2)

Os testes comparativos foram realizados tomando-se como instrumento de referência piranômetros importados: Eppley modelo preto-branco com sensibilidade

de  $11.46 \cdot 10^{-6} \text{ Vm}^2/\text{w}$  e constante de tempo de 4 s; Midleton modelo preto com sensibilidade de  $11.5 \text{ Vm}^2/\text{w}$  e constante de tempo igual a 3 s. Como a dependência temporal de uma termopilha é do tipo exponencial, tanto na fase de aquecimento como no esfriamento, entendemos como constante de tempo, o tempo correspondente a 63 % do tempo decorrido entre o recebimento de um estímulo de luz e o equilíbrio final, ou seja, 63 % do tempo de resposta (caso de aquecimento). A sensibilidade de resposta foi tomada como a amplitude do sinal gerado em  $\text{Vm}^2/\text{w}$ , também chamada de constante de calibração do instrumento.

Na determinação da constante de tempo, os instrumentos foram posicionados sob uma luminária no escuro. Ligava-se a luminária e registravam-se os sinais gerados. A sensibilidade de resposta foi feita em condições de campo, expondo-se os aparelhos lado a lado, num plano horizontal e registrando os sinais gerados de ambos os piranômetros simultaneamente.

Na coleta e registro dos dados foram utilizados os seguintes instrumentos: um registrador modelo RB série 538 com dois canais; um multímetro digital 4 1/2 dígitos, modelo MDM 220 e um milivoltímetro digital com 4 1/2 dígitos, modelo MD-045 todos produzidos pela E.C.B. do Brasil.

#### RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os valores da constante de tempo e sensibilidade obtidos conforme a metodologia já descrita para as quatro termopilhas são apresentadas a seguir.

Na Tabela I estão representados o tempo de resposta e a constante de tempo obtidas a partir das curvas experimentais.

TABELA I - CONSTANTE DE TEMPO.

TERMOPILHAS	DISCO	PRETO	ESTRELA 36	ESTRELA 60
PARÂMETROS	CONCÊNTRICO		TERMOPARES	TERMOPARES
TEMPO DE RESPOSTA (s)	5,0	16,0	18,2	18,2
CONSTANTE DE TEMPO (s)	1,2	2,8	3,4	3,4

Tabela I - Constante de tempo experimental para as quatro termopilhas.

A constante de tempo de um sensor térmico depende da capacidade térmica e condutividade térmica do absorvedor. Considerando-se que as substâncias absorvedora/refletora (fuligens de óxido de carbono e magnésio), massa e área de absorção foram aproximadamente iguais para as termopilhas disco-concêntrico e estrela 36 termopares, entendemos que a diferença observada nos valores da constante de tempo entre essas duas termopilhas, foi devido a maior condutividade térmica da mica e cobre/constantan em relação ao Kapton e bismuto/antimônio.

Já a diferença observada na constante de tempo para as termopilhas com mesmo absorvedor e metais (disco-concêntrico e preto), foi devido, provavelmente, aos aspectos construtivos dos extratores de calor, que foram diferentes para as duas termopilhas.

O tempo de resposta e constante de tempo foram melhores (pela ordem) para as termopilhas: disco-concêntrico, preto e estrela. Todos os valores estão dentro do intervalo recomendado pela Organização Mundial de Meteorologia, que é de 25 s. Comparando-se as constantes de tempo obtidas com os valores apresentados na literatura para outros piranômetros e pireliômetros (4, 5,6) observamos que nossos resultados estão entre os melhores, principalmente, a termopilha disco-concêntrico cuja constante de tempo é comparável a constante de tempo da termopilha preta usada no piranômetro de Precisão Espectral da Eppley (PSP) que é de 1 s. As demais termopilhas (preto e estrelas) apresentaram valores para a constante de tempo aproximadamente iguais

as termopilhas de diversos piranômetros cujos valores estão entre 2 e 4 s.

Para efeito de comparação, a Figura 8 mostra o aquecimento e resfriamento da termopilha estrela preto-branco da Eppley e a termopilha disco-concêntrica. A Eppley preto-branco é aproximadamente 3 vezes mais lenta.

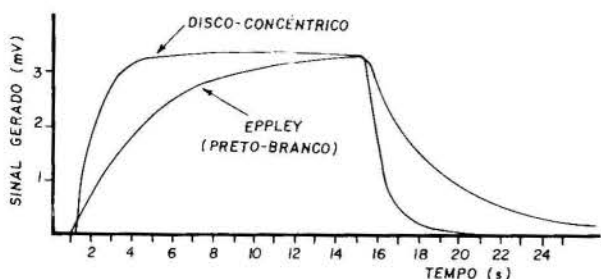


Figura 8 - Curvas de resposta térmica de duas termopilhas: disco-concêntrica e estrela preto-branco da Eppley.

A Tabela II mostra os valores da sensibilidade obtidas experimentalmente para as quatro termopilhas.

TABELA II - SENSIBILIDADE DE RESPOSTA

TERMOPILHAS	DISCO CONCÊNTRICO	PRETO	ESTRELA 36 TERMOPARES	ESTRELA 60 TERMOPARES
SENSIBILIDADE $\frac{V m^2}{W}$	$3,14 \cdot 10^{-6}$	$4,15 \cdot 10^{-6}$	$20,2 \cdot 10^{-6}$	$33,4 \cdot 10^{-6}$

Tabela II - Sensibilidade de resposta ( $V m^2/W$ ) das quatro termopilhas obtidas experimentalmente em comparação com os piranômetros Eppley e Middleton.

A sensibilidade de uma termopilha depende diretamente do número de termopares, emissividade da superfície absorvedora e constante termoeletrônica do par metálico, e, indiretamente da capacidade térmica do absorvedor. Como as termopilhas disco-concêntrica e estrela 36 termopares, possuem mesmo nº de termopares, área de absorção e substâncias preto-branco (fuligens de óxido de carbono e magnésio), entendemos que a larga diferença observada na sensibilidade dessas duas termopilhas, foi devido à constante termoeletrônica do bismuto-antimônio que é superior ao cobre-constantan em quase três vezes e à baixa capacidade térmica do kápton em relação à mica. É importante que a capacidade térmica do absorvedor de uma termopilha seja mantida no mínimo, de modo que, uma quantidade de cobre pequena produza um aumento de temperatura mensurável. A diferença observada na sensibilidade entre as termopilhas estrela 60 e estrela 36 deu-se exclusivamente em função da diferença do número de termopares.

Os valores obtidos para a sensibilidade foram maiores (pela ordem) para as termopilhas estrela 60 termopares, estrela 36 termopares, preto e disco-concêntrico. Comparando-se os valores da Tabela II com os citados na literatura {4,5,6}, observamos que as termopilhas estrelas são superiores pelo menos duas vezes à sensibilidade média das termopilhas estrela produzidas pela Eppley que é de  $10^{-5} V m^2/W$ . Já a sensibilidade das termopilhas disco-concêntrico e preto foi considerada abaixo da média quando comparada, aos valores apresentados na literatura.

Atualmente está sendo estudado a linearidade, e

feitos de temperatura ambiente, reprodutividade entre outras características operacionais das termopilhas estrela. Em paralelo está sendo desenvolvido também termopilhas do tipo preto-branco e preto de 40 termopares para serem utilizadas em radiômetros de laser com feixe colimado e espalhado, como mostram os circuitos termoeletrônicos nas Figuras 9 a e b.

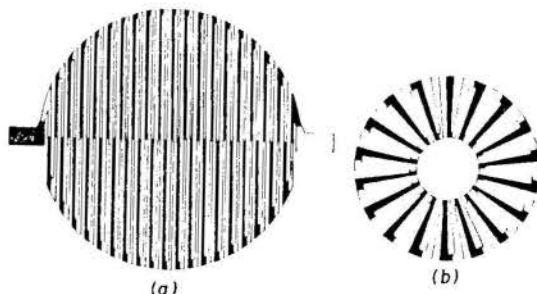


Figura 9 - Diagrama de dois tipos de termopilhas: (a) disco e (b) estrela.

#### CONCLUSÕES

Um método de construção de termopilhas utilizando técnicas fotográficas e processo de evaporação de metais, foi proposto e testado com sucesso. O método mostrou ser simples, eficiente e versátil. Numa evaporação como a que usamos (Balzers BAK 600) foi possível obter até 100 unidades com um simples ciclo de duas evaporações (1 hora de operação da máquina) resultando numa grande economia de material, tempo e mão de obra. O método por evaporação permitiu grande flexibilidade quanto a escolha do substrato absorvedor; metais do circuito termoeletrônico, número de termopares, área de absorção e geometria. Estas características permitem o desenvolvimento de termopilhas para fins específicos de acordo com a aplicação nos diversos instrumentos de medidas. Termopilhas construídas com absorvedor de mica, permitem baixa constante de tempo, enquanto que termopilhas de bismuto-antimônio em Kápton permite alta sensibilidade nas respostas.

#### REFERÊNCIAS

- ESCOBEDO, J.F. Refrigeração com uso de energia Solar. Tese de Doutorado, Instituto de Física e Química de São Carlos/USP - São Carlos 12: 1-185, 1987.
- ESCOBEDO, J.F.; PASSOS, E.F. e SOUZA, M.F. Construção e Calibração de Radiômetros Solares: Piranômetro e Pireliômetro. Revista de Física Aplicada e Instrumentação, Vol. 3, nº 2, 1988.
- EWING, C.W. Métodos Instrumentais de Análise Química. Edgard Blucher Ltda, Editora da USP, 1972.
- COHLSON, K.L. Solar and terrestrial radiation measurements and methods, London Academic Press, cop. 4, p. 85-141, 1975.
- WOOD, B.D. Solar energy engineering, A.A.M. SAYIGH Cap. 19. Academic Press New York, 1971.
- ROBINSON, N. Solar Radiation, Elsevier, London, 1966.

#### ABSTRACT

The paper describes a method for the construction of thermopiles through metal vaporization and photography. Two models of thermopiles of the black and white type (star and concentric disc) and one of the black type were obtained. The metal pairs used were copper/constantan and bismuth/antimony, deposited over mica and kápton absorbers. The time constant were satisfactory for mica-copper/constantan and for kápton-bismuth/antimony, for sensibility.



## DESENVOLVIMENTO DE UMA CELULA PARA MEDIDA DE CONDUTIVIDADE TERMICA DE LIQUIDOS



Glauce da Silva Guimarães  
Paulo Roberto da Fonseca Santos  
INMETRO  
Alcir do Faro Orlando  
PUC-RJ

### RESUMO

A literatura disponível mostra que em situações de extremo controle das condições de teste uma incerteza de 2% para o método de regime permanente e 0,5% para o método transitente podem ser esperadas para a medida. Sofisticados equipamentos de medida devem entretanto ser utilizados.

O objetivo do presente trabalho é o desenvolvimento de uma célula de condutividade térmica, utilizando-se uma instrumentação não sofisticada e a análise dos fatores que influenciam na incerteza da medida. Mostra-se que 2% de incerteza pode ser esperado sem muito esforço. Uma qualificação do aparelho desenvolvido é então realizada e apresentada.

### INTRODUÇÃO

A condutividade térmica é fenomenologicamente definida como o coeficiente de proporcionalidade entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura (lei de Fourier). A medida em líquidos requer que efeitos de convecção natural sejam desprezíveis, o que torna o método experimental tal mais complexo.

Dois métodos básicos estão disponíveis na literatura: regime transitente e regime permanente.

Pelo método do regime permanente uma camada fina de fluido é mantida entre duas superfícies planas mantidas a diferentes temperaturas. Cuidados devem ser tomados para manutenção do fluxo de calor unidimensional e outras perdas, inclusive por convecção [1]. Este é um aparelho delicado para ser construído, devendo funcionar melhor para maiores diferenças de temperatura e pressão. Medidas desde temperaturas criogênicas até algumas centenas de graus e 250 MPa tem sido relatadas com incertezas de 1 a 2% [2].

O método dos cilindros concêntricos utiliza o fluido na região anular entre os cilindros. Para evitar convecção, a espessura da separação deve ser da ordem de alguns décimos de milímetro. Se o número de Rayleigh for menor do que 1000 a transferência de calor por convecção pode ser desprezada [3]. Neste dispositivo, uma fonte de calor no cilindro interno gera um gradiente de temperatura. Usando-se cilindros de guarda, os efeitos de extremidade podem ser desprezados, garantindo uma condução unidimensional radial. A célula deve ser calibrada para levar em consideração as perdas pelos suportes. Por este método medidas em altas temperaturas podem ser feitas com vantagem em relação as placas paralelas, porque é mais fácil manter a geometria inicial. Medidas até 1 GPa tem sido relatadas. Uma incerteza de 2% pode ser esperada por esta técnica. Boham [4] e Bureau [5] apresentam uma discussão do método.

Quando um fio de pequeno diâmetro é usado em lugar do cilindro interno, o método é chamado de "método do fio quente" [6]. Quando a pressão é baixa, temperaturas elevadas podem ser usadas para medida em gases [7] e [8].

O método das esteras concêntricas em regime permanente tem sido usado para reduzir as perdas térmicas. Incertezas de 3% podem ser esperadas.

Em todos estes métodos, correções devem ser aplicadas para garantia de uma incerteza baixa [9], [10] e [11].

O método do regime transitente é representado pelo fio quente. Para um cilindro infinitamente longo imerso num fluido de extensão infinita, o aumento de temperatura devido a geração de calor, quando passa uma corrente elétrica, é uma função simples do fluxo de calor, condutividade térmica, tempo e difusividade térmica.

Incertezas baixas podem ser conseguidas (0,5%) se equipamentos sofisticados de medidas foram usados com faixas amplas de temperatura e pressão [12], [13] e [14].

Ao contrário do método do regime permanente a convecção não pode ser completamente eliminada, mas o seu início pode ser determinado.

Finalmente a condutividade térmica pode ser determinada a partir de valores da difusividade térmica [15].

O presente trabalho analisa as dificuldades dos dois métodos (transiente e permanente) e investiga em que condições podem ser conseguidas incertezas abaixo de 8% com instrumentação relativamente acessível.

Um dos mais precisos métodos de medida de condutividade térmica é o método transitente. Neste método, a principal medida é a variação com o tempo do campo de temperatura do fluido. Para um fio de pequeno diâmetro, com comprimento muito grande, imerso num fluido de extensão grande, o aumento de temperatura do fio, devido ao balanço de geração de calor e transferência de calor para o fluido pode ser expresso como:

$$T - T_0 = \frac{\dot{q}}{4 \pi k L} \ln \frac{4 \pi r t}{C r^2} \quad (1)$$

onde,

- T - temperatura do fio  $^{\circ}\text{C}$
- $T_0$  - taxa de transferência de calor, W/m
- k - condutividade térmica do fluido, W/m $^{\circ}\text{C}$
- t - tempo decorrido desde o início s
- $\alpha$  - difusividade térmica do fluido, m $^2$ /s
- C - constante
- r - raio do fio, m

A expressão (1) é válida para tempos curtos, até que a convecção natural se inicie. Este momento pode ser detectado ao ser traçado um gráfico T versus  $\ln(t)$ , que deveria ser uma linha reta para condução pura. A condutividade térmica pode ser determinada por um ajuste de mínimos quadrados das variáveis acima.

Foi construído um equipamento para medida da condutividade térmica segundo este princípio. A incerteza em contrada foi grande e a repetibilidade não foi boa. Entre as causas prováveis estão o grande diâmetro do fio utilizado e o intervalo de tempo pequeno para o regime de condução pura. Segundo a literatura, precisões elevadas podem ser conseguidas com um diâmetro de 5  $\mu\text{m}$ . Além do mais, uma eletrônica mais sofisticada deve ser usada para a medida do tempo e da temperatura do fio, evitando-se efeitos de extremidades. Assim concluiu-se que este procedimento para resultar em boas precisões necessita de cuidados especiais.

Decidiu-se assim construir um medidor de cilindros concêntricos para medir a condutividade térmica em regime permanente. Por este método, o fluido em questão é colocado na região anular entre os cilindros. Este plano deve ter pequena espessura para que os efeitos de convecção natural possam ser desprezados (número de Rayleigh



menor do que 1000). O paralelismo entre as superfícies deve ser garantido através de uma montagem do tipo gabarito, de modo que o sistema possa ser desmontado e retornar a posição anterior. Isto foi feito através da usinagem de rasgos na base dos cilindros, o que permite um encaixe dos mesmos.

A resistência elétrica colocada no interior do cilindro interno merece uma atenção especial. Decidiu-se construí-la de fios enrolados em espiral de modo que a resistência dos fios de ligação fosse desprezível, ou seja, o efeito Joule seja basicamente sentido dentro do cilindro interno.

Esta resistência é imersa num fluido. Experimentaram-se tanto o ar como a água. Devido ao fato de que o coeficiente de transferência de calor é mais elevado para a água, a temperatura do fio é mais baixa, o gradiente de temperatura ao longo do raio do cilindro interno é pequeno, e a inércia térmica é mais baixa, ou seja um tempo menor é necessário para que o sistema atinja o regime permanente.

Para o meio externo que envolve o conjunto, inicialmente foi utilizado o ar parado. Observou-se que o tempo para atingir o regime permanente era grande. Além do mais, pequenas variações na velocidade do ar, produziam uma variação da temperatura dos cilindros, o que caracterizava um regime transiente. Para diminuir esta inércia térmica, foi insuflado ar sobre a superfície externa do cilindro externo por meio de um ventilador. Observou-se que a repetibilidade das medidas não era boa e que gradientes de temperatura ao longo da superfície do cilindro externo passaram a influenciar as medidas. Assim colocou-se o sistema num banho de água, agitada, com temperatura controlada.

Finalmente, a medida de temperatura com um termopar colocado em cada superfície do cilindro exigiu uma atenção especial. Colocou-se inicialmente o termopar saindo radialmente de suas superfícies. O efeito aleta foi decisivo para indicar valores de temperatura e portanto de condutividade térmica errôneos. Partindo-se do princípio que os cilindros metálicos são aproximadamente isotérmicos, foram abertos furos ao longo de sua espessura no sentido axial. Assim, resultados repetitivos e de incerteza baixa foram conseguidos.

#### DESENVOLVIMENTO DO MEDIDOR

Foi construído um equipamento para medida de condutividade térmica de fluidos, sendo aferido medindo-se a condutividade térmica de água bi-distilada e de glicerina P.A. Os valores foram obtidos de tabela, o que serve para determinar a incerteza da medida, ao nível de confiabilidade de 95,4% (2 desvios padrões).

O equipamento consta de dois cilindros concêntricos de alumínio com altura efetiva de 0,08975 m e diâmetros interno ( $d_1$ ) e externo ( $d_2$ ) respectivamente:

$$d_1 = 48,65 \pm 0,05 \text{ mm}$$

$$d_2 = 50,51 \pm 0,05 \text{ mm}$$

Nesta medida foi usado um paquímetro, estimando-se a incerteza de medida pela precisão do mesmo, visto que a repetibilidade da medida está bem abaixo do valor acima de incerteza.

Termopares tipo T (Cobre-Constantan) foram colocados em cada parede dos cilindros, para medir a temperatura das faces do filme de líquido colocado na região anular. Uma análise da diferença de temperatura através das paredes dos cilindros, nas condições normais de operação do equipamento, mostra que um valor de no máximo 0,05°C pode ser alcançado, o que faz com que a localização das junções ao longo de espessura não seja importante. Mediu-se a diferença de temperatura diretamente através de uma termopilha, formada com as junções acima. Estima-se que a incerteza de medida desta diferença de temperatura seja  $\pm 0,05^\circ\text{C}$ , incluindo a incerteza do multímetro HP 3465 B usada para as medidas da força eletromotriz.

Para localização do patamar de temperatura foi usa-

do um termômetro de mercúrio em vidro, dentro de  $\pm 0,1^\circ\text{C}$ .

Em regime permanente a taxa de transferência de calor num filme cilíndrico pode ser expressa como:

$$\dot{q} = \frac{2\pi kL}{\ln(d_2/d_1)} \cdot \Delta T \quad (2)$$

onde,

- $\dot{q}$  - taxa de transferência de calor (W)
- $k$  - condutividade térmica (W/m $^\circ\text{C}$ )
- $L$  - altura do cilindro (m)
- $d_1$  - diâmetro interno do filme, (m)
- $d_2$  - diâmetro externo do filme, (m)
- $\Delta T$  - diferença de temperatura ao longo do filme, ( $^\circ\text{C}$ )

Definindo um fator de forma como (A)

$$A = \frac{2\pi L}{\ln(d_2/d_1)} \quad (3)$$

Assim,

$$\dot{q} = A \cdot k \cdot \Delta T \quad (4)$$

Pelas medidas das dimensões do filme

$$A = 15,03 \text{ m}$$

A parte interna do cilindro interno contém uma resistência enrolada, imersa n'água de tal forma a uniformizar o campo interno de temperatura e minimizar a influência da resistência dos fios de conexão ao instrumento de leitura na medida da potência elétrica fornecida. A incerteza de medida da diferença de potencial entre os terminais da resistência é  $\pm 0,1\text{V}$ . Para a corrente elétrica,  $\pm 0,05\text{A}$ . Tipicamente, para uma potência elétrica na faixa de 10-15W, a incerteza da medida se situa na faixa 3-4%.

O equipamento é colocado num banho agitado d'água, com o intuito de diminuir a constante de tempo do sistema, pelo aumento do coeficiente externo de transferência de calor, e do aumento da diferença de temperatura.

Desprezam-se neste caso as perdas térmicas pelas bases dos cilindros, o que pode ser verificado pelas aferições contra a água bi-distilada e glicerina P.A.

A resistência tem tipicamente um valor de 1,5 $\Omega$ , a diferença de potencial 4,0V e a corrente 2,5A.

Após 30 minutos de teste, o sistema praticamente atinge o regime permanente. A qualificação do equipamento foi feita com dois fluidos.

#### RESULTADOS

##### 1. Água bidestilada

Tabela 1- Resultados experimentais para a água bidestilada

$T_{\text{ext}} (^\circ\text{C})$ (banho)	$T (^\circ\text{C})$	Potência (W)	$K (\text{W/m}^\circ\text{C})$ (literatura)	$A(\text{m})$ Fator de forma
25,9	1,46	13,78	0,615	15,34
26,3	1,44	13,63	0,615	15,45
26,6	1,49	13,54	0,615	14,76
26,9	1,44	13,55	0,615	15,29
27,9	1,44	13,63	0,615	15,35
28,6	1,46	13,92	0,615	15,40
29,4	1,43	14,01	0,615	15,89
30,2	1,45	13,92	0,615	15,31

A medida do fator de forma é portanto  $A = (15,27 \pm 0,62) \text{ m}$  ou seja 4,0%.

2. Glicerina P.A.

Tabela 2- Resultados experimentais para a glicerina P.A.

Temp. (baño) (°C)	Temp. (C) (°C)	Potência (W)	K (W/m°C) (Literatura)	Λ (m) Fator de forma
29,1	2,51	10,50	0,286	14,63
29,3	2,55	10,25	0,286	14,69
29,5	2,54	10,25	0,286	14,69
29,6	2,59	10,50	0,286	14,74
29,8	2,51	10,50	0,286	14,63
29,9	2,56	10,50	0,286	14,92
30,1	2,55	10,50	0,286	14,55
30,2	2,51	10,50	0,286	14,63
31,0	3,15	14,46	0,286	14,70
31,3	3,11	14,21	0,286	14,57
31,4	3,11	14,21	0,286	14,57
31,6	3,13	14,21	0,286	14,92
31,8	3,16	14,21	0,286	14,79
32,0	3,18	14,46	0,286	14,96
26,4	2,19	10,05	0,286	14,70
26,6	2,56	10,52	0,286	14,81
26,7	2,51	10,29	0,286	14,92
27,1	2,55	10,29	0,286	14,75
27,3	2,51	10,05	0,286	14,58
27,6	2,55	10,50	0,286	14,95
27,7	2,55	10,52	0,286	14,93
28,2	2,74	10,17	0,186	14,57
28,6	3,11	14,56	0,286	14,27
28,8	3,16	14,21	0,286	14,36
29,4	3,19	14,07	0,335	14,51
29,5	3,19	14,07	0,286	14,51
29,7	3,16	14,12	0,286	14,49
30,0	3,15	14,92	0,286	14,57
30,3	3,11	13,92	0,286	14,70
30,5	3,11	14,92	0,286	14,70
30,7	3,18	13,87	0,286	14,73
31,5	3,14	14,92	0,286	14,57
32,1	3,43	18,76	0,286	14,81
32,5	3,12	14,17	0,286	14,64
32,8	3,17	19,77	0,286	14,95
33,1	3,21	19,48	0,286	14,39
33,8	3,21	19,10	0,286	14,13
34,1	3,66	18,93	0,286	14,20
34,3	3,18	19,10	0,286	14,58

A medida do fator de forma é portanto

$$\Lambda = (14,67 \pm 0,44) \text{ m}$$

ou seja 3,07

Assim, a dispersão do dispositivo é aproximadamente a mesma para a água e a glicerina.

Juntando-se os dois valores, chega-se ao seguinte valor médio, com a estimativa da incerteza (avaliada pelos extremos do intervalo).

$$\Lambda = (15,02 \pm 0,97) \text{ m}$$

ou seja 0,57 o que compara favoravelmente como resultado medido.

CONCLUSÕES

O fator de forma do sistema cilíndrico utilizado para a medida da condutividade térmica foi determinado através da medida de sua geometria e através da comparação com os valores tabelados de água destilada e glicerina P.A. existentes na literatura, estimando-se conforme visto uma incerteza de aproximadamente 6,5%.

Na medida da condutividade térmica de um fluido determinado deve-se tomar um cuidado especial para que o número de Rayleigh esteja sempre abaixo de 1000, o que ocorre na experiência feita, estando indicado pela exatidão de concordância com os dados experimentais.

Na estimativa da incerteza da condutividade térmica, deve-se levar em consideração a propagação do desvio padrão segundo Moffat [6]. Assim tipicamente, seguindo-se a expressão (4)

$$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 = \left(\frac{\Delta \dot{q}}{\dot{q}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(\Delta T)}{\Delta T}\right)^2 \quad (5)$$

onde Δk, Δq̇, ΔA e Δ(AT), referem-se a incerteza da medida no nível de confiabilidade de 95,4% (2 desvios padrões). Quando o número de pontos é pequeno, distribuição t-student pode ser utilizada para melhor estimativa do desvio padrão.

Finalmente, em testes conduzidos para determinação da condutividade térmica de fluidos, e utilizando-se a expressão (5) para o cálculo da incerteza, chegou-se a um valor de ± 8% o que parece ser típico para este equipamento.

Estes resultados comparam favoravelmente com a norma ASTM D 2717-78 que sugere que a repetibilidade e incerteza podem estar na faixa de ± 10%.

AGRADECIMENTOS

Os autores reconhecem a contribuição da FINEP- Financiadora de Estudos e Projetos para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] Challoner, A.R. and Powell, R.W., Thermal Conductivity of Liquids: new determinations for seven liquids and appraisal of existing values. Proc. Royal Soc. (London) A 238, 90-106, 1956.
- [2] Michels, A., Sengers, J.V. and Van der Gulik, P.S., The Thermal Conductivity of Carbon Dioxide in the Critical Region, Physica, 28, 1201-1215, 1962.
- [3] Tufeu, R. - "Measurement of Thermophysical properties of Fluids", in First World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Dubrovnik, Yugoslavia, 1988, Editors Shah, R.K., Ganic, E.N., Yang, K.T., Elsevier.
- [4] Holman, J.P. "Experimental Methods for Engineers" Wiley.
- [5] Tufeu, R., Thermal Conductivity of Noble Gases and Helium-Argon Mixtures, These de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI, 1969.
- [6] Vargaftik, N.B., Oleschuk, O.N. and Belyakova, P.E., Experimental Investigation of the Thermal Conductivity of heavy Water, Atomna Energiya, 7, 465-468, 1959.
- [7] Jain, P.C. and Saxena, S.C., An Instrument for the Measurements of Thermal Properties of Gases and Metal Wires, J. Phys. E: Sci Instrum. 7, 1023-1026, 1974
- [8] Vargaftik, N.B. and Osminin, I.P., Thermal Conductivity of Solutions, Tephoenergetika, 7, 11-16, 1956.
- [9] Tseederberg, N.V., Thermal Conductivity of Gases and Liquids, R.D. GESS Ed., The M.I.T. Press., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1965.
- [10] Thermophysical Properties of Matter, Vol. 3, Thermal Conductivity non Metallic Liquids and Gases. Touloukian Y.S., Liley, P.E. and Saxena, S.C., I.F.I./Plenum, New York, Washington, 1970.
- [11] Nieto di Castro, C.A., The Measurement of Transport Properties of Fluids. A critical appraisal, 1987-AGME-JSME, Thermal Engineering Joint Conference, Honolulu, Hawaii, 327-349, march 1987.
- [12] Haarman, J.W., Ph. D. Thesis, Technische Hogescholl, Delft, Holland, 1969.  
Haarman, J. W., A Contribution to The Theory Haarman, J.W., A Contribution to the Theory of the Transient hot Wire Method, Physica 52, 605-619, 1971.

[13] Maitland, G.C., Mustapha, M., Ross, M., Trengove, R.D., Wakeham, W.A. and Zalaf, M., Transient hot Wire Measurements of the Thermal Conductivity of Gases at Elevated temperatures, *Int. J. of Thermophysocs* 7, 245-258, 1986.

[14] Nagasaka, Y and Nagashima, A., Absolute Measurements of the Thermal Conductivity of electrically Conductivity Liquids by the transient hot wire method, *J. Phys. E: Sci. Instrm.* 14, 1435-1440, 1981.

[15] Jany, P. and Straub. J., Thermal Diffucivity of Fluids in a Broad Region Around the Critical Point, *Int. J. of Thermophysics*, 8, 165-180, 1987.

[16] Moffat, R.J. - "Describing Uncertainties in Experimental Results", *Experimental Thermal and Fluid Science*, 1, 3-17, 1988.

#### ABSTRACT

*The available literature shows that under very well controlled conditions for the experiments, thermal conductivity of liquids can be measured to within 2% for the steady state method and 0,3% for the transient method. In both cases sophisticated measurements should be used. In this research a procedure has been developed to measure the thermal conductivity of liquids to within 8%, with simple equipments.*

**SISTEMAS MULTIFÁSICOS E PARTICULADOS**

Velocidade Terminal de Partículas em Suspensão em um  
Fluxo Turbulento



Roberaldo Carvalho de Souza - Prof. Adjunto  
Deptº Engenharia Eletromecânica - Centro de Tecnologia  
Universidade Federal de Alagoas - UFAL

RESUMO

Três séries de experimentos foram conduzidos para investigar o comportamento de partículas, com duas densidades e dois tamanhos diferentes, em um escoamento turbulento, e para diversas concentrações variando de 0 a 1 por cento em volume. A velocidade terminal média das partículas foi determinada para essas diversas concentrações volumétricas, e o fenômeno da formação de nuvens foi observado.

INTRODUÇÃO

O conhecimento do espalhamento e deposição de aerossóis ou outras matérias sólidas em um escoamento turbulento é de fundamental importância na solução dos vários problemas de Engenharia. Infelizmente, devido à complexidade do fenômeno, não existe até a presente data uma solução analítica a qual seja capaz de englobar os muitos fenômenos complicados e interrelacionados inerentes ao processo do transporte das partículas.

Com o objetivo de elucidar as diversas interações entre o fluido e as partículas sólidas, três séries de experimentos foram conduzidos para investigar o comportamento de partículas, com duas densidades e dois tamanhos diferentes, em um escoamento turbulento, e para diversas concentrações variando de 0 a 1 por cento em volume. A velocidade terminal média das partículas foi determinada para essas concentrações volumétricas, e o fenômeno da formação de nuvens foi observado.

O presente trabalho é uma parte condensada da tese de doutorado submetida pelo autor para a obtenção do grau de Ph.D. pela Universidade de Illinois - U.S.A.

MEDIÇÕES EXPERIMENTAIS

Três séries de experiências com as partículas descritas na Tabela 1 foram realizadas, utilizando-se o Laboratório Termo-Hidráulico do Departamento de Engenharia Nuclear da Universidade de Illinois - U.S.A., conforme mencionadas em Souza (1981). As designações LTAG e HTAG foram usadas para partículas esféricas com os mesmos diâmetros (0,476 cm), mas com diferentes densidades específicas, isto é, 1,05 para LTAG e 1,18 para HTAG. Essas densidades específicas foram escolhidas a fim de investigar-se o efeito de partículas com densidades diferentes, e desse modo com diferentes velocidades terminais, para as várias concentrações volumétricas. A designação BTAG foi usada para partículas esféricas com diâmetro de 0,30 cm e densidade específica de 1,18. Esse tamanho e essa densidade foram selecionados a fim de investigar-se o efeito do tamanho nas várias concentrações volumétricas para

partículas com: a. mesma densidade e número de Reynolds diferente; e b. mesmo número de Reynolds e densidade diferente. As concentrações volumétricas das partículas variaram desde o caso de uma simples partícula em circulação até uma concentração de um por cento por volume.

Tabela 1. Características Físicas das Partículas.

	HTAG (Acrílico)	BTAG (Acrílico)	LTAG (Polistireno)
Diâmetro (mm)	4,76	3,00	4,76
Densidade(g/cc)	1,18	1,18	1,05
Velocidade Terminal (cm/s)	14,54	11,39	7,26
Nº de Reynolds	821,00	392,76	397,21
Absorção d'água	0,03	0,03	0,03

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Tabela 2 mostra os valores das velocidades médias das partículas estudada nesse trabalho. Como já era esperado para um escoamento em um tubo vertical, as velocidades médias radial e tangencial são praticamente nulas com nenhuma dependência das concentrações volumétricas. Em contrapartida, as velocidades médias longitudinais são dependentes das concentrações volumétricas das partículas.

Tabela 2. Velocidade Média das Partículas em cm/seg.

Concentração Volumétrica (%)	Radial*			Axial*			Axial*		
	HTAG	BTAG	LTAG	HTAG	BTAG	LTAG	HTAG	BTAG	LTAG
0	0,051	0,013	0,130	0,061	-0,314	0,030	12,98	10,77	5,89
1/8	0,041	0,168	0,045	0,051	0,152	0,160	13,11	10,49	5,67
2/8	-0,070	0,151	0,132	0,052	-0,222	0,067	13,01	10,15	5,88
3/8	0,077	-0,25	-0,112	0,017	0,099	-0,081	13,67	10,78	5,62
4/8	0,020	-0,00	0,000	0,028	0,152	0,030	14,46	10,49	6,24
5/8	0,023	0,048	-0,035	0,101	-0,475	0,045	14,12	11,14	5,34
6/8	-0,101	0,043	0,131	0,097	-0,362	0,115	13,71	10,12	5,11
7/8	-	0,080	0,042	-	0,051	0,036	-	10,60	4,89
1	0,049	0,031	-	0,031	0,060	-	12,77	9,47	-

\* De erros estatísticos encontrados foram  $\pm 0,46$  cm/s,  $\pm 0,24$  cm/s e  $\pm 0,29$  cm/s para as partículas HTAG, BTAG e LTAG, respectivamente.

\* Os erros encontrados foram  $\pm 0,46$  cm/s,



+ 0,34 cm/s e + 0,29 cm/s para as partículas HTAG, BTAG e LTAG, respectivamente.

A Figura 1 mostra a dependência entre a velocidade média na direção axial e a concentração volumétrica das partículas.

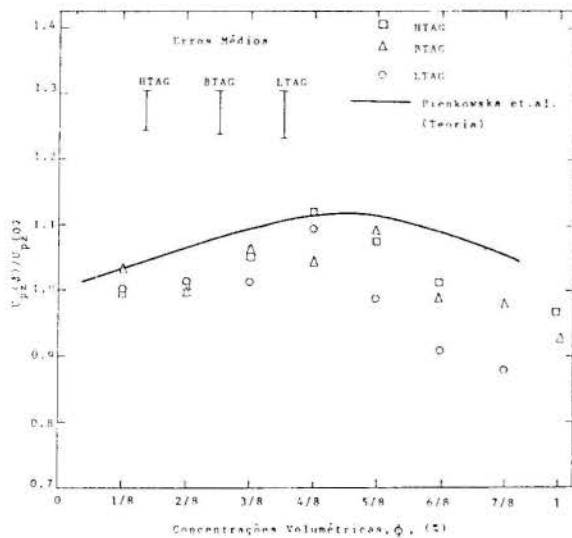


Figura 1. Taxa de sedimentação relativa da partícula,  $U_p(\phi)/U_p(0)$ , em um escoamento turbulento, para várias concentrações volumétricas.

Como pode ser observado, quando a concentração aumenta de zero para cerca de 5/8%, a taxa de sedimentação das partículas aumenta até alcançar um máximo. Para concentrações maiores a taxa de sedimentação das partículas diminui, com a velocidade de sedimentação mostrando um decréscimo monoatômico com o aumento da concentração. Esse fenômeno foi verificado por Kaye e Boardman (1962). Eles utilizaram um tubo de 62 mm de diâmetro cheio de parafina líquida. As partículas esféricas eram de vidro com diâmetros de 850, 400 e 100 m. A taxa de sedimentação em uma coluna estagnada foi determinada usando um microscópio para a medição de esferas marcadas de vermelho de 900 m de diâmetro com velocidades terminais comparáveis as das esferas de vidro. Dez anos depois, Barford (1972), usando água em uma coluna estagnada, chegou as mesmas conclusões, isto é, partículas em suspensões diluídas depositam-se mais rápido do que partículas individuais.

Kaye e Boardman (1962) e Barford (1972) explicaram suas descobertas como sendo devido à formação de nuvens as quais depositam-se mais rápido que partículas individuais. Gronager (1978), estudando o comportamento de partículas sólidas suspensas em um escoamento turbulento, encontrou que o fenômeno da formação de nuvens também ocorre. Contudo, ele possui somente um conjunto de dados no intervalo das concentrações volumétricas (0% a 1%) onde o fenômeno tem sido observado, isto é, na concentração de 1/2%. O presente trabalho determinou mais precisamente a concentração volumétrica de partículas para o qual a taxa de deposição máxima ocorre.

Diversos modelos teóricos têm sido propostos para prever o fenômeno da formação das nuvens. Isso tem sido considerado por Goldman, Cox e Brenner (1966) para o caso de duas esferas idênticas, arbitrariamente orientadas uma em relação a outra em um fluido viscoso infinito. Eles encontraram que as velocidades linear e angular das duas esferas sedimentando-se são funções das suas posições relativas (isto é, suas distâncias de separação e orientação de suas linhas centrais relativa à orientação da gravidade).

Uma discussão pormenorizada da sensibilidade da velocidade de sedimentação pode ser vista no trabalho de Batchelor (1972). Ele desenvolveu uma teoria a qual prevê que a velocidade de sedimentação relativa depende da concentração volumétrica,  $\phi$ , como:

$$\frac{U_p(\phi)}{U_p(0)} = 1,0 - 6,55 \phi$$

Infelizmente, a teoria de Batchelor não leva em consideração o fenômeno da formação de nuvens.

Pienkowska e Herczynski (1978) desenvolveram um modelo teórico o qual prevê, realisticamente, os efeitos combinados da sedimentação aumentada pela pequena formação de nuvem e a sedimentação retardada pelo aumento da concentração volumétrica. A Figura 1 mostra uma comparação entre a teoria de Pienkowska e Herczynski e o presente trabalho. Em geral, dentro das incertezas experimentais, os resultados teóricos seguem as tendências experimentais.

Uma comparação dos resultados para vários trabalhos sobre a velocidade máxima de sedimentação e a concentração volumétrica é mostrada na Tabela 3. As diferenças entre os diversos estudos experimentais podem ser devidas aos vários métodos diferentes de medições, no comportamento do meio fluido (escoamento estacionário ou turbulento) e nos diâmetros e densidades das partículas.

Tabela 3. Comparação dos resultados de algumas investigações sobre formação da nuvem.

	Intervalo de $\phi$ (diâmetro do tubo)	Taxa de sedimentação máxima	Concentração volumétrica para taxa de sedimentação máxima (%)
Kaye & Boardman (1962)	$1,31 \cdot 10^{-3}$ - $1,37 \cdot 10^{-2}$	1,6 - 2,8	1,0
Barford (1972)	$1,38 \cdot 10^{-4}$ - $2,02 \cdot 10^{-4}$	1,12 - 1,10	0,1 - 0,2
Trabalho Teórico de Pienkowska & Herczynski (1978)	(Barford Data)	1,12	0,6
Presente Trabalho em Escoamento Turbulento	$1,63 \cdot 10^{-2}$ - $2,58 \cdot 10^{-2}$	1,05 - 1,12	0,44 - 0,70

#### REFERÊNCIAS

- (1) Souza, E.C., "Examination of fluid-particle turbulent, non-dilute, particle suspension flow". Ph.D. Thesis, University of Illinois (1981).
- (2) Kaye, B.H. & R.P. Boardman, Proc. Sym-

posium Interaction Between Fluids and Particles, London, Brit. Inst. Chem. Engineers, (1962).

- (3) Barford, N., "Concentration dependency of sedimentation rate of particles in dilute suspension". Powder Technology, Vol. 6, pg. 39 (1972).
- (4) Gronager, J.E., "Experimental measurements of the behavior of non-dilute suspensions in turbulent flow". Ph.D. Thesis, University of Illinois (1978).
- (5) Goldman, A.J., R.G. Cox, and H. Brenner, "The slow motion of two identical arbitrarily oriented spheres through a viscous fluid". Chemical Eng. Science, Vol. 21, pg 1151 (1966).
- (6) Batchelor, G.K., "Sedimentation in a dilute dispersion of spheres". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 56, pg. 246 (1972).
- (7) Pienkowska, I., & R. Herczynski, Polish Academy of Sciences, Institute of Fundamental Technological Research, pg. 587 (1978).

#### ABSTRACT

Three series of experiment have been conducted to investigate the behavior of particles in non-dilute turbulent suspension flow, for two particle densities and two particles sizes, and for several particle volume loadings ranging from 0 to 1 percent. The mean free fall velocity of the particles was determined at these various particle volume loadings, and the phenomenon of cluster formation was observed to depend on particle density and size.

**Coefficiente de Arraste para Partículas em Suspensão  
em um Escoamento Turbulento**



Roberaldo Carvalho de Souza - Prof. Adjunto  
Deptº Engenharia Eletromecânica - Centro de Tecnologia  
Universidade Federal de Alagoas - UFAL

RESUMO

Este trabalho apresenta alguns resultados para o Coeficiente de arraste de partículas sólidas em suspensão.

Em nosso caso, os estudos foram realizados num tubo vertical, com fluxo d'água em regime turbulento. As experiências foram desenvolvidas relacionando três séries de partículas com duas densidades e dois diâmetros diferentes, e para diversas concentrações volumétricas variando de 0 a 1 por cento.

INTRODUÇÃO

O conhecimento do Coeficiente de Arraste de uma partícula sólida movendo-se em um fluido, tem grande aplicabilidade nas pesquisas de engenharia, principalmente aquelas no campo dos Recursos Hídricos.

Devido à sua complexidade, existe várias teorias para o cálculo do Coeficiente de Arraste, sendo que as mais convicentes baseiam-se no escoamento laminar para número de Reynolds menor ou igual a unidade.

O presente trabalho, reflete as experiências realizadas pelo autor no Laboratório TERMO-HIDRÁULICO do Departamento de Engenharia Nuclear da Universidade de Illinois - U.S.A.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O sistema utilizado para as medições experimentais foi o mesmo descrito no trabalho intitulado: "Velocidade Terminal de Partículas em Suspensão em um Fluxo Turbulento" do mesmo autor.

A Tabela 1 mostra os coeficientes de arraste turbulento para as três séries de partículas estudada nas várias concentrações volumétricas

Tabela 1. Coeficiente de Arraste turbulento para as várias concentrações de partículas.

Concentração (%)	HTAG	BTAG	LTAG
0	0,665 ± 0,011	0,675 ± 0,009	0,992 ± 0,022
1/8	0,652 ± 0,008	0,641 ± 0,008	0,985 ± 0,029
2/8	0,662 ± 0,009	0,685 ± 0,010	0,978 ± 0,029
3/8	0,599 ± 0,011	0,607 ± 0,011	0,985 ± 0,026
4/8	0,536 ± 0,010	0,641 ± 0,011	0,825 ± 0,012
5/8	0,562 ± 0,011	0,553 ± 0,009	1,091 ± 0,025
6/8	0,642 ± 0,012	0,689 ± 0,012	1,192 ± 0,037
7/8	-----	0,705 ± 0,013	1,860 ± 0,078
1	0,687 ± 0,013	0,787 ± 0,015	-----

Esses coeficientes de arraste foram calculados igualando a força de arraste de uma partícula isolada, caindo em um escoamento turbulento com velocidade terminal  $U_{pz}$ , com a força gravitacional devido à mas

sa da partícula submersa, isto é,

$$C_A(\phi) = \frac{(4/3) d_p [(\rho_p/\rho_f) - 1]}{U_{pz}^2(\phi)}$$

onde:  $C_A(\phi)$  é o coeficiente de arraste da partícula na concentração  $\phi$ ;  
 $d_p$  é o diâmetro da partícula;  
 $\rho_p, \rho_f$  são as densidades da partícula e do fluido, respectivamente;  
 $U_{pz}(\phi)$  é a velocidade terminal da partícula em suspensão.

Para comparação desse coeficiente de arraste com o de uma partícula isolada em um escoamento turbulento com velocidade terminal  $U_{pz}$ , foi utilizado o padrão dado na Figura 1.

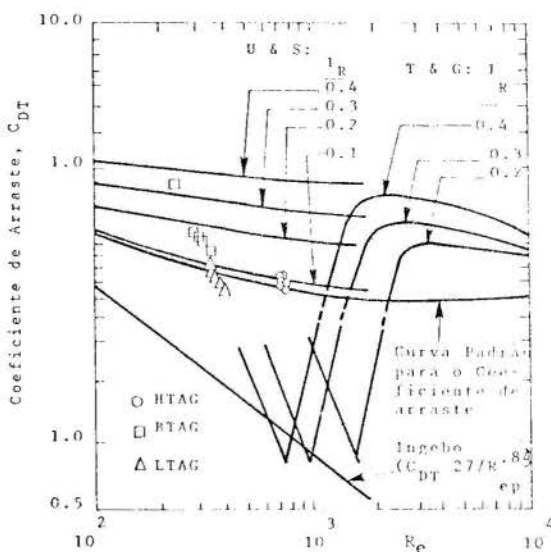


Figura 1. Comparação dos Coeficientes de Arraste experimental com aqueles

de Ingebo, Uhlherr & Sinclair, Torobin & Gauvin e os Coeficientes da Curva Padrão.

Em geral, os coeficientes de arraste para as três séries de partículas (HTAG, BTAG e LTAG) nas várias concentrações foram maiores do que o coeficiente padrão. Como era esperado fisicamente, o efeito de aumentar a concentração significa aumentar a intensidade turbulenta do fluido (definido por Torobin & Gauvin (1961) como  $I_R = \sqrt{u'v'^2}/U_p z$  e daí colocando o coeficiente de arraste acima da curva do coeficiente de arraste padrão para escoamento laminar. Contudo, para a série BTAG para concentrações volumétricas menores do que 5/82, o coeficiente de arraste foi encontrado abaixo da curva padrão. Como foi relatado no trabalho de Clift & Gauvin (1971), pelos estudos sobre visualização de escoamentos Uhlherr & Sinclair sugerem que a redução em  $C_A$  resulta de um decréscimo na forma  $A$  do coeficiente de arraste associado com o efeito da turbulência em reduzir o ângulo subtendido de ataque da esteira ("wake") recirculante. Com o aumento da concentração volumétrica a intensidade turbulenta relativa,  $I_R$ , aumenta, assim como o ângulo da esteira, explicando-se desse modo o aumento subsequente em  $C_A$ . Como pode ser visto na Figura 1, os nossos resultados experimentais mostram, em geral, um forte agrupamento para cada série de partículas com uma tendência para  $C_A$  alcançar um mínimo para a velocidade em queda livre, e aumentar com  $\psi$ .

As discrepâncias observadas entre o presente trabalho sobre o coeficiente de arraste turbulento e aquele encontrado por Ingebo (1956) é visto na Figura 1. Como sugerido por Torobin & Gauvin (1959), o decréscimo no coeficiente de arraste observado por Ingebo provavelmente resulta da intensidade turbulenta e não da aceleração.

#### REFERÊNCIAS

- (1) Uhlherr, P.H.T. & C.G. Sinclair, Proceedings of Chemical, Vol 1, Butterworths of Australia, Melbourne, Australia, p.1 (1970).
- (2) Torobin, L.B. & W.H. Gauvin, A.I.Ch.E. Journal, Vol. 7, p.615 (1961).
- (3) Clift, R. & W.H. Gauvin, "Motion of entrained particles in gas streams", Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 49, p.349 (1971).
- (4) Ingebo, R.D., "Drag coefficients for droplets and solid spheres in clouds accelerating in air streams", NACA - TH3762 (1956).
- (5) Torobin, L.B. & W.L. Gauvin, Canadian Journal of Chemical Eng., Vol. 37, p.129 (1959).

#### ABSTRACT

This work gives some results for the Drag Coefficient of solid particles in suspension, in a water turbulent flow in a vertical pipe. Three series of experiment have been conducted for two particles densities and two particles sizes, and for several particle volume loadings ranging

from 0 to 1 percent. Turbulent drag coefficients at various volume loading were compared with several models and correlations in the literature.

CRITÉRIO OBJETIVO PARA A TRANSIÇÃO BOLHAS-  
PISTONADO EM UM ESCOAMENTO GÁS LÍQUIDO

JOSÉ MARIA SAIZ JABARDO  
 Depto. Eng. Mecânica  
 Escola Politécnica da USP  
 Caixa Postal 8174 - 01051 São Paulo, SP

## RESUMO

Experiências envolvendo a propagação de ondas de fração de vazio de misturas Nitrogênio-água em dutos verticais, levaram ao estabelecimento de um critério objetivo para a transição entre os regimes bolhas e pistonado. O critério envolve somente a determinação da velocidade de propagação das ondas de fração de vazio e a velocidade de média do gás. A primeira velocidade pode ser obtida pela instalação de dois sensores de impedância na seção de testes, separados por distância adequada. Os resultados obtidos foram preliminarmente confirmados por "Video-Tapes" do escoamento, obtidos por meio de um equipamento de VT rápido.

## INTRODUÇÃO

A transição entre regimes no escoamento vertical de uma mistura líquido-gás tem sido tradicionalmente um assunto de intensa investigação. A atenção que tem sido dada ao tema está relacionada com a necessidade de conhecer a topologia do escoamento. Esta permitiria, sob um prisma relativamente superficial, modelar as interações térmicas e de quantidade de movimento entre as fases, as quais apresentam características diversificadas para os distintos regimes de escoamento. Não é o objetivo desta comunicação desdobrar o assunto da mudança de regimes de escoamento bifásico líquido-gás em condutos verticais, o que é exaustivamente desenvolvido em textos, teses e artigos especializados, mas apresentar uma abordagem experimental relativamente nova relacionada com o assunto. O termo nova tem relação com o fato do grosso da literatura abordar o tema da transição entre regimes de escoamento, bolhas-pistonado, por exemplo, sob um ponto de vista intrinsecamente subjetivo [1], [2], [3], [4], [5], ao passo que o procedimento proposto envolve um critério objetivo de avaliação da transição. O subjetivismo na avaliação de um determinado regime consiste de dois aspectos principais: o primeiro relacionado com a observação visual e o segundo com a descrição do particular regime observado. Nessas condições, não é difícil perceber as reais dificuldades em definir o que seja uma transição do regime de escoamento em bolhas para o pistonado, por exemplo. Com isso, os mapas do Escoamento Bifásico, levantados a partir de tal critério, incluem as incertezas do processo de observação, resultando em discrepâncias significativas frequentemente encontradas na literatura [5]. Não vamos falar aqui do aspecto relacionado com os parâmetros de definição dos mapas, o qual por si só constitui um assunto interessante de pesquisa, como já o observou Dukler em 1977 [5]. Algumas tentativas se verificaram na década de 60 no sentido de associar cada regime de escoamento a um sinal característico, cuja variação permitisse ao investigador um posicionamento seguro a respeito da possível mudança de regime. Entretanto, coube a Jones [3] e a Zuber & Jones [6] efetivamente associar os regimes de escoamento ao espectro do sinal produzido por uma sonda, de absorção de raios  $\gamma$  ou de impedância. Verificou-se que, cada regime de escoamento apresentava uma característica espectral bastante peculiar e diferenciada dos demais. Essa constatação abriu o caminho para o desenvolvimento de técnicas razoavelmente objetivas de avaliação do ponto de transição entre regimes de escoamento. Recentemente, França [2] utilizou essa técnica com resultados bastante satisfatórios para as transições: bolhas-pistonado, pistonado-agitante. Além do espectro, França lançou mão de outros parâmetros estatísticos,

com a função densidade de probabilidade, associados ao sinal de uma sonda de impedância local, introduzida no centro do tubo por onde escoava a mistura água-ar, a pressões próximas da atmosférica. Entretanto, como França teve oportunidade de comentar, na região de transição os parâmetros estatísticos do sinal da sonda não apresentavam uma definição clara em relação ao regime a que poderiam estar associados. Apesar desse problema, pode-se afirmar que o procedimento de França elimina em grande parte o subjetivismo acima comentado.

O presente trabalho tem por finalidade descrever um critério objetivo de transição entre os regimes em bolhas e pistonado. Esse critério tem por base a medida da propagação de ondas de fração de vazio e deve ser considerado como uma contribuição não só na análise prática da transição, mas na sua modelagem a partir de critérios de instabilidade.

## DESCRIÇÃO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

O procedimento experimental utilizado no presente trabalho envolveu um circuito experimental, cuja descrição pode ser encontrada nas referências [7], [8], [9]. Em suma, a seção de teste compunha-se de um duto vertical de Plexiglas, de 25mm de diâmetro e 2m de altura. O circuito foi pressurizado até a pressão máxima de 4 bar, tendo sido operado com misturas água-nitrogênio. Sensores de impedância, de eletrodos montados na parede do tubo de modo a não perturbar o escoamento, foram dispostos a intervalos de 20cm, num total de 10. Os sensores eram excitados por um sinal senoidal de 20kHz, o que permitia, mediante uma demodulação adequada, a medida da impedância do meio situado entre os eletrodos. A análise individual dos sinais de cada sonda permitiu avaliar as características espectrais associadas a cada regime. A inter-correlação dos sinais de sondas adjacentes propiciou a determinação da velocidade de propagação de perturbações de fração de vazio, quer naturais quer induzidas. As perturbações induzidas, de frequência não superior a 6 Hz, eram produzidas por uma pulsação na pressão do líquido na região inferior da seção de Testes, através de um pistão acionado por um motor de rotação variável. A frequência da perturbação induzida podia ser medida por um tacômetro eletrônico. Entretanto, uma medida mais precisa foi obtida do espectro do sinal das sondas, o qual indicava a ocorrência de um pico na frequência correspondente àquela da perturbação induzida.

As experiências foram realizadas para os seguintes valores dos parâmetros operacionais:

- pressão: 0, 3 e 4 bar
- velocidade superficial do líquido: 0; 0,12 e 0,27m/s
- fração de vazio média: variando de 0 até 40%.



- regimes de escoamento observados: bolhas e pistonado

#### DESCRIÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Além das curvas de calibração dos sensores, cujos detalhes podem ser encontrados em [7] e [8], os seguintes tipos de resultados foram obtidos:

(1) Características de propagação de perturbações de tração de vazio naturais e induzidas. Tais características envolviam o levantamento do ganho e da defasagem entre sinais de sondas consecutivas ao longo da coluna. O ganho permitia avaliar as características de amortecimento (ou amplificação) do sinal. Por outro lado, a defasagem permitiu não só identificar as características não dispersivas do meio, como propiciar um procedimento de verificação do valor da velocidade de propagação das ondas de tração de vazio. Tal velocidade também pode ser obtida pelo correlograma transversal dos sinais de sondas consecutivas, o qual apresenta um pico significativo, correspondente à correlação entre os sinais. A ocorrência do referido pico, evidente em experiências com perturbações induzidas, permitiu confirmar a ocorrência de ondas de tração de vazio, anteriormente proposta por Bouré [10].

(2) Determinação, através de um aparelho de Vídeo-Tape rápido, da velocidade de propagação das bolhas e da Bolha de Taylor em escoamento pistonado.

(3) Identificação visual de estruturas de bolhas, deslocando-se a velocidades superiores à superficial da fase gasosa, prenunciando a possível transição de regime. Tal identificação foi possível graças ao aparelho de VT acima mencionado.

#### DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O objetivo do presente trabalho está relacionado com a transição entre os regimes em bolhas e pistonado, de modo que somente os resultados de interesse para a análise daquele fenômeno serão aqui considerados. A Fig. 1 ilustra os correlogramas transversais de partes de sensores localizados na entrada, meio e topo da Seção de Testes. Os parâmetros operacionais da experiência são indicados na legenda. Observa-se que, na parte (a), correspondente à entrada, o correlograma transversal apresenta características de sinais periódicos, com um pico se avantajando. Tal pico corresponde à propagação da perturbação induzida, de 2,8 Hz. À meia altura na Seção de Testes observa-se o aparecimento de um segundo pico, o qual, inicialmente, apresenta amplitude inferior ao inicial, parte (b), mas acaba por superá-lo, parte (c). No topo da coluna, verifica-se que o sinal inicial foi completamente amortecido restando somente o segundo sinal. A Tabela 1 apresenta a variação da velocidade de propagação da estrutura correspondente à experiência da Fig. 1. Verifica-se que no início, correspondendo ao pico da Fig. 1(a), a velocidade de propagação é pequena, sofrendo um acréscimo significativo em seções superiores. Esse valor superior da velocidade de propagação corresponde ao aparecimento de um segundo pico, associado a uma estrutura que se propaga com velocidade superior à inicial. A velocidade de propagação incluída na Tabela 1 corresponde àquela do pico dominante, razão pela qual a velocidade sofre uma elevação significativa a partir da meia altura, uma vez que o pico correspondente ao aparecimento da nova estrutura passa a ser dominante a partir daquela região. É interessante observar que em um trecho significativo da Seção de Teste as duas estruturas ocorrem simultaneamente, mas enquanto a nova estrutura é progressivamente amplificada, a estrutura inicial, de menor velocidade de propagação, é amortecida.

A nova estrutura de que se tratou no parágrafo precedente foi associada a uma aglomeração de bolhas ou mesmo a uma bolha de Taylor através de imagens da Seção de Teste obtidas por meio do equipamento de VT anteriormente mencionado. A Tabela 2 compara velocidades de propagação obtidas pela correlação transversal dos sinais de sondas consecutivas e as obtidas por medida direta das imagens de VT. Os valores indicados

Tabela 1. Velocidade de propagação para  $\alpha = 23\%$ ,  $J_L = 0,260$  m/s e perturbação induzida de frequência igual a 2,8 Hz.\*

Pares de Sensores	Velocidade de Propagação [m/s]
2-3	0,455
3-4	0,445
4-5	0,465
5-6	0,585
6-7	0,602
7-8	0,602
8-9	0,602

Tabela 2. Velocidade de propagação comparada com a velocidade de deslocamento de bolhas de Taylor obtida com o auxílio de imagens de VT.

$J_L = 0,275$  m/s.

$\alpha$ [%]	Velocidade de Propagação [m/s]	Velocidade de Deslocamento da Bolha de Taylor [m/s] (VT)
35 2,7	0,790	0,809
35 3,2	0,790	0,771
39,8 2,5	0,853	0,752
29,0 1,0	0,710	0,719

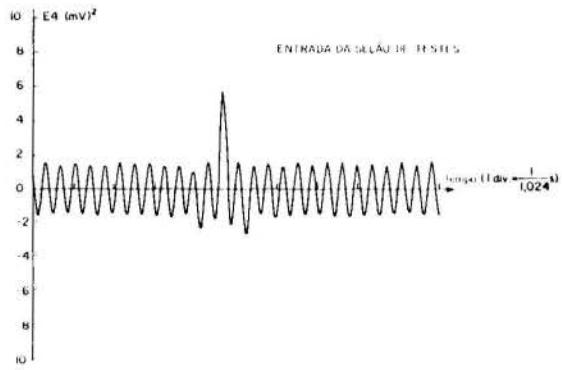
são próximos, demonstrando a relação íntima que existe entre a velocidade de propagação da nova estrutura e aquela de deslocamento de estruturas gasosas maiores, como é o caso da bolha de Taylor. A ocorrência de bolhas de Taylor (escoamento pistonado) mesmo para Frações de Vazio relativamente baixas, como 29% do último caso da Tabela 2, ou mesmo inferiores a 20%, pode ser justificada como resultado das perturbações induzidas. Verificou-se que, para uma dada Fração de Vazio e uma dada vazão da mistura, à medida que a frequência da perturbação induzida era aumentada, o seu amortecimento era proporcionalmente incrementado até que, acima de uma dada frequência, ocorria o aparecimento da segunda estrutura, a qual se propagava com velocidade superior. Assim, foi possível obter escoamento pistonado para Frações de Vazio da ordem de 10%.

Do exposto acima deve ter ficado claro que o aparecimento de uma nova estrutura com velocidade de propagação superior está associado à transição do regime em bolhas para o pistonado. É evidente, então, que a formação de um segundo pico no correlograma transversal entre os sinais de duas sondas, indica a ocorrência da transição entre os referidos regimes. Por outro lado, foi possível correlacionar a velocidade de propagação da nova estrutura com a velocidade média da fase gás na seção, como indicado na Fig. 2, na qual se mostra claramente que:

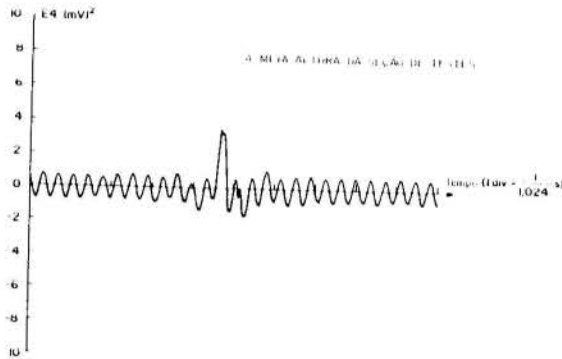
$$C_2 > V_G$$

onde  $C_2$  é a velocidade de propagação da nova estrutura e  $V_G$  é a velocidade média da fase gás. Na Fig. 2 foram representadas as velocidades de propagação máxima e mínima obtidas na Seção de Testes. Assim, o critério expresso pela desigualdade acima constituir-se-á numa condição necessária para a transição do regime de escoamento em bolhas para o pistonado. Resultados obtidos em [9] parecem confirmar a validade do critério proposto. Entretanto, novas experiências são necessárias a fim de validar o critério, o qual se caracteri-

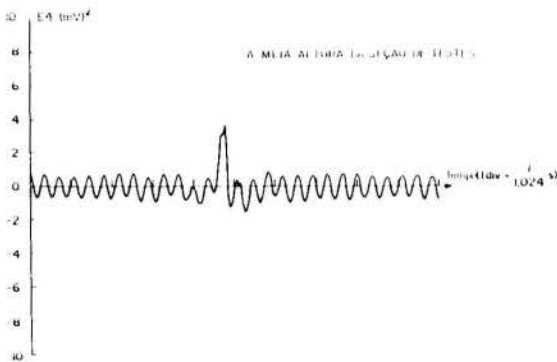
\*  $\alpha$  é a Fração de Vazio;  $J_L$  a velocidade superficial do líquido e  $f$  a frequência da excitação.



(a) entrada



(b) a média altura



(c) a média altura



(d) topo

Figura 1. Correlogramas transversais de pares de sensores em distintas regiões da seção de Testes.  $J_L=0,26\text{m/s}$ ;  $\alpha=23,8\%$ ;  $f=2,8\text{Hz}$ .

za por ser objetivo (independe da observação do operador). Por outro lado, as exigências em termos de equipamento experimental para sua aplicação são bastante reduzidas, exigindo simplesmente duas sondas e um analisador de sinais.

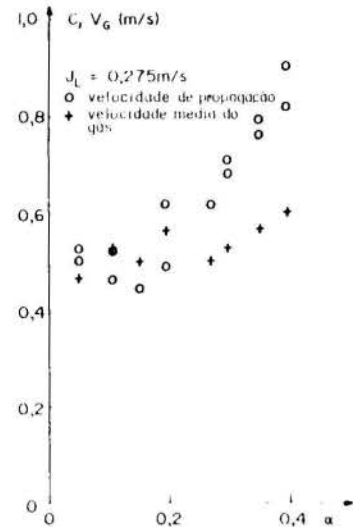


Figura 2. Velocidade de propagação de ondas de fração de vazio comparada com a velocidade média do gás, na região de saída da Seção de Testes.  $J_L=0,275\text{m/s}$ .

#### CONCLUSÕES

Experiências com ondas de Fração de Vazio permitiram desenvolver um critério objetivo de transição entre os regimes de escoamento em bolhas para pistonado. Os resultados obtidos na série de experiências descritas no presente trabalho e em outros trabalhos recentes permitem confirmar a generalidade do critério proposto, o qual tem por base o surgimento de uma nova estrutura que se propaga com velocidade superior a velocidade média do gás. Trabalho experimental deve ser continuamente desenvolvido a fim de confirmar o critério proposto.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Collier, J.G., Convective Boiling and Condensation, McGraw-Hill Book Co., 2ª Edição, 1982.
- [2] França, F.A., As Transições Bolhas-Pistonado em Pistonado Agitante em um Escoamento Bifásico Vertical Adiabático, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1987.
- [3] Jones, O.G., Statistical Considerations in Heterogeneous Two-Phase Flowing Systems, Tese de Doutorado, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, USA, 1974.
- [4] Choe, W., Flow Patterns and Pressure Drop in Horizontal Two-Phase Pipe Flow, Tese de Doutorado, University of Cincinnati, USA, 1975.
- [5] Dukler, A.E. e Taitel, Y., Flow Regime Transitions for Vertical Upward Gas-Liquid Flow: A preliminary Approach Through Physical Modeling, Progress Report N° 1, Department of Chemical Engineering, University of Houston, 1977.
- [6] Jones, O.G. e Zuber, N., The Interrelation Between Void Fraction Fluctuation and Flow Patterns in Two-Phase Flow, International Journal of Multiphase Flow, Vol. 2, 1975.

- [7] Saiz Jabardo, J.M., Experiments on Void Fraction Waves. Relatório SETH/LEF/87-1. Centro de Estudos Nucleares de Grenoble. Março/1987.
- [8] Saiz Jabardo, J.M. e Bouré, J.A., Experiments on Void Fraction Waves. Artigo submetido para publicação no International Journal of Multiphase Flow.
- [9] Tournaire, A., Détection et Étude des Ondes de Taux de Vide en Écoulement Diphasique a Bulles Jusqu'a la Transition Bulles-Bouchon. Tese de Doutoramento. Université Scientifique et Médicale e Institute National Polytechnique de Grenoble , 1987.
- [10] Bouré, J.A. Two-Phase Flow Models: The closure issue. International Workshop on Two-Phase Flow Fundamentals. Gaithersburg, Maryland, 23-27 setembro, 1985.

#### ABSTRACT

Experiments with void fraction waves in Nitrogen-water mixtures flowing in vertical tubes have led to the establishment of an objective criterium for the bubbles-slug flow transition. The criterium involves the determination of the propagation speed of the void fraction waves as well as the average velocity of the gas phase. The former speed can be obtained by the instalation of two impedance sensors in the test section. Those sensors must be separated by an adequate distance. The experimentally obtained results have been confirmed by Video-Tapes from the flow.

MÉTODOS TÉRMICOS PARA RECUPERAÇÃO DE PETRÓLEO



DAN MARCHESIN  
 IMPA/PUC - RJ  
 JESUS CARLOS DA MOTA  
 Departamento de Matemática - ICEx-UFMG

RESUMO

Processos térmicos para recuperação de petróleo vem sendo amplamente usados em reservatórios contendo óleo pesado. O principal mecanismo pelo qual o aumento de temperatura melhora a recuperação é através da redução da viscosidade do óleo. Neste trabalho determinamos a solução de um problema de Cauchy básico para um sistema 2x2 não linear de leis de conservação hiperbólico, descrevendo o deslocamento de óleo e água num meio poroso, levando em conta variações de temperatura.

INTRODUÇÃO

Um dos processos de recuperação secundária de óleo de um reservatório petrolífero consiste na injeção de água em certos poços para a obtenção de óleo em outros poços. Através da injeção de água quente a viscosidade do óleo diminui, aumentando o fluxo de óleo.

Sem considerar os efeitos de pressão capilar e de condutividade térmica o modelo abaixo, introduzido inicialmente por F.J. Fayers [1], descreve o fluxo de óleo e água através de um meio poroso sob condições não isotérmicas:

$$s_t + f(s, \theta)_x = 0 \quad (1)$$

$$[(s + \alpha)\theta]_t + [(f + \beta)\theta]_x = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

A primeira equação corresponde a conservação de massa de fluido no meio poroso e a segunda a conservação de energia. As variáveis dependentes são a saturação da água  $s = s(x, t)$  e a temperatura da mistura  $\theta = \theta(x, t)$ . A saturação do óleo é  $1 - s$  e assim  $0 \leq s \leq 1$ . A função  $f = f(s, \theta)$  é a conhecida fração de fluxo da água;  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes.

O sistema (1) é interpretado no sentido fraco, segundo Lax [2].

Resolvemos o sistema (1) para dados iniciais de interesse na engenharia de petróleo, da forma

$$(s(x, 0), \theta(x, 0)) = \begin{cases} (s_E, \theta_E) & x < 0 \\ (s_D, \theta_D) & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

onde  $(s_E, \theta_E), (s_D, \theta_D)$  são estados constantes no conjunto de estados físicos:

$$\mathcal{D} = \{(s, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq 1, \theta > 0\}.$$

O problema (1)-(2) é denominado problema de Riemann.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE RIEMANN

Métodos clássicos para soluções de problemas de Riemann exigem que o sistema seja estritamente hiperbólico [2, 3], isto é, velocidades características (autovalores) reais e

distintas. O sistema (1)-(2) é hiperbólico mas não é estritamente hiperbólico. As velocidades características  $\lambda^s = f_s$  e  $\lambda^\theta = (f + \beta)/(s + \alpha)$  são reais, mas coincidem sobre duas curvas  $T_1$  e  $T_2$  em  $\mathcal{D}$ . (veja Figura 1). Uma das dificuldades da solução, neste caso, é a falta de uma ordem bem definida das velocidades características em todo o espaço de estados.

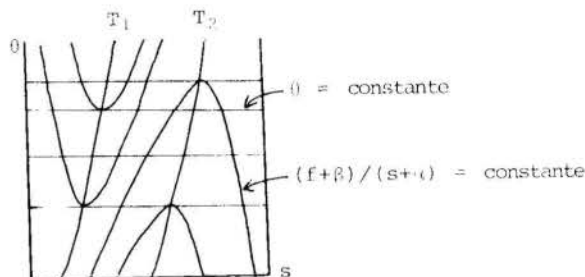


Fig. 1

As ondas fundamentais que compõem a solução do problema (1)-(2), determinadas em [4], são dos tipos: rarefações, choques e descontinuidades de contato. As curvas de rarefações e choques são dadas por  $\theta = \text{constante}$  e as curvas de contato por  $(f + \beta)/(s + \alpha) = \text{constante}$  (Figura 1).

Para obtermos a unicidade da solução, usamos as seguintes condições de admissibilidade para as soluções descontínuas, devidas a Keyfitz e Kranzer [5]:

$E_1$ ) Sobre uma reta  $\theta = \text{constante}$ , um choque é admissível se satisfaz a condição de entropia de Oleinik [6] para equações escalares.

$E_2$ ) Uma descontinuidade de contato conectando dois estados  $(s_E, \theta_E)$  e  $(s_D, \theta_D)$  é admissível se a curva de contato entre estes dois estados não cruzar uma das curvas  $T_1$  ou  $T_2$ .

Diz-se que duas ondas são compatíveis, no sentido de que elas podem ser compostas para formar uma única onda, se a velocidade final da primeira for menor ou igual a velocidade de inicial da segunda.

Observamos que as ondas fundamentais pa

ra o problema (1)-(2) podem ser resumidas em dois tipos: Ondas-s que é a solução conectando dois estados sobre  $\theta = \text{constante}$ , e ondas- $\theta$  que é a solução conectando dois estados sobre uma curva de contato satisfazendo a condição  $E_2$ .

O principal resultado deste trabalho é dado por :

**Teorema 1** - Seja  $U_E = (s_E, \theta_E)$  um estado constante em  $\mathcal{D}$ . Então para qualquer  $U_D = (s_D, \theta_D) \in \mathcal{G}$ , constante, existe uma solução para o problema de Riemann (1)-(2), composta por uma sequência de ondas-s e ondas- $\theta$  compatíveis. A sequência de ondas que compõe a solução, no plano de estados- $(s, \theta)$ , pode não ser única, mas a solução definida no semi-plano  $t \geq 0$ , é única no sentido  $L_1^{loc}$ .

Em [4] construímos a solução dada pelo Teorema 1 para quaisquer estados  $U_E = (s_E, \theta_E)$  e  $U_D = (s_D, \theta_D)$  em .

#### SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIOS PETROLÍFEROS

Para dados típicos de reservatórios petrolíferos, as Figuras 2a-b mostram os perfis de saturação da água nas soluções de (1) com condições iniciais de Riemann,

$$(i) (s_E, \theta_E) = (1, 20) \quad (s_D, \theta_D) = (0, 20)$$

$$(ii) (s_E, \theta_E) = (1, 100) \quad (s_D, \theta_D) = (0, 20)$$

respectivamente. A condição (i) corresponde a injeção de "água natural" e a (ii) a injeção de "água quente" num reservatório saturado de óleo numa temperatura natural. O tamanho da descontinuidade na saturação e a velocidade de propagação desta descontinuidade determinam a eficiência do mecanismo de deslocamento do óleo. No caso (i) a descontinuidade é pequena e se move rapidamente deslocando pouco óleo (Fig. 2a). No caso (ii) a solução contém uma grande descontinuidade de contato que se move juntamente com a frente de temperatura, deslocando mais óleo do que no caso (i) (Fig. 2b). As figuras 3a-b mostram os volumes de óleo, como função do tempo, para os dois casos, (i) e (ii), respectivamente.

SATURACÃO EM  $T = 0.4$

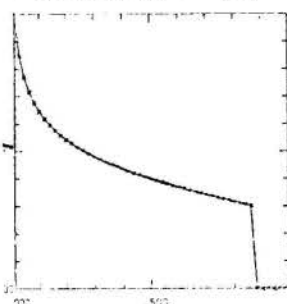


Fig. 2a

SATURACÃO EM  $T = 0.4$

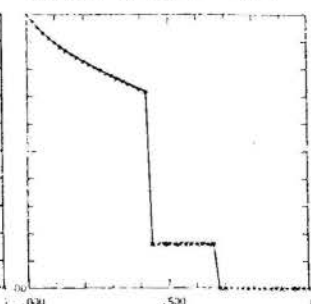


Fig. 2b

VOLUME DE ÓLEO

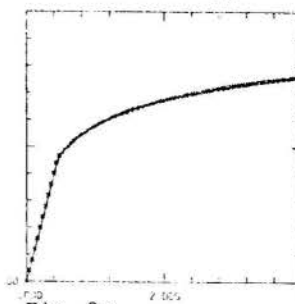


Fig. 3a

VOLUME DE ÓLEO

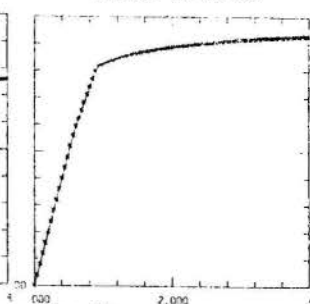


Fig. 3b

#### REFERÊNCIAS

- [1] Fayers, F.J., Some theoretical results concerning the displacement of a viscous oil by a hot fluid in a porous medium. *Fluid Mech.* 13 (1962).
- [2] Lax, P.D., Hyperbolic systems of conservation laws II. *Comm. Pure Appl. Math.* 10, 536 (1957).
- [3] Liu, T.P., The Riemann problem for general 2x2 conservation laws. *Trans. Am. Math. Soc.* 199 (1974).
- [4] Mota, J.C., Soluções Fundamentais para Escoamento Térmico de Fluidos Multifásicos em Meios Porosos. Tese de Doutorado. Dep. de Matemática-PUC-RJ-junho/88.
- [5] Keyfitz, B.L., and Kranzer, H.C., A system of non-strictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 72, 219 (1980).
- [6] Oleinik, O.A., Uniqueness and Stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation. *Uspehi Mat. Nauk.* 14 (1959) pp. 165-170. *Engl. transl. Am. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 33* (1963)

#### ABSTRACT

Thermal processes for petroleum recovery have been in ample usage in reservoirs containing heavy oil. One of the main mechanisms through which they improve the hydrocarbon recovery is the reduction of the oil viscosity. In this work we find the complete global solution of a basic Cauchy problem for a 2x2 system of nonlinear hyperbolic conservation laws describing the displacement of oil and water with variable temperature in porous media.



PRESEÇA DE PARTICULAS CILINDRICAS NO ESCOAMENTO DE FLUIDOS  
NEWTONIANO E NAO-NEWTONIANOS



HELDER GOMES COSTA (PUC/RJ)  
ROBERTO GUIMARÃES PEREIRA (UFF/RJ)  
WASHINGTON BRAGA FILHO (PUC/RJ)  
MAURÍCIO NOGUEIRA FROTA (PUC/RJ)

SUMÁRIO

O presente trabalho descreve uma investigação teórica-experimental referente ao movimento relativo entre partículas sólidas e fluidos Newtonianos e não-Newtonianos. Experimentos inéditos envolvendo partículas cilíndricas são realizados com o objetivo de se validar uma nova teoria que permite que parâmetros de um escoamento perturbado possam ser calculados em função de parâmetros do escoamento não perturbado. Uma fundamentada análise física é realizada nas equações de movimento para se explicar uma complexa transição de comportamento observada para Números de Reynolds superiores a 120.

INTRODUÇÃO

A dinâmica do escoamento e lativo entre sistemas particulados e um fluido é de grande relevância. Em Ciência e tecnologia identificam-se aplicações em uma variedade de processos, tais como hemorreologia, poluição atmosférica, produtos e sub-produtos pulverizados, movimento de sedimentos em rios, reologia de suspensões, etc. Em particular, se o fluido for não-Newtoniano, importantes aplicações são identificadas em diversos processos de interesse em petroquímica.

O presente trabalho apresenta uma análise teórica e experimental do movimento relativo entre partículas e fluidos de natureza Newtoniana e não-Newtoniana (tipo "Bingham").

PARTE 1: DINÂMICA DO MOVIMENTO RELATIVO ENTRE UMA PARTICULA RÍGIDA E UM FLUIDO NEWTONIANO

Considera-se o escoamento de um fluido Newtoniano, homogêneo, incompressível, em regime laminar no entorno de uma partícula rígida suspensa no fluido. O fluido considerado é infinito em um plano perpendicular ao fluxo e suficientemente longo, tornando-se  $v^0$  a velocidade do fluido não perturbado referida a um sistema de coordenadas estacionárias e  $p^0$  o campo de pressão não perturbado. Com base nas equações de movimento, o escoamento pode ser descrito pelas equações:

$$\nabla \cdot v^0 = 0 \tag{1}$$

$$\mu_0 \nabla^2 v^0 = \nabla p^0 \tag{2}$$

Para o caso de escoamento perturbado com presença de uma partícula, a equação é modificada:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \cdot \nabla v = \nabla \cdot \Pi \tag{3}$$

$$\Pi = -Ip + 2\mu\Delta; \quad \Delta = \frac{1}{2}(\nabla v + v \nabla)$$

$\Pi = \Delta p$  se  $\mu = \mu_0$  e  $v$  é função escalar de deformação. Para escoamento laminar com velocidade  $U$ , a partícula é considerada em movimento permanentemente:

$$\frac{D}{Dt} v = \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \nabla \right) v = 0 \tag{4}$$

Utilizando a identidade  $\nabla \cdot (v \otimes v) = v \cdot \nabla v + v \nabla \cdot v$

$$\rho(v^0 - U) \cdot \nabla v = \nabla \cdot \Pi \tag{5}$$

O caso Newtoniano em baixo Número de Reynolds.

Por um balanço de momento e pela conservação de um volume de fluido, pode-se relacionar a queda de pressão  $\Delta P$  com o componente da força  $F_w$  resultante da ação da parede sobre fluido. A equação pode ser utilizada para ambas as situações: escoamento no aumento na presença de partícula. Se tomarmos como  $v^+$  que se considera a velocidade fora de camada  $D$  sobre a partícula, obtendo-se o resultado destes balanços e considerando-se os campos perturbados (definidos pelo Eq. 4):

$$v^+ = v - v^0 \tag{6}$$

$$\Delta P^+ = \lim_{h \rightarrow \infty} (\Delta P - \Delta P^0) \tag{7}$$

$$F_w^+ = F_w - F_w^0 \tag{8}$$

pode-se isolar o campo de velocidade  $v^+$  em função de uma unidade de comprimento da partícula  $A$  e de  $D$ :

$$\Delta P^+ A = F_w^+ + D \tag{9}$$

$$D = \int \int_{S_p} \Pi \cdot dS \tag{10}$$

onde  $\Pi$  é um comprimento  $L$  na direção  $x$ ,  $S_p$  é a área superficial da partícula.

Analogamente, podemos definir campo de velocidade  $\dot{E}$  a taxa de dissipação de energia mecânica:

$$\dot{E}^+ = \lim_{h \rightarrow \infty} (\dot{E} - \dot{E}^0) \tag{11}$$

onde  $\dot{E} = \dot{E}^0$  quando não matricamente definidos, detetam, respectivamente, as taxas de energia dissipada pelo fluido em ausência e presença da partícula.

$$\dot{E} = - \int \int_S dS \cdot \Pi \cdot v; \quad \dot{E}^0 = - \int \int_{S-S_p} dS \cdot \Pi^0 \cdot v^0$$

Utilizando dos métodos independentes e válidos para a taxa de dissipação de energia mecânica e aplicando as equações de movimento, obtém-se a seguinte expressão para a taxa adicional de dissipação de energia mecânica:

$$\dot{E}^+ = (v_0^0 - U) \cdot D \tag{12}$$

$$\dot{E}^+ = \Delta P^+ \cdot V_m A - U \cdot D \tag{13}$$

Combinando-se as equações (10) e (10) obtêm-se:

$$\Delta P^+ A/D = v_0^0/V_m \quad (11)$$

Nesta equação  $v_0^0$  é a velocidade local do fluido não perturbado, medida no local correspondente ao centro de massa da partícula e  $V_m$  é a velocidade média do fluido.

É interessante notar que esta equação relaciona parâmetros do escoamento perturbado com parâmetros do escoamento não-perturbado.

Combinando as equações (11) e (6), obtém-se uma expressão para o cálculo da "força adicional" nas paredes do duto devido a presença de partículas no escoamento do fluido incompressível Newtoniano:

$$F_w^+ = (v_0^0/V_m - 1) \quad (12)$$

## PARTE II: DINÂMICA DO MOVIMENTO RELATIVO ENTRE UMA PARTÍCULA RÍGIDA E UM FLUIDO NÃO-NEWTONIANO

A ausência de parâmetros físicos característicos do fluido em (11) sugere a sua validade também para fluidos não-Newtonianos. Considerando-se as dificuldades matemáticas introduzidas pelas equações constitutivas não Newtonianas, investigou-se a possibilidade da equação (11) ser também aplicável a escoamentos de fluidos não-Newtonianos. Fredrickson & Bird [2] apresentam soluções para as equações de movimento para o escoamento laminar unidimensional, de fluidos tipo "Power-Law" e "Bingham" através de uma região situada entre dois cilindros concêntricos. Com base nestas soluções, pode-se, habitualmente, considerar o caso de um fluido não-Newtoniano escoando ao redor de uma partícula cilíndrica com o seu eixo alinhado com o escoamento. O cilindro externo de raio " $R_0$ " define as fronteiras do duto confinando o fluido não-Newtoniano e o cilindro interno. O cilindro interno é imaginado como sendo uma "partícula" cilíndrica infinita de raio " $R_i$ ". Para que complexos "efeitos de parede", não perfeitamente conhecidos, (assim denominados por Faxen [3] para o caso de fluidos Newtonianos) faz-se a hipótese  $R_0 \gg R_i$  significando que a partícula é pequena comparada à dimensão característica do duto.

Para o fluido "Power-Law" a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação é:

$$\tau_{rz} = m(-dv_z/dr)^{1/s} \quad (13)$$

sendo  $m = s$  ( $s = 1$ ) constantes reológicas.

Com base nos resultados de Fredrickson & Bird, aplicados sucessivamente aos casos de escoamento em ausência ( $R_i = 0$ ) e presença da "partícula cilíndrica infinita", pode-se obter uma expressão para o cálculo do "valor adicional" da queda de pressão devido unicamente à presença da partícula cilíndrica no escoamento do fluido não-Newtoniano. Fazendo-se  $\Gamma = (s-1)/(s+1)$ , obtém-se:

$$\frac{\Delta P^+}{l} = \frac{2m}{R_0} \left[ \frac{s+3}{R_0} V_m \right]^{1/s} \left[ \left( \frac{s+3}{s+1} \right) \left( \frac{s-1}{s+1} \right)^{1/s} \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^{(s-1)/s} \right] \quad (14)$$

Analogamente ao caso Newtoniano, calcula-se o arrasto viscoso sobre o cilindro interno:

$$\frac{D}{l} = 2\pi m R_0 \left[ \frac{s+3}{R_0} V_m \right]^{1/s} \left[ \left( \frac{s-1}{s+1} \right)^{1/s} \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^{(s-1)/s} \right] \quad (15)$$

Surpreendentemente, a partir dos resultados descritos acima, e com base nas hipóteses desenvolvidas, pode-se finalmente mostrar que a equação (11), anteriormente obtida para fluidos Newtonianos, também se aplica ao caso de fluidos não-Newtonianos do tipo "Power-Law". Estes resultados encontram-se resumidos na Tabela 1.

TABELA I: RESULTADOS TEÓRICOS ESPERADOS

$\frac{\Delta P^+ A}{D} = \frac{v_0^0}{V_m} \quad \left( \text{válido para ambos os casos} \right)$ <p style="text-align: center;">(Newtoniano e Não-Newtoniano)</p>	
$\frac{v_0^0}{V_m} = \frac{(s+3)}{(s+1)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{s+1} \right]$	
<p>(resultados para o caso de partícula posicionada ao longo do eixo do cilindro, <math>r=0</math>)</p>	
Newtoniano ( $s=1$ )	Não-Newtoniano ( $s=1/n$ )
$\frac{v_0^0}{V_m} = 2$	$\frac{v_0^0}{V_m} = \frac{s+3}{s+1}$

Teoricamente estas equações restringem-se a regimes de baixos Números de Reynolds uma vez que, nas equações de movimento, desprezaram-se os efeitos inerciais em presença dos efeitos viscosos. Com base na Análise Dimensional, pode-se mostrar que, para o caso de um fluido tipo "Power-Law", o Número de Reynolds deve ser descrito pela expressão abaixo. Nesta expressão generalizada,  $\rho$  é densidade do fluido,  $V$  a velocidade terminal da partícula e  $d$  a dimensão característica da partícula (diâmetro no caso de partículas esféricas e diâmetro da esfera de volume equivalente no caso de cilindros).  $m$  e  $n$  são parâmetros reológicos do fluido (para o caso de fluidos não-Newtonianos,  $m$  é a viscosidade aparente e para fluidos Newtonianos em que  $s=1$ ,  $m$  denota a viscosidade absoluta).

$$Re_{gen} = \frac{\rho v^{(2-n)} d^n}{8(n-1)m \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n} \quad (16)$$

Detalhes referentes à medição dos parâmetros reológicos dos fluidos não-Newtonianos encontram-se descritos em um outro trabalho que trata de fluidos mais complexos de natureza visco-elástica [4].

No presente trabalho, experimentos foram realizados com o duplo objetivo de se validar a equação (11) obtida para o caso Newtoniano, e de se verificar a sua validade para o caso não-Newtoniano, porém a partir dos resultados do modelo "Power-Law" de Fredrickson & Bird, submetidos à original idealização de se considerar o cilindro interno como uma partícula infinita inserida no escoamento.

## TRABALHO EXPERIMENTAL

Os resultados teóricos refletidos pelas equações resumidas na Tabela 1 foram verificados experimentalmente para diferentes situações físicas, medindo-se os parâmetros do escoamento perturbado,  $\Delta P^+ = D$  (lado esquerdo da equação). O lado direito da equação (11) reflete o escoamento do fluido em ausência de partícula, ou seja, o escoamento não perturbado. Esta razão de velocidades depende da geometria do cilindro e da natureza física do fluido.

**Procedimento Experimental.** No presente trabalho, o movimento relativo entre a partícula rígida e o fluido Newtoniano foi conseguido através da queda livre de uma partícula num fluido estático.

O valor de  $\Delta P^+$  foi medido diretamente com o auxílio de um transdutor diferencial de pressão com resolução de 0,122 Pa (0,891 mm Hg) e incerteza experimental estimada em 2%. O valor de arrasto viscoso  $D$  foi determinado com uma resolução de 10  $\mu\text{s}$  com uma incerteza experimental inferior a 1%. Através da técnica de propagação de incertezas experimentais, a incerteza global associada ao lado esquerdo da equação (11) foi estimada em 2,5%. Previamente, detalhes do aparato experimental, fontes de incertezas e confiabilidade dos experimentos relacionados à determinação das propriedades reológicas dos fluidos são descritos em [5,6].

Quatro tipos de experimentos foram realizados para se estudar o movimento relativo fluido-partícula rígida: (i) cilindros em fluidos Newtonianos, (ii) cilindros em fluidos não-Newtonianos, (iii) esferas em fluidos Newtonianos, (iv) esferas em fluidos não-Newtonianos. No caso Newtoniano os experimentos foram realizados no regime  $0,02 < Re < 21.200$ . No caso Não-Newtoniano, dificuldades experimentais não superadas até a presente data, limitaram os experimentos ao regime  $0,06 < Re < 20$ .

Embora a equação (11) aplique-se, indistintamente, para escoamentos de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos, é interessante, entretanto, observar, que para o caso de um fluido Newtoniano ( $s=1$ ), a função  $(s+3)/(s+1)$  conduz ao valor teórico 2,0. Para um fluido não-Newtoniano a função  $(s+3)/(s+1)$  assumirá valores superiores ou inferiores ao valor limite 2,0, dependendo da natureza do fluido ser "pseudo-plástico" ( $n < 1$ ) ou "dilatante" ( $n > 1$ ), respectivamente. No presente caso o fluido não-Newtoniano testado é uma solução aquosa de glicerol (98% em peso) dopada com o polímero Carbopol 940, formando uma solução não-Newtoniana a 3000 wppm que apresenta um comportamento pseudo-plástico cujo coeficiente reológico  $n = 1/s = 0,874$  (determinado experimentalmente com uma incerteza estimada em 15%) conduz ao valor teórico  $(s+3)/(s+1) = 1,92$ .

Deve-se observar que em ambos os casos, no limite da validade das teorias apresentadas, isto é: em "baixos" Reynolds ( $Re < 2$  para o caso Newtoniano devido a linearização tipo Oseen utilizada), os resultados teóricos sumarizados na Tabela 1, são confirmados experimentalmente com uma precisão superior a 3%, resultado perfeitamente compatível com a incerteza experimental estimada em 2,5%.

**Análise dos Resultados.** A análise da Fig. 1 evidencia também uma extensão do limite de validade da teoria, independentemente da geometria de partícula testada (esferas e cilindros). Experimentalmente, mostra-se que a teoria estende-se além do regime de Oseen ( $Re < 2,0$ ) imposto pela hipótese restritiva associada à linearização utilizada. Para o caso Newtoniano,  $\Delta P^+ A/D = 2$  permanece constante independentemente da geometria da partícula utilizada para "perturbar" o escoamento. Nos casos de experimentos realizados com partículas cilíndricas e esféricas em fluidos Newtonianos, esta extensão da teoria fica confirmada até  $Re \approx 120$ , regime a partir do qual a teoria se desestrutura. Para  $Re \approx 2000$ , a razão  $\Delta P^+ A/D$  aproxima-se do valor 1,92. No regime  $120 < Re < 2000$  uma abrupta transição se desenvolve conforme mostrado na Fig. 1. Esta transição, não completamente explicada e de natureza complexa, parece estar associada à instabilidade da esteira que se descola da partícula. Considerando a diferença entre as características hidrodinâmicas do escoamento no entorno destas partículas de diferentes geometrias, parece razoável supor-se que a região de transição, e provavelmente o seu início, devam ser afetadas pela geometria da partícula.

Pela equação (12) conclui-se que o valor  $\Delta P^+ A/D =$

1,92 em um meio poroso de alta condutividade  $Fw = 0$ . Isto, contudo, não é satisfatório, uma vez não pode ser feita uma análise satisfatória, entretanto, de situações particulares que seria de se esperar por uma análise simplificada que tomasse por base um balanço elementar de forças realizada no entorno do contorno do fluido envolvendo a partícula. Para melhor compreender este aparente paradoxo, considere duas situações: a) caso em que o valor da razão  $AP^+ A/D = 2,0$  (de [12]) e o caso em que este valor é  $AP^+ A/D = 1,9$  (de [2000]). Para a primeira situação, obtém-se  $Fw = 1,0$  e isto é, mesmo com as paredes do tubo tomadas a infinito, a força na parede devido ao movimento relativo entre fluido e partícula é igual à força de arrasto teórico que atua diretamente sobre a partícula. Já no segundo caso,  $Fw = 0$  ou seja, a força adicional na parede é nula. Este resultado, não previsto pela teoria, parece, entretanto, razoável fisicamente.

Fisicamente o que se pretende é justificar o desaparecimento gradual da força adicional  $Fw$  com o aumento do Número de Reynolds. Obviamente, o escoamento do fluido Newtoniano ao redor da partícula, pode ser descrito pelas equações de Navier-Stokes, em sua formulação transiente. Entretanto, a obtenção de solução analítica não é simples e, frequentemente, depende do emprego de técnicas numéricas. No presente trabalho, desenvolveu-se uma análise da ordem de grandeza dos termos das equações associadas ao presente problema.

Essencialmente, as equações de Navier-Stokes descrevem o escoamento do fluido em termos de forças de inércia e de dissipação viscosa, o que é descrito através do Número de Reynolds que está presente nas equações adimensionalizadas de movimento. Numa análise conclusiva deste complexo mecanismo, há que se considerar, certamente, a influência da camada limite que se forma sobre a partícula. No contexto desta análise, é relevante o fato das forças de inércia serem matematicamente modeladas por derivadas de primeira ordem enquanto serem as forças viscosas modeladas por derivadas de segunda ordem. Portanto, o comportamento das equações e, obviamente, a solução do problema, fica fortemente dependente da influência de cada termo na equação; em outras palavras, dos mecanismos dominantes associados ao problema físico.

Quando a velocidade do fluido (relativa à partícula) for baixa, os termos de inércia serão desprezíveis e o escoamento passa a ser descrito essencialmente por um balanço entre termos de pressão e viscosos. Matematicamente, diz-se que o problema é de natureza elíptica [7], significando que o escoamento é fortemente dependente das condições existentes em todos os contornos, não havendo direção preferencial. Fisicamente isto se traduz no fato dos chamados efeitos viscosos se propagarem em todas as direções, em todo o domínio do escoamento [8]. No caso em análise, a presença da parede lateral, embora distante pela pequena razão de aspecto utilizada, afeta indiscriminadamente o escoamento. Em outras palavras, sempre que o número de Reynolds for "baixo", o fluido estará sempre limitado, ainda que as fronteiras estejam localizadas no infinito.

Com o aumento do  $Re$ , gradualmente os termos de inércia passam a dominar e considerações sobre os efeitos viscosos já não mais se justificam na direção transversal ao escoamento, o que, obviamente, não acontece na direção axial devido aos efeitos introduzidos pela presença da partícula (esteira e outros efeitos locais) no escoamento. No caso em estudo, em que o escoamento é essencialmente axial, apenas o componente da força inercial nesta direção torna-se relevante. Em consequência, as paredes laterais deixam de influenciar o escoamento e o efeito do fluido responsável pela força adicional na parede se reduz, eventualmente desaparecendo. Tudo se passa como se o fluido fosse ilimitado e, nestas circunstâncias, em regimes de elevado número de Reynolds, o fluido "confinado no infinito" se comporta como um fluido ilimitado. É importante ressaltar que esta mesma assertiva, aparentemente um paradoxo, não

de partículas, para  $Re < 2,0$  o escoamento não é homogêneo e os resultados em primeira aproximação, considerando o efeito sobre um fluido limitado ao infinito, são em fluido limitado. Se limitada ao infinito o coeficiente de  $F_w$  varia de acordo com a conformação mostrada na Fig. 1. A ordem de grandeza do arrasto é da ordem de  $Re^{-1}$ . No caso de fluido não-Newtoniano, há o sistema paredes, portanto,  $F_w = 0$ .

**CONCLUSÕES**

Para todos os casos investigados, fluidos Newtonianos e não-Newtonianos, na ausência e presença de partículas cilíndricas e esféricas, a teoria (limitada para  $Re < 2,0$ ) foi confirmada, conforme mostrado na Fig.1 que resume os resultados encontrados teoricamente, também, experimentalmente, a extensão de validade da teoria para o caso de fluido não-Newtoniano tipo "Power-Law". Uma contribuição adicional do presente trabalho refere-se à explicação física. À luz das equações de movimento, do limite de validade da referida teoria, à medida que se aumenta o número de Reynolds.

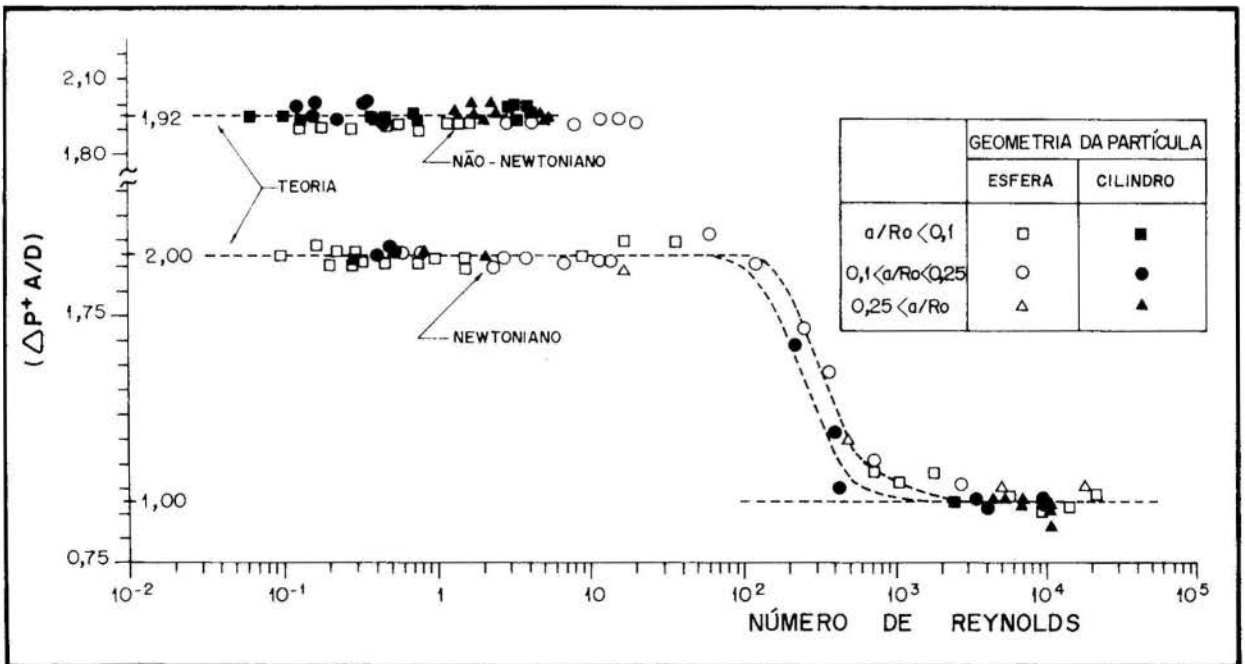
**REFERENCIAS**

[1] Brenner, H., "Dynamics of a particle in a Viscous Fluid", Chem. Engng. Sci., V. 17, pp.435-446, 1962.  
 [2] Fredrickson, A.G. & Bird, G.B., "Non-Newtonian Flow in Annuli", Ind. Engng. Chem., V. 50, pp. 337-358, 1957.  
 [3] van Hartleit, G.P. & Kostic, M., "Heat Transfer Viscous Fluid in Laminar Flow through Rectangular Channel", Int. J. Heat Mass Transfer, V. 28, p. 1155, 1985.

[4] Leighton, D.M.S., Fractal, N.Y., Vol. 15, "The motion of suspended solid particles in viscoelastic non-Newtonian flows", IUTAM-85 International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Grenoble, France, August 29-30, 1985.  
 [5] Freitas, G.R., Experimentos sobre a influência de Pressão Dinâmica Adicional no Escoamento relativo gota-Partículas sólidas e um fluido Newtoniano confinados em uma rede de seção quadrangular, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUARJ, agosto de 1980.  
 [6] Ribeiro, G.A.W.D., Dinâmica do Movimento Relativo entre Partículas Sólidas e Fluidos Não-Newtonianos, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUARJ, abril de 1987.  
 [7] Evans, L. & Pinder, G.L., Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering, John Wiley & Sons, 1961.  
 [8] Bird, G.B., Physical Fluid Dynamics, Van Nostrand Reinhold, 1981.

**ABSTRACT**

This work describes a theoretical and experimental investigation concerning the relative motion of solid particles of cylindrical and spherical shapes, in Newtonian and non-Newtonian flows. Detailed experiments involving particles of different shapes are performed in order to validate a new theory which allows properties of the disturbed flow to be measured by properties of the undisturbed flow. Based on the nature of the governing equations, physical insights are provided in order to explain a radical change in behavior of the results obtained for particle Reynolds number greater than 120.



[12] Pressão dinâmica, coeficiente de arrasto, na presença de partículas cilíndricas e esféricas no escoamento de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos. Teoria vs. Experimentos.

**TWO-PHASE FLOW AGGREGATE FORMATION THEORY  
BASED ON ENERGY DISSIPATION**



J. Militzer, J. M. Kan, A. M. Al Tawell and F. Hamdullahpur

Technical University of Nova Scotia P. O. Box 1000, Halifax, Nova Scotia  
Canada, B3J 2X4 (902) 429-8300

**ABSTRACT**

This paper presents a mathematical model for evaluating the effect of aggregate formation on the energy dissipation of a two-phase (gas-solid) flow. A minimum energy dissipation principle is applied in order to find the most probable aggregate characteristics in a two-phase vertical pipe flow. The flow is assumed one dimensional, steady state with no wall friction. With this the most probable aggregate (shape, size and number of particles) characteristics are determined for different flow situations. Both cocurrent and countercurrent configurations are considered. The calculated slip velocities show good agreement with available experimental data.

**INTRODUCTION**

Solid-gas two phase flows are usually studied assuming that the solid-phase is fully dispersed. However, this model is not able to explain the existence of slip velocities much larger than the terminal velocity of a single particle. Aggregates of particles with a size much larger than the individual particles can have slip velocities comparable to those observed experimentally [1], [2]. Significant effort has been made to find a model based on aggregate formation to explain the high slip velocity and the regime transition caused by the instability of the system [3]. However, this is difficult because of the lack of information on the influence of transport conditions and particle characteristics on the aggregate formed. To try to solve this, we propose here a minimum energy principle and a mathematical model based on our previous paper [2].

In a given flow situation, aggregates are assumed to have the same size, structure and spheroidal shape characterized by their aspect ratio  $E = L/D$  (length along flow direction/width). The aggregate size  $D$  is correlated by

$$D = d_p \left( \frac{N_p}{E(1-\epsilon_a)} \right)^{1/3} \quad (2)$$

Where  $d_p$  is the particle diameter;  $\epsilon_a$ : porosity of the aggregate;  $N_p$ : number of particles forming the aggregate. The relation between aggregate porosity,  $\epsilon_a$ ; the interaggregate porosity,  $\epsilon_i$  and the overall porosity,  $\epsilon_o$  is [2]:

$$(1 - \epsilon_i) = \frac{(1 - \epsilon_o)}{(1 - \epsilon_a)} \quad (3)$$

**GOVERNING EQUATIONS**

**1. Momentum Equation.**

In steady state, vertical flows the drag force exerted on each aggregate is balanced by its effective weight (the sum of weight and buoyant forces). For the calculation of the drag coefficient of the spheroid  $C_{da}$ , Clift's correlation for a sphere is modified for a spheroidal aggregate [2]. Richardson-Zaki's coefficient is used to take into account the effect of the presence of neighboring aggregates [4]. Thus, the resulting momentum equation is:

$$C_{da} V_{slip}^2 = \frac{4}{3} ED \frac{(\rho_p - \rho_f)}{\rho_f} g (\epsilon_o - \epsilon_a) \epsilon_i^{3.8} \quad (4)$$

Where  $V_{slip}$  is the slip velocity between the gas phase and the aggregate phase;  $\rho_p$  and  $\rho_f$  are the densities of particles and gas respectively; and  $g$  is the acceleration of gravity.

The total drag force  $F_{da}$  between the two phases (based on unit volume) is:

$$F_{da} = \Delta p \cdot \epsilon_i \quad (5)$$

where  $\Delta p$  is the pressure drop and is given by:

$$\Delta p = (\rho_p - \rho_f) g (1 - \epsilon_o) \quad (6)$$

**2. Continuity Equations.**

Consider the cocurrent flow as an example. Figure 1 shows that gas phase and aggregate phase are both moving upwards with their interstitial velocities,  $U_g$  and  $V_a$ . The corresponding superficial gas and solid velocities,  $V_{gs}$  and  $V_{ss}$  are given. The passage for the gas phase is obviously the voidage between aggregates, ie  $\epsilon_i$  and that for the aggregates,  $1 - \epsilon_i$ . Thus, mass conservation requires that:

$$V_{ss} = V_a (1 - \epsilon_i) (1 - \epsilon_a) \quad (7)$$

and

$$V_{gs} = U_g \epsilon_i + V_a (1 - \epsilon_i) \epsilon_a \quad (8)$$

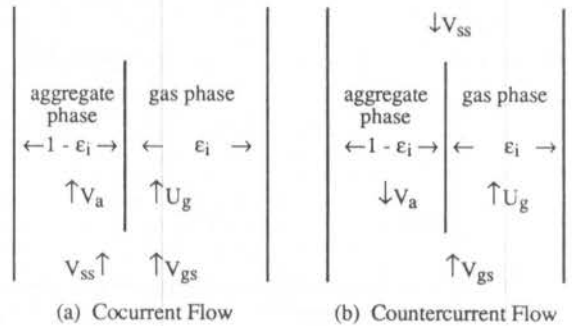


Figure 1. Aggregated Flow

The slip velocity,  $V_{slip}$ , is defined as:

$$V_{slip} = U_g - V_a \quad (9)$$

or

$$V_{slip} = \frac{V_{gs}}{\epsilon_i} - \frac{V_{ss}}{(1-\epsilon_o)} \left[ \frac{(1-\epsilon_i) \epsilon_a}{\epsilon_i} + 1 \right] \quad \text{cocurrent (10 a)}$$



Similarly, for countercurrent flow, we have:

$$V_{slip} = U_g + V_a \quad (11)$$

or

$$V_{slip} = \frac{V_{gs}}{\epsilon_i} + \frac{V_{ss}}{(1 - \epsilon_0)} \left[ \frac{(1 - \epsilon_i)\epsilon_a}{\epsilon_i} + 1 \right] \text{ countercurrent (10 b)}$$

### 3. Energy Equation.

The total energy is divided between the gas phase,  $E_g$ , the aggregate phase,  $E_a$ , and the energy dissipation,  $E_d$ , namely:

$$E_g = F_{da} \cdot U_g \quad (12)$$

$$E_a = F_{da} \cdot V_a \quad (13)$$

$$E_d = F_{da} \cdot V_{slip} \quad (14)$$

Introducing eqs. (9) and (11), the energy balance becomes:

$$E_g = E_a + E_d \quad (\text{Cocurrent}) \quad (15)$$

and in countercurrent flow:

$$E_d = E_g + E_a \quad (\text{Countercurrent}) \quad (16)$$

Solving the corresponding momentum and continuity equations for a given set of values of  $V_{gs}$ ,  $V_{ss}$  and other parameters, we obtain  $V_{slip}$  and  $\epsilon_0$ . The solutions are represented by the intersection of the continuity and momentum curves presented in Figures 2 and 3. The energy rates can be calculated by substituting these solutions into eqs. (12) and (14).

Figure 2 and Figure 3 present respectively curves for cocurrent and countercurrent flow cases for steel spheres in air ( $d_p = 375 \mu\text{m}$ ). Curves 1,2,3,4 are continuity curves while curves 5,6,7,8 are momentum curves. Curves 1 and 5 correspond to a fully dispersed system and curves 2 and 6, 3 and 7, 4 and 8 correspond to aggregated cases for the same number of particles per aggregate ( $N_p=100$ ) and changing porosity,  $\epsilon_a = 0.5, 0.65$  and  $0.8$  respectively.

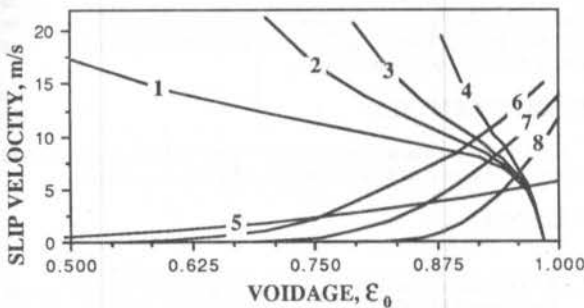


Fig. 2 Momentum and Continuity Curves in Cocurrent Flow

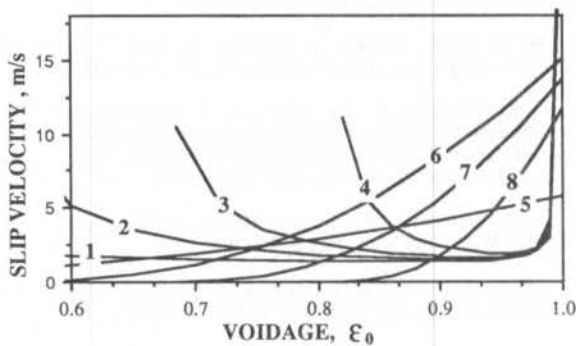


Fig. 3 Momentum and Continuity Curves in Countercurrent Flow

### MINIMUM ENERGY PRINCIPLE

Energy carrying "fluid" is defined as the phase which supplies energy to the other phase or to dissipation. In cocurrent flow, only the gas phase is the energy carrying phase. In countercurrent flow, both gas and aggregate phases contribute to energy dissipation, and thus are both energy carrying phases.

By substituting different  $N_p$ ,  $\epsilon_a$ , and  $E$ , ie different aggregate structures, into the governing equations and solving them, we can have a family of solutions of  $V_{slip}$  and  $\epsilon_i$ . To get the most probable solution, we propose to use a minimum energy principle: According to the 2nd Law of Thermodynamics [5] the energy carrying fluid will choose the path of least resistance, thus minimizing the energy dissipated or transferred to the other phase.

### RESULTS AND DISCUSSION

According to the minimum energy principle in cocurrent flow we minimize the energy rate of the gas phase,  $E_g$ . By substituting eqs. (5), (6), (9) and (10a) into eq. (15) we have:

$$E_g \propto (1 - \epsilon_0) \left[ V_{gs} - V_{ss} \frac{\epsilon_a}{(1 - \epsilon_a)} \right] \approx (1 - \epsilon_0) V_{gs} \quad (17)$$

Note that in most gas-solid flows  $V_{gs}$  is much bigger than  $V_{ss}$ . In countercurrent flow, we minimize  $E_d$  and similarly we have:

$$E_d \propto [1 - (1 - \frac{V_{ss}}{V_{gs}}) \epsilon_0] \approx 1 - \epsilon_0 \quad (18)$$

It is interesting to notice that to minimize  $E_g$  in cocurrent flow and  $E_d$  in countercurrent flow it is necessary to have a bigger  $\epsilon_0$  in both cases.

From the calculation results shown in Fig. 2 and Fig. 4 only small (smaller  $N_p$ ) and loose (larger  $\epsilon_a$ ) aggregates move the intersection of the curves in cocurrent flow to the right and thus minimizing  $E_g$ .

Figure 4 and Figure 5 present respectively the cocurrent and countercurrent cases.  $V_{slip} / V_t$  is the dimensionless slip velocity.  $V_t$  is the terminal velocity of a single particle.  $E_g / E_g^1$  is the variation of the energy rate, where  $E_g$  is the energy of the gas phase in a flow with aggregates, while  $E_g^1$  is the energy of the gas phase for a fully dispersed system. In both figures the superficial velocities of the gas,  $V_{gs}$  and of the solid,  $V_{ss}$  are kept constant. It is seen in Figure 4b that only loose aggregation ( $\epsilon_a = 0.8$ ) gives a dimensionless energy rate smaller than one. In Figure 4a the corresponding dimensionless slip velocity is around one. In other words, big and tight aggregates increase the energy rate and hence have no physical meaning.

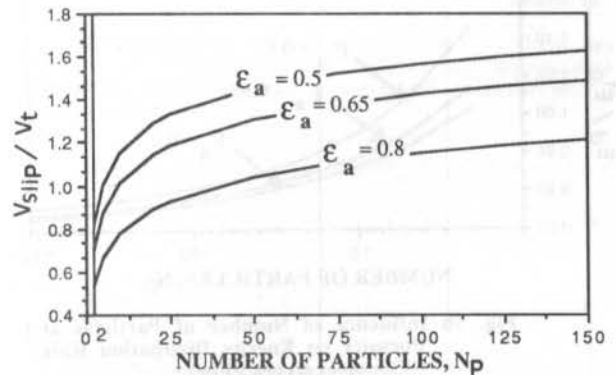


Fig. 4a Influence of Number of Particles and Porosity on Slip Velocity (Cocurrent Flow)

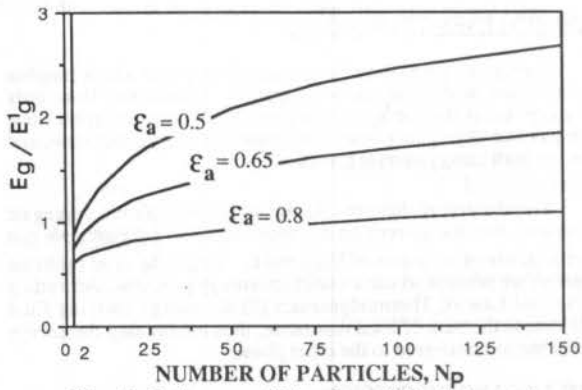


Fig. 4b Influence of Number of Particles and Porosity on Energy Dissipation Rate of Gas Phase (Cocurrent Flow)

steel spheres in air  
 $V_{gs} = 8.858$  m/s  
 $V_{ss} = 0.1457$  m/s  
 $N_g^1$  = energy dissipation rate of gas phase in dispersed system

Figure 3 shows that in countercurrent flow, there are usually two intersections between the momentum and continuity equations. Namely, one in the dilute region and the other in the dense region. Figure 3 and Figure 5 show that the intersection in the dilute region moves to the upper right corner for bigger and denser aggregates and thus have a smaller  $E_d$ . In the dense region, the tendency is the same as in the cocurrent flow.

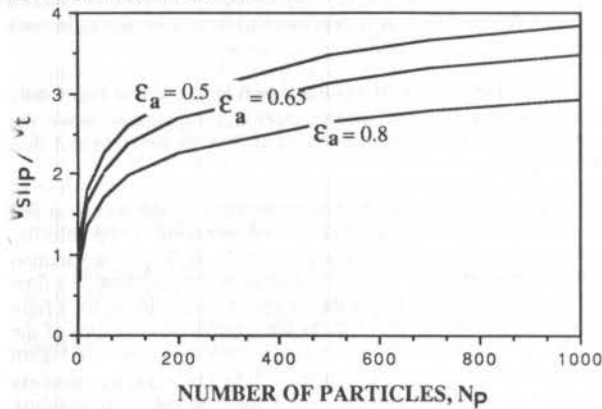


Fig. 5a Influence of Number of Particles and Porosity on Slip Velocity (Countercurrent Flow)

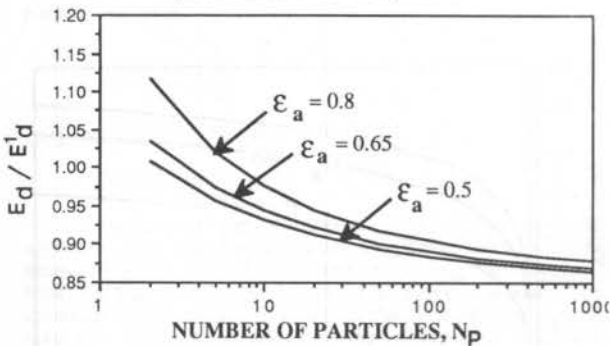


Fig. 5b Influence of Number of Particles and Porosity on Energy Dissipation Rate (Countercurrent Flow)

steel spheres in air  
 $V_{gs} = 1$  m/s  
 $V_{ss} = 0.02276$  m/s  
 $E_d^1$  = energy dissipation rate in dispersed system

Figure 5 shows the influence of the porosity,  $\epsilon_a$ , and number of particles,  $N_p$ , on the slip velocity  $V_{slip}$ , and on the energy dissipation rate. The latter is to be minimized in countercurrent flow. It is seen that denser and larger aggregates reduce the energy dissipation rate. There is a strong correlation with the number of particles  $N_p$ . The slip velocity,  $V_{slip}$ , in countercurrent flow is several times greater than the terminal velocity,  $V_t$ , of a single particle. This explains the long clusters seen falling down the fast fluidized bed walls, which is a localized countercurrent flow region. The back mixing of these dense and fast moving clusters makes the cross section average slip velocity much higher than the terminal velocity.

For the flow of steel spheres in air under conditions similar to those used in the present study, Ravisankar and Smith [6] measured high slip velocities for countercurrent flow of steel spheres in air. They changed  $V_{gs}$  and fixed  $V_{ss}$  and obtained a  $(V_{slip} / V_t)$  vs  $(1 - \epsilon_0)$  curve, where  $V_t$  is the terminal velocity of a single particle. The curves showed  $(V_{slip} / V_t)$  increasing from one to four as the solid concentration  $(1 - \epsilon_0)$  increased from very dilute to 4%. The calculation results, Figure 5, confirm Ravisankar's data, since higher solid concentration in the dilute region gives more chance for particles to form bigger aggregates and hence, increased slip velocities.

## CONCLUSIONS

The mathematical model based on the aggregate formation theory [2] makes it possible to study the effect of aggregate formation on energy dissipation and slip velocity of the system. More experimental data is required to prove the minimum energy principle. Nevertheless, the present calculation and analysis show good agreement with available experimental data.

In cocurrent flow there will be small and loose aggregates. This causes their slip velocity to be close to the terminal velocity of single particles. Thus, the assumption of fully dispersed system usually used in most numerical calculations gives satisfactory results.

In countercurrent flow, eg. in fast fluidized bed, near the wall region, long and dense clusters were observed going downward forming a local countercurrent flow. That is, in countercurrent flow we expect long and dense aggregation while in cocurrent flow, we expect small and loose aggregation.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The financial assistance provided by the National Sciences and Engineering Council of Canada is gratefully acknowledged.

## REFERENCES

- [1] J. Yerushalmi and N. T. Cankurt, Further Studies of the Regimes of Fluidization. *Powder Tech.*, 24: 187-205 (1979).
- [2] A. M. Al Taweel, J. Militzer, J. M. Kan and F. Hamdullahpur, Motion of Hydrodynamic Aggregates. Submitted to *Powder Tech.*; under review.
- [3] W. C. Yand, Criteria for Choking in Vertical Pneumatic Conveying Lines. *Powder Tech.*, 35: 143-150 (1983).
- [4] L. G. Gibilaro, R. Di Felice, S. P. Waldram and P. V. Foscolo, Generalized Friction Factor and Drag Coefficient Correlations for Fluid-Particle Interactions. *Chem. Eng. Science.*, Vol 40, No. 10, 1817-1823 (1985)
- [5] A. J. Stepanoff, Pumps and Blowers, Two-Phase Flow. John Wiley and Sons, Inc. p. 79 (1965).
- [6] S. Ravisankar and T. N. Smith, Slip Velocities in Pneumatic Transport. *Powder Tech.*, 47: 167-177 (1986).

A PSEUDO-LAGRANGIAN SOLUTION FOR THE KINETIC COAGULATION EMPLOYING SHAPE-PRESERVING SPLINES



EMANUEL ROCHA WÓJSKI  
 Deptº Eng. Mecânica - Faculdade de Engenharia - FEIS  
 Av. Brasil Centro, 56  
 15378 - Ilha Solteira - SP

ABSTRACT

A pseudo-Lagrangian model for coagulation is developed, employing a special coordinate transformation onto the classical kinetic coagulation equation, in order to solve some problems arising from the fixed size-class approach. A numerical formulation using osculatory quadratic splines on finite elements is presented. For some special kernels, the results from the model are shown to compare very well with some analytic and numerical solutions.

THE PSEUDO-LAGRANGIAN MODEL

In this Section, we define and discuss a special coordinate transformation onto the classical coagulation equation, leading to the so-called pseudo-Lagrangian models and their simplifications.

Let us consider the kinetic equation [1]:

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = - \int_0^v K(v,u) f(v,t) f(u,t) du + \frac{1}{2} \int_0^v K(v-u,u) f(v-u,t) f(u,t) du. \quad (1)$$

Now let us define the parametric transformation

$$v = v(v_0, t) \quad (2)$$

specified by the expression

$$\frac{\partial v(v_0, t)}{\partial t} = \int_0^v K(v(v_0, t), u) f(u, t) dt \quad (3)$$

In terms of the differential of  $v$  in (2), we write

$$dv = \frac{\partial v(v_0, t)}{\partial v_0} dv_0 + \frac{\partial v(v_0, t)}{\partial t} dt \quad (4)$$

Now, consider the distribution density function  $f(v,t) = f(v(v_0, t), t) = f^*(v_0, t)$ , in terms of differentials

$$df = \frac{\partial f(v,t)}{\partial v} dv + \frac{\partial f(v,t)}{\partial t} dt \quad (5)$$

First substitute (4) in (5), then consider  $v_0$  as constant. Finally, substitute the expressions (1) and (3), in order to get

$$\frac{\partial f^*(v_0, t)}{\partial t} = - \int_0^v (K(v(v_0, t), u) f(v(v_0, t), t) f(u, t) du + \frac{1}{2} \int_0^v K(v(v_0, t) - u, u) f(v(v_0, t) - u, t) f(u, t) du +$$

$$\int_0^v K(v(v_0, t), u) (\frac{\partial f(v,t)}{\partial t}) f(u, t) u du \quad (6)$$

Differentiating (3) with respect to  $v_0$  and with a little help from a Leibniz-type formula [2], we can show that the transformation (2) is invertible, i.e. one-to-one.

We rearrange (6) into the form

$$\frac{\partial f^*(v_0, t)}{\partial t} = - \int_0^v K(v(v_0, t), u) f(v(v_0, t), t) f(u, t) du + I(v(v_0, t), t) \quad (7)$$

where

$$I(v(v_0, t), t) = \int_0^v \{ \frac{1}{2} K(v(v_0, t) - u, u) f(v(v_0, t) - u, t) + K(v(v_0, t), u) [ \frac{\partial f(v(v_0, t), t)}{\partial v} u - f(v(v_0, t), t) ] f(u, t) du \quad (8)$$

In particular, if one assumes  $I(s,t) = 0$  for any  $(v_0, t)$ , it is possible to obtain an approximate continuous pseudo-Lagrangian model for coagulation, in the form of the system

$$\frac{\partial f(v(v_0, t), t)}{\partial t} = \int_0^v K(v(v_0, t), u) f(v(v_0, t), t) f(u, t) du \quad (9)$$

$$\frac{\partial v(v_0, t)}{\partial t} = \int_0^v K(v(v_0, t), u) f(u, t) u du \quad (10)$$

Pseudo-Lagrangian models, frequently cited in the Russian Literature, are apparently due to Sternin (Palatnik & Azhibekov) [3], although Tolfo [4] has attributed to Fuchs and Sutugin [5]. He has observed that the approximate pseudo-Lagrangian description could be useful for the cases in which the distributions are neither too concentrated in few

classes nor the coagulation kernels too large.

Replacing the equation (1) by the system (9) and (10) offers some advantages for coagulation calculations. It can be seen that not only the total mass is conserved throughout, but its allocation to each class is determined by the process itself. In fact, one may interpret those equations as if following the evolution of particles with given initial volume, whose number concentration decreases by absorption by the larger particles, and whose volume increases by absorbing the smaller ones (hence the name pseudo-Lagrangian description).

Even though the system (9) and (10) is inherently approximate, the newly developed system formed by the equations (3) and (6) is exact and retains most of the features of the more simplified approach. Its extra terms, however, seem to introduce considerable difficulty into its solution. A numerical solution for the complete system employing splines on finite elements is analysed in the next Section.

#### A NUMERICAL FORMULATION FOR THE MODEL

In the system (3) and (6) the quadratures must be evaluated using variable and unequal width intervals between each two points (classes), although the number of classes is fixed and defined by the discretized initial distribution. We discretize the initial number density distribution  $f_0(v)$ , such that we are allowed to attribute the  $i$ -class to  $v_{i-1}$  without any ambiguity. We assume also that  $p$  classes can adequately "cover" the initial number distribution. Substituting the integrals by quadratures, we replace our system of two integro-partial differential equations by an initial-value system of nonlinear ordinary differential ones.

Most finite difference schemes (with respect to volume) imply some arbitrary assumptions on the particle distribution within a class and on the outcome of each coagulation, which becomes clear not only from simple schemes, such as William's [6], but also from more sophisticated ones, such as Bleck's [7]. In order to represent exactly a distribution, the number of classes in a finite-difference scheme must be very large. In addition, substantial errors might appear due to the finite representation of the integral terms (finite domain errors). In order to allow for the unequal intervals and to avoid the troublesome aspects previously discussed, we decided on a finite-element scheme, in which the number density function is replaced by splines defined on each interval  $(v_i, v_{i+1})$ . We describe next an approach based on a very special spline.

#### THE SHAPE-PRESERVING QUADRATIC SPLINES

Shape-preserving quadratic splines are based on a remarkable property of the quadratic Bernstein polynomials. For a continuous function  $f$  defined in the interval  $[0,1]$ , without loss of generality, the Bernstein polynomial of  $n$ -order is defined by [8]

$$B_n(f) = \sum_{k=1}^n f(k/n) P_{n,k} \quad (11)$$

with

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (12)$$

Therefore, the quadratic polynomial is

$$B_2(f) = f(0) (1-x)^2 + 2f(1/2) x (1-x) + f(1) x^2 \quad (13)$$

Hence we are able to conclude that not only  $B_2(f)$  preserves the shape of  $f$ , but it has a continuous first derivative on  $[0,1]$ , while  $f(x)$  does not. Using this property, we construct a piecewise-linear function  $f$  in  $[0,1]$ , which has slope  $M_1$  at 0 and  $M_2$  at 1, and such that the interval  $[0,1]$  can be partitioned into subintervals in such way that the piecewise-quadratic polynomial  $S$ , satisfying  $S = B_2(f)$  on each subinterval, is a quadratic spline  $S_2$ . Of course, there are many possibilities for partitioning the interval  $[0,1]$ , and consequently such splines are unique only upon the partition. The following algorithm, from [9], offers just one solution.

Let us consider as given the pairs of data  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , strictly increasing  $x$ , and the slopes  $M$  at  $x$  (Figure 1).

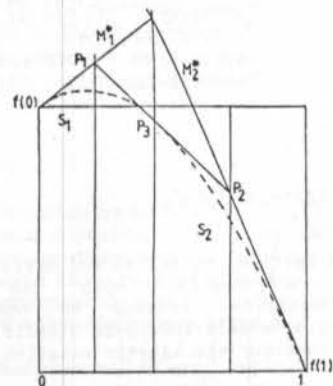


Figure 1. The scheme for the determination of the quadratic splines for each normalized interval  $[0,1]$ .

Upon the normalization variable  $r$ , and after some easy calculations, the expressions for the normalized quadratic splines become

$$(a) \text{ if } r \leq r_0 : q = r/r_0,$$

$$s(q) = y_1 (1-q)^2 + 2 P_1 q (1-q) + P_3 q^2 \quad (14)$$

$$(b) \text{ if } r > r_0 : q = (r - r_0)/(1 - r_0),$$

$$S(q) = P_3 (1-q)^2 + 2 P_2 q (1-q) + y_2 q^2 \quad (15)$$

with

$$P_1 = 1/2 M_1^* r_0 + y_1,$$

$$P_2 = 1/2 M_2^* (r_0 - 1) + y_2,$$

$$P_3 = P_1 - r_0 (P_1 - P_2).$$

The slope at an interior point is determined using the two neighbouring data points, while at an endpoint, the two points immediately preceding (or succeeding) it. Let us define  $S$  as

$$S_i = (y_i - y_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}), \quad i = 2, \dots, N \quad (16)$$

Consider an interior point  $i$ ,  $1 < i < N$ . If  $S_{i+1} < 0$ , then we set  $M_i = 0$ . Otherwise, let



$$M_i = 2 S_i S_{i+1} / (S_i + S_{i+1}). \quad (17)$$

As for the endpoints, we have two cases to be considered:

(a)  $i = N$ :

if  $S_{N-1} S_N < 0$  then  $M_N = 2 S_N$ . Otherwise, let

$$M_N = 2 S_N - M_{N-1}. \quad (18)$$

(b)  $i = 1$ :

if  $S_2 S_3 < 0$  then  $M_1 = 2 S_2$ . Otherwise, let

$$M_1 = 2 S_2 - M_2. \quad (19)$$

In the scheme above the derivatives are determined at once from the data, and the quadratic shape-preserving splines are calculated for each interval.

Now, we define

$$T = A N_0 t, \quad (20)$$

$$x = v/\bar{v}, \quad (21)$$

where  $\bar{v}$  is the mass average volume

$$\bar{v} = \int_0^\infty f(v,t) v dv / \int_0^\infty f(v,t) dv, \quad (22)$$

and  $A$  is a constant conveniently defined according to the kernel specification. For instance,  $A$  is proportional to  $v$  for the kernel proportional to the sum of volumes.

Finally we recast the system (3), (6), with the help of (12-19) into a nondimensional semi-discretized form on the finite-elements, where the integrals are to be replaced by quadratures for each interval between  $x_i$  and  $x_{i+1}$ , and the derivative by its spline counterpart for each  $x_i$ . There is one spline evaluation for the nondimensional number concentration density  $W$ , used for the interpolations at the intermediate values, in the integrands. Using a Lagrange interpolation formula [2], we obtain the Simpson's quadrature for unequal intervals. The system is now ready for the time integration.

#### THE TIME INTEGRATION

We perform the integration in time by means of a Runge-Kutta scheme, based on the calculation of a five-stage fourth-order formula  $y^{(4)}$ , using the first five  $K_i$  of a six-stage fifth-order method  $y^{(5)}$ . That procedure is known as Runge-Kutta-Fehlberg or RKF45 [10].

The local truncation error of the method is given by the absolute value of  $y^{(5)} - y^{(4)}$  and the relative error by

$$E_{R_j} = |y_j^{(5)} - y_j^{(4)}| / |y_j^{(4)}|, \quad y_j^{(4)} \neq 0. \quad (23)$$

and, based on the  $L_1$  Norm, we define the average error as

$$E_R = \sum_i E_{R_i} \quad (24)$$

as well as the maximum integration interval, which is duly normalized to 1. The step length is halved if  $E_{R_j}$  is less than or equal to  $E/(25h^{(4)})$  (because this is a fourth-order method) [10], where  $h^{(4)}$  is a fraction of the normalized full step. Additionally, in the case of  $h$  becoming smaller than a minimum (e.g.  $2^{-10}$ ), the procedure is halted and a warning is emitted.

The main advantages of the scheme above become apparent when one considers the fact that the coagulation is very fast at the beginning, slowing down as the total number concentration diminishes. All algorithms were coded in Standard Pascal, for microcomputer.

The numerical scheme for the coagulation problem in terms of the system (3) and (6) is next submitted to some tests.

#### TEST CASE 1: COMPARISON WITH ANALYTICAL SOLUTIONS

Classic analytical results were developed by Scott [11], although these are subject to some limitations exposed by Drake [1]. Employing Laplace transforms, Scott evaluated the infinite series solutions for three special kernels: constant, proportional to the sum of volumes, and proportional to the product of volumes, for the following family of initial conditions:

$$W_0(x) = [(s+1)^{-(s+1)} / \Gamma(s+1)] x^s e^{-x^{s+1}} \quad (25)$$

with

$$W_0(x) = (\bar{v}/N_0) f_0(v), \quad (26)$$

$$x = v/\bar{v}, \quad (27)$$

where  $s$  is a positive real number,  $N_0$  is the initial total number concentration of particles,  $\bar{v}$  is the initial mass average particle size (or volumes),  $f_0(v)$  is the initial number distribution as a function of particle volume  $v$ , and  $\Gamma(y)$  is the Gamma function.

Figure 2 shows at the selected time intervals of 100, 200 and 1000 seconds, the analytical and numerical solutions for constant kernel and  $s = 0$  (exponential) for the number density.

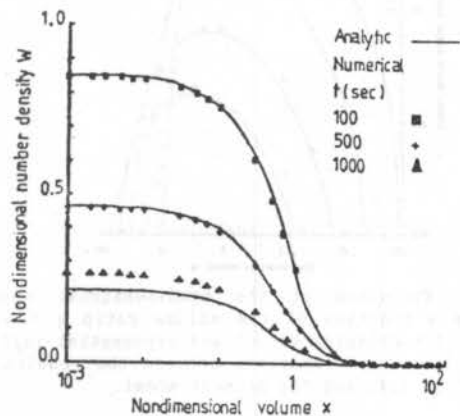


Figure 2. Evolution of the nondimensional number density as a function of the volume ratio  $x = v/\bar{v}$ , with time, for constant kernel and initial condition  $s = 0$  in the equation (25). Comparison between the analytic solution [11] and the present model.



The analytical results for the total number concentration are, for constant kernel, given by

$$N(T)/N_0 = 2/(T + 2), \quad (28)$$

We have used Scott's data [11] for the results in Figure 2, i.e.  $d = 20 \mu\text{m}$ , and coefficients  $b_0$  and  $B$  such that, for constant kernel

$$T = 0.0429 t. \quad (29)$$

Gelbard [12] has presented a numerical method based on orthogonal collocation on finite elements [13], for exponential initial distribution ( $s = 0$ ) and the same kernels we have been discussing. Unfortunately, his results are presented in such a way that is not possible to observe the detailed behaviour of the tail end of the distributions, although we can safely say that the results using the present (nonoptimal) model are at least as good as the ones in [12].

#### TEST CASE 2: COMPARISON WITH A NUMERICAL SOLUTION

A somewhat more realistic situation was the object of discussion in [14], in which the Brownian kernel for  $Kn \ll 1$  was used:

$$K(x,y) = 2 + (x/y)^{1/3} + (y/x)^{1/3}. \quad (30)$$

In [14], one representative of the Method of Residuals (orthogonal collocation) [13] was implemented into a perturbation solution for the "approximate problem" (constant kernel).

The comparison between the results using [14] and our model for exponential initial condition can be examined in Figure 3.

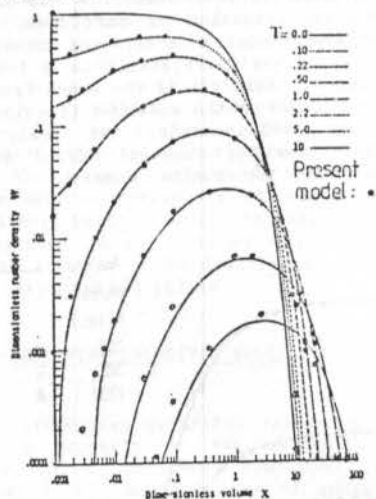


Figure 3. Evolution of the nondimensional number density as a function of the volume ratio  $x = v/v_0$  with time, for Brownian kernel and exponential initial condition ( $s = 0$ ). Comparison between the results by the method in [14] and the present model.

We have superimposed the results from the present model onto the curves presented in [14], since the actual data was not available. Even considering those limitations, there is a very good agreement between the "dots" and the curves, at least up to  $T = 10$ , resulting in a reduction in the total number concentration to a few percent of  $N$ .

#### CONCLUSION

Either for analytical solutions or numerical ones, for kernels as distinct as constant and Brownian, the quality of the comparisons attested by the Figures 2 and 3 is quite remarkable.

#### REFERENCES

- [1] Drake, R. L., A general mathematical survey of the coagulation equation, in Topics in Current Aerosol Research (Part 2), vol.3, eds. G. M. Hidy and J. R. Brock, Pergamon Press, (1972).
- [2] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., eds. Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York, (1972).
- [3] Palatnik, I. B. and Azhibekov, A. K., Calculation of kinematic coagulation of an aerosol in a variable-seed gas stream, Journal of Engineering Physics, vol.35, pp. 1225-1230, (1979).
- [4] Tolfo, F., A simplified model of aerosol coagulation, J. Aerosol Sci., vol.8, pp. 9-19, (1977).
- [5] Sutugin, A. G. and Fuchs, N. A., Formation of condensation aerosols under rapidly changing environmental conditions, Aerosol Science, vol.1, pp. 287-293, (1970).
- [6] Williams, J. E. and Crane, R. I., Drop coagulation in cross-over pipe flows of wet steam, J. Mech. Engng. Sci., vol.21, No.5, pp. 357-360, (1979).
- [7] Bleck, R., A fast, approximative method for integrating the stochastic coalescence equation, J. Geophys. Res., vol.75, No.27, (1970).
- [8] Berens, H. and Devore, R., A characterization of Bernstein polynomials, in Approximation Theory III, E. W. Cheney, ed., Academic Press, (1980).
- [9] McAllister, D. F. and Roullet, J. A., An algorithm for computing a shape-preserving oscillatory quadratic spline, ACM Trans. Math. Softw., vol.7, No.3, pp.331-347, (1981).
- [10] Atkinson, L. V. and Harley, P. J., An introduction to numerical methods with Pascal, Addison-Wesley, (1983).
- [11] Scott, W. T., Analytic studies of cloud droplet coalescence I, J. Atmos. Sci., vol.25, pp. 55-65, (1968).
- [12] Gelbard, F. and Seinfeld, J. H., Numerical solution of the dynamic equation for particulate systems, J. Comp. Phys., vol.28, pp. 357-375, (1978).
- [13] Finlayson, B. A., Weighted residual methods and their relation to finite-element methods in flow problems, in Finite Elements in Fluids, vol.2, eds. R. H. Gallagher, J. T. Oden, C. T. Taylor and O. C. Zienkiewicz, Wiley, (1975).
- [14] Sampson, K. J. and Ramkrishna, D., A new solution to the Brownian coagulation equation through the use of root-shifted problem-specific polynomial, J. Colloid Interface Sci., vol.103, No.1, pp. 245-254, (1985).



## AERODINÂMICA EXPERIMENTAL: TÚNEIS DE VENTO

SIMPLIFIED ANALYSIS OF THE FLOW IN A TRANSONIC WIND  
TUNNEL TEST SECTION WITH VENTILATED WALLS

J. P. C. ESCOSTEGUY and M. A. ORTEGA  
CTA / IPD / GTTS  
12.225 - São José dos Campos - SP

ABSTRACT

A simplified one-dimensional model of the flow inside a transonic test section with ventilated walls is presented, taking into account the mass exchange through the walls, a cross-sectional area variation, and friction. The boundary conditions at the walls are considered to be homogeneous, as in the classic wall interference theory, and the wall behaviour is described by a linear cross-flow characteristic. The results yielded by the model correctly predicted the main features of the flow development.

Shortly after the end of the Second World War, the advent of ventilated-wall transonic wind tunnels provided the scientific and industrial community with the needed data about the flight behaviour of aircrafts operating near the sonic velocity [1]. Since that time, much knowledge has been gained in the understanding of the different factors affecting the flow in such tunnels, specially in terms of the wall-interference phenomena.

Methods of wall interference correction can be classified in two distinct groups:

(i) 'Simplified' procedures, ranging from one-dimensional analyses [2] to sophisticated computational algorithms [3] [4], having in common the fact of using the classic theory of wall interference, which represents the wall by an homogeneous boundary condition;

(ii) Detailed procedures, using boundary conditions measured during the tests to obtain an equivalent geometric model, which represents the actual one, including viscous effects. Such equivalent model is, then, used as an input in non-linear transonic computer codes, determining its behaviour in free flight [5] [6].

The method presented herein may be classified as belonging to the first group above, representing an extension of existing one-dimensional methods, allowing a first estimate of viscous effects.

FORMULATION

Statement of the Problem. The establishment of a uniform flow in the test section of a transonic wind tunnel is accomplished by the combination of a number of factors [2]. In general, the two most important ones are: (i) wall ventilation, usually with an auxiliary compressor-driven evacuation system; (ii) wall inclination. Therefore, the main objective in this paper is to model the flow in an empty passage (no model),

with mass exchange through the walls, cross-sectional area variation, and friction.

Basic Equations. Air, considered as a perfect gas with constant specific heats, flows along a duct with cross-sectional area variation. Throughout the passage, there is an exchange of mass between the main current in the test section and an adjacent plenum chamber. This is represented in Figure 1.

The flow is considered to be one-dimensional. Using the continuity, momentum and energy equations, together with some auxiliary relations, one gets to the following expression:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{M^2-1} \frac{dm}{m} - \frac{\gamma M^2}{M^2-1} \frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2 (1 + (\gamma-1) M^2)}{2 (M^2-1)} \frac{4f}{H} \frac{dx}{H} \quad (1)$$

which gives the relationship among the variation of the static pressure,  $p$ , and the influence factors, namely, mass exchange,  $dm/m$ , cross-sectional area variation,  $dA/A$ , and friction,  $4f dx/H$ . In the above equation,  $M$  represents the Mach number and  $\gamma$  the relation between specific heats. The local wall cross-flow per unit area is indicated by  $m_x$  (outflow being positive), and, thus:

$$dm = -m_x dA_L \quad (2)$$

where  $A_L$  is the test section lateral area.

One of the main problems preventing the integration of equation (1) is the modeling of the influence factor  $dm/m$ . As it will be shown later, this factor is usually expressed in terms of the pressure loss that the flow experiences when crossing the walls. This pressure loss, which is the difference between the static pressure levels in the test section and in the plenum chamber, is strongly dependent upon the kind of ventilated wall being used.

Another equation, allowing the solving of the problem, is that which describes the ventilated wall behaviour. In the present analysis, it was decided to use the classic theory of wall interference, in order to keep the equations as simple as possible. The boundary conditions imposed by the presence of the walls are taken as homogeneous throughout the test section, creating the figure of the 'equivalent homogeneous wall'. This assumption yields satisfactory results in describing the flow not near the wall, where the individual influence of each wall opening is not felt.

Furthermore, the following hypotheses were made.

(i) Ventilated walls with linear cross-flow versus differential-pressure relationship. Such behaviour is characteristic of perforated walls with small viscous effects (thin boundary layer, when compared with a typical length in the test section, specially the diameter of the wall openings). Thus, one can write:

$$\frac{\Delta p}{q_{\infty}} = K \frac{m_x}{(\rho u)_{\infty}} \quad (3)$$

where  $\Delta p$  is the difference between the static pressure in the test section and in the plenum chamber,  $q_{\infty}$  is the dynamic pressure at the test section entrance,  $m_x$  is the mass flow per unit (lateral) area passing through the wall, and  $(\rho u)_{\infty}$  is the mass flow per unit (cross-sectional) area at the test section entrance.

The wall constant  $K$  may be obtained from a non-viscous simplified analysis, using the Prandtl-Glauert small perturbation approach to the compressible flow [2], resulting in the expressions listed below, which apply to thin walls with small open-area ratio:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \frac{4}{\pi} \frac{1}{R} \quad (\text{subsonic flow}), \quad (4)$$

$$K = \frac{2}{\sqrt{M^2-1}} \left( \frac{1}{R} - 1 \right) \quad (\text{supersonic flow}), \quad (5)$$

where  $R$  is the wall open-area ratio.

When the above equations do not apply, as in the case of testing models near the sonic condition or in special wall configurations (e.g., with inclined holes), care must be taken in using values of  $K$  derived from experiments. If the wall characteristic is not linear (equation (3) does not hold true), a numerical solution for the problem may still be obtained, using the actual wall behaviour.

(ii) Test section with square cross-section and infinite length.

(iii) All walls converged/diverged by the same amount.

When these hypotheses are used, equation (1) becomes:

$$\frac{dm_x}{d(x/H_0)} = \frac{8p}{u_{\infty}} \frac{\gamma M^2}{K(M^2-1)} \left[ -\frac{m_x}{\rho u \cos \theta} - \text{tg } \theta + (1+(\gamma-1)M^2) \frac{f}{2} \right], \quad (6)$$

where  $\theta$  is the divergence angle of the walls, and  $H_0$  is the test section height at its entrance.

This equation may be solved numerically, subjected to the initial condition:

$$m_{x_0} = \frac{\Delta p_0}{q_{\infty}} \frac{(\rho u)_{\infty}}{K}, \quad (7)$$

where  $\Delta p_0$  is the static pressure difference between the flow entering the test section and the air in the plenum chamber.

## RESULTS

Figure 2 shows the results obtained with 22 %-open parallel walls, not taking into account friction losses. Two different cases are presented, corresponding to the subsonic and supersonic regimes. The initial conditions were set as to give the indicated overall mass flow extraction from the test section. It is interesting to note that the influence of the mass extraction is felt mainly in restricted regions of the test section length. For the subsonic case, only the downstream stations are affected, whereas with supersonic conditions only the upstream ones are. One important conclusion that can be drawn from these results is that the mass flow extraction alone is not sufficient to permit an effective boundary layer control throughout the test section. The capability of influencing the boundary-layer growth is of paramount

importance in reducing wall interference problems [2].

Figure 3 illustrates the influence of varying the wall setting. The overall mass flow extraction is kept constant and friction losses are not computed. It can be seen that a small convergence is sufficient to establish a nearly constant outflow along the test section length. Thus, the variation of the wall inclination, together with a proper overall mass flow extraction, becomes an effective way of influencing the boundary-layer behaviour in transonic wind tunnel testing. Figure 4 presents the same results in the form of Mach number distribution. It is significant that a correct positioning of the walls greatly improves the flow quality, reducing the axial velocity variation from a nominal condition.

Figure 5 demonstrates that the influence of friction is felt in a similar manner as that of having a wall convergence. It is apparent from Figure 6 that there is a necessity of having a mass flow extraction from the test section in order to prevent the choking of the stream. This result, which is supported by experimental data, was not foreseen by the friction-free one-dimensional analysis presented in [2].

**CONCLUSION**

The study presented herein, in spite of its simplicity, is of great value in understanding the complex phenomena that occur in a ventilated test section. The main aspects, the ones that define a proper setting of the walls, are all represented in the model, which, then, becomes of great help to the wind tunnel practicing engineer.

**REFERENCES**

[1] BECKER, John V. - The High-Speed Frontier, NASA-CP-445, 1980.  
 [2] GOETHERT, Bernhard H. - Transonic Wind Tunnel Testing, Pergamon Press, 1961.  
 [3] BERNDT, Sune B. - Inviscid Theory of Wall Interference in Slotted Test Sections, AIAA Journal, 15: 1278-1287 (1977).  
 [4] SEDIN, Yngve C.J. & SORENSEN, Hans - Computed and Measured Wall Interference in a Slotted Transonic Test Section, AIAA Journal, 24: 444-450 (1986).  
 [5] RIZK, Magdi H. & MURMAN, Earll M. - Wind Tunnel Wall Interference Corrections for Aircraft Models in the Transonic Regime, Journal of Aircraft, 21: 54-61 (1984).  
 [6] KEMP, William B. Jr. - Computer Simulation of a Wind Tunnel Test Section With Discrete Finite-Length Wall Slots, NASA-CR-3948 (1986).

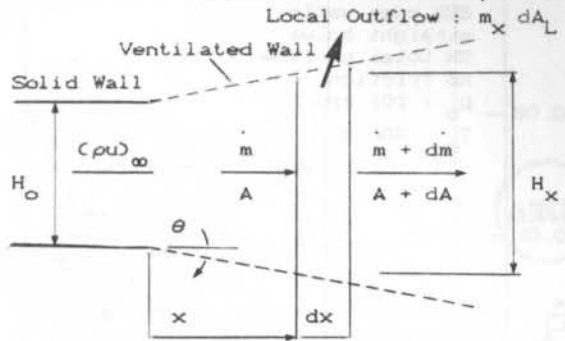


Figure 1 - Basic Configuration

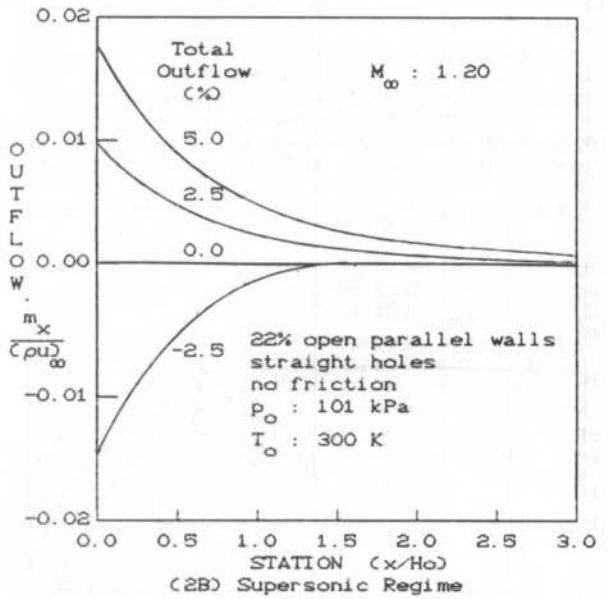
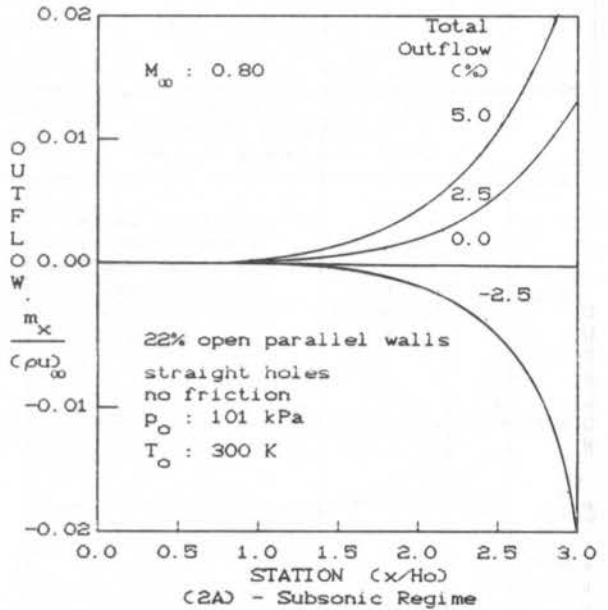
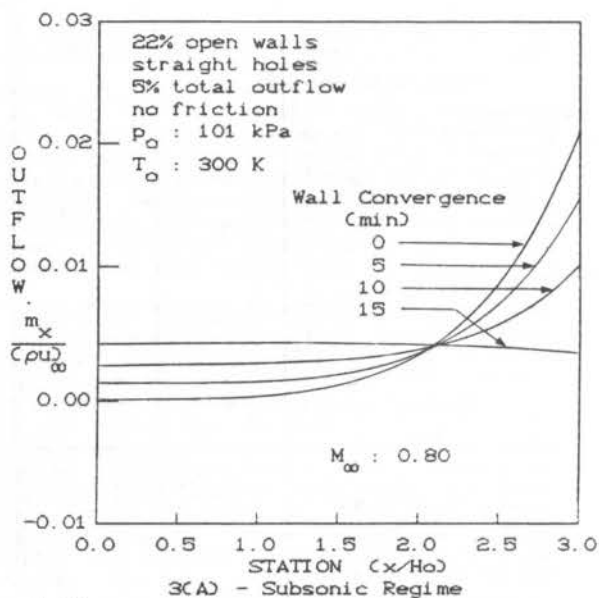


Figure 2 - Local Outflow on a Perforated Test Section





(3A) - Subsonic Regime

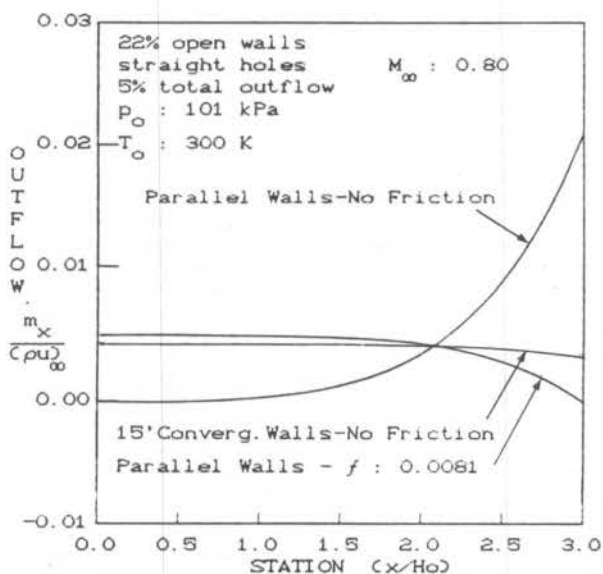
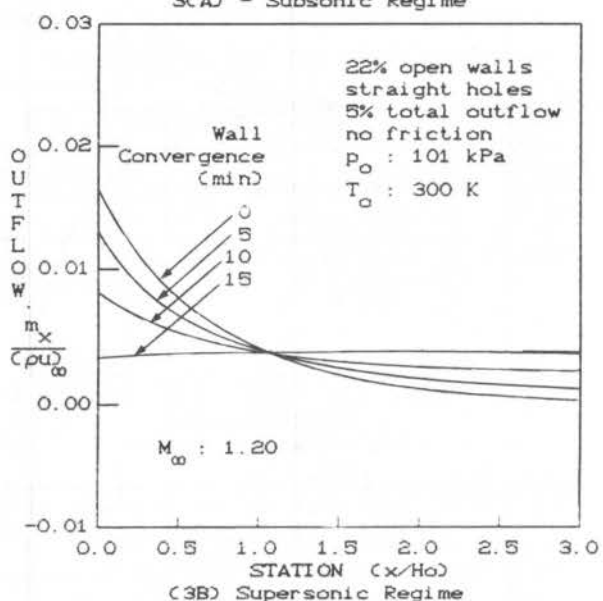


Figure 5 - Influence of Friction on the Local Outflow of a Perforated Test Section



(3B) Supersonic Regime

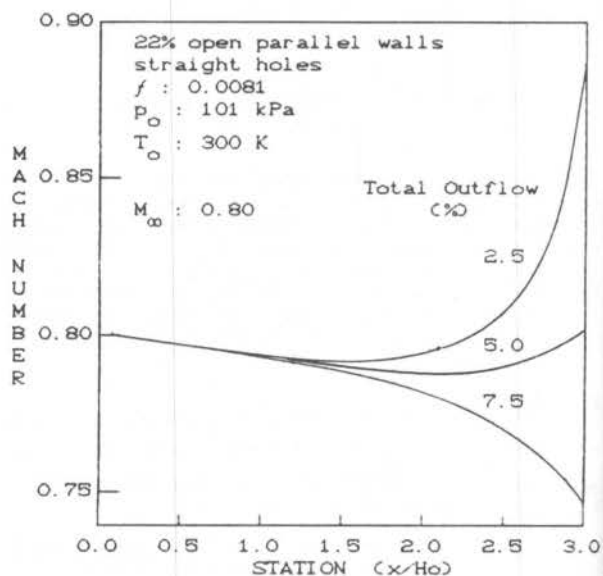


Figure 6 - Influence of Friction on the Mach Number Distribution of a Perforated Test Section

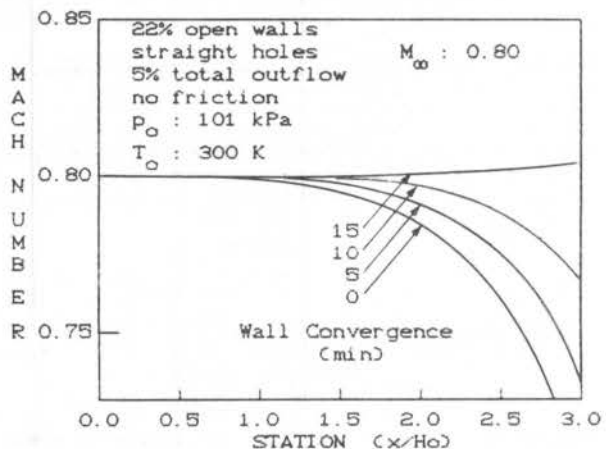


Figure 4 - Wall Convergence Influence on Mach

INJECTION OPTIMIZATION  
AND ITS APPLICATION TO WIND TUNNELS



S. L. NOGUEIRA, M. A. ORTEGA, J. B. P. FALCÃO, N. G. C. R. FICO Jr.,  
CTA / IPD / GTTS  
12.225 - São José dos Campos - SP

ABSTRACT

The process of injection, as applied to a wind tunnel, is considered. The dissipative effects in the mixing region can be classified as "internal", due to the shear layer between the two jets, as well as "external", due to the friction on the walls and, eventually, the drag of immersed bodies. The aim of this work is to use optimization techniques to analyse the injection process taking into account all possible kinds of dissipative effects.

INTRODUCTION

The result of injecting a high-speed current of gas in the main stream of a wind tunnel is a gain on the stagnation pressure of the main stream. This is a very desirable effect when one is interested in expanding the Reynolds number range of a continuous wind tunnel, without augmenting the fan power.

Studies of injection processes when applied to wind tunnels, especially when transonic, are rather scarce. The number of parameters which interfere in the mixing phenomenon is great and an optimization approach seems to be appropriate. The irreversibilities in the mixing region inside a wind tunnel are due mainly to two causes. Firstly, there is dissipation in the mixing process itself, a cause one could call "internal" (see Fig.1). Secondly, there is friction between the streams and the wind tunnel walls, and, eventually, drag of immersed bodies, that could be called "external". In design and in the computation of wind tunnel pressure losses both causes are important. Carriere [1] and Mignosi et al [2] made an attempt towards an optimization of the injection parameters. Nevertheless, this author took in account only internal dissipation.

The aim of this work is to apply optimization principles to the study of the injection process, considering both causes of dissipation as well as others important aspects.

FORMULATION

Basic equations- The problem to be tackled is shown schematically in Fig. 1.

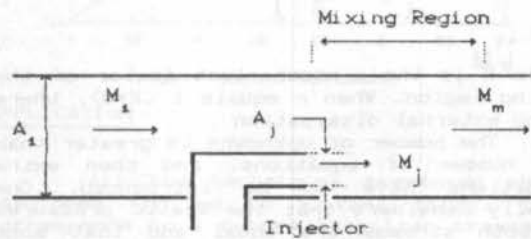


Figure 1 - Basic Configuration

A current of low-speed gas (indicated by subscript 1) is driven by the high speed of the injected stream (indicated by subscript j). In a transonic wind tunnel the high-speed current is almost always supersonic. During mixing, there occurs a fall in the stagnation pressure of the high speed stream and a raise in the stagnation pressure of the low speed stream. Our ultimate aim is to determine the best combination (if such "best combination" exists) of the parameters involved, in order to have the best compromise of highest raise in stagnation pressure of the main (low-speed) current.

The gas in both currents is air, considered as thermally and calorically perfect. The flow is considered as one-dimensional in the entrance (at least for each of the streams separately) and in the exit planes of the mixing region and the currents are taken as parallel. Under these conditions and assumptions, the basic equations of continuity, momentum and energy, together with some auxiliary relations, yield

$$\frac{P_1 M_1}{\sqrt{T_1}} + \tau \frac{P_j M_j}{\sqrt{T_j}} = (1 + \tau) \frac{P_m M_m}{\sqrt{T_m}} \quad (1)$$

$$P_i (1 + \gamma M_i^2) + \tau P_j (1 + \gamma M_j^2) = (1 + \tau) P_m (1 + \frac{\gamma M_m^2}{\sigma}) \quad (2)$$

$$T_{t_i} + \omega T_{t_j} = (1 + \omega) T_{t_m} \quad (3)$$

where  $P$  is static pressure,  $M$  is Mach number,  $T_t$  is stagnation temperature,  $\tau$  is the relation between cross-sectional areas,  $A_j/A_i$ ,  $\omega$  is the relation between mass fluxes,  $q_j/q_i$ ,  $\gamma$  is the relation between specific heats; the subscripts indicate: "i", the low-speed stream; "j", the high-speed stream; "m", conditions at the exit of the mixing region; The parameter  $\sigma$  is the one that carries the information about the external dissipative effects, and is defined by

$$\sigma = \frac{1}{\left[1 + \frac{K}{2}\right]} \quad (4)$$

where  $K$  is the pressure-loss factor of the mixing region. When  $\sigma$  equals 1 ( $K=0$ ), there is no external dissipation.

The number of unknowns is greater than the number of equations, and then extra conditions have to be introduced. One usually considers that the static pressures of both streams are equal and that some pre-fixed relation exists between the initial stagnation temperatures. Equality of static pressures is also important to avoid discontinuities, specially shocks.

Efficiency  $\eta$  as a function of entropy variation. In the course of calculations the efficiency  $\eta$  is obtained as a function of the injection process entropy variation. In this sense  $\eta$  turns out to be a "measure" of all the irreversibilities in the mixing region. The parameter  $\eta$  is defined as

$$\eta = - \frac{\Delta s_i}{\Delta s_j} \quad (5)$$

where  $\Delta s_i$  and  $\Delta s_j$  are the entropy variations in the mixing region, non-dimensionalized by the mass flux  $q_i$ .

Optimization approach. In practical terms one wishes to have maximized the relations  $A_i/A_j$ ,  $q_i/q_j$ ,  $\eta$  and  $P_{t_i}/P_{t_j}$ . It is apparent from Figs.(2),(3),(4), that the maxima of those parameters taken independently occur for different values of  $M_i$ . The idea then is to define an objective function that combines the parameters. Carriere [1] uses a variable defined by  $A_m q_m / A_j q_j$ . In this work, an objective function which considers all the main effects is introduced

$$f = \frac{(C_1 \bar{A})^2 + (C_2 \bar{q})^2 + (C_3 \bar{P})^2 + (C_4 \bar{s})^2}{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2} \quad (6)$$

where  $\bar{A}$  is  $(A_i/A_j)/(A_i/A_j)_{max}$ ,  $\bar{q}$  is  $(q_i/q_j)/(q_i/q_j)_{max}$ ,  $\bar{P}$  is  $(P_i/P_j)/(P_i/P_j)_{max}$ ,  $\bar{s}$  is  $(-\Delta s_i/\Delta s_j)/(-\Delta s_i/\Delta s_j)_{max}$ . Besides, Eq. (6) allows a normalized structure for the optimization.

## RESULTS

Starting with some pre-fixed conditions, that one can recognize as the design point, it is possible to solve numerically equations (1),(2),(3). Coupling this with the optimization technique some important parameters can be determined, as for example,  $M_m$ ,  $\tau$  and  $\omega$ . Figures (2),(3),(4) show some results of those calculations for  $\sigma$  equal to one, which reproduce perfectly the results of Carriere.

AREA RATIO -  $A_1/A_j$   
INJECTION GAIN = 1.08

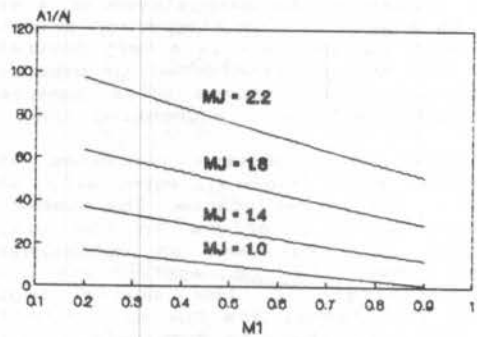


Figure 2 - Area ratio

MASS FLOW RATIO  $q_1/q_j$   
INJECTION GAIN = 1.08

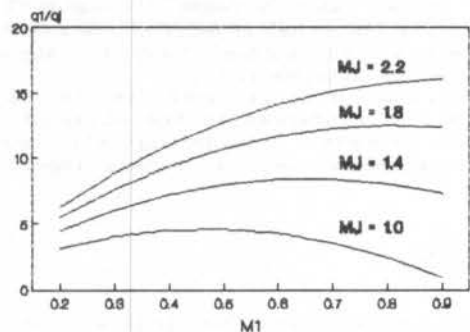


Figure 3 - Mass Flow Ratio

**STATIC PRESSURE RATIO -  $P_t/P_{t1}$**   
INJECTION GAIN = 1.06

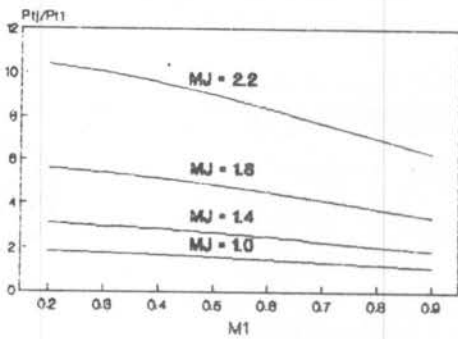


Figure 4 - Static Pressure Ratio

Fig. (5) shows curves of  $\eta$  as a function of  $M_1$  and  $M_j$ . Observe that as  $M_1$  tends to  $M_j$  (or vice versa),  $\eta$  tends to 1 also, what confirms the theoretical predictions (in this case  $T_{t1}/T_{tj}$  is considered equal to one). It is important to point out that the analysis based on entropy considerations introduced in this work is a novel feature, which had not appeared in the literature in the context of injection processes for wind tunnels.

**EFFICIENCY BASED ON ENTROPY VARIATION**  
INJECTION GAIN = 1.06

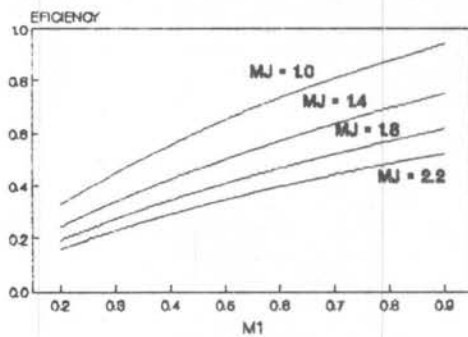


Figure 5 - Efficiency based on entropy

Plots of  $f$  (Eq.(5)) are shown in Fig.(6) for  $C_1=C_2=C_3=1$ ,  $C_4=0$  and  $\sigma=1$  (no external dissipation).

**OPTIMIZATION FUNCTION -  $f$**   
INJECTION GAIN = 1.06

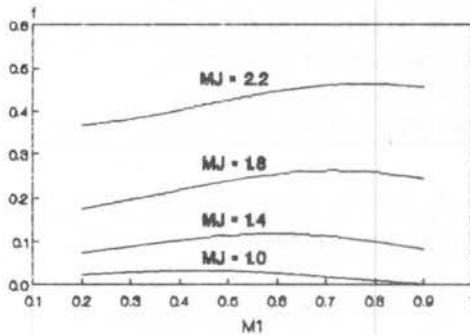


Figure 6 - Optimization Function

Observe that as  $M_j$  varies the point of maximum as a function of  $M_1$  moves to the right. Introducing the external dissipation (values of  $\sigma$  less than 1) the curves in the figure above are all shifted to the left. This is shown, in a slight different form, in Fig.(7), where one can see that as  $\sigma$  decreases (with increasing  $K$ ) the maxima of  $f$  occur for smaller values of  $M_1$ . This result has been verified experimentally by Carriere [1] without any theoretical explanation. Now, one can clearly see that this results from external dissipation effects.

**MAXIMUM VALUE LOCATION OF THE OPTIMIZATION FUNCTION**

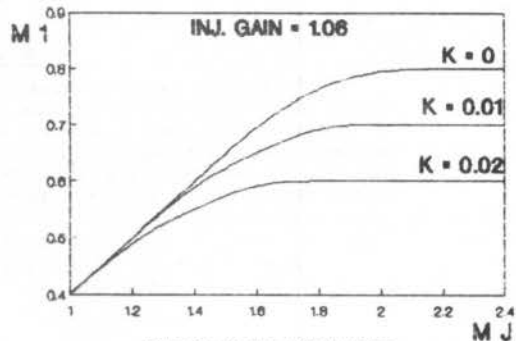


Figure 7 - Maximum Value Location

APPLICATION

All the techniques presented above has been applied to a case study. This corresponds to a future Brazilian transonic wind tunnel facility. In Fig.(8) an envelope for this case study is presented. The reduction of power is about 40% for the range covered in the figure. The appropriate use of injection in a wind tunnel can bring about then a great reduction in power reduction to the fan.

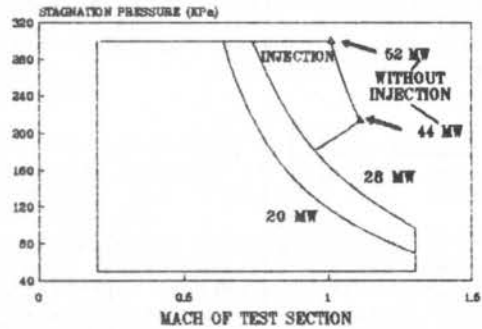


Figure 8-Brazilian Transonic Wind Tunnel

REFERENCES.

- [1] Carriere, P.- The Injector Driven Tunnel. Lectures series on Large Transonic Wind Tunnels, Von Karman Institute for Fluid Mechanics, Feb. 1973.
- [2] Mignosi, A.; Faulmann, D. and Seraudie, A. - La Soufflerie Transsonique a Induction T2, ONERA TP 1980-142, 1980.



OTIMIZAÇÃO NO PROJETO CONCEITUAL DOS RESERVATÓRIOS  
 PARA TÚNEL SUPERSÔNICO DE SOPRO

JOÃO B.P. FALCÃO F., SIDNEY L. NOGUEIRA  
 CTA - IPD - GTTS  
 S.J.CAMPOS, SP - tel (0123) 211311 R.3421

RESUMO

A expansão do ar dos reservatórios de ar comprimido de túneis intermitentes de sopro ("blowdown") passando por uma matriz de capacitâncias térmicas (feixe de placas metálicas) é modelada em análise unidimensional para a determinação do coeficiente politrópico equivalente do conjunto 'reservatório e matriz de capacitâncias térmicas' para levantamento dos principais parâmetros de projeto ótimo dos reservatórios (volume e quantidade de massas térmicas).

INTRODUÇÃO

Devido ao alto custo de instalação e operação de túneis supersônicos contínuos, nossa atenção é voltada para a solução intermitente que atende satisfatoriamente à maioria dos ensaios na faixa supersônica, sendo o túnel do tipo intermitente de sopro ("blowdown") o mais amplamente empregado pela simplicidade e baixo custo de operação e manutenção [1].

Num túnel intermitente de sopro ("blowdown") convencional o principal fenômeno envolvido é a queda de temperatura de estagnação do ar escoado dos reservatórios pela expansão politrópica ocorrida, com coeficiente compreendido entre o isotérmico e o adiabático,  $1 < n < 1.4$ , na equação que relaciona as temperaturas e pressões iniciais e finais do processo,

$$\frac{T_i}{T_f} = \left[ \frac{P_i}{P_f} \right]^{(n-1)/n} \quad (1)$$

A variação sofrida no número de Mach da seção de testes causada pela queda de temperatura durante o ensaio, representa a principal preocupação na determinação de critérios para a queda máxima de temperatura, sendo considerado aceitável para a maioria dos ensaios na faixa supersônica um valor de até 10 K.

Das soluções empregadas para minimizar estes efeitos a utilização de capacitâncias térmicas dentro do reservatório apresenta menor custo sendo objeto deste trabalho.

ESQUEMA FÍSICO

Na figura 1 vemos a disposição das capacitâncias térmicas ao longo do reservatório, que são feixes de placas metálicas igualmente espaçadas. Estão apontados na figura os principais parâmetros de projeto:

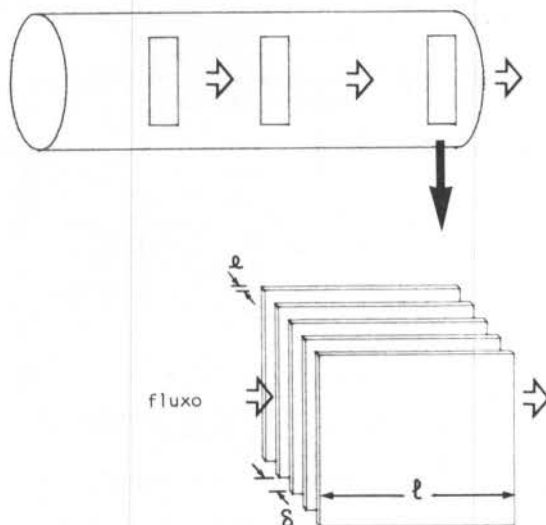


figura 1 : esquema físico

Espessuras típicas dessas chapas são de 0.5 mm a 2 mm e as distâncias entre chapas entre 0.5 mm e 3 mm, normalmente em aço carbono. O fluxo de massa será considerado constante durante o ensaio.

MODELAMENTO ATRAVÉS DA TRANFERÊNCIA DE CALOR

A taxa de calor transferido pelas placas metálicas para o ar por tempo (t) e por área (S), é dada por

$$q = h \cdot (T_m - T_a) \quad (2)$$

onde  $(T_m - T_a)$  é a diferença entre as temperaturas do metal e do ar, e h é o coeficiente de transferência de calor. Pela equação da conservação da energia podemos escrever



$$q \cdot S \cdot dt = M_a \cdot C_a \cdot dT_a \quad (3)$$

$$q \cdot S \cdot dt = -M_m \cdot C_m \cdot dT_m \quad (4)$$

onde  $M_a$  e  $M_m$  são as massas de ar e do metal envolvidas no processo de troca,  $C_a$  e  $C_m$  os calores específicos do ar e do metal, respectivamente.

Manipulando essas equações chegamos à forma seguinte:

$$q = \frac{M_a \cdot C_a}{S} \cdot \frac{dT_a}{dt} \quad (5)$$

$$q = -\frac{M_m \cdot C_m}{S} \cdot \frac{dT_m}{dt} \quad (6)$$

Considerando que

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot W \quad (7)$$

onde  $x$  é a distância ao longo do trocador e  $W = \partial x / \partial t$ , e impondo ainda que a transferência de calor por condução através da placa será desprezada, como também a transferência de calor entre as paredes do reservatório e o ar, e que  $C_a, C_m$  são invariantes no tempo, chegamos à forma final das equações,

$$\frac{\partial T_a}{\partial \bar{x}} = \frac{S \cdot h \cdot l}{M_a \cdot C_a \cdot W} \cdot (T_m - T_a) \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial \bar{t}} = -\frac{S \cdot h \cdot t}{M_m \cdot C_m} \cdot (T_m - T_a) \quad (9)$$

onde  $\bar{x} = x / l$  e  $\bar{t} = t / t_c$  ( $t_c$  é o tempo para descarga completa do reservatório).

A solução analítica desse sistema recai na determinação de equação diferencial hiperbólica, solucionável pelo método de integração de Riemann, não apresentando interesse prático. A solução numérica do sistema foi comparado com a solução analítica, apresentando erro de 1% no valor da temperatura do ar [3].

O sistema de equações em diferenças finitas toma a seguinte forma:

$$T_a [\bar{x} + \Delta \bar{x}, \bar{t}] = T_a [\bar{x}, \bar{t}] + \alpha \Delta \bar{x} [T_m [\bar{x}, \bar{t}] - T_a [\bar{x}, \bar{t}]] \quad (10)$$

$$T_m [\bar{x}, \bar{t} + \Delta \bar{t}] = T_m [\bar{x}, \bar{t}] + \beta \Delta \bar{t} [T_m [\bar{x}, \bar{t}] - T_a [\bar{x}, \bar{t}]] \quad (11)$$

onde

$$\alpha = C_f \cdot l / S \quad (12)$$

$$\beta = -(\rho W) \cdot C_a \cdot C_f \cdot t / C_m \cdot \epsilon \cdot l \quad (13)$$

obtidos a partir das constantes das equações (5) e (6), através da consideração da analogia de Reynolds para o escoamento entre as placas, onde podemos fazer

$$h = C_f \cdot C_a \cdot W / 2 \quad (14)$$

( $\rho$  é a densidade do ar). O coeficiente de atrito  $C_f$  para tubos lisos em regime turbulento pode ser aproximado do diagrama de "Moody" por:

$$C_f = \exp(.1142 - 2.293 \cdot \ln(\ln(Re))) \quad (15)$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds do escoamento considerando a dimensão  $2\delta$ , sendo  $\epsilon$  a densidade do metal (aço).

As condições de contorno são

$$T_a [\bar{x}, 0] = T_m [\bar{x}, 0] = T_i \quad (16)$$

$$T_a [0, \bar{t}] = T_i (1 - \bar{t})^{\gamma-1} \quad (17)$$

$$T_m [0, \bar{t} + \Delta \bar{t}] = T_m [0, \bar{t}] + \beta \Delta \bar{t} [T_m [0, \bar{t}] - T_a [0, \bar{t}]] \quad (18)$$

onde  $T_i$  é a temperatura inicial de equilíbrio térmico e  $\gamma = 1.4$  é o coeficiente isentrópico do ar.

## RESULTADOS

Foi elaborada rotina numérica com 30 intervalos em  $x$  e em  $t$ , que, com 6 iterações obtivemos erro de convergência menor que 1%.

Alocando uma matriz de capacitância térmica na saída do reservatório, com os principais parâmetros de projeto dados na Tabela 1, obtivemos a evolução de temperaturas ao longo do trocador como mostra a figura 2:

tabela 1: parâmetros de projeto

VOLUME DO RESERVATÓRIO .....	400 m3
PRESSÃO INICIAL .....	4000 KPa
FLUXO DE SAÍDA .....	250 Kg/s
ÁREA FRONTAL DA MATRIZ .....	8 m2
ESPESSURA DAS PLACAS .....	.001 m
DISTÂNCIA ENTRE AS PLACAS .....	.002 m
COMPRIMENTO DA MATRIZ .....	2 m
MATERIAL DO TROCADOR .....	aço-c
GTES CALCULADAS: $\beta = -5.90$ , $\alpha = 8.6$	

TEMPERATURA FINAL (K)  
 $T_i = 300 \text{ K}$

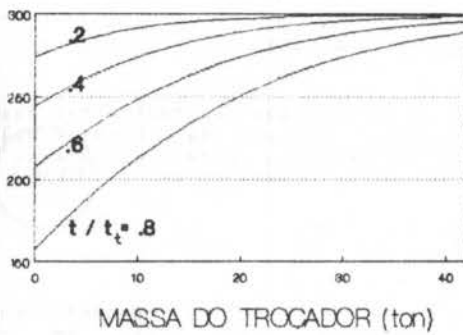


figura 2 : evolução da temperatura

Assim obtivemos na figura 3 a evolução do coeficiente politrópico equivalente para o conjunto 'reservatório e massas térmicas', para um fluxo de saída constante e variando a quantidade de massas térmicas. Este gráfico apresenta uma extensão dos conceitos apresentados na figura 2:2 de [2], que mostra a evolução para um reservatório sem massas térmicas, sendo as trocas de calor realizadas entre as paredes do reservatório e o ar, são apresentadas curvas de  $P_i/P_f$  obtidas através da variação do fluxo de saída, quando na maioria dos casos na prática impõe-se fluxo constante.

COEFICIENTE POLITRÓPICO

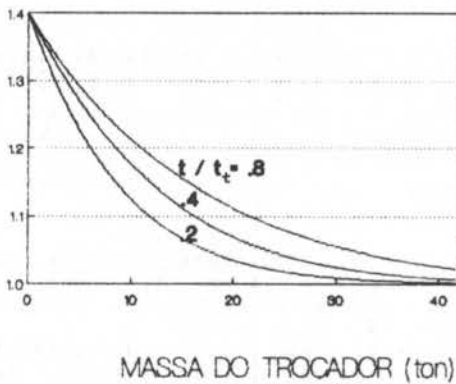


figura 3: coef.politrópico equivalente

Finalmente, sabendo que o preço das capacitâncias térmicas no mercado nacional é de 4.500 \$ por tonelada de aço e o preço do reservatório para uma pressão de trabalho de 4000 KPa e volume entre 200 m<sup>3</sup> e 1000 m<sup>3</sup> é aproximadamente de 1200 / m<sup>3</sup>, obtemos as curvas a seguir, que evidenciam os pontos de otimização do custo associado ao ponto de projeto (tempo de ensaio).

PREÇO EM 1000 \$  
 $T_i = 300 \text{ K}$

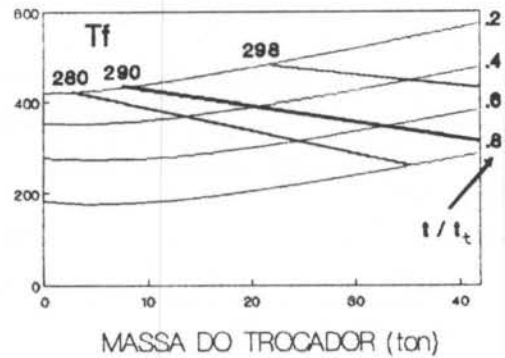


figura 4: curvas de otimização do volume

#### REFERÊNCIAS

- [1] Aeronautical Facilities Catalogue, Vol. 1 - WIND TUNNELS, NASA-RP-1132, Washington DC, 1985.
- [2] Pope, Alan & Goin, Kenneth L., High-Speed Wind Tunnel Testing, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1978.
- [3] E. van Spiegel - Method of Calculation for Heat-Regenerators of Blowdown Windtunnels - Nationaal Luchtvaartlaboratorium, NLL-TM, F.190, 1956.
- [4] Leavy, L.E., A.F.R.Ae.S. - A note on the temperature transients in a Supersonic "Blowdown" Wind Tunnel. - Journal of the Royal Aeronautical Society, august, 1958.

#### ABSTRACT

Expansion of the air from storage tanks used in Supersonic Blowdown Wind Tunnels through heat exchanger matrix (metallic flat plates) is modeled by unidimensional analysis for determining the equivalent polytropic coefficient for the reservoir and matrix set in order to set forth the reservoir optimum design main parameters (Volume and Matrix metal quantity).

THE PRODUCTION OF HIGHLY  
SHEARED PROFILES IN WIND TUNNELS;  
A MATHEMATICAL ANALYSIS

Sérgio Luiz Villares Coelho

Programa de Engenharia Mecânica - COPPE/UFRJ

ABSTRACT

The generation of uniformly sheared streams in wind tunnels by means of double gauzes of uniform porosity is analysed mathematically in this paper. A theoretical analysis of the flow through double gauzes of uniform porosity is developed and the results of this analysis are compared with experiments performed in a wind tunnel. The expressions obtained from the theory seem to be a convenient tool for evaluating the maximum shear rates obtainable with given screens, and also for designing gauzes that produce high and specific shear rates.

I. INTRODUCTION

The generation of streams with specific velocity profiles in wind tunnels is associated with a particular class of problems in fluid mechanics. In these, instead of analysing the flow determined by given kinematic and/or dynamic conditions at boundaries of prescribed geometry, one is interested in finding the geometry of the boundaries at which these conditions are satisfied that provides a given flow.

One technique which has been often used to generate sheared streams in wind tunnel is the use of curved gauzes placed transversally to the oncoming stream.

The non-uniform flow through wire gauzes has been mathematically analysed by Davis [1957] and Elder [1959]. The basic relations for the shape of gauzes for parallel channels were determined by Elder [1959] for steady two-dimensional flows. Assuming that the influence of viscosity is sensible only in the immediate vicinity of the gauze, Elder described the velocity field in terms of a stream function  $\psi$ , which is perturbed in the vicinity of the gauze. This stream function satisfies  $\nabla^2 \psi = \omega$ , where  $\omega$  is the vorticity, and it can be written as the sum of a stream function for this disturbance flow,  $\psi_d$ , and a stream function for the base flow (invariant with  $x$ ),  $\psi_b$  ( $\psi = \psi_b + \psi_d$ ).

The further assumption that the maximum transverse displacement of the streamlines produced by the gauze is a small parameter (let's say,  $\epsilon =$  maximum transverse displacement/ $L$ ) leads to  $\omega(x, y) = \omega(x \rightarrow \infty, y) + O(\epsilon)$ . Therefore,  $\psi_b$  and  $\psi_d$  satisfy  $\nabla^2 \psi_b = \omega|_{x \rightarrow \infty} + O(\epsilon)$ , and  $\nabla^2 \psi_d = O(\epsilon)$ .

This permitted Elder to evaluate a first order approximation for  $\psi_d$  by requiring  $\nabla^2 \psi_d = 0$ .

It is worth mentioning that flows with uniform distributions of vorticity do not require the assumption of small displacement of streamlines to satisfy  $\nabla^2 \psi_d = 0$ .

Linearized boundary conditions at the gauze were obtained by Elder by assuming that the angle between the unperturbed stream and the normal to the surface of the gauze is small in the whole extent of the latter.

Particular solutions of this linearized model for the case of producing uniformly sheared flows from uniform oncoming streams were obtained by Maull [1969]. According to Maull, the expression relating the shape of the gauze, its porosity (for square mesh wire screens of uniform porosity), and the slope of the linear velocity profile obtained from an oncoming uniform stream in a two-dimensional channel is:

$$\frac{\pi^3 EB}{\omega L} = 4 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\pi y/L]}{(2n+1)^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \right\} \quad (1)$$

were  $E = [K \cos^2 \theta] / [2 + K \cos^2 \theta - B]$ ,  $K$  is the screen resistance (or drag) coefficient,  $B$  is the lift coefficient of the gauze,  $\theta$  is the "mean" angle of the gauze,  $L$  is the channel width,  $\mu = \partial U / \partial y L / U_{\infty}$  ( $U_{\infty}$  - free stream velocity) is the slope of the linear velocity profile produced, and  $(x, y)$  are the coordinates of the gauze. Figure 1 shows a schematic representation of this flow.

The result above is valid only for gauzes where the tangent of the angle between a unperturbed stream and the normal to the gauze is assumed to be small in the whole extent of the latter. Nevertheless, (1) has been used for designing gauzes where the "mean" tangent of this angle is of  $O(1)$ ! It is a striking fact that even at these large angles, Elder's linearized model provides shapes for the gauze that indeed produce satisfactorily linear profiles. In many cases, however, the slope of the linear profile actually produced is smaller than the slope of the profile of the theoretical flow described by the model (for instance, Maull reports the construction of a gauze that actually produced  $\omega \approx 0.25$  for a theoretical value of  $\omega \approx 0.4$ ).

2. EFFECTS OF THE DIFFERENT EMPIRICAL EXPRESSIONS FOR THE LIFT COEFFICIENT:

The reasons for this difference between actual and theoretical values of  $\omega$  seem to be related to the expressions which have been used to evaluate  $B$ . Elder derived (based on dimensional grounds) the relation

$B = 1 - (1 + \sqrt{k})^{-1/2}$ . However, Turner [1969] observes that the empirical relation used by Owen & Zienkiewicz [1957],  $B = 1 - 1.1/\sqrt{1+k}$ , is more firmly based on experimental data.

As a matter of fact, Owen's relation is simply an approximation for small angles of inclination (i.e.,  $\theta = 0$ ) for the empirical relation established by Dryden & Schubauer [1947], which is:

$$B = 1 - 1.1/\sqrt{1 + K_{\theta}} \quad (\text{for } K_{\theta} > 0.7), \quad (2)$$

where  $K_{\theta} = K \cos^2 \theta$ . Thus, Owen's expression is a satisfactory approximation for gauzes with small mean angles  $\theta$  only, and Owen & Zienkiewicz use it in their study because it is concerned with a plane non-uniform grid placed normally to the free stream (i.e.,  $\theta = 0$ ).

As a matter of fact, Maull [1969] overpredicted the theoretical value of  $\omega$  for the gauze constructed by him, by using the overpredicted values for  $B$  given by Elder's relation. Maull's first gauze has a porosity  $\beta = (1 - d/l)^2 = 0.4537$  (where  $d =$  wire diameter and  $l =$  wire spacing), and was tested in a flow where  $R_d \approx 3300$  ( $R_d = U_{\infty} d/\nu$ ). The empirical expression (Elder [1959])

$$K = \left[ \frac{1 - 0.95\beta}{0.95\beta} \right]^2 + \frac{88(1 - \beta)}{R_d} \quad (3)$$

leads, in this case, to the estimated value  $K=1.76$ . Considering the mean angle of inclination of the gauze,  $\theta = \pi/4$ , (2) leads to the predicted value  $B = 0.1977$ , which contrasts with Maul's overestimated value  $B = 0.3444$ . The correct theoretical value for  $B$  as given by (2) leads to  $\omega \approx 0.23$ . This result is indeed in agreement with the velocity profile obtained by Maul with his first gauze (Maul [1969]).

### 3. THE DEPENDENCE OF THE SHEAR RATE ON THE MEAN ANGLE OF THE GAUZE:

Defining the mean tangent of the angle of gauze,  $T_o = \tan \theta_o$ , as  $\int_0^L T(y) dy$ , where  $T = \tan \theta$ ,

one can obtain from (1) the following relation for  $T_o$  (where  $B = B(\theta_o)$  and  $E = E(\theta_o)$ ):

$$\frac{\pi^3 E B}{\omega} T_o = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = f_o \approx 8.4103. \quad (4)$$

The expression above relates the slope of the linear profile produced and the mean angle for the gauze for a given screen ( $K$ ). This relation shows that there is a maximum slope,  $\omega_{max}$ , that can be obtained with any given screen.

Figure 2 shows plots of  $\omega \times \theta$  for a few values of  $K$ , where these curves are compared with those obtained assuming Elder's relation instead of (2). From Figure 2 one can clearly see how the former leads to overestimated values for  $\omega$  as the mean angle  $\theta$  increases. Since (2) is valid only for  $K > 0.7$  (for instance, it gives  $B < 0$  for  $K < 0.21$ ), the theoretical relation derived by Dryden & Schubauer [1947],  $B = 2 K_\theta / (8 + K_\theta)$ , is used in these graphics for  $K_\theta < 1$ . This relation shows satisfactory agreement with experimental data for  $K_\theta < 1.4$ , and does lead to  $B = 0$  for  $K_\theta = 0$ .

### 4. PRODUCING STREAMS WITH HIGH SHEAR RATES

The highest constant shear rate obtained with gauzes which has been reported in the literature is that of Woo et al. [1981]. They have achieved a value of  $\omega = 1.8$  with a pair of gauzes of variable porosity.

According to (2) and (4), velocity profiles with shear parameters as high as that achieved by Woo et al. [1981] can only be reached with single gauzes when screens with  $K > 10$  are used. The flow through such high drag screens usually experiences instabilities that lead to the formation of large scale turbulence downstream of the screen. However, the difficulties involved in the construction of variable porosity gauzes like those of Woo et al. seem to justify, at least, an attempt to produce high shear streams using high drag single gauzes of uniform porosity.

A high precision polyester wire screen with a wire diameter  $d = 105$  microns and 56.2 mesh/cm (Simon PE 105/627 Polyester Mesh) was used for this purpose. The value of the drag coefficient was evaluated using the empirical relation (3). For an unperturbed upstream velocity  $U_\infty = 2$  m/s (air flow), the value of  $K$  for this screen ( $d/l = .408$ ,  $R_d = 9.4$ ) is  $K = 10.1$ .

According to the theory, a gauze built with this screen, and that has a mean angle  $\theta = 50$  degrees, would provide  $\omega = 1.67$  (for  $R_d = 9.4$ ). These theoretical values were substituted in expression (1) and the shape of the gauze was calculated. The profile of the gauze is shown in Figure 3, and it was mounted in the wind tunnel of the Department of Engineering of the University of Cambridge, described by Head & Bandyopadhyay [1981], which has a working section measuring 1m X 1m and a top speed of 2.5 m/s. Measurements of the velocity and turbulence profiles for this gauze are shown in Fig-

ure 4. The shear rate produced ( $\omega = 1.7$ ) is fairly uniform and agrees quite well with the theoretical value.

Because of the high screen resistance, the formation of large eddies in the lower half of the tunnel was observed. Although this leads to large RMS values in this region (see Figure 4), the upper half section of the wind tunnel showed a quite steady flow with turbulence intensities below 0.5%.

The production of linear velocity profiles with slopes greater than  $\omega_{max}$  can be achieved by using screens with variable porosity and/or by using sets of two or more gauzes. As a matter of fact, Woo et al. [1981] have used a double gauze to produce the previously referred linear velocity profile with high shear. However, their gauzes were constructed following a design process (described in Woo et al. [1981]) which involves the computational scheme derived by Turner [1969] (which applies only to single gauzes) for determining their shape, and a posteriori empirical adjustments on the variable porosity of the upstream gauze. Woo's report shows that the construction of a set of gauzes for producing velocity profiles with specific shear rates using this technique is a difficult and time consuming task.

### 5. A LINEAR MODEL FOR THE FLOW THROUGH A PAIR OF GAUZES THAT PRODUCE UNIFORM SHEAR:

As an alternative to this semi-empirical technique, relations similar to those obtained for single gauzes can also be derived to provide the theoretical shape for a pair of identical gauzes with uniform porosity that produces sharp linear velocity profiles.

The flow through a pair of gauzes that produce a uniformly sheared flow is schematically represented in Figure 5. The flow in each of the different regions of the flow is described by the stream functions  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  and  $\psi_3$ .

Because the flow in region 1 is irrotational, and the flow in region 3 is uniformly sheared,  $\psi_3 = \psi_{b3} + \psi_{d3} x$ , where  $\psi_{b3}$  and  $\psi_{d3}$  are basic flows (invariant with  $x$ ), and  $\psi_{d3}$  is irrotational disturbances. Nothing can be said a priori about the flow in region 2, but one can seek a solution of the kind  $\psi_2 = \psi_{b2} + \psi_{d2} x$ , where  $\psi_{d2}$  is also irrotational, by restricting these to cases where the transverse displacement of the streamlines in this region is small (Elder's assumption).

However, there is an infinite number of combinations of different shapes for each of the gauzes that provide the same downstream flow. This multiplicity of solutions can be reduced by restricting the analysis to flows where both gauzes have the same shape. Even with this restriction one could imagine different shapes for this "double gauze" producing different flows in region 2 but still producing the same downstream flow. The existence of these different solutions for the double gauze case cannot be verified a priori but this possibility suggests that a solution where the flow between the gauzes is also uniformly sheared might exist.

Assuming these simplifying hypotheses, and also assuming, like Elder, that the mean angle of inclination of both gauzes is small, one can seek solutions for the double gauze case in the form (referring to Figure 5):

$$\frac{\psi_1}{LU} = \psi_{b1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} P_{1n} \exp \left[ \pi \left( x + \frac{x_o}{2} \right) / L \right] \sin(n\pi y/L),$$

$$, (x < -\frac{x_o}{2})$$

$$\frac{\psi_2}{LU} = \psi_{b2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} P_{2n} \exp \left[ -\pi \left( x + \frac{x_o}{2} \right) / L \right] \sin(n\pi y/L) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} Q_{2n} \exp \left[ \pi \left( x - \frac{x_o}{2} \right) / L \right] \sin(n\pi y/L), (-\frac{x_o}{2} < x < \frac{x_o}{2})$$

$$\frac{\psi_3}{LU} = \psi_{b3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} Q_{3n} \exp\left[-n\pi\left(x - \frac{x_0}{2}\right)/L\right] \sin(n\pi y/L),$$

(x >  $\frac{x_0}{2}$ )

where  $\psi_1, \psi_2,$  and  $\psi_3$  are the stream functions for each of the regions of the flow,  $\psi_{b1}, \psi_{b2},$  and  $\psi_{b3}$  represent the base flows (invariant with  $x$ ) for each of these regions,  $P_{1n}, P_{2n}, Q_{2n},$  and  $Q_{3n}$  are constants, an  $L, U$  suitable length and velocity scales.

We call  $u$  and  $v$  components of the velocity in the  $x$  and  $y$  directions, respectively, and the suffix  $b$  denotes the base flow components.

Considering the following relations for the base flows,

$$\begin{aligned} u_{b1} &= U_{\infty}; v_{b1} = 0, \\ u_{b2} &= U_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos(n\pi y/L); v_{b2} = 0, \text{ and} \\ u_{b3} &= U_{\infty} + \omega\left(\frac{y}{L} - \frac{1}{2}\right) = U_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\pi y/L), \end{aligned}$$

$$\text{where } \omega = \frac{\partial u_{b3}}{\partial y},$$

and

$S_n = -\frac{4}{\pi^2 n^2}$  for  $n$  odd and  $S_n = 0$  for  $n$  even (see Maull [1969]) one can scale with respect to  $U_{\infty}$  and  $L$  and also obtain expressions for the velocity components  $u$  ( $x$  direction) and  $v$  ( $y$  direction) in term of series of terms with undetermined coefficients.

Following Elder, the conditions to be satisfied on the gauzes are:

$$\begin{aligned} u_1^+ &= u_2^+ = q^+, & u_2^* &= u_3^* = q^* \\ B^+ T_o^+ &= (1 - B^+)v_1^+ - v_2^+, & B^* T_o^* &= (1 - B^*)v_2^* - v_3^* \\ u_{b1} - u_{b2} &= \gamma_o^+ (q^+ - 1), & u_{b2} - u_{b3} &= \gamma_o^* (q^* - 1) \end{aligned}$$

where  $q$  is the magnitude of the velocity just before the gauze,  $B$  the lift coefficient (a factor which gives the change of the normal component of velocity across the gauze such that  $U_{2t} - U_{1t} = B U_{1t}$ , where the subscript  $t$  denotes the tangential component)  $T_o = \tan \theta_o$ , and  $\gamma_o = K \cos^2 \theta_o = K (\theta = \theta_o)$ . The superscripts  $+$  and  $*$  denote functions evaluated at the gauze.

Applying these conditions to the expressions for  $u$  and  $v$ , and recalling that for identical gauzes  $B = B^* = B$ ,  $T_o^+ = T_o^* = T_o$  and  $\gamma_o^+ = \gamma_o^* = \gamma_o$ , the problem can be reduced to  $n$  independent systems of linear equations (see Coelho [1988]), i.e.,

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_o^+) P_{1n} &= P_{2n} + Q_{2n} \exp(-n\pi x_o), \\ S_n - Q_{3n} &= \gamma_o^+ P_{1n} - P_{2n} \exp(-n\pi x_o) - Q_{2n}, \text{ and} \\ \gamma_o^+ P_{1n} &= (1 + \gamma_o^*) S_n - \gamma_o^* Q_{3n} \end{aligned}$$

Re-introducing  $(x, y)$  as dimensional variables, the solutions for  $P_{1n}, P_{2n}$  and  $Q_{2n}$  lead to (for  $\alpha_o = x_o/L$ ):

$$BT = -\frac{4\omega}{E\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} K_{(2n+1)} \frac{\sin|(2n+1)\pi y/L|}{(2n+1)^2}, \text{ where}$$

$$E = \frac{\gamma_o}{(2 + \gamma_o - B)}, \text{ and}$$

$$K_n = \frac{1 - 2E^2 \exp(-n\pi\alpha_o) + [E(\gamma_o + B)/\gamma_o]^2 \exp(-2n\pi\alpha_o)}{(2 - \gamma_o) + \gamma_o E + 2E/\gamma_o [2 - B(1 + \gamma_o)] \exp(-n\pi\alpha_o) + B E \exp(-2n\pi\alpha_o)} \quad (5)$$

Integrating the expression for  $BT$ , one finds the following relation for the shape of the gauzes:

$$\frac{\pi^3 EB}{\omega} \frac{x}{L} = 4 \left( \sum_{n=0}^{\infty} K_{(2n+1)} \frac{\cos|(2n+1)\pi y/L|}{(2n+1)^3} - \sum_{n=0}^{\infty} K_{(2n+1)} \frac{1}{(2n+1)^3} \right) \quad (6)$$

This expression is somewhat similar to the expression Maull [1969] obtained for the form of single gauzes (the above expression with  $K_{(2n+1)} = 1$ ). The coefficients  $K_n$  account for the interference between the gauzes in a double gauze mounting (Davis [1957] has obtained these coefficients for a pair of plane gauzes of uniform porosity placed perpendicularly to an arbitrary oncoming stream).

Considering (6), the expression relating  $T_o$  and  $\omega$  is:

$$\frac{\pi^3 EB}{\omega} T_o = f(\alpha_o, \gamma_o, B) = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_{(2n+1)}}{(2n+1)^3} \quad (7)$$

Expressions (4) and (7) lead to the following relation between the far downstream vorticity produced by a pair of gauzes ( $\omega$ ) and the far downstream vorticity produced by a single gauze with the same mean angle  $\theta_o$  ( $\omega_o$ ):

$$\omega = \frac{f_o}{f(\alpha_o, \gamma_o, B)} \omega_o \quad (8)$$

Assuming (2),  $f$  becomes a function of  $\alpha_o$  and  $\gamma_o$  only, and plots of the "amplification factor"  $f_o/f(\alpha_o, \gamma_o)$  against the distance between the gauzes  $\alpha_o$  are shown in Figure 6 for a few different values of  $\gamma_o$ . It can be seen from these plots that  $f_o/f$  increases as  $\alpha_o$  decreases, and that there is a specific critical value  $\gamma_{crit}$  below which  $\omega$  is always greater than  $\omega_o$ . For  $\gamma_o > \gamma_{crit}$  there is always a value  $\alpha_{ocrit}(\gamma_o)$  above which  $\omega < \omega_o$ .  $\gamma_{crit}$  is evaluated by taking the limit of (5) as  $\alpha_o \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{\alpha_o \rightarrow \infty} K_n = \frac{1}{(2 - \gamma_o) + \gamma_o E}$$

which leads to:

$$\frac{\pi^3 EB}{\omega} \frac{x}{L} = \frac{4}{(2 - \gamma_o) + \gamma_o E} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos|(2n+1)\pi y/L|}{(2n+1)^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \right) \quad (9)$$

for  $\alpha_o \rightarrow \infty$  (Figure 6 indicates that, for practical situations,  $f(\alpha_o \rightarrow \infty, \gamma_o) = f(\alpha_o > 1.5, \gamma_o)$ ).

Therefore, the amplification factor  $f_o/f$  for  $\alpha_o \rightarrow \infty$  becomes:

$$\frac{f_o}{f(\alpha_o \rightarrow \infty, \gamma_o, B)} = \left[ (2 - \gamma_o) + \gamma_o E \right], \quad (10)$$

and the linear velocity profile produced is not modified by the introduction of a second similar gauze (at  $\alpha_o \rightarrow \infty$ ) when  $(2 - \gamma_o) + \gamma_o E = 1$ .

Thus,  $\gamma_{crit}$  is the solution of  $\gamma_o(1 - E) = 1$ , and considering (2),



$$\gamma_{crit} = 1 + \frac{\sqrt{1+\gamma_{crit}}}{1.1} \Rightarrow \gamma_{crit} \approx 2.7637 \quad (11)$$

It is worth mentioning that although (9) and (10) show that the shape of double gauzes for  $\alpha \rightarrow \infty$  is similar to the shape of single ones, the shape of double gauzes for finite  $\alpha$  ( $\alpha < 1$ , in practice) does not show this same property. Therefore, gauzes designed to be used as double gauzes with  $\alpha \gg 1$  do provide linear velocity profiles when used individually. This is not true for gauzes designed to be used as double gauzes with  $\alpha < 1$ .

Summarizing, depending upon the value of  $\gamma$  and  $B$ , a second similar gauze can even reduce the slope of the linear velocity profile produced by the first one. The amplification (or reduction) of  $\gamma_0$  depends upon the values of  $\gamma$  and  $\alpha$ . Reducing  $\alpha$  leads to an increase in the amplification factor, and to each value of  $\gamma_0 > \gamma_{crit}$ , there is a  $\alpha_{ocrit}$  for which  $\alpha_0 > \alpha_{ocrit} \Rightarrow \omega < \omega_0$ .

Therefore, although in one hand the only way to produce large  $\omega$  with single gauzes is to use screens with large  $K$ 's (which is inconvenient because of the instabilities that might occur in the flow), on the other hand, double gauzes allow for screens with lower  $K$  to be used for producing this same  $\omega$ . Figures 2 and 6 are convenient tools for the designing of single or double gauzes for the production of uniformly sheared streams.

In face of the results of this theoretical analysis, another gauze similar to that shown in Figure 3 was built and used together with the first one as a pair of gauzes. This second gauze was placed at a distance  $\alpha_0 = 0.625$  from the first one. According to the theory, this value of  $\alpha_0$  introduces only negligible changes in the form of the double gauze that produces linear velocity profiles, and at the new flow conditions ( $R_d = 8.6$ ) the theoretical shear rate is  $\omega = 1.74$ . The profiles obtained are shown in Figure 7 (where  $\omega = 1.73$ ) and, again, compare well with the theoretical value ( $\omega = 1.74$ , for  $R_d = 8.6$ ).

## 6. CONCLUDING REMARKS

The analysis of the results which have been obtained with single gauzes that produce uniformly sheared streams have shown that the poor theoretical evaluations of the shear rate that have been reported in the literature seem to be related to the different empirical expressions which have been used for the lift coefficient of these gauzes. In particular, it shows that the commonly used expression for  $B$ , which was proposed by Elder, is an incorrect approximation for gauzes with the usual mean angles of inclination around  $\pi/4$ .

The theoretical analysis of these flows shows that streams with uniform shear rates as high as that of Woo et al [1981] ( $\omega = 1.8$ ) can only be obtained with single gauzes when high drag screens are used. This has the disadvantage of producing large scale turbulent motion downstream from the gauze.

As an alternative to this single gauze approach, and to the semi-empirical technique used by Woo et al. of constructing a double gauze with non-uniform porosity the theoretical analysis of the flow through double gauzes of uniform porosity has led to a useful method of designing gauzes for high shear rates. It seems to be a convenient tool for evaluating the maximum shear rates obtainable with given screens, and also for designing gauzes that produce specific shear rates.

The results of the theoretical analysis of double gauzes indicate that the most appropriate method of producing high shear rates with low turbulence intensities is to use a set of several gauzes of low resistance. A modification of the theoretical expressions obtained for double gauzes that accounts for the presence of more gauzes might be a valuable contribution for the designing of gauzes for highly sheared streams with low turbulence intensities.

## REFERENCES

- [ 1 ] Coelho, S.L.V., The Dynamics of the near field of entraining jets in cross-flows. Ph.D.Thesis, University of Cambridge, pp.69-84 (1988)
- [ 2 ] Davis, G.V., Steady non-uniform flow through wire screens. Ph.D.Thesis, University Cambridge, (1957)
- [ 3 ] Dryden, H.L. and Schubauer, G.B., The use of damping screens for the reduction of wind tunnel turbulence. *J.Aero.Sci.*, 14, pp. 221-228 (1947)
- [ 4 ] Elder, J.W., Steady flow through non-uniform gauzes of arbitrary shape. *J.Fluid Mech.*, 5, pp. 335-368 (1959)
- [ 5 ] Head, M.R. and Bandyopadhyay, P. New aspects of turbulent boundary-layer structure. *J.Fluid Mech.*, 107, pp.297-338 (1981)
- [ 6 ] Maull, D.J., The wake characteristics of a bluff body in a shear flow. *AGARD Conf.Proc.* n° 48, pp.16.1-13 (1969)
- [ 7 ] Owen, P.R. and Zienkiewicz, K.H., The production of uniform shear flow in a wind tunnel, *J. Fluid Mech.*, 2, pp. 521-531 (1957)
- [ 8 ] Turner, J.T., A Computational method for the flow through non-uniform gauzes: the general three-dimensional case. *J.Fluid Mech.* 36, pp.367-383 (1969)
- [ 9 ] Woo, H.C.G. et al, Experiments on vortex shedding from stationary and oscillating cables in a linear shear flow. Project 5-32453, Colorado State University (1981)
- [ 10 ] Woo, H.C.G. et al, Production of strong constant shear flow with low turbulence intensity. Submitted to *J.Fluid Mech.* (1988)

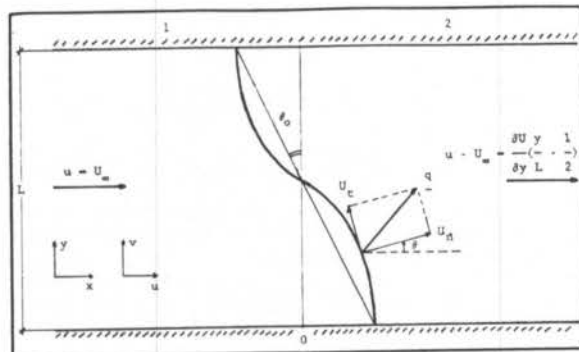


FIGURE 1: Nomenclature for a single gauze in a wind tunnel.

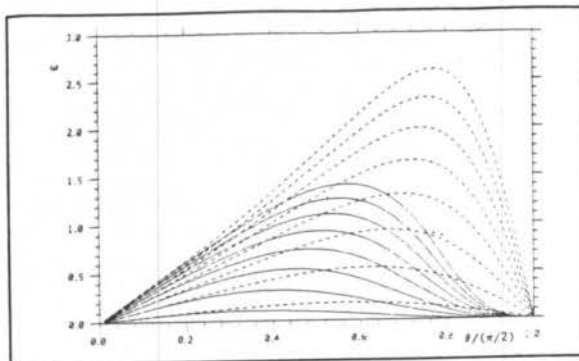


FIGURE 2: Shear parameter versus mean angle for  $B = 1 - 1.1/(1 + K)$ . (---), and for  $B = 1 - 1.1/(1 + K_p)$ . (—), for  $K = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ , and  $8$ .

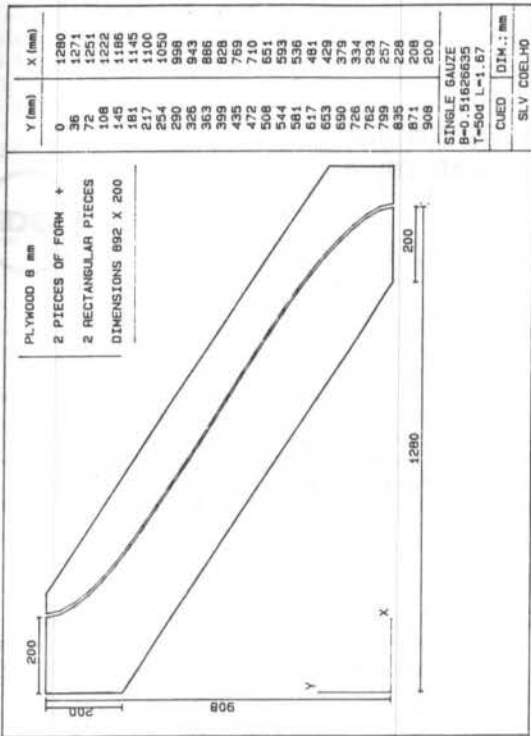


FIGURE 5: Frame for fixing the gauze in the wind tunnel, showing the profile used ( $\theta_0 = 50$  deg., and  $\gamma_0 = 4.17$  for the single gauze).

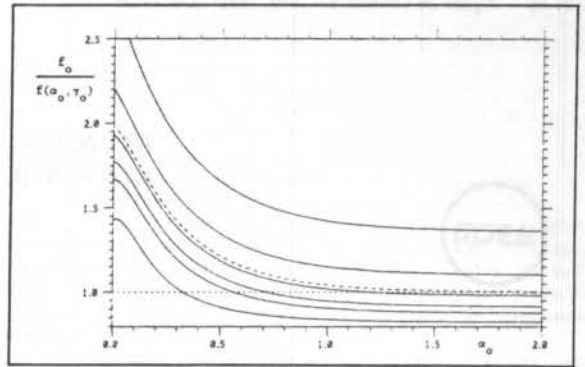


FIGURE 6: Amplification factor versus distance between gauges for a few values of  $\gamma_0$  (double gauges). From top down solid lines are for  $\gamma_0 = 1, 2, 3, 4, 5$  and 10. Broken line is for  $\gamma_0 = \gamma_{crit} = 2.7637$ .

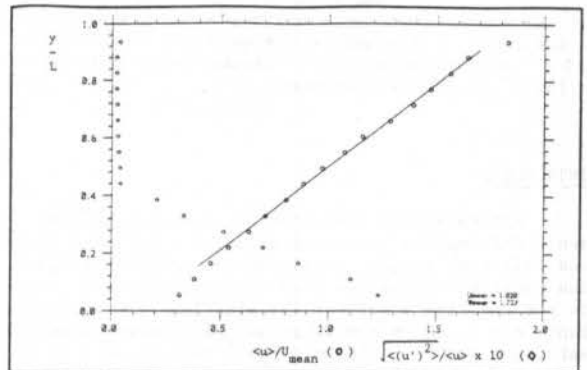


FIGURE 7: Mean velocity and turbulence intensity profiles

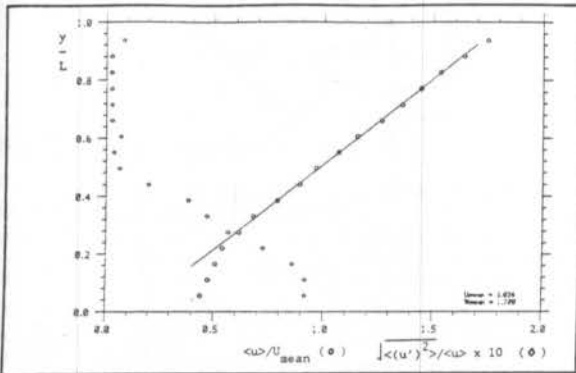


FIGURE 4: Mean velocity and turbulence intensity profiles for the single gauze ( $R_g = 9.4$ ). Line shown is linear regression for  $y/L > 0.2$ .

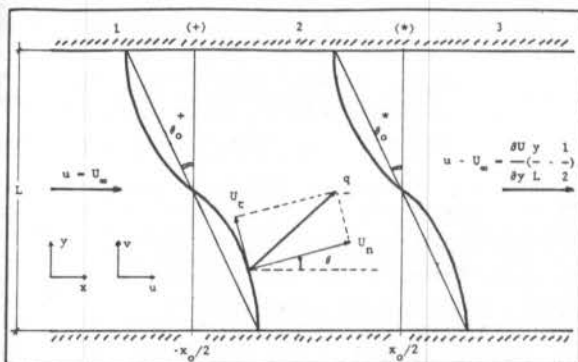


FIGURE 5: Nomenclature for a double gauze in a wind tunnel.



APLICAÇÃO DE UMA TÉCNICA EXTENSOMÉTRICA NA MEDIÇÃO DE COEFICIENTES AERODINÂMICOS

RAUL JOSÉ MARCHESINI FONSECA

PHILEMON MELO CUNHA

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-RJ

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se mais uma aplicação de técnica extensométrica no estudo sobre escoamento em torno de perfis no interior de um túnel de vento. Um dos motivos desta aplicação é a grande dificuldade encontrada na medição de forças ortogonais (arraste e sustentação) simultâneas. Apresentam-se resultados de perfis simétrico, assimétrico e cilíndricos considerados satisfatórios quando comparados com os existentes na literatura.

INTRODUÇÃO

Extensômetros elétricos são sensores capazes de medir deformações em corpos sujeitos a esforços mecânicos tais como tração, cisalhamento, torção e flexão. Sua constituição básica é um elemento sensível, composto por uma liga metálica, instalado em fino suporte isolante que é, por sua vez, colado na superfície do corpo estudado; assim, quando o corpo é solicitado e se deforma, o condutor sofre variações em suas dimensões e tem o valor de sua resistência elétrica alterado. Esta variação é, dentro das faixas usualmente trabalhadas, diretamente proporcional à deformação ocorrida. A constante de proporcionalidade, ou fator de sensibilidade é uma característica do extensômetro e seu valor é fornecido pelo fabricante, o que permite a determinação da deformação ocorrida a partir da variação da resistência elétrica verificada.

Neste trabalho, apresenta-se a aplicação desta técnica ao estudo de escoamento em torno do perfil aerodinâmico, o que permitiu a determinação experimental das forças de arraste e sustentação atuantes. As curvas levantadas apresentaram excelente linearidade e os resultados foram considerados satisfatórios quando comparados com os existentes na literatura - ref. [4] e [5] - É interessante ressaltar a facilidade de instalação e o baixo custo do aparato experimental que foi integralmente desenvolvido e montado no Laboratório de Termociências da PUC-RJ.

MEDIDA EXTENSOMÉTRICA DE DEFORMAÇÃO

Partindo da relação existente entre a resistência elétrica de um condutor uniforme (R), seu comprimento (L), sua resistividade ( $\rho$ ) e a área de sua seção transversal (A) dada pela expressão

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

Dally e Riley - ref [1] - mostram que a variação de resistência elétrica é diretamente proporcional à deformação axial do elemento sensível ( $\epsilon_a$ ), ou seja,

$$\frac{\Delta R}{R} = S_g \epsilon_a$$

onde

$S_g$  é o fator de sensibilidade do extensômetro.

Pode-se medir a variação da resistência elétrica

através da utilização de uma ponte de Wheatstone que é composta por quatro resistores, uma fonte de alimentação (P) e um voltímetro (G) como mostra a figura abaixo.

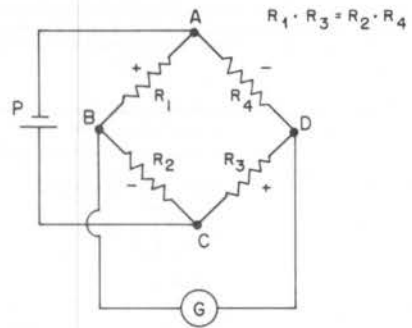


Figura 1

Havendo um balanceamento do circuito, a diferença de potencial entre os pontos B e D é nula. Variando-se uma das resistências, o estado de equilíbrio é alterado; esta variação pode ser quantificada pela medição da corrente ou tensão de desequilíbrio com o auxílio de resistências conhecidas.

A ponte pode ser formada por um, dois, três ou quatro extensômetros, dependendo do tipo de ligação desejada. Para o caso geral, a tensão de desequilíbrio é dada por:

$$\Delta V = P \frac{R_1 R_4}{(R_1 + R_4)^2} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right)$$

onde

$\Delta V$  = tensão de desequilíbrio  
 P = tensão de excitação da ponte

SELEÇÃO E INSTALAÇÃO DO EXTENSÔMETRO

Entre os fatores a serem considerados em uma correta seleção, estão: a faixa de deformação e temperatura de trabalho, o nível de precisão almejado, o material que compõe o corpo em questão, a resistência do condutor, etc. A não observância destes aspectos podem implicar na obtenção de resultados totalmente distorcidos.

Antes de ser efetuada a colagem, deve-se proceder a um ritual de limpeza e desengorduramento da superfície

do corpo. Realiza-se então a colagem, promovendo-se o isolamento da área com verniz e a soldagem do cabeamento aos terminais. Finalmente, instala-se uma camada protetora sobre o extensômetro de forma a evitar influência nociva da umidade e proteção contra choques mecânicos.

#### ESCOAMENTO DE FLUIDOS EM TORNO DE CORPOS IMERSOS

Corpos que não possuem um eixo de simetria, ou cujo eixo de simetria não está alinhado com a direção do escoamento, apresentam um campo de velocidade assimétrico, já que as velocidades e pressões locais são diferentes em cada lado do perfil. Assim sendo, é gerada uma força resultante que age sobre o corpo em questão, segundo duas componentes conhecidas como força de sustentação (LIFT), perpendicular à direção do escoamento; e força de arraste (DRAG), que atua na direção do escoamento. Um exemplo clássico é a chapa aerodinâmica (vide Fig. 2) onde podem ser vistas a sustentação L, o arraste D, a força resultante F, o ângulo de ataque  $\alpha$  e a corda C (o comprimento da chapa, perpendicular ao plano do papel chama-se envergadura), sujeita um campo de velocidade uniforme  $V_0$ .

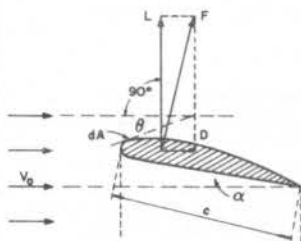


Figura 2

#### DIAGRAMAS DE SUSTENTAÇÃO E ARRASTE

Um método extremamente importante na apresentação de dados sobre perfis aerodinâmicos é a construção de gráficos que relacionam os coeficientes de arraste ( $C_D$ ), sustentação ( $C_L$ ) e a razão L/D com o ângulo de ataque. Destes gráficos podem ser retiradas informações interessantes, entre as quais a inclinação do trecho linear da curva CL, a localização onde a razão L/D é máxima e a forma da curva  $C_D$ .

A relação entre os coeficientes de sustentação e arraste sugere a construção de um gráfico, conhecido como "diagrama polar" que é largamente utilizado em projetos de aeronaves. Esta razão pode ser determinada para qualquer ponto da curva através da inclinação de uma reta traçada, a partir da origem, até o ponto estudado. Estes gráficos, portanto, permitem a localização dos pontos onde a sustentação é nula e o arraste é mínimo, do ponto onde a sustentação é máxima e do ângulo de ataque máximo acima do qual a sustentação deixa de crescer.

#### DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

O medidor de arraste e sustentação consta, essencialmente, de uma haste de aço inox, e seção transversal retangular, engastada em sua extremidade (vide fig.3e4). Na prática, o trecho CD está torcido de 90° em relação ao trecho AB. Desta forma, o extensômetro colado em CD fornece a deformação do haste provocada pela força de sustentação e isto explica o fato da superfície mais larga de CD estar paralela ao escoamento. No trecho AB, localizado fora do túnel de vento, há um extensômetro que mede a deformação decorrente da força de arraste atuante no perfil. Com esta montagem obtém-se uma área mínima da haste oferecendo resistência ao escoamento. O trecho DE é um parafuso colocado na haste, e destina-se à fixação do perfil aerodinâmico através de uma porca.

Durante a realização do experimento foram utiliza-

dos duas pontes BAM-1 ligadas uma a cada extensômetro, de forma a possibilitar a realização de medidas simultâneas das deformações, provocadas pelas forças de arraste e sustentação, independentemente. Este tipo de equipamento permite que medidas estáticas sejam fornecidas diretamente através de um indicador de escala ajustável, enquanto que para medidas dinâmicas existe a possibilidade de acoplamento a um osciloscópio.

As medidas do ângulo de ataque foram obtidas, a partir do valor nulo, variando-se a posição do perfil e tomando-se como referência sua extremidade. Utilizou-se, ainda, um tubo de Pitot com o objetivo de se verificar a uniformidade do escoamento; assim, as medidas só foram realizadas após a estabilização da variação de nível, no monômetro diferencial.

Para cada perfil, foram realizadas medidas até ser observada a perda de sustentação, indicada pela obtenção de um valor de deformação inferior ao anterior. Após a troca de perfil, a ponte era recalibrada e o procedimento acima descrito repetido.

Optou-se pela montagem dos extensômetros em 1/4 de ponte, utilizando-se três fios para a interligação de cada um dos extensômetros à sua respectiva ponte (vide ref. [1]), o que permite a eliminação de defeitos parasitários por simetria.

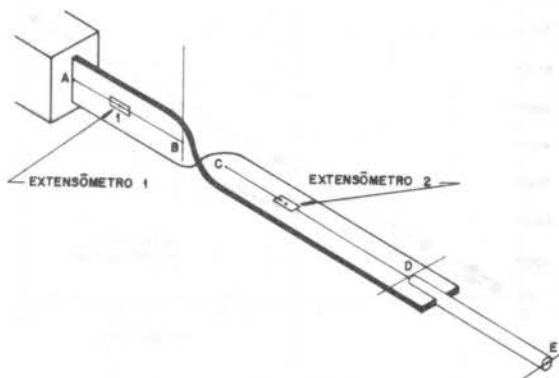


Figura 3

#### RELAÇÃO ENTRE O COEFICIENTE AERODINÂMICO E A DEFORMAÇÃO

De acordo com a referência [8], a relação entre o coeficiente aerodinâmico ( $C_F$ ) e a deformação ( $\epsilon_F$ ) é dada por:

$$C_F = A_1 A_2 \epsilon_F$$

onde

$$A_1 = \frac{Ebt^2}{6\ell} \text{ - relação tensão-deformação (viga em balanço sob flexão).}$$

$$A_2 = \frac{2}{\rho V^2 A_p} \text{ - (análise dimensional)}$$

Nas relações acima, E é o módulo de elasticidade, b e t são a largura e a espessura de seção transversal,  $\ell$  a distância do extensômetro ao ponto de aplicação da força,  $\rho$  é a densidade do ar, V a velocidade média do escoamento e  $A_p$  a área de projeção máxima do perfil.

A variável  $A_1$  é tirada da inclinação da curva de calibração (Fig.5) e depende do tipo de esforço atuante.

A variável  $A_2$  depende do tipo de perfil analisado (Tabela 1).

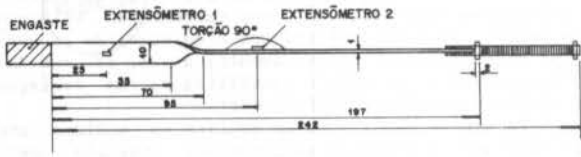


Figura 4

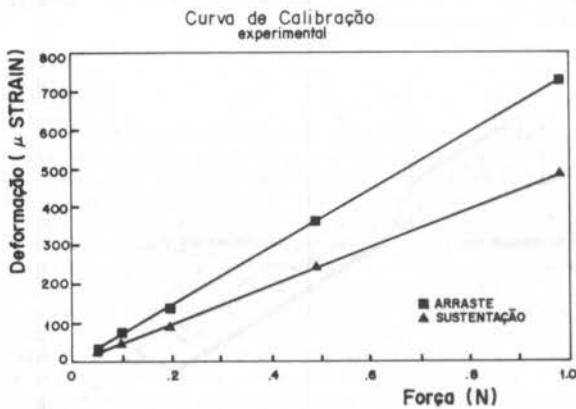


Figura 5

Tabela 1

		$A_2 (N^{-1})$
	PERFIL 1	4,80
	PERFIL 2	4,03
	CILINDRO 1	15,48
	CILINDRO 2	11,91

**CARACTERÍSTICAS DOS EQUIPAMENTOS UTILIZADOS E CONDIÇÕES DE TESTE**

- Túnel de vento

Fabricação: Laboratório de Termociências da PUC-RJ (ref. [6]).

Comprimento: 1100mm

Área de Escoamento: 200x200mm

Velocidade Média: 11,6m/s

- Pontes de Wheatstone:

Fabricação: Vishay Instruments (ref. [3])

- Extensômetros Elétricos

Fabricação: BLH - ELETRONICS - BALDWIN

Geometria: Uniaxial (0,79mm de comprimento)

Especificação: FAE-03-12-S6 EL

Resistência:  $120 \Omega \pm 0,2 \Omega$

Fator de Sensibilidade:  $1,89 \pm 2\%$

- Condições em que as medidas foram realizadas:

Temperatura (T): 296K (23°C)

Umidade Relativa ( $U_r$ ): 81%

Pressão Absoluta (P):  $1,016 \cdot 10^5$  Pa

Aceleração da Gravidade (g):  $9,81 \frac{m}{s^2}$

Densidade da água ( $\rho$ ):  $1000 \frac{Kg}{m^3}$

Viscosidade Dinâmica do ar ( $\mu_{ar}$ ):  $1,78 \cdot 10^{-5} \frac{Kg}{m \cdot s}$

Densidade do ar ( $\rho_{ar}$ ):  $1,20 \frac{Kg}{m^3}$

**RESULTADOS OBTIDOS**

Para melhor entendimento das curvas obtidas gráficas 1 e 2 - foram realizadas comparações com as disponíveis na literatura - ref [4] e [5]. Notou-se uma satisfatória semelhança apesar das diferenças entre as condições em que os experimentos foram realizados, tais como o número de Reynolds, os próprios perfis e a razão envergadura/corda (razão de aspecto,  $Ra$ ).

A curva  $C_L$  x  $\alpha$  do gráfico 1 apresentou um trecho linear até  $\alpha = 47^\circ$  com  $C_{Lmax} = 1,15$  e a do gráfico 2 até  $\alpha = 44^\circ$  com  $C_{Lmax} = 1,25$ . Geralmente, com o aumento do número de Reynolds,  $C_L$  tende a aumentar e o ângulo de ataque diminuir [7], verificando a veracidade do fato.

As curvas  $C_D$  x  $\alpha$  - gráficos 1 e 2 - apresentaram um acréscimo acentuado de  $C_D$  com o ângulo de ataque pois, sendo os perfis de envergadura finita, existem os efeitos de extremidade que reduzem o coeficiente de sustentação e cansam o aumento do coeficiente de arraste. Assim, os valores da razão sustentação/arraste,  $C_L/C_D$ , que podem ser atingidas na prática, são inferiores a aqueles obtidos através de testes bidimensionais. A razão para o gráfico 1 foi de  $C_L/C_{Dmax} = 3,0$  em  $\alpha = 15^\circ$  e para o gráfico 2  $C_L/C_{Dmax} = 3,0$  em  $\alpha = 10^\circ$ .

A razão de aspecto encontrada para o perfil 1 foi baixa ( $Ra = 0,65$ ), o mesmo acontecendo para o perfil 2 ( $Ra_2 = 0,55$ ). Isto explica a alta resistência  $C_D$  encontrada (da mesma ordem de grandeza do coeficiente de sustentação).

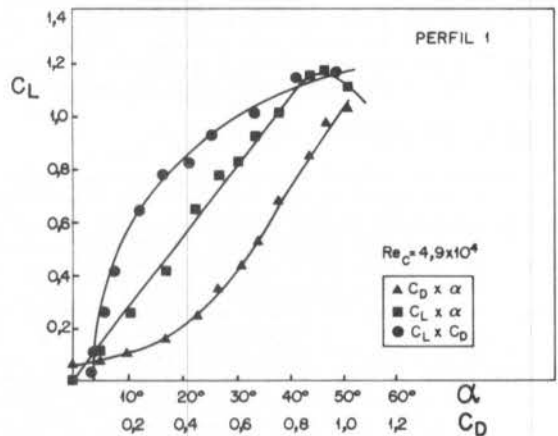


Gráfico 1



No gráfico 2, verificou-se que o perfil 2 (assimétrico) apresentou, para  $\alpha = 0^\circ$ ,  $C_L = 0,12$ .

Os valores obtidos para os cilindros ( $C_{D1} = 0,71$  e  $C_{D2} = 0,70$ ), utilizados para a calibração do dispositivo, ref [4], embora um pouco abaixo dos valores esperados, são da mesma ordem de grandeza e permanecem constantes para diferentes números de Reynolds.

Cilindro 1                       $Re = 1,6 \times 10^4$   
 Cilindro 2                       $Re = 1,8 \times 10^4$

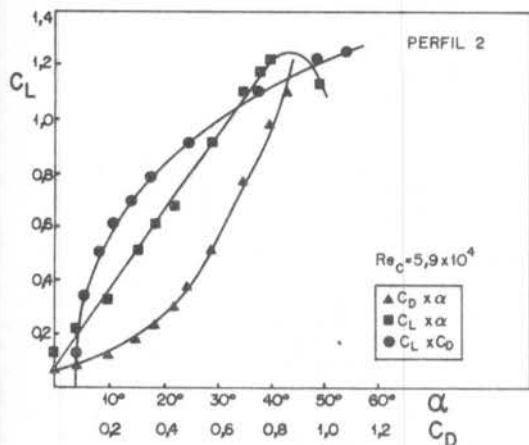


Gráfico 2

REFERÊNCIAS

[1] DALLY, J.W. & RILEY, W.F., Experimental Stress Analysis Second Edition - McGraw-Hill/Rogakusha (1985)

[2] CRANDALL/DAHL/LARDNER, An Introduction to the Mechanics of Solids, Second Edition, McGraw-Hill (1978)

[3] BAM-1 (Bridge Amplifier and Meter) - Instruction Manual - Vishay Instruments

[4] FOX & MACDONALD, Introdução à Mecânica dos Fluidos, 2ª Edição, Ed. Guanabara Dois (1981).

[5] VENNARD/STREET, Elementos de Mecânica dos Fluidos, 5ª Edição, Ed. Guanabara Dois (1978).

[6] BORDALO, S.N., Construção de um Túnel de Vento Sub-sônico, Projeto de Graduação, Departamento de Engenharia Mecânica PUC-RJ (1978)

[7] VIEIRA, R.C.C., Atlas de Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard e Blücher (1971).

[8] MARCHESINI FONSECA, R.J. Medidor de Coeficientes de Arraste e Sustentação, Projeto de Graduação, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ (1986).

ABSTRACT

The present paper presents another application of the extensimetric technique in the wind tunnel studies of flow around aerodynamic profiles. The motivation for this application resides in the difficulty of obtaining simultaneous measurements of orthogonal forces (lift and drag). The results presented encompassed symmetric, asymmetric, and cylindrical profiles, and were found to be in good agreement with the data from the literature.

**MÉTODOS NUMÉRICOS: ELEMENTOS FINITOS**

ON FINITE ELEMENT FORMULATIONS FOR THE STOKES FLOW PROBLEM



LEOPOLDO P. FRANCA  
 Laboratório Nacional de Computação Científica  
 Rua Lauro Muller 455  
 22290 - Rio de Janeiro, Brasil

ABSTRACT

We review our recent efforts in developing finite element formulations for the Stokes flow problem. The methods are constructed by adding to the usual Galerkin method terms that are of least-square type. Additional stability is obtained and finite element interpolations, which are unstable in the Galerkin approach, are now convergent.

INTRODUCTION

The Stokes flow problem models the behavior of creeping flows (very slow flows). Its equations are also form-identical to the ones governing incompressible linear isotropic elasticity. The continuity equation (which reduces to satisfaction of divergence free velocity fields) and the momentum equation are solved for the velocity and the pressure variables.

The variational formulation in terms of velocity and pressure has the format of a mixed formulation. Well-posedness of mixed formulations is governed by stability conditions derived by Babuška [1] and Brezzi [2]. The convergence of classical Galerkin finite element methods depends on the satisfaction of the discrete version of the Babuška-Brezzi condition. This severely limits the applicability of the finite element method: only a few combinations of interpolations for the velocity-pressure pair satisfies the Babuška-Brezzi condition (see, e.g., [6]).

The present work has its roots in [8]. Therein the authors developed a method which is stable for any combination of continuous interpolations for the velocity and pressure variables. Their method circumvents the Babuška-Brezzi condition and for this reason we shall refer to it by the CBB abbreviation. The method is constructed by adding to the Galerkin method a term which gives extra pressure stability. One drawback of this formulation is the nature of the additional term: it is non-symmetric.

The formulations we shall investigate precludes this problem by adding terms that are in essence constituted by least-squares of the Euler-Lagrange equations. The resulting formulations preserve the symmetry of the original Galerkin method. This idea has been applied to various problems written in terms of a mixed formulation (see [3] and references therein). For the Stokes problem in terms of the primitive variables (velocity and pressure), the formulation ensued preserves the main result of the formulation of [8]: any combination of continuous interpolations for the velocity and pressure variables is convergent.

We will also explore the Stokes problem emanating from the Hellinger-Reissner principle. In this formulation stress and velocity are the dependent variables. Contrary to the velocity-pressure formulation, here the key stability condition is not the Babuška-Brezzi condition, but the so-called K-ellipticity condition. The additional least-square type term improves upon the K-ellipticity stability for combinations of interpolations that already satisfy the Babuška-Brezzi condition. The SBB method derived is stable for various combinations of discontinuous stress with continuous velocity

interpolations.

An outline of the paper follows. In the following two sections the statement of the Stokes problem in terms of velocity and pressure and the corresponding variational formulation are given, and the finite element approximation of the CBB type is presented. In the last two sections a similar presentation is made in terms of stress and velocity variables. The finite element approximation employed is of the SBB type.

STOKES EQUATIONS AND VARIATIONAL FORMULATION

Let  $\Omega$  be an open, bounded region of  $R^d$ , where  $d = 2$  or  $3$ , with piecewise smooth boundary  $\Gamma$ . The equations of the Stokes flow are:

$$\text{div } \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0} \quad \text{on } \Omega \quad (1)$$

$$\text{div } \underline{u} = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (2)$$

$$\underline{\sigma} = -p\underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon}(\underline{u}) \quad \text{on } \Omega \quad (3)$$

$$\underline{u} = \underline{0} \quad \text{on } \Gamma \quad (4)$$

where  $\underline{\sigma}$  is the Cauchy stress tensor,  $\underline{f}$  is the body force,  $\underline{u}$  is the velocity,  $p$  is the pressure,  $\underline{I}$  is the identity tensor,  $\underline{\epsilon}(\underline{u})$  is the symmetric part of the velocity gradient, and  $\mu$  is the viscosity (assumed constant).

The boundary value problem consists of finding  $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x})$  and  $p = p(\underline{x})$  satisfying (1)-(3)  $\forall \underline{x} \in \Omega$  and the prescribed boundary condition (4).

Let  $L_2(\Omega)$  denote the space of square-integrable functions. The space of square-integrable derivative with zero value on the boundary is denoted by  $H_0^1(\Omega)$ . The appropriate spaces we will work with are

$$V = (H_0^1(\Omega))^d \quad (5)$$

$$W = L_2(\Omega)/R \quad (6)$$

The variational formulation corresponding to (1)-(4) is: Find  $\{\underline{u}, p\} \in V \times W$  such that

$$a(\underline{u}, \underline{v}) + b(\underline{v}, p) = f(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in V \quad (7)$$

$$b(\underline{u}, q) = 0, \quad \forall q \in W \quad (8)$$

where

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = 2\mu(\underline{\epsilon}(\underline{u}), \underline{\epsilon}(\underline{v})) \quad (9)$$

$$b(\underline{v}, p) = -(\text{div } \underline{v}, p) \quad (10)$$

$$f(\underline{v}) = (\underline{f}, \underline{v}) \quad (11)$$

and  $(\cdot, \cdot)$  denotes the  $L_2(\Omega)$  inner product.

The variational formulation (7)-(8) fits in the framework of a mixed formulation and its well-posedness is governed by stability conditions due to Babuška and Brezzi (see [1, 2]).

#### VELOCITY-PRESSURE FINITE ELEMENT METHOD

Consider an element partition of  $\Omega$  into  $n_{e1}$  elements. Let  $\Omega^e$  be the interior of the  $e$ -th element and

$$\tilde{\Omega} = \cup \Omega^e \quad (\text{element interiors}) \quad (12)$$

Consider the set of all polynomials of degree not greater than  $k$  and denote its restriction to  $\Omega^e$  by  $P_k(\Omega^e)$ . Let us construct

$$V_h = \{u_h | u_i^e \in P_k(\Omega^e), i=1, \dots, d, e=1, \dots, n_{e1}\} \cap V \quad (13)$$

$$W_h = \{p_h | p_e \in P_1(\Omega^e), e=1, \dots, n_{e1}\} \cap H^1(\Omega)/R \quad (14)$$

The approximation of (7)-(11) employing the CBB method [3, 4, 7] is: Find  $\{u_h, p_h\} \in V_h \times W_h$  such that

$$a_h(u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (15)$$

$$b_h(u_h, q_h) + c_h(p_h, q_h) = g_h(q_h), \quad \forall q_h \in W_h \quad (16)$$

where

$$a_h(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) - \frac{\delta_1 h^2}{2\mu} (2\mu \operatorname{div} \varepsilon(u_h)) + 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(v_h)_{\tilde{\Omega}} + 2\mu \delta_2 (\operatorname{div} u_h, \operatorname{div} v_h) \quad (17)$$

$$b_h(v_h, p_h) = b(v_h, p_h) + \frac{\delta_1 h^2}{2\mu} (2\mu \operatorname{div} \varepsilon(v_h), \nabla p_h)_{\tilde{\Omega}} \quad (18)$$

$$c_h(p_h, q_h) = -\frac{\delta_1 h^2}{2\mu} (\nabla p_h, \nabla q_h)_{\tilde{\Omega}} \quad (19)$$

$$f_h(v_h) = (f, v_h) + \frac{\delta_1 h^2}{2\mu} (f, 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(v_h))_{\tilde{\Omega}} \quad (20)$$

$$g_h(q_h) = -\frac{\delta_1 h^2}{2\mu} (f, \nabla q_h)_{\tilde{\Omega}} \quad (21)$$

and  $(\cdot, \cdot)_{\tilde{\Omega}}$  denotes the  $L_2(\tilde{\Omega})$  inner product.

#### Remarks.

1. By the regularity requirements the pressure approximation, in principle, may consist of discontinuous functions. The continuous approximation employed here is necessary for the error estimates derived in [3].

2. The finite element errors satisfy [3, 4]

$$\mu \|\varepsilon(u_h - u)\|^2 + \frac{\delta_1 h^2}{2\mu} \|\nabla(p_h - p)\|_{\tilde{\Omega}}^2 + 2\mu \delta_2 \|\operatorname{div}(u_h - u)\|^2 \leq C(u)h^{2k} + C(p)h^{2(1+k)} \quad (22)$$

for  $\delta_1$  sufficiently small if  $\operatorname{div} \varepsilon(v_h) \neq 0$ .

3. The present formulation is stable for any combination of continuous finite element polynomial approximations of velocity and pressure. In particular,

• for  $k \leq 1+1$ , it is convergent with optimal rate for the velocity error in the  $H^1$ -norm and sub-optimal (optimal if  $k=1+1$ ) rate for the error in pressure gradient in the  $L_2$ -norm (with "gap"  $1+1-k$ ).

• for  $k > 1+1$ , it is convergent with optimal rate for the error in pressure gradient in the  $L_2$ -norm and suboptimal rate for the velocity error in the  $H^1$ -norm (with "gap"  $k-1-1$ ).

4. A variant of the present method with the  $\delta_1$  sign changed is proposed in [9]. Therein the discontinuous pressure approximations are stable.

5. A formulation which allows combination of arbitrary velocity/pressure spaces was developed in [7]. The formulation possesses one additional term compared to the present method. This term enforces pressure continuity weakly and its inclusion allows use of all discontinuous pressure approximations, which is not permitted within the present method.

#### STRESS-VELOCITY EQUATIONS AND VARIATIONAL FORMULATION

In terms of stress and velocity the Stokes equations are:

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0} \quad \text{on } \Omega \quad (22)$$

$$\frac{1}{2\mu} [\underline{\sigma} - \frac{1}{d} \operatorname{tr} \underline{\sigma} \mathbf{I}] = \underline{\varepsilon}(u) \quad \text{on } \Omega \quad (23)$$

$$\underline{u} = \underline{0} \quad \text{on } \Gamma \quad (24)$$

Defining

$$W = (L_2(\Omega))^{d(d+1)/2} \quad (25)$$

$$V = (H_0^1(\Omega))^d \quad (26)$$

the variational formulation corresponding to (22)-(24) is: Find  $\{\underline{\sigma}, \underline{u}\} \in W \times V$  such that

$$a(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) + b(\underline{\tau}, \underline{u}) = 0, \quad \forall \underline{\tau} \in W \quad (27)$$

$$b(\underline{\sigma}, \underline{v}) = f(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in V \quad (28)$$

where

$$a(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) = -\frac{1}{2\mu} [(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) - \frac{1}{d} (\operatorname{tr} \underline{\sigma}, \operatorname{tr} \underline{\tau})] \quad (29)$$

$$b(\underline{\tau}, \underline{u}) = (\underline{\tau}, \underline{\varepsilon}(u)) \quad (30)$$

$$f(\underline{v}) = (\underline{f}, \underline{v}) \quad (31)$$

#### STRESS-VELOCITY FINITE ELEMENT METHOD

Consider the following discrete spaces

$$W_h = \{\underline{\sigma}_h | \sigma_i^e \in P_1(\Omega^e), i=1, \dots, d(d+1)/2, e=1, \dots, n_{e1}\} \quad (32)$$

$$V_h = \{u_h | u_i^e \in P_k(\Omega^e), i=1, \dots, d, e=1, \dots, n_{e1}\} \cap V \quad (33)$$

The approximation of (27)-(31) employing the SBB method [4, 5] is: Find  $\{\underline{\sigma}_h, \underline{u}_h\} \in W_h \times V_h$  such that

$$a_h(\underline{\sigma}_h, \underline{\tau}_h) + b(\underline{\tau}_h, \underline{u}_h) = g_h(\underline{\tau}_h), \quad \forall \underline{\tau}_h \in W_h \quad (34)$$

$$b(\underline{\sigma}_h, \underline{v}_h) = f(\underline{v}_h), \quad \forall \underline{v}_h \in V_h \quad (35)$$

where

$$a_h(\underline{\sigma}_h, \underline{\tau}_h) = a(\underline{\sigma}_h, \underline{\tau}_h) - \frac{\delta h^2}{2\mu} (\operatorname{div} \underline{\sigma}_h, \operatorname{div} \underline{\tau}_h)_{\tilde{\Omega}} \quad (36)$$

$$g_h(\underline{\tau}_h) = \frac{\delta h^2}{2\mu} (f, \operatorname{div} \underline{\tau}_h)_{\tilde{\Omega}} \quad (37)$$

#### Remarks.

1. Note that stresses are approximated by discontinuous finite element polynomials. This allows elimination at element level, resulting in a matrix formulation in terms of velocity only.

2. For triangular finite element polynomials with  $2 \leq k \leq 1+l$  and for quadrilateral finite element polynomials with  $2 \leq k \leq 1$ , the errors in the finite element solution satisfy [4]

$$\| \sigma_h - \sigma \| + \delta^{1/2} \sup_{\substack{\tau_h \in W_h \\ \text{div} \tau_h \neq 0}} \frac{h |(\text{div} \sigma_h - \sigma), \text{div} \tau_h|}{\| \text{div} \tau_h \|_{\Omega}} + \| u_h - u \|_{H^1} \leq c(\sigma, u) h^k \quad (38)$$

3. Requiring velocity interpolations of order greater or equal than two, provides stability of the piecewise constant modes of the pressure part of the stress variable. All other pressure modes are controlled via the additional  $\delta$ -term.

#### REFERENCES

- [1] Babuška, I., Error bounds for finite element method, Numerische Mathematik, 16: 322-333 (1971).
- [2] Brezzi, F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers, RAIRO, Ser. Rouge Anal. Numér., R-2: 129-151 (1974).
- [3] Franca, L.P., New mixed finite element methods, Ph.D. Thesis, Applied Mechanics Division, Stanford University, Stanford, CA, 1987.
- [4] Franca, L.P. and Hughes, T.J.R., Two classes of mixed finite element methods, to appear in Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
- [5] Franca, L.P., Hughes, T.J.R., Loula, A.F.D. and Miranda, I., A new family of stable elements for nearly incompressible elasticity based on a mixed Petrov-Galerkin finite element formulation, presented in the conference on "The Impact of Mathematical Analysis on the Solution of Engineering Problems", University of Maryland, 1986. To appear in Numerische Mathematik.
- [6] Hughes, T.J.R., The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1987).
- [7] Hughes, T.J.R. and Franca, L.P., A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. The Stokes Problem with Various Well-posed Boundary Conditions: Symmetric Formulations that Converge for all Velocity/Pressure Spaces, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 65: 85-96 (1987).
- [8] Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra, M., A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi Condition: A Stable Petrov-Galerkin Formulation of the Stokes Problem Accommodating Equal-order Interpolations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 59: 85-99 (1986).
- [9] Loula, A.F.D. and Karam Filho, J., Mixed Petrov-Galerkin finite element methods for Stokes problem with discontinuous pressure interpolation of any order, to appear in the Proceedings of PACAM 89.



NEW MIXED PETROV-GALERKIN FINITE ELEMENT FORMULATIONS  
FOR INCOMPRESSIBLE FLOWS



JOSÉ KARAM FILHO  
ABIMAEI F.D. LOULA  
Laboratório Nacional de Computação Científica  
Rua Lauro Müller, 455  
22290, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

ABSTRACT

New mixed Petrov-Galerkin finite element methods for Stokes problem with continuous velocity and discontinuous pressure interpolations are presented. Stability and convergence of mixed methods rely on the satisfaction of Babuška-Brezzi condition (LBB), which normally imposes severe limitations to standard Galerkin formulations. With the new formulation LBB is restricted to an elementwise constant pressure field and stability is achieved for equal order interpolations which are Galerkin unstable. Numerical examples show the performance of the new method compared with classical ones.

INTRODUCTION

Galerkin's method has been the most popular approach in constructing finite element approximations of boundary value problems. For strongly elliptic problems it is normally very efficient and extremely easy to implement, but when applied to internally constrained boundary value problems Galerkin's approach may lead to severe limitations in constructing finite element approximations. In the Stokes problem the constraint originates from the divergence free condition on the velocity field. To avoid the satisfaction of this internal constraint from the start it is usual to apply the Lagrange multiplier technique which begets a mixed method. For this kind of formulation, it is well known that only very few combinations of velocity and pressure interpolations are stable within Galerkin approach. For example, equal order discontinuous pressure and continuous velocity interpolations are Galerkin unstable exhibiting pathological phenomena like locking of the velocity field and spurious pressure oscillations.

In this work the mixed Petrov-Galerkin finite element formulation introduced in [1] is applied to the analysis of incompressible Stokes flows. It is constructed by adding to the classical Galerkin formulation least-squares of the governing equations in the interior of the elements, accommodating discontinuous pressure interpolations of any order combined with quadratic or higher order continuous velocity interpolation.

With the new formulation, the LBB condition [2,3] is restricted to an elementwise constant pressure field, recovering stability and convergence of rather general combinations of velocity and pressure interpolations which are Galerkin unstable.

STATEMENT OF THE PROBLEM

Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , with smooth boundary  $\partial\Omega$ . Let  $L_2(\Omega)$  be the Hilbert space of square integrable functions on  $\Omega$  with inner product and norm defined, respectively, by

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg \, d\Omega, \quad \forall f, g \in L_2(\Omega), \quad (1)$$

$$\|g\| = (g, g)^{1/2}, \quad \forall g \in L_2(\Omega) \quad (2)$$

Let  $H_0^1(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega); \nabla f \in (L_2(\Omega))^n, f=0 \text{ on } \partial\Omega\}$ , with norm

$$\|f\|_H = [(f, f) + (\nabla f, \nabla f)]^{1/2}. \quad (3)$$

With

$$W = \{q \in L_2(\Omega); \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0\} \quad \text{and} \\ V = \{v \in (H_0^1(\Omega))^n\}$$

representing the space of pressure field  $p$ , and velocity field  $u$ , respectively, the Stokes problem governing linear incompressible creeping flows consists in

Problem M. Given the density of body forces  $f \in V^*$  dual space of  $V$ , find the pair  $(u, p) \in V \times W$  such that

$$a(u, v) + b(p, v) = f(v), \quad \forall v \in V, \quad (4)$$

$$b(q, u) = 0, \quad \forall q \in W. \quad (5)$$

Where the bilinear forms  $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  and  $b(\cdot, \cdot): W \times V \rightarrow \mathbb{R}$  are given by

$$a(u, v) = 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(u) \varepsilon(v) \, d\Omega, \quad \forall u, v \in V, \quad (6)$$

$$b(q, u) = \int_{\Omega} q \operatorname{div} u \, d\Omega, \quad \forall q \in W. \quad (7)$$

with  $\varepsilon(u) = (\nabla u + \nabla u^T)/2$  and  $\mu$  being the viscosity of the fluid and  $f(\cdot)$  is the following linear form

$$f(v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega, \quad \forall v \in V. \quad (8)$$

Existence and uniqueness of the standard mixed Problem M are dictated by Brezzi's theorem [3].

GALERKIN FORMULATION

Choosing finite dimensional subspaces  $V_h \subset V$  and  $W_h \subset W$ , in which  $W_h$  is the space of  $C^{-1}$  piecewise polynomial finite element interpolations of degree  $l$  and  $V_h$  the space of  $C^0$  polynomial finite element interpolations of degree  $k$ , homogeneous on the boundary and  $h$  being the mesh diameter, the standard Galerkin method is defined by

**Problem  $G_h$ .** Given  $f$ , find  $\{u_h, p_h\} \in V_h \times W_h$  such that

$$a(u_h, v_h) + b(p_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (9)$$

$$b(q_h, u_h) = 0, \quad \forall q_h \in W_h. \quad (10)$$

Brezzi's theorem is also applicable to prove existence and uniqueness of Problem  $G_h$ .  $V_h$ -ellipticity of  $a(\cdot, \cdot)$  is immediate since  $V_h \subset V$  and  $a(\cdot, \cdot)$  is  $V$ -elliptic. The problem is the discrete LBB condition,

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{(q_h, \text{div } v_h)}{\|v_h\|_V} \geq \beta_h \|q_h\|_W, \quad \forall q_h \in W_h, \quad (11)$$

which has to be verified for each particular combination of  $V_h$  and  $W_h$  with  $\beta_h$  independent of  $h$ . It is well known that very few combinations of  $v_h$  and  $p_h$  interpolations are able to fulfill Eq.(11) within Galerkin formulation. Violation of the discrete LBB leads to non uniqueness of the pressure field and degradation of the velocity approximation.

Pathologies mentioned before can be seen in fig. 2, 3 and 4 for the cavity problem of fig. 1. In fig. 2 the locking of the velocity field is illustrated for the  $4 \times 4$ -discontinuous pressure element. The same phenomenon occurs for the  $3 \times 3$ -element with discontinuous pressure. Fig. 3 shows the velocity field for the  $4 \times 4$ -continuous pressure element with its correspondent pressure oscillation field. For the  $9 \times 9$ -discontinuous element the velocity behaves as in fig. 3a, but its pressure oscillates as can be seen in fig. 4a. Fig. 4b represents the pressure field for the  $6 \times 6$ -continuous element which illustrates the spurious "checkerboard" mode.

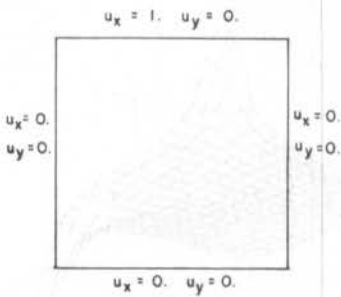


Fig. 1 - Cavity problem

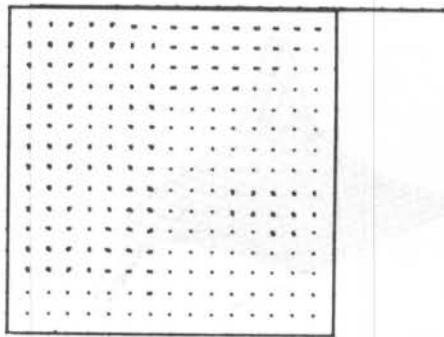
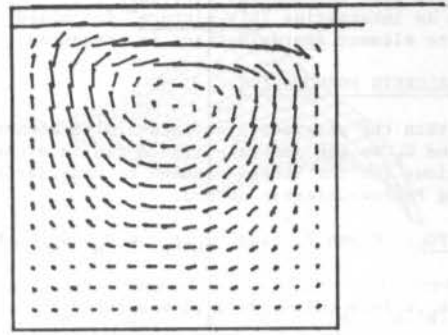
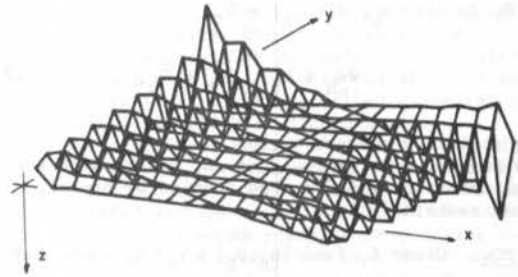


Fig. 2 - "Locking" of  $u$  for the  $4 \times 4$ -disc. element

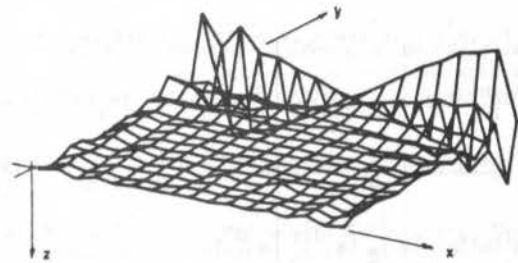


(a) - velocity field

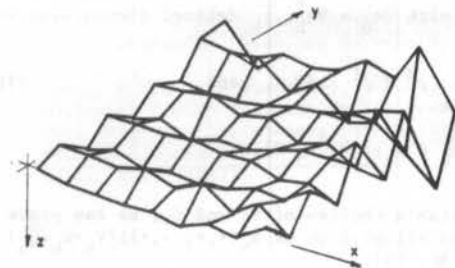


(b) - pressure oscillation

Fig. 3 -  $4 \times 4$ -cont. pressure element



(a)  $9 \times 9$ -disc. element (pressure)



(b) "Checkerboard" pressure -  $6 \times 6$ - cont. element

Fig. 4 - Pressure oscillations

It is also recommended reference [4], chapter 4 in which an interesting "big-picture" for mixed Galerkin finite element approximations is presented.

#### PETROV-GALERKIN FORMULATION

Within the previously defined finite element spaces  $V_h$  and  $W_h$  we can generate stable finite element approximations for the Stokes problem by considering the following Petrov-Galerkin method.

**Problem PG<sub>h</sub>.** Given  $f$ , find  $\{u_h, p_h\} \in V_h \times W_h$  such that

$$\begin{aligned} & a(u_h, v_h) - (p_h, \operatorname{div} v_h) - (q_h, \operatorname{div} u_h) - f(v_h) + \\ & + \frac{\delta_1 h^2}{2\mu} (-2\mu \operatorname{div} \varepsilon(u_h) + \nabla p_h - f, -2\mu \operatorname{div} \varepsilon(v_h) + \nabla q_h) + \\ & + \delta_2 2\mu (\operatorname{div} u_h, \operatorname{div} v_h) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Psi_{v_h} \in V_h, \quad \Psi_{q_h} \in W_h,$$

with the scalar parameters  $\delta_1, \delta_2 > 0$ .

As stated, Problem PG<sub>h</sub> does not fit in with the classical format of mixed method studied by Brezzi, but we may restate it as

**Problem PG<sub>h</sub>.** Given  $f$ , find  $\{u_h, p_h\} \in V_h \times W_h$  such that

$$\begin{aligned} & a_h(u_h, p_h; v_h, q_h^*) + b_h(p_h, v_h) = F_h(v_h, q_h^*), \\ & \Psi_{v_h} \in V, \quad \Psi_{q_h^*} \in W_h / \bar{Q}_h \end{aligned} \quad (13)$$

$$b_h(\bar{q}_h, u_h) = 0, \quad \Psi_{\bar{q}_h} \in \bar{Q}_h, \quad (14)$$

which falls into the standard framework of mixed methods, with

$$\begin{aligned} & a_h(u_h, p_h; v_h, q_h^*) = a(u_h, v_h) - b(p_h, v_h) - b(q_h^*, u_h) + \\ & + \frac{\delta_1 h^2}{2\mu} (-2\mu \operatorname{div} \varepsilon(u_h) + \nabla p_h^* - f, -2\mu \operatorname{div} \varepsilon(v_h) + \nabla q_h^*) + \\ & + \delta_2 2\mu (\operatorname{div} u_h, \operatorname{div} v_h) \end{aligned} \quad (15)$$

$$b_h(p_h, v_h) = - \int_{\Omega} \bar{p}_h \operatorname{div} v_h \, d\Omega, \quad (16)$$

$$F_h(v_h, q_h^*) = f(v_h) - \frac{\delta_1 h^2}{2\mu} (f, 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(v_h)) + \frac{\delta_1 h^2}{2\mu} (f, \nabla q_h^*), \quad (17)$$

$q_h = q_h^* + \bar{q}_h$ , with  $\nabla q_h = \nabla q_h^*$ ,  $\bar{p}_h$  defined elementwise as

$$\bar{p}_e = \int_{\Omega^e} p^e \, d\Omega / \int_{\Omega^e} d\Omega \quad \text{and} \quad (18)$$

$$\bar{Q}_h = \{\bar{q}_h \in W_h; \nabla \bar{q}_h = 0\}.$$

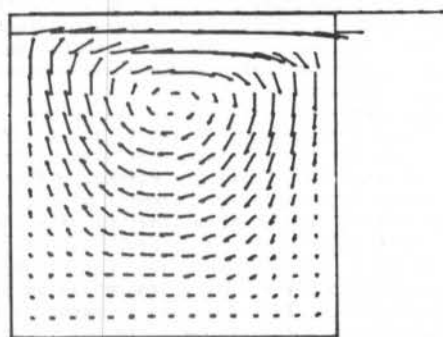
For suitable choices of  $\delta_1$  and  $\delta_2$ , we can prove continuity and ellipticity of  $a_h(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot): (V_h \times W_h / \bar{Q}_h) \times (V_h \times W_h / \bar{Q}_h) \rightarrow \mathbb{R}$ , [5].

Therefore the stability condition for this type of Petrov-Galerkin method is the following restricted format of LBB condition

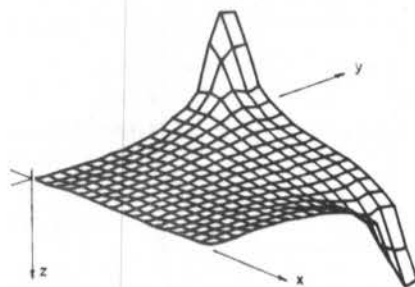
$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{(\bar{q}_h, \operatorname{div} v_h)}{\|v_h\|_V} \geq \bar{\beta} \|\bar{q}_h\|_{W_h}, \quad \Psi_{\bar{q}_h} \in \bar{Q}_h \quad (19)$$

which is clearly much easier to satisfy than its counterpart Eq. (11) for Galerkin method. It makes possible new choices of  $V_h$  and  $W_h$ , and even equal order interpolations become available.

As can be seen in the following figures for the same example of fig. 1, with all meshes done with 289 nodes. Fig. 5 shows results for the  $4 \times 4$ -PG<sub>h</sub> stable element with  $\delta_1=1.$ ,  $\delta_2=10.$  Fig. 6 depicts the stable pressure field for  $\delta_1=100.$ ,  $\delta_2=10.$  with the previous element. Solutions for the  $9 \times 9$ -PG<sub>h</sub> stable element are illustrated in fig. 7 for  $\delta_1=1.$ ,  $\delta_2=5.$ , fig. 8 for  $\delta_1=10^3$ ,  $\delta_2=10.$  and fig. 9 for  $\delta_1=1.$ ,  $\delta_2=3.$ , with the velocities being very likely that of fig. 7a and pressure contours also like fig. 7c.



(a) velocity field



(b) pressure field

Fig. 5 -  $4 \times 4$ -PG<sub>h</sub> element,  $\delta_1 = 1.$ ,  $\delta_2 = 10.$

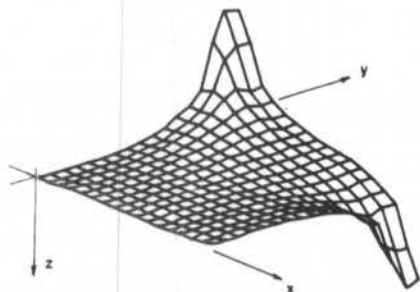
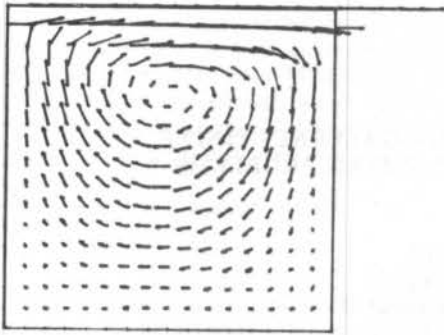
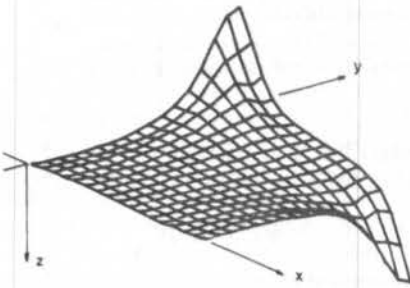


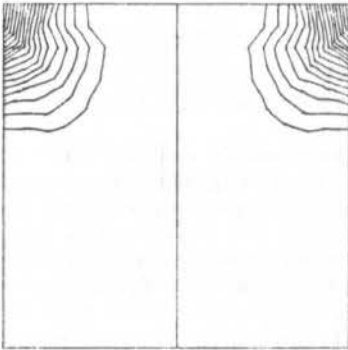
Fig. 6 -  $4 \times 4$ -PG<sub>h</sub> element,  $\delta_1=100.$ ,  $\delta_2=10.$  (pressure)



(a) velocity field



(b) pressure field



(c) pressure contours

Fig. 7 -  $9 \times 9$  -  $PG_h$  element,  $\delta_1 = 1.$ ,  $\delta_2 = 5.$

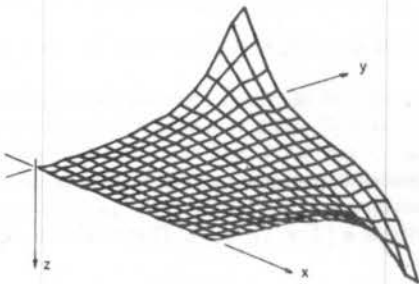


Fig. 8 -  $9 \times 9$  -  $PG_h$  element,  $\delta_1 = 10^3,$   $\delta_2 = 10.$  (pressure)

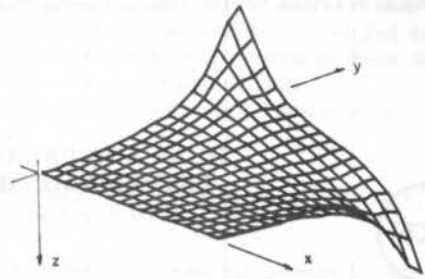


Fig. 9 -  $9 \times 9$  -  $PG_h$  element,  $\delta_1 = 1.,$   $\delta_2 = 3.$  (pressure)

#### CONCLUSIONS AND REMARKS

- . Stability of these new formulations is enhanced by a wide range of  $\delta_1, \delta_2$  terms, by restricting LBB condition to a piecewise constant pressure field.
- . Taking  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ , Problem  $PG_h$  gets back to Galerkin formulation which in this case is unstable. When  $\delta_1 = 0$  only  $PG_h$  falls into what is called augmented Lagrangian method [6] which is also unstable.
- . This method differs from a similar one introduced by Franca [7] for the same problem. Differences stay in the fact that here the pressure is discontinuously interpolated and LBB condition is not circumvented but weakened due to an elementwise constant field.
- . This type of mixed method has been successfully applied to construct stable finite element approximations to other internal constrained problems as can be seen in [1, 7, 8] and references therein.

#### REFERENCES

- [1] Loula, A.F.D.; Hughes, T.J.R.; Franca, L.P. and Miranda, I., Mixed Petrov-Galerkin method for the Timoshenko beam, *Computer Methods in Applied Mech. and Eng.*, vol. 63, pp. 133-154 (1987).
- [2] Babuška, I., Error bounds for finite element method, *Numerische Mathematik*, vol. 16, pp. 322-333 (1971).
- [3] Brezzi, F., On the existence, uniqueness and approximation of Saddle-point problems arising from Lagrange multipliers, *RAIRO, Ser. Rouge Aud. Numer.*, R-2, pp. 129-151 (1974).
- [4] Hughes, T.J.R., *The finite element method*, Prentice-Hall (1987).
- [5] Karam Filho, J. and Loula, A.F.D., Stability of a mixed Petrov-Galerkin finite element formulation for incompressible flow, XI CNMAC, 1988.
- [6] Fortin, M. and Glowinski, R., *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the numerical solution of boundary-value problems*, North Holland (1983).
- [7] Franca, L.P., *New mixed finite element methods*, PhD Dissertation, Stanford University (1987).
- [8] Loula, A.F.D. and Guerreiro, J.N.C., Mixed Petrov-Galerkin finite formulation for creep analysis, VIII Congresso Latino-Americano e Iberico sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Rio de Janeiro, Nov. (1987).

DUAL AND PRIMAL MIXED PETROV-GALERKIN FINITE ELEMENT METHODS IN HEAT TRANSFER PROBLEMS



ABIMAEF F. D. LOULA  
 ELSON MAGALHÃES TOLEDO  
 Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC/CNPq

ABSTRACT

New mixed finite element formulations for the steady state heat transfer problem are presented with no limitation in the choice of conforming finite element spaces. Adding least square residual forms of the governing equations to the classical Galerkin formulation the original saddle point problem is transformed into a minimization problem. Stability analysis, error estimates and numerical results are presented, confirming the error estimates and the good performance of this new formulation.

INTRODUCTION

Constructing finite element approximations for the classical heat transfer equation presents no difficulty, in general. It can be formulated as a minimization problem in which any conforming finite element method is normally convergent with optimal rates. In this formulation the flux can only be calculated as derivative of the temperature field. To improve the flux approximation we can consider temperature and flux as independent variables generating a saddle point problem. Two alternative formulations are usually presented: the primal mixed formulation with temperature in  $H^1$  and flux in  $(L^2)^2$ , and the dual mixed formulation with temperature in  $L^2$  and flux in  $H(\text{div})$ , as first proposed by Raviart and Thomas [1]. In both formulations we are limited in the choice of the finite element spaces, which must satisfy a compatibility condition known as LBB condition [2,3]. In this paper, following the methodology introduced in [4], we derive new mixed finite element formulations for the heat transfer problem in temperature and flux with less and even no limitation in the choice of the finite element spaces. We show that by consistently adding least square residual forms of the governing equations we can transform the original saddle-point problem into a minimization problem.

CLASSICAL MIXED FORMULATIONS

Let  $\Omega$  be a bounded subset of  $R^2$  with smooth boundary  $\Gamma$ . Let  $L^2(\Omega)$  be the Hilbert space of square integrable scalar valued functions defined on  $\Omega$ , with inner product

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg \, d\Omega \quad \forall f, g \in L^2(\Omega),$$

and associated norm  $\|f\|_0 = (f, f)^{1/2}$ . Let  $H^m(\Omega)$  be the Hilbert space of order  $m$ ,

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha f \in L^2(\Omega)\},$$

with the usual inner product

$$(f, g)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha f \partial^\alpha g \, d\Omega \quad \forall f, g \in H^m(\Omega),$$

norm  $\|f\|_m = (f, f)_m^{1/2}$  and seminorm  $|f|_m = (\partial^m f, \partial^m f)^{1/2}$ . Let  $V$  denote the subspace of  $H^1(\Omega)$  of functions with zero values

on the boundary, i.e.,  $V = H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega), f = 0 \text{ on } \Gamma\}$ . We also need to define the product space  $U = L^2(\Omega)^2$  with norm

$$\|q\|_U = (q, q)^{1/2},$$

and the subspace  $H(\text{div}) = \{q \in U, \text{div} q \in L^2(\Omega)\}$  with norm

$$\|q\|_{H(\text{div})} = \{(q, q) + (\text{div} q, \text{div} q)\}^{1/2}.$$

The Primal Mixed Formulation. The steady state heat transfer problem we consider here consists in: For a given heat source  $f$  find the heat flux  $p : \Omega \rightarrow R^2$  and the temperature  $u : \Omega \rightarrow R$ , satisfying

$$\text{div} p + f = 0 \quad \text{and} \quad p = K \nabla u \quad \text{in } \Omega,$$

subjected to Dirichlet boundary condition  $u(x) = 0$  on  $\Gamma$ , with the conductivity tensor  $K$  being symmetric and positive definite. Of course, more general boundary conditions can be considered. Admitting  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $p \in U$  and  $u \in V$ , using Hellinger-Reissner Principle we can state our model problem as

**Problem M:** Find  $(p, u) \in U \times V$ , such that

$$a(p, q) + b(q, u) = 0 \quad \forall q \in U,$$

$$b(p, v) + f(v) = 0 \quad \forall v \in V,$$

with  $a(p, q) = (K^{-1}p, q)$ ,  $b(q, v) = -(q, \nabla v)$  and  $f(v) = (f, v)$ . We can prove that **Problem M** is equivalent to find the saddle-point  $(p, u) \in U \times V$  of the following lagrangian

$$L(q, v) = \frac{1}{2} a(q, q) + b(q, v) + f(v) \quad \forall q \in U \quad \forall v \in V.$$

An analysis of this class of mixed methods can be performed using Brezzi's theorem [3] which, in addition to continuity of the bilinear forms  $a(\cdot, \cdot)$  and  $b(\cdot, \cdot)$ , and the linear functional  $f(\cdot)$ , requires the following hypotheses to demonstrate existence and uniqueness of solution:

(H1)-(E-ellipticity of  $a : U \times U \rightarrow R$ ): There exists a constant  $\alpha > 0$  such that

$$a(q, q) \geq \alpha \|q\|_U^2 \quad \forall q \in E = \{q \in U, b(q, v) = 0 \quad \forall v \in V\}$$

(H2)-(The LBB condition): There exists a constant  $\beta > 0$  such that

$$\sup_{q \in U} \frac{b(q, v)}{\|q\|_U} \geq \beta \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$



These hypotheses are obviously verified by the bilinear forms  $a(\cdot, \cdot)$  and  $b(\cdot, \cdot)$ . Therefore we have guaranteed existence and uniqueness of solution for **Problem M** in  $U \times V$ . In fact, hypothesis (H1) is fulfilled in a stronger sense: The bilinear form  $a(\cdot, \cdot)$ , as defined before, is not only  $E$ -elliptic but also  $U$ -elliptic, i.e., there exists a constant  $\alpha > 0$ , such that

$$a(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geq \alpha \|\mathbf{q}\|_U^2 \quad \forall \mathbf{q} \in U. \quad (1)$$

This fact has a beneficial effect in constructing stable finite element approximations for **Problem M**, as we show next. For simplicity we admit that  $\Omega$  is a polygonal domain discretized by a uniform mesh of  $N_e$  elements such that

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega^e \quad \text{with} \quad \theta = \bigcap_{e=1}^{N_e} \Omega^e,$$

where  $\Omega^e$  denotes the interior of the  $e$ -th element, and  $\bar{\Omega}^e$  its closure. Throughout,  $h = \max h_e$ , denotes the mesh parameter and  $h_e$  is the diameter of element  $e$ . Let  $Q_h^l(\Omega)$  be the space of  $C^{-1}$  piecewise polynomial finite element interpolation of degree  $l$ , and  $S_h^k(\Omega)$  be the space of  $C^0$  piecewise polynomial finite element interpolations of degree  $k$ , in a single variable for quadrilateral elements or in all variable for triangular elements. In other word  $Q_h^l$  and  $S_h^k(\Omega)$  are standard isoparametric finite element spaces of order  $l$  and  $k$ , respectively. For rectangular elements

$$Q_h^l(\Omega) = \{\phi_h \in L^2(\Omega), \phi_h^e \in P_{l,i}(\Omega^e)\}$$

and

$$S_h^k(\Omega) = \{\mathbf{v}_h \in H^1(\Omega), \mathbf{v}_h^e \in P_{k,h}(\Omega^e)\}$$

where  $\phi_h^e$  and  $\mathbf{v}_h^e$  are the restrictions of  $\phi_h$  and  $\mathbf{v}_h$  to element  $e$ , and  $P_{i,j}(\Omega^e)$  is the set of polynomials defined on  $\Omega^e$ , with degree less or equal  $i$  and  $j$  in  $x_1$  and  $x_2$ , respectively. For triangular elements

$$Q_h^l(\Omega) = \{\phi_h \in L^2(\Omega), \phi_h^e \in P_l(\Omega^e)\}$$

and

$$S_h^k(\Omega) = \{\mathbf{v}_h \in H^1(\Omega), \mathbf{v}_h^e \in P_k(\Omega^e)\}$$

where  $P_j(\Omega^e)$  is the set of polynomials defined on  $\Omega^e$ , with degree less or equal  $j$  in  $x_1, x_2$ . We recall the following interpolation properties of the finite element spaces  $S_h^k(\Omega)$  and  $Q_h^l$ , whose proofs can be found in Ciarlet [5].

**Theorem 1.** For any  $\mathbf{v} \in H^m(\Omega)$  and  $\phi \in H^n(\Omega)$  there exist constants  $C_1$  and  $C_2$  and projections  $\bar{\mathbf{v}}_h \in S_h^k(\Omega)$  and  $\bar{\phi}_h \in Q_h^l$  such that

$$\|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_h\|_0 + h \|\nabla \mathbf{v} - \nabla \bar{\mathbf{v}}_h\|_0 \leq C_1 h^{m+1} |\mathbf{v}|_{m+1}, \quad 1 \leq m \leq k, \quad (2)$$

$$\|\phi - \bar{\phi}_h\|_0 + h \|\nabla \phi - \nabla \bar{\phi}_h\|_0 \leq C_2 h^{n+1} |\phi|_{n+1}, \quad 0 \leq n \leq l. \quad (3)$$

Galerkin finite element approximation for **Problem M** in the product space  $U_h^l \times V_h^k = (Q_h^l)^2 \times S_h^k$ , is

**Problem  $M_h$ :** Find  $(\mathbf{p}_h, \mathbf{u}_h) \in U_h^l \times V_h^k$ , such that

$$a(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) + b(\mathbf{q}_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{q}_h \in U_h^l,$$

$$b(\mathbf{p}_h, \mathbf{v}_h) + f(\mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k.$$

To prove existence and uniqueness of solution for **Problem M**, we need to verify the satisfaction of discrete versions of (H1) and

(H2). In our case (H1) is automatically verified due to Eq. (1) and the fact that we adopt a conforming finite element space,  $U_h^l \subset U$ . The discrete version of (H2),

(H2)<sub>h</sub>-(Discrete LBB condition): There exists a constant  $\beta_h > 0$  such that

$$\sup_{\mathbf{q}_h \in U_h^l} \frac{b(\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{q}_h\|_U} \geq \beta_h \|\mathbf{v}_h\|_V, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k,$$

imposes a compatibility condition between  $U_h^l$  and  $V_h^k$ : Not any choice of  $U_h^l$  and  $V_h^k$  satisfies (H2)<sub>h</sub>. But for **Problem  $M_h$**  it is quite easy to obtain combinations of  $U_h^l$  and  $V_h^k$  capable to fulfill this condition. For example for  $l \geq k$ , hypothesis (H2)<sub>h</sub> is trivially verified, since with this choice we can always choose  $\mathbf{q}_h = \bar{\mathbf{q}}_h = -\nabla \mathbf{v}_h \in U_h^l$ , for any  $\mathbf{v}_h \in V_h^k$ , such that

$$\sup_{\mathbf{q}_h \in U_h^l} \frac{b(\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{q}_h\|_U} \geq \frac{b(\bar{\mathbf{q}}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\bar{\mathbf{q}}_h\|_U} = \|\nabla \mathbf{v}_h\|_V \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k,$$

and (H2)<sub>h</sub> follows immediately from Poincaré inequality. Once hypotheses (H1)<sub>h</sub> and (H2)<sub>h</sub> are verified, we can use Brezzi's theorem [3] on the approximate problem to derive the following estimate for  $(\mathbf{p}_h, \mathbf{u}_h)$

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_U + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C(\|\mathbf{p} - \mathbf{q}_h\|_U + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V) \quad \forall \mathbf{q}_h \in U_h^l \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^k, \quad (4)$$

which shows that the error in the flux  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_U$  and the error in the temperature  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V$  are coupled. Therefore, concerning to convergence rates, it does not help to increase the order of the finite element interpolation for the flux independently of the order of the interpolation used for the temperature, and vice versa. For example, taking  $l = k$ , a good choice from computational point of view, from (4) and using classical results of the finite element interpolation theory we have the following error estimates:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 + h \|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^{k+1}, \quad \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_0 \leq Ch^k.$$

The same rates of convergence are obtained with the classical kinematic formulation. Note in addition that even with  $l > k$  these estimates are preserved. For  $l < k$  we may have problems with the satisfaction of the discrete LBB condition with  $\beta_h$  independent of  $h$ , except for  $l = k - 1$  and triangular elements. Conclusion: **This type of mixed methods tends to work like the correspondent kinematic model.**

**The Dual Mixed Formulation.** We now suppose that  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{p} \in H(\text{div})$  and  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ , and restate **Problem  $M^*$ :** Find  $(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in H(\text{div}) \times L^2(\Omega)$  such that

$$a(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + b^*(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in H(\text{div}),$$

$$b^*(\mathbf{p}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega),$$

with  $a(\cdot, \cdot)$  and  $f(\cdot)$  as defined before but in  $H(\text{div})$  and  $L^2(\Omega)$ , respectively, and

$$b^*(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = (\text{div} \mathbf{q}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{q} \in H(\text{div}) \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega).$$

In this dual formulation continuity of  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $b^*(\cdot, \cdot)$  and  $f(\cdot)$  are preserved in  $H(\text{div})$  and  $L^2(\Omega)$ . The LBB condition for  $\mathbf{v}$  is also verified, but the ellipticity of  $a(\cdot, \cdot)$  in  $H(\text{div})$ -norm is restricted to the subspace of self equilibrated flux  $E = E(0)$ , i.e., (H1)<sup>\*</sup>-(E-ellipticity of  $a: U \times U \rightarrow R$ ): There exists a constant  $\alpha > 0$  such that

$$a(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geq \alpha \|\mathbf{q}\|_{H(\text{div})}^2 \quad \forall \mathbf{q} \in E,$$

(H2)\*-(The LBB condition): There exists a constant  $\beta > 0$  such that

$$\sup_{\mathbf{q} \in H(\text{div})} \frac{b^*(\mathbf{q}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{q}\|_{H(\text{div})}} \geq \beta \|\mathbf{v}\|_0, \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega).$$

Hypothesis (H1)\* is immediate, since by definition we have  $E = \{\mathbf{q} \in H(\text{div}), \text{div} \mathbf{q} = 0\}$ . Hypotheses (H2)\*, the LBB condition, is proved by solving the auxiliary problem. For each  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$  find  $\phi_{\mathbf{v}} \in H_0^1(\Omega)$  such that  $\text{div} \nabla \phi_{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ . Therefore,  $\mathbf{q}_{\mathbf{v}} = \nabla \phi_{\mathbf{v}} \in H(\text{div})$  with

$$b(\mathbf{q}_{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|_0^2 \quad \text{and} \quad \|\mathbf{q}_{\mathbf{v}}\|_{H(\text{div})} \leq C \|\mathbf{v}\|_0. \quad (5)$$

The LBB condition then follows from Eq.(5). To approximate Problem  $M^*$  we consider Raviart-Thomas spaces  $W_h^k \times M_h^k$  of order  $k$ . Where  $M_h^k \subset L^2(\Omega)$  is identical to  $Q_h^{k-1}$ , and

$$W_h^k = \{\mathbf{q}_h \in H(\text{div}), \mathbf{q}_h^e \in P_{k,k-1}(\Omega^e) \times P_{k-1,k}(\Omega^e)\}$$

for rectangular elements, or

$$W_h^k = \{\mathbf{q}_h \in H(\text{div}), \mathbf{q}_h^e \in P_{k-1}(\Omega^e) \times P_{k-1}(\Omega^e) + \mathbf{x}P_{k-1}(\Omega^e)\}$$

for triangular elements. These finite element spaces have the following interpolation property whose proof can be found in Raviart and Thomas [1] or in Roberts and Thomas [6].

**Theorem 2:** There exists a constant  $C$  and one projection  $\tilde{\mathbf{q}}_h \in W_h^k$  such that

$$\|\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}_h\|_0 \leq Ch^m |\mathbf{q}|_m \quad \forall \mathbf{q} \in (H^m(\Omega))^2, \quad 1 \leq m \leq k, \quad (6)$$

$$\|\text{div}(\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}_h)\|_0 \leq Ch^m |\text{div} \mathbf{q}|_m \quad \forall \mathbf{q} \in (H^1(\Omega))^2 \quad \text{with} \\ \text{div} \mathbf{q} \in H^m(\Omega), \quad 0 \leq m \leq k. \quad (7)$$

Galerkin approximation of Problem  $M^*$  in these spaces is

**Problem  $M_h^*$ :** Find  $(\mathbf{p}_h, \mathbf{u}_h) \in W_h^k \times M_h^k$  such that

$$a(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) + b^*(\mathbf{q}_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{q}_h \in W_h^k,$$

$$b^*(\mathbf{p}_h, \mathbf{v}_h) + f(\mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in M_h^k.$$

Raviart-Thomas spaces are constructed such that for all  $\mathbf{v}_h \in M_h^k$  there exists  $\mathbf{q}_h \in W_h^k$  with  $\text{div} \mathbf{q}_h = \mathbf{v}_h$ , and vice versa. Consequently  $E_h^* = \{\mathbf{q}_h \in W_h^k, b^*(\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in M_h^k\}$  is contained in  $E$ . Therefore, with this finite element spaces the discrete version of hypotheses (H1)\* and (H2)\* are verified, i.e., (H1)\*-( $E_h$ -ellipticity of  $a : W_h^k \times W_h^k \rightarrow R$ ): There exist  $\alpha_h > 0$  such that

$$a(\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h) \geq \alpha_h \|\mathbf{q}_h\|_{H(\text{div})}^2 \quad \forall \mathbf{q}_h \in E_h^*,$$

(H2)\*-(The discrete LBB condition): There exists a constant  $\beta_h > 0$  such that

$$\sup_{\mathbf{q}_h \in W_h^k} \frac{b^*(\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{q}_h\|_{H(\text{div})}} \geq \beta_h \|\mathbf{v}_h\|_0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in M_h^k.$$

Since the discrete hypotheses (H1)\* and (H2)\* are verified we can apply Brezzi's theorem to prove existence and uniqueness of solution for Problem  $M_h^*$  and to derive the following estimate

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{H(\text{div})} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq C(\|\mathbf{p} - \mathbf{q}_h\|_{H(\text{div})} + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_0)$$

$$\forall \mathbf{q}_h \in W_h^k \quad \forall \mathbf{v}_h \in M_h^k,$$

which combined with Eq.(6) and Eq.(7) leads to the a priori error estimates

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^k, \quad \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{H(\text{div})} \leq Ch^k,$$

valid for solutions  $(\mathbf{p}, \mathbf{u})$  sufficiently regular, that is  $\mathbf{p} \in (H^1(\Omega))^2$  with  $\text{div} \mathbf{p} \in H^k(\Omega)$  and  $\mathbf{u} \in H^k(\Omega)$ . We note that this dual formulation improves the rate of convergence of the flux approximation compared to the primal mixed formulation. However, the opposite happens to the approximation of the temperature.

## PETROV-GALERKIN FORMULATIONS

Let  $U_h^l$  be any conforming finite element subspace of  $H(\text{div})$ . In particular  $U_h^k$  can be a subspace of  $(H^1(\Omega))^2$ . We know that for  $f \in L^2(\Omega)$  and  $\Omega$  regular, the solution  $(\mathbf{p}, \mathbf{u})$  of Problem  $M$  is in  $H(\text{div}) \times H_0^1(\Omega)$ . Therefore, the following question comes out naturally: Why don't we look for approximate solution of this problem in finite element subspaces of  $U = H(\text{div})$  and  $V = H^1(\Omega)$  Because the Galerkin finite element approximation may be unstable in this subspaces. To overcome this limitation we consider the following dual mixed Petrov-Galerkin approximation of Problem  $M$  in the finite element spaces  $U_h^k \subset H(\text{div})$  and  $V_h^l \subset H^1(\Omega)$ .

**Problem  $PG_h^*$ :** Find  $(\mathbf{p}_h, \mathbf{u}_h) \in U_h^k \times V_h^l$ , such that

$$A_h^*((\mathbf{p}_h, \mathbf{u}_h), (\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)) + F_h((\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)) = 0 \quad \forall (\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h) \in U_h^k \times V_h^l,$$

where

$$A_h^*((\mathbf{p}_h, \mathbf{u}_h), (\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)) = a(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) + (\text{div} \mathbf{p}_h, \mathbf{v}_h) + (\text{div} \mathbf{q}_h, \mathbf{u}_h) \\ + \delta_1(\text{div} \mathbf{p}_h, \text{div} \mathbf{q}_h) + \delta_2(K^{-1} \mathbf{p}_h - \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h - K \nabla \mathbf{v}_h), \\ F_h((\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)) = f(\mathbf{v}_h) + \delta_1(f, \text{div} \mathbf{q}_h).$$

We note that Problem  $PG_h^*$  is equivalent to the following minimization problem: Find  $(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in U_h^k \times V_h^l$  such that

$$J_h^*(\mathbf{p}_h, \mathbf{u}_h) \leq J_h^*(\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall (\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h) \in U_h^k \times V_h^l,$$

with

$$J_h^*(\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h) = \frac{1}{2} A_h^*((\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h), (\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)) + F_h((\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)).$$

Analysis of Problem  $PG_h^*$  is immediate since we have:

1. **Consistency:** The exact solution,  $(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in H(\text{div}) \times H_0^1(\Omega)$ , of Problem  $M$  also verifies Problem  $PG_h^*$ , that is

$$A_h^*((\mathbf{p}, \mathbf{u}), (\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)) + F_h((\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)) = 0 \quad \forall (\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h) \in U_h^k \times V_h^l, \quad (8)$$

since Problem  $PG_h^*$  is based on residual forms of the governing equations.

2. **Continuity of  $A_h^*(\cdot, \cdot) : U \times V \times U \times V \rightarrow R$ :** There exist a constant  $M < \infty$ , such that

$$A_h^*((\mathbf{p}, \mathbf{u}), (\mathbf{q}, \mathbf{v})) \leq M(\|\mathbf{p}, \mathbf{u}\|_{U \times V} + \|\mathbf{q}, \mathbf{v}\|_{U \times V}) \\ \forall (\mathbf{p}, \mathbf{u}), (\mathbf{q}, \mathbf{v}) \in U \times V, \quad (9)$$

with

$$\|(\mathbf{q}, \mathbf{v})\|_{U \times V} = \|\mathbf{q}\|_{H(\text{div})} + \|\mathbf{v}\|_H \quad \forall \mathbf{q} \in U \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (10)$$

3.  $U_h^k \times V_h^l$ -Ellipticity of  $A_\delta^*$ : There exists a constant  $\alpha_h > 0$ , independent of  $h$ , such that

$$A_\delta^*((q_h, v_h), (q_h, v_h)) \geq \alpha_h \|(q_h, v_h)\|_{U \times V}^2$$

$$\forall (q_h, v_h) \in U_h^k \times V_h^l. \quad (11)$$

As a consequence of Eqs.(8)-(11) we have the following result on existence uniqueness and error estimates for **Problem  $PG_\delta^*$** .

**Theorem 3:** For any choice of  $U_h^k \times V_h^l \subset H(\text{div}) \times H^1(\Omega)$  **Problem  $PG_\delta^*$**  has a unique solution  $(p_h, u_h) \in U_h^k \times V_h^l$  such that

$$\|(p - p_h, u - u_h)\|_{U \times V} \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha_h}} \|(p - q_h, u - v_h)\|_{U \times V}$$

$$\forall (q_h, v_h) \in U_h^k \times V_h^l. \quad (12)$$

**Proof:** Existence and uniqueness follow immediately from Lax lemma and Eqs.(9) and (11). Eq.(12) is just the expression of Céa's lemma in the product space  $U_h^k \times V_h^l$ . Admitting  $k = l$ ,  $V_h^k = S_h^k$  and  $U_h^k = (S_h^k)^2$  or  $U_h^k = W_h^k$  from **Theorem 3**, and considering Eqs.(2) and (6), for sufficiently regular exact solution  $(p, u)$  we derive the estimates:

$$\|u - u_h\|_0 + h \|\nabla u - \nabla u_h\|_0 \leq Ch^{k+1}, \quad \|p - p_h\|_{H(\text{div})} \leq Ch^k.$$

With this new formulation we have improved the rate of convergence for the flux approximation without compromising the rate of convergence for the temperature.

Alternatively, we can also consider the following primal mixed Petrov-Galerkin approximation of **Problem M** in the finite element spaces  $U_h^k$  and  $V_{0h}^l = S_h^k \cap H_0^1(\Omega)$ .

**Problem  $PG_\delta$ :** Find  $(p_h, u_h) \in U_h^k \times V_{0h}^l$ , such that

$$A_\delta((p_h, u_h), (q_h, v_h)) + F_\delta((q_h, v_h)) = 0 \quad \forall (q_h, v_h) \in U_h^k \times V_{0h}^l,$$

with

$$A_\delta((p_h, u_h), (q_h, v_h)) = a(p_h, q_h) - (p_h, \nabla v_h) - (q_h, \nabla u_h) + \delta_1(\text{div} p_h, \text{div} q_h) + \delta_2(K^{-1} p_h - \nabla u_h, q_h - K \nabla v_h).$$

## NUMERICAL RESULTS

To confirm the rates of convergence predicted in the analysis we consider a simple problem with known exact solution, consisting in solving **Problem M**, with  $K = I$ , in a unit square region  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , subjected to a heat source  $f = \sin \pi x \sin \pi y$ . In this case the exact solution is  $u = 1/2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y$ ,  $p_1 = 1/2\pi \cos \pi x \sin \pi y$  and  $p_2 = 1/2\pi \sin \pi x \cos \pi y$ .

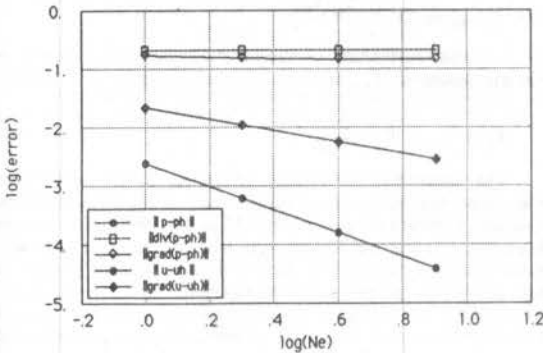


Fig.1. Primal mixed Galerkin formulation.

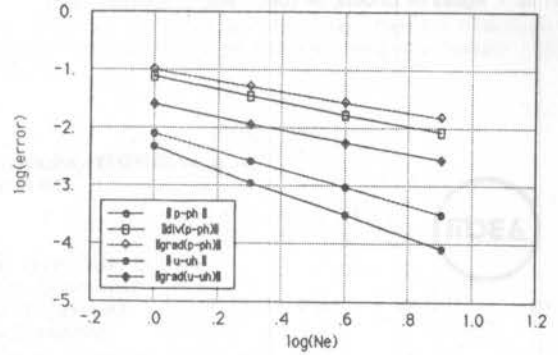


Fig.2. Dual mixed Petrov-Galerkin formulation.

In the finite element analysis we adopted uniform meshes with 1, 4, 16 and 64 equal-order bilinear elements ( $k = l = 1$ ) associated with the primal mixed formulation with discontinuous flux interpolation (**Problem  $M_h$** ) and the dual mixed Petrov-Galerkin formulation with continuous flux interpolation (**Problem  $PG_h^*$** ). In Fig. 1 we plot the logarithm of the number of elements versus the logarithm of the  $L^2$ -norm of the error of the finite element approximations:  $p_h$ ,  $\text{div} p_h$ ,  $\nabla p_h$ ,  $u_h$  and  $\nabla u_h$ . This study confirms the predicted rates of convergence for  $u_h$ ,  $\nabla u_h$  and  $p_h$  (in this case  $p_h = \nabla u_h$ ). No convergence is obtained in the  $L^2$ -norm for  $\text{div} p_h$  or  $\nabla p_h$ . In Fig. 2 we present the same type of graphic for the dual mixed Petrov-Galerkin formulation with continuous flux interpolation, with  $\delta_1 = 0.1$  and  $\delta_2 = 1.0$ . Note the remarkable improvement in the flux approximation: Not only  $p_h$  but also  $\text{div} p_h$  and  $\nabla p_h$  converge in the  $L^2$ -norm.

## CONCLUSIONS

Adding to the classical mixed Galerkin formulations least-squares of the governing equations of the heat transfer problem we transform saddle-point problems into minimization problems with no restriction in the choice of the finite element space for temperature and heat flux. With these formulations we improve the rate of convergence for the heat flux without compromising the rate of convergence for the temperature. Numerical results confirm the error estimates and the good performance of the new formulation.

## REFERENCES

1. P.A. Raviart and J.M. Thomas, A Mixed Finite Element Method for Second Order Elliptic Problems, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, Lecture Notes in Mathematics 606, Springer-Verlag, Berlin, 292-315, (1975).
2. I. Babuška, Error Bounds for Finite Element Method, *Numerische Mathematik*, Vol. 16, 322-333, (1971).
3. F. Brezzi, On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-point Problems Arising From Lagrange Multipliers, *R.A.I.R.O., Ser. Rouge Anal. Numér.*, 8, R-2, 129-151, (1974).
4. A.F.D. Loula, T.J.R. Hughes, L.P. Franca and I. Miranda, Mixed Petrov-Galerkin Method for the Timoshenko Beam, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, 63, 133-154, (1987).
5. P.G. Ciarlet, *The F.E.M. for Elliptic Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1978).
6. J.E. Roberts and J.M. Thomas, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, *Rapports de Recherche*, Number 737, INRIA, (1987).

A MODIFIED OPERATOR ANALYSIS OF CONVECTION  
DIFFUSION PROBLEMS



PAULO AUGUSTO BERQUO DE SAMPAIO  
Department of Civil Engineering  
University College of Swansea  
Swansea SA2 8PP U.K.

ABSTRACT

An exponential function defined along the streamlines is used to modify the linear convection-diffusion differential operator. As the modified operator is self-adjoint the Galerkin method is suited for the finite-element discretisation. Applications of the modified operator concept to one and two-dimensional steady-state problems are presented and analysed.

INTRODUCTION

It is well known that the main difficulties arising in the numerical solution of the convection-diffusion equation are due to its non self-adjoint character. The Galerkin method, which is suited for self-adjoint problems, leads to non-physical spatial oscillations ('wiggles') when applied to the high convective case, unless relatively fine meshes are used. In the finite element context most of the efforts to solve convection-diffusion problems have employed Petrov-Galerkin formulations with various different weighting functions [1], [2]. Here we present a different approach, related to the early ideas of Guymon et al [3]. The differential operator is modified by an appropriate multiplying function. The modified operator is self-adjoint and the Galerkin method becomes suited for the approximation. For the one-dimensional convection-diffusion equation the scheme thus obtained leads to nodally exact results, without using any adjustable parameter nor any previous knowledge of the solution (contrariwise to the so-called 'optimal upwind' scheme).

The generalisation to multidimensional flows of successful one-dimensional 'upwind' techniques often give rise to overdiffusive solutions [2]. The 'streamline upwind Petrov-Galerkin' (SUPG) method [2], also known as 'Anisotropic Balancing Dissipation' [4], have completely eliminated this overdiffusive behaviour. Nevertheless, the SUPG method allows for the occurrence of 'wiggles' near sharp layers [5]. These unbounded 'wiggly' solutions seem to result from the lack of diagonal dominance of the system matrix [6]. Improvements on the SUPG method have been recently obtained by the addition of 'discontinuity capturing' terms to the weighted residual formulation [5]. Although good results have been achieved, the method is self-adaptive and demands an iterative process even for linear problems.

In this paper the modified operator concept is also applied to solve the two-dimensional, steady-state, convection-diffusion equation. The procedure is a compromise between the simplicity of the algorithm and a sensible construction of the mesh. In fact the Galerkin method is applied to the modified operator, with integration being performed along selected streamlines. The system matrix arising from the discretization always has diagonal dominance, a sufficient condition to rule out unbounded solutions. Furthermore, it will be shown that as the Peclet number tends to infinity, the streamlines propagate the inflow boundary data in a 'characteristic-like' way, allowing for sharp layers to be properly represented.

DIAGONAL DOMINANCE AND THE OCCURRENCE OF 'WIGGLY' SOLUTIONS

We consider here the convection-diffusion problem given by the energy equation for an incompressible flow:

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial T}{\partial x}) = Q \quad (1)$$

where

- $\rho$  is the density (Kg/m<sup>3</sup>)
- $c_p$  is the specific heat at constant pressure (J/Kg °C)
- $K$  is the thermal conductivity (W/m °C)
- $u$  is the flow velocity (m/s)
- $T$  is the temperature (°C)
- $Q$  is the volumetric heat source (W/m<sup>3</sup>).

Discretizing Eq.(1) using the standard Galerkin method and linear elements, the general equation below is obtained for an uniform mesh.

$$-(1 + \frac{P}{2}) T_{i-1} + 2T_i - (1 - \frac{P}{2}) T_{i+1} = \frac{Qh^2}{K} \quad (2)$$

- $P$  is the element Peclet number ( $P = fc_p u h / K$ ).
- $h$  is the element size (m).

It should be noted that for  $P=2$  the coefficient multiplying  $T_{i+1}$  changes sign and equation (2) loses the diagonal dominance property. Considering the homogeneous case ( $Q=0$ ) and  $T_{i-1}$ ,  $T_{i+1}$  to be boundary conditions, the temperature  $T_i$  can be written as:

$$T_i = \frac{1}{2} (1 + \frac{P}{2}) T_{i-1} + \frac{1}{2} (1 - \frac{P}{2}) T_{i+1} \quad (3)$$

From Eq.(3) it is easy to see that non-physical results may arise if  $P > 2$ . (For  $P=10$ ,  $T_{i-1} = 10^\circ\text{C}$  and  $T_{i+1} = 20^\circ\text{C}$ , equation (3) gives  $T_i = -10^\circ\text{C}!!$ ).

It is also worthwhile to consider the analytical solution of the discrete equation (2), also for the homogeneous case ( $Q=0$ ):

$$T_i = C_1 + C_2 (\frac{2+P}{2-P})^i \quad (4)$$

The above discrete solution shows an oscillatory behaviour for  $P > 2$ , with the last term giving a positive/negative contribution for even/odd numbered mesh node. Thus the 'heuristic' analysis based on the diagonal dominance property is consistent with the behaviour found in Eq.(4). In fact it is far easier to analyse the diagonal dominance property of the algorithm than its analytical discrete solution, especially in multidimensional situations. In this paper the assessment of numerical methods for convection-diffusion problems, with respect to 'wiggly' solutions, will be based on the verification of diagonal dominance of the system matrix. This is a sufficient condition to avoid an unrealistic behaviour to develop and enhances the possibilities of using iterative solvers. At the same time, the undesirable overdiffusive behaviour will be tested against a standard problem.



## ONE-DIMENSIONAL CONVECTION-DIFFUSION

Consider again the one-dimensional convection-diffusion Eq.(1). The associated differential operator is:

$$L = \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x}) \quad (5)$$

Using an idea presented by Guymon et al. [3] and also described in Zienkiewicz [8], the differential operator can be made self-adjoint using a suitable multiplying function. In the following developments velocity and physical properties are considered to be constant within each element. Using a weighting ( $\phi$ ), the following formulation is obtained integrating Eq.(1) over a typical element:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\phi f) [\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x})] dx = \int_{-h/2}^{h/2} (\phi f) Q dx \quad (6)$$

The diffusive term is integrated by parts to give:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \phi \frac{\partial T}{\partial x} [\rho c_p u f + k \frac{\partial f}{\partial x}] dx + \int_{-h/2}^{h/2} k f \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \int_{-h/2}^{h/2} (\phi f) Q dx + [(\phi f) k \frac{\partial T}{\partial x}]_{-h/2}^{h/2} \quad (7)$$

The first term, which is non-symmetric and responsible for the lack of self-adjointness, can now be set to zero by choosing the function  $f$  as:

$$f = C e^{-\alpha x} \quad (8)$$

$$\alpha = \rho c_p u / k \quad (9)$$

One can now define the modified operator  $L^* = Lf$ , for which the Galerkin method has the 'best approximation property' and can be successfully applied.

Two Alternative Formulations. Basically there are two alternative formulations that can be used. The first one comes from Eq.(7):

$$\int_{-h/2}^{h/2} k f \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dx = \int_{-h/2}^{h/2} \phi f Q dx + [(\phi f) k \frac{\partial T}{\partial x}]_{-h/2}^{h/2} \quad (10)$$

Using the above formulation the function  $f$  should be constructed element-wise in such a way that it is continuous over a typical assembly. For linear elements such assembly involves only two consecutive elements and  $f$  is chosen as:

$$f_i = e^{-\frac{P}{2} \epsilon + \frac{P}{2} \epsilon_i} \quad (11)$$

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, & \text{for element - node 1 (i = 1).} \\ +2, & \text{for element - node 2 (i = 2).} \end{cases}$$

$$\epsilon = \frac{2}{h} \times (\text{non-dimensional coordinate}) \quad (12)$$

An alternative formulation is obtained using Eq.(6) and the integration by parts identity. The identity is added to Eq.(6) giving:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \phi f [\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x})] dx + \int_{-h/2}^{h/2} \phi \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x}) dx + \int_{-h/2}^{h/2} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} dx = \int_{-h/2}^{h/2} (\phi f) Q dx + [(\phi f) k \frac{\partial T}{\partial x}]_{-h/2}^{h/2} \quad (13)$$

This can be written as the standard Galerkin formulation (weighting function  $\phi$ ) plus an additional weighting function applied to Eq.(1):

$$\int_{-h/2}^{h/2} \phi \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_{-h/2}^{h/2} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_{-h/2}^{h/2} \phi (f-1) [\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x})] dx = \int_{-h/2}^{h/2} \phi Q dx + \int_{-h/2}^{h/2} \phi (f-1) Q dx + [(\phi k \frac{\partial T}{\partial x})]_{-h/2}^{h/2} \quad (14)$$

Using the framework presented by Hughes and Brooks [9] one can see that the weighting  $\phi(f-1)$  does not need to be continuous. The continuity requirements imposed to  $f$  when using formulation (10) can be dropped if formulation (13) is chosen. Nevertheless, we use  $f$  as defined in Eq.(11) either with Eq.(10) or Eq.(13). For linear interpolation being used both formulations result in the same discrete equation:

$$-\frac{1}{2} \frac{Pe^{P/2}}{\sinh(P/2)} T_{i-1} + P \coth(P/2) T_i - \frac{1}{2} \frac{Pe^{-P/2}}{\sinh(P/2)} T_{i+1} = \frac{Qh^2}{K} \quad (15)$$

In the above scheme diagonal dominance is preserved for all range of the Peclet number. In particular, the inlet data is propagated in a 'characteristic-like' way when  $P$  tends to infinity. Eq.(15) leads to nodally exact solutions for all range of  $P$ . In fact this result is the equivalent of using an 'optimally' adjusted 'upwind' parameter as described in [1]. Here, though, no previous knowledge about the solution has been employed in obtaining the 'optimal' scheme. We credit this good result to the 'best approximation property' of the Galerkin method when applied to the modified operator.

## TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS

In this section we extend the previous analysis to include convection-diffusion problems in two-dimensional domains. This is done by writing the differential equation using 'local streamline coordinates' and establishing a weighted residual formulation similar to Eq.(6). Green's identity is discretized and combined with the streamline weighted residual statement at element level. The element contributions are then assembled in the usual way.

Given a 2D-domain  $\Omega$  with boundary  $\Gamma$ , the problem consists in finding the temperature field  $T$  which:

- i) Satisfies the differential convection-diffusion equation within the domain i.e.

$$\rho c_p u_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p u_y \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial T}{\partial y}) = Q \quad (16)$$

- ii) Satisfies the imposed temperature and heat-flux conditions at the boundary:

$$T = \bar{T} \quad \text{over } \Gamma_T \quad (17)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{over } \Gamma_q \quad (18)$$

$\Gamma_T$  and  $\Gamma_q$  are non-overlapping parts of the boundary  $\Gamma$ .  $\bar{T}$  and  $\bar{q}$  are prescribed temperature and heat-flux data.  $n$  is the outward normal direction.



In the general case the exact solution  $T$  cannot be found in a closed form. Our approach here is to look for a discrete approximation which becomes closer to  $T$  as the mesh is refined. We use rectangular finite elements and the velocity is assumed constant within each element. With these approximations we rewrite Eq.(16) using 'local streamline coordinates' as shown in Figure 2. This figure also shows the streamlines  $S_A$  and  $S_B$  passing through nodal points.

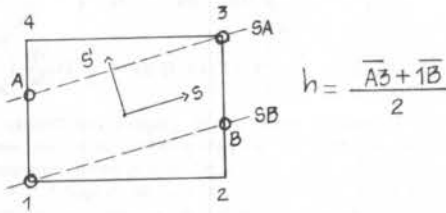


Figure 2. Local streamline coordinates.

Eq.(16) is written element-wise as:

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} (K \frac{\partial T}{\partial s}) - \frac{\partial}{\partial s'} (K \frac{\partial T}{\partial s'}) = Q \quad (19)$$

The similarity of equations (1) and (19) suggests the weighted residual statement:

$$\int_S \phi f \left[ \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} (K \frac{\partial T}{\partial s}) - \frac{\partial}{\partial s'} (K \frac{\partial T}{\partial s'}) \right] ds = \int_S \phi f Q ds \quad (20)$$

The above statement generalises Eq.(6), previously applied in the 1D - context: If the 'lateral' flux  $K \partial T / \partial s'$  is zero, Eq.(6) is recovered.

We discretize Eq.(20) using linear interpolation to get:

$$\int_S \hat{\phi} f \left[ \rho c_p u \frac{\partial \hat{T}}{\partial s} \right] ds = \int_S \hat{\phi} f Q ds \quad (21)$$

$\hat{\phi}$  and  $\hat{T}$  are discrete counterparts of  $\phi$  and  $T$ , respectively.

The function  $f$  is determined by Eq.(8) changing  $x$ , which is the streamline for the 1D problem, by the coordinate  $s$ . The convective contributions are then determined as for the one-dimensional case. The contribution to node 3 comes from integrating Eq.(21) over  $S_A$ . Similarly, the contribution to node 1 involves integration over  $S_B$ . As will be shown later, optimal results are obtained when A and B are coincident with nodal points.

We also use linear interpolation to discretize Green's identity at element level:

$$\int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} K \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} K \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_e} \psi K \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma \quad (22)$$

$\Omega_e$  is the element area and  $\Gamma_e$  is the element boundary.

Equations (21) and (22) are then combined to give:

$$\frac{\Omega_e}{h} \int_S \hat{\phi} f \left[ \rho c_p u \frac{\partial \hat{T}}{\partial s} \right] ds + \int_{\Gamma_e} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} K \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} K \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) d\Gamma = \frac{\Omega_e}{h} \int_S \hat{\phi} f Q ds + \int_{\Gamma_e} \hat{\psi} K \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} d\Gamma \quad (23)$$

The factor  $\Omega_e/h$  is introduced to give dimensional consistency. The length  $h$  is defined in Figure 2.

It is important to note that  $\phi$  is a linear weighting function defined over the streamline, while  $\psi$  is a bilinear weighting function defined over the element area.

### General Equation for an Uniform Mesh

For the sake of simplicity we limit the following analysis to a mesh composed of square elements and for an uniform velocity field. Without loss of generality the flow direction  $\theta$  is taken to satisfy  $0 < \theta < \pi/4$ . A general equation for an internal node  $(i,j)$  is assembled adding contributions from the four surrounding elements as shown in Figure 3.

$$C_{i-1,j-1} T_{i-1,j-1} + C_{i,j-1} T_{i,j-1} + C_{i+1,j-1} T_{i+1,j-1} + C_{i-1,j} T_{i-1,j} + C_{i,j} T_{i,j} + C_{i+1,j} T_{i+1,j} + C_{i-1,j+1} T_{i-1,j+1} + C_{i,j+1} T_{i,j+1} + C_{i+1,j+1} T_{i+1,j+1} = F_{i,j} \quad (24)$$

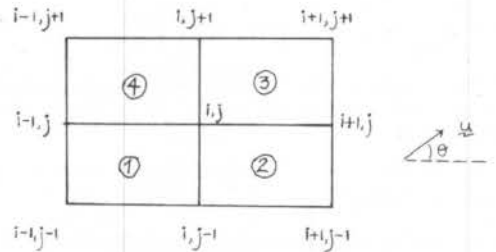


Figure 3 - Elements contributing to node  $i,j$ .

The coefficients in Eq.(24) are given by:

$$C_{i-1,j-1} = -\frac{P}{4} e^{\frac{P}{2}} (I_1 + I_2) \cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{3} \quad (25)$$

$$C_{i,j-1} = -C_{i+1,j-1} = -C_{i-1,j+1} = -C_{i,j+1} = -\frac{1}{3} \quad (26)$$

$$C_{i-1,j} = -\frac{P}{4} e^{\frac{P}{2}} (I_1 + I_2) \cos^2 \theta (1 - \operatorname{tg} \theta) - \frac{1}{6} \quad (27)$$

$$C_{i+1,j} = -\frac{P}{4} e^{\frac{P}{2}} (I_1 - I_2) \cos^2 \theta (1 - \operatorname{tg} \theta) - \frac{1}{6} \quad (28)$$

$$C_{i,j} = \frac{P \cos^2 \theta}{4} \left[ (I_1 + I_2) e^{\frac{P}{2}} - (I_1 - I_2) e^{-\frac{P}{2}} \right] + \frac{8}{3} \quad (29)$$

$$C_{i+1,j+1} = \frac{P}{4} e^{\frac{P}{2}} (I_1 - I_2) \cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{3} \quad (30)$$

$$F_{i,j} = \frac{\Omega_e}{4K} \left[ e^{\frac{P}{2}} \left( \frac{1}{2} \right) + e^{-\frac{P}{2}} \left( \frac{1}{2} \right) \right] \quad (31)$$

with:

$$P = \rho c_p u h / K \quad (32)$$

$$I_1 = \frac{4}{P} \sinh(P/2) \quad (33)$$

$$I_2 = \frac{8}{P^2} \sinh(p/2) - \frac{4}{P} \cosh(P/2) \quad (34)$$

It is interesting to analyse the behaviour of Eq.(24) as  $P \rightarrow 0$  (diffusive limit) and as  $P \rightarrow \infty$  (convective limit). In the first case Eq.(24) becomes the same discrete equation one would have obtained by applying the Galerkin method with bilinear shape functions. This result is important in order to show that the factor  $\Omega_e/h$  makes the integration of the source term (over the streamline) consistent with the integration of the diffusive term (over the element area). On the otherhand, as  $P$  is increased towards the convective limit, the  $e^{P/2}$  terms completely dominate over the remaining contributions. For large  $P$  only  $C_{i-1,j-1}$ ,  $C_{i-1,j}$ ,  $C_{i,j}$  and  $F_{i,j}$  are non-negligible. Some numerical diffusion is introduced if the temperatures  $T_A$  and  $T_B$  are interpolated from nodal values ( $C_{i-1,j-1}$  and  $C_{i-1,j}$  are simultaneously present). Nevertheless, provided the points A and B are coincident with element nodes, either  $C_{i-1,j-1}$  or  $C_{i-1,j}$  vanishes. In this case the inflow data is propagated in a 'characteristic-like' way without dissipation. With a sensible construction of the mesh good results can be expected even for high Peclet numbers.

It is interesting to note that Eq.(24) preserves the diagonal dominance property for all range of  $P$ . This allows iterative or semi-iterative solution of the equation system and prevents 'wiggly' patterns to develop.

#### A Standard Problem

The problem presented in [5] has been used to test the performance of the present algorithm in a highly convective situation ( $P=100$ ). The example employs a  $10 \times 10$  uniform mesh. Dirichlet boundary conditions are imposed as shown in Figure 4.

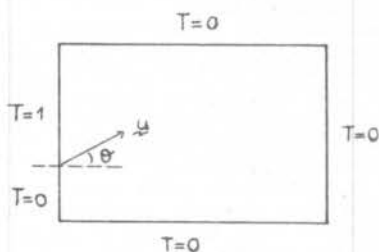


Figure 4. Test problem for large  $P$ .

It is clear that for large Peclet numbers the steep temperature profile specified at the inlet is propagated downflow. At the same time, the downflow boundary conditions must be satisfied, which causes the formation of a boundary-layer.

Although the mesh of  $10 \times 10$  elements is too coarse to capture the detailed features of the boundary-layer, the solutions achieved are nodally exact for  $\theta=0$  and  $\theta=45^\circ$ . This is expected since A and B are coincident with element nodes for these angles. For other flow directions some numerical diffusion is introduced due to interpolating  $T_A$  and  $T_B$ . Accurate bounded solutions can be recovered, though, by modifying the mesh, taking into account the known flow field in order to reduce the interpolation errors.

#### CONCLUSION

An exponential function defined along the streamlines has been employed to modify the linear convection-diffusion differential operator. The modified operator is self-adjoint and the 'best approximation property' of the Galerkin method is regained for such problems.

For one-dimensional flows the 'optimal' scheme (which leads to nodally exact results) has been achieved without using any adjustable parameter.

In two-dimensional problems some numerical diffusion is introduced when the selected integration streamlines do not lie over element nodes and interpolation is required. Nevertheless, by suitably defining the mesh these interpolation errors can be greatly reduced and accurate bounded solutions can be achieved even for high Peclet numbers.

The resulting equation system preserves the diagonal dominance property. This prevents the development of unrealistic solutions and enhances the possibilities of using iterative solvers.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

The author kindly acknowledges the support of the Brazilian Government via CAPES Proc. 402/87-5.

#### REFERENCES

- [1] Zienkiewicz, O.C. and Heinrich, J.C., The finite element method and convection problems in fluid mechanics, *Finite Elements in Fluids*, Vol.3, John Wiley (1978).
- [2] Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R., Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.32, pp. 199-259 (1982).
- [3] Guymon, G.L., Scott, V.H. and Herrmann, L.R., A general numerical solution of the two-dimensional diffusion-convection equation by the finite element method, *Water Res. Res.*, Vol.6, pp. 1611-1615 (1970).
- [4] Kelly, D.W., Nakazawa, S. and Zienkiewicz, O.C., A note on upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.15, pp.1705-1711 (1980).
- [5] Hughes, T.J.R., Mallet, M. and Mizukami, A., A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. Beyond SUPG, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.54, pp.341-355 (1986).
- [6] Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill (1980).
- [7] Morton, K.W., Generalised Galerkin methods for steady and unsteady problems, *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Academic Press (1982).
- [8] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, 3rd Ed., McGraw-Hill (1977).
- [9] Hughes, T.J.R. and Brooks, A.N., A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline upwind procedure, *Finite Elements in Fluids*, Vol.4, John Wiley (1982).

NUMERICAL TRANSIENT ANALYSIS OF PARALLEL  
AND COUNTER FLOW HEAT EXCHANGERS



Enrico Lorenzini, Marco Spiga, Mauro A. Corticelli  
Istituto di Fisica Tecnica, Facoltà di Ingegneria,  
Università di Bologna, Viale Risorgimento 2, 40135  
Bologna, Italy

ABSTRACT

Numerical transient one dimensional solutions of parallel and counter current heat transfer processes are obtained by the use of a finite element technique with arbitrary initial and inlet conditions. The results are verified with available in literature. The main features of the mathematical model is the use of the Galerkin finite elements method getting very satisfactory results in extremely low computation time.

NOMENCLATURE

- A heat transfer surface ( $m^2$ ),
  - c specific heat (J/kg K),
  - L exchanger length (m),
  - M mass of the tube bundle (kg),
  - S flow cross section ( $m^2$ ),
  - T temperature (K),
  - t time (s),
  - u fluid velocity (m/s),
  - z longitudinal coordinate (m),
  - $\rho$  fluid density ( $kg/m^3$ ),
  - $\Delta$  time step (s).
- subscripts
- a primary fluid,
  - b secondary fluid,
  - i lower node of a finite element,
  - s upper node of a finite element,
  - w wall.

INTRODUCTION

Since many decades heat exchangers have been investigated (mainly for steady state and effectiveness purposes), but the analyses concerning their transient behavior are not assessed, even if recently a paramount interest is born in this field. In fact the knowledge of transient temperatures of fluids leaving heat exchangers is essential for process control strategies, mainly in advanced heat transfer applications (industrial plants, chemical processes, energy saving, heat recovery), where the systematic use of automatic control devices requires a deep knowledge of the working conditions. Parallel and, mostly, counter current heat exchangers are extensively used in many fields of thermal engineering, and in fundamental heat transfer theory, their analysis constitutes a well known masterwork. The mathematical solution of the steady state problem is simple and quite defined, while a general analytical solution for the transient problem is not obtainable, due to the complexity of the governing equations (temperature dependence of the physical properties and heat transfer coefficients, arbitrary initial and inlet conditions, presence of split boundary conditions for the

counter current exchanger). The most general analytical solution was obtained by Jaswan and Smith [1], with several simplifying hypotheses, but it is given in form of complicated series requiring very high computing time. Romie [2] presented an exact solution for parallel flow units with inlet step change including the effect of the core thermal capacitance, but restricted to gas-to-gas heat exchangers, or to situations in which the two fluid velocities are equal. Li [3] proposed analytically the step response of the parallel flow unit, but neglecting the core thermal capacitance and assuming infinite core thermal conductivity. It is strange to notice that the investigation of cross-flow heat exchangers (whose two dimensional design seems to be more complicated) allows to deduce general analytical solutions [4], while parallel and counter flow units (whose design is one dimensional) are not yet provided of exact general solutions in literature. Hence, at present, the general transient solution for parallel and counter flow heat exchangers can be obtained only numerically [5-6]. All the numerical solutions available in literature are based on the finite difference methods, the cell or lumped parameter model, the method of characteristics. The purpose of this papers is to presents a quite general numerical transient solution, for parallel and counter flow heat exchangers, resorting to the finite element method. This procedure allows to obtain a very fast convergence for the solution of energy balance equations, providing the transient longitudinal profile of the fluid temperatures and the two dimensional temperature distribution in the core separating the two streams.

ASSUMPTIONS AND FORMULATION

The following analysis is concerned with a direct transfer type, single pass and straight tube heat exchanger, having walls separating the two fluids streams. Stream *a* flows in the shell side, stream *b* in the tube side. The theoretical model is based on the classical usual assumptions:

- the exchanger shell or shroud is adiabatic,
- no heat is generated,
- no heat is conducted in the axial direction,
- the fluids are single phased and incompressible.

Inlet temperatures are allowed to be time dependent, the heat transfer coefficients are deduced by the suitable correlations (Dittus-Boelter [7] for the tube side, Weismann [8] for the shell side) and can be comprehensive of fouling.

Three partial differential equations are required to define the behavior of the exchanger. An energy balance on an elemental length of the tube gives the two equations for the fluids:

$$(hA)_a(T_w - T_a) - (LS\rho c)_a \left( u_a \frac{\partial T_a}{\partial z} + \frac{\partial T_a}{\partial t} \right) = 0 \quad (1)$$

$$(hA)_b(T_w - T_b) - (LS\rho c)_b \left( \pm u_b \frac{\partial T_b}{\partial z} + \frac{\partial T_b}{\partial t} \right) = 0 \quad (2)$$

The fluid a is flowing following the direction of the longitudinal coordinate z, while, in Eq. (2), the sign + (-) refers to parallel (counter) current processes. The third energy balance equation, providing the wall temperatures appearing in Eqs. (1-2), is given by the Fourier equation for the exchanger core (supposed to be a circular tube with azimuthal symmetry):

$$(hA)_a(T_a - T_w) + (hA)_b(T_b - T_w) - M_w \frac{\partial T_w}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

The inlet conditions related to the Eqs. (1-2) are:

$$\begin{aligned} T_a(0, t) &= g_a(t) \\ T_b(0, t) &= g_b(t) \quad \text{for parallel} \\ &\quad \text{current process} \\ T_b(L, t) &= g_b(t) \quad \text{for counter current} \\ &\quad \text{process} \end{aligned} \quad (4)$$

The initial temperature profile is quite arbitrary for the exchanger core and fluids.

#### SOLUTION BY THE FINITE ELEMENT METHOD

The numerical approach is based on the residual method for the longitudinal coordinate, resorting to an implicit method for the time independent variable. The Eqs. (1-3), related to only one radial element, must be assembled together to all other elements at the same axial coordinate, imposing the continuity of temperature at every nodal interface between adjacent elements.

The Eqs. (1-3) can be rewritten in the matrix form:

$$\mathbf{k} \mathbf{T} + \mathbf{r} \mathbf{T}' + \mathbf{c} \dot{\mathbf{T}} = 0 \quad (6)$$

where  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{c}$  are square matrices, whose elements are respectively the terms of Eqs. (1-3), row by row, and  $\mathbf{T}$  is the vector whose elements are the temperatures of fluids and wall,  $\mathbf{T} = (T_a, T_w, T_b)$ . In this schematization the axial trend of temperatures in both the fluids and in the wall, is assumed to be a linear combination of the temperatures at the nodes, weighted through the linear shape functions:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} \mathbf{T}_e$$

$$T_j = N_i T_{ji} + N_s T_{js} \quad \text{with } j=a, w, b$$

being:

$$N_i = \frac{z_s - z}{z_s - z_i} \quad N_s = \frac{z - z_i}{z_s - z_i}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_s & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_s & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_e = (T_{ai}, T_{wi}, T_{bi}, T_{as}, T_{ws}, T_{bs})$$

In order to make discreet the system of Eqs. (6), the residual Galerkin method is applied obtaining:

$$\int_{z_i}^{z_s} (\mathbf{k}\mathbf{T} + \mathbf{r}\mathbf{T}' + \mathbf{c}\dot{\mathbf{T}}) \mathbf{N}^T dz = 0 \quad (7)$$

or

$$\int_{z_i}^{z_s} (\mathbf{k}\mathbf{N}\mathbf{T}_e + \mathbf{r}\mathbf{B}\mathbf{T}_e + \mathbf{c}\mathbf{N}\dot{\mathbf{T}}_e) \mathbf{N}^T dz = 0 \quad (8)$$

where  $\mathbf{N}^T$  is the transpose of the matrix  $\mathbf{N}$ , while the elements of the matrix  $\mathbf{B}$  are the spatial derivatives of all the elements of the matrix  $\mathbf{N}$ .

The Eq. (8), in matrix form, read as:

$$(\mathbf{k}' + \mathbf{r}') \mathbf{T}_e + \mathbf{c}' \dot{\mathbf{T}}_e = 0 \quad (9)$$

where the matrices  $k'$ ,  $r'$  and  $c'$  are the results of integration and algebraic operations on the Eq. (8). The Eq. (9), assembled all over the length of the heat exchanger, taking account of the continuity of the temperatures at the interface of adjacent axial elements, are written as

$$(K+R)\underline{T}_E + C\underline{T}'_E = 0 \quad (10)$$

where  $\underline{T}_E$  is the vector of the three temperatures  $T_a$ ,  $T_w$  and  $T_b$  at every node along the z-axis. Such a system of nonlinear differential equations is easily solved through an implicit method, which allows to obtain a very satisfactory convergence and stability of the numerical solution by an appropriate choice of the constant  $\theta$ :

$$\begin{aligned} [C + \Delta(1-\theta)(K+R)]\underline{T}_E(t+\theta) = \\ [C + \Delta\theta(K+R)]\underline{T}_E(t) \end{aligned} \quad (11)$$

In the Eq. (10), the coefficient of the unknown vector  $\underline{T}_E(t+\Delta)$  depends on the vector itself, for this reason the solution is obtained through an iterative procedure.

## RESULTS

The numerical solution for parallel and counter current heat exchangers provides the transient temperature distributions inside the whole transfer zone.

For counter flow heat exchangers the validation of the solution is performed through comparison to the numerical (explicit finite difference) solution proposed by Romie [10].

As previously discussed, this finite difference solution is obtained only for the step response, while the finite element solution here presented is quite general. The dimensionless results are plotted in Figures 1-2, they are not distinguishable by the prediction obtained by Romie (see Figures 3-4 in [5]).

For parallel flow heat exchangers, the validation is performed through the transient analytical solution obtained by Li [3], restricted to the step response with negligible thermal capacitance of the exchanger core.

The numerical predictions are plotted in Figures 3-4; in this case too the analytical results are coinciding (see Figures 6-7 in [3]).

It can be aim of more specific work to investigate and emphasize the different particular application relevant to industrial practice, which can be characterized by governing parameters varying in a wide range and by the most different inlet perturbations.

What is worth to point out is the capability of the solution here proposed to simulate any transient response of straight tube heat exchangers, with any kind of fluid, for any initial and boundary conditions. The numerical method has no problem of

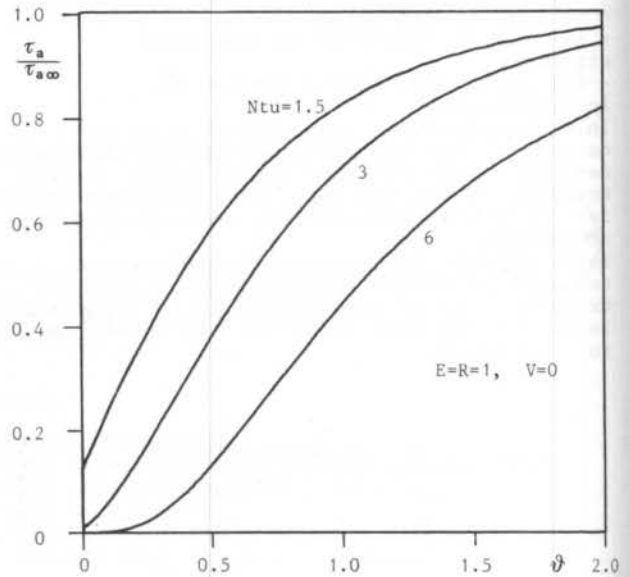


Figure 1 - Step response of the primary fluid temperature, in the counterflow process. For the nomenclature see Reference 5.

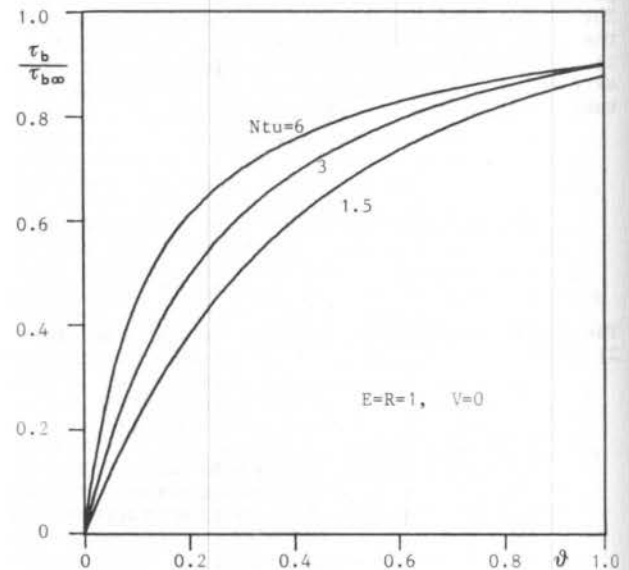


Figure 2 - Step response of the secondary fluid temperature, in the counterflow process. For the nomenclature see Reference 5.

convergence and the predictions are obtained in a very short CPU time on a medium size computer.

## ACKNOWLEDGEMENT

This work was financially supported by the Italian MPI and CNR.



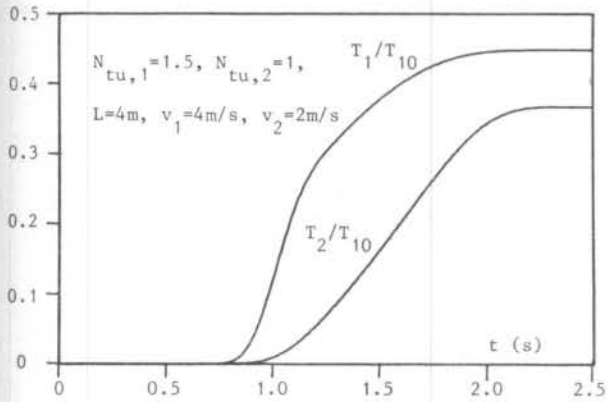


Figure 3 - Step response of the dimensionless temperature of both fluids, in the parallel flow heat exchanger. For the nomenclature see Reference 3.

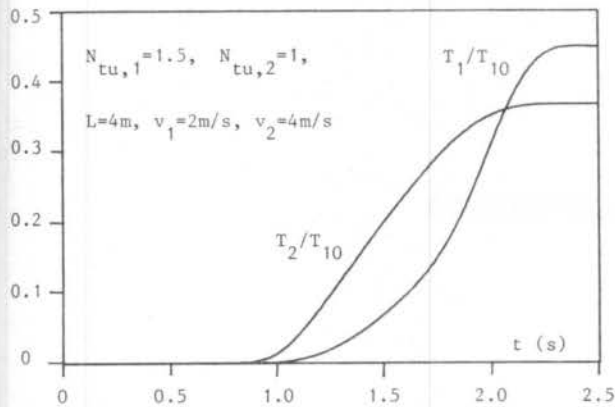


Figure 4 - Step response of the dimensionless temperature of both fluids, in the parallel flow heat exchanger. For the nomenclature see Reference 3.

#### REFERENCES

- [1] Jaswan, M.A. and Smith, W., Counter current transfer processes in the non steady state, Proc. Roy. Soc., Vol.225, pp.226-244, 1954.
- [2] Romie, F.E., Transient response of the parallel flow heat exchanger, ASME Journal of Heat Transfer, Vol.107, pp.727-730, 1985.
- [3] Li, C.H., Exact transient solutions of parallel current transfer process, ASME Journal of Heat Transfer, Vol.108, pp.365-368, 1986.
- [4] Spiga, M. and Spiga, G., Transient temperature fields in cross flow heat exchangers with finite wall capacitance, ASME Journal of Heat Transfer, Vol.110, pp.49-53, 1988.
- [5] Romie, F.E., Transient response of the counter flow heat exchanger, ASME Journal of Heat Transfer, Vol.106, pp.620-626, 1984.
- [6] Tan, K.S. and Spinner, I.H., Numerical methods of solution for continuous counter current processes in the non steady state, AIChE Journal, Vol.130, pp.770-786, 1984.
- [7] Dittus, F.W. and Boelter, M.K., Heat transfer in automobile radiators of the tubular type, Publ. in Eng., University of California, Berkeley, n.2, pp.443-461, 1930.
- [8] Weisman, J., Heat transfer to water flowing parallel to tube bundles, Nuclear Science Engineering, Vol.6, pp.78-79, 1959.

**CONVECÇÃO NATURAL**

CONVECÇÃO NATURAL NO INTERIOR DE CONCENTRADORES  
COM ABSORVEDORES CILÍNDRICOS

ABCm

ABCm

MARCO ANTONIO ROSA DO NASCIMENTO  
GENÉSIO JOSÉ MENON

Departamento de Engenharia Mecânica-EFEI

## RESUMO

É analisado o problema de convecção natural no interior de coletores solares concentradores com absorvedores cilíndricos, através da resolução numérica das equações de conservação. Foi utilizado o método de elementos finitos para se determinar o número de Nusselt médio no absorvedor em função do número de Grashof e do ângulo de inclinação da cavidade. Os resultados podem ser correlacionados por uma equação na forma  $Nu = c(Gr.Pr)^n$ , onde  $c$  e  $n$  são parâmetros que dependem do ângulo de inclinação da cavidade.

## INTRODUÇÃO

A solução de problemas de convecção natural laminar em cavidades confinadas tem particular interesse no campo da engenharia. Entre as várias aplicações, é de particular interesse o estudo da convecção natural nos coletores solares concentradores, visando o aproveitamento de energia solar. A maioria dos trabalhos que tratam dos coletores concentradores são relativos a projeto e estudo ótico, sendo raros os trabalhos que estudam a convecção natural.

O presente trabalho tem como objetivo o estudo teórico da convecção natural, bidimensional em regime permanente para o coletor da Figura 1, e obter a relação entre o coeficiente de transferência de calor médio em função dos parâmetros térmicos e geométricos do concentrador.

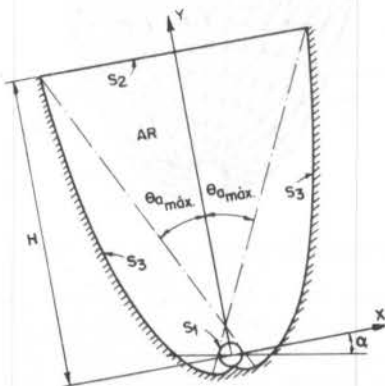


Figura 1. Geometria do problema.

O coletor concentrador da Figura 1 é constituído de duas superfícies isotérmicas e duas superfícies isoladas. A superfície  $S_1$  é mantida na temperatura quente  $T_h$ , a superfície  $S_2$  é mantida na temperatura fria  $T_c$ , e as superfícies  $S_3$  são isoladas.

As equações para construção da geometria dos refletores da figura 1 foram obtidas de Zapparoli [1].

Abdel-khalik e outros [2] foram os primeiros a estudar a convecção natural no interior de coletores concentradores com absorvedor plano. Na análise teórica bidimensional eles utilizaram o método de elementos fini-

tos. Foram considerados como parâmetros, o fator de concentração ( $C$ ) variando de 2 a 10, o fator de truncamento ( $T_r$ ) 1/3, 1/2 e 1, número de Rayleigh de  $2 \times 10^3$  a  $1,3 \times 10^6$  e o ângulo de inclinação ( $\alpha$ ) fixado em zero grau. Não foram realizadas medidas experimentais para comparação com os resultados teóricos.

Ilyan e outros [3,4] apresentaram um estudo teórico e experimental de convecção natural numa cavidade trapezoidal, com os refletores planos formando um ângulo de 30 graus. O estudo teórico feito por Ilyan e outros [3] considerou escoamento bidimensional e utilizou o método de Galerkin para resolver as equações de conservação. Considerou o número de Rayleigh variando de  $1,24 \times 10^3$  a  $2,71 \times 10^6$ , o ângulo de inclinação de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  e o número de Prandtl 0,71. Ilyan e outros [4] apresentaram um estudo experimental, onde o número de Rayleigh variou de  $2 \times 10^3$  a  $5 \times 10^7$ , o ângulo de inclinação de  $180^\circ$  e de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , com  $15^\circ$  de incremento. A relação entre o número de Nusselt e o número de Rayleigh foi apresentada por uma equação na forma  $Nu = cRa^n$ , onde  $c$  e  $n$  são parâmetros que dependem do ângulo de inclinação  $\alpha$ . Os resultados teóricos e experimentais, no geral apresentam boa concordância, entretanto, para pequenos ângulos de inclinação o desvio é grande.

Meyer e outros [5] apresentaram um estudo teórico e experimental de convecção natural no interior de cavidade trapezoidal. Na análise teórica foi utilizado o método de elementos finitos. Foi estudado o efeito do número de Rayleigh, do fator de concentração e do ângulo de inclinação sobre o número de Nusselt. O número de Rayleigh variou de  $10^3$  a  $10^7$ , o ângulo de inclinação de  $30^\circ$  a  $90^\circ$ , o fator de concentração 2,3,4 e 5. Os resultados podem ser bem representados pela equação  $Nu = c_1[\cos(\alpha - c_2)]^{n_1} Ra^{n_2}$ , onde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $n_1$  e  $n_2$  são parâmetros dados em [5], os quais dependem do fator de concentração.

Menon [6] e Menon e outros [7] apresentaram um estudo teórico e experimental de convecção bidimensional, em regime permanente num coletor concentrador com absorvedor plano. Na análise teórica foi utilizado o método de elementos finitos. Os resultados teóricos foram apresentados para fator de concentração de 2 a 10, fator de truncamento de 0,3 a 1, ângulo de inclinação medidos a partir da horizontal variando de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , número de Grashof de  $2 \times 10^4$  a  $3,5 \times 10^6$  e número de Prandtl 0,71. Os resultados teóricos e experimentais apresentam boa concordância para ângulos de  $30^\circ$  a  $90^\circ$ . Para ângulos

entre 30° e 0° foi apresentada uma equação baseada nos resultados experimentais, já que os resultados experimentais e teóricos não apresentam boa concordância.

No presente trabalho o método de elementos finitos foi utilizado para solução das equações de conservação. Os resultados teóricos consideram ângulo de inclinação de 0° a 90°, fator de concentração 3,64, fator de truncamento 0,5, número de Prandtl 0,733 e número de Grashof entre 10<sup>5</sup> e 10<sup>6</sup>. O número de Nusselt médio do absorvedor foi determinado como função do número de Grashof e do ângulo de inclinação.

#### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considera-se o escoamento em regime laminar, não permanente, bidimensional e incompressível, sem dissipação viscosa e sem efeitos de compressibilidade e com as propriedades do fluido como constantes, exceto a densidade nos termos de empuxo.

No sentido de generalizar a solução numérica do problema são definidas as seguintes variáveis adimensionais.

$$X = x/H, \quad Y = y/H, \quad U = uH/\nu, \quad V = vH/\nu,$$

$$P = pH^2/\rho\nu^2, \quad \tau = \frac{\nu\tau}{H^2}, \quad \theta = (T-T_0)/(T_h-T_0),$$

$$Pr = \mu C_p/K, \quad Gr = g\beta(T_h-T_c)H^3/\nu^2. \quad (1)$$

As definições de função corrente e vorticidade são introduzidas respectivamente pelas seguintes relações:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}, \quad (2)$$

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (3)$$

Observando as definições de função corrente (2), vorticidade (3) e das variáveis adimensionais, o problema em questão é estabelecido pelas equações de continuidade, quantidade de movimento e energia, na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \frac{Gr}{2} \cos \alpha \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{Gr}{2} \sin \alpha \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}. \quad (6)$$

As equações (4), (5) e (6) formam um sistema de equações diferenciais não lineares e acopladas em termos da função corrente, temperatura adimensional e vorticidade, sujeitas as seguintes condições de contorno, referidas à figura 1:

$$\text{Superfície isotérmica quente } (S_1): \quad \theta = 1, \quad (7)$$

$$\text{Superfície isotérmica fria } (S_2): \quad \theta = -1, \quad (8)$$

$$\text{Superfície isolada } (S_3): \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (9)$$

$$\text{Contorno } (S_1+S_2+S_3): \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \\ \omega_w = -\frac{2\psi_0}{(\Delta n)^2}, \quad (10)$$

onde  $\omega_w$  representa a vorticidade no contorno e  $\psi_0$  é valor da função corrente, distante  $\Delta n$  do contorno.

#### MÉTODO DE SOLUÇÃO

O sistema de equações (4) a (6), juntamente com as condições de contorno (7) a (10), foram resolvidas usando o método de elementos finitos. Detalhes da solução numérica são apresentados por Nascimento [8].

O número de Nusselt médio no absorvedor definido como  $Nu = hH/K$ , onde  $h$  é o coeficiente médio de convecção, pode ser calculado pela equação:

$$Nu = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} -\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{S_1} dS. \quad (11)$$

#### RESULTADOS

Foi desenvolvido um programa computacional para calcular o número de Nusselt médio em função do número de Grashof, do número de Prandtl e do ângulo de inclinação do concentrador. A Figura 2 mostra a malha de elementos finitos com 392 elementos usada para a solução.

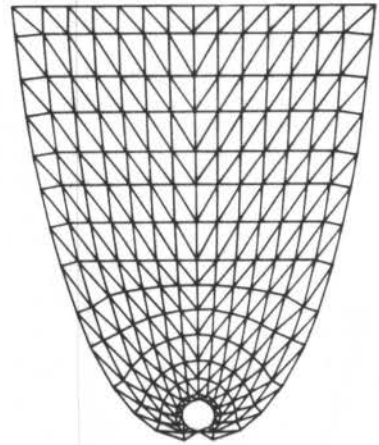


Figura 2. Modelo da malha utilizada.

As figuras 3 e 4 mostram as distribuições da função corrente e da temperatura adimensional no interior da cavidade, considerando  $Gr = 10^5$ ,  $Pr = 0,733$ ,  $Tr = 0,5$ ,  $C = 3,64$ . Nas figuras 3 e 4 consideram-se respectivamente  $\alpha = 0^\circ$  e  $\alpha = 30^\circ$ .

A figura 3 mostra que para  $\alpha = 0^\circ$ , o escoamento tem duas células convectivas simétricas em relação ao eixo Y e na figura 4 para  $\alpha = 30^\circ$ , o escoamento é assimétrico com uma única célula convectiva.

A Figura 5 apresenta o número de Nusselt médio na superfície quente em função do número de Grashof de 10<sup>5</sup> a 10<sup>6</sup>, para ângulos de inclinação de 0°, 30°, 60° e 90°, número de Prandtl 0,733 e fator de truncamento 0,5.

O número de Nusselt médio da Figura 5 podem ser correlacionados pela seguinte equação:

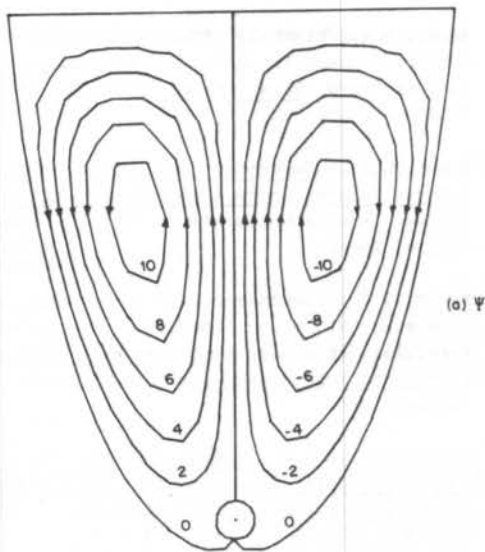
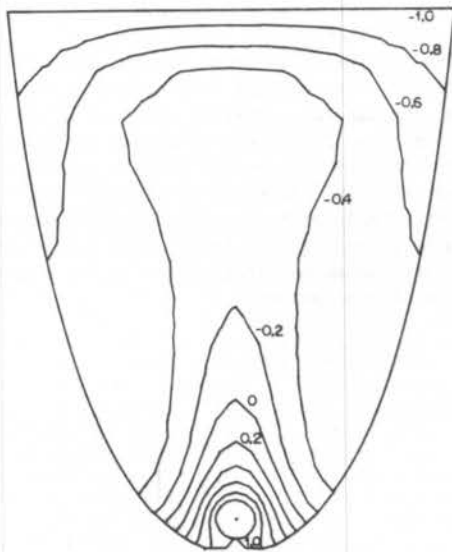
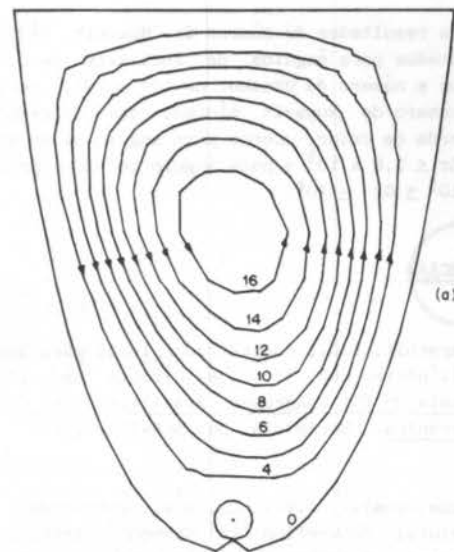
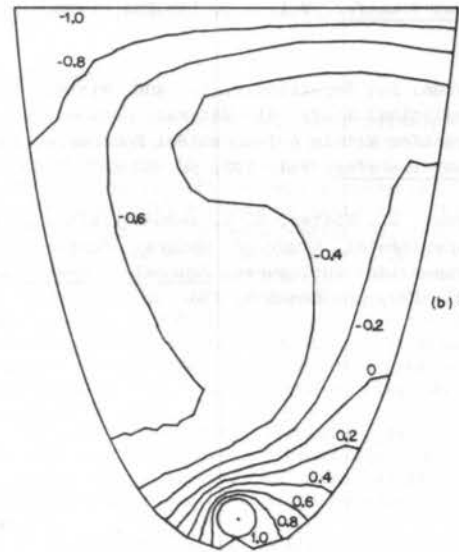
(a)  $\Psi$ (b)  $\theta$ (a)  $\Psi$ (b)  $\theta$ 

Figura 3. (a) Distribuição da função corrente, (b) Distribuição de temperatura adimensional, para  $Gr = 10^5$ ;  $Pr = 0,733$ ;  $Tr = 0,5$ ;  $C = 3,64$ ;  $\alpha = 0^\circ$ .

$$Nu = c(Gr.Pr)^n, \text{ para } 10^5 \leq Gr \leq 10^6, \quad (12)$$

onde  $c$  e  $n$  são parâmetros dados na Tabela 1 em função do ângulo de inclinação

Tabela 1. Parâmetros da equação (12).

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$c$	0,0925	0,2739	0,3395	0,1677
$n$	0,3788	0,2706	0,2598	0,3129

#### CONCLUSÕES

O método de elementos finitos foi utilizado para estudar a convecção natural no interior de um coletor concentrador com a absorvedor cilíndrico totalmente iluminado.

Figura 4. (a) Distribuição da função corrente, (b) Distribuição de temperatura adimensional, para  $Gr = 10^5$ ;  $Pr = 0,733$ ;  $Tr = 0,5$ ;  $C = 3,64$ ;  $\alpha = 30^\circ$ .

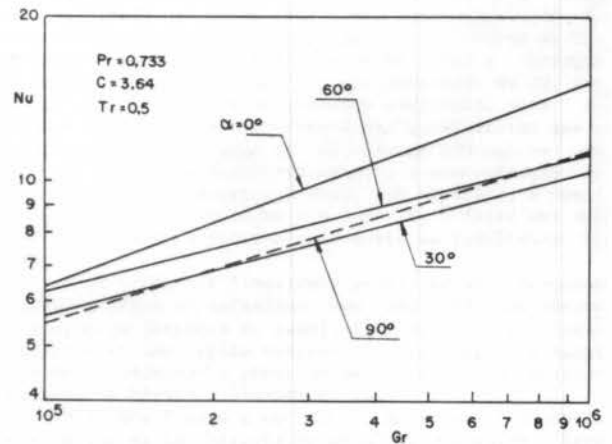


Figura 5. Número de Nusselt médio versus número de Grashof.



Os resultados do número de Nusselt médio foram apresentados para ângulos de inclinação de 0, 30, 60, 90 graus e número de Grashof de  $10^5$  a  $10^6$ . Se verifica que o número de Nusselt mínimo, que corresponde a mínima perda de calor, ocorre para ângulo de 90 graus com  $10^5 \leq Gr \leq 1,8 \times 10^5$  e para ângulo de 30 graus com  $1,8 \times 10^5 \leq Gr \leq 10^6$ .

#### REFERÊNCIAS

- [1] Zapparoli, E.L., Concentrador Ideal para Absorvedor Cilíndrico com Arco de Círculo não Iluminado, Anais do VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlândia, pp. 365-375, 1983.
- [2] Abgar-Knalik, S.I.; Li, H-W., and Randal, K.R., Natural Convection in Compound Parabolic Concentrator - A finite Element Solution, Journal of Heat Transfer, Vol. 100, 199-204, 1978.
- [3] Iycan, L.; Bayazitovly, Y. and Witte, L. C., An Analytical Study of Natural Convective Heat Transfer Within a Trapezoidal Enclosure, Journal of Heat Transfer, Vol. 102, pp. 60-647, 1980.
- [4] Iycan, L.; Witten, L. C. and Bayazitovly, Y., An Experimental Study of Natural Convection in Trapezoidal Enclosures, Journal of Heat Transfer, Vol. 120, pp. 648-653, 1980.
- [5] Meyer, B.A.; Mitchell, J.W. and El-Wakil, M.M., Convective Heat Transfer In Vee-Trough Linear Concentrators, Solar Energy, vol. 28, pp. 33-40, 1982.
- [6] Menon, G.J., Convecção Natural no Interior de Coletores Solares Concentradores de Parábolas Compostas, Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos, 1984.
- [7] Menon, G.J.; Fernandes, E. C. & Sielawa, J. T., Convecção Natural no Interior de Concentradores de Parábolas Compostas, Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp. 13-16, S.J. dos Campos, 1985.
- [8] Nascimento, M.A.R., Estudo Teórico de Convecção Natural em Coletores Concentradores com Absorvedor cilíndrico, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itabá, 1988.

#### ABSTRACT

The problem of internal natural convection of solar collector concentrator with cylindrical absorber, is analysed through the numerical solution of the conservation equations. The method of finite elements has been used to determine the average Nusselt number in the absorber which is a function of Grashof number and the inclination angle of the cavity. The results may be correlated by an equation of the form  $Nu = c(Gr.Pr)^n$ , where  $c$  and  $n$  are parameters that depend on the angle of inclination of the cavity.

## ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UM CANAL VERTICAL

ABCM

ABCM

JOSÉ BEZERRA PESSOA FILHO  
 Instituto de Atividades Espaciais - Centro Técnico Aeroespacial  
 EUCLIDES CARVALHO FERNANDES  
 Instituto Tecnológico de Aeronáutica - Centro Técnico Aeroespacial  
 São José dos Campos - SP

## RESUMO

É feito um estudo experimental análogo à transferência de calor por convecção natural num canal vertical constituído por duas placas planas paralelas sendo uma isotérmica e outra adiabática. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando-se a analogia existente entre os processos de transferência de calor e massa. Neste trabalho, em particular, utilizou-se a técnica de sublimação de naftaleno. Os resultados obtidos são apresentados na forma do número de Sherwood médio versus o parâmetro  $(b/l)GrmSc$ . São descritos o procedimento e a metodologia experimental utilizada, bem como as principais dificuldades encontradas.

## INTRODUÇÃO

Com base na analogia existente entre o processo de transferência de calor e o processo de transferência de massa é possível avaliar coeficientes de transferência de calor através de resultados experimentais obtidos com a transferência de massa.

A técnica de sublimação de naftaleno tem sido utilizada com sucesso em experimentos com convecção forçada. Diversos trabalhos nesta linha foram realizados podendo-se citar, a título de exemplo, os trabalhos de Fernandes e Saboya [1 e 2] e Saboya e Saboya [3].

Por outro lado, poucas tentativas foram feitas no sentido de adaptar esta técnica à problemas de convecção natural valendo, entretanto, citar os trabalhos de desenvolvidos por Bahrami e Sparrow [4] e por Kaminski [5].

A primeira dificuldade, bastante visível, reside no fato do escoamento de convecção natural ser extremamente dependente das condições ambientais e de eventuais perturbações dessas condições. Tal fato é agravado pela necessidade de um perfeito controle das condições ambientais por um longo intervalo de tempo a fim de promover um "desgaste" da placa de naftaleno compatível com a precisão dos instrumentos de medida.

Para o escoamento de convecção natural as condições dinâmicas do escoamento são determinadas pelo número de Grashof ( $Gr_m$ ) definido, por exemplo, como

$$Gr_m = \frac{g \rho \rho_{nw} b^3}{\mu^2} \quad (1)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade local,  $\rho$  é massa específica da mistura ar e naftaleno,  $\rho_{nw}$  é a concentração de vapor de naftaleno adjacente à placa,  $b$  é a abertura do canal e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica da mistura ar e naftaleno.

Como a concentração do vapor de naftaleno depende exclusivamente da temperatura da superfície da placa de naftaleno, observa-se a possibilidade de variar o número de Grashof e, portanto, as condições dinâmicas do escoamento, através da variação da temperatura do sólido, ou seja, do próprio ambiente, já que a placa de naftaleno tem que estar em equilíbrio térmico com o ambiente, para que ocorra unicamente o fenômeno de transferência de massa. Uma outra possibilidade de variação do número de Grashof consiste na variação do parâmetro  $b$ . Dessa forma, variando-se convenientemente a temperatura ambiente, de 26 °C à 35 °C, e a abertura do canal, de 9,0 mm à 33,0 mm foi possível estudar a região compreendida entre a entrada do canal e aquela próxima do escoamento completamente desenvolvido, isto é,  $6 < (b/l)Gr_mSc < 1000$ . Essa faixa de estudo corresponde ao regime de escoamento laminar entre as placas.

## APARATO EXPERIMENTAL

Com o objetivo de simular, com precisão, o experimento com transferência de massa construiu-se um aparato experimental que pode ser dividido em 4 partes. São elas: câmara primária (CP), câmara secundária (CS), dispositivo de teste (DT) e placa de naftaleno (PN).

A CP consistiu do próprio recinto do laboratório cujas dimensões eram de 4,7 m x 4,9 m x 3,6 m. Nessa câmara era feito o controle da condição de temperatura através de um conjunto de 10 resistências elétricas.

No interior da CP situavam-se a CS e todos os equipamentos necessários à realização dos experimentos exceto feita ao sistema de leitura de temperatura que foi instalado numa sala ao lado, devido ao nível de temperatura atingido na CP.

A CS tinha por objetivo assegurar, tanto quanto possível, as condições ideais à realização dos experimentos, quais sejam: ausência de correntes de convecção induzidas por gradientes térmicos e rigoroso controle de temperatura.

A CS foi construída em madeira, possuindo isolamento térmico de lâ de vidro (0,25 m de espessura). Suas dimensões internas eram de 1,0 m x 1,0 m x 1,5 m, sendo revestida internamente com placas de alumínio (1,0 mm de espessura) e, externamente, com madeira compensada (0,01 m de espessura). A finalidade do isolamento térmico foi de tornar as condições internas as mais estáveis possíveis evitando, assim, que uma perturbação de temperatura na CP afetasse a temperatura interna da CS, ou seja, o isolamento térmico possibilitava a correção da temperatura da CP antes que a temperatura da CS fosse afetada. Sendo a CS um ambiente confinado, suas dimensões devem ser de tal ordem a não possibilitar que a massa sublimada ao longo de uma corrida (50 mg, em média) não altere, significativamente, a concentração de naftaleno no seu interior a qual, por hipótese, é considerada nula. Nos Capítulos 4 e 5 de [6] é feita uma análise da influência desse efeito sobre os resultados obtidos.

O DT tinha por finalidade propiciar um adequado suporte à placa de naftaleno, bem como prover um adequado ajuste da abertura do canal. Além disso, o DT devia possibilitar uma rápida montagem e desmontagem do canal de modo a minimizar a perda de massa durante o referido processo. A Figura 1 ilustra o DT.

O DT era fixado a um suporte horizontal disposto no interior da CS, através da mesa (1). As guias laterais (6) tinham por finalidade prover um adequado alinhamento à parte móvel da morsa (2), quando da sua abertura. O valor máximo para o desalinhamento entre as placas após a abertura do canal (medido nos cantos superiores e inferiores das mesmas) era de cerca de 2%, relativamente ao valor médio, ou seja, o próprio  $b$  utilizado no processo de redução de dados.

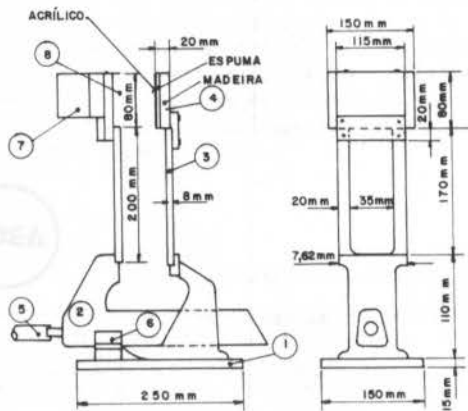


Figura 1. Componentes básicos do dispositivo de teste

Os suportes de duralumínio (3) permitiam, além da fixação das placas de naftaleno e de madeira (4), que o canal ficasse a uma certa distância da morsa evitando, assim, uma obstrução não desejável ao escoamento. Com o objetivo de fornecer uma melhor vedação durante a fase inicial do experimento interpôs-se, entre a placa de madeira e a de acrílico, uma fina camada de espuma. A movimentação da morsa era feita através do eixo (5) que ligava o fuso da morsa à parte externa da CS. Dessa forma, a distância entre placas (b) era facilmente ajustada, através de marcas previamente feitas neste eixo. A fim de evitar os efeitos de borda, no escoamento entre as placas, obstruiu-se as extremidades laterais do canal (7).

Essa configuração do DT permitia uma fácil montagem e desmontagem da placa de naftaleno por ocasião da realização da corrida, visto que a mesma é apenas encaixada no DT, (8). O DT permitia também a realização de experimentos objetivando simular o problema de convecção natural em uma placa plana vertical bastando, para tanto, tornar máxima a abertura do canal (5,5 cm).

O fator determinante do dimensionamento da placa de naftaleno (PN) foi a capacidade máxima da balança de precisão disponível (0,2 kg). Em média cada placa pesava 0,185 kg e suas dimensões eram de 0,08 m x 0,116 m x 0,01 m.

O naftaleno utilizado nos experimentos foi obtido a partir da destilação de naftalina comercial. Em [6] é feita uma descrição detalhada do processo de destilação do naftaleno assim como do molde e processo de fundição.

#### CONTROLE DE TEMPERATURA

O nível de temperatura alcançado no interior da CP era função do número de resistências elétricas acionadas, sendo essa relação obtida de modo aproximado, através de experimentos auxiliares. Com a finalidade de possibilitar um controle mais preciso do nível de temperatura fez-se com que duas dessas resistências tivessem suas potências variáveis, de 0 a 800 Watts, através de um regulador de tensão.

A leitura das temperaturas era realizada através de um termômetro digital que, juntamente com um seletor de canal, permitia selecionar o ponto no qual desejava-se medir a temperatura. A Figura 2 mostra uma vista em corte da CS ilustrando o posicionamento dos termopares (Cu-Co de 0,84 mm de diâmetro).

#### PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

O procedimento experimental era iniciado na noite anterior à realização da corrida quando a placa de naftaleno, embrulhada em papel aluminizado, era colocada no interior da CS, a fim de permitir que na manhã seguinte a realização da corrida a mesma estivesse em equilíbrio térmico com o meio. Nessa fase, era também acionado um ventilador com o objetivo de homogeneizar a temperatura da CP.

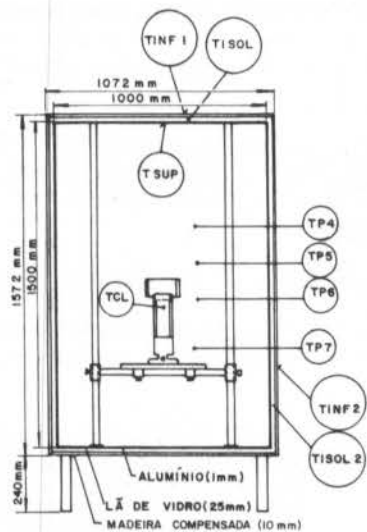


Figura 2. Posicionamento dos termopares da CS

Por ocasião do início da corrida efetuava-se a passagem da placa e sua instalação do DT. Feito isso, fechava-se o DT até que a placa de naftaleno encostasse à placa de acrílico evitando sua sublimação durante o período subsequente do procedimento experimental. Após isso, eram instaladas as tapagens laterais do canal.

Decorrido o intervalo de 1 hora (necessário para estabilização das condições internas da CS) procedia-se a abertura do DT utilizando-se o eixo que ligava o fuso da morsa à CP. Durante a corrida, que durava de 1 a 4 horas, era feito um rigoroso controle de temperatura da CP. Esse controle era baseado na leitura, a cada intervalo de 10 minutos, dos 10 termopares mostrados na Figura 2.

#### REDUÇÃO DE DADOS

Com a finalidade de fornecer os resultados na forma adimensional definiu-se o número de Sherwood médio (Sh), análogo ao número de Nusselt médio, na forma:

$$\overline{Sh} = \frac{\bar{k} b}{D_n} \quad (2)$$

onde b é a abertura do canal,  $D_n$  é o coeficiente de difusão do naftaleno no ar, definido pela relação

$$D_n = \frac{\mu}{Sc} \quad (3)$$

sendo  $\mu$  a viscosidade cinemática da mistura ar e naftaleno e Sc o número de Schmidt ( $Sc=2,5$ ).  $\bar{k}$  representa o coeficiente médio de transferência de massa, definido, como

$$\bar{k} = \frac{\dot{M}}{A (\rho_{nw} - \rho_{n\infty})} \quad (4)$$

onde  $\dot{M}$  é taxa de transferência de massa, A é a área superficial da placa,  $\rho_{nw}$  é a concentração de vapor de naftaleno na superfície da placa e  $\rho_{n\infty}$  é a concentração de vapor de naftaleno no meio.

Portanto:

$$\overline{Sh} = \frac{\dot{M} b}{A \rho_{nw} D_n} \quad (5)$$

Na obtenção da equação (5) considerou-se  $\rho_{n\infty} = 0$ , isto é, concentração de naftaleno nula no interior da CS.

A taxa de transferência de massa foi determinada dividindo-se a variação de massa da placa ( $\Delta M$ ) pelo intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) da corrida. Na determinação de  $\Delta M$ , foram descontadas as perdas de massa decorrentes de falhas na vedação durante a fase inicial do experimento (cerca de 2,0 mg), bem como a que ocorria durante a desmontagem, pesagem e montagem da placa (cerca de 2,5 mg).

A concentração de vapor de naftaleno na superfície da placa ( $\rho_{nw}$ ) era obtida utilizando-se a equação geral dos gases perfeitos, juntamente com a relação de Sogin [7], sendo esta última apresentada a seguir

$$\log_{10} P_{nw} = 13,564 - \frac{3729,4}{T_w}, \quad (6)$$

onde  $P_{nw}$  é a pressão de vapor de naftaleno em  $[N/m^2]$  e  $T_w$  temperatura da placa em  $[K]$ .

Da equação de estado dos gases perfeitos

$$\rho_{nw} = \frac{P_{nw}}{R_n T_w} \quad (7)$$

onde  $R_n$  é a constante de gás do naftaleno.

O parâmetro adimensional utilizado para correlacionar o número de Sherwood médio foi o parâmetro  $(b/\ell) Grm Sc$ , onde  $\ell$  representa o comprimento do canal, ou seja, o comprimento da placa de naftaleno.

#### APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Como forma de se validar a aplicação da técnica de sublimação de naftaleno a experimentos de convecção natural iniciou-se com a simulação do problema de convecção natural em uma placa plana vertical isotérmica. Outro objetivo desse procedimento foi o de aferir as condições do aparato experimental utilizado, bem como do procedimento experimental.

Até que fossem obtidos resultados satisfatórios e confiáveis foi necessário a realização de cerca de 30 experimentos. Nessa fase foram feitas modificações no aparato e procedimento experimentais a fim de melhorar a qualidade e confiabilidade dos resultados obtidos.

Os resultados experimentais obtidos para o problema de convecção natural em uma placa plana vertical apresentaram um erro médio da ordem de 14%, relativamente aos previstos teoricamente, [8]. Uma possível explicação para essa ocorrência seria a existência de correntes de convecção natural no interior da CS induzidas por perques, porém, quase sempre existentes gradientes de temperatura no seu interior. Vale ressaltar que, apesar da placa plana vertical ser a geometria mais simples para efeito de análise teórica e para montagem do aparato experimental é também a mais susceptível à ação de correntes de convecção induzidas por gradientes térmicos.

A partir dos resultados obtidos para a placa plana vertical iniciou-se a simulação do problema de convecção natural em um canal vertical.

A Figura 3 apresenta os resultados experimentais obtidos para o número de Sherwood médio, em função do parâmetro  $(b/\ell) Grm Sc$ .

A fim de melhor apresentar os resultados experimentais obtidos foi determinada, através do Método dos Mínimos Quadrados, a equação que melhor descreve esses resultados, sendo da forma

$$\overline{Sh} = \frac{1}{12 L} \{1 - \exp [221,22 L^2 - 47,75 L - 7,69]\}, \quad (8)$$

onde  $L = [(b/\ell) Grm Sc]^{-1}$ .

Foi observado um erro médio, relativamente aos resultados previstos teoricamente ([9] e [10]), de 8%.

#### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Pelo fato do escoamento de convecção natural ser extremamente dependente das condições ambientais e de eventuais perturbações dessas condições e, considerando-se outros resultados experimentais obtidos para si-

tuções envolvendo convecção natural ([4], [11] e [12], por exemplo) conclui-se que os resultados obtidos foram satisfatórios.

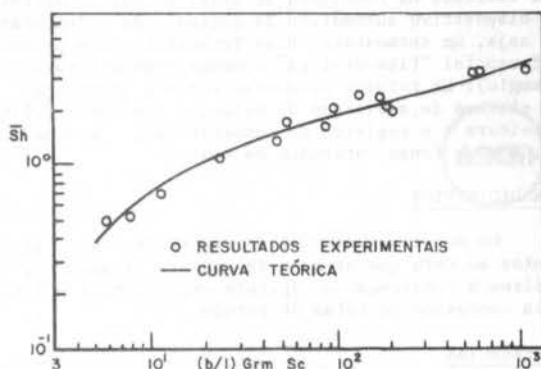


Figura 3. Variação do número de Sherwood médio com o parâmetro  $(b/\ell) Grm Sc$

Deve-se ressaltar contudo que, tão importante quanto os resultados apresentados, foram as conclusões obtidas a respeito de qual seria a melhor configuração do aparato experimental como também do melhor procedimento experimental.

Conforme já citado, a provável existência de correntes de convecção, induzidas por gradientes térmicos, no interior da CS devem ter sido as principais responsáveis pelos erros verificados visto que de acordo com o Apêndice C de [6], onde é feita uma análise de incertezas na obtenção de  $\overline{Sh}$  e  $(b/\ell) Grm Sc$ , nas situações mais desfavoráveis é de se esperar um erro aleatório de 2,0% para o número de Sherwood médio e de 1,0% para o parâmetro  $(b/\ell) Grm Sc$ . Portanto, são sugeridas algumas modificações no aparato e procedimento experimentais com o intuito de se evitar o aparecimento de tais correntes.

Conforme pode ser observado na Figura 4, a diferença entre a configuração proposta e a que foi utilizada e a existência da câmara terciária (CT). Nessa configuração, a CT teria a mesma função da CS anteriormente descrita devendo, entretanto, possuir dimensões superiores, a fim de permitir uma maior quantidade de massa sublimada por corrida sem o efeito indesejável do aumento da concentração de naftaleno no meio de teste, isto é, na própria CT. A CT, deve, inclusive, ser termicamente isolada, a fim de prover condições estáveis à realização dos experimentos.

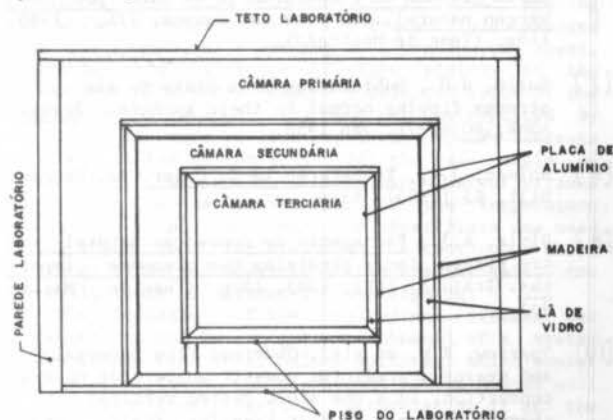


Figura 4. Configuração sugerida para o aparato experimental

A finalidade da CS na configuração mostrada na Figura 4 é o de "amortecedor" o gradiente térmico existente na CP. Tal fato, aliado ao isolamento térmico das paredes da CT, possibilitaria a existência de condições ideais à realização dos experimentos, quais sejam: uniformidade de temperatura e, conseqüentemente, ausência

de correntes de convecção natural induzidas por gradientes térmicos.

Nessa configuração a CP desempenharia a mesma função exercida na configuração atual tendo, entretanto, um dispositivo automático de controle de temperatura, ou seja, um termostato. Esse termostato deve possuir um diferencial "liga-desliga" o menor possível (0,3 °C, por exemplo). Um reforço adicional seria a instalação de um sistema de aquisição de dados, o qual possibilitaria a leitura e o registro de temperaturas, automaticamente, por um longo intervalo de tempo.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de registrar seus agradecimentos ao CNPq que através de suporte financeiro, possibilitou a construção do aparato experimental e à FAPESP pela concessão de bolsa de estudo.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Fernandes, E.C. e Saboya, F.E.M., Coeficientes de transferência para escoamento forçado em regime laminar entre placas planas paralelas. V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Campinas, SP, 1979. Anais do COBEM 79, v.A, pp. 420-9.
- [2] Fernandes, E.C. e Saboya, F.E.M., Local and average transfer coefficients for developing laminar flow between parallel plates. Trans.Canad Soc.Mechanical Engng., 7(1): 12-6, 1983.
- [3] Saboya, S.M. e Saboya, F.E.M., Transfer coefficients for plate fin and elliptical tube heat exchanger. VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, RJ, 1981. Anais do COBEM 85, v.A, pp. 153-62 (1985).
- [4] Sparrow, E.M. and Bahrami, P.A., Experiments on natural convection from vertical parallel plates with either open or closed edges. Journal of Heat Transfer, 102:221-7, May 1980.
- [5] Kaminski, M., Contribuição ao estudo da influência de vibrações longitudinais no transporte de massa por convecção natural a partir de placas verticais. São Paulo, USP, 1974. 91p. (Tese de Mestrado).
- [6] Pessoa Filho, J.B., Utilização da técnica de sublimação de naftaleno na determinação de coeficientes globais de transferência de calor por convecção natural. São José dos Campos, ITA, 1988. 118p. (Tese de Mestrado).
- [7] Sogin, H.H., Sublimation from disks to air streams flowing normal to their surfaces. Trans. ASME, 80:61-71, Jan 1958.
- [8] Holman, J.P., Transferência de Calor. Ed. McGraw-Hill, RJ (1983). 639p.
- [9] Diniz, A.J., Escoamento de convecção natural entre placas planas paralelas com pressões impostas. Itajuba, EFEI, 1983, 120p. (Tese de Mestrado).
- [10] Sparrow, E.M. et alii, Observed flow reversal and measured-predicted nusselt number for natural convection, in a one sided heated vertical channel. Journal of Heat Transfer, 108(2):325-32, 1984.
- [11] Kreith, F., "Convecção natural". In: Princípios da transmissão de calor. Ed Edgard Blücher, SP (1977), Cap. 7, p.309-19.
- [12] Azevedo, L.F.A. and Sparrow, E.M., Natural convection in open-ended inclined channels. Journal of Heat Transfer, 107: 893-901, Nov. 1985.

#### ABSTRACT

In this work is made an experimental study analogous the natural convection heat transfer in a vertical channel formed by two parallel flat plates being one isothermal and the other adiabatic. The presented results were obtained using the analogy between the heat and mass transfer process. Particularly, in this work, was utilized the naphthalene sublimation technique. The obtained results are showed under the form of average Sherwood number versus  $(b/l)GrSc$  parameter. The experimental proceeding and methodology are described, as well as the main difficulties found.



SECONDARY FLOW OBSERVATIONS IN NATURAL CONVECTION  
THROUGH OPEN-ENDED INCLINED CHANNELS

L.F.A. AZEVEDO and J.G. CARVALHO

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

ABSTRACT

A visualization technique based on the illumination of neutrally-buoyant solid particles suspended in water was implemented with the objective of studying the flow patterns prevailing in natural convection through open-ended inclined channels heated from below. For certain operating conditions, secondary motions in the form of longitudinal streaks were observed and photographically documented.

INTRODUCTION

There exists an extensive body of the literature dedicated to the study of laminar natural convection in open-ended channels (e.g. [1]). Most of the work, however, has been directed to the vertical orientation of the channel. The effect of inclining the channel relatively to the gravitational field was first investigated by Elenbaas [2] in 1942, which studied a channel configuration with both walls heated at the same temperature level, elevated in relation to the ambient.

In that paper, the heat transfer results were presented as function of a modified Rayleigh number calculated with the streamwise component of gravity. This dimensionless presentation was suggested by an analysis of the two-dimensional boundary layer form of the governing equations. The heat transfer data for the vertical orientation of the channel were very well correlated by the suggested dimensionless parameter. However, considerable spread of the data was verified for the inclined channel configuration.

This outcome indicates that the inability of a dimensionless parameter, obtained from a two dimensional analysis, to correlate the data, might be due to the presence of secondary motions in the channel, i.e., three dimensional flow.

It is known that heating from below can have a destabilizing effect on fluid layers due to the existence of a top-heavy situation. Indeed, Sparrow and Husar [3] have demonstrated that secondary motions in the form of longitudinal vortices were present in natural convection flows over inclined flat plates heated from below. The same flow pattern was revealed by visualization experiments conducted on laminar mixed convection through horizontal ducts of rectangular cross section [4].

In a recently published paper, Azevedo and Sparrow [5] studied inclined channels in natural convection. This study investigated the effects on the average heat transfer from the channel walls due to interwall spacing, wall-to-ambient temperature difference, angle of inclination, and mode of heating (i.e., heating from below, heating from above, and both walls heated). Perfect correlation of the heat transfer data were reported by using the modified Rayleigh number suggested by Elenbaas, when the channel was heated from above. Heating from below, however, produced data displaying a separate dependence on interwall spacing, wall-to-ambient temperature difference, and angle of inclination. For a fixed spacing and angle of inclination the heat transfer data progressively lift off the vertical channel results as the Rayleigh number (i.e., the dimensionless wall-to-ambient temperature difference)

increases. The heat transfer augmentation was shown to reach as much as twenty percent beyond the vertical channel values. The same general trends, although not so pronounced, were reported for the channels with both walls heated.

With the objective of explaining the just described behavior of the heat transfer results, Azevedo and Sparrow reported flow visualization experiments [5], employing the thymol blue visualization method [6]. This is an electrochemical technique in which a change in fluid color is produced by changes in pH brought about by an imposed d.c. voltage. The main feature of this method is to produce a neutrally-buoyant tracer fluid which faithfully follows the natural-convection-induced motions. The heating surface of the channel was employed as the tracer producing electrode, so that, when the d.c. voltage was imposed, the whole surface of the heating wall (i.e., the lower wall) was covered with tracer fluid which was carried along with the flow passing through the channel.

The flow visualization results revealed that, up to a certain value of the wall-to-ambient temperature difference (for fixed values of the interwall spacing and angle of inclination), the tracer fluid emerged from the channel exit opening as a continuous sheet, indicating the existence of flow strictly in the streamwise direction. Beyond a critical value of the temperature difference, this pattern was replaced by an array of more or less regularly spaced streaks adjacent to the bottom wall. For the same angle of inclination, the spacing between two adjacent streaks was shown to be a function of the temperature difference. In addition, when the upper plate was used as the tracer producing electrode, a continuous sheet of tracer fluid was observed at the channel exit, for the whole range of parameters investigated.

The formation of the longitudinal streaks was attributed to the presence in the channel of a system of counterrotating longitudinal vortices, which sweeps the layer of tracer fluid adjacent to the heated wall in the transverse direction, accumulating it at the boundary line between two vortices. The observation of a continuous layer of tracer fluid adjacent to the upper wall was interpreted as being an indication that the vortex system does not occupy the entire cross section of the channel. An illustration of the vortex system just described is presented in the inset of Fig. 4, which was reproduced from [5].

The aforementioned visualization experiments were unable to capture the complete structure of the longitudinal vortex system described, since it only documented the effects of the secondary motions on a layer adjacent to the heating wall (i.e., the longitudinal streaks). It is the purpose of the

present research to implement a visualization technique capable of revealing the details of the whole flow field, thereby verifying the correctness of the flow structure inferred from the thymol blue visualizations.

The choice of the visualization technique to be employed is constrained by the nature of the flow under investigation. Unlike in the case of forced convection and, to some extent, mixed convection, natural convection flows can be disturbed by density differences between the tracer fluid and the working fluid. For this reason, the techniques based on the injection of a tracer fluid, widely used for mixed convection flows were discarded.

The flow visualization method employed in the present research is based on long time exposure photographs of small, neutrally-buoyant solid particles evenly distributed in the working fluid. The flow is made visible by illuminating a particular channel cross section with a plane of light. This way, two-dimensional slices of the three dimensional flow can be obtained and used to visualize it.

It should be emphasized that the main objective of the present paper is to report on the research conducted towards the implementation of the chosen visualization technique. The results to be presented do not intend to be a complete parametric study of the flow structures in inclined channels in natural convection. This latter objective is being pursued in a experimental program in course at the Thermal Sciences Laboratory of PUC/RJ.

## EXPERIMENTS

The Test Section. The visualization experiments were conducted in water utilizing the apparatus which will now be described.

The main component of the experimental setup is the test section shown schematically in Fig. 1. As can be seen in the figure, the channel geometry is formed by two main walls, one heated and one unheated, and by two side walls.

The heated wall was a 12-mm-thick copper plate with height  $H$  of 150 mm and width  $W$  of 100 mm. In order to simulate a constant temperature condition at the heating surface, the plate was electrically heated by means of three independently controlled heating circuits. This heating-circuit layout was designed based on previous knowledge of the behaviour of the rate of heat transfer from the plate, which decreases along its height.

Three regulated d.c. sources supplied power to the heating circuits. The voltage drop across each heater was carefully adjusted with the objective of attaining temperature uniformity at the heating surface. This adjusting process was guided by the readings of eight pre-calibrated thermocouples distributed in the plate. The thermocouples were made of 0.127-mm-diameter, Teflon-coated, chromel-constantan wires, and were installed in holes drilled through the back side of the plate. The junctions of the thermocouples were

positioned about 0.5 mm from the front face of the plate. A digital voltmeter with an accuracy of  $1 \mu V$  was used for the readings of the thermocouples.

Extraneous heat losses from the heated plate were minimized by affixing to its rear face a 40-mm-thick block of closed-pore water-tolerant polystyrene.

The unheated wall was a plexiglass plate having the same dimensions as the copper plate.

To complete the channel geometry, two 1.5-mm-thick plexiglass side walls were fabricated. These walls served a dual purpose. Firstly, they were used as spacers to maintain the desired interwall spacing  $S$ . For this reason a pair of such plates was available for each interwall spacing investigated. Secondly, as will be explained shortly, they were also used to partially block the incident light during the visualization runs, in order to provide an illuminated plane of fairly constant thickness. To this end, the inner face of both side walls were covered with black tape normally used for electrical insulation. Then, a 1-mm-thick slit was cut horizontally on the tape, along the width of the side walls. This slit allowed for the illumination of the channel. Care was taken to guarantee that the slits in both side walls were cut at the same axial position.

The two main walls and the side walls were mounted in a plexiglass supporting frame (not shown in Fig. 1). This supporting frame was designed so as not to obstruct or deflect the flow passing in or out the channel openings. A special mechanism was provided in the supporting frame to allow the setting of the inclination angle  $\theta$ .

The Test Environment. The test environment for the visualization runs was provided by a water-filled plexiglass tank with dimensions 420 x 450 x 720 mm (height x width x length), in which the supporting frame carrying the test section was positioned. The temperature of the water in the test tank was monitored by three thermocouples (0.127-mm-dia., chromel-constantan) located approximately 300 mm away from the test section. The thermocouples were fixed on a vertical rod at, respectively, 40, 205, and 370 mm from the floor of the tank.

Visualization Technique. The flow visualization technique employed in the present research relied on low intensity light reflected by small illuminated plastic particles carried along the flow. For this reason, all possible extraneous sources of light should be eliminated, otherwise the quality of the photographs obtained would be affected. With this objective, the inner surface of the tank walls were covered with plastic panels painted with flat black paint. Slits were provided in two opposing panels to allow for the illumination of the test section. In addition, during the photographic sessions, the water tank was covered with a black sheet of fabric. Small openings in the sheet were provided for illumination of the test section and for the camera.

The photographs were taken through the water surface maintaining the camera in a plane parallel to the exit plane of the channel. As it would be expected in this situation, refraction of the light rays will distort the image of the channel. To avoid this effect, a plexiglass box with dimensions 200 x 200 x 150 mm was constructed and partially submerged in the water, with its base parallel to the exit plane of the channel. The photographs were taken through the base of the plexiglass box.

Photographs were obtained with a 35-mm Pentax camera utilizing a 50-mm macro lens, and 400-ASA Kodak TRI-X black and white film.

A uniform illumination of any particular channel cross section was obtained by utilizing two Kodak slide projectors. The projectors were situated in opposite sides of the tank. The plane of light necessary for the visualization was obtained by inserting in the projectors slides with 1-mm-thick slits. The plane of light from the projectors reached the interior of the channel after passing through the

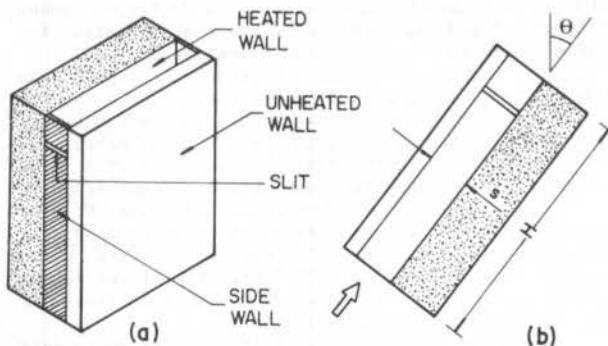


Fig. 1 Test Section

openings in the fabric sheet, through the slits in the panels covering the tank walls, and through the slits in the side walls of the channel. This multiple slit arrangement produced a plane of light in the channel with a fairly constant thickness of approximately 1 mm.

**Experimental Procedure.** The experiments consisted of the photographic documentation of the flow patterns prevailing in the channel for different operating conditions. Each data run was characterized by a value of the interwall spacing  $S$ , the angle of inclination of the channel, and the wall-to-ambient temperature difference.

Visualization of the flow patterns were conducted utilizing time exposure photographs of illuminated solid particles dispersed in the water. The particles utilized were 50- $\mu\text{m}$  Pliolite resin made by the Goodyear Rubber Co.. These particles are well suited for visualization experiments in water since they are nearly neutrally buoyant (specific gravity of 1.02).

The optimum particle concentration is a function of the flow characteristics being observed. In the present research several test runs were conducted leading to an optimum concentration in the range of 0.5-0.8 grams per 100 liters of water.

The particles were mixed with water in a separate container. Vigorous mixing and some drops of liquid soap were necessary to obtain a good dispersion and avoid the formation of cluster of particles. This solution was added to the tank where the visualization experiments would be carried out. Stirring of the tank was necessary to evenly distribute the particles and to eliminate possible temperature gradients in the water. This condition was verified by monitoring the three thermocouples deployed in the tank. An hour waiting period was allowed to guarantee that all motions generated by the stirring operation had died away.

After the waiting period, power was applied to the three heating circuits, and the attainment of the steady-state condition was verified by monitoring the plate thermocouples. At steady-state, the wall and fluid temperatures and the heaters voltages and currents were recorded.

At this point, the projectors were switched on while the lights of the laboratory were switched off. Several photographs with different exposure times were taken. Then, the new voltage settings for the next run were dialed in and the power switched off. The water in the tank was stirred and, after an hour's wait, a new data run could be performed.

## RESULTS AND DISCUSSION

As stated in the Introduction, the preliminary experiments to be reported in the present paper were conducted with the objective of implementing a visualization technique capable of revealing secondary

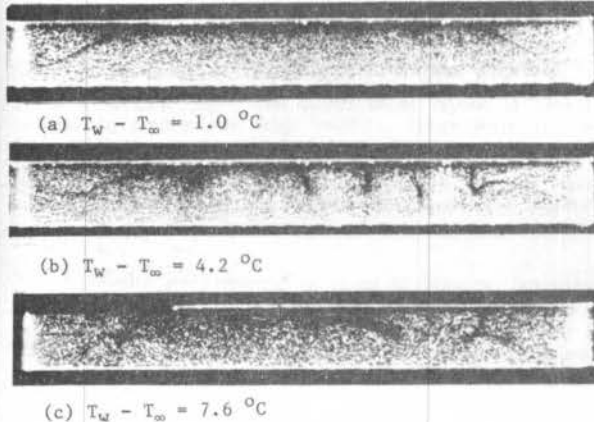


Fig. 2 Flow visualization for  $S/H = 0.066$  and  $\theta = 45^{\circ}$

motions within the channel. They did not intend to be a parametric study of the flow conditions in the channel. However, even with a limited number of experiments, some interesting observations could be made, as will be described shortly.

Heat transfer data in the form of Nusselt numbers were obtained and compared with the available literature [5] with the objective of validating the experimental procedure and the apparatus constructed. In all runs performed the average Nusselt numbers agreed to within five percent with the data from the literature.

Visualization experiments were performed for a fixed angle of inclination equal to 45 degrees, and for dimensionless spacings  $S/H$  of 0.066 and 0.100. For each dimensionless spacing three levels of the wall-to-ambient temperature difference were investigated.

Figure 2 presents photographs of the cross section of the channel for three different levels of the wall-to-ambient temperature difference, for a channel with  $S/H$  equal to 0.066. The cross section photographed was situated at a dimensionless axial distance from the inlet of the channel,  $x/H$ , equal to 0.95. The exposure time for all three photographs was equal to 40 seconds.

An overall observation of Fig. 2(a) shows that for low temperature differences ( $T_w - T_{\infty} = 1 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ) the flow is strictly in the axial direction. A careful observation along a vertical line crossing, for example, the mid-plane of the cross section, shows a gradient in the illumination of the picture. Close to the top (unheated) wall there exists a dark region which slowly becomes more illuminated as one moves towards the bottom (heated) wall. A brighter region means that more light-reflecting particles have crossed the illuminated plane in a fixed time interval (40 seconds in this particular case). Thus, a brighter region can be associated with higher axial velocities. Following this line of argument, it can be concluded that the axial velocity profiles are not symmetric, displaying higher velocities in the lower half of the cross section. A similar velocity distribution has been numerically predicted for mixed convection flows through horizontal ducts heated from below [7]. It can also be observed in Fig. 2(a) the existence of one cell of secondary motion adjacent to each side wall. This is attributed to free convective motions induced by heat losses from these non-insulated walls.

Figure 2(b) displays a flow structure totally distinct from the one previously described. This situation corresponds to a wall-to-ambient temperature difference of 4.2  $^{\circ}\text{C}$ . The secondary motions are clearly visible in the central region of the cross section, although, as predicted by [5], these cells do not seem to touch the upper wall. It should be noted that the cells adjacent to the side walls have grown into the cross section of the channel.

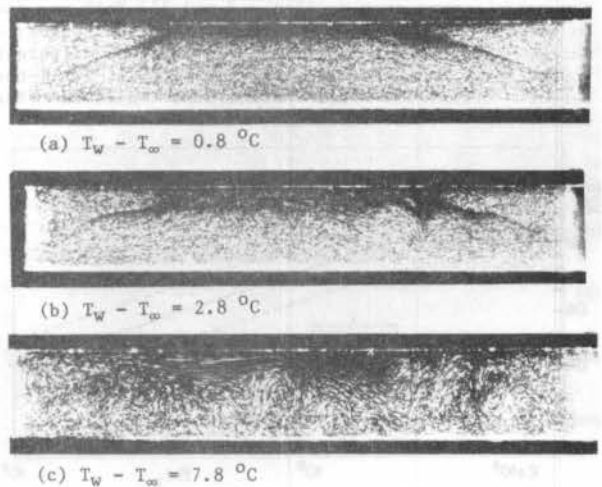


Fig. 3 Flow visualization for  $S/H = 0.100$  and  $\theta = 45^{\circ}$



As the temperature difference is increased (Fig. 2(c),  $T_w - T_\infty = 7.6$  C), the well organized structures of Fig. 2(b) tend to disappear. Vortices of different sizes occupy the channel cross section.

The thymol visualization experiments [5] were not able to reveal this new flow structure, yielding the same qualitative results for the cases corresponding to Figs. 2(b) and 2(c), i.e., regularly spaced longitudinal streaks adjacent to the heated wall. This outcome suggests that there should exist a smaller vortex system acting closer to the heated wall and responsible for the formation of the longitudinal streaks shown by the thymol blue visualizations. These smaller vortices would coexist with the larger structures revealed by the visualization experiments of the present research.

Figure 3 presents photographs of a cross section of the channel positioned at a dimensionless axial distance from the inlet equal to 0.95, for a channel with  $S/H = 0.100$ , inclined at 45 degrees. As can be seen, the qualitatively results are similar to the case described in Fig. 2, i.e., axial flow with natural convection cells close to the side walls for small temperature differences, and the development of secondary motions as the temperature difference is increased. Figure 3(c) shows clearly the presence of vortices of different sizes, which corroborates the arguments of the preceding paragraph.

The information extracted from the visualization experiments will now be compared with the results from [5], as far as the wavelengths of the longitudinal vortices are concerned. The inset in Fig. 4 helps define the wavelength for a pair of counterrotating vortices, which was computed from the distance between two adjacent longitudinal streaks in the thymol blue visualization studies. This figure was adapted from [5], and displays the dimensionless wavelength  $\lambda/S$  as a function of the Rayleigh number, given by  $Ra_S = (g\beta(T_w - T_\infty)S^3/\nu^2)Pr$ . The data points presented in the original paper were replaced here by a curve fitted line sided by two dashed lines which represent the uncertainty levels associated with the experiments. Figure 4 also presents information regarding the transition of the flow from a pure streamwise motion to one in which secondary flows are present. The transition values are represented in the figure by the arrow-attached symbols.

Figures 2(a) and 3(a) represent situations of predominant axial flow. These two cases are plotted in Fig. 4, respectively as a dark circle and a dark diamond. As it can be verified in the figure, these data points are in agreement with the measured transition values, i.e., they lay to the left of each transition value.

Results related to the wavelength of the vortices were very difficult to be extracted from the photographs presented in Figs. 2 and 3. This was due to the complex nature of the secondary flows observed which, as already mentioned, presented different vortex sizes. However, specifically for Fig. 2(b), the better organized flow structures allowed the measurements of the wavelength of the vortex pair.

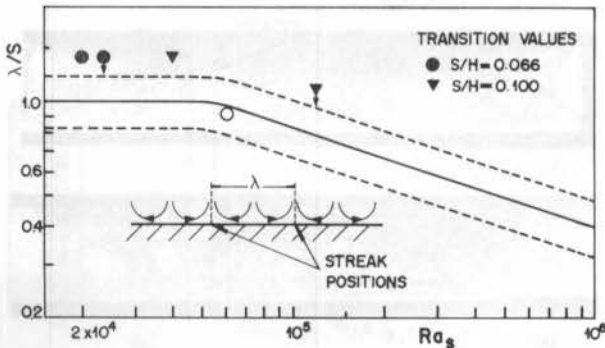


Fig. 4 Wavelength for pairs of vortices [5]

This result is plotted as an open circle in Fig. 4, and it is seen to agree very well with the solid line representing the data from [5].

#### CONCLUSIONS

A visualization technique based on the illumination of neutrally-buoyant solid particles suspended in water was implemented to study the flow patterns prevailing in natural convection in open-ended inclined channels. It was observed that, as the temperature difference was increased, the flow patterns changed from predominantly axial flow to a regime where secondary motions were present. The results obtained were compared with previously published data. They were found to be in good agreement with those data regarding the transition from the axial flow regime to the secondary flow regime.

Based on the results obtained with the visualization technique employed, it was suggested that distinct flows structures represented by different vortex sizes coexist in the channel, the smaller ones being responsible for the longitudinal streaks revealed by the thymol blue experiments reported in the literature.

#### REFERENCES

- [1] Aung, W., Fletcher, L.S., and Sernas, V., "Developing Laminar Free Convection Between Vertical Flat Plates with Asymmetric Heating" *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, 1972 pp. 2293-2308.
- [2] Elenbaas, W., "Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection", *Physica*, Vol. 9, 1942, pp. 1-28.
- [3] Sparrow, E.M., and Husar, R.B., "Longitudinal Vortices in Natural Convection Flow on Inclined Plates", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 37, 1969, pp. 251-255.
- [4] Akiyama, M., Hwang, G.J., and Cheng, K.C., "Experimentes on the Onset of Longitudinal Vortices in Laminar Forced Convection Between Horizontal Plates", *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 93, 1971, pp. 335-341.
- [5] Azevedo, L.F.A. and Sparrow, E.M., "Natural Convection in Open-Ended Inclined Channels", *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 107, 1985, pp. 893-901.
- [6] Baker, D.J., "A Technique for the Precise Measurement of Small Fluid Velocities", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 26, 1966, pp. 573-575.
- [7] Incropera, F.P. and Schutt, J.A., "Numerical Simulation of Laminar Mixed Convection in the Entrance Region of Horizontal Rectangular Ducts", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 8, 1985, pp. 707-729.

HEAT FLUX ACROSS AN INCLINED SQUARE ENCLOSURE:  
IMPORTANCE OF THERMAL RADIATION

Ulises Lacoa  
Universidad Simon Bolivar, Caracas 1080-A, Venezuela  
Antonio Campo  
Florida International University, Miami, FL 33199

ABSTRACT

A numerical investigation involving natural convection and thermal radiation in inclined square cavities having isothermal walls has been conducted. The radiation transport equation has been reformulated in differential form by adopting the method of moments. The coupled system of conservation equations is solved numerically by implementing a combination of SIMPLER and MSI algorithms. Numerical results have been determined for a wide variety of parameters controlling the convective-radiative phenomenon.

INTRODUCTION

Natural convection in enclosures has been extensively studied owing to its wide ranging applications as witnessed by an outpour of publications in the heat transfer literature. In the main, the investigations are restricted to buoyancy driven flows and do not account for the simultaneous effect of natural convection and thermal radiation in gaseous media. However, recent findings for a vertical square enclosure clearly demonstrate the important influence of radiation on the natural convection phenomenon [1]. Correspondingly, in the present paper a more general situation is examined wherein, an inclined square cavity is considered and the combination of natural convection, thermal radiation and inclination angle is determined. In principle, the natural convection motion is assumed to be laminar and two-dimensional with the axis of the flow pattern parallel to the third dimension. Experimental evidence demonstrate that this assumption is expected to be valid for Rayleigh numbers up to  $10^6$  [2]. Flow visualization experiments indicate that as the enclosure is inclined toward the vertical position, a transition in the flow pattern occurs (at a critical angle,  $\alpha_c$ ) from Bernard cells to a two-dimensional flow with fluid moving up the hot wall and down the cold one. For the particular case of a square cavity, this angle is observed to be a weak function of Rayleigh number. A list of flow visualization studies of several investigators has been reported in [3] and it was concluded that the largest value of  $\alpha_c$  is 25 degrees. There are related investigations describing the influence of rotation on the heat transfer across cavities [4,5]. However, radiation has been neglected in all of them.

In the present paper, the radiative contribution of the participating gas has been modeled by the method of moments in two-dimensions wherein the radiative transfer equation (RTE) is expressed in differential form [6]. The salient feature of this approach is that the RTE, accounting for gray gas behavior is of elliptic type and consequently may be accommodated into a general diffusion-convection type of equation [7]. Correspondingly, this approach provides an additional conservation equation.

In view of the foregoing, the full set of conservation equations providing the mathematical specification to the problem is solved by a finite-volume based procedure called SIMPLER [7]. The nodal point layout is carefully tailored to resolve the large velocity, temperature and heat flux gradients at the solid-gas interfaces. In addition to this, the MSI algorithm is being used for the solution of the resulting system of algebraic equations [9]. An overall energy balance serves to validate the numerical algorithm used. In all cases studied energy conservation is satisfied within 1%.

Results are presented in terms of velocity, temperature and heat flux fields for the situations characterized by natural convection with and without radiation as they are affected by the pertinent thermal and geometrical parameters. The effect of the angle of inclination is investi-

gated over the range 30 degrees to 90 degrees for an aspect ratio of one. Variations of total heat transfer rates are plotted in terms of radiation parameters and the inclination angle and they are compared with the case where the cavity is vertical. Detailed comparisons for limiting benchmark solutions (vertical and inclined) have been also made to validate the numerical methodology adopted here.

Calculation of the radiation enhanced heat flux is made and is found to be in good qualitative agreement with those obtained in earlier studies.

**Mathematical Analysis.** The dimensionless equations for the conservation of mass, momentum, energy and radiative transfer in the inclined square cavity of Fig. 1 are

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - Gr\theta \sin\alpha \quad (2)$$

$$\frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} - Gr\theta \cos\alpha \quad (3)$$

$$\frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right) + \left( \frac{r^2}{NPr\phi} \right) [G^* - (1 + \phi)\theta^4] \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial Y^2} = 3r [G^* - (1 + \phi)\theta^4] \quad (5)$$

The cavity consists of two adiabatic walls and two isothermal walls that are differentially heated. It is filled with an absorbing and emitting medium, ( $Pr=0.7$ ) which behaves according to a gray gas model. The angle,  $\alpha$ , designates the degree of inclination of the hot plate from the horizontal plane. The thermoconvective flow induced by buoyant forces is interpreted as steady with two-dimensional laminar motion [2]. All physical properties are treated as constant, except for the buoyancy term where the classical Boussinesq approximation

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)] \quad (6)$$

allows for the variation of density with temperature in the momentum equations.

The boundary conditions associated to Fig. 1, where the walls are considered black, may be stated as follows



$$U = V = 0 \quad Y = 0, Y = 1 \quad (7)$$

$$U = V = 0 \quad X = 0, X = 1 \quad (8)$$

$$\theta = 0 \quad Y = 0 \quad (9)$$

$$\theta = 1 \quad Y = 1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial Y} = -1.5r(1 - G^*) \quad Y = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial Y} = 1.5r[(1 + \phi)^4 - G^*] \quad Y = 1 \quad (12)$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial X} = -1.5r[(1 + \phi)^4 - G^*] \quad X = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial X} = 1.5r[(1 + \phi)^4 - G^*] \quad X = 1 \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{3N\phi} \left( \frac{\partial G^*}{\partial X} \right) = 0 \quad X = 0, X = 1 \quad (15)$$

The dimensionless variables and parameters employed for the mathematical analysis are defined in the Nomenclature.

#### METHOD OF SOLUTION

The two-dimensional radiative transfer equation (RTE) when modeled by the method of moments becomes an elliptic partial differential equation of diffusion-convection type, Eq. (5). Correspondingly, the salient feature of the methodology is that the set of conservation equations (1)-(5) is of diffusion-convection type:

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X_j} \right) + S_\phi = 0 \quad (16)$$

where  $\Gamma_\phi$  and  $S_\phi$  are the appropriate dimensionless diffusion coefficients and source terms respectively. The system of equations represented by Eq. (16) was solved iteratively using a version of SIMPLER algorithm for integrating a system of elliptic partial differential equations. Although the general idea of the method is described by Patankar [7], the treatment of the pressure-velocity coupling adopted in this paper incorporates the improvement suggested by Raithby and Schneider [8].

In this sense, primitive variables  $U$ ,  $V$ ,  $P$ ,  $\theta$  and  $G^*$  are used in a staggered grid system. The computational domain is divided into rectangular control volumes with one grid point located at the center of the control volume forming the basic cell. Pressure,  $P$ , temperature  $\theta$  and irradiation  $G^*$  are calculated at these grid points, while velocities  $U$  and  $V$  are calculated at points that lie on the faces of the basic cells. The resulting system of algebraic equations is solved by the MSI algorithm developed by Schneider and Zedan [9]. The nodal point layout accommodates the large velocity and temperature gradients, and an overall energy balance is satisfied to within 1%.

#### PARAMETERS OF INTEREST

The controlling parameters in the set of conservation equations are the Rayleigh number  $Ra$ , the inclination angle,  $\alpha$ , the Planck number,  $N$ , the optical thickness,  $\tau$ , and the temperature ratio,  $\phi$ .

The overall rate of heat transfer inside the inclined square cavity is conventionally represented by a total Nusselt number  $Nu^T$ :

$$Nu^T = Nu^C + Nu^R \quad (17)$$

where the convective component is

$$Nu^C = - \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_w \quad (18)$$

and the radiative component is

$$Nu^R = \left( \frac{1}{3N\phi} \right) \left( \frac{\partial G^*}{\partial Y} \right) \Big|_w \quad (19)$$

respectively. Therefore, the total Nusselt number  $Nu^T$  is a function of the above cited physical parameters.

For engineering applications, the parameter of paramount interest is the mean Nusselt number. In general, it is usually defined as

$$\overline{Nu^i} = \int_0^1 Nu^i dx \quad (20)$$

where  $i = C, R, T$  identifies the specific mechanism. Additionally, for a differentially heated square cavity having adiabatic end walls, the mean total Nusselt number  $\overline{Nu^T}$  is independent of  $Y$ , and consequently it has identical values at each of the isothermal walls. That is

$$\overline{Nu^T}(Y) = \overline{Nu^T}(0) = \overline{Nu^T}(1) \quad (21)$$

Furthermore, as a validation of the numerical procedure this equality also serves as a critical test to check the accuracy of the algorithms.

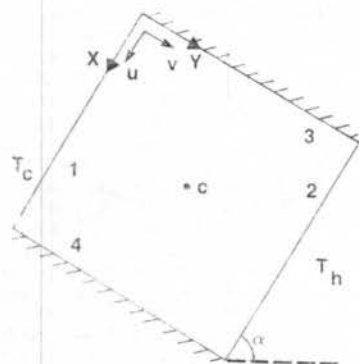


Fig. 1 Orientation of cavity

#### NUMERICAL RESULTS

The Rayleigh number was varied over a range from  $10^2$  to  $10^5$  for a series of cavity inclinations since the largest critical angle was found to be  $\alpha_c = 25^\circ$ . Therefore, it was decided to report results for  $\alpha \geq 30^\circ$  only. Additionally, the radiation parameters of the participating gas ( $Pr=0.7$ ) were varied systematically.

**Thermal Quantities.** The temperature gradient,  $\frac{\partial \theta}{\partial Y}$ , at the midpoint C of the cavity is plotted against  $Ra$  in Fig. 2 for two angles of inclination:  $\alpha=30^\circ$  and  $60^\circ$ . For relatively low values of  $Ra$ ,  $Ra = 100$  heat is transferred by conduction and radiation and the asymptotic value of  $\theta_{y,c}$  is 0.874. As may be observed in the figure this quantity is independent of the angle of inclination. As  $Ra$  increases, the conduction-radiation regime prevails up to  $Ra = 1400$  and  $4100$  for  $\alpha=30^\circ$  and  $60^\circ$ , respectively. Therefore, for this situation the onset of thermoconvective currents is retarded when the angle of inclination increases to  $60^\circ$ . This analysis is based on the classical criterion suggested by Thomas and de Vahl Davis. Additionally, the onset of boundary layer flow takes place at  $Ra = 1.5 \times 10^4$  for  $\alpha = 60^\circ$  and  $Ra = 2.5 \times 10^4$  for  $\alpha = 30^\circ$ , respectively. These numerical values correspond to  $\theta_{y,c} = 0$ . In view of this, radiation tends to shift the critical Rayleigh number  $Ra_c$  to the right. This number delineates

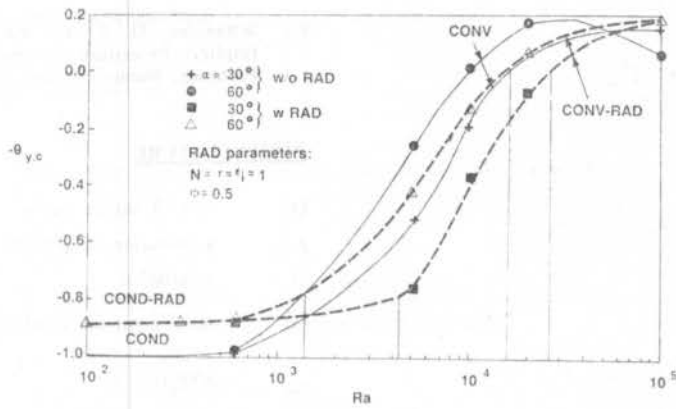


Fig. 2 Y-variation of the temperature gradients at midpoint

the boundary between the conduction-radiation regime and the development of boundary layer currents.

Fig. 3 illustrates the influence of the Planck number,  $10^{-1} < N < 10$ , on each of the mean Nusselt numbers for a situation characterized by  $Ra = 10^4$  and  $\alpha = 30^\circ$ . The numerical values of the remaining parameters appear in the legend. The dependence of  $\overline{Nu}^C$  with  $N$  is extremely weak. However, the variation of  $\overline{Nu}^R$  with  $N$  is very strong, and performing a regression analysis may be represented by a power law equation:

$$\overline{Nu}^R = CN^{-1}$$

where  $C = 0.718$  for the above-cited parameters. Therefore,  $\overline{Nu}^R$  varies inversely with  $N$ . In general, the proportionality factor,  $C$ , depends on  $\tau$  and  $\alpha$ , but based on numerical experiments, this dependence seems to be stronger with the former and weaker with the latter.

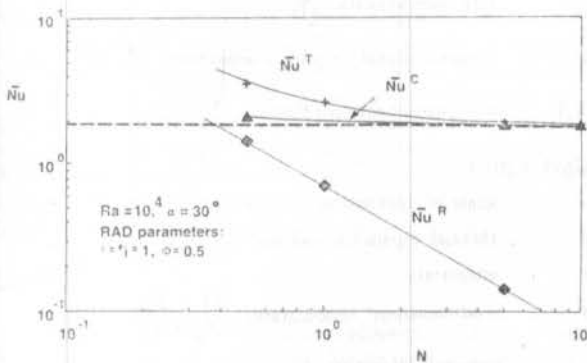


Fig. 3 Variation of total Nusselt numbers with  $N$

**Streamline and Isotherm Contour Plots.** Figures 4-7 present the streamline and isotherm contour maps for a number of representative situations for Rayleigh number,  $Ra = 10^4$ , and angles of inclination of  $\alpha = 30^\circ$  and  $60^\circ$ . The various cases analyzed involve pure natural convection and combined natural convection and radiation. For the latter, the radiation parameters selected for purposes of comparison are  $N = 1$ ,  $\tau = 1$  and  $\phi = 0.5$ . The value of the stream function is associated to each streamline. The isotherm contours have been drawn in increments of 0.1 from a minimum value of 0 to a maximum value of 1.

In Figs. 4-5 the contour plots are shown for a cavity inclined at  $30^\circ$ . The uni-cellular flow pattern is unaffected by the presence of radiation, but it does accelerate the flow in the central region. The influence of radiation in the isotherm contour plots may be explained in terms of the

temperature gradient. It is observed that heat flows from the lower adiabatic wall to the participating medium and from here to the upper adiabatic wall. However, in the vicinity of hot wall, heat is transferred from the medium to both adiabatic walls. The upper part of the cold wall is dominated by a conduction mechanism showing straight line patterns.

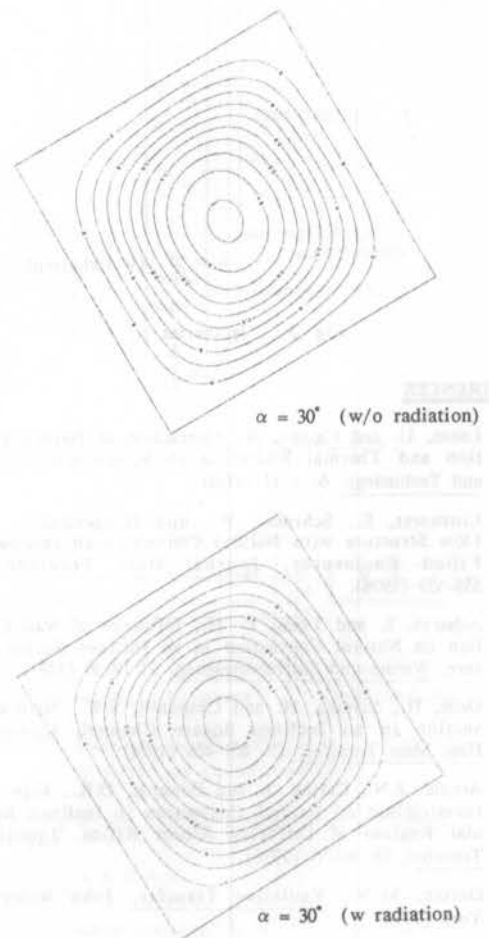


Fig. 4 Streamlines

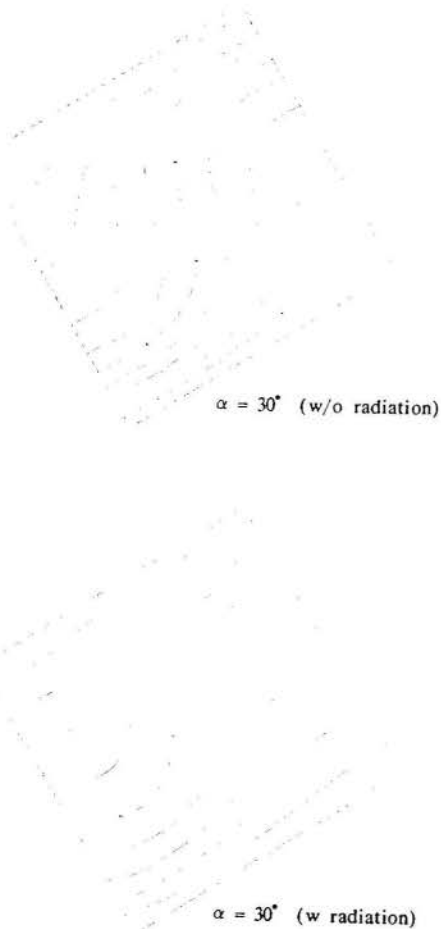


Fig. 5 Isotherms

#### REFERENCES

1. Lacoa, U. and Campo, A., Interaction of Natural Convection and Thermal Radiation in Square Cavities, Heat and Technology, 6: 1-11 (1988)
2. Linthorst, S., Schinkel, W., and Hoogendoorn, C. J., Flow Structure with Natural Convection in Inclined Air-Filled Enclosures, Journal Heat Transfer, 103: 535-539 (1976).
3. Acharya, S. and Tsang, C. H., Influence of Wall Conduction on Natural Convection in an Inclined Square Enclosure, Warme-und Stoffubertragung, 21: 19-30 (1987).
4. Ozoe, H., Sayama, H. and Churchill, S.W., Natural Convection in an Inclined Square Channel, International Heat Mass Transfer, 17: 401-406 (1974).
5. Arnold, J.N., Catton, I. and Edwards, D.K., Experimental Investigation of Natural Convection in Inclined Rectangular Regions of Differing Aspect Ratios, Journal Heat Transfer, 98: 67-71 (1976).
6. Ozisik, M.N., Radiative Transfer, John Wiley, New York (1973).
7. Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York (1980).
8. Raithby, G. T. and Schneider, G.E., Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Velocity-Pressure Coupling, Numerical Heat Transfer, 2: 417-440 (1979).

9. Schneider, G. E. and Zedan, M., A modified strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems, Numerical Heat Transfer, 4: 1-19 (1981).

#### NOMENCLATURE

D	side of square cavity
g	acceleration of gravity
G	irradiation
$G^*$	nondimensional irradiation, $\frac{G}{(4\sigma T^4)}$
Gr	$\frac{g\beta\Delta T D^3}{\nu_o^2}$
h	heat transfer coefficient
k	thermal conductivity
$k_t$	extinction coefficient
Nu	Nusselt number, $\frac{hD}{k}$
N	Planck number, $\frac{kk_t}{4\sigma T^3}$
p	pressure
P	nondimensional pressure, $\frac{p}{\rho_o v_o}$
Pr	Prandtl number
Ra	Rayleigh number, Gr Pr
T	temperature
$T_c$	cold wall temperature (Fig. 1)
$T_h$	hot wall temperature (Fig. 1)
$T_o$	mean temperature
$\nu_o$	reference velocity, $\frac{u}{D}$
U, V	nondimensional velocity components, $\frac{u}{v_o}, \frac{v}{v_o}$
X, Y	nondimensional coordinates, $\frac{x}{D}, \frac{y}{D}$

#### Greek Letters

$\alpha$	angle of inclination (Fig. 1)
$\beta$	thermal expansion coefficient
$\epsilon$	emissivity
$\theta$	nondimensional temperature, $\frac{(T - T_o)}{(T_h - T_c)}$
$\nu_o$	kinematic viscosity
$\rho_o$	density
$\sigma$	Stefan-Boltzmann constant
$\tau$	optical thickness, $k_t D$
$\phi$	temperature ratio, $\left(\frac{T_h}{T_c}\right) - 1$

METODOLOGIA PARA PROJETO DE COMBUSTORES AUTO-ASPIRADOS



HERALDO S. COUTO, JOÃO A. CARVALHO JR. - LCP/INPE  
 EDUARDO M. QUEIROZ - DEQ/EQ/UFRJ

RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentar uma metodologia para projeto de combustores auto-aspirados. Descreve-se, a partir das equações de conservação, os passos para se obter a razão de alimentação de ar induzida pelo efeito de convecção natural em uma câmara de combustão. Considera-se o efeito de perda de carga tanto nas paredes internas do combustor como em um leito fixo. A metodologia desenvolvida é geral e particularmente útil para o projeto de combustores de grande porte onde a necessidade de compressores pode ser evitada sem prejudicar o controle da razão combustível/ar.

INTRODUÇÃO

No projeto de sistemas de combustão, o uso de ventiladores ou compressores para alimentação de ar pode se constituir em um custo adicional que frequentemente é bastante representativo. Por exemplo, no caso de um combustor experimental desenvolvido no INPE [1], que produz 53 kw a partir da queima de carvão mineral, usa-se um compressor radial de 7,5 c.v., o que representa 10,6% da potência gerada pelo próprio combustor. Esse é um caso particular mas, em diversas situações, o projeto adequado de um combustor considerando a possibilidade de se extrair ar por convecção natural pode representar uma atraente alternativa.

O presente trabalho analisa o caso de um combustor tubular vertical com um leito onde o combustível é consumido. A vazão de ar induzida por convecção natural é calculada como função da temperatura média dos gases de combustão e das perdas de carga por fricção nas paredes do tubo e do leito, estabelecendo-se um intervalo possível para a vazão de combustível na operação auto-aspirada de um determinado combustor.

MODELAGEM

Seja o combustor tubular esquematizado na Figura 1, alimentado em uma seção localizada a  $sL$  de sua base ( $0 \leq s \leq 1$ ), onde  $L$  é o comprimento do tubo. Considerando um elemento de massa que cruza a seção de aquecimento (Figura 2), tem-se, por balanço de forças no elemento e aplicação da 2ª lei de Newton:

$$v_{CG} \frac{dv_{CG}}{dx} = (\rho_A - \bar{\rho}) g h A \frac{dx_{CG}}{m} \quad (1)$$

onde  $v_{CG}$  e  $x_{CG}$  são, respectivamente, a velocidade e a posição do centro de massa do elemento,  $\rho_A$  e  $\bar{\rho}$ , respectivamente, as massas específicas do ar e do produto de combustão,  $g$  a aceleração da gravidade,  $h$  a altura do tubo acima da seção de aquecimento,  $A$  a área da seção transversal do tubo e  $m$  a massa do elemento. Devido à adição de massa de combustível,  $m$  é variável e dada por

$$m = \rho_A A y + \bar{\rho} A z, \quad (2)$$

onde  $y$  e  $z$  são distâncias definidas na Figura 2.



Figura 1. Esquema do combustor.

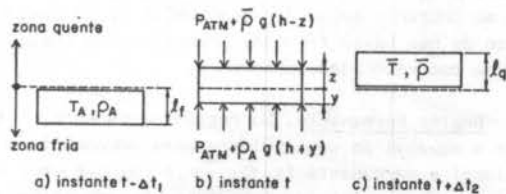


Figura 2. Esquema do elemento de massa ao cruzar a seção de aquecimento.

Como  $m$  é uma função linear de  $z$ , ou seja,

$$m = m_A + K \bar{\rho} A z, \quad (3)$$

onde  $m_A$  é a massa inicial de ar no elemento e  $K$  uma medida da razão combustível/ar, tem-se

$$\frac{dx_{CG}}{m} = \frac{1}{2K^2 A} \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{(K-1)^2}{\rho_A} \right\} \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\rho_A} \right\} \frac{m^2}{m^2} \right\} dm, \quad (4)$$

o que, após inserção na Equação (1) e integração entre os limites  $m_A$  e  $m_A + m_C = m_A / (1-K)$ , onde  $m_C$  é

a massa de combustível inserido no elemento, resulta em

$$v_q^2 - v_f^2 = (\rho_A - \bar{\rho})gh \frac{1}{K^2} \left\{ \left[ -\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{(K-1)^2}{\rho_A} \right] \ln(1-K) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\rho_A} \right) [(1-K)^2 - 1] \right\}, \quad (5)$$

onde  $v_q$  e  $v_f$  são, respectivamente, as velocidades do elemento nas zonas quente e fria.

É pertinente observar que, quando não há adição de massa (o caso de aquecimento sem reação química), obtém-se diretamente da integração da Equação (1), com  $m$  constante,

$$v_q^2 - v_f^2 = (\rho_A - \bar{\rho})gh \left( \frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\rho_A} \right), \quad (6)$$

resultado que pode ser obtido resolvendo o limite, quando  $K$  tende a zero, da expressão do lado direito da Equação (5). É também pertinente observar que o resultado da Equação (5) independe, como esperado, dos valores de  $m_A$ ,  $A$ ,  $\lambda_f$  e  $\lambda_q$  (ver a Figura 2 para a definição de  $\lambda_f$  e  $\lambda_q$ ).

**Início do Escoamento.** Quando o escoamento se inicia, a condição de contorno para a região fria é  $v_q = 0$ . Considerando que, para obter a relação entre  $T_A/\bar{T}$  e  $\rho_A/\bar{\rho}$ , onde  $T_A$  e  $\bar{T}$  são, respectivamente, as temperaturas do ar e do produto de combustão, a pressão ao longo do tubo é aproximadamente constante e igual a  $P_{ATM}$ , tem-se:

$$v_q = \left\{ \frac{\bar{T}}{T_A} \left(1 - \frac{T_A}{\bar{T}}\right) gh \frac{1}{K^2} \left\{ \left[ -1 + \frac{T_A}{\bar{T}}(K-1)^2 \right] \ln(1-K) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_A}{\bar{T}}\right) [(1-K)^2 - 1] \right\} \right\}^{1/2} \quad (7)$$

Observa-se que só haverá escoamento se inicialmente  $\bar{T} \neq T_A$ . O elemento de massa da Figura 2 é acelerado ao cruzar a seção de aquecimento e, no caso hipotético de não haver fricção, prossegue sua trajetória no tubo com velocidade constante.

**Regime Permanente.** No regime permanente, aplica-se a equação da continuidade para escoamento unidimensional e permanente (i.e.,  $\bar{\rho} v_q A = \rho_A v_f A + \dot{m}_C$ , onde  $\dot{m}_C$  é a vazão mássica de alimentação de combustível), resultando:

$$v_q = \left\{ \frac{gh \frac{\bar{T}}{T_A} \left(1 - \frac{T_A}{\bar{T}}\right) \frac{1}{K^2} \left\{ \left[ -1 + \frac{T_A}{\bar{T}}(K-1)^2 \right] \ln(1-K) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_A}{\bar{T}}\right) [(1-K)^2 - 1] \right\}}{\left[ 1 - \frac{(1-K)^2}{(1+K)^2} \frac{T_A^2}{\bar{T}^2} \right]} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_A}{\bar{T}}\right) [(1-K)^2 - 1] \right\}^{1/2} \quad (8)$$

Obtem-se, assim, a seguinte expressão para a vazão de ar induzida:

$$\dot{m}_{Ar} = \frac{P_{ATM} A (1-K)}{R(T_A/\bar{T})^{1/2} K} \left\{ \frac{gh \left(\frac{T_A}{\bar{T}} - 1\right) \left\{ \left[ 1 - \frac{T_A}{\bar{T}}(K-1)^2 \right] \ln(1-K) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_A}{\bar{T}}\right) [(1-K)^2 - 1] \right\}}{\left[ 1 - \frac{(1-K)^2}{(1+K)^2} \frac{T_A^2}{\bar{T}^2} \right]} \right\}^{1/2} \quad (9)$$

Observa-se que, se não houver perdas por fricção nas paredes do tubo ou no leito combustível, a vazão mássica de ar induzida pode ser calculada diretamente com o conhecimento da área da seção reta do tubo,  $A$ , da pressão atmosférica,  $P_{ATM}$ , e da relação entre temperaturas  $\bar{T}/T_A$  como função de  $K$ . A relação  $\bar{T}/T_A$  depende do combustível utilizado e seu valor teórico pode ser obtido através do programa NASA SP-273 [2], o qual permite o cálculo de propriedades de equilíbrio de produtos de reação de misturas.

**Perdas por Fricção.** O valor de  $v_q$  dado na Equação (8) e o correspondente valor de  $v_f$  para a região fria do tubo são valores ideais obtidos sem considerações sobre as perdas por fricção nas paredes do tubo e no leito combustível. Levando-se em conta as perdas por fricção, as velocidades (e as vazões mássicas) serão menores. Do balanço de energia para o escoamento real tem-se

$$\frac{\alpha_f}{2} \rho_A v_{fr}^2 + Q = \frac{\alpha_q}{2} \bar{\rho} v_{qr}^2 + H \quad (10)$$

onde  $\alpha_f$  e  $\alpha_q$  são fatores de correção da energia cinética nas zonas fria e quente e  $Q$  é uma função de  $\bar{T}/T_A$  e  $K$ , calculável a partir de um balanço análogo para um escoamento ideal, i.e.,

$$Q = \frac{1}{2} (\bar{\rho} v_q^2 - \rho_A v_f^2) \quad (11)$$

O termo  $H$ , relativo às perdas viscosas, pode ser obtido da seguinte forma [3-5]:

$$H = f_q \frac{h}{\phi} \frac{1}{2} \bar{\rho} v_{qr}^2 + f_f \frac{L-h}{\phi} \frac{1}{2} \rho_A v_{fr}^2 + k_f \frac{1}{2} \rho_A v_{fr}^2 + 2\delta \left[ 150 \frac{(1-\epsilon_p)^2}{\epsilon_p^3} \frac{\bar{\mu}}{(\xi \phi_p)^2} v_{qr} + 1,75 \frac{(1-\epsilon_p)}{\epsilon_p} \frac{\bar{\rho}}{\xi \phi_p} v_{qr}^2 \right] \quad (12)$$

onde  $f_q$ ,  $f_f$  e  $k_f$  são fatores de fricção,  $\phi$  o diâmetro do tubo,  $2\delta$  e  $\epsilon_p$ , respectivamente, a espessura e a porosidade do leito combustível,  $\xi$  e  $\phi_p$ , respectivamente, a esfericidade e o diâmetro médio das partículas do leito,  $\bar{\mu}$  a viscosidade do produto de combustão e  $r$  um subscrito que denota condições reais.



Na Equação (12) as duas primeiras parcelas re-  
 apresentam as perdas viscosas, supondo-se o escoamento  
 desenvolvido, e a terceira, seguindo recomendação de  
 Olson e Sparrow [3], engloba os efeitos de entrada  
 (desenvolvimento do perfil interno e possível descola-  
 mento do escoamento). O coeficiente de perda  $k_f$  é uma  
 função de alguns parâmetros: comprimento da região  
 analisada, número de Reynolds do escoamento e geomé-  
 tria da entrada. Em regiões de análise com comprimen-  
 to suficientemente longo, para que haja o completo de-  
 senvolvimento do escoamento é necessário que o valor  
 de  $k_f$  seja uma constante [3]. No atual trabalho, o va-  
 lor de  $k_f$  foi considerado constante com um valor de  
 1 [4], aproximação que se torna não razoável a medida  
 que o escoamento se torna laminar e a região analisa-  
 da encurta. Os valores do fator de correção da ener-  
 gia cinética ( $f_q$  e  $f_f$ ) foram assumidos como 2 para o  
 regime laminar e 1 para o regime turbulento [4].

Continuando na Equação (12), seu último termo  
 do lado direito é a clássica equação de Ergun, que des-  
 creve o diferencial de pressão em leitos fixos granu-  
 lares com uma precisão de 25% [5]. No modelo propos-  
 to, a massa adicionada ao escoamento nessa região,  
 proveniente da queima do combustível, é computada in-  
 tegralmente na definição da vazão que atravessa o  
 meio poroso.

A substituição das Equações (11) e (12) na Equ-  
 ação (10), o balanço de massa global do escoamento  
 (i.e.,  $\dot{m}_c + \rho_A v_{fr} = \bar{\rho} v_{qr}$ ) e a relação entre a velo-  
 cidade na zona fria,  $v_{fr}$ , e a vazão de ar aspirado,  
 $\dot{m}_{Ar}$ , geram uma equação implícita em  $\dot{m}_{Ar}$  que pode ser  
 resolvida numericamente. Nesse procedimento, o fator  
 de atrito  $f$  é calculado pela equação de Churchill [6]  
 e as propriedades físicas da mistura na zona quente  
 são consideradas iguais à do ar na temperatura cor-  
 respondente. Um fluxograma para solução da Equação  
 [10] é apresentado no Apêndice.

#### APLICAÇÃO

O modelo foi utilizado em um tubo de 20 cm de  
 diâmetro e 280 cm de altura, com um leito combustível  
 situado a 70 cm de sua base (similar ao combustor da  
 referência 1). Considerou-se a queima de carvão betu-  
 minoso cuja análise elementar era 77,16% de carbono,  
 4,95% de hidrogênio, 1,35% de nitrogênio, 7,43% de  
 oxigênio, 2,09% de enxofre, 5,37% de cinzas e 1,65% de  
 umidade. A temperatura de chama adiabática para a  
 queima de tal carvão com diversas razões ar/combustí-  
 vel foi calculada através do programa NASA SP-273 [2]  
 e encontra-se apresentada na Tabela 1. A rugosidade do  
 tubo foi assumida como sendo 0,15 mm e a temperatura  
 ambiente como 303 K.

Tabela 1. Temperatura de chama adiabática como fun-  
 ção da razão ar/combustível para o car-  
 vão considerado

Razão ar/combustível	T (K)
7,40	1980
8,17	2130
8,71	2195
9,10	2240
9,60	2260
9,80	2255
10,00	2250
10,40	2220
10,70	2195
11,00	2170
11,80	2080
13,60	1890
14,29	1805

A Figura 3 mostra os resultados obtidos para os  
 casos ideal e real, ambos com espessura de leito nula.  
 O cruzamento das curvas de vazão de ar induzida com  
 as curvas de temperatura de chama adiabática determi-  
 na o ponto de operação do combustor. Assim, nas condi-  
 ções com fricção ao longo do tubo, com espessura de  
 leito nula, o combustor é capaz de queimar 4,5 g/s de  
 combustível em condições aproximadamente estequiomé-  
 tricas. Uma taxa de alimentação superior (ou inferior)  
 a 4,5 g/s implicará em um processo ineficiente pois ha-  
 verá excesso de combustível (ou de ar). Deve-se notar  
 que o caso real sem leito corresponde a queima de com-  
 bustível líquido sob forma atomizada ou gasoso.

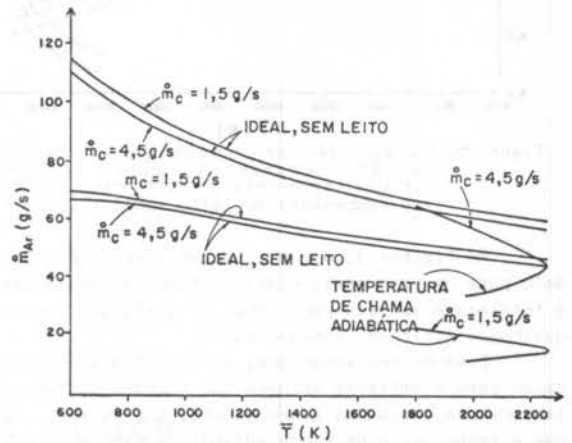


Figura 3. Vazão de ar induzida e vazão de ar neces-  
 sária para consumir uma certa taxa de  
 alimentação de carvão (espessura do lei-  
 to nula).

A vazão de ar induzida é extremamente dependen-  
 te da espessura do leito, como mostra a Figura 4. Para  
 um leito de 10 cm, a vazão reduz-se a menos que 10%  
 da vazão obtida quando se considera apenas a fricção  
 nas paredes. No caso, assumiu-se um diâmetro efetivo  
 de partículas igual a 5 mm e uma porosidade de 70%,  
 que são usualmente encontrados em combustores.

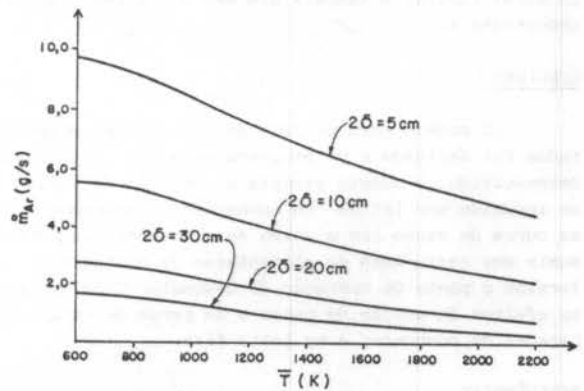


Figura 4. Vazão de ar induzida com função da tem-  
 peratura média para diversas espessu-  
 ras de leito.

A Figura 5 mostra um caso real com leito de  
 espessura igual a 2,5 cm para os mesmos diâmetro efe-  
 tivo e porosidade do caso anterior. Observa-se que  
 a queima de 0,9 g/s de combustível ocorrerá aproxima-  
 damente na estequiometria.

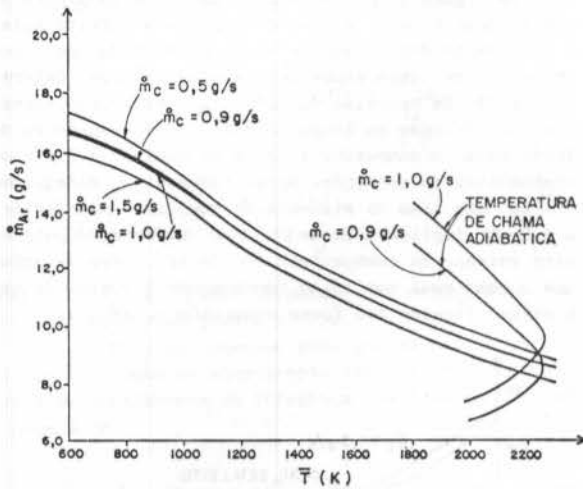


Figura 5. Vazão de ar induzida e vazão de ar necessária para consumir uma certa taxa de alimentação de carvão (espessura de leito igual a 2,5 cm).

As Figuras 3, 4 e 5 ilustram a aplicação do modelo para um caso particular. Contudo, o procedimento é totalmente similar para tubos de quaisquer dimensões queimando quaisquer combustíveis.

Deve-se mencionar que, devido à transferência de calor para o ambiente através das paredes do tubo, a temperatura média dos gases quentes deverá ser menor que a temperatura de chama adiabática para as diversas razões ar/combustível. Isso significa que o ponto de operação situar-se-á, na realidade, em uma vazão induzida de ar maior que a de projeto para uma determinada taxa de alimentação de combustível (o que é conservativo em termos de projeto). Por exemplo, deslocando-se aproximadamente 300 K para a esquerda as curvas de temperatura de chama na Figura 5, indica a possibilidade de operação com taxa de alimentação de 1,0 g/s em condições estequiométricas. Finalmente, deve-se observar que a transferência de calor através das paredes não altera as curvas de vazão de ar induzida, uma vez que, para essas curvas, a temperatura média  $\bar{T}$  é uma variável independente.

#### CONCLUSÃO

Um modelo para projeto de combustores auto-aspirados foi derivado e um programa para sua utilização desenvolvido. O modelo permite o cálculo da vazão de ar induzida por leitos em combustão. O cruzamento dessa curva de vazão com a vazão de ar necessária para consumir uma certa taxa de alimentação de combustível determina o ponto de operação do combustor. Considerou-se os efeitos de adição de massa e de perda de carga nas paredes do combustor e no leito fixo.

#### REFERÊNCIAS

[1] Ferreira, M.A. e Carvalho, J.A., Jr., Combustor Pulsante para Sólidos Não Pulverizados, Anais do Seminário Brasil-Europa de Energia de Biomassa e Resíduos, CEE/FINEP/CEMIG, Segmento nº 2, Paper nº 3, 24 páginas (1988).

[2] Gordon, S. and Mc Bride, B.J., Computer Program of Complex Chemical Equilibrium Compositions, Rocket Performance, Incident and Reflected Shocks, and Chapman-Jouguet Detonations,

Report NASA SP-273, NASA Lewis Research Center (1971).

[3] Olson, R.M. and Sparrow, E.M., Measurements of Turbulent Flow Development in Tubes and Annuli with Square and Rounded Entrances, AICHE Journal, pp. 766-770, nov. (1963).

[4] White, F.M., Fluid Mechanics, Mc Graw-Hill Book Company, 2nd ed., New York, pp. 335, (1986).

[5] Kunii, D. and Levenspiel, O. Fluidization Engineering, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, N.Y., pp. 66, (1977).

[6] Churchill, S.W., Friction-Factor Equation Spans all Fluid Flow Regimes, Chemical Engineering, pp. 91-92, nov. (1977).

#### APÊNDICE

A seguir está esquematizado o fluxograma do programa utilizado na solução da Equação (10), que permite relacionar a vazão de ar aspirada como uma função da temperatura média da zona quente, conhecidos os parâmetros operacionais ( $\dot{m}_c, \delta, \epsilon, \zeta\phi_p, T_A$ ) e geométricos ( $\phi, L, S$ ) do combustor.

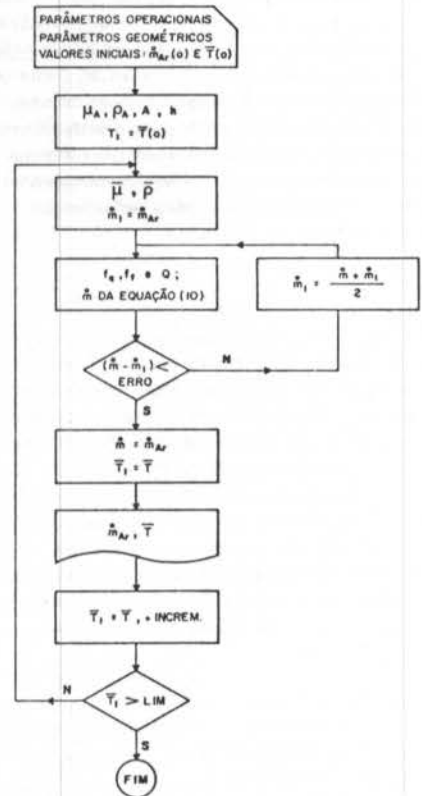


Figura 6. Fluxograma do programa utilizado.

#### ABSTRACT

This work presents a methodology for the design of self-aspirating combustors. Effects of pressure drop along the internal wall of the combustor and through the fixed combustion bed were considered. The developed model is general and particularly useful in the design of large combustion units.

**TROCADORES DE CALOR**

REVISÃO DE CONCEITOS BÁSICOS DE  
TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM TORRES DE RESFRIAMENTO




JOSÉ ROCHA MIRANDA PONTES  
PROMON ENGENHARIA S.A.  
PAULO FERNANDO NANTES DA SILVA  
PROMON ENGENHARIA S.A.

## RESUMO

O desempenho de torres de resfriamento é usualmente avaliado através de métodos que se baseiam na equação de Merkel. Os princípios de um desses métodos são revisados. É deduzida uma equação recentemente proposta, que descreve os fenômenos envolvidos no processo de transferência de calor e na qual as principais aproximações existentes na teoria de Merkel foram eliminadas. A equação é comparada com a equivalente aplicável a trocadores de calor convectivos. É discutida a influência das variáveis que intervêm no processo, sobre o desempenho da torre de resfriamento.

## INTRODUÇÃO

Torres de resfriamento são equipamentos que promovem o resfriamento de água através da remoção de calor da mesma para a atmosfera. A transferência de calor é feita por contato direto do ar com a água e envolve mecanismos de convecção e evaporação.

O desempenho de uma torre de resfriamento é avaliado pela diferença entre as temperaturas da água fria (TAF) e da fonte fria com a qual ela troca calor. Esta última é a temperatura de bulbo úmido do ar ambiente (TBU).

A abordagem do desempenho de torres de resfriamento envolve três aspectos: o equacionamento do problema de transferência de calor, o desenvolvimento de métodos de avaliação de desempenho baseados nestas equações e a identificação da sensibilidade do desempenho a variações no valor dos parâmetros que intervêm no processo de transferência de calor. Observa-se que, normalmente, a literatura não aborda estes três aspectos em conjunto.

Tradicionalmente, o desempenho de torres de resfriamento é analisado através de métodos que se baseiam em uma equação deduzida por Merkel [1] em 1925. Um destes métodos foi proposto por Lichtenstein [2] em 1943. Este método contribuiu decisivamente para a difusão da equação de Merkel, por possibilitar, de forma simples, o cálculo da temperatura de água fria produzida por uma torre de resfriamento, em uma larga faixa de condições de operação [3]. Posteriormente o método foi desenvolvido pelo Cooling Tower Institute [4]. Recentemente, Lefevre [5] deduziu uma equação em que as principais aproximações feitas por Merkel são eliminadas. Subseqüentemente, Lefevre [5] propôs um coeficiente de correção a ser introduzido na equação de Merkel, de modo a minimizar os erros decorrentes das aproximações feitas na dedução da mesma.

Este trabalho apresenta inicialmente as equações que descrevem o processo de transferência de calor em torres de resfriamento e mostra a analogia entre as mesmas e a equação aplicável a trocadores de calor onde apenas mecanismos de convecção estão presentes.

Em seqüência são apresentados os princípios do método de avaliação de desempenho desenvolvido pelo Cooling Tower Institute - CTI [4], que baseia-se na equação de Merkel.

Discute-se por fim o limite de temperatura até o qual a água pode ser resfriada em uma torre de resfriamento, a equação proposta por Lefevre, as limitações da equação de Merkel e a influência das variáveis que intervêm no processo da transferência de calor, sobre o desempenho deste tipo de equipamento. Identifica-se, em particular, o fator que torna a diferença (TAF-TBU) altamente dependente da temperatura de bulbo úmido na qual a torre opera.

## EQUAÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Estas equações baseiam-se nas seguintes hipóteses:

- . Existência de apenas uma resistência térmica, localizada na camada limite formada pela película de ar próxima à água;
- . Esta película encontra-se na temperatura da água com a qual tem contato;
- . A película de ar está saturada de vapor d'água. O contato da água com o ar se faz no denominado enchimento da torre. Ao entrar em contato com o ar a água quente troca calor com o mesmo por convecção e evaporação. A taxa de calor trocado por convecção,  $dQ_c$ , em uma superfície de área elementar é da forma [5]:

$$dQ_c = H (T' - T) adV \quad (1)$$

onde  $T'$  é a temperatura da película de ar saturado de vapor próxima da água e  $T$ , a temperatura do ar longe da água;  $H$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção;  $a$  é a área da superfície de contato ar-água por unidade de volume do enchimento e  $dV$ , o volume do elemento do enchimento da torre.

A taxa de evaporação,  $dm_{ev}$ , no mesmo elemento de área é da forma [6]:

$$dm_{ev} = M_v J adV = \beta' M_v (x' - x) adV \quad (2)$$

onde  $J$  é o fluxo molar evaporado,  $x'$  e  $x$  são, respectivamente, as frações molares de vapor, na película próxima à água e no ar afastado da mesma,  $\beta'$  é o coeficiente de transferência de massa por evaporação e  $M_v$ , a massa de um mol de vapor.

Para o vapor d'água e a mistura ar-vapor, a baixas pressões, valem as relações:

$$p_v V = n_v RT \quad (3)$$

$$pV = nRT \quad (4)$$

onde  $p_v$  é a pressão parcial do vapor e  $p$ , a pressão da mistura ar-vapor. Dividindo (3) por (4) obtém-se:

$$\frac{n_v}{n} = x = \frac{p_v}{p} \quad (5)$$

A taxa de evaporação,  $\dot{m}_{ev}$ , e a taxa de calor trocado no processo de evaporação,  $dQ_{ev}$ , são:

$$\dot{m}_{ev} = \beta (p'_v - p_v) adV \quad (6)$$

$$\beta = \beta' \frac{M_v}{p} \quad (7)$$

$$dQ_{ev} = \beta (p'_v - p_v) h_{fg} adV \quad (8)$$

onde  $h_{fg}$  é a entalpia de evaporação da água,  $p'_v$  e  $p_v$  são respectivamente as pressões parciais do vapor na película próxima à água e no ar afastado da mesma.

A taxa de calor transferido por convecção e evaporação é dada pela soma de (1) e (8) [5].

$$dQ = \{H(T'-T) + \beta(p'_v - p_v)h_{fg}\}adV \quad (9)$$

Esta taxa de calor transferido, por sua vez é [2]:

$$dQ = Gdh \quad (10)$$

onde  $dh$  é o aumento diferencial de entalpia da mistura ar-vapor por unidade de massa de ar seco e  $G$ , a vazão em massa de ar seco circulando pela torre. Igualando-se (9) e (10) obtém-se:

$$Gdh = \{H(T'-T) + \beta(p'_v - p_v)h_{fg}\}adV \quad (11)$$

É conveniente substituir os coeficientes  $H$  e  $\beta$  por outros fatores de modo a se escrever a taxa de calor transferido como sendo proporcional a um coeficiente global de transferência de calor por convecção e evaporação. Isto é feito introduzindo-se a relação de Lewis [5]:

$$Le = \frac{H}{\beta C_p} = \frac{H}{KC_p} \quad (12)$$

$$C = \frac{M_a}{M_v} p_a \quad (13)$$

$M_a$  e  $p_a$  são respectivamente a massa de um mol e a pressão parcial do ar seco;  $C$  é o calor específico a pressão constante do ar seco. Introduzindo-se as relações (12) e (13) em (11) obtém-se:

$$Gdh = \{LeKC_p(T'-T) + \frac{K}{C}(p'_v - p_v)h_{fg}\}adV \quad (14)$$

$$L \frac{1}{L/G} dh = \{LeC_p(T'-T) + \frac{1}{p_a} \frac{M_v}{M_a} (p'_v - p_v)h_{fg}\}KadV \quad (15)$$

Rearranjando os termos e integrando ao longo do enchimento todo da torre obtém-se:

$$\frac{KaV}{L} = \frac{1}{L/G} \int_{h_s}^{h_e} \frac{dh}{LeC_p(T'-T) + \frac{1}{p_a} \frac{M_v}{M_a} (p'_v - p_v)h_{fg}} \quad (16)$$

O termo apresentado no lado direito da equação

(16) é um fator adimensional, denominado coeficiente da torre, número de Merkel, comprimento térmico da torre ou  $KaV/L$ .

A equação (16) possibilita o cálculo do coeficiente requerido para que uma torre de resfriamento opere em condições especificadas. Essa equação mostra que o coeficiente requerido é proporcional à integral do ganho de calor da mistura ar-vapor por unidade de vazão de ar seco ( $dh$ ), dividido pela soma de dois termos proporcionais aos potenciais motores: um de convecção e um de evaporação. Esta equação é semelhante à que governa a transferência de calor em trocadores onde apenas mecanismos de convecção estão presentes:

$$\frac{UA}{\dot{m}} = \int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{T_1 - T_2} \quad (17)$$

onde  $UA$  é a condutância térmica do trocador,  $\dot{m}$  e  $h$  são respectivamente vazão e entalpia do fluido de processo e  $(T_1 - T_2)$  é a diferença de temperaturas entre fluidos de processo e serviço.

A equação (16) pode ser simplificada de modo a agrupar os dois potenciais motores em um único, fazendo-se  $Le = 1$  e reescrevendo o termo referente à evaporação, em função da umidade absoluta.

Por definição, a umidade absoluta é:

$$w = \frac{m_v}{m_a} = \frac{p_v M_v / RT}{p_a M_a / RT} = \frac{p_v M_v}{p_a M_a} \quad (18)$$

Introduzindo-se a definição de umidade absoluta no termo de evaporação da equação (16) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{M_v}{M_a} \frac{1}{p_a} (p'_v - p_v)h_{fg} &= \left\{ \frac{M_v}{M_a} \frac{p'_v}{p_a} - \frac{M_v}{M_a} \frac{p_v}{p_a} \right\} h_{fg} = \\ &= \left\{ \frac{M_v}{M_a} \frac{p'_v}{p_a} - \frac{M_v}{M_a} \frac{p_v}{p_a} \right\} h_{fg} = (w' - w)h_{fg} \end{aligned} \quad (19)$$

A entalpia da mistura ar-vapor é aproximada por [2]:

$$h = C_p T + wh_{fg} \quad (20)$$

Substituindo-se (20) em (16) obtém-se finalmente uma expressão conhecida como equação de Merkel:

$$\frac{KaV}{L} = \frac{1}{L/G} \int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{h' - h} \quad (21)$$

Alternativamente, a equação de Merkel pode ser reescrita na forma em que é mais comumente encontrada e utilizada:

$$\frac{1}{L/G} \int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{h' - h} = \frac{1}{L} \int_{h_e}^{h_s} \frac{Gdh}{h' - h} = \frac{1}{L} \int_{T_e}^{T_s} \frac{d(L'cT)}{h' - h} =$$



$$\frac{L'}{L} \int_{T_e}^{T_s} \frac{cdT}{h'-h} = \int_{T_e}^{T_s} \frac{cdT}{h'-h} \quad (22)$$

$$\frac{KaV}{L} = \int_{T_e}^{T_s} \frac{cdT}{h'-h} \quad (23)$$

Nesta forma, mais uma aproximação é introduzida, qual seja, a de que a vazão de água (líquida) através da torre ( $L'$ ) é constante. Da equação (22) tem-se que:

$$Gdh = LcdT \text{ e } \frac{dh}{dT} = \frac{Lc}{G} \quad (24)$$

É possível definir-se uma diferença média de entalpias  $\Delta h$  através da seguinte relação:

$$\frac{1}{\Delta h} = \frac{1}{c(T_s - T_e)} \int_{T_e}^{T_s} \frac{cdT}{h'-h} \quad (25)$$

Tendo em vista a difusão e a aceitação da equação de Merkel, Lefevre [5] propõe que a mesma continue sendo utilizada com a introdução porém de um coeficiente de correção,  $M$ , denominado fator de Merkel:

$$\frac{KaV}{L} = \frac{1}{L/G} \int_{h_e}^{h_s} \frac{Mdh}{h'-h} \quad (26)$$

$$M = 1 + \exp \{ C_0 + T' [ C_1 + T' ( C_5 + T' C_6 ) ] + T ( C_3 + C_2 T' + C_4 T ) \} \quad (27)$$

$$C_0 = -7,845656 \quad C_4 = -7,646384 \times 10^{-7}$$

$$C_1 = 0,0730229 \quad C_5 = 0,0003884$$

$$C_2 = -6,29829 \times 10^{-5} \quad C_6 = 1,26972 \times 10^{-6}$$

$$C_3 = 0,0112047$$

#### METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO

Um dos métodos mais aceitos para a avaliação do desempenho de torres de resfriamento é o estabelecido pelo Cooling Tower Institute - CTI [4]. O método tem como um dos objetivos avaliar a temperatura da água fria produzida pela torre para qualquer condição de operação da mesma. Através de um processo gráfico, determina-se a temperatura de água fria que uma torre cujo coeficiente é conhecido produzirá em condições de operação especificadas. O método está ilustrado na figura 1.

Em geral o coeficiente disponível de uma torre de resfriamento é determinado experimentalmente para cada tipo de torre e fornecido pelos fabricantes na forma de uma curva característica, função da relação entre vazões em massa de água que chega à torre e ar seco ( $L/G$ ). Como este coeficiente é função de propriedades de transporte do ar e de características hidrodinâmicas dos escoamentos, é comum que a curva característica se

altere com variações na temperatura de água quente (TAQ) e com variações na velocidade do ar, para um mesmo valor da relação  $L/G$  [7].

Por outro lado o coeficiente requerido para que a torre opere em condições especificadas é, para um dado valor da relação  $L/G$ , função apenas das temperaturas da água na entrada e saída da torre e da diferença de potenciais disponível. Por isso, esse coeficiente só depende de propriedades termodinâmicas dos fluidos em escoamento e não, de características da torre. Esse coeficiente é calculado a partir das equações (23) e (24). É possível construir famílias de curvas do coeficiente requerido, em função da relação  $L/G$ . Cada família é construída para um valor fixo de TBU e da diferença entre as temperaturas da água quente e fria (TAQ-TAF). Cada curva de uma mesma família é construída para um valor fixo da diferença (TAF-TBU). Estas curvas são denominadas de demanda.

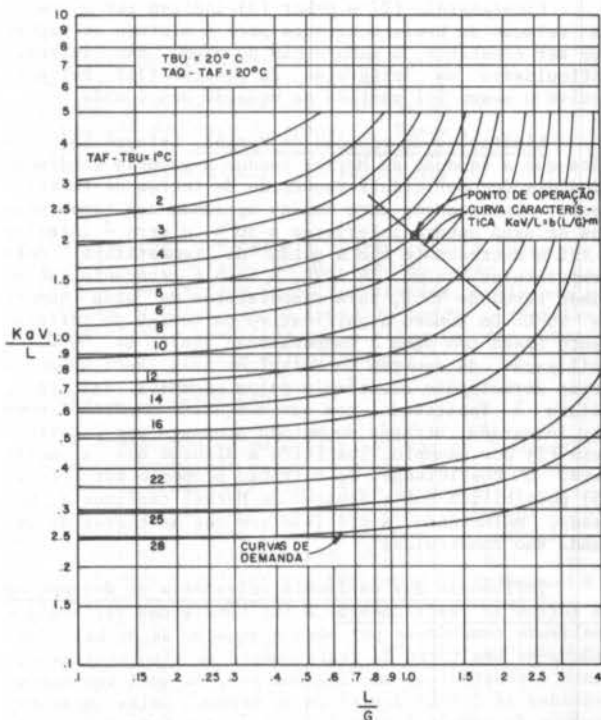


Figura 1: curvas de demanda e característica de uma torre de resfriamento.

A determinação da temperatura de água fria que a torre deverá produzir em uma dada condição de operação é feita da seguinte forma:

Identifica-se inicialmente o ponto ( $KaV/L$ ,  $L/G$ ) no qual a torre está operando, sobre a curva característica da mesma;

Superpõe-se o ponto de operação sobre a família de curvas de demanda definida pelos valores de (TAQ-TAF) e TBU com os quais a torre opera;

A superposição identifica a curva de demanda definida pelo valor de (TAF-TBU) com o qual a torre deverá operar; a partir deste valor, determina-se a temperatura de água fria procurada.

#### CONCLUSÕES

Limite de resfriamento da água em torres de resfriamento. A equação de Merkel (21) mostra que a entalpia do ar agrupa e substitui como potencial motor os dois potenciais evidenciados na equação (16): temperaturas e pressões parciais de vapor. Assim sendo, a diferença de potenciais se anula quando a entalpia do ar na camada limite junto à água e fora da mesma forem iguais. Cabe ressaltar que a temperatura do ar na camada limite é admitida como sendo igual à da água.

Por outro lado, a entalpia da mistura ar-vapor só depende da sua temperatura de bulbo úmido [3]. Assim, a condição de diferença de potenciais nula, representada por entalpias iguais na camada limite e fora dela implica em estar a água na temperatura de bulbo úmido do ar. Portanto, a temperatura de bulbo úmido do ar é o limite até o qual é possível resfriar-se a água através dos mecanismos de convecção e evaporação combinados.

Relação de Lewis e a equação proposta por Lefevre. A equação (16) foi proposta recentemente por Lefevre [5], que adotou no entanto o valor 1 para a relação de Lewis. Lefevre argumenta que para  $Le = 0,9$  o erro introduzido na avaliação do coeficiente  $KaV/L$  é da ordem de 3%. Lichtenstein [2], Baker [3] e outros adotam  $Le = 1$  embora alguns indiquem como sendo 0,9 o valor correto, para a mistura ar-vapor d'água.

Lichtenstein [2] e Baker [3] indicam ser o valor da relação de Lewis constante para a mistura ar vapor. Por ser constante, a manutenção do mesmo não introduz dificuldades na integração da equação (16). Por este motivo o mesmo foi mantido na equação mencionada.

Limitações da equação de Merkel. Lefevre [5] indica que a equação de Merkel conduz a valores subdimensionados do coeficiente requerido de torres de resfriamento. Entretanto, para torres operando com temperaturas de água quente inferiores a 50°C, o erro é inferior a 12% e decrescente com a queda de temperatura. Para temperaturas acima de 50°C, o erro é crescente, atingindo cerca de 100%, para temperaturas de água quente de 95°C. Um número significativo de torres de resfriamento opera com água a temperaturas abaixo de 50°C. A utilização da equação de Merkel em tais casos conduz a erros normalmente aceitáveis pelos usuários. Tal fato, aliado à facilidade com que a equação de Merkel pode ser integrada, através do método proposto por Lichtenstein [2] por exemplo, justifica a difusão que a mesma teve. O coeficiente de correção proposto por Lefevre [5] possibilita que a equação de Merkel continue a ser usada, melhorando a precisão com que as curvas de demanda são construídas.

Influência das variáveis relevantes no desempenho de torres de resfriamento. A influência das variáveis é analisada tomando-se por base a equação de Merkel. Considera-se uma torre de resfriamento do tipo contra-corrente e constrói-se um diagrama h-T, no qual são representadas as curvas descritas no mesmo, pelas misturas ar-água da camada limite junto à água e fora dela (Fig. 2). A curva descrita pelo ar na camada limite tem a forma da curva de saturação de uma carta psicrométrica [3]. A curva descrita pelo ar fora da camada limite é uma reta de inclinação  $Lc/G$  ou, omitindo-se c (c é igual a 1 quando medido em kcal/kg°C ou Btu/lbm°F),  $L/G$ , conforme a equação (24). Como a diferença de potenciais motora do processo de transferência de calor é igual à distância média (25) entre as duas curvas, algumas conclusões adicionais podem ser tiradas do mesmo diagrama:

- . Efeito da aproximação de TAF para perto de TBU. Esta aproximação reduz a distância média entre as duas curvas, aumentando o coeficiente requerido.
- . Efeito da redução de TBU na diferença (TAF-TBU). Devido a inclinação decrescente da curva de saturação com a queda de TBU, para uma diferença (TAF-TBU) constante, quanto menor for TBU, menor será a distância média entre as duas curvas e, conseqüentemente, maior o coeficiente requerido. Este efeito é ilustrado na figura 2. Alternativamente, para um coeficiente disponível constante, quanto menor for TBU, maior a diferença (TAF-TBU). Tal fato faz com que a temperatura da água fria efluente de uma torre de resfriamento não possa ser avaliada, para cargas térmicas constantes, pelo acréscimo de uma diferença fixa de temperaturas, à temperatura de bulbo úmido.

. Efeito da variação de L/G.

O aumento da relação L/G (para TAQ-TAF constante) faz aumentar a inclinação da reta de operação do ar fora da camada limite, reduzindo a distância entre as duas curvas e, conseqüentemente, aumentando o coeficiente requerido.

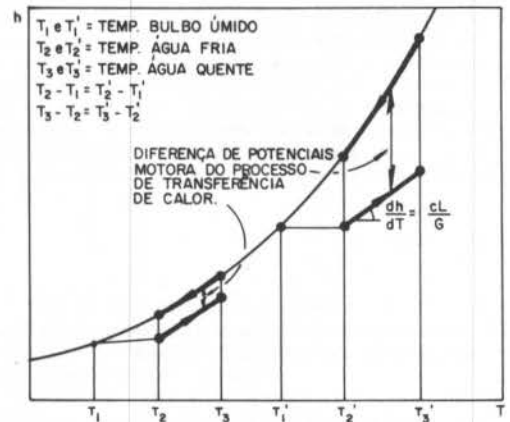


Figura 2: curvas de operação de torre de resfriamento.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Merkel, F., Verdunstungshuhlung. Forschungsarbeiten 275, Berlim (1925)
- [2] Lichtenstein J., Performance and Selection of Mechanical - Draft Cooling Towers. Trans. ASME 65: 779-787 (1943)
- [3] Baker D., Cooling Tower Performance. Chemical Publishing Co., New York, NY, USA (1984)
- [4] Cooling Tower Institute, Performance Curves. CTI, Houston, Tx, USA (1975)
- [5] Lefevre M.R., Eliminating the Merkel Theory Approximations - Can It Replace the Empirical Temperature Correction Factor? Journal of the Cooling Tower Institute, 8, 1: 36-44 (1987)
- [6] Bird, R., Stewart, W. e Lightfoot, E., Transport Phenomena. Wiley, New York, NY, USA (1960)
- [7] Fulkerson, R.D., Comparative Evaluation of Counterflow Cooling Tower Fills. Journal of the Cooling Tower Institute 9,2: 40-67 (1988).

#### ABSTRACT

Performance of cooling towers is usually evaluated by methods based on Merkel's equation. The principles of one of these methods is reviewed. A recently proposed equation that describes the phenomena occurring in the heat transfer process in cooling towers is derived, in which the major approximations of Merkel's theory are eliminated. The equation is compared with the equivalent, applicable for convective heat exchangers. The influence of the relevant variables on the performance of cooling towers is discussed.

## DEPOSIÇÃO EM TROCADORES DE CALOR:

## II - DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS DE OPERAÇÃO

RONALDO COUTINHO FERNANDES, DEQ/EQ/UFRJ  
 EDUARDO MACH QUEIROZ, DEQ/EQ/UFRJ  
 CLÁUDIO OCTÁVIO M.M. TEIXEIRA, PEQ/COPPE/UFRJ

## RESUMO

Este trabalho, utilizando a simulação estacionária de trocadores de calor bitubulares e multitubulares, apresenta uma rotina computacional que permite restabelecer a carga térmica de projeto através da variação da vazão e/ou da temperatura de entrada de um dos fluidos, avaliando a ocorrência da deposição ao longo do tempo. Nesta simulação são utilizadas novas correlações disponíveis na literatura e o método de Bell-Delaware. Paralelamente, analisa a viabilidade e a eficácia das correções dos referidos parâmetros de operação.

## INTRODUÇÃO

A deposição em superfícies de troca térmica constitui-se em um grave problema operacional nos trocadores de calor industriais, causando a redução da taxa de transferência de calor e o aumento da queda de pressão das correntes de fluido. Além destes efeitos perniciosos, freqüentemente ocorrem processos corrosivos sob os depósitos, o que costuma afetar a vida útil dos equipamentos.

O estudo da deposição, objetivando a sua eliminação, minimização ou controle, possui grande relevância devido às suas implicações técnicas e econômicas em vários setores industriais, tais como: químico, petroquímico, de refino de petróleo, de alimentos, de geração de potência e nuclear. De fato, o fenômeno da deposição consiste, provavelmente, no problema mais crítico que afeta a operação de trocadores de calor, e que introduz uma grande incerteza no projeto destes equipamentos (Kakaç et alli [1]; Somerscales & Knudsen [2]).

O procedimento usual de projeto térmico de trocadores baseia-se na utilização de um valor constante para a resistência térmica de depósito (fator de depósito ou de sujeira), no cálculo do coeficiente global de transferência de calor. A hipótese implícita é que tal fator é igual ao valor terminal ou assintótico da resistência térmica de depósito ao final da campanha do trocador. A área de troca térmica é então determinada em função do coeficiente global de projeto. Entretanto, ao iniciar o seu ciclo de operação, o trocador encontra-se limpo, passando a operar com um coeficiente global bem maior que o de projeto, existindo, em consequência, um excesso de área disponível para a troca de calor especificada no dimensionamento. Assim, com o objetivo de manter-se a carga térmica do projeto para que fiquem constantes as entalpias de saída das correntes de processo, torna-se necessário adotar medidas operacionais.

Nesta oportunidade, é importante ressaltar que os fatores de depósito recomendados pela TEMA [3], usados tradicionalmente nos cálculos de projeto de trocadores de calor, sofrem fortes restrições (Somerscales & Knudsen [2]; Kern [4]; Epstein [5]): não reconhecem a natureza transiente do fenômeno da deposição; não definem de uma forma precisa o período de operação contínua para que seu valor seja atingido; não relacionam-se às características de projeto e de operação de equipamentos específicos; não analisam a natureza físico-química dos depósitos, nem as condições utilizadas em suas determinações; restringem-se a um pequeno número de fluidos, principalmente água e hidrocarbonetos.

O presente trabalho, utilizando a simulação estacionária de trocadores de calor, apresenta uma rotina

computacional que permite restabelecer a carga térmica de projeto através da variação da vazão e/ou da temperatura de entrada de um dos fluidos, avaliando a ocorrência da deposição ao longo do tempo. Paralelamente, analisa a viabilidade e a eficácia das correções destes parâmetros de operação.

## FUNDAMENTOS DA DEPOSIÇÃO

A acumulação de materiais sólidos em superfícies de trocadores de calor é um processo transiente, envolvendo o transporte simultâneo de momento, calor e massa, freqüentemente combinado com fenômenos químicos, físico-químicos e/ou biológicos. A análise de talhada dos principais tipos de deposição, bem como dos mecanismos e modelos que descrevem o fenômeno, é apresentada em um trabalho anterior dos autores (Fernandes et alli [6]).

Os principais parâmetros e variáveis controlados da deposição são os seguintes (Somerscales & Knudsen [2]; Kakaç et alli [7]): velocidade do fluido; tensão de cisalhamento na superfície sólida; temperaturas da superfície de troca térmica, da superfície do depósito e do fluido; características do fluido, dos sólidos em suspensão e do depósito; natureza do material e acabamento da superfície de troca de calor; configuração do equipamento; tipo do processo térmico.

Segundo Kern & Seaton [8], a dinâmica da deposição resulta da competição entre dois processos simultâneos: um de formação do depósito e outro de sua remoção. Este mecanismo genérico, amplamente aceito, pode ser expresso através da seguinte equação:

$$\frac{dR_d}{dt} = \dot{R}_{d_f} - \dot{R}_{d_r} \quad (1)$$

onde  $R_d$  é a resistência térmica de depósito e  $\dot{R}_{d_f}$  e  $\dot{R}_{d_r}$  são chamadas de função de formação e função de remoção, respectivamente, relacionadas com o fluxo mássico de formação e com o fluxo mássico de remoção do material do depósito.

A modelagem da deposição consiste, essencialmente, no desenvolvimento de expressões para os termos de formação e de remoção em função do tempo e das variáveis e parâmetros do processo particular de deposição em estudo. Constata-se experimentalmente que o fenômeno em análise apresenta três tipos de comportamento dinâmico, denominados linear, taxa decrescente e assintótico (Kakaç et alli [1]; Epstein [9]). No caso de correntes de hidrocarbonetos e de água de res

friamento, como atestam Kern [4], Crittenden & Kolaczowski [10] e Knudsen [11], prevalece o mecanismo assintótico, genericamente representado pela expressão:

$$R_d = R_d^*(1 - \exp(-t/\tau)), \quad (2)$$

onde  $R_d^*$  e  $\tau$  são o valor assintótico da resistência de depósito e a constante de tempo da correspondente curva de deposição.

Se ambas as correntes de fluido formarem depósitos sobre a superfície de troca térmica, torna-se conveniente utilizar, para fins de cálculo, a resistência térmica total de depósito ( $R_{dt}$ ), definida para superfícies não aletadas pela seguinte equação:

$$R_{dt} \equiv (A_e/A_i)R_{di} + R_{de}, \quad (3)$$

onde  $A_e$  e  $A_i$  são as áreas externa e interna de transferência de calor e  $R_{di}$  e  $R_{de}$  são as resistências térmicas dos depósitos interno e externo.

A influência dos depósitos no desempenho térmico de trocadores de calor é quantificada através do coeficiente global sujo ou de projeto ( $U_d$ ), que pode ser expresso em função do coeficiente global do trocador limpo ( $U$ ) e da resistência térmica total de depósito:

$$U_d = (R_{dt} + (1/U))^{-1} \quad (4)$$

Como o fenômeno em questão provoca a diminuição do coeficiente global de operação ( $U$  - valor instantâneo real), à medida que cresce a camada de depósito, surge a necessidade de adotar procedimentos operacionais corretivos, sem os quais a carga térmica do trocador sofrerá uma redução em relação ao valor apresentado no início da campanha. Convém ainda notar que a deposição também pode modificar a taxa de transferência de calor através de variações da performance fluidodinâmica do equipamento, ou seja, alterações nas vazões das correntes de fluido causadas por elevações nas quedas de pressão.

#### SIMULAÇÃO DE TROCADORES COM DEPOSIÇÃO

Simular a deposição em trocador de calor significa determinar a interação entre a dinâmica da deposição (comportamento transiente de sua resistência) e o desempenho termo-fluidodinâmico do equipamento. Crittenden et alii [12] desenvolveram estudos de simulação de baterias de trocadores, incorporando rotinas específicas de deposição. Fryer & Slater [13] analisam procedimentos de operação de permutadores sujeitos a deposição por reação química com pequena constante de tempo.

No presente trabalho é desenvolvido um algoritmo que, a partir de informações provenientes da operação do equipamento, determina as modificações necessárias visando restabelecer a carga térmica especificada no projeto ( $q_r$ ). Considerando que a corrente principal (fluido de processo) admite apenas pequenas flutuações nas suas condições operacionais (vazão mássica -  $\dot{m}_p$  - e temperatura de saída -  $T_{ps}$ ) de modo a manter inalterados os níveis de produção da unidade industrial, as estratégias para neutralizar os efeitos prejudiciais da deposição concentram-se na corrente secundária (fluido de serviço), promovendo o ajuste de sua vazão ( $\dot{m}_s$ ) e/ou de sua temperatura de entrada ( $T_{se}$ ). São as seguintes as opções disponíveis:

- variação de  $\dot{m}_s$  com  $T_{se}$  fixa;
- variação de  $\dot{m}_s$  com uma nova  $T_{se}$  pré-estabelecida;
- variação de  $T_{se}$  com  $\dot{m}_s$  fixa;
- variação de  $T_{se}$  com uma nova  $\dot{m}_s$  pré-estabelecida;

A versatilidade de operação da corrente secundária e uma avaliação complementar de custos indicam a alternativa mais viável, que pode ser também a opção por uma parada para manutenção e limpeza. No que concerne à vazão, o procedimento proposto neste trabalho estabelece para a fase inicial da campanha valores inferiores ao de projeto; sucessivos aumentos da vazão

podem levar a um ponto onde se requer potência extra de bombeamento. Por outro lado, a variação na temperatura de entrada está condicionada ao limite físico de seu sistema de origem no fluxograma de processo. Um exemplo típico é o circuito de água de resfriamento que tem como limite mínimo a temperatura de bulbo úmido local.

O aumento da vazão do fluido de serviço implica na elevação da diferença média efetiva de temperatura ( $F\Delta T_{ml}$ ), em consequência da diminuição do diferencial de temperatura na referida corrente, bem como do coeficiente global de operação. Esse efeito será tanto mais significativo quanto maior for a importância da resistência convectiva no lado do fluido de serviço, como pode ocorrer na fase inicial dos ciclos de operação, quando as resistências individuais de depósitos ainda não apresentam contribuição significativa, pois, à medida que se desenvolve a formação dos depósitos, sua eficácia normalmente restringe-se à alteração em  $F\Delta T_{ml}$ .

Neste contexto, o valor da resistência total de depósito máxima ( $R_{dt}^+$ ), para o qual há possibilidade de operação do trocador sem comprometimento definitivo das características da corrente de processo, é calculado pela expressão:

$$q_r = \frac{(T_{pe} - T_{ps}) / \ln((T_{pe} - T_{se}) / (T_{ps} - T_{se}))}{R_m + R_{cp} + R_{dt}^+}, \quad (5)$$

limite teórico alcançado quando a vazão do fluido de serviço tende a infinito, e seu diferencial de temperatura a zero. Nesta expressão  $R_m$  e  $R_{cp}$  representam, respectivamente, as resistências térmicas condutiva da parede metálica e convectiva na corrente de processo, e  $T_{pe}$  a temperatura de entrada do fluido de processo.

A potência máxima disponível no sistema de bombeamento não permite que, na prática, tal situação ocorra. Atinge-se um ponto onde não é possível manter a carga térmica apenas com a manipulação da vazão do fluido de serviço, definindo-se assim um valor crítico da resistência total de depósito ( $R_{dt}^c$ ):

$$q_r = \frac{F \Delta T_{ml}}{R_{cs} + R_m + R_{cp} + R_{dt}^c}, \quad (6)$$

onde  $R_{cs}$  é a resistência convectiva no lado do fluido de serviço.

A segunda estratégia consiste na variação da temperatura de entrada do fluido de serviço, que tem seus efeitos mais facilmente analisados através do método  $\epsilon$ -NUT para projeto de trocadores de calor. Esta medida visa o aumento do diferencial máximo de temperatura disponível no trocador ( $|T_{pe} - T_{se}|$ ) a fim de restabelecer a carga térmica, sem alterar as vazões, o número de unidades de transferência (NUT) e, consequentemente, a efetividade ( $\epsilon$ ).

Admitindo que o fluido de processo seja o fluido mínimo, observa-se, pela análise da figura 1, que a gradativa diminuição do coeficiente global de operação ( $U$ ) desloca o ponto de operação de A (início de um período com a carga térmica requerida) para B, onde a menor efetividade evidencia a operação fora de especificação, mantidas as condições de entrada das correntes. Agora então, com o valor da efetividade fixo, a carga térmica original é reobtida através de um aumento do diferencial térmico máximo disponível. Note-se ainda que a magnitude desta variação é maior, para iguais variações absolutas do NUT, à medida que o valor deste parâmetro diminui.

É importante ressaltar que, nestas análises, considera-se as propriedades termofísicas dos fluidos independentes da temperatura; ou seja, o coeficiente global varia somente com a resistência total de depósito e, provavelmente, com a vazão do fluido de serviço.



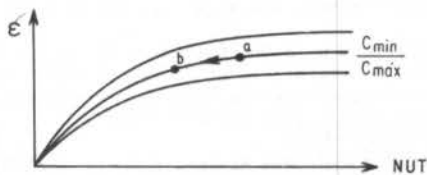


Figura 1. Gráfico Típico do Método  $\epsilon$ -NUT.

**Descrição do Algoritmo.** Com o objetivo de estabelecer um procedimento de avaliação e correção das condições operacionais de trocadores bitubulares, através da variação dos parâmetros da corrente secundária, desenvolveu-se uma rotina computacional em Fortran-77, que pode ser utilizada em microcomputadores compatíveis com a linha PC, cujo fluxograma é apresentado no apêndice.

Através do método de projeto  $\epsilon$ -NUT, elaborase a análise do equipamento térmico em função de suas grandezas médias, ou seja, o coeficiente global e as temperaturas das superfícies não variam ao longo da área de transferência de calor. Assume-se a operação em regime estacionário, hipótese razoável na maioria das aplicações industriais, onde a escala de tempo característica do processo de deposição é bem maior que a do equipamento. Sendo assim, mesmo com uma variação temporal da resistência total de depósito, é possível simular o trocador em regime pseudo-estacionário.

O sistema de aquisição das propriedades termo-físicas apresenta uma opção de considerá-las dependentes da temperatura, caso em que seus valores médios são igualados à média aritmética das propriedades calculadas nas temperaturas de entrada e de saída da corrente em questão.

O núcleo principal do programa é dividido em duas partes e pressupõe o conhecimento das características geométricas do trocador de calor. A primeira, determina a resistência total de depósito e a temperatura de saída do fluido de serviço, a partir dos dados operacionais (condições de entrada e temperatura de saída do fluido de processo). Esta última grandeza, calculada diretamente do balanço térmico na unidade, permite a verificação da qualidade dos dados analisados, quando comparada com o correspondente valor de operação. A resistência total de depósito é usada na segunda parte do programa, onde são calculadas as novas condições de entrada da corrente secundária para que ocorra o restabelecimento da carga térmica especificada, fixando-se a temperatura de saída do fluido de processo segundo os critérios de projeto.

Entre as sub-rotinas, a mais importante é responsável pelo cálculo dos coeficientes globais de operação ( $U_{op}$ ) e limpo ( $U$ ), sendo também determinadas as temperaturas médias interna e externa da parede metálica. Neste sub-programa estão incorporados o método Bell-Delaware [1], e correlações específicas para a transferência de calor em região anular [14] e no interior de tubos, como a de Palen & Tabor [15], que se aplica para baixos valores de Reynolds e altos de Prandtl, e a de Sleicher & Rouse, que apresenta boa concordância com a de Gnielinski, atualmente utilizada como padrão de referência para a convecção térmica no regime turbulento [7].

No seu atual estágio de desenvolvimento, o programa não contempla os efeitos da deposição no comportamento fluidodinâmico do equipamento.

#### ESTUDO DE CASOS

Foram escolhidos dois exemplos para ilustrar a aplicação do algoritmo aqui desenvolvido. Após especificar uma carga térmica, os parâmetros operacionais que sofrem variação são apresentados ao longo de uma campanha hipotética, com as correções sendo efetuadas quando o desempenho térmico da unidade atinge um limite mínimo tolerável.

No primeiro caso é analisado um bitubular, ope-

rando em contra-corrente (comprimento total: 27,3 m; tubo interno:  $\phi_i = 0,036$  m e  $\phi_e = 0,043$  m; tubo externo:  $\phi_o = 0,054$  m), projetado com  $R_{dt} = 0,42 \times 10^3$  m<sup>2</sup>K/W para resfriar 1,51 kg/s de etileno-glicol de 355,2 K a 335,8 K (corrente principal). Para tal, é utilizado tolueno (fluido de serviço), alimentado a 299,7 K, com uma vazão de projeto igual a 1,33 kg/s. A tabela 1 apresenta os resultados da simulação deste exemplo, onde as propriedades termo-físicas são consideradas função de temperatura, segundo correlações fornecidas por Daubert & Danner [16].

Tabela 1  
Simulação da Operação do Trocador Bitubular

	INÍCIO DA CAMPANHA	FINAL ETAPA 1	APÓS CORREÇÃO	FINAL ETAPA 2	APÓS CORREÇÃO
% $q_r$	100	95	100	95	100
T	335,8	336,8	335,8	336,8	335,8
$U^{ps}$	1092,1	1090,8	1103,1	1101,9	1115,2
$U$	1092,1	942,0	951,1	840,2	847,9
$R_{dt}^{op} \times 10^3$	-	0,145	0,145	0,283	0,283
$m \cdot dt$	0,942	0,942	1,038	1,038	1,164
$T_{ss}^s$	345,0	342,8	340,9	338,9	336,6

unidades no SI

Em seguida, elaborase um procedimento análogo, cujos resultados estão listados na tabela 2, em um multitubular CT 1-2 ( $A = 278,6$  m<sup>2</sup>; 918 tubos de  $\phi_i = 0,016$  m) projetado para resfriar 27,8 kg/s de metanol de 368 K a 313 K (fluido de processo), utilizando água [17]. Para um  $R_{dt}$  de projeto igual a  $3,75 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>K/W, é prevista uma vazão de água de 68,9 kg/s disponível a 298 K.

Tabela 2  
Simulação da Operação do Trocador CT 1-2

	INÍCIO DA CAMPANHA	FINAL ETAPA 1	APÓS CORREÇÃO	FINAL ETAPA 2	APÓS CORREÇÃO
% $q_r$	100	90	100	90	100
T	313,0	318,4	313,0	318,4	313,0
$U^{ps}$	808,7	808,7	864,3	864,3	932,7
$U$	808,7	604,3	634,8	521,8	546,0
$R_{dt}^{op} \times 10^3$	-	0,418	0,418	0,760	0,760
$m \cdot dt$	50,61	50,61	66,28	66,28	95,73
$T_{ss}^s$	318,4	317,4	313,6	312,8	308,8

unidades no SI

Uma análise das tabelas 1 e 2 revela que, na medida que  $U_{op}$  diminui, a correção de idênticas reduções percentuais na carga térmica requer maiores variações na vazão da corrente secundária. Nos dois casos, a resistência convectiva no fluido de serviço não é desprezível, pois nota-se o efeito do aumento da vazão no valor de  $U$ .

Os resultados da tabela 3 possibilitam uma comparação entre as quatro opções de correção disponíveis. Pode-se verificar a grande eficácia da variação da temperatura de entrada. No exemplo, uma redução de 2 K neste parâmetro diminui de 31% (opção a) para 12% (opção b) a necessidade de acréscimo na vazão em relação ao início da campanha, que poderia ficar inalterada se houvesse uma queda de 3,7 K nesta temperatura (opção c). A quarta possibilidade (opção d) refere-se a uma elevação arbitrária de 10% na vazão do fluido de serviço.

Quando a corrente secundária for também um fluido de processo e sua vazão não puder ser alterada, admitindo-se, porém, pequenas variações em sua temperatura de saída (caso típico de recuperação de calor), a estratégia proposta neste trabalho é aplicável desde que a operação desta corrente seja realizada através de um by-pass.



Tabela 3

Comparação das Estratégias de Correção no CT 1-2 ao Final da 1ª Etapa

OPÇÃO	PARÂMETRO VARIADO	$\dot{m}_s$ (kg/s)	$T_{se}$ (K)	U (W/m <sup>2</sup> K)	$U_{op2}$ (W/m <sup>2</sup> K)
a	$\dot{m}_s$	66,28	298,0	864,3	634,8
b	$\dot{m}_s$ ; $T_{se}$	56,79	296,0	832,9	617,7
c	$T_{se}$	50,61	294,3	808,8	604,3
d	$T_{se}$ ; $\dot{m}_s$	55,67	295,7	828,9	615,5

OBSERVAÇÕES FINAIS

O programa de simulação de trocadores de calor mostrou grande potencialidade na análise de unidades bitubulares e multitubulares. Da mesma forma, a metodologia desenvolvida revelou-se eficiente na determinação e ajuste dos parâmetros operacionais de equipamentos térmicos sujeitos à deposição.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos alunos da EQ/UFRJ: Eduardo Niskier Sanchez, Angela Aparecida L. Furtado e Morsyleide de Freitas Rosa pelo auxílio na implementação e utilização do algoritmo desenvolvido.

REFERÊNCIAS

[1] Kakaç, S.; Bergles, A.E.; Mayinger, F., Heat Exchangers Thermal-Hydraulic Fundamentals and Design. Hemisphere, Washington (1981).

[2] Somerscales, E.F.C. and Knudsen, J.G., Fouling of Heat Transfer Equipment. Hemisphere, Washington (1981).

[3] TEMA, Standards of the Tubular Exchanger Manufacturers Assoc., Inc., 6th ed., New York (1978).

[4] Kern, D.Q., Heat Exchanger Design for Fouling Service. Chem. Eng. Prog., 62: 51-56 (1966).

[5] Epstein, N., Thinking about Heat Transfer Fouling: A 5x5 Matrix. Heat Transfer Eng., 4(1): 43-56 (1983).

[6] Fernandes, R.C.; Queiroz, E.M.; Teixeira, C. O.M.M., Deposição em Trocadores de Calor I: Modelagem e Simulação. Anais VIII Cong. Bras. de Engenharia Química, em publicação, São Paulo (1988).

[7] Kakaç, S.; Shah, R.K.; Aung, W., Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer. John Wiley & Sons, New York (1987).

[8] Kern, D.Q. and Seaton, R.E., Surface Fouling-How to Calculate Limits. Chem. Eng. Prog., 55: 71-73 (1959).

[9] Epstein, N., Fouling in Heat Exchangers. In: Proceedings of the Sixth Int. Heat Transfer Conference. Hemisphere, Washington, 6: 235-253 (1978).

[10] Crittenden, B.D. and Kolaczowski, S.T., Energy Savings Through Accurate Prediction of Heat Transfer Fouling Resistances. In: O'Callaghan, P.W., Energy for Industry. Pergamon Press, Oxford, pp. 257-266 (1979).

[11] Knudsen, J.G., Cooling Water Fouling. A Brief Review. In: Chenoweth, J.M. and Impagliazzo, M., Fouling in Heat Exchange Equipment.

HTD-17/ASME, New York, pp. 29-38 (1981).

[12] Crittenden, B.D.; Kolaczowski, S.T.; Varley, R., Efficient Use of Energy in Oil Refinery Exchanger Networks Subject to Fouling. IChemE Sym. Ser., 105: 201-214 (1987).

[13] Fryer, P.J. and Slater, N.K.H., The Simulation of Heat Exchanger Control with Tube-Side Chemical Reaction Fouling. Chem. Eng. Sci., 41: 2363-2372 (1986).

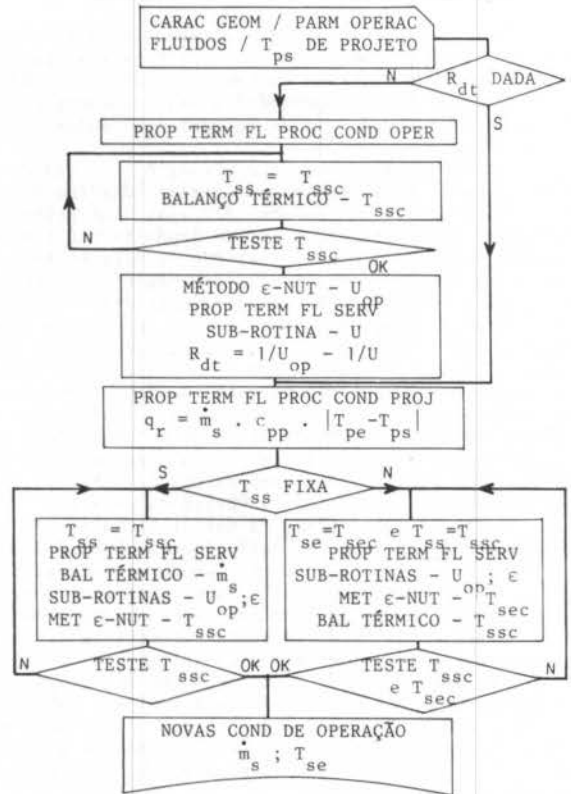
[14] Isachenko, V.P.; Osipova, V.P.; Sukomel, A.S., Heat Transfer, Mir Publishers, Moscow (1975).

[15] Palen, J.W. and Taborek, J., An Improved Heat Transfer Correlation for Laminar Flow of High Prandtl Liquids in Horizontal Tubes. AIChE Sym. Ser., 81 (245): 90-96 (1985).

[16] Daubert, T.E. and Danner, R.P., Data Compilation Tables of Properties of Pure Compounds. AIChE, New York, NY (1985).

[17] Coulson, J.M.; Richardson, J.F.; Sinnott, R.K., Chemical Engineering, vol. 6, Pergamon Press, New York (1983).

APÊNDICE: FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO PROGRAMA



ABSTRACT

This work presents a steady state simulation of double-pipe and shell-and-tube heat exchangers, which permits to restore the design heat load through adjustments of flow rate and/or inlet temperature of either one of the fluids, taking into account the occurrence of fouling. New correlations available in the literature and the Bell-Delaware method are used in this study. The feasibility and efficacy of variations imposed to those operating parameters are also analyzed.

ABCN

ABCN

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE TUBOS CAPILARES UTILIZADOS COMO DISPOSITIVOS DE EXPANSÃO EM SISTEMAS DE REFRIGERAÇÃO

CLÁUDIO MELO

Departamento de Engenharia Mecânica-UFSC  
CEZAR OTAVIANO RIBEIRO NEGRÃO

Empresa Brasileira de Compressores S/A - EMBRACO S/A

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um modelo numérico capaz de simular o comportamento de tubos capilares, utilizados como dispositivos de expansão em sistemas de refrigeração comercial. São apresentadas comparações com resultados experimentais, as quais revelam que o desempenho do programa é excelente. Comparações efetuadas com o método do gráfico da ASHRAE, indicam que aquele método é impreciso, notadamente na determinação do comprimento de tubos capilares.

INTRODUÇÃO

Durante a elaboração de um programa computacional, para a análise dinâmica de sistemas de refrigeração [1,2], tornou-se necessária a utilização de um modelo numérico para calcular o fluxo de massa de refrigerante, ao longo de um tubo capilar, a partir das dimensões físicas do mesmo e das características de operação do sistema de refrigeração.

Infelizmente, os modelos encontrados na literatura [3,4], além de apresentarem algumas limitações termodinâmicas, prestam-se tão somente, à determinação do comprimento de tubos capilares.

Desta forma, procurou-se desenvolver uma estrutura computacional que eliminasse a maioria das limitações termodinâmicas, encontradas nos modelos existentes, e que tivesse a versatilidade de poder calcular o comprimento do tubo capilar ou o fluxo de massa de refrigerante através do mesmo.

Após a conclusão e validação experimental de tal programa resolveu-se, com o auxílio do mesmo, testar a confiabilidade do método gráfico, para dimensionamento de tubos capilares, indicado pela ASHRAE [5]. Tal procedimento justifica-se por ser este, nas empresas de refrigeração, o único processo de dimensionamento de tubos capilares disponível, além dos procedimentos experimentais tipo cortar e tentar e dos testes experimentais normalizados pela ASHRAE [6].

DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO E TEMPERATURA EM TUBOS CAPILARES

O tubo capilar, apesar de aparentemente simples, apresenta, em operação, um comportamento bastante complexo [7]. A Figura 1, por exemplo, mostra a variação da temperatura e da pressão de um refrigerante, ao longo de um tubo capilar.

Ao adentrar o tubo capilar o refrigerante, no estado subresfriado, sofre uma pequena redução de pressão. Do ponto 2 ao ponto 3, a pressão se reduz linearmente em quanto que, considerando-se o escoamento como adiabático, a temperatura se mantém constante. No ponto 3 o escoamento atinge condições de saturação, sendo que a partir deste ponto a redução de pressão acentua-se na direção do final do tubo capilar e as linhas de temperatura e pressão são coincidentes.

As linhas tracejadas, da Figura 1, indicam situações que também podem ocorrer em um tubo capilar, dependendo das dimensões do mesmo e das condições do escoamento.

Entre os pontos 3 e 4', evidências experimentais [7] indicam a presença de líquido a uma temperatura superior a sua temperatura de saturação, caracterizando assim um escoamento metaestável. Este comprimento adicional da região líquida, por apresentar um gradiente

de pressão menor em relação a região bifásica implica num aumento do fluxo de massa de refrigerante.

A diferença de pressão, indicada entre os pontos 4 e 5, deve-se ao escoamento ter atingido condições sônicas no final do tubo capilar. Tal condição, também referenciada como condição crítica, corresponde ao ponto em que a entropia do refrigerante atinge um valor máximo. A pressão nesta condição, denominada pressão crítica, deve ser convenientemente determinada pois, caso a mesma seja superior a pressão de evaporação, formará com a pressão de entrada no tubo capilar, o diferencial de pressão, necessário para induzir o escoamento do refrigerante através do tubo capilar.

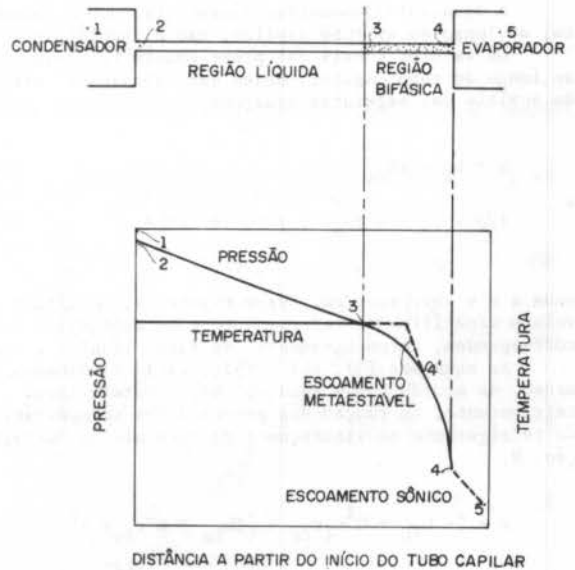


Figura 1. Variação da pressão e da temperatura de um refrigerante ao longo de um tubo capilar.

MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico, em questão, baseia-se nas seguintes hipóteses simplificativas:

- a) escoamento unidirecional e permanente
- b) escoamento adiabático
- c) variações de altura desprezíveis
- d) mistura homogênea entre vapor e líquido
- e) escoamento sem presença de óleo
- f) escoamento sem regiões de metaestabilidade

Para a região líquida do tubo capilar, de acordo com a Figura 1, a diferença de pressão, entre os pontos 1 e 3, pode ser dada por:

$$p_1 - p_3 = (1 + K_f + fL_{sub}/D)G^2/2\rho_2 \quad (1)$$

onde: G - fluxo de massa por unidade de área  
 p - pressão  
 K<sub>f</sub> - fator de perda de carga na entrada do tubo capilar  
 f - fator de atrito  
 L<sub>sub</sub> - comprimento da região líquida  
 D - diâmetro  
 ρ - densidade

As pressões p<sub>1</sub> e p<sub>3</sub> correspondem, respectivamente, à pressão de condensação e a pressão de saturação, correspondente a temperatura de saturação diminuída do grau de subresfriamento sendo empregado. O fator de atrito, para a região líquida, é obtido através da equação (2), ajustada a partir do diagrama de Moody, para uma rugosidade relativa (ε/D) de 0,0006, considerada típica para tubos capilares. Tal equação possui a seguinte forma:

$$\ln f = 0,75 - 0,68 \ln Re + 0,024 \ln Re^2 \quad (2)$$

onde Re é o número de Reynolds baseado no tubo capilar. Para a região bifásica, o escoamento ocorre segundo uma linha de Fanno. Aplicando-se a equação da energia a tal região, obtém-se:

$$H = h_3 + G^2/2\rho_3 = h_4 + G^2/2\rho_4 \quad (3)$$

A equação (3) demonstra, claramente, que o escoamento, ao longo de um tubo capilar, não é isentálpico.

Os valores locais das propriedades termodinâmicas, ao longo do tubo capilar, podem ser calculados através do auxílio das seguintes equações:

$$h = h_l + x h_{lv} \quad (4)$$

$$1/\rho = v_l + x (v_v - v_l) \quad (5)$$

onde x e v correspondem, respectivamente, ao título e ao volume específico do refrigerante e os subscritos l e v, correspondem, respectivamente, as fases líquida e vapor.

As equações (3), (4) e (5), quando combinadas, fornecem, de acordo com a equação (6), o título local do refrigerante, em função das propriedades termodinâmicas do refrigerante na saturação e da entalpia de estagnação, H.

$$x = \left\{ -h_{lv} - G^2 v_l v_{lv} + \left[ (h_{lv} + G^2 v_{lv} v_l)^2 - 2(G^2 v_l^2) (h_l + G^2 v_l^2/2 - H) \right]^{1/2} \right\} / G^2 v_{lv} \quad (6)$$

Aplicando-se a equação da quantidade de movimento, a um elemento de fluido na região bifásica, de comprimento δl, de acordo com a Figura 2, obtém-se:

$$pA - \left[ p + (dp/dl)\delta l \right] A - \tau_0 \pi D \delta l = \left[ v + (dv/dl)\delta l - v \right] \rho VA \quad (7)$$

simplificando-se e considerando-se que

$$\tau_0 = f \rho v^2 / 8 \quad (8)$$

obtem-se:

$$dp + \frac{\rho f v^2}{2D} dl + \rho v dv = 0 \quad (9)$$

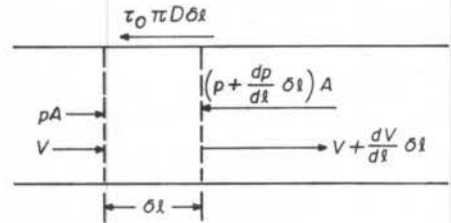


Figura 2. Notação para aplicação da equação da conservação da quantidade de movimento.

Utilizando-se a equação da continuidade e, integrando-se a equação (9), entre os pontos 3 e 4, obtém-se:

$$\bar{f} L_{sat} / D = 2 \ln (\rho_4 / \rho_3) - (2 \int_3^4 \rho dp) / G^2 \quad (10)$$

O fator de atrito médio ao longo da região bifásica,  $\bar{f}$ , é calculado de acordo com a equação (11), proposta por Erth [8].

$$\bar{f} = 3,1 Re_i^{-0,5} \exp \left[ (1 - x_i)^{0,25} / 2,4 \right] \quad (11)$$

onde Re<sub>i</sub> e x<sub>i</sub> correspondem ao número de Reynolds e ao título do refrigerante no início da região bifásica.

A integral, da equação (10), é avaliada, numericamente, através do processo de Romberg [9]. As propriedades termodinâmicas do refrigerante são obtidas de equações, ajustadas a partir das tabelas fornecidas por Reynolds [10], ou então diretamente da referência [11].

A avaliação da ocorrência ou não de escoamento sônico, é feita calculando-se os valores locais da entropia, através da equação (6) e das propriedades termodinâmicas do refrigerante na saturação. Através de um processo numérico avalia-se a pressão para a qual a entropia atinge o máximo valor. Tal pressão, denominada pressão crítica, é então comparada com a pressão de evaporação (ponto 5). Aquela que apresentar o maior valor, será a pressão, p<sub>4</sub>, utilizada na equação (10).

As equações apresentadas anteriormente, precisam ser resolvidas apenas uma vez quando o objetivo é o cálculo dos comprimentos L<sub>sub</sub> e L<sub>sat</sub>, a partir de um fluxo de massa por unidade de área, G, conhecido.

Entretanto, quando o objetivo é o cálculo da vazão mássica de refrigerante, a partir de um comprimento de tubo capilar conhecido, necessita-se empregar um processo iterativo. Isto deve-se ao fato da vazão mássica, G, ser função do fator de atrito, o qual é função de Re, que por sua vez é função de G.

#### COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os resultados, fornecidos pelo programa, são comparados com resultados experimentais obtidos, por Ungar et al [12] e Bolstad [13]. Tal comparação é apresentada nas Figuras 3 e 4.

Conforme pode-se concluir, da análise das Figuras 3 e 4, a concordância entre os resultados experimentais e numéricos é excelente para todos os pontos analisados.

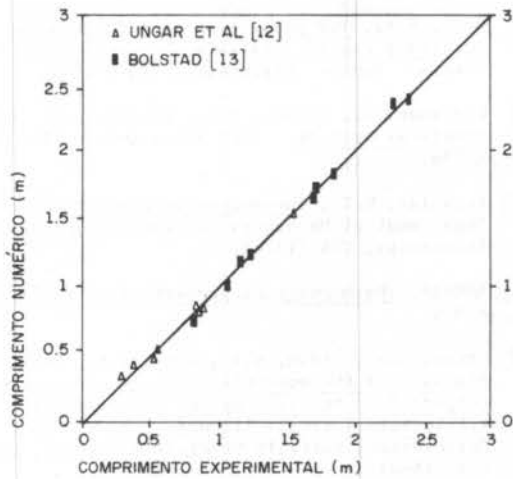


Figura 3. Comparação entre os comprimentos calculados pelo programa e os experimentais.

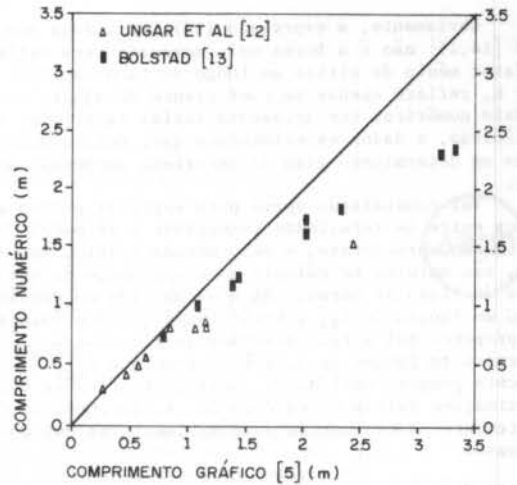


Figura 5. Comparação entre os comprimentos calculados pelo programa e pelo método da ASHRAE [5].

quida e vapor, os quais foram calculados pela equação de Blasius, a seguir:

$$f = 0,328/Re^{0,25} \quad (13)$$

Para a determinação do fator K, Whitesel [14,15] comparou os seus resultados numéricos e experimentais, e determinou, para cada ponto, um valor de K que promovesse a melhor comparação entre tais resultados. Posteriormente, tais valores foram correlacionados, em função das características de operação do sistema de refrigeração, através da equação a seguir.

$$K = \exp\{[1-(p_1/p_{crit})^{1/2}]^2(1-x_1)^9/0,66\} \quad (14)$$

onde  $p_{crit}$  refere-se a pressão crítica do escoamento.

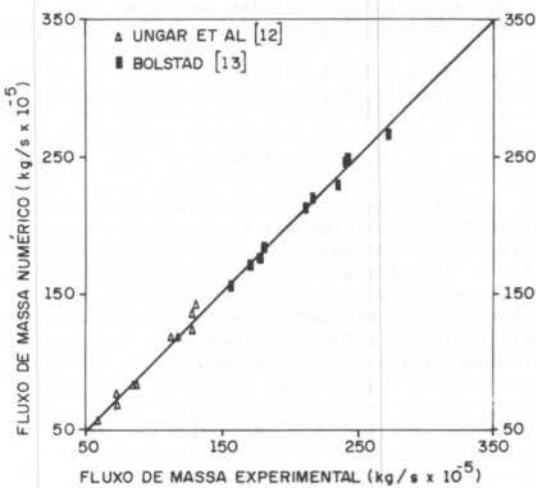


Figura 4. Comparação entre os fluxos de massa calculados pelo programa e os experimentais.

#### COMPARAÇÃO COM O MÉTODO GRÁFICO DA ASHRAE [5]

Os resultados obtidos com o programa, a partir dos dados experimentais, fornecidos por Ungar et al [12] e Bolstad [13], são comparados com os resultados obtidos através do método gráfico da ASHRAE [5]. Tal comparação é apresentada nas Figuras 5 e 6.

Através da análise das Figuras 5 e 6, verifica-se que o método gráfico da ASHRAE [5], apresenta discrepâncias consideráveis em relação aos resultados fornecidos pelo programa.

Tais diferenças podem ser explicadas através da análise dos trabalhos de Whitesel [14,15], os quais formam a base do método gráfico da ASHRAE [5]. Whitesel, além de considerar uma densidade média ao longo do tubo capilar, expressa como uma função empírica de  $p_1$  e  $x_1$ , para permitir a integração direta do termo  $\int \rho dp$ , na equação (10), utilizou um fator médio de atrito dado pela seguinte equação,

$$\bar{f} = K f_L (1-x) + f_V x \quad (12)$$

onde  $f_L$  e  $f_V$  referem-se ao fator de atrito nas fases l-

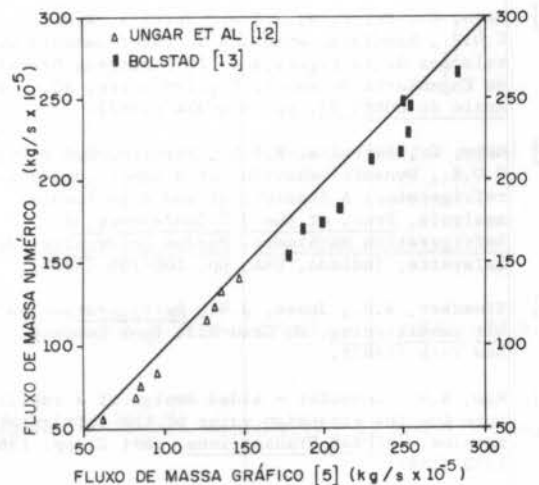


Figura 6. Comparação entre os fluxos de massa calculados pelo programa e pelo método da ASHRAE [5].

Obviamente, a expressão (12), utilizada por Whitesel [14,15] não é a forma mais adequada para estimar-se o fator médio de atrito ao longo do tubo capilar. O fator  $K$ , reflete apenas um coeficiente de ajuste entre um modelo numérico, que apresenta várias restrições termodinâmicas, e dados experimentais que, naturalmente, possuem um determinado grau de incerteza associado aos meses.

Tal constatação serve para explicar porque a diferença entre os resultados fornecidos pelo modelo numérico, sendo apresentado, e pelo método gráfico da ASHRAE [5], são maiores no cálculo do comprimento do que no cálculo do fluxo de massa. Na equação (10) ao explicitar-se  $G$  em função de  $L_{sat}$ , verifica-se que  $G$  é inversamente proporcional a raiz quadrada de  $f$ . Caso  $L_{sat}$  seja expresso em função de  $G$ , verifica-se que  $L_{sat}$  é inversamente proporcional a  $f$ . Assim, verifica-se que as aproximações feitas no cálculo de  $f$ , influenciam, mais fortemente, a estimativa do comprimento do que do fluxo de massa.

#### CONCLUSÃO

É apresentado um modelo numérico para a determinação do comprimento ou do fluxo de massa, através de um tubo capilar, utilizado como dispositivo de expansão em instalações de refrigeração comercial.

Tal modelo pode ser empregado em estudos de simulação numérica de instalações de refrigeração e, também, constitui-se numa alternativa, rápida e confiável, para o dimensionamento de tubos capilares.

O processo gráfico recomendado pela ASHRAE [5], revelou-se, ao menos para as situações analisadas, impreciso, notadamente para a estimativa do comprimento de tubos capilares.

Todas as comparações apresentadas, referem-se ao refrigerante 12. Esta não é, entretanto, uma limitação do programa, podendo o mesmo vir a trabalhar com qualquer tipo de refrigerante. Desta forma, ao contrário do processo da ASHRAE [5], que aplica-se somente aos refrigerantes 12 e 22, o programa é de extrema importância para testar-se alternativas de tubos capilares em função da substituição do refrigerante 12, comumente empregado em instalações de refrigeração, por outro tipo de refrigerante que tenha um menor efeito sobre a camada de ozônio da estratosfera.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Melo, C., Ferreira, R.T.S., Pereira, R.H. e Negrão, C.O.R., Simulação numérica do funcionamento de instalações de refrigeração. IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC, 1987. Anais do COBEM 87, pp. 351-354 (1987).
- [2] Melo, C., Ferreira, R.T.S., Pereira, R.H. e Negrão, C.O.R., Dynamic behaviour of a vapor compression refrigerator: A theoretical and experimental analysis. Proc. of the 3<sup>rd</sup> Conference on Refrigeration Machinery, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA, pp. 100-106 (1988).
- [3] Stoecker, W.F., Jones, J.W., Refrigeration and air conditioning. Mc Graw-Hill Book Company, New York (1982).
- [4] Kim, R.H., Computer - aided design of a capillary tube for the expansion valve of the refrigeration machine. ASHRAE Transactions, part 2, pp. 1362-1370 (1987).
- [5] ASHRAE Handbook of Equipment, pp. 20.19-20.28 (1983).
- [6] ASHRAE Standard 28-78, Method of testing flow capacity of refrigerant capillary tubes, (1978).
- [7] Schulz, V.W., State of the art: The capillary tube for, and in, vapor compression systems. ASHRAE Transactions, Part 1A, pp. 92-105 (1985).
- [8] Erth, R.A., Two-phase flow in refrigeration capillary tubes: analysis and prediction. Ph.D. Thesis. Purdue University, USA (1970).
- [9] Carnahan, B., Luther, H.A., Wilkes, J.D., Applied numerical methods. John Wiley & Sons, New York (1969).
- [10] Reynolds, W.C., Thermodynamic properties in S.I. Department of Mechanical Engineering, Stanford University, USA (1979).
- [11] ASHRAE, Thermophysical properties of refrigerants. (1976).
- [12] Ungar, E.W., Stein, R.A., Boyd, R.S., Beck, W.D., Analysis of the potentialities of using analog computers in the development of residential refrigerators (Phase I). Report to Whirlpool Corporation, Battelle Memorial Institute, Ohio, USA (1960).
- [13] Bolstad, M.M., Theory and use of capillary tube expansion devices for refrigerant control. Ph.D. Thesis, University of Minnesota, USA (1949).
- [14] Whitesel, H.A., Capillary two-phase flow. Refrigerating Engineering, Vol. 65, No. 4 (1957).
- [15] Whitesel, H.A., Capillary two-phase flow, part II. Refrigerating Engineering, Vol. 65, No. 9, pp. 35-40 (1957).

#### ABSTRACT

The objective of this work is to present a numerical model to simulate the behaviour of capillary tubes, employed as expansion devices in refrigeration systems. The program results are compared with experimental data and a good agreement is shown. Further comparisons with the ASHRAE graphical method reveal that that method is inaccurate, mainly in estimating capillary tubes length.





MODIFIED ONE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF RADIAL FINN

João B. Aparecido  
 Deptº de Energia-ITA/CTA-Deptº Eng.Mecânica UNESP/Ilha Solteira  
 Renato M. Cotta  
 Programa de Engenharia Mecânica - COPPE/UFRJ

ABSTRACT

A modified one-dimensional formulation is proposed for radial fins, based on the ideas of the recently advanced Coupled Integral Equation Approach, which allows for significant accuracy improvement over the classical fin formulation, extending the range of applicability of the simple one-dimensional analysis, with respect to the related Biot number.

INTRODUCTION

The classical one-dimensional fin-type analysis [1-3] is a well-established and widely employed tool in the approximate solution of various heat transfer problems related to extended surfaces, and applied to practical calculations in the design of heat exchange equipment. Analytical solutions were, therefore, made available for different fin geometries and boundary conditions [2,3]. The basic assumption of negligible temperature gradients within the fin's cross section, and therefore relatively uniform temperature distributions, imposes severe limitations in applying the classical approach to problems with even relatively small Biot numbers. A limited amount of work [4,5] is available, that attempted to establish error bounds for such approximate expressions in terms of the transversal Biot number. In general [4,5], this approach is not recommended for Biot well above 0.1. However, so as to alleviate such difficulty, a new approach was quite recently proposed [6], that takes into account, though approximately, the non-uniform temperature profile across the fin, by making use of the ideas in the Coupled Integral Equation Approach, also recently advanced [7,8]. The resulting one-dimensional formulation is then expected to correct for non-negligible temperature gradients and provide a wider range of the Biot number in the realm of applications. The present note brings the extension of the analysis in [6], so as to include radial fin configurations, here illustrated through a straight annular fin. Then, the accuracy of the approximate solutions are critically examined against the exact two-dimensional results.

ANALYSIS

We consider steady-state, two-dimensional heat conduction through a straight radial fin, as depicted in Fig. 1 below, with constant thermal conductivity, k, and subjected to an ambient temperature, T<sub>∞</sub>, and base temperature, T<sub>b</sub>. The problem formulation is then written in dimensionless form as:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ R \frac{\partial \Theta(R,Y)}{\partial R} \right] + K^2 \frac{\partial^2 \Theta(R,Y)}{\partial Y^2} = 0, \quad R_b < R < 1, 0 < Y < 1 \quad (1.a)$$

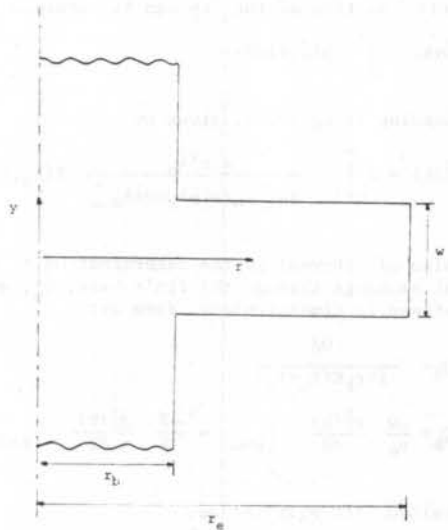


Fig. 1 - Geometry and coordinate system for radial fin analysis.

with boundary conditions

$$\Theta(R_b, Y) = 1; \quad \frac{\partial \Theta(1, Y)}{\partial R} + Bi^* \Theta(1, Y) = 0, \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad (1.b, c)$$

$$\frac{\partial \Theta(R, 0)}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial \Theta(R, 1)}{\partial Y} + Bi \Theta(R, 1) = 0, \quad R_b < R < 1 \quad (1.d, e)$$

where various dimensionless groups are defined as:

$$\Theta(R, Y) = \frac{T(r, y) - T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}}; \quad R = \frac{r}{r_e}; \quad Y = \frac{y}{w/2}$$

$$K = \frac{r_e}{w/2}; \quad R_b = \frac{r_b}{r_e}; \quad Bi = \frac{h(w/2)}{k}; \quad Bi^* = \frac{h_e(w/2)}{k} \quad (2)$$

and the heat transfer coefficients at the lateral surface,  $h$ , and fin tip,  $h_e$ , were allowed to differ.

The exact solution of the two-dimensional problem (1) is readily obtainable by separation of variables in the form:

$$\Theta(R, Y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \cos(\lambda_n Y)}{[\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n]} \cdot F(\lambda_n, R), \quad (3.a)$$

$$F(\lambda_n, R) = \{ K_0(\lambda_n KR) [ Bi I_0(\lambda_n K) + \lambda_n I_1(\lambda_n K) ] - I_0(\lambda_n KR) [ Bi K_0(\lambda_n K) - \lambda_n K_1(\lambda_n K) ] \} / \{ K_0(\lambda_n KR_b) [ Bi I_0(\lambda_n K) + \lambda_n I_1(\lambda_n K) ] - I_0(\lambda_n KR_b) [ Bi K_0(\lambda_n K) - \lambda_n K_1(\lambda_n K) ] \}, \quad (3.b)$$

where  $I_0(x)$ ,  $K_0(x)$  are modified Bessel functions and the eigenvalues  $\lambda_n$ 's are obtained from the solution of the transcendental equation

$$\lambda_n \tan \lambda_n = Bi \quad (3.c)$$

A dimensionless average temperature at each circumferential section of the fin can be obtained from:

$$\bar{\Theta}(R) = \int_0^1 \Theta(R, Y) dY \quad (4.a)$$

and according to eq.(3.c), given by

$$\bar{\Theta}(R) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda_n}{\lambda_n [\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n]} \cdot F(\lambda_n, R) \quad (4.b)$$

Also of interest is the determination of the total heat exchange through the fin's base,  $Q_b^*$ , which is here defined in dimensionless form as:

$$Q_b^* = \frac{Q_b}{2\pi r_b K (T_b - T_{\infty})} \quad (5.a)$$

$$\text{or, } Q_b^* = \frac{-w}{r_e} \frac{d\bar{\Theta}(R)}{dR} \Big|_{R=0} = \frac{-2}{K} \frac{d\bar{\Theta}(R)}{dR} \Big|_{R=0} \quad (5.b)$$

and obtained from eq.(3.a) as

$$Q_b^* = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda_n}{\lambda_n + \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \cdot G(\lambda_n), \quad (5.c)$$

$$G(\lambda_n) = \{ K_1(\lambda_n KR_b) [ Bi I_0(\lambda_n K) + \lambda_n I_1(\lambda_n K) ] + I_1(\lambda_n KR_b) [ Bi K_0(\lambda_n K) - \lambda_n K_1(\lambda_n K) ] \} / \{ K_0(\lambda_n KR_b) [ Bi I_0(\lambda_n K) + \lambda_n I_1(\lambda_n K) ] - I_0(\lambda_n KR_b) [ Bi K_0(\lambda_n K) - \lambda_n K_1(\lambda_n K) ] \} \quad (5.d)$$

The classical fin formulation [1-3], when applied to the configuration here considered, yields:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[ R \frac{d\bar{\Theta}(R)}{dR} \right] - Bi K^2 \bar{\Theta}(R) = 0, \quad R_b < R < 1 \quad (6.a)$$

and

$$\bar{\Theta}(R_b) = 1; \quad \frac{d\bar{\Theta}(1)}{dR} + Bi K \bar{\Theta}(1) = 0 \quad (6.b,c)$$

which is solved as

$$\bar{\Theta}(R) = \{ K_0(\sqrt{Bi} KR) [ Bi I_0(\sqrt{Bi} K) + \sqrt{Bi} I_1(\sqrt{Bi} K) ] - I_0(\sqrt{Bi} KR) [ Bi K_0(\sqrt{Bi} K) - \sqrt{Bi} K_1(\sqrt{Bi} K) ] \} / \{ K_0(\sqrt{Bi} KR_b) [ Bi I_0(\sqrt{Bi} K) + \sqrt{Bi} I_1(\sqrt{Bi} K) ] - I_0(\sqrt{Bi} KR_b) [ Bi K_0(\sqrt{Bi} K) - \sqrt{Bi} K_1(\sqrt{Bi} K) ] \}, \quad (6.d)$$

while the dimensionless heat exchange is given by

$$Q_b = 2\sqrt{Bi} \{ K_1(\sqrt{Bi} KR_b) [ Bi I_0(\sqrt{Bi} K) + \sqrt{Bi} I_1(\sqrt{Bi} K) ] + I_1(\sqrt{Bi} KR_b) [ Bi K_0(\sqrt{Bi} K) - \sqrt{Bi} K_1(\sqrt{Bi} K) ] \} / \{ K_0(\sqrt{Bi} KR_b) [ Bi I_0(\sqrt{Bi} K) + \sqrt{Bi} I_1(\sqrt{Bi} K) ] - I_0(\sqrt{Bi} KR_b) [ Bi K_0(\sqrt{Bi} K) - \sqrt{Bi} K_1(\sqrt{Bi} K) ] \} \quad (6.e)$$

A critical comparison of results from eqs.(5.c) and (6.e) reveals that the approximate solution assumes errors of about 53% for  $Bi=10$  and 10% for  $Bi=1$ , which clearly demonstrates that the classical formulation is severely restricted to very small Biot numbers, if accuracy is at a premium. Therefore, it would be extremely desirable if an alternative formulation could be developed, providing some reasonable accuracy improvement, but keeping the same degree of simplicity as for the classical formulation. Such an approach was successfully reached in [6], as applied to longitudinal and pin fins, and is here extended to radial fins as follows. By following the formalism in the so-called Coupled Integral Equation Approach [6-8], we define an additional dependent variable

$$V(R, Y) = \frac{\partial \Theta(R, Y)}{\partial Y} \quad (7.a)$$

and rewrite system (1) as shown below:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ R \frac{\partial \Theta(R, Y)}{\partial R} \right] + K^2 \frac{\partial V(R, Y)}{\partial Y} = 0 \quad (7.b)$$

$$\Theta(R_b, Y) = 1; \quad \frac{\partial \Theta(1, Y)}{\partial R} + Bi K \Theta(1, Y) = 0 \quad (7.c,d)$$

$$V(R, 0) = 0; \quad V(R, 1) + Bi \Theta(R, 1) = 0 \quad (7.e,f)$$

Eqs.(7.a-d) can now be integrated in Y, and the definition of the average temperature recalled, together with boundary conditions (7.e,f), to yield:

$$\int_0^1 V(R,Y) dY = \Theta(R,1) - \Theta(R,0) \quad (8.a)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[ R \frac{d\bar{\Theta}(R)}{dR} \right] - Bi K^2 \bar{\Theta}(R,1) = 0 \quad (8.b)$$

and

$$\bar{\Theta}(R_b) = 1; \quad \frac{d\bar{\Theta}(1)}{dR} + Bi^* K \bar{\Theta}(1) = 0 \quad (8.c,d)$$

Clearly, by assuming negligible temperature gradients, i.e.,  $\Theta(R,1) = \bar{\Theta}(R)$  in eq.(8.b), the classical formulation of eq.(6) is recovered. Therefore, in order to approximately take into account the effects of a non-uniform temperature distribution, one needs to relate somehow the average and boundary temperatures. Although higher order and more involved expressions [7-8] could be employed, it is here sufficient to consider the straightforward trapezoidal rule to approximate the integrals in eqs.(4.a) and (8.a), to provide:

$$\frac{1}{2} [V(R,1) + V(R,0)] = \Theta(R,1) - \Theta(R,0) \quad (9.a)$$

$$\bar{\Theta}(R) = \frac{1}{2} [\Theta(R,1) + \Theta(R,0)] \quad (9.b)$$

and after using boundary conditions (7.e,f), and rearranging

$$\Theta(R,0) - \left[ 1 + \frac{Bi}{2} \right] \Theta(R,1) = 0 \quad (10.a)$$

$$\Theta(R,0) + \Theta(R,1) = 2\bar{\Theta}(R) \quad (10.b)$$

The algebraic system above is readily solved for the boundary temperature to yield

$$\Theta(R,1) = \frac{\bar{\Theta}(R)}{1 + \frac{Bi}{4}} \quad (11)$$

Eq.(11) is then the desired relation to be plugged back into eq.(8.b) and produce the still one-dimensional, but modified formulation:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[ R \frac{d\bar{\Theta}(R)}{dR} \right] - Bi^* K^2 \bar{\Theta}(R) = 0, \quad R_b < R < 1 \quad (12.a)$$

$$\bar{\Theta}(R_b) = 1; \quad \frac{d\bar{\Theta}(1)}{dR} + Bi^* K \bar{\Theta}(1) = 0 \quad (12.b,c)$$

where the modified Biot number,  $Bi^*$ , is given by

$$Bi^* = \frac{Bi}{1 + \frac{Bi}{4}} \quad (12.d)$$

The solution of system (12) is entirely similar to that of system (6), and obtained by replacing Bi by the modified Biot number,  $Bi^*$ , in eqs.(6.d.e), and there is no need to repeat them here.

## RESULTS AND DISCUSSION

Several sets of results were obtained from the exact, classical and modified approximate solutions, for the situation  $Bi^* = Bi$ , and for typical values of the related parameters,  $Bi = 0.01, 0.1, 1.0$  and  $10.$ ,  $R_b = 0.3, 0.5$  and  $0.7$ , and  $K = 1.$  to  $20.$  In table I it is shown the dimensionless heat transfer rates at the fin's base, for  $R_b = 0.3$  and different values of Bi and aspect ratio, K. The classical and modified approaches, as expected, provide practically the same figures as  $Bi \rightarrow 0$ , while the former rapidly degenerates for Bi larger than about 0.1. At  $Bi = 1.$  the improved solution still involves a negligible error of about 0.6%, providing conservative estimates for larger Biot numbers. Apparently, the aspect ratio K does not play a major role in the relative merits of each solution.

Bi	K	Qc(J)	Qc(C)	Qc(D)	Qc(E)	Qc(F)
0.01	1.0	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356	0.0356
0.01	1.5	0.1046	0.1046	0.1046	0.1046	0.1046
0.01	2.0	0.1232	0.1232	0.1232	0.1232	0.1232
0.01	2.5	0.1363	0.1363	0.1363	0.1363	0.1363
0.01	3.0	0.1489	0.1487	0.1487	0.1486	0.1486
0.01	3.5	0.1610	0.1607	0.1607	0.1607	0.1607
0.01	4.0	0.1725	0.1723	0.1723	0.1722	0.1722
0.01	4.5	0.1835	0.1832	0.1832	0.1831	0.1831
0.01	5.0	0.1939	0.1936	0.1936	0.1935	0.1935
0.10	1.0	0.1489	0.1479	0.1478	0.1477	0.1477
0.10	1.5	0.3107	0.3027	0.3026	0.3025	0.3025
0.10	2.0	0.3555	0.3462	0.3462	0.3461	0.3461
0.10	2.5	0.3861	0.3753	0.3753	0.3752	0.3752
0.10	3.0	0.4051	0.3945	0.3945	0.3944	0.3944
0.10	3.5	0.4151	0.4043	0.4043	0.4042	0.4042
0.10	4.0	0.4182	0.4074	0.4074	0.4073	0.4073
0.10	4.5	0.4163	0.4056	0.4056	0.4055	0.4055
0.10	5.0	0.4108	0.4002	0.4002	0.4001	0.4001
1.00	1.0	4.1277	3.9277	3.9273	4.0276	-0.223
1.00	1.5	3.6326	3.4185	3.4185	3.351	-0.568
1.00	2.0	3.3146	3.0259	3.1144	2.445	-0.605
1.00	2.5	3.0962	2.8765	2.8934	2.038	-0.536
1.00	3.0	2.9385	2.7150	2.7351	1.437	-0.339
1.00	3.5	2.8200	2.6011	2.6168	1.163	-0.402
1.00	4.0	2.7279	2.5053	2.5254	0.917	-0.467
1.00	4.5	2.6545	2.4372	2.4594	0.707	-0.477
1.00	5.0	2.5946	2.3740	2.3937	0.593	-0.455
10.00	1.0	9.2586	6.5739	7.3858	25.357	-10.311
10.00	1.5	8.3074	5.3924	6.1531	34.307	-12.434
10.00	2.0	7.8400	4.8617	5.5175	40.362	-13.145
10.00	2.5	7.5549	4.5670	5.2370	42.827	-13.619
10.00	3.0	7.3611	4.3773	5.0902	44.513	-14.004
10.00	3.5	7.2204	4.2430	4.9531	45.775	-14.235
10.00	4.0	7.1135	4.1419	4.8509	46.546	-14.414
10.00	4.5	7.0295	4.0625	4.7711	47.134	-14.563
10.00	5.0	6.9618	3.9983	4.7070	47.523	-14.655

Table I - Comparison of dimensionless heat transfer rates at the fin's base for different Biot numbers and aspect ratio.

Figures 2 and 3 present average temperature profiles, for  $R_b = 0.3, Bi = 1$  or  $10$  and, respectively,  $K = 2$  and  $5.$  Clearly, the situation is even more favorable for the modified approach, since its temperature distribution is practically coincident with the exact results, while the classical solution reaches relative errors over 100% within the fin's length ( $Bi=10$ ). Such situation does not seem to be altered significantly when the fin is made shorter with respect to the base radius (larger values of  $R_b$ ), as demonstrated in figures 4 and 5, respectively, for  $R_b = 0.5$  and  $0.7.$

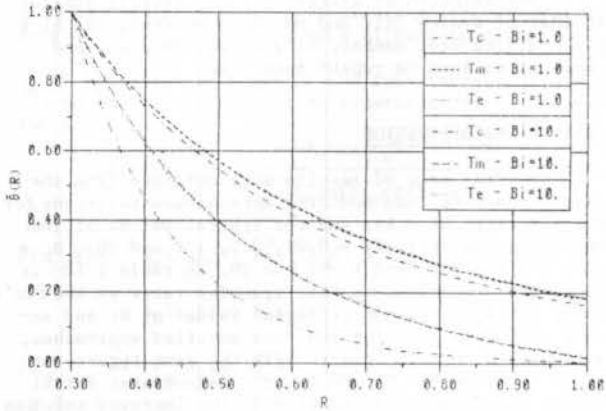


Fig. 2 - Exact, classical, and modified fin solutions for average temperature distributions ( $R_b=0.3$  and  $K=2$ ).

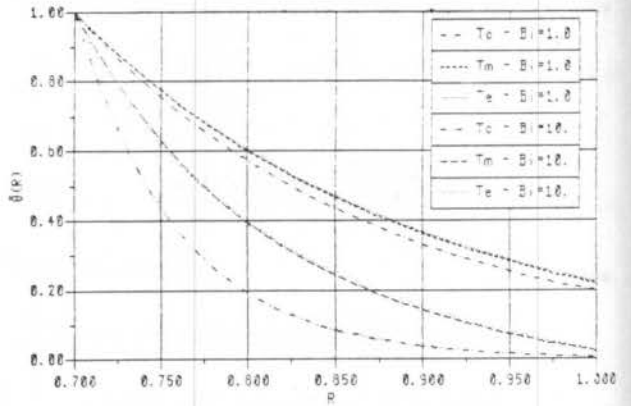


Fig. 5 - Exact, classical, and modified fin solutions for average temperature distributions ( $R_b=0.7$  and  $K=5$ ).

ACKNOWLEDGEMENT

One of the authors (J.B.A.) wishes to acknowledge the financial support provided by CAPES and UNESP-Ilha Solteira, both from Brasil, during his stay at ITA/CTA.

REFERENCES

- Gardner, K.A., "Efficiency of Extended Surfaces", *Trans.ASME*, V. 67, pp. 621-631 (1945).
- Kern, D.A. and A.D. Kraus, "Extended Surface Heat Transfer", McGraw-Hill, New York (1972).
- Mikhailov, M.D. and M.N. Ozisik, "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", John Wiley, New York (1984).
- Lau, W. and C.W. Tan, "Errors in One-Dimensional Heat Transfer Analysis in Straight and Annular Fins", *J.Heat Transfer*, V. 95, pp. 549-551, November(1973).
- Irey, R.K. "Errors in the One-Dimensional Fin Solution", *J.Heat Transfer*, V.90, pp. 175-176, February (1968).
- Aparecido, J.B. and R.M. Cotta, "Improved One-Dimensional Fin Solutions", *Heat Transfer Eng.*, (submitted).
- Mennig, J. and M.N. Ozisik, "Coupled Integral Equation Approach for Solving Melting or Solidification", *Int. J.Heat & Mass Transfer*, V.28, pp. 1481-1485 (1985).
- Cotta, R.M. , M.N. Ozisik and J. Mennig, "Coupled Integral Equation Approach for Solving Phase-Change Problem in a Finite Slab", *Can.J. Chem. Eng.*, to appear.

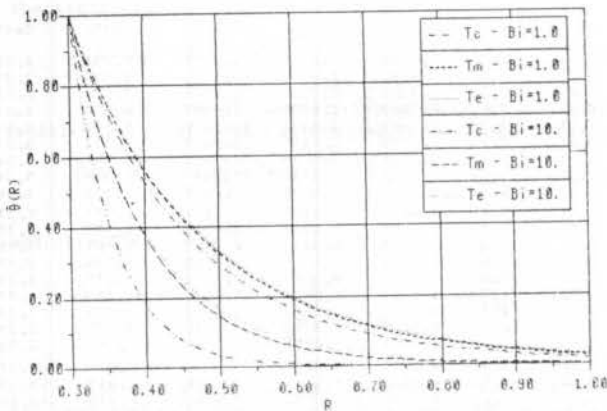


Fig. 3 - Exact, classical, and modified fin solutions for average temperature distributions ( $R_b=0.3$  and  $K=5$ ).

The approach here presented is certainly an improvement of an order of magnitude over the widely employed classical formulation and higher order solutions can be pursued, at the cost of further analytical involvement, by considering approximations for the associated integrals that include derivatives at the Y boundaries.

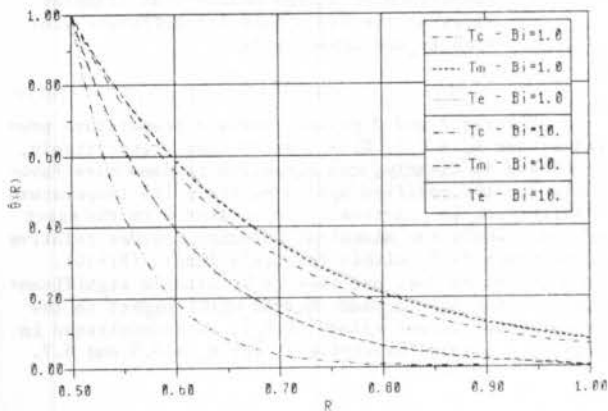


Fig. 4 - Exact, classical, and modified fin solutions for average temperature distributions ( $R_b=0.5$  and  $K=5$ ).



## ANÁLISE DO DESEMPENHO TÉRMICO DE SUPERFÍCIES PINADAS E ALETADAS SUBMETIDAS À CONVECÇÃO

CARLOS VALOIS MACIEL BRAGA \*  
FRANCISCO EDUARDO MOURÃO SABOYA \*

Departamento de Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

### SUMÁRIO

*O presente trabalho trata do desempenho térmico de superfícies aletadas em escoamento turbulento. É mostrado que tal desempenho depende principalmente do Número de Nusselt e da eficiência da região. Esses parâmetros são funções do Número de Reynolds do escoamento e da geometria do problema. Para ilustrar o método, vários exemplos são dados.*

### INTRODUÇÃO

A teoria relativa à transferência de calor em superfícies aletadas [1] mostra que, para determinar-se a taxa de troca de calor associada a mesma, é necessário conhecer-se o coeficiente de filme médio,  $h$ , e a eficiência da região aletada,  $\eta$ , além da área e da diferença de temperaturas entre a superfície primária e o fluido. Inicialmente, em uma revisão da literatura, constata-se uma grande deficiência de dados, para diversas geometrias, no que se refere aos coeficientes de filme médios de regiões aletadas (superfície primária e aletas). Muitos autores, como por exemplo Sparrow [2], fornecem o coeficiente associado apenas a uma aleta ou pino, que certamente difere do coeficiente médio da região. Adotar-se tal coeficiente no projeto de trocadores de calor compactos, ou seja, com uma elevada "densidade" de área de troca de calor por unidade de comprimento devido a colocação de aletas, pode comprometer o projeto. Da mesma forma, a utilização do coeficiente de troca de calor da superfície lisa (sem aletas), também pode acarretar erros consideráveis em tais projetos.

No presente trabalho são apresentados dois métodos para a análise do desempenho de superfícies aletadas. A diferença fundamental entre os métodos reside na definição de eficiência da região aletada. Conforme será mostrado na "Análise Teórica", a determinação da eficiência da região envolve o conhecimento da eficiência da aleta ou pino, além dos coeficientes médios de troca de calor. Para a determinação de tal eficiência, no caso de uma aleta, foi utilizado um modelo bi-dimensional [3]. Com o objetivo de ilustrar os métodos de análise, são apresentados vários resultados originais envolvendo geometrias diversas.

### ANÁLISE TEÓRICA

A Figura 1 apresenta esquematicamente um canal formado por uma superfície aletada (pinos ou aletas) e ou-

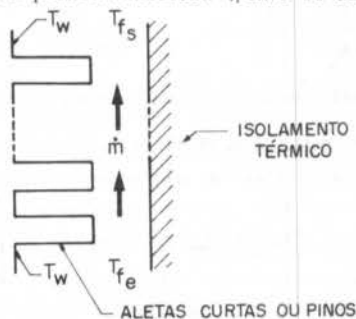


Fig. 1 Representação esquemática da região aletada

tra adiabática. Tal configuração é típica de trocadores de calor compactos. A superfície primária da região aletada é suposta isotérmica, à temperatura  $T_w$ . Através do canal escoam um fluido, com uma vazão mássica  $\dot{m}$ , com temperaturas  $T_{f_e}$  e  $T_{f_s}$ , na entrada e saída do mesmo, respectivamente.

Para efeito de análise, é admitido que as aletas possuem um comprimento pequeno na direção do escoamento, de tal modo que se possa considerar a temperatura do fluido constante sobre cada uma das mesmas.

**1º Método de Análise.** A taxa total,  $\dot{Q}$ , de troca de calor entre a superfície aletada (área  $A_t$ ) e o fluido que escoam no canal é dado por

$$\dot{Q} = \dot{Q}_w + \dot{Q}_a = \eta h A_t \frac{(T_w - T_{f_e}) - (T_w - T_{f_s})}{\ln[(T_w - T_{f_e}) / (T_w - T_{f_s})]} \quad (1)$$

onde  $\dot{Q}_w$  é a taxa de calor dissipada pela superfície primária ( $A_w$ ) e  $\dot{Q}_a$  é a associada às aletas ( $A_a$ ). Ainda nesta equação,  $h$  é o coeficiente médio de troca de calor e  $\eta$  a eficiência da região aletada usualmente definida pela relação  $\dot{Q} / \dot{Q}_{id}$ , onde  $\dot{Q}_{id}$  é a taxa de calor (ideal) trocada se a aleta fosse isotérmica à  $T_w$ .

Por outro lado, as taxas  $\dot{Q}_w$  e  $\dot{Q}_a$  podem ser expressas por

$$\dot{Q}_w = h A_w \overline{\Delta T} \quad (2)$$

$$\dot{Q}_a = \eta_a h A_a \overline{\Delta T} \quad (3)$$

onde  $\overline{\Delta T}$  é a diferença média logarítmica de temperatura dada pela fração da equação (1) e  $\eta_a$  a eficiência da aleta ou pino.

Combinando-se as equações (1), (2) e (3) obtém-se:

$$\eta = (1 - (1 - \eta_a)(A_a / A_t)) \quad (4)$$

Pode-se observar que  $\dot{Q}$  depende fundamentalmente de  $h$  e  $\eta$ . O coeficiente  $h$  é geralmente fornecido em termos do Número de Nusselt ( $Nu$ ), enquanto, através de (4), verifica-se que  $\eta$  é função de  $\eta_a$ .

Definindo-se a temperatura adimensional  $\theta_f$  do fluido como sendo

$$\theta_f = (T_f - T_{f_e}) / (T_w - T_{f_e}) \quad (5)$$



e considerando-se o balanço de energia no fluido, pode-se escrever:

$$\dot{Q} = \eta h A_L (T_w - T_{f_e}) \frac{\theta_{f_s}}{\ln(1/(1-\theta_{f_s}))} = \dot{m} c_p (T_{f_s} - T_{f_e}) \quad (6)$$

Daí, resulta

$$\theta_{f_s} = 1 - e^{-\eta\beta}, \quad (7)$$

onde  $\beta = hA_L/\dot{m}c_p$ . É conveniente ressaltar que, sendo conhecidos os valores de  $\eta$  e  $h$  que caracterizam o desempenho da superfície aletada, pode-se determinar  $\theta_{f_s}$  (ou  $T_{f_s}$ ) e, conseqüentemente,  $\dot{Q}$ .

2º Método de Análise. Rosman, Carajilescov e Saboya [4] sugerem uma definição alternativa para a eficiência da região aletada,  $\eta^*$ . Assim,

$$\eta^* = \frac{\dot{m} c_p (T_{f_s} - T_{f_e})}{\dot{m} c_p (T_{f_s}^i - T_{f_e})} = \frac{\theta_{f_s}}{\theta_{f_s}^i}, \quad (8)$$

onde,  $T_{f_s}^i$  seria a temperatura do fluido na saída se a aleta fosse isotérmica à  $T_w$ . Ressalta-se que, na definição clássica (equação (1)), supõe-se inalterada a temperatura do fluido na saída,  $T_{f_s}$ , quando se determina  $\dot{Q}_{id}$ .

Poder-se-ia reescrever a equação (6), para a aleta isotérmica, substituindo-se  $T_{f_s}$  e  $\theta_{f_s}$  por  $T_{f_s}^i$  e  $\theta_{f_s}^i$ , respectivamente, além de igualar  $\eta$  à unidade. Tal procedimento equivale a se fazer  $\eta = 1$  na equação (7). Deste modo,

$$\theta_{f_s}^i = 1 - e^{-\beta}. \quad (9)$$

De forma idêntica ao 1º método,  $\eta^*$  e  $h$  caracterizam o desempenho da superfície. Para obter-se  $\dot{Q} = \dot{m} c_p \theta_{f_s} (T_w - T_{f_e})$  através do 2º método, determina-se  $\theta_{f_s}^i$  (equação (9)) e, em seguida,  $\theta_{f_s} = \eta^* \theta_{f_s}^i$ .

Relação entre  $\eta$  e  $\eta^*$ . É possível estabelecer uma correlação entre ambas as definições de eficiência de superfícies aletadas, substituindo-se (7) e (9) em (8). Assim,

$$\eta^* = \frac{1 - e^{-\eta\beta}}{1 - e^{-\beta}} \quad (10)$$

A Figura 2 apresenta graficamente tal função parametrizada por  $\beta$ . Observa-se que  $\eta^*$  é sempre maior do que  $\eta$ , excetuando-se os extremos do intervalo (zero e um), onde constata-se a igualdade entre  $\eta$  e  $\eta^*$ .

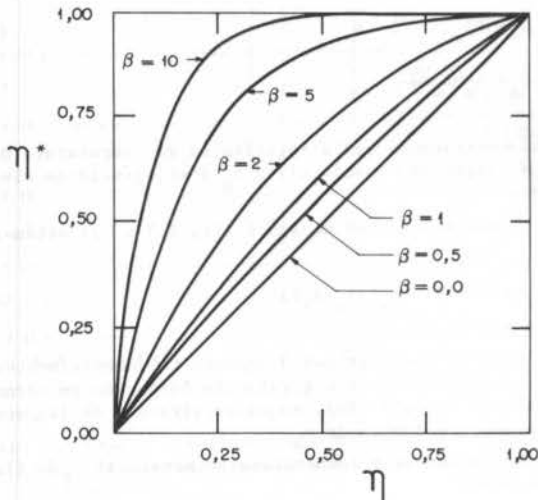


Fig. 2 Relação entre  $\eta$  e  $\eta^*$

Eficiência de Pinos e Aletas. A Figura 3 apresenta esquematicamente o pino e aleta, cujas eficiências devem ser determinadas.

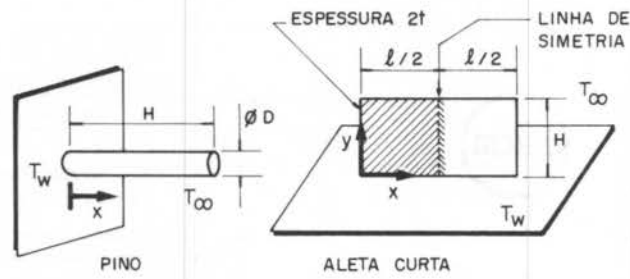


Fig. 3 Geometria básica do pino e da aleta

Em regime permanente, um balanço de energia no pino uni-dimensional fornece:

$$d^2\theta/dx^2 - C_1\theta = 0, \quad (11)$$

onde o parâmetro  $C_1$  é dado por

$$C_1 = 4 \frac{H^2}{DD_h} \frac{k_\infty}{k} Nu \quad (12)$$

As condições de contorno da equação (11) são:

$$(1) \text{ Em } X = 0 \text{ (base do pino): } \theta = 1 \quad (13)$$

$$(2) \text{ Em } X = H \text{ (ponta do pino): } d\theta/dX = -(D/4H)C_1\theta \quad (14)$$

Nas equações (11), (12) e (14), tem-se:

$$\theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty) \quad (15)$$

$$X = x/H \quad (16)$$

$$Nu = hD_h/k_\infty \text{ (Número de Nusselt)} \quad (17)$$

$T$  = temperatura local do pino

$D_h$  = diâmetro hidráulico do canal

$k_\infty$  = condutividade térmica do fluido

$k$  = condutividade térmica do material do pino

Ressalta-se que a distribuição de temperatura no pino, e conseqüentemente a eficiência do mesmo, depende somente do parâmetro  $C_1$  (eq. 12) e da relação  $D/H$ , conforme pode-se observar através das equações (11) e (14).

De forma análoga, um balanço de energia na aleta bi-dimensional da Figura 3 fornece:

$$\partial^2\theta/\partial X^2 + \partial^2\theta/\partial Y^2 - C_2\theta = 0, \quad (18)$$

onde o parâmetro  $C_2$  é dado por:

$$C_2 = \frac{H^2}{tD_h} \frac{k_\infty}{k} Nu \quad (19)$$

As condições de contorno da equação (18) são:

$$(1) \text{ Em } Y = 0 \text{ (base da aleta): } \theta = 1 \quad (20)$$

$$(2) \text{ Em } X = 0 \text{ (lateral esquerda da aleta): } \partial\theta/\partial X = (t/H)C_2\theta \quad (21)$$

$$(3) \text{ Em } X = l/2H \text{ (linha de simetria da aleta): } \partial\theta/\partial X = 0 \quad (22)$$

$$(4) \text{ Em } Y = 1 \text{ (ponta da aleta): } \partial\theta/\partial Y = -(t/H)C_2\theta \quad (23)$$

Em adição à nomenclatura já definida,  $Y = y/H$  e  $2t$  é a espessura da aleta.

De forma semelhante aos pinos, verifica-se que a eficiência das aletas é função do parâmetro  $C_2$  e das relações  $t/H$  e  $\ell/2H$ .

Tanto no caso dos pinos quanto para as aletas, sendo conhecida a distribuição de temperatura  $\theta$ , pode-se determinar a eficiência. Deste modo,

$$\eta_a = \left[ \frac{\int_A \theta \, dA}{A} \right], \quad (24)$$

onde  $A$  é a área total de troca de calor da aleta.

## RESULTADOS

Conforme mencionado anteriormente, o desempenho de superfícies aletadas depende basicamente da eficiência da região ( $\eta$ ) e do número de Nusselt médio ( $Nu$ ) associado à geometria da superfície. Para um dado fluido escoando através do canal (Figura 1), o Número de Nusselt médio é função do Número de Reynolds ( $Re = \bar{v} D_h / \nu$ ). Por outro lado, a equação (4) mostra a dependência de  $\eta$  em relação a  $\eta_a$  (eficiência do pino ou aleta). Deste modo, constata-se a influência do Número de Reynolds ( $Re$ ) na eficiência  $\eta$  através dos parâmetros  $C_1$  e  $C_2$  para pinos e aletas, respectivamente. Assim, conclui-se que, fixados a geometria e o material, o Número de Reynolds é, em última análise, o único parâmetro independente.

**Região Anular com a Superfície Interna Pinada.** A Figura 4 apresenta esquematicamente a geometria em análise.

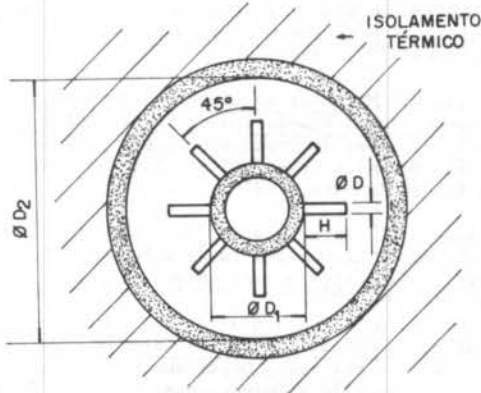


Fig. 4 Região Anular pinada

Os valores dos adimensionais que definem a geometria do problema são:  $D/H = 0,5$ ,  $(D_2 - D_1)/H = 0,858$  e  $D_1/H = 3,428$ . Ressalta-se, ainda, que existem oito pinos por seção e que os pinos pertencentes a duas fileiras sucessivas são posicionados de forma defasada, formando triângulos isósceles. O passo longitudinal,  $p$ , que é equivalente a altura do triângulo isósceles, é dado pela relação  $p/H = 1,299$ .

Para este caso, a integração das equações (11) e (24) fornece:

$$\eta_a = \frac{1}{\sqrt{C_1} (1 + D/4H)} \cdot \frac{1 + (D/4H)\sqrt{C_1} - e^{-2\sqrt{C_1}} (1 - (D/4H)\sqrt{C_1})}{1 + (D/4H)\sqrt{C_1} + e^{-2\sqrt{C_1}} (1 - (D/4H)\sqrt{C_1})}, \quad (25)$$

onde  $C_1$  é dado pela equação (12). Uma vez obtido  $\eta_a$ , pode-se determinar a eficiência da região,  $\eta$ , através da equação (4). Observa-se que, fixados as relações geométricas fornecidas anteriormente, a relação  $A_a/A_t$  da equação (12) é constante, independentemente do comprimento do ca-

nal. Deste modo, para o presente caso,  $A_a/A_t = 0,530$ .

Nieckele [5], em trabalho experimental, fornece o Número de Nusselt médio em função do Número de Reynolds na faixa de 10.000 a 82.000, para a geometria anteriormente especificada. Conforme sugerido em [6], com o objetivo de generalizar-se os resultados para vários fluidos, uma vez que os experimentos de Nieckele foram realizados com ar, o Número de Nusselt é dividido pelo fator  $Pr^{0,4}$ , onde  $Pr$  é o Número de Prandtl. Desse modo,

$$Nu/Pr^{0,4} = 0,121 Re^{0,717}, \quad (26)$$

onde  $Re$  é o Número de Reynolds baseado no diâmetro hidráulico,  $D_h$ , da região anular lisa, ou seja,  $D_h = D_2 - D_1$ . Assim,

$$Re = \frac{4\dot{m} D_h}{\pi(D_2 - D_1)\mu} = \frac{4\dot{m}}{\pi(D_2 + D_1)\mu}, \quad (27)$$

sendo  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido.

A equação (26) é válida para escoamento desenvolvido e a superfície primária sendo isotérmica ( $T_w = \text{constante}$ ).

**Duto Triangular Equilateral Pinado.** A Figura 5 mostra de modo esquemático a geometria em estudo.

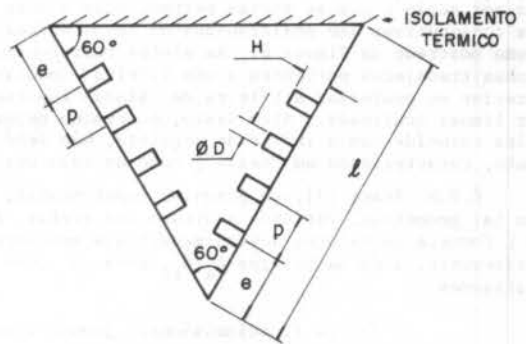


Fig. 5 Duto triangular equilátero pinado

Os adimensionais que definem a geometria do problema são:  $D/H = 0,5$ ,  $e/H = 2$ ,  $p/H = 1,5$  e  $\ell/H = 9,25$ . Observa-se, ainda, que existem oito pinos por seção e que os pinos pertencentes a duas fileiras sucessivas são posicionados de forma defasada, formando triângulos equiláteros.

De forma semelhante à região anular pinada, a eficiência  $\eta$  é dada pela expressão (25), enquanto a relação  $A_a/A_t = 0,386$ .

S.L. Braga [7] obteve experimentalmente o Número de Nusselt médio também em função do Número de Reynolds, para a geometria triangular pinada especificada anteriormente. Generalizando-se a expressão sugerida pelo autor para outros fluidos, além do ar, através do fator  $Pr^{0,4}$ , obtém-se:

$$Nu/Pr^{0,4} = 0,025 Re^{0,874} \quad (28)$$

A relação (28) é válida para escoamento desenvolvido, com  $T_w$  constante e para a faixa de Reynolds ( $Re$ ) compreendida entre 5.000 e 35.000, sendo que

$$Re = (\dot{m} D_h) / (A_s \mu) \quad (29)$$

onde  $D_h$  e  $A_s$  são, respectivamente, o diâmetro hidráulico e a área de escoamento da seção triangular lisa (sem os pinos):

$$D_h = \frac{\text{sen}(2\alpha)}{1 + \text{sen}\alpha} \ell = 0,577 \ell, \quad 2\alpha = 60^\circ, \quad (30)$$

$$A_s = \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha \cdot r^2 = 0,4332r^2 \quad (31)$$

Região Anular com a Superfície Interna Aletada. A Figura 6 mostra de forma esquemática a geometria analisada.

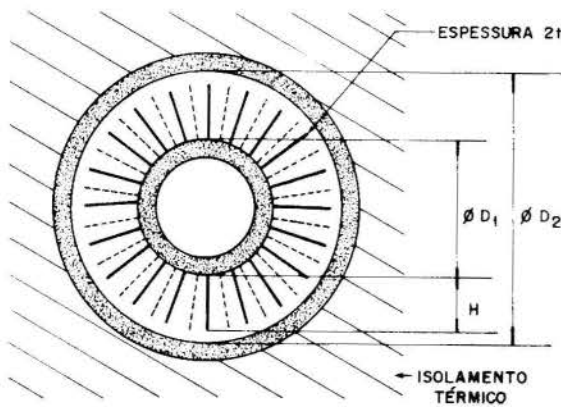


Fig. 6 Região anular aletada

Os adimensionamentos que definem geometricamente o problema são  $2t/H$ ,  $\ell/H$  ( $\ell$  é o comprimento de cada aleta),  $(D_2 - D_1)/H$  e  $D_1/H$ . Ressalta-se, ainda, que existem 20 aletas por seção e que as aletas pertencentes a duas fileiras consecutivas são posicionadas de forma defasada, com o formato mostrado na Figura 6. As aletas representadas por linhas tracejadas pertencem a uma fileira imediatamente anterior ou posterior à fileira de aletas representadas por linhas contínuas. Além disto, o término de uma fileira coincide com o início da seguinte, não sendo, portanto, caracterizado um "passo", como no caso dos pinos.

C.V.M. Braga [3], em pesquisa experimental, analisou tal geometria, variando a altura das aletas. A Tabela 1 fornece os valores dos adimensionais mencionados anteriormente, além da relação  $A_a/A_t$ , para os dois casos analisados.

Tabela 1. Adimensionais geométricos

PARÂMETRO	ALETAS BAIXAS	ALETAS ALTAS
$2t/H$	0,220	0,110
$\ell/H$	4	2
$(D_2 - D_1)/H$	5,080	2,540
$D_1/H$	5,080	2,540
$A_a/A_t$	0,801	0,885

A integração das equações (18) e (24) possibilitou a representação analítica das eficiências das aletas [3], através do ajuste de polinômios do 2º grau em  $C_2$ , pelo método dos mínimos quadrados, com desvio médio inferior a 0,1%. Assim, respectivamente para as aletas baixas e altas, tem-se:

$$\eta_a = 0,999 - 0,353 C_2 + 0,095 C_2^2 \quad (0,05 \leq C_2 \leq 1) \quad (32)$$

$$\eta_a = 1,016 - 0,365 C_2 + 0,098 C_2^2 \quad (0,05 \leq C_2 \leq 1) \quad (33)$$

Finalmente, em [3], encontra-se o Nusselt médio, para escoamento desenvolvido e  $T$  constante referentes às regiões anulares especificadas, como função do Reynolds definido pela equação (27). Deste modo, para as seções com aletas baixas e altas respectivamente, tem-se:

$$\text{Nu}/\text{Pr}^{0,4} = 0,008 \text{Re}^{0,851} \quad (34)$$

$$\text{Nu}/\text{Pr}^{0,4} = 0,006 \text{Re}^{0,947} \quad (35)$$

As faixas de Reynolds das equações (34) e (35) são, respectivamente, 10.000 a 50.000 e 10.000 a 30.000.

#### COMENTÁRIOS FINAIS

Mostrou-se, no presente trabalho, que o desempenho térmico de regiões aletadas é caracterizado primordialmente pela eficiência e Número de Nusselt médio da região. Assim, fixada a geometria e o Número de Reynolds, determina-se, imediatamente, o Nusselt médio (equação 26, 28, 34 ou 35) e, conforme o caso (pinos ou aletas), o parâmetro  $C_1$  ou  $C_2$  (equação 12 ou 19). Com o valor deste parâmetro, pode-se determinar  $\eta_a$  através das equações (25), (32) ou (33), de acordo com o tipo de geometria. Finalmente, a eficiência da região ( $\eta$ ) é obtida pela expressão (4). Poder-se-ia, ainda, obter o valor de  $\eta^*$ , definido pelo 2º Método de Análise (equação 10 ou Figura 2). Ressalta-se que todos os resultados apresentados são aplicáveis a famílias de regiões geometricamente semelhantes, caracterizadas pelos parâmetros (geométricos) adimensionais definidos para os vários casos, apresentados no presente trabalho. Finalmente, deve-se observar que os números de Nusselt, dados pelas equações (26), (28), (34) e (35), foram obtidos experimentalmente para regiões com  $\eta=1$ . Assim, eles dependem apenas do Número de Reynolds, não dependendo do material da aleta.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Kreith, F., Principles of Heat Transfer, Intext Educational Publishers, New York, 1973.
- [2] Sparrow, E.M. e Ramsey, J.W., Heat Transfer and Pressure Drop for a Staggered Wall-Attached Array of Cylinders with Tip Clearance, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 21, nº 11, pp. 1369-1377, 1978.
- [3] Braga, C.V.M., Análise Teórico-Experimental do Desempenho Termo-Hidráulico de Seções Anulares Lisas e Aletadas, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1987.
- [4] Rosman, E.C., Carajilescov, P. e Saboya, F.E.M., Performance of One-and Two-Row Tube and Plate Fin Heat Exchangers, Journal of Heat Transfer, vol. 106, pp. 623-632, 1984.
- [5] Nieckele, A.O., Determinação dos Coeficientes de Transporte em um Trocador de Calor Bi-Tubular Pinado, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1981.
- [6] Patankar, S.V., Ivanovic, M. e Sparrow, E.M., Analysis of Turbulent Flow and Heat Transfer in Internally Finned Tubes and Annuli, Journal of Heat Transfer, vol. 101, pp. 29-37, 1979.
- [7] Braga, S.L., Coeficientes de Transporte em Dutos Triangulares Lisos e Pinados, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1985-

#### ABSTRACT

The present work is concerned with the thermal performance of finned surfaces in turbulent flow. It is shown that such performance depends mainly on the Nusselt number and on the efficiency of the region. These parameters are functions of the Reynolds number of the flow and the geometry of the problem. In order to illustrate the method, several examples are given.

**TEORIA DA CAMADA LIMITE**

ON THE PREDICTION OF THE BEHAVIOR OF THE VELOCITY, TEMPERATURE  
AND HUMIDITY FIELDS ABOVE A THERMALLY STRATIFIED AIR-WATER  
INTERFACE

YANNIS A. PAPADIMITRAKIS

NASA - GODDARD SPACE FLIGHT CENTER

Code 671, Greenbelt, MD 20771



ARTIGO NÃO DISPONÍVEL



AIRFOIL BOUNDARY LAYER INDUCED BY TURBULENT PLANE JET



CARLOS ALBERTO FIALHO THOMPSON LEITE  
 JOSÉ CARLOS ALBANO DO AMARANTE  
 IVANDO JUNQUEIRA JUNIOR  
 Instituto Militar de Engenharia, RJ

ABSTRACT

The turbulent viscous action of an incompressible plane jet on a NACA 0012 airfoil is studied numerically and experimentally. An open-circuit low-velocity wind tunnel has been used to obtain the flow data. The experimental conditions are Reynolds number, based on the airfoil chord,  $1.2 \cdot 10^5$  and zero degree angle of attack. As the free jet is turbulent, the established boundary layer starts turbulent from the airfoil leading edge. Local and integral characteristic parameters of the turbulent boundary layer are obtained both experimentally and numerically.

INTRODUCTION

Turbulence is a phenomenon largely observed on flows around airfoils, wings, airplanes and missiles and its study is of great concern to Aerodynamics. The fundamental nature of such flows is related both to the free-stream characteristics and to the viscous effects of the fluid on the vehicle solid surface.

Although being very important and subjected to an increasing amount of research, the turbulence remains a scarcely known phenomenon. Specifically, Hussain and Reynolds [1], Hussain and Thompson [2], Thompson [3], Mattingly and Criminale [4], Lato [5] and Pistono [6] have dedicated special attention to plane jet turbulence, whose main characteristic is the flux variation along the longitudinal axis. The velocity difference between the flowing fluid and the surrounding stationary fluid induces a vortical motion, responsible for mass injection of stationary fluid in the main stream.

The continuation of studies lead to an experimental investigation of the turbulent viscous action of an incompressible plane jet on a NACA 0012 airfoil and the development of a computational code for numerical corroboration of the experimental data of turbulent boundary layers (Junqueira[7]).

BASIC EQUATIONS

The turbulence, either on the plane jet or on the airfoil boundary layer, is considered isotropic and on its theoretical treatment is used the phenomenological approach, based on a formulation that, despite being empirical and original of the seventies, is still largely employed [8]. The phenomenological approach relates the fluctuating terms with the mean velocity in order to reduce the number of unknowns and to solve the partial differential equations governing the turbulent flow.

The governing equations for a steady, incompressible, plane and turbulent boundary layer around an airfoil on a plane turbulent jet with mean velocity  $\bar{u}_e(x)$  are [7]:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left(1 + \frac{r_m}{v}\right) f_{\eta\eta} \right] + (\gamma+1) f f_{\eta\eta} + 2\gamma(1-f_\eta^2) = 2x \left( f_\eta f_{\eta x} - f_x f_{\eta\eta} \right) \tag{1}$$

where

$$\eta = y \sqrt{\frac{\bar{u}_e}{2vx}} \tag{2}$$

the quantity  $\gamma$  is a nondimensional parameter of pressure gradient defined by

$$\gamma = \frac{x}{\bar{u}_e} \frac{d\bar{u}_e}{dx} \tag{3}$$

and  $\nu$  and  $\epsilon_m$  are the dynamic and apparent viscosity respectively. The Cebeci-Smith [9] mixing length model has been employed.  $f(x,\eta)$  is related to a function that satisfies implicitly the continuity equation through the following expression:

$$f(x,\eta) = \psi(x,\eta) / \sqrt{2vx\bar{u}_e} \tag{4}$$

The boundary conditions are:

at the wall -  $f(x,0) = 0$  (5a)

$$f_\eta(x,0) = 0 \tag{5b}$$

at the edge -  $f_\eta(x,\eta_e) = \bar{u}_e(x)$  (5c)

The variables are nondimensionalized with respect to the airfoil chord,  $c$ , and the mean exit velocity of the free jet,  $\bar{u}_\infty$ .

NUMERICAL MODEL

The selected numerical procedure is the Box Method which was developed by Keller [10] and used by Keller and Cebeci [11], Cebeci and Bradshaw [12] and Amarante [13].

This numerical method is implicit, unconditionally stable and second-order accurate. Basically, the idea is to write the governing equation (7) in a form of a first-order system:

$$f_\eta = t \tag{6a}$$

$$t_\eta = g \tag{6b}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left(1 + \frac{r_m}{v}\right) \right] + (\gamma+1)fg + 2\gamma(1-t^2) = 2x \left( t t_x - f_x g \right) \tag{6c}$$

with the resulting system and on arbitrary

rectangular net (figure 1), simple centered-difference quotients are used and averages are taken at the midpoints of net segments or net rectangles, as required.

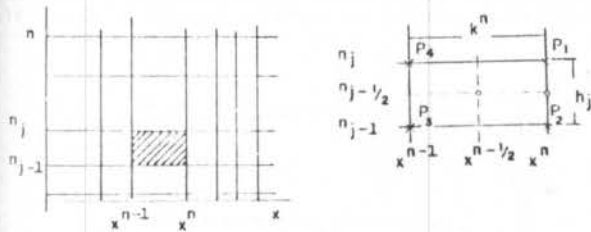


Figure 1. Arbitrary rectangular net of integration.

The equations (6a) and (6b) are to be "centered about  $(x^n, n_{j-1/2})$ " since they do not involve  $x$ -derivatives:

$$h_j^{-1} (f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (t_j^n + t_{j-1}^n) = t_{j-1/2}^n \quad (7a)$$

$$h_j^{-1} (t_j^n - t_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (g_j^n + g_{j-1}^n) = g_{j-1/2}^n \quad (7b)$$

on the other hand, the equation (6c) is to be "centered about  $(x^{n-1/2}, n_{j-1/2})$ ":

$$h_j^{-1} [(bg)_j^n - (bg)_{j-1}^n] + \alpha_1 (fg)_{j-1/2}^n - \alpha_2 (t^2)_{j-1/2}^n + \alpha (g_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n) + 2\gamma^n = R_{j-1/2}^{n-1} \quad (7c)$$

where

$$b = 1 + \frac{\epsilon_m}{v}, \quad \alpha = \frac{2x^{n-1/2}}{k^n} \quad (8), (9)$$

$$\alpha_1 = \gamma^n + 1 + \alpha, \quad \alpha_2 = 2\gamma^n + \alpha \quad (10), (11)$$

$$R_{j-1/2}^{n-1} = -\{h_j^{-1} [(bg)_j^{n-1} - (bg)_{j-1}^{n-1}] + (1 + \gamma^{n-1})(fg)_{j-1/2}^{n-1} + 2\gamma^{n-1} [1 - (t^2)_{j-1/2}^{n-1}] + \alpha [(fg)_{j-1/2}^{n-1} - (t^2)_{j-1/2}^{n-1}]\} \quad (12)$$

The boundary conditions at  $x^n$  are:

$$f_0^n = 0, \quad t_0^n = 0 \quad \text{and} \quad t_J^n = 1 \quad (13a-c)$$

An implicit nonlinear algebraic system of  $3J+3$  equations in as many unknowns as  $(f_j^n, t_j^n, g_j^n)$  is obtained from the equations (7) subjected to boundary conditions (13). This system is very effectively solved first through linearization, by using Newton's method, and then by using the block-elimination method on the resulting set of equations [13].

#### EXPERIMENTAL APPARATUS

An open-circuit low-velocity wind tunnel, whose air ejection opening measures 110mm x 740mm, has been used to obtain flow data around a NACA 0012 airfoil. The tunnel dimensions are shown in figure 2. The opening is vertical and is located in a central position between the floor and the ceiling of the laboratory. The air ejection is done to the laboratory interior that occupies a volume of 16m x 8m x 3m.

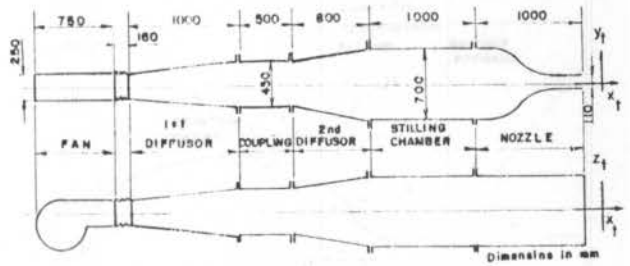


Figure 2. Dimensional Scheme of the Wind Tunnel.

The tunnel is made by independent modules - diffusers, stabilization chamber, nozzle - that can be joined differently, giving to the device an additional versatility. All internal surfaces of the tunnel are resealed by smooth and polished Formica two millimeters thick. In the modules unions, thick rubber liners are used to dampen the vibrations from the tunnel motor.

A constriction of the suction section of a centrifugal fan controls the air flux, providing seven different flow velocities. The fan rotor, with an external diameter 500mm wide, is driven by a GE electric motor of 5cv and 3530 rpm.

The NACA 0012 airfoil has a chord of 152.4mm, a maximum thickness of 18mm and a wingspan of 450mm. It was positioned on the test section as shown in figure 3. The mean and fluctuation velocities were measured with a platinum-coated tungsten hotwire with a diameter of 0.0005mm, a length of 5mm and an overheating of 0.4.

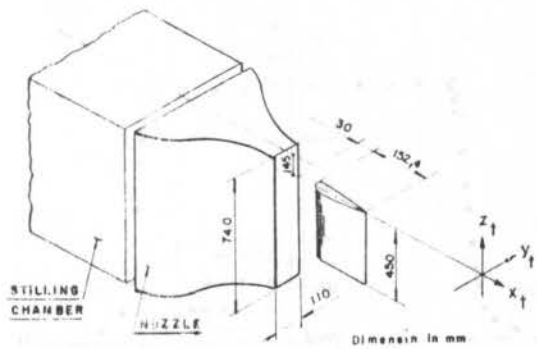


Figure 3. Airfoil Positioning.

The experimental data were obtained on the airfoil plane of symmetry. The boundary-layer mean velocity profile and free-stream mean velocity were measured at stations 6 to 13 (figure 4). On the other hand, only the free-stream mean velocity was obtained at stations 1 to 5, since at those points the boundary-layer thickness is too small and comparable to the hotwire diameter.

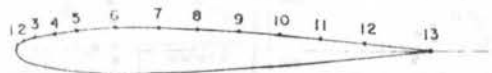


Figure 4. NACA 0012 Profile - Measuring Stations.

Figure 5 shows the data collection scheme. A DISA 55M01 constant temperature anemometer (CTA) is used for processing the hotwire output. The CTA output is linearized through the DISA 55M25 device. The mean voltage and RMS were read by means of a digital voltmeter DISA 55D31 and voltmeter DISA 55D3J, respectively. The

hotwire probe is DISA 55420 with its respective support.

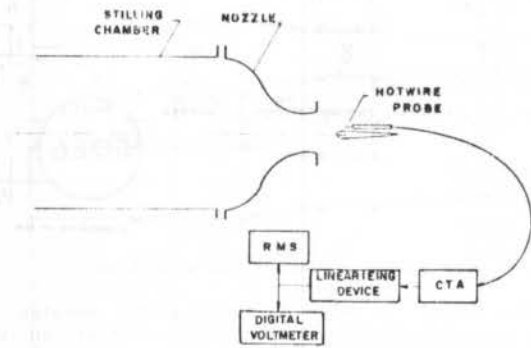


Figure 5. Data Collection Scheme.

**RESULTS**

The experimental conditions are Reynolds number, based on the airfoil chord,  $1.2 \times 10^5$  and zero degree angle of attack. The free-stream uniformity around the body is experimentally [14] verified, as shown in figure 6 and based on the fact that the airfoil trailing edge position is only 1.65 times the opening height. The turbulence level on the free two-dimensional jet varies from 4% on the proximities of the leading edge to 13% on the vicinities of the trailing edge (figure 7).

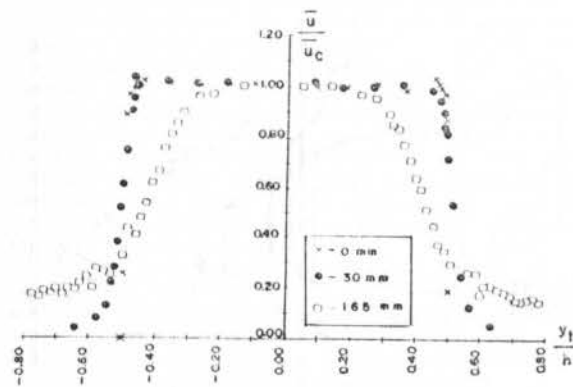


Figure 6. Mean Velocity Distribution without airfoil at: test section, 30mm and 165mm away from the test section.

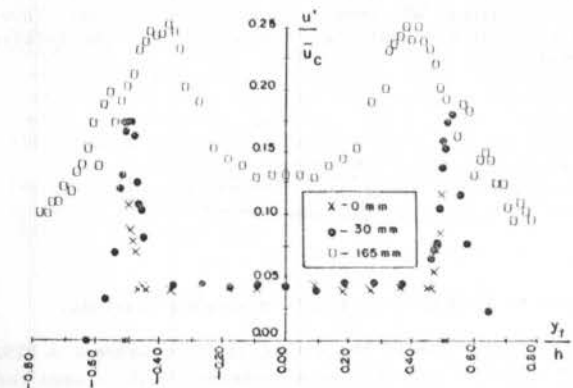


Figure 7. Fluctuating Velocity Distribution without airfoil at: test section, 30mm and 165mm away from the test section.

The mean velocity distribution of the free stream around the airfoil is obtained experimentally - figure 8 - and is used as a boundary condition for the numerical solution of the turbulent boundary layer. The experimental and numerical profiles of the boundary-layer mean velocity are shown on figures 9, 10 and 11.

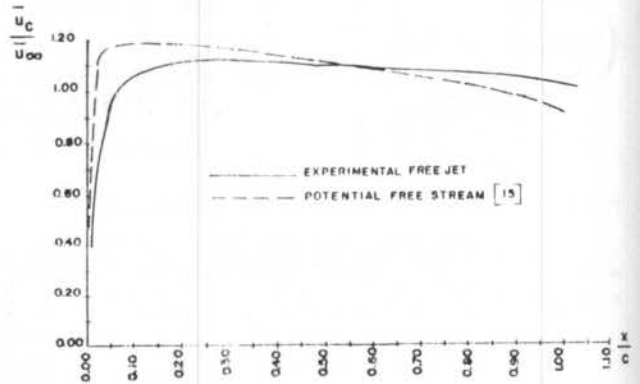


Figure 8. Mean external velocity distribution around a NACA 0012 Airfoil at zero degree angle of attack.

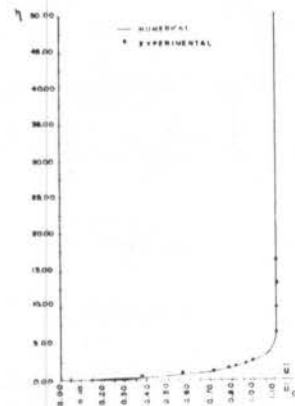


Figure 9. Boundary-layer mean velocity profile at station 6.

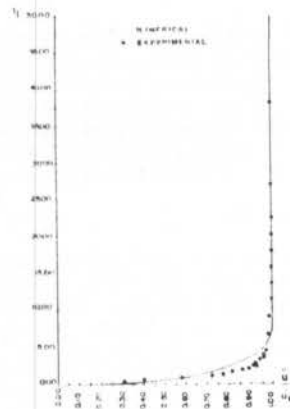


Figure 10. Boundary-layer mean velocity profile at station 9.

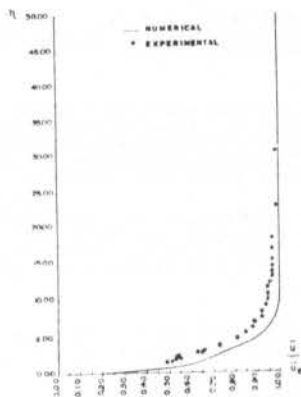


Figure 11. Boundary-layer mean velocity profile at station 13.

The experimental mean velocity profile on the five first stations were not accessible with the available hotwire device. On the other hand, the initialization of the numerical turbulent boundary layer with a mean velocity profile from the  $1/7$  th-power law can not be performed because the mean velocity does not exist at  $x=0$ . The solution is to initialize the integration with the Hiemenz stagnation laminar profile and to promote artificially the transition to turbulent boundary layer on the next station. However, such procedure only produces good results on positions away from the leading edge.

Local and integral characteristic parameters of the turbulent boundary layer are obtained both experimentally and numerically: skin friction coefficient (figure 12), vorticity thickness (figure 13), displacement thickness (figure 14) and momentum thickness (figure 15).

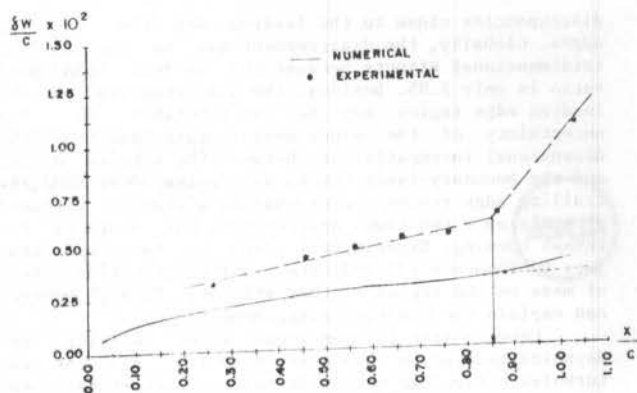


Figure 13. Vorticity Thickness.

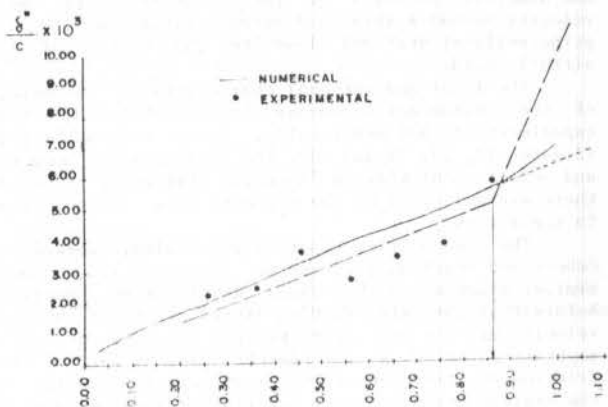


Figure 14. Displacement Thickness.

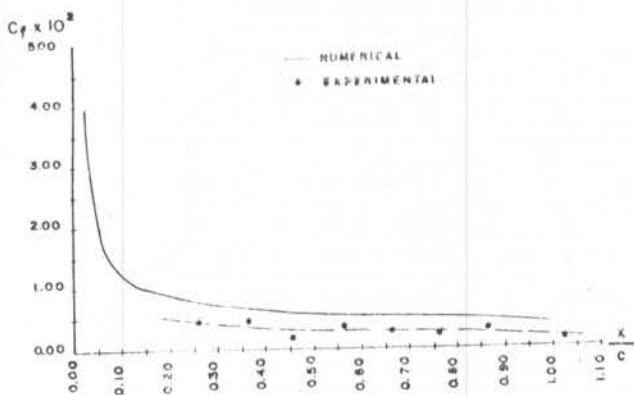


Figure 12. Skin Friction Coefficient.

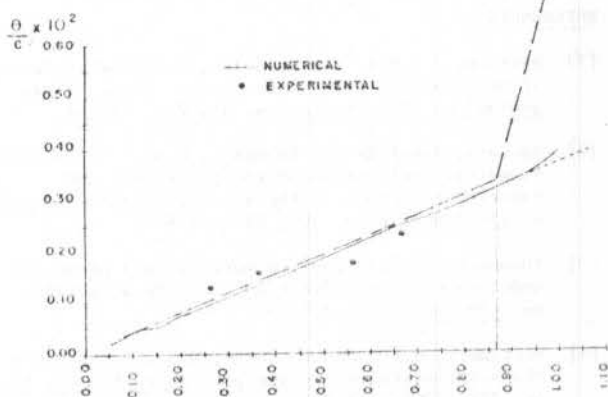


Figure 15. Momentum Thickness.

#### CONCLUSION

As the free jet is turbulent, the established boundary layer starts turbulent from the airfoil leading edge, although being the Reynolds number only  $1.2 \times 10^5$ . The numerical difficulty associated with a turbulent initialization imposes an artificial laminar initial profile. Consequently, the numerical solution only produces good results on stations away from the leading edge.

The comparison between the experimental mean external velocity distribution around the airfoil and the potential distribution [15] (figure 8) shows

discrepancies close to the leading and the trailing edges. Globally, the disagreement may be due to flow tridimensional effects because the airfoil span/chord ratio is only 2.95. Besides, the discrepancies on the leading edge region may be attributable to the uncertainty of the experimental data due to the dimensional incompatibility between the hotwire device and the boundary-layer thickness. On the other hand, the trailing edge region corresponds to a station situated at a distance two times greater than the width of the tunnel opening. Experimental data on two-dimensional jets by Thompson [3] indicate a strong injection rate of mass on the region of that station. This phenomenon can explain the observed disagreement.

Cebeci-Smith [9] numerical model relating the Reynolds tension to the mean velocity gradient for turbulente flows is not universal. However, it has shown to be adequate to predict the mean velocity profiles around the NACA 0012 airfoil for a Reynolds number of 1.2 E05 and zero degree angle of attack. The experimental and numerical profiles of the boundary-layer mean velocity reveal a very good agreement (figures 9, 10, 11), principally at stations close to the center of the airfoil chord.

The local and integral characteristic parameters of the turbulent boundary layer obtained, both experimentally and numerically, agree reasonably well (figures 12, 13, 14 and 15). The displacement, momentum and velocity thicknesses suggest that after  $x/c=0.86$  there are evidences of the begining of a region close to separation.

The Simpson [16] separation problem, worked by Cebeci and Bradshaw [12] and by Junqueira [7], shows similar symptoms on the above displacements profiles before that the skin friction distribution and the mean velocity profile have characterized the begining of a separation region. In the present case, as for the skin friction distribution and the mean velocity profile on the station nearest of the trailing edge there are no signs of separated flow, one can infer that the foreseeable separation region is the wake flow, to where the boundary-layer vorticity is transported by convection.

#### REFERENCES

- [1] Hussain, A.K.M.F. and Reynolds, W.C., The mechanics of an organized wave in turbulent shekar flow. Journal of Fluid Mechanics, 41, 241 (1970).
- [2] Hussain, A.K.M.F. and Thompson, C.A., Controlled symmetric pertubation on the plane jet: an experimental study in the initial region. Journal of Fluid Mechanics, 100, 397 (1980).
- [3] Thompson, C.A., Organized motions in a plane jet under controlled excitation. Tese de Doutorado, Houston University (1975).
- [4] Mattingly, G.E. and Criminale, W.O., Disturbance characteristics in a plane jet. Phys. Fluids, 14, pp. 2258-2264 (1971).
- [5] Lato, 4., The stability and transmission of a two dimensional jet. Journal of Fluid Mechanics, 7, 53 (1960).
- [6] Pistono, M.H., Estudo de turbulência em jato plano perturbado. Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia (1982).
- [7] Junqueira Junior, I., Análise numérica e experimental e camada limite turbulenta. Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia (1987).
- [8] Bradshaw, P., Cebeci, T. and Whitelaw, J.H., Engineering calculation methods for turbulent flow, Academic Press Inc. (1981).

- [9] Cebeci, T. and Smith, A.M.O., Analysis of turbulente boundary layers. Academic Press Inc. (1974).
- [10] Keller, H.B., A new difference scheme for parabolic problems, Numerical solutions of partial differential equations, II. J. Bramble (ed.), Academic Press Inc. (1970).
- [11] Keller, H.B. and Cebeci, T., Accurate numerical methods for boundary-layer flows-II, two-dimensional turbulent flows. AIAA Journal, 10, 1193 (1972).
- [12] Cebeci, T. and Bradshaw, P., Momentum Transfer in boundary layers. McGraw-Hill Book Company Inc. (1977).
- [13] Amarante, J.C.A, Viscous-inviscid interactions in laminar flows near separation regions and corners PhD Dissertation, Stanford University (1979).
- [14] Costa Filho, F.S., Os números de Strouhad e Reynolds e suas influências no jato plano. Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia (1985).
- [15] Abbott, I.H. and Doenhoff, A.E., Theory of wing jectons. Dover Publications Inc. (1959).
- [16] Simpson, R.L., Chew, Y.T. and Shivaprasad, B.G., The structure of a separating turbulent boundary layer. Journal of Fluid Mechanics, 113, 23 (1981).





ON THE MATCHING CONDITIONS FOR TURBULENT  
BOUNDARY LAYER PROBLEMS WITH HEAT TRANSFER

ATILIA P. SILVA FREIRE and MIGUEL H. HIRATA  
Laboratório de Mecânica dos Fluidos /Aerodinâmica  
Programa de Engenharia Mecânica - COPPE/UF RJ  
C.P. 68503 - Rio de Janeiro - RJ - 21.945

SUMMARY

The objective of the paper is to show how a particular type of perturbative method, the intermediate variable method, can be used to develop approximate solutions to problems of turbulent boundary layers with heat transfer. The main feature of the solution is that they are associated to domains of validity which are expressed as a function of the Reynolds number, of the Prandtl number and of a reference velocity, the friction velocity. The classical logarithmic laws for the velocity profile and for the temperature profile are derived from the intermediate equations. It is shown that the domains referred to the defect layers are always coupled whereas the domains referred to the wall layers might be uncoupled depending on the order of magnitude of the Prandtl number.

INTRODUCTION

It is only natural to expect that, to this date, theoretical solutions for basic turbulent boundary layer problems with heat transfer should be available in the literature. Unfortunately, this is not the case if such simple effects as compressibility and mass injection are taken into consideration. As a matter of fact, the compressible problem presents a formidable challenge even for the impermeable surface case. To get a good qualitative and quantitative knowledge of this phenomenon is, however, very important due to the large number of practical applications it has. In fact, it is well known that turbulence enhances heat transfer and so the majority of the industrial processes which involve forced convection occur in this regime.

To understand this phenomenon, several experimental and theoretical techniques have been devised. In particular, perturbation methods have been very helpful in finding approximate solutions and in identifying the relevant parameters to the problem. The incompressible problem without heat transfer and mass injection was studied by Mellor [1] and Bush e Fendell [2] using the method of matched asymptotic expansions. The underlying idea is that there are different layers, the defect layer and the wall layer, whose properties can be described by their respective length scales. Afzal [3] attempted to extend this theory to the compressible case, however, he ran into difficulties, in performing the matching of the defect layer solution and of the wall layer solution. One of the present authors [4] then used the intermediate variable technique [5,6] and the matched asymptotic expansions method to show how adequate corrections could make the matching feasible.

The objective of the present work is to study the problem of a two-dimensional, incompressible, turbulent boundary layer flowing over a surface with heat transfer employing the intermediate variable technique [5,6]. To these authors knowledge, this is the first time such an approach is used. This technique uses the concept of intermediate limit to obtain sets of approximate equations to the governing equations, which are uniformly valid in different parts of the domain. Thus approximate solutions are associated to domains of validity. This makes the determination of the overlap domains straightforward.

The analysis of the present problem is a necessary first step towards the analysis of problems involving compressibility and mass injection, which constitute the main target of these authors. In fact, we hope that the solution of this problem together with the solutions presented in references [4,7] can be combined so that a solution for the problem with heat

transfer and mass injection is obtained.

THE EQUATIONS OF MOTION

The time-averaged equations of motion for a two-dimensional, turbulent, steady flow can be written as

a) Continuity equations:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

b) Navier-Stokes equations:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\overline{u'v'} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\overline{u'^2} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\overline{v'^2} + \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\overline{u'v'} + \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] \quad (3)$$

c) Energy equations:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\overline{v't'} + \alpha \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\overline{u't'} + \alpha \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \right]$$

In the above equations the notation is classical, thus the bars denote time-averaged quantities whereas the superscripts denote turbulent fluctuations.

The mean variables in the above equations will be non-dimensionalized based on properties evaluated at external flow conditions. The fluctuations are referred to the friction velocity,  $u_\tau$ , and to a characteristic temperature,  $t_\tau$ , defined as

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad (5)$$

$$\text{and } t_\tau = \frac{q}{\rho c_p u_\tau} \quad (6)$$

where  $\tau_w$  = shear stress at the wall  
 $\rho$  = density  
 $q$  = heat flux at the wall  
 $c_p$  = specific heat

Now, based on the results of Orlando et al [8], we conclude that the fluctuations  $u'$ ,  $v'$  and  $t'$  are all of the same order of magnitude, i.e., of the order of  $u_\tau$  and  $t_\tau$ . Hence we write

$$0 \left( \frac{u'}{u_\tau} \right) = 0 \left( \frac{t'}{t_\tau} \right) = 0(\epsilon) \quad (7)$$

With these results the non-dimensional equations become.

a) Continuity:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

b) Momentum:

$$u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \epsilon^2 \tau_{uv} + \epsilon^2 \hat{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \epsilon^2 \tau_{uu} + \epsilon^2 \hat{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (9)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \epsilon^2 \tau_{vv} + \epsilon^2 \hat{\epsilon} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \epsilon^2 \tau_{uv} + \epsilon^2 \hat{\epsilon} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (10)$$

c) Energy:

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \epsilon^2 \tau_{vt} + \epsilon^2 \hat{\epsilon} \frac{\partial t}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \epsilon^2 \tau_{ut} + \epsilon^2 \hat{\epsilon} \frac{\partial t}{\partial x} \right] \quad (11)$$

Here, correlations of the type  $-a'b'$  are denoted by  $\tau_{ab}$ . The singular perturbation parameters  $\epsilon$ ,  $\hat{\epsilon}$  and  $\tilde{\epsilon}$  are defined by

$$\epsilon = \frac{u_\tau}{u_\infty} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_\infty u_\infty}}, \quad \epsilon^2 \hat{\epsilon} = \frac{1}{R}, \quad \epsilon^2 \tilde{\epsilon} = \frac{1}{RPr} \quad (12)$$

where  $R(=u_\infty L/\nu)$  is the Reynolds number based on external flow conditions and  $Rr(=\mu/CpK)$  is the Prandtl number.

#### ANALYSIS OF THE DOMAIN OF VALIDITY OF APPROXIMATE SOLUTIONS

To find the approximate equations we apply the limit process  $\eta$ -limit [6] to equations (8-11). The  $\eta$ -limit of an equation  $E(x,y,\epsilon)$  is defined as

$$\lim_{\eta} E(x,y;\epsilon) = \lim E(x,\eta(E) \hat{y};\epsilon) \text{ as } \epsilon \rightarrow 0 \text{ with fixed } \hat{y} \quad (13)$$

where  $\hat{y}$  is the so-called intermediate variable and  $\eta(\epsilon)$  is an arbitrary function of  $\epsilon$ . Function  $\eta(\epsilon)$  is in fact a stretching function. The idea is to substitute  $y = \hat{y}\eta(\epsilon)$  into equations (8-11) and, assuming that  $\hat{y}$  and the derivatives are of order unity, study how an arbitrary change in the order of magnitude of  $\eta(\epsilon)$  affects the equations of motion.

Varying the  $\epsilon$ -class of  $\eta$  we then obtain the following formal limits [6] of Eq.(9):

$$\text{ord } \eta = 1: u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (14a)$$

$$\text{ord } \epsilon^2 < \text{ord } \eta < 1: u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (14b)$$

$$\text{ord } \eta = \text{ord } \epsilon^2: u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial y} \quad (14c)$$

$$\text{ord } \hat{\epsilon} < \text{ord } \eta < \text{ord } \epsilon^2: \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial y} = 0 \quad (14d)$$

$$\text{ord } \eta = \text{ord } \hat{\epsilon}: \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (14e)$$

$$\text{ord } \eta < \text{ord } \hat{\epsilon}: \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (14f)$$

The energy equation in its turn yields

$$\text{ord } \eta = 1: u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \quad (15a)$$

$$\text{ord } \epsilon^2 < \text{ord } \eta < 1: u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \quad (15b)$$

$$\text{ord } \eta = \text{ord } \epsilon^2: u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{vt}}{\partial y} \quad (15c)$$

$$\text{ord } \tilde{\epsilon} < \text{ord } \eta < \text{ord } \epsilon^2: \frac{\partial \tau_{vt}}{\partial y} = 0 \quad (15d)$$

$$\text{ord } \eta = \text{ord } \tilde{\epsilon}: \frac{\partial \tau_{vt}}{\partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (15e)$$

$$\text{ord } \eta < \text{ord } \tilde{\epsilon}: \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (15f)$$

The continuity and y-momentum equations do not provide any relevant information concerning the domains of validity. For instance, the y-momentum equation whatever is the order of  $\eta$ , yields

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

Now, according to the definition of formal domain of validity of an equation [Lagerstrom and Casten, 5] we say that the domains of validity of Eq.(14c) and of Eq.(14e) are respectively:

$$D_{om} = \left\{ \eta / \text{ord } \hat{\epsilon} < \text{ord } \eta < 1 \right\} \quad (17)$$

$$\text{and } D_{im} = \left\{ \eta / \text{ord } \eta < \text{ord } \epsilon^2 \right\} \quad (18)$$

Thus the definition of formal domain of validity of an equation implies that Eq.(14c) contains Eqs.(14a) (14b) and (14d) whereas Eq.(14e) contains Eqs.(14d) and (14f). The two Eqs.(14c) and (14e), are the two important ones. Indeed, they govern the motion of the fluid in the defect layer, (14c), and in the wall layer, (14e).

Sets (17) and (18) together with Kaplun's [6] matching principle, yield that the overlap region is given by

$$D_{cm} = D_{om} \cap D_{im} = \left\{ \eta / \text{ord } \hat{\epsilon} < \text{ord } \eta < \text{ord } \epsilon^2 \right\} \quad (19)$$

This result implies that there is a region close to the wall where the Reynolds stress term is the dominating term in the x-momentum equation. Solution of Eq.(14d) together with the mixing-length theory and the hypothesis that the mixing-length is proportional to the distance of the wall gives

$$u = \epsilon \left( \frac{1}{K} \ln \hat{\eta} + \epsilon \right), \quad \epsilon = \text{Constant}, \quad (20)$$

the classical law of the wall.

Results (17) and (18) give a very interesting interpretation of the logarithmic region, Eq. (20), defined by set (19). Contrary to what is normally taught in fluid mechanics textbooks, the logarithmic region is not a region in its own right, but just a region where the defect layer and the wall layer overlap. Thus the wall layer and the defect layer solutions must behave in such a way that in region (19) they reduce to solution (20).

Of course, very close to the wall, in the region  $\eta \ll \hat{\epsilon}$ , one finds a linear solution. These two simple solutions, Eq.(20) and the linear solution, are obtained through the intermediate Eqs.(14d) and (14f), and hence do not have an overlapping region. This is very important because it is common practice in the literature to adopt these simple solutions and use some sort of physical argument to patch them in the region  $\text{ord } \eta = \text{ord } \hat{\epsilon}$ . Thus, our analysis shows that this process cannot be carried out in a smooth way.

A novelty of the present analysis is the derivation of the intermediate equations, which would have been omitted by classical perturbative methods. More

important though is the fact that all the approximate equations are associated to domains of validity. Thus, if the present solution is used in conjunction with some sort of numerical technique, the patching of adjacent regions is easily performed.

The same type of analysis applied to the energy equation yields that the domains of validity of Eqs. (15c) and (15e) are respectively

$$D_{oe} = \left\{ \eta / \text{ord } \hat{\epsilon} < \text{ord } \eta < \text{ord } (1) \right\} \quad (21)$$

$$\text{and } D_{ie} = \left\{ \eta / \text{ord } \eta < \text{ord } \epsilon^2 \right\} \quad (22)$$

so that, the overlap region is given by

$$D_{ce} = D_{oe} \cap D_{ie} = \left\{ \eta / \text{ord } \hat{\epsilon} < \text{ord } \eta < \text{ord } \epsilon^2 \right\} \quad (23)$$

An interesting result which arises from the above analysis is that the upper bounds of the overlap regions defined by sets (19) and (23), are always coupled. The coupling of the lower bounds however depends on the relative order of magnitude of parameters  $\hat{\epsilon}$  and  $\epsilon$ . For example, if  $\hat{\epsilon}$  and  $\epsilon$  have the same order of magnitude, i.e.,  $Pr$  is  $O(1)$ , these two domains are coupled, otherwise they are uncoupled.

Assuming now that heat and momentum are transferred by similar processes, so that a mixing-length proportional to the distance of the wall can be associated to the heat transfer process, it follows that the solution of Eq.(15d) is given by

$$t = \zeta \left( \frac{1}{K} \ln \hat{\eta} + D \right) \quad (24)$$

where  $\zeta = t_r / t_{co}$  and  $D$  is a constant. The above equation is the counterpart of the law of the wall for the problem with heat transfer.

The boundary layer thickness, defined as the region outside of which viscous effects can completely be neglected, and the wall layer thickness, defined as the region where only laminar stresses are important, are determined by an extension of the previous analysis to higher order approximations. In fact, we find that for the velocity profile the defect layer thickness is  $O(\hat{\epsilon})$ , whereas, the wall layer thickness is  $O(\hat{\epsilon}\epsilon)$ . For the temperature profile, we find that the defect layer thickness is  $O(\hat{\epsilon})$  whereas the wall layer thickness, where only conduction terms are important, is  $O(\hat{\epsilon}\epsilon)$ .

These results yield that for turbulent boundary layer flow, the defect layer thicknesses of the velocity profile and of the temperature profile are always coupled and of  $O(\hat{\epsilon})$ . A sufficient condition for this conclusion is obtained just by assuming that the velocity fluctuations and the temperature fluctuations are of the same order, i.e., of order  $\epsilon$ . The wall layers, however, are uncoupled depending on the relative orders of  $\hat{\epsilon}$  and of  $\epsilon$ . This situation is illustrated in the figure below.

The higher order analysis also reveals that, even for this case, the length of the overlap domains is maintained.

#### FINAL REMARKS

An extension of the above analysis to higher orders of magnitude shows that the second-order approx-

iminations for both the velocity profile and the temperature profile contain bilogarithmic terms [4]. The same is also true if fluid is injected into the boundary layer; however, in this case the bilogarithmic terms appear even in the first-order terms [7]. It can be easily shown that such injection of fluid does not change the three-deck structure of the boundary layer. For compressible flow the results are similar [4], that is, the domains of validity are the same as for incompressible flow and the solutions present logarithmic and bilogarithmic terms.

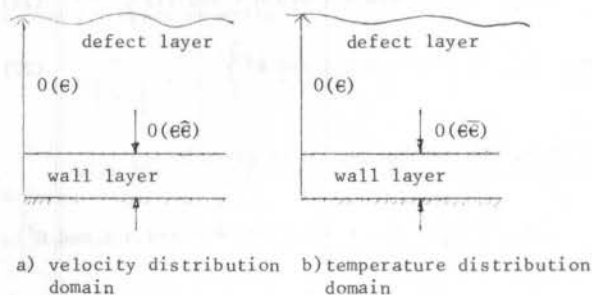


Figure 1. Comparison of domains of validity

#### REFERENCES

- [1] Mellor G.L.; The large Reynolds number asymptotic theory of turbulent boundary layers, Int.J.Engng Sci, vol.10, pp.851-873, 1972.
- [2] Bush, W.B. and Fendell F.; Asymptotic analysis of turbulent channel and boundary layer flow, JFM vol.56, pp. 657-681, 1972.
- [3] Afzal, N.; A higher order theory for compressible turbulent boundary layers at moderately large Reynolds number, JFM, vol.57, pp. 1-27, 1973.
- [4] Silva Freire A.P.; On the matching conditions for a two-deck compressible turbulent boundary layer model, to appear in ZAMM, 1988.
- [5] Lagerstrom P.A. and Casten R.G.; Basic concepts underlying singular perturbation techniques, SIAM Review, vol.14, pp. 63-120, 1972.
- [6] Silva Freire, A.P. and Hirata, M.H.; Approximate solutions to singular perturbation problems: the intermediate variable technique, to appear in J Math Analysis and Applications.
- [7] Silva Freire, A.P.; An asymptotic approach for transpired turbulent boundary layers, Int.J.Heat and Mass Transfer, vol. 31, 1988.
- [8] Orlando, A.F., Moffat, R.J. and Kays, W.M.; Turbulent transport of heat and momentum in a boundary layer subject to deceleration, suction, and wall temperature, Report N<sup>o</sup> HMT-17, Thermoscience Division, Stanford University, 1974.

ESTUDO PARAMÉTRICO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA  
EM FIOS E FIBRAS ADENTRANDO RESERVATÓRIO DE CALOR E MASSA




S. COLLE e S. PETERS  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Cx.P. 476 88049 Florianópolis SC

## RESUMO

Este estudo aborda o problema da transferência de calor e massa em fios embebidos de solução binária onde o fio tem velocidade uniforme na direção axial. A teoria de camada limite e a analogia de Chilton-Colburn são utilizadas para formular a solução do problema. O método de Kármán-Pohlhausen é empregado no cálculo da determinação da solução. A solução de camada limite é comparada com a solução obtida da analogia empregada. A influência da atividade da solução no comportamento da transferência de massa é avaliada comparando a solução líquida real com a solução ideal.

## INTRODUÇÃO

O processo de transferência de calor e massa em fios ocorre na produção industrial de fibras, na esmaltação de fios e no processo de limpeza de fios metálicos. Em geral, o fio entra em um reservatório de calor a uma temperatura maior ou menor que a temperatura do reservatório. O fluido do reservatório pode ser um gás ou um líquido. O conhecimento do processo industrial requer previamente o estudo paramétrico do processo por duas razões que são: a determinação do número de parâmetros que influenciam o processo e que devem ser considerados na experimentação ou no controle do processo e a influência destes parâmetros no processo de transferência de calor e massa.

Uma primeira análise do problema pode ser feita sem a necessidade da solução das equações, de camada limite, fazendo-se a hipótese da analogia de Chilton-Colburn. Neste trabalho, a solução das equações da energia e da transferência de massa no fio é denominada de solução (1). Uma segunda análise do problema pode ser feita fazendo-se a hipótese de camada-limite laminar e resolvendo estas equações pelo método de Kármán-Pohlhausen [1]. A solução neste caso será denominada de solução (2).

A transferência de massa em superfícies isotérmicas supondo-se a velocidade de transpiração nula (low mass transfer rate) é governada pela teoria de difusão clássica [2], considerando-se que a força motriz responsável pela transferência de massa é a diferença entre a pressão do vapor na superfície e a pressão parcial do vapor no meio exterior. No caso de soluções ideais ou muito diluídas, a pressão parcial do vapor na superfície de evaporação é igual a pressão de saturação do líquido que se evapora. No caso de soluções eletrolíticas ou orgânicas poliméricas as soluções se desviam largamente da Lei de Raoult e consequentemente este desvio pode influenciar o processo de transferência de massa. É um dos propósitos deste trabalho abordar esta questão formulando o problema de maneira a considerar também o efeito dos calores de mistura e diluição da solução líquida com a qual o fio está coberto. As teorias de soluções binárias eletrolíticas estão bastante desenvolvidas [3] enquanto que as teorias de soluções binárias e ternárias para polímeros apresentam resultados bastante promissores com os trabalhos de Flory & Huggins [4] e Prigogine-Flory [5].

A teoria de camada-limite tem sido utilizada na formulação de problemas de transferência de calor em fios metálicos e fibras. A solução do problema da transferência de calor em fios isotérmicos no ar foi apresentada por Karniś & Pechoč [6] utilizando o método de Kármán-Pohlhausen. Bourne & Dixon [7] resolveram o mesmo problema considerando a variação de temperatura no fio na direção axial, enquanto que Chida & Katto [8] re-

solveram esse problema para fios e fitas considerando e feitos bi-dimensionais de condução do calor. Em [8] são também relatados resultados experimentais obtidos por método de interferometria de Mach-zender para o caso de fita metálica, mostrando que a teoria de camada-limite e o método de solução de Kármán-Pohlhausen é adequado para a solução deste tipo de problema. O presente trabalho aborda o problema da transferência de calor e massa em fios metálicos utilizando solução análoga àquelas apresentadas em [6,7,8].

## EQUAÇÕES BÁSICAS

O problema em análise consiste de um fio circular de diâmetro  $d$  e temperatura  $T_0$  e velocidade uniforme  $V_f$  adentrando reservatório de calor e massa constituído de ar puro a  $T_a$ . Este fio é previamente embebido de solução orgânica que forma camada axissimétrica de espessura  $e$  ou de espessura  $e_{2f}$  de soluto após destilação completa, onde  $e_{2f} < e \ll d$ .

Seja  $x$  a coordenada axial e  $r$  a coordenada radial. Defina-se as variáveis adimensionais seguintes  $\xi = x/d$ ,  $\eta = r/d$ ,  $u = U/V_f$ ,  $v = V/V_f$  onde  $U$  e  $V$  são respectivamente as velocidades axial e radial na camada-limite do fio. Seja  $\theta = (T - T_a)/T_0$  a temperatura adimensional do ar,  $\theta_s = T_s/T_0$  a temperatura adimensional do fio e  $\theta_a = T_a/T_0$ .

As seguintes hipóteses são aqui admitidas

- (i) A termodinâmica da solução binária é regida pela teoria de Prigogine-Flory [5] e pelas equações de Bonner & Prausnitz [9].
- (ii) A difusão do solvente no líquido não interfere na difusão do vapor de solvente no ar.
- (iii) A temperatura do fio é uniforme ao longo da secção transversal e a condução de calor axial é desconsiderada.
- (iv) A temperatura da solução em cada ponto é igual a do fio, isto é, a resistência térmica da camada da solução é desconsiderada.
- (v) Admite-se que a transferência de massa é de baixa intensidade, isto é, a velocidade de transpiração é baixa.
- (vi) Na solução (1) admite-se a validade da analogia de Chilton-Colburn e a solução gasosa de solvente e ar é uma solução ideal.
- (vii) As propriedades físicas dos fluidos são independentes da temperatura.

As equações adimensionais básicas do problema para a solução (1) são as seguintes:

Equilíbrio Termodinâmico (Ref. [9,10]).

$$y_0 = a_1 (w_{10}, \theta_s, p) \frac{p_{1s}(\theta_s)}{p}$$

$$\exp \left[ \frac{b_{11}(\theta_s)}{\theta_s} \left( \frac{p_{1s}(\theta_s)}{p} - y_{10} \right) \right] \quad (1)$$



onde  $y_{10}$  é a fração molar do solvente (1) na interface solução líquida - vapor,  $a_1$  é a atividade do solvente (1) na solução,  $p$  é a pressão atmosférica,  $w_{10}$  é a fração mássica de solvente (1) na solução líquida,  $b_{11}(\theta_S)$  ( $= p B_{11}(T_S)/R T_0$ ) é o segundo coeficiente do virial adimensional para o solvente,  $R$  é a constante universal dos gases ideais.

Transporte de Massa do Fio para o Ar (Ref. [10]).

$$\frac{dw_{10}}{d\zeta} = - \frac{\Lambda_m^2 \text{Sh } y_{10} (1-w_{10})^2}{\theta_S (1-y_{10}) (1+y_{10} b_{11}(\theta_S)/\theta_S)} \quad (2)$$

onde  $\Lambda_m^2 = \pi_1/Pe_2$ ,  $\pi_1 = p D_{1a}^0/k_S T_0$ ,  $Pe_2 = e_{2f} V_f \bar{R}/v_{2f} k_S M_1$  sendo  $Pe_2$  número de Péclet baseado na solução,  $v_{2f}$  é o volume específico do soluto no fim da destilação,  $D_{1a}^0$  a difusividade do solvente (1) no ar,  $\text{Sh}$  é o número de Sherwood molar definido com base na concentração molar da mistura  $c (= (1+y_{10} b_{11}(\theta_S)/\theta_S) p/R T_0)$ , considerando-se a mistura como solução ideal.

Equação da Energia no Fio (Ref. [10]).

A equação da energia no fio, embebido na solução é desenvolvida fazendo uso do conceito de entalpia de mistura e tem a forma adimensional que segue

$$\left[ Pe_2 \left( \frac{1}{1-w_{10}} \frac{\partial \Delta \phi_{12}^m}{\partial \theta_S} + \frac{w_{10}}{1-w_{10}} c_{p1} + c_{p2} \right) + Pe_S \right] \frac{d\theta_S}{d\zeta} + (\Delta \phi_{12} - \phi_{12V}) \frac{Pe_2}{(1-w_{10})^2} \frac{dw_{10}}{d\zeta} - Nu (\theta_S - \theta_a) K = 0 \quad (3)$$

onde  $c_{pi} = C_{pi}/R_i$ ;  $i = 1, 2$  é o calor específico adimensional do componente (i) na solução onde o soluto (2) é o polímero,  $Pe_S = \rho_S c_{ps} d V_f / 4 k_S$  é o número de Péclet do fio,  $\Delta \phi_{12}^m = \Delta h_{12}/R_1 T_0$  é a entalpia de mistura adimensional da solução líquida,  $\Delta \phi_{12} = \Delta h_{12}/R_1 T_0$  é a entalpia de diluição da solução e  $Nu$  é o número de Nusselt definido por  $Nu = h d/k_a$ ,  $K = k_a/k_S$ ,  $\phi_{12V} = h_{12V}/R_1 T_0$  é a entalpia de vaporização adimensional do solvente e  $R_1$  é a constante de Clapeyron do solvente.

Analogia de Chilton-Colburn (Ref. [2]).

Essa analogia estabelece que o número de Sherwood é relacionado ao número de Nusselt pela relação adimensional

$$\text{Sh} = Nu (\text{Sc}/\text{Pr})^{1/3} \quad (4)$$

onde  $\text{Sc} = \nu_a/D_{1a}^0$  é o número de Schmidt e  $\text{Pr} = \nu_a/\alpha_a$  é o número de Prandtl. O número de Nusselt no presente caso foi obtido da solução da referência [7].

Para a solução (2), as equações (1), (2) e (3) são modificadas (Ref. [11]) e conjugadas as equações de camada-limite que seguem.

Equação do Movimento.

$$u \frac{\partial u}{\partial \zeta} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (5)$$

onde  $u$  e  $v$  satisfazem a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta v) = 0 \quad (6)$$

onde  $\text{Re} = V_f d/\nu_a$  é o número de Reynolds

$$u(\zeta, 1/2) = 1 \quad (7)$$

$$u(\zeta, \eta) = 0; \eta \rightarrow \infty \quad (8)$$

Equação da Energia.

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad (9)$$

onde  $\theta$  satisfaz as condições de contorno

$$\theta(\zeta, 1/2) = \theta_S - \theta_a \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(\zeta, 1/2) = Nu (\theta_S - \theta_a) \quad (11)$$

$$\theta(\zeta, \eta) = 0; \eta \rightarrow \infty \quad (12)$$

Equação da Transferência de Massa no Ar.

$$u \frac{\partial \Psi_1}{\partial \zeta} + v \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} \right) \quad (13)$$

onde  $\Psi_1$  é a fração mássica de solvente no ar que satisfaz as condições de contorno

$$\Psi_1(\zeta, 1/2) = \Psi_{10}; \quad (14)$$

$$\Psi_1(\zeta, \eta) = 0; \eta \rightarrow \infty \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta}(\zeta, \eta) = 0; \eta \rightarrow \infty \quad (16)$$

$$\text{onde } \Psi_{10} = y_{10} M_1 / [y_{10} M_1 + (1-y_{10}) M_a] \quad (17)$$

sendo que  $y_{10}$  satisfaz a equação (1).

Da definição do coeficiente de transferência de massa  $k_{r1}$ , segue-se que

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta}(\zeta, 1/2) = -(k_{r1} d/\rho_a D_{1a}^0) \Psi_{10} \quad (18)$$

Definindo  $\text{Sh} = k_{r1} d/\rho_a D_{1a}^0$  resulta

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta}(\zeta, 1/2) = -\text{Sh} \Psi_{10} \quad (19)$$

onde  $\rho_a$  é a massa específica do ar.

Equação de Transferência de Massa no Fio.

Neste caso a equação (2) modificada para a presente análise toma a forma

$$\frac{dw_{10}}{d\zeta} = -\text{Sh} \Lambda_m^2 \Psi_{10} (1-w_{10})^2 / (1-\Psi_{10}) \quad (20)$$

$$\text{onde } \Lambda_m^2 = K \text{Pr} \pi_2 M_a/M_1 \text{Sc} Pe_2 \quad (21)$$

$$\text{e } \pi_2 = p/\rho_a c_{pa} T_0$$

A velocidade de transpiração  $v_w = v(\zeta, 1/2)$  pode ser calculada da equação do fluxo de massa no fio. A forma adimensional para  $v_w$  é expressa por

$$v_w = \text{Sh} \Psi_{10} / \text{Sc Re} (1-\Psi_{10}) \quad (22)$$

SOLUÇÃO DE KÁRMÁN-POHLHAUSEN

Os perfis de Kármán-Pohlhausen para o caso das equações (5) e (9) são expressos na forma

$$u(\eta, \zeta) = 1 - \ln(2\eta)/\ln(\delta_v(\zeta)); \delta_v = e^\alpha \quad (23)$$

$$\theta(\eta, \zeta)/(\theta_S - \theta_a) = 1 - \ln(2\eta)/\ln(\delta_t(\zeta)); \delta_t = e^\beta \quad (24)$$

onde  $\delta_v - 1$  e  $\delta_t - 1$  são respectivamente as espessuras das camadas-limite do movimento e da energia divididas pelo raio do fio.

Por analogia, a solução da eq.(13) será expressa por

$$\Psi_1/\Psi_{10} = 1 - \ln(2\eta)/\ln(\delta_m(\zeta)); \delta_m = e^\gamma \quad (25)$$

onde  $\delta_m - 1$  é a espessura adimensional da camada-limite mássica. Os perfis de Kármán-Pohlhausen são restritos à região interna à camada-limite, pois fora desta temos o infinito físico.

Integrando a eq.(5) em  $\eta$  no intervalo  $(1/2, \infty)$ , eliminando  $v$  pela eq.(6), substituindo  $u$  pelo perfil dado por (23), usando as condições de contorno dadas pelas eqs. (7) e (8) e expressando o resultado na função  $\alpha$  resulta o que segue

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} = \left[ \frac{8\alpha^3}{(\alpha-1)e^{2\alpha} + \alpha + 1} \right] \left( \frac{v_w}{2} + \frac{1}{\alpha Re} \right) \quad (26)$$

Fazendo-se operações semelhantes a equação da energia (9) com as condições de contorno (10) e (12) resulta

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{e} \left\{ \left[ 16 \left( \frac{1}{\beta Re Pr} + \frac{v_w}{2} \right) - \frac{G}{\theta_s - \theta_a} \frac{d\theta_s}{d\zeta} \right] \frac{d\zeta}{d\alpha} - F \right\} \quad (27)$$

onde  $e = e^{2\alpha} (1-1/\alpha)/\beta^2 + (1+1/\alpha)/\beta^2$

$$f = e^{2\alpha} (2/\alpha - 1/\alpha^2 - 2/\beta + 2/\alpha\beta - 1/\alpha^2\beta) + (1+1/\beta)/\alpha^2$$

$$g = e^{2\alpha} (1/\alpha - 1/\beta + 1/\alpha\beta) - (2+1/\alpha + 1/\beta + 1/\alpha\beta)$$

para  $Pr < 1$ .

Da mesma forma para a equação da transferência de massa (13) com as condições de contorno (14) e (15) resulta

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{1}{E} \left\{ \left[ 16 \left( \frac{1}{\gamma Re Sc} + \frac{v_w}{2} \right) - \frac{G}{\psi_{10}} \frac{d\psi_{10}}{d\zeta} \right] \frac{d\zeta}{d\alpha} - F \right\} \quad (28)$$

onde  $E = e^{2\gamma} (2/\gamma - 1/\gamma^2 - 2/\alpha + 2/\alpha\gamma - 1/\alpha\gamma^2) + (1-1/\alpha)/\gamma^2$

$$F = e^{2\gamma} (1-1/\gamma)/\alpha^2 + (1+1/\gamma)/\alpha^2$$

$$G = e^{2\gamma} (1/\gamma - 1/\alpha + 1/\gamma\alpha) - (2+1/\alpha + 1/\gamma + 1/\gamma\alpha)$$

para  $Sc > 1$ .

A derivada  $d\psi_{10}/d\zeta$  que aparece na eq.(28) é calculada por

$$\frac{d\psi_{10}}{d\zeta} = \frac{d\psi_{10}}{dy_{10}} \left( \frac{\partial y_{10}}{\partial \theta_s} \frac{d\theta_s}{d\zeta} + \frac{\partial y_{10}}{\partial w_{10}} \frac{dw_{10}}{d\zeta} \right) \quad (29)$$

onde  $d\psi_{10}/dy_{10}$  é calculada analiticamente pela eq.(17), enquanto que  $\partial y_{10}/\partial \theta_s$  e  $\partial y_{10}/\partial w_{10}$  são calculadas numericamente pela equação implícita (1). Da definição do coeficiente de película  $h$  pode-se provar que  $Nu = 2/\beta$  e da definição do coeficiente de transferência de massa resulta  $Sh = 2/\gamma$ . Em resumo, a solução do presente problema envolve as funções incógnitas  $w_{10}$ ,  $\psi_{10}$ ,  $\theta_s$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  e requer a solução do sistema de equações formado pelas equações (1), (3), (17), (20), (22), (26), (27), (28) e (29), das quais as equações (3), (20), (26), (27), (28) e (29) são equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. As funções incógnitas listadas são funções da coordenada axial  $\zeta$  e dos parâmetros  $Re$ ,  $Pr$ ,  $Sc$ ,  $K$ ,  $\pi_2$ ,  $Pe_2$ ,  $Pe_s$  e  $\theta_a$ .

#### SOLUÇÃO NUMÉRICA

As equações correspondentes a solução (2) foram resolvidas pelo método Runge-Kutta de quarta ordem com passo variável. As condições iniciais estabelecidas são  $w_{10}(\zeta=0) = w_0$ ,  $\theta_s(\zeta=0) = 1$ ,  $\psi_{10}(\zeta=0) = 0$ ,  $\alpha(\zeta=0) = 0$ ,  $\beta(\alpha(\zeta=0)) = 0$  e  $\gamma(\alpha(\zeta=0)) = 0$  onde  $\beta$  e  $\gamma$  são aproximados por polinômios na vizinhança de  $\alpha = 0$  já que as equações (26), (27) e (28) são singulares em  $\alpha = 0$ . Para o caso aqui considerado  $Pr = 0,7$  e  $Sc = 2,7$ . Como  $Pe = 0(1)$  e  $Pe_2 = 0(10^{-4})$ , somente o termo correspondente a  $Pe_s$  foi considerado na eq.(3). Para inicializar o problema, a exemplo das soluções desenvolvidas em [6], [7] e [8],  $\beta$  e  $\gamma$  foram expandidos como polinômios de  $\alpha$  na forma  $\beta = b_1\alpha + b_2\alpha^2 + b_3\alpha^3$  e  $\gamma = c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3$  onde os coeficientes  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são obtidos reduzindo-se todas as informações do problema à vizinhança de  $\alpha = 0$ , onde os polinômios são válidos. Neste processo todas as equações são utilizadas. Essa redução é extremamente tediosa e as expressões desses coeficientes são demasiadamente extensas para relatar neste trabalho. As expressões finais ficam reduzidas em termos de  $Re$ ,  $Pr$ ,  $Sc$ ,  $Pe_s$ ,  $Pe_2$ ,  $K$ ,  $\pi_2$  e  $\theta_a$ . Um caso típico foi computado para avaliar a relação entre espessuras de camada-limite  $(\delta_m-1)/(\delta_t-1) = (Pr/Sc)^{1/3}$  na vizinhança de  $\alpha = 0$ . Neste caso,  $(\delta_m-1)/(\delta_t-1) = (e^{c_1\alpha-1})/(e^{b_1\alpha-1}) = \frac{c_1}{b_1}$ . Para  $Pr=0,7$ ,

$Sc = 2,7$ ,  $Re = 23$ ,  $Pe_s = 1,1$ ,  $Pe_2 = 7.10^{-4}$  resultou  $b_1 = 1,26018$ ,  $b_2 = -0,07532$ ,  $b_3 = -0,89162$  e  $c_1 = 0,57902$ . A razão  $(\delta_m-1)/(\delta_t-1)$  resultou 0,4595, enquanto que  $(Pr/Sc)^{1/3} = 0,6299$ . Portanto os resultados são comparáveis. A solução de Bourne e Dixon [7] para o problema de transferência de calor com mesmos parâmetros  $Pe_s$ ,  $Re$  e  $Pr$  resultou em  $b_1 = 1,2857$ ,  $b_2 = -0,0755$  e  $b_3 = 0,0008654$ . Pode-se observar que os dois primeiros coeficientes relativos a transferência de calor são bastante próximos. O coeficiente  $b_3$  no presente caso é bastante diferente daquele de [7] em decorrência de  $b_3$  ser fortemente influenciado pela transferência de massa.

As equações (1) - (3) correspondentes a solução (1) foram resolvidas pelo método Runge-Kutta, resolvendo-se primeiramente a equação de transferência de calor (3) sem transferência de massa e em seguida as equações (1) e (2) simultaneamente, com o auxílio da eq.(4).

#### DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os casos analisados foram computados para solução binária de poliestireno ( $M_2 = 360.000$ ) e tolueno. A termodinâmica desta solução é satisfatoriamente explicada pela teoria de Flory-Huggins. A atividade  $a_1$  do solvente nesta solução depende essencialmente da fração mássica do solvente na solução. Em consequência o calor de diluição é nulo. Resultados experimentais de  $a_1$  foram apresentados por Bawn et alii [13]. A atividade  $a_1$  foi equacionada como função de  $w_{10}$ . O fio por sua vez é feito de cobre. As propriedades termodinâmicas do solvente foram ajustadas em função da temperatura na faixa entre 25 e 90°C. A solução polimérica resultante não obedece a lei de Raoult, mesmo para baixas frações molares de soluto. A figura (1) ilustra o comportamento de  $a_1$  com  $w_{10}$  onde  $w_{10} = 0,5$  corresponde a fração molar igual a 0,000277.

A figura (2) ilustra o comportamento da fração mássica do solvente na solução do fio para três valores do número de Reynolds, para espessura da camada de esmalte  $e_{zf}$  igual a  $5\mu m$  e  $\theta_a = 1,24$ .

Esta figura apresenta também as curvas correspondentes a  $Re = 3,70$  para a solução (1), e para a solução (2), inclusive para o caso particular de solução ideal isto é,  $a_1 = 1,0$ .

A figura (3) ilustra o comportamento das espessuras de camada-limite  $\delta_v$ ,  $\delta_t$  e  $\delta_m$  com o comprimento para o caso computado.

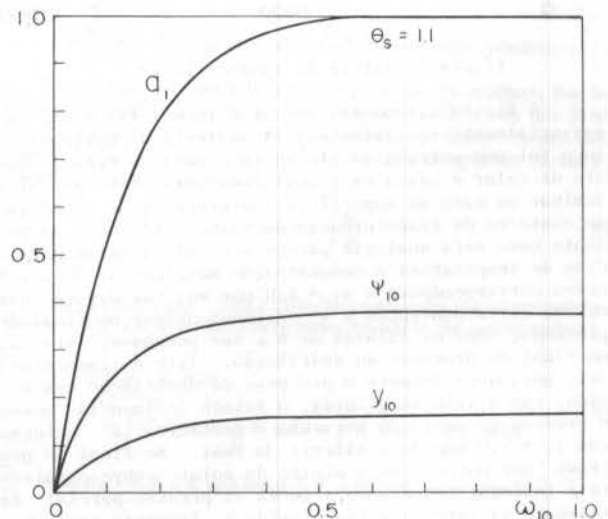


Figura 1. Atividade do tolueno na solução.

A figura (2) nos mostra que a taxa de destilação do solvente depende da velocidade do fio ( $Re$ ), isto é, do tempo de residência do fio para um comprimento determinado. O aumento do número de Reynolds diminui a taxa de destilação, como era de se esperar.

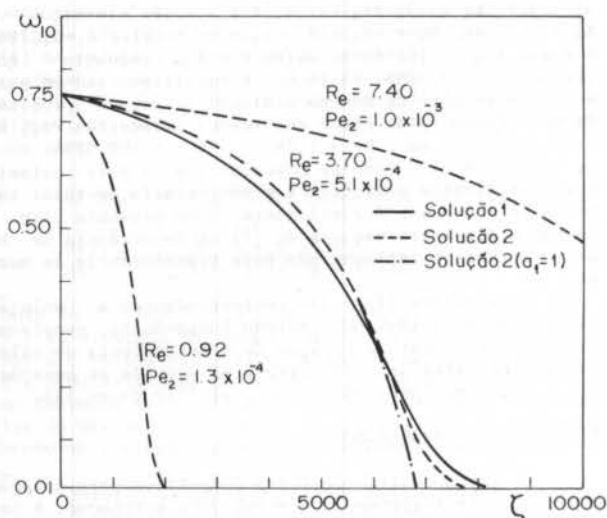


Figura 2. Comparação da solução por analogia (1) e de camada limite (2).

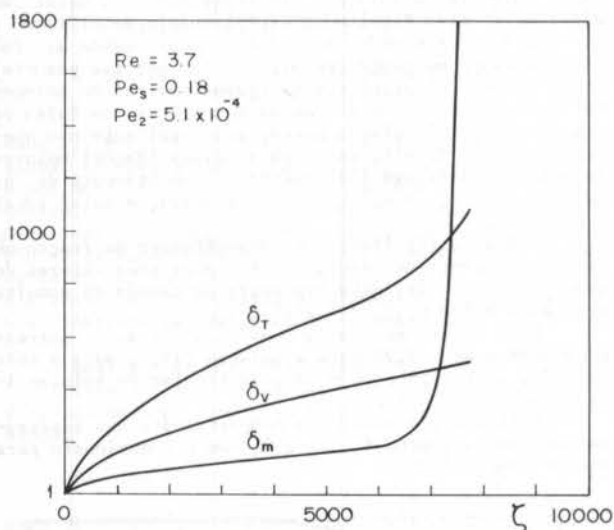


Figura 3. Altura de camada-limite.

A figura (2) mostra que as soluções (1) e (2) são essencialmente equivalentes. A analogia de Chilton-Colburn foi demonstrada em [12] para o caso de transferência de calor e massa em placa plana para camada-limite laminar no caso de superfície isotérmica e de condição de contorno de transferência de massa uniforme. No presente caso esta analogia parece ser válida mesmo para o caso de temperatura e concentração mássica variáveis. A curva correspondente a  $a_1 = 1.0$  por sua vez difere das curvas correspondentes a  $a_1$  variável apenas no final do processo, onde os valores de  $\omega_{10}$  são pequenos, isto é, no final do processo de destilação. Isto é compreensível, porquanto durante o processo de destilação com  $\omega_{10}$  alto, com a solução diluída, o soluto influencia pouco a pressão de vapor do solvente e portanto, a solução com  $a_1 = 1.0$  não deve diferir da real. No final do processo por outro lado, o efeito do soluto sobre o solvente é intenso, provocando a queda da pressão parcial do solvente na interface gás-líquido e forçando então  $\omega_{10}$  tender a zero assintoticamente. Esta conclusão é análoga a comparação da secagem governada pela temperatura de saturação na superfície de um meio poroso e aquela secagem onde a superfície porosa sofre intenso efeito de difusão interna. O processo final de destilação é acompanhado do aumento intenso da espessura da camada limite mássica e de um aumento moderado da camada-limite do movimento e da energia.

Embora existam alguns trabalhos na área de transferência de calor em fios em movimento longitudinal, pouco se tem trabalhado na área de transferência de massa com efeitos químicos. Por isso não se encontrou uma solução do problema aqui abordado para comparação, exceto aquela de Bourne & Dixon [7] para a transferência de calor com a qual os resultados do presente trabalho concordam plenamente.

#### CONCLUSÃO

Uma solução de camada-limite para o problema da transferência de massa em fios embebidos de solução orgânica polimérica foi obtido pelo método de Kármán-Pohlhausen. Esta solução foi comparada com a analogia de Chilton-Colburn com resultados pouco discordantes. A solução de camada-limite obtida é pouco sensível com o coeficiente de atividade da solução orgânica escolhida, exceto no final do processo de destilação onde os efeitos da atividade são intensos. O processo de destilação da solução para o caso de solução binária é parametrizado pelos números de Péclet do fio ( $Pe_s$ ), da solução ( $Pe_2$ ), pelo número de Reynolds ( $Re$ ), pelo número de Schmidt e pelo número de Prandtl. Embora a massa específica da mistura ar-solvente varie com a concentração do solvente, esta foi considerada constante. Neste sentido uma solução analítica foi obtida. Uma solução numérica considerando as propriedades variáveis poderia avaliar os efeitos da concentração na solução gasosa e então fortalecer a validade da solução apresentada.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw Hill Book Company, 6th Ed. (1968).
- [2] Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, Wiley Int. Ed., (1960).
- [3] Prausnitz, J.M., Lichtenthaler, R.N e Azevedo, E.G., *Molecular Thermodynamics of Fluid-Phase Equilibria*, 2nd Ed., Prentice-Hall Int. (1986).
- [4] Flory, P.J., Fifteenth Spiers Memorial Lecture-Thermodynamics of Polymer Solutions, *Disc. Faraday Soc.* 49: 7-29 (1970).
- [5] Flory, P.J., *Statistical Thermodynamics of Liquid Mixtures*, *J. Am. Chem. Society*, 87:1833-1839 (1965).
- [6] Karniš, J. e Pechoč, V., The Thermal Laminar Boundary Layer on a Continuous Cylinder, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 21: 43-47 (1978).
- [7] Bourne, D.E. e Dixon, H., The Cooling of Fibres in the Formation Process, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 24: 1323-1332 (1971).
- [8] Chida, K. e Katto, Y., Conjugate Heat Transfer of Continuously Moving Surfaces, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 19: 461-470 (1976).
- [9] Bonner, D.C. e Prausnitz, T.M., Vapor-Liquid Equilibrium Calculations for Concentrated Polymer Solutions, *AIChE Journal*, 19: 943-951 (1973).
- [10] Colle, S., Relatório EBSEFE-I Pirelli/EMC, Fevereiro (1987).
- [11] Colle, S. e Peters, S., Relatório EBSEFE-II Pirelli/EMC, Julho (1988).
- [12] Burmeister, L.C., *Convective Heat Transfer*, John Wiley & Sons (1983).
- [13] Bawn, C.E.H., Freeman, R.F.J. e Kamalidin, A.R., Vapor Pressure of Polystyrene Solutions, *Trans. Farad. Society*, 46: 677-685 (1950).

#### ABSTRACT

The present paper is concerned with a parametric study of the heat and mass transfer process in wires covered by a thin layer of an organic polymeric solution. The solution of the problem is obtained by the boundary layer theory making use of the Kármán-Pohlhausen technique. The numerical results are compared with those obtained by the Chilton-Colburn analogy. These results agree pretty well for significant values of the Reynolds number.



**FLOW OF A FALLING FILM  
AROUND A HORIZONTAL CYLINDER**

P. R. Souza Mendes

Department of Mechanical Engineering  
Pontifícia Universidade Católica - RJ  
Rio de Janeiro, RJ 22453 - BRAZIL

**ABSTRACT**

A theoretical investigation of the motion of a layer of a viscous fluid around a horizontal cylinder is reported in this paper. The layer has initially an uniform thickness, and, at some instant of time, it starts to flow due to the presence of a gravity field. The result sought is the film thickness as a function of time and angular position. The mass- and momentum-conservation principles are employed in conjunction with the integral method, and a system of two non-linear hyperbolic equations is shown to govern the problem. The results show that the flow tends to an equilibrium configuration where the fluid weight is balanced by the surface tension effects. For low viscosity fluids, an oscillatory motion is observed, which remains until all the kinetic energy is dissipated by the viscous effect.

**INTRODUCTION**

An effective simulation of coating processes of electrical wires is still an unresolved question. The processes employed do not perform satisfactorily, and therefore need improvement. However, the physical mechanisms involved are very complex, and a model that is both realistic and amenable to mathematical solution is yet to be developed.

Specifically, when horizontal wire coating is employed, the gravity effect causes the liquid coating material previously deposited to flow down around the wire before solidification. This causes eccentric layers of deposited material, which is highly undesirable.

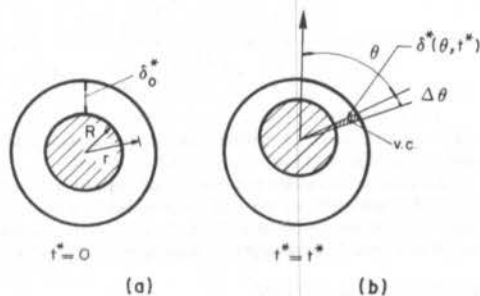


Figure 1. The physical model.

Therefore, prediction of the fluid motion around the wire is necessary to control the eccentricity of the deposited layer of electrical insulation.

Coating processes have deserved some attention in the fluid mechanics literature. Taylor [1] proposed the so called paint brush model to simulate the deposition of a fluid on a plane surface. Savage [2] employed the lubrication theory to study the flow of a newtonian fluid in the narrow gap between a pair of rollers of different radii and at different peripheral speeds. His predictions for the film thickness were found to compare well with experiments.

Kistler and Scriven [3] describe a number of valuable computational strategies to tackle coating flows. Predictions based on two different theories, one based on asymptotic expansions and the other on the full solution of the Navier-Stokes equations, are compared with the predictions of the lubrication theory for flows in forward-roll coating [4], and it was concluded that the latter theory is realistic only for high capillary numbers.

The coating process of a cylindrical wire moving in its axial direction, however, has not been addressed to date. The present research is focused on the issue of controlling the eccentricity of the deposited layer. The physical model is depicted in Fig. 1. At time  $t^* = 0$ , a fluid layer of uniform thickness  $\delta_0^*$  is deposited around a horizontal cylinder (or wire), and a gravity field  $\vec{g}$  directed downward is switched on (Fig. 1a). At some later time  $t^*$ , the flow has moved downward due to gravity, and surface tension effects together with viscous forces tend to decelerate the motion. For the sought-for application, the film thickness is typically very small, generally of the order of 1 or 2% of the wire radius.

**THE ANALYSIS**

The principles of mass and  $\theta$ -momentum conservation are evoked, and applied to the deformable control volume shown at some instant  $t^*$  in Fig. 2.

In this two-dimensional analysis, the fluid density  $\rho$  is assumed to be invariant. The velocity field is given by  $\vec{u} = u^* \hat{e}_r + v^* \hat{e}_\theta$ .  $V^*$  stands for the the velocity component  $v^*$  evaluated at the interface, i.e.,

$$V^*(\theta, t^*) \equiv v^*(R + \delta^*, \theta, t^*) \tag{1}$$

where  $\delta^*(\theta, t^*)$  is the film thickness, measured in the radial direction, at some instant and  $\theta$  location.

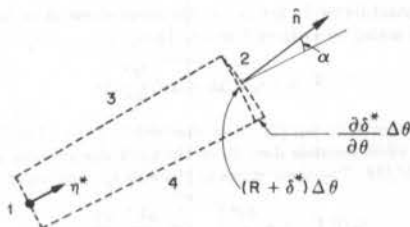


Figure 2. Magnification of the deformable control volume.

There exists a pressure difference  $\Delta p^*$  across the interface, due to the surface tension. Since the present study is focused on very thin films ( $\delta^* \ll R$ ), the curvature radius of the interface is nearly constant and close to  $R + \delta_0^*$ , where  $\delta_0^*$  is the initial (and uniform along  $\theta$ ) film thickness. Therefore, if  $\sigma$  is the surface tension,

$$\Delta p^* = \frac{\sigma}{R + \delta_0^*} \tag{2}$$

**Mass Conservation.** The continuity equation for the control volume shown in Fig. 2 is ( $\hat{n}$  is the unitary vector normal to the control surface):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{CS} \vec{u} \cdot \hat{n} dA \\ &= \int_1 \vec{u} \cdot \hat{n} dA + \int_2 \vec{u} \cdot \hat{n} dA + \int_3 \vec{u} \cdot \hat{n} dA + \int_4 \vec{u} \cdot \hat{n} dA \end{aligned} \tag{3}$$

At surface 1,  $\vec{u} = 0$ , and hence  $\int_1 \vec{u} \cdot \hat{n} dA = 0$ . At surface 2,

$$\vec{u} = \frac{d\delta^*}{dt^*} \hat{e}_r + v^* \hat{e}_\theta \quad \text{and} \quad \hat{n} = \cos \alpha \hat{e}_r - \sin \alpha \hat{e}_\theta. \tag{4}$$

Then, at surface 2,

$$\vec{u} \cdot \hat{n} = \left( \frac{d\delta^*}{dt^*} - v^* \tan \alpha \right) \cos \alpha. \tag{5}$$



Now it is observed that

$$\tan \alpha = \frac{1}{R + \delta^*} \frac{\partial \delta^*}{\partial \theta} \quad \text{and} \quad \frac{d\delta^*}{dt^*} = \frac{\partial \delta^*}{\partial t^*} + \frac{v^*}{R + \delta^*} \frac{\partial \delta^*}{\partial \theta} \quad (6)$$

Substituting the above equations into eq. (5), the dot product  $\vec{u} \cdot \hat{n}$  becomes simply equal to  $\frac{\partial \delta^*}{\partial t^*} \cos \alpha$ , and

$$\int_2 \vec{u} \cdot \hat{n} dA = \frac{\partial \delta^*}{\partial t^*} (R + \delta^*) \Delta \theta, \quad (7)$$

where, assuming a unitary length along the third direction,  $dA$  was substituted for by  $(R + \delta^*) d\theta / \cos \alpha$ .

It is not difficult to see that

$$\int_3 \vec{u} \cdot \hat{n} dA + \int_4 \vec{u} \cdot \hat{n} dA = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \int_0^{\delta^*} v^* d\eta^* \right] \Delta \theta \quad (8)$$

where  $\eta^* \equiv r - R$ .

Now, eqs. (7) and (8) are plugged into the continuity equation (eq. (3)), yielding

$$0 = \left( 1 + \frac{\delta^*}{R} \right) \frac{\partial \delta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \delta^* V^* \int_0^1 v d\eta \right] \quad (9)$$

where  $\eta \equiv \eta^*/\delta^*$  and  $v \equiv v^*/V^*$ .

The above equation is then made dimensionless, yielding

$$0 = (1 + \delta) \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ V \delta \int_0^1 v d\eta \right] \quad (10)$$

where

$$\delta \equiv \frac{\delta^*}{R}, \quad t \equiv t^* \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \text{and} \quad V \equiv \frac{V^*}{\sqrt{gR}}, \quad (11)$$

$g$  being the acceleration due to gravity.

**Momentum Conservation.** In the  $\theta$ -direction, the principle of conservation of momentum gives, when applied to the control volume shown in Fig. (2),

$$F_c + F_s = \int_{CV} \frac{\partial(\rho v^*)}{\partial t^*} dV + \int_{CS} v^* \rho \vec{u} \cdot \hat{n} dA. \quad (12)$$

The contact forces  $F_c$  are due to the shear stress at surface 1 and to the pressure acting on surfaces 3 and 4. Then,

$$F_c = -\tau_w R \Delta \theta - \Delta p^* \frac{\partial \delta^*}{\partial \theta} \Delta \theta, \quad (13)$$

where  $\Delta p^*$  is given by eq. (2). It is observed from eq. (13) that the surface tension effect depends directly on the thickness gradient along  $\theta$ , the derivative  $\partial \delta^*/\partial \theta$ . The shear stress at the wall  $\tau_w$  is obtained by

$$\tau_w(\theta, t^*) = \mu \left. \frac{\partial v^*}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\mu V^*}{\delta^*} \left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (14)$$

The external forces  $F_s$  are due to gravity, and hence given by

$$F_s = \int_0^{\delta^*} \rho g \sin \theta (R + \eta^*) d\eta^* = \rho g \sin \theta \left( R \delta^* + \frac{\delta^{*2}}{2} \right) \Delta \theta. \quad (15)$$

The first term on the right-hand side of eq. (12) may be written as

$$\begin{aligned} \int_{CV} \frac{\partial(\rho v^*)}{\partial t^*} dV &= \rho \Delta \theta \int_0^{\delta^*} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} (R + \eta^*) d\eta^* \\ &= \rho g R^2 \delta \Delta \theta \int_0^1 \frac{\partial(vV)}{\partial t} (1 + \delta \eta) d\eta \end{aligned} \quad (16)$$

If the same reasoning employed to obtain the mass conservation equation (eq. (10)) is followed while working on the right-most term of eq. (12), the expression below is obtained with no particular difficulty:

$$\int_{CS} v^* \rho \vec{u} \cdot \hat{n} dA = \rho V^* \frac{\partial \delta^*}{\partial t^*} R(1 + \delta) \Delta \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \delta^* V^{*2} \int_0^1 v^2 d\eta \right] \rho \Delta \theta \quad (17)$$

Now eqs. (2), (9), (12), (13), (14), (15), (16) and (17) are combined, yielding, after some algebra, the following dimensionless equation:

$$\begin{aligned} -\frac{V}{Re} \left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \left( \frac{1}{S(1 + \delta_0)} \right) \delta \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \\ + \sin \theta \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) \delta^2 = \delta^2 \int_0^1 \frac{\partial(vV)}{\partial t} (1 + \delta \eta) d\eta \\ + \delta \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \delta V^2 \int_0^1 v^2 d\eta \right] - \delta V \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \delta V \int_0^1 v d\eta \right] \end{aligned} \quad (18)$$

where

$$Re \equiv R \sqrt{gR} / \nu \quad \text{and} \quad S \equiv \rho g R^2 / \sigma \quad (19)$$

Eqs. (10) and (18) are subjected to the following initial conditions:

$$V(\theta, 0) = 0; \quad \text{and} \quad \delta(\theta, 0) = \delta_0 \quad (20)$$

The boundary conditions are:

$$V(0, t) = V(\pi, t) = 0; \quad \text{and} \quad \frac{\partial \delta}{\partial \theta}(0, t) = \frac{\partial \delta}{\partial \theta}(\pi, t) = 0 \quad (21)$$

**Evaluation of the Integral Terms.** Further inspection upon eqs. (10) and (18) shows that there are four terms where the tangential component  $v \equiv v^*/V^*$  of the velocity appears, three of them involving integrals, and the fourth involving a derivative evaluated at the wall. It is clear that the evaluation of these terms require the knowledge of the function  $v^*(\eta, \theta, t)$ .

In the present work, a linear profile of the form  $v = a\eta + b$  was adopted. It is worth noting that this assumption is quite reasonable when  $\delta \ll 1$ , since any continuous function can be approximated by a straight line in such a small interval.

Using the facts that, at  $\eta = 0$ ,  $v = 0$ , and at  $\eta = 1$ ,  $v = 1$ , it is straightforward to obtain  $v = \eta$ . This profile is used in the four terms mentioned above, and the following results are obtained:

$$\begin{aligned} \int_0^1 v d\eta = \frac{1}{2}; \quad \int_0^1 v^2 d\eta = \frac{1}{3}; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 1; \\ \text{and} \quad \int_0^1 \frac{\partial(vV)}{\partial t} (1 + \delta \eta) d\eta = \left( \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{V}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\delta}{3} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

With the above results, the final form of the governing equations can be obtained:

$$(1 + \delta) \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(V\delta)}{\partial \theta} = 0 \quad (23)$$

and

$$\begin{aligned} V \left( \frac{1}{2} + \frac{\delta}{3} \right) \delta \frac{\partial \delta}{\partial t} - \left\{ \left( \frac{1}{S(1 + \delta_0)} \right) - \frac{V^2}{6} \right\} \delta \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \\ - \delta^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\delta}{3} \right) \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{V \delta^2}{6} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{V}{Re} - \sin \theta \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) \delta^2 \end{aligned} \quad (24)$$

The problem under study is governed by the above partial differential equations for  $\delta$  and  $V$ , together with the initial and boundary conditions given in eqs. (20) and (21).

It can be seen that the parameters that influence this physical situation are  $S$ ,  $Re$  and the dimensionless initial film thickness  $\delta_0$ .  $S$  is the ratio between gravity forces and forces due to surface tension, whereas the modified Reynolds number  $Re$  compares gravity forces with viscous forces.

## METHOD OF SOLUTION

It can be observed that eqs. (23) and (24) form a non-linear system of hyperbolic partial differential equations. Since no discontinuities are expected in the sought-for solution, a finite-difference scheme is, in principle, appropriate for the integration of the governing equations. In the present work, the Crank-Nicolson implicit scheme was employed to generate the algebraic discretization equations, which were solved with the aid of the Thomas algorithm together with an iterative scheme.

This iterative scheme consisted basically of, for a given instant of time, (i) assuming initial guesses for  $\delta$  and  $V$ ; (ii) solving the set of algebraic equations generated from eq. (23) using the Thomas algorithm and the initial guesses for  $\delta$ ; (iii) solving the set of algebraic equations generated from eq. (24) using the Thomas algorithm and the present values of  $V$ ; (iv) going back to step (ii), but now using the present values of  $\delta$ ; (v) proceeding in this manner until convergence is achieved. The initial guesses mentioned above were just the values at the previous time step. Convergence was typically achieved in three or four iterations.

Due to symmetry, the solution domain in  $\theta$  is from 0 to  $\pi$ . The grid employed was uniform, with 33 nodal points in  $\theta$  and time steps varying from case to case in the range 0.001-10, depending upon the Reynolds number  $Re$ .

## RESULTS AND DISCUSSION

Attention will now be focused on the results obtained with the just described model. Fig. 3 shows the variation of the film thickness  $\delta$  with the angular position  $\theta$ , for the case  $\delta_0 = 0.02$ ,  $S = 0.2$  and  $Re = 5.0$ . From this figure it is seen that, at instant  $t = 0$ , the film thickness is uniform and equal to its initial value  $\delta_0$ . As time elapses, the fluid falls around



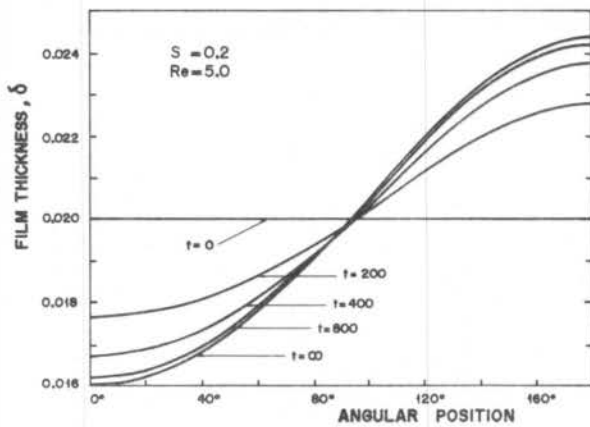


Figure 3. Film thickness versus angle for various times.

the cylinder due to gravity, and therefore the film thickness at the upper region diminishes, whereas at the lower region the thickness increases.

However, once a thickness gradient in the  $\theta$  direction is established, a force due to surface tension appears, and acts to balance the gravity effect. Furthermore, the viscous force also acts against the movement, and the overall effect is that the fluid tends asymptotically to an equilibrium configuration, where the surface tension effects exactly balance the fluid weight. This equilibrium configuration satisfies

$$\left(\frac{1}{S(1+\delta_0)}\right) \frac{d\delta}{d\theta} - \sin\theta \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \delta = 0, \quad (25)$$

which expresses the equilibrium between gravity and surface-tension forces. The solution of eq. (25) is

$$\delta(\theta, \infty) = \frac{2\delta(0, \infty)}{2 + \delta(0, \infty)} \frac{\exp\{S(1 + \delta_0)(1 - \cos\theta)\}}{1 - \frac{\delta(0, \infty)}{2 + \delta(0, \infty)} \exp\{S(1 + \delta_0)(1 - \cos\theta)\}} \quad (26)$$

The value of  $\delta(0, \infty)$  is obtained by assuring overall mass conservation, i.e.,

$$2 \int_0^\pi \delta(\theta, \infty) \left(1 + \frac{\delta(\theta, \infty)}{2}\right) d\theta = \pi \{(1 + \delta_0)^2 - 1\}. \quad (27)$$

The curve in Fig. 3 indicated by  $t = \infty$ , which was obtained via numerical integration of eqs. (10) and (18) for large times, satisfies the analytical relation given in eq. (26) within less than one percent. This fact strongly suggests that the numerical scheme employed performed satisfactorily. Another interesting fact that is indicated in Fig. 3 is that the film thickness at an angular position of  $\approx 100^\circ$  is nearly independent of time, and equal to the initial thickness  $\delta_0$ .

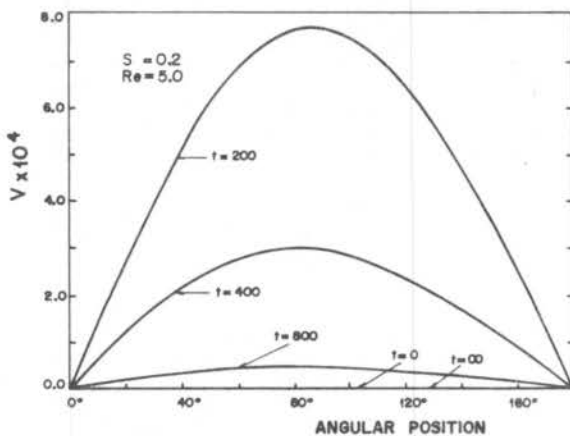


Figure 4. Tangential velocity versus angle for various times.

The behavior of the tangential velocity at the interface is illustrated in Fig. 4 for the same case shown in Fig. 3. It can be seen that the fluid accelerates very fast at the onset of the motion, when the only force acting on it is gravity. Soon the surface tension and viscosity effects become

important, and the velocity distribution  $V(\theta, t)$  reaches maximum values at some early instant of time and then starts decreasing to zero until the equilibrium configuration is reached. It can also be seen that the location of maximum velocity happens in the range  $80^\circ < \theta < 100^\circ$ , depending upon the time instant.

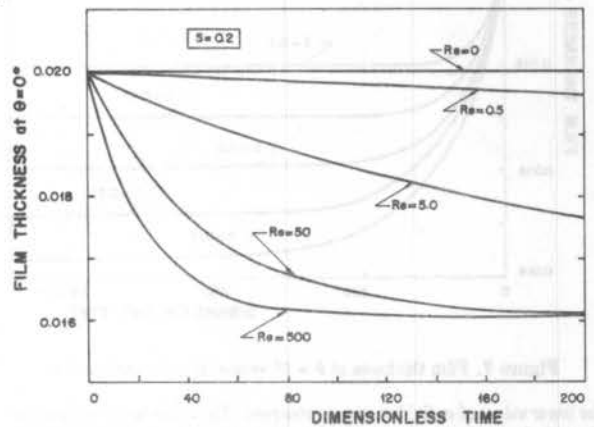


Figure 5. Film thickness at  $\theta = 0^\circ$  versus time for various  $Re$ 's.

The effect of the fluid viscosity is now addressed. Figs. 5 and 6 show the variation of the film thickness at  $\theta = 0^\circ$  with time, for different values of the modified Reynolds number  $Re$ . From its definition, it can be seen that low values of  $Re$  indicate high fluid viscosity, and vice-versa, for a given cylinder radius and gravity field. Fig. 5 shows the cases of high fluid viscosities, whereas in Fig. 6 the cases of low fluid viscosities are illustrated.

In Fig. 5, it is observed that, for infinite fluid viscosity ( $Re = 0$ ), the fluid flows at infinitely small velocity, and no change in thickness is observed. As the viscosity decreases, the fluid flows faster, needing less and less time to reach the equilibrium configuration.

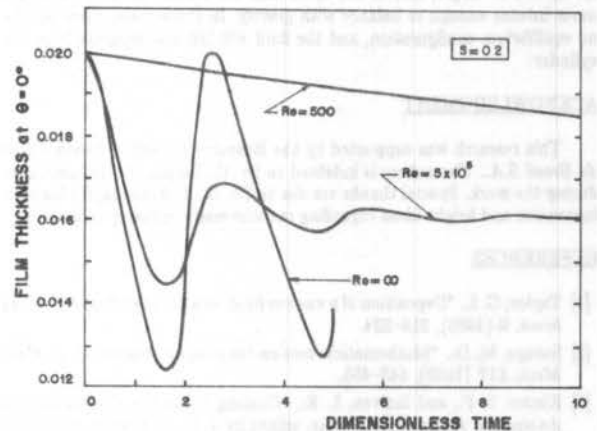


Figure 6. Film thickness at  $\theta = 0^\circ$  versus time for various  $Re$ 's.

If the fluid viscosity gets very low (Fig. 6), the viscous forces are not intense enough to dissipate at once all the fluid initial potential energy, and a damped oscillatory motion is observed ( $Re = 5 \times 10^5$ ). For the extreme case of zero fluid viscosity ( $Re = \infty$ ), the equilibrium configuration cannot be reached, since no viscous damping for the fluid kinetic energy is available.

It is worth to mention at this point that, for these cases where oscillatory motions are expected, the present simple model may not be appropriate. The reason is that it is most probable that recirculations occur, as well as sharp ripples at the interface. In fact, the case  $Re = \infty$  shown in Fig. 6 refused to yield a plausible solution for larger times than the ones shown. However, even for these cases, the present model serves to generate some qualitative information that may be useful in developing more sophisticated models.

The effect of surface tension  $\sigma$  on the flow under study will now be analyzed. In Fig. 7, the effect of the parameter  $S$  is illustrated. It can be seen that, for  $S = 0$  (infinite surface tension), there is no flow, since gravity is not strong enough to move the fluid. For larger values of  $S$ , i.e.,

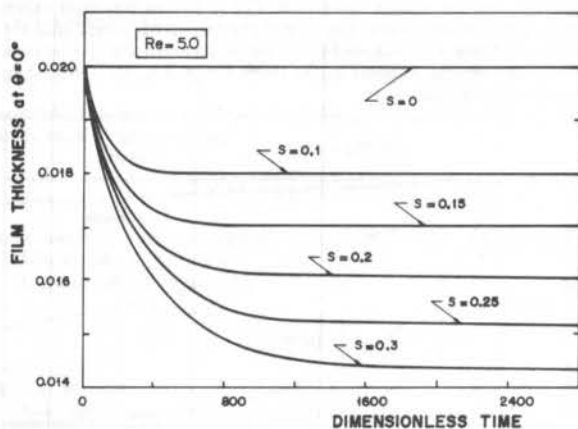


Figure 7. Film thickness at  $\theta = 0^\circ$  versus time for various  $S$ 's.

for lower values of  $\sigma$ , fluid motion is observed. The lower is the surface tension, the longer it takes for the fluid to reach the equilibrium configuration. Moreover, the equilibrium configuration gets farther from the initial configuration of uniform thickness, since the low value of  $\sigma$  must be compensated for by a high variation of  $\delta$  with  $\theta$ , in order to balance gravity.

#### FINAL REMARKS

The purpose of the research reported here was to develop a simple methodology to simulate the motion of a falling film around a horizontal film, aiming at the process of wire coating. In the range of parameters that is important for this industrial process, the present simulation seems to be appropriate, lacking, however, experimental confirmation to validate the procedure.

It is worth to emphasize, however, that the present model is not valid for  $\delta_0 \sim 1$  or larger, i.e., in the cases that the surface tension forces are never intense enough to balance with gravity. In these cases, there will be no equilibrium configuration, and the fluid will fall and separate from the cylinder.

#### ACKNOWLEDGMENT

This research was supported by the Research Center of *Pirelli Cabos do Brasil S.A.* The author is indebted to Dr. C. Taralli, for the assistance during the work. Special thanks are due to Dr. G. R. Almeida, for his very innovative and bright ideas regarding the university-industry interaction.

#### REFERENCES

- [1] Taylor, G. I., "Deposition of a viscous fluid on a plane surface," *J. Fluid Mech.* **9** (1960), 218-224.
- [2] Savage, M. D., "Mathematical models for coating processes," *J. Fluid Mech.* **117** (1982), 443-455.
- [3] Kistler, S. F., and Scriven, L. E., "Coating Flows," in *Computational Analysis of Polymer Processing*, edited by J. R. A. Pearson and S. G. Richardson, *Applied Science Publishers Ltd.*, Barking, Essex, England (1983), 243-298.
- [4] Coyle, D. J., Macosko, C. W., and Scriven, L. E., "Film-splitting flows in forward roll coating," *J. Fluid Mech.* **171** (1986), 183-207.



## MÁQUINAS DE FLUXO

TRANSFERÊNCIA DE CALOR LAMINAR  
EM VÁLVULAS DE COMPRESSORES

ABCN

ABCN

M.L. TODESCAT  
EMBRACO - Empresa Brasileira de Compressores  
A.T. PRATA, R.T.S. FERREIRA  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina

## RESUMO

O presente trabalho apresenta os resultados numéricos validados experimentalmente, da transferência de calor em difusores radiais quando o disco frontal é adiabático. O problema numérico é resolvido pelo método dos volumes finitos para o ar em escoamento laminar, incompressível com propriedades constantes. A validação do modelo numérico foi realizada experimentalmente, utilizando-se a analogia entre a transferência de calor e massa através da técnica de sublimação do naftaleno.

## INTRODUÇÃO

O escoamento radial, entre discos circulares concêntricos é de interesse em diversas situações em engenharia. Exemplos destas situações incluem aeronaves VTOL (Vertical TakeOff and Landing) com jatos centrais posicionados para baixo, mancais de escora aeroestáticos, impactores de aerossóis, válvulas do tipo palheta, e difusores radiais. Do ponto de vista fundamental o escoamento radial apresenta questões que permanecem em aberto. O próprio conceito de escoamento plenamente desenvolvido quando aplicado a escoamentos radiais conduz a inconsistências físicas conforme explorado por Bird et al. [1]. Adicionalmente, o escoamento laminar é instável para determinadas combinações da distância entre os discos e da vazão, gerando oscilações auto-mantidas pelo próprio escoamento [2].

A motivação para o presente trabalho vem de sua aplicação para o projeto de válvulas do tipo palheta, muito utilizadas em compressores herméticos de refrigeração. O escoamento em difusores radiais é uma aproximação bidimensional do escoamento nas válvulas do tipo palheta.

O pequeno afastamento existente entre o assento e a válvula, associado à mudança de direção do escoamento através da válvula, origina grandes gradientes de velocidade e, conseqüentemente grandes coeficientes de transferência de calor. Assim sendo, o refrigerante ao ser succcionado pelo compressor é aquecido ao passar pela válvula e tem seu volume específico aumentado. Volumes específicos maiores implicam em uma menor vazão mássica bombeada pelo compressor e, conseqüentemente, em perda de eficiência do compressor.

Dados recentes indicam que 21% da energia elétrica consumida na região Sudeste do Brasil refere-se ao consumo doméstico, e que o consumo de um refrigerador representa aproximadamente 30% deste montante [3]. Desta forma, é grande a exigência para que os fenômenos físicos associados ao funcionamento do compressor sejam melhor entendidos. É neste contexto que se enquadra a presente pesquisa.

Uma revisão da literatura indica poucos trabalhos relacionados com o assunto. Em se tratando de transferência de calor em válvulas de compressores, Hughes [4] realizou um estudo para válvulas do tipo anel e sugeriu relações para o cálculo do número de Nusselt médio como função dos números de Reynolds e Prandtl. Motivados também pela transferência de calor em válvulas de compressores, Hurjun e Yezheng [5] realizaram alguns experimentos utilizando a técnica de sublimação de naftaleno e apresentam correlações entre os números de Nusselt, Prandtl e Reynolds para diferentes geometrias. Embora a situação considerada em [5] se assemelhe àquela investigada aqui, devido à forma resumida e pouco precisa com que aquele trabalho foi escrito, a utilização das informa-

ções lá registradas fica prejudicada.

Dois trabalhos foram encontrados que tratam da transferência de calor em difusores radiais. Kreith [6] investigou o escoamento na região entre os discos, assumindo perfis de velocidade definidos. Mochizuki e Yao [7] analisaram o escoamento desde a entrada no difusor; introduziram no entanto um raio de arredondamento a fim de suavizar os altos gradientes associados à mudança de direção do escoamento que de axial na entrada do difusor passa a radial.

Nenhum dos trabalhos mencionados anteriormente investiga a transferência de calor em difusores radiais a partir da entrada no orifício alimentador do difusor.

O objetivo principal da presente investigação é analisar a influência do afastamento entre os discos do difusor e da vazão de ar, sobre a transferência de calor em difusores radiais. O calor é transferido para o ar tanto na entrada do orifício alimentador do difusor como na região do difusor. A investigação envolve estudos numéricos e experimentais. Na análise numérica as equações que descrevem o problema físico são discretizadas utilizando-se a técnica de volumes finitos e o algoritmo SIMPLER [8] para o acoplamento entre pressão e velocidade. Para os experimentos utilizou-se a analogia entre transferência de calor e massa. Na transferência de massa empregou-se a técnica de sublimação de naftaleno [9].

O presente trabalho é uma extensão do problema hidrodinâmico associado a difusores radiais e abordado em [10 - 14].

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A Fig. 1 mostra a geometria do problema investigado no presente trabalho. Conforme indicado na figura,

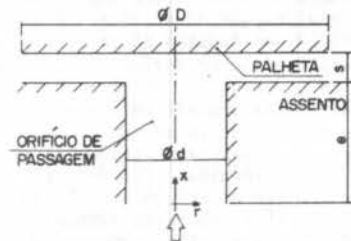


Fig. 1 - Geometria do escoamento.

a alimentação do ar para o difusor ocorre através do orifício de passagem de diâmetro  $d$  e comprimento  $s$ . A região onde foi colocado o orifício é denominada de assento, e o disco superior é denominado de palheta, fazendo alusão a válvulas tipo palheta, utilizadas em com-

pressores alternativos. O diâmetro da palheta é  $D$  e o afastamento entre palheta e assento é  $s$ . No orifício de passagem, o escoamento é axial (direção  $x$ ). Ao atingir a palheta, o escoamento é defletido e passa a ser radial (direção  $r$ ).

As equações que descrevem o problema em questão são as equações da continuidade, componentes axial e radial da equação de Navier-Stokes, e energia. Para escoamento laminar, com densidade constante e regime permanente, estas equações são expressas por,

$$\partial U / \partial X + (1/R) \partial(RV) / \partial R = 0 \quad (1)$$

$$U \partial U / \partial X + V \partial U / \partial R = -\partial P / \partial X + \nabla^2 U \quad (2)$$

$$U \partial V / \partial X + V \partial V / \partial R = -\partial P / \partial R + \nabla^2 V \quad (3)$$

$$U \partial \theta / \partial X + V \partial \theta / \partial R = (1/Pr) \nabla^2 \theta \quad (4)$$

onde  $U$  e  $V$  são, respectivamente, as componentes axial e radial da velocidade,  $P$  é a pressão,  $\theta$  é a temperatura,  $Pr$  é o número de Prandtl, e  $\nabla^2$  é o operador laplaceano em coordenadas cilíndricas. Ao escrever as equações (1) a (4), as seguintes adimensionalizações foram adotadas,

$$X = x/d, \quad R = r/d$$

$$U = ud/v, \quad V = vd/v, \quad P = \rho p / (\mu d)^2 \quad (5)$$

$$\theta = (T - T_e) / (T_p - T_e)$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $T_e$  é a temperatura do ar na entrada do orifício de passagem e  $T_p$  é a temperatura das paredes do orifício e difusor.

As condições de contorno a serem satisfeitas por  $U$ ,  $V$  e  $\theta$  serão discutidas a seguir. Inicialmente serão apresentadas as condições de contorno para o problema hidrodinâmico.

Nas paredes sólidas,  $U=V=0$ . Para a saída do difusor,  $R = D/(2d)$ , utilizou-se as condições de contorno para escoamento parabólico, ou seja,  $\partial U / \partial R = \partial(RV) / \partial R = 0$ . Note-se que para o componente  $V$  introduziu-se  $R$  dentro da derivada em virtude da velocidade do fluido não difusor diminuir com  $R$ , uma vez que a área disponível ao escoamento aumenta ao longo de  $R$ . Na entrada do orifício de passagem,  $X=0$ , fez-se  $V=0$ . Para a velocidade  $U$  foram testados três perfis: perfil uniforme,  $U=Re$ ; perfil parabólico,  $U=Re(0,25-R^2)$ ; e um perfil obtido quando se inclui, no domínio de solução do problema, a canalização a montante do orifício de passagem. Para esta última situação, o perfil de  $U$  na entrada do orifício se apresenta deformado em relação aos perfis parabólico e uniforme, e  $V$  deixa de ser zero. Esta deformação ocorre pois já na entrada do orifício a presença da palheta é detectada pelo escoamento. Detalhes sobre a obtenção dos perfis de  $U$  e  $V$  para esta situação podem ser obtidos em [12].

Para a temperatura,  $\theta=1$  nas paredes do orifício de passagem e do assento. Na saída do difusor fez-se  $\partial \theta / \partial R = 0$ , e na entrada do orifício de passagem,  $\theta=1$ . No disco frontal ao orifício de passagem (palheta), fez-se  $\partial \theta / \partial X = 0$ , simulando desta forma uma palheta isolada.

Tendo em vista que o escoamento é axissimétrico, a penas uma fatia de um radiano da geometria apresentada na fig. 1 é utilizada como domínio de solução. No eixo de simetria,  $R=0$ , fez-se  $U = \partial V / \partial R = \partial \theta / \partial R = 0$ .

A região sólida ocupada pelo assento foi incluída no domínio de solução a fim de que as equações diferenciais pudessem ser resolvidas através de um programa geral escrito para coordenadas cilíndricas. A inclusão do sólido faz com que o domínio de solução se torne uma fatia de cilindro limitada pelas linhas de coordenadas,  $X=0$ ,  $X=(e+s)/d$ ,  $R=0$  e  $R=D/(2d)$ . Do ponto de vista computacional, esta região sólida é tratada como sendo um fluido de viscosidade e condutividade térmica infinitas [15].

A formulação do problema está agora completa. Na

presente investigação, o único parâmetro geométrico a ser variado é o afastamento entre os discos do difusor radial,  $s/d$ . Além do afastamento  $s/d$ , o problema é ainda governado pelos números de Prandtl e Reynolds.

## SOLUÇÃO NUMÉRICA

As equações diferenciais (1) - (4) foram resolvidas numericamente pelo método dos volumes finitos. Neste método, divide-se inicialmente o domínio de solução do problema em pequenos volumes de controle não sobrepostos. A seguir, atribui-se a cada volume de controle um ponto nodal. Integram-se então as equações para  $U$ ,  $V$  e  $\theta$  ao longo de cada um destes pequenos volumes de controle e, desta forma, obtêm-se, para cada ponto nodal, uma equação algébrica que relaciona o valor da variável ( $U$ ,  $V$  ou  $\theta$ ) no ponto nodal, com aqueles dos quatro pontos nodais associados aos volumes de controle adjacentes. A pressão  $P$  é determinada através da equação da continuidade, ou seja, para um dado campo de velocidade calcula-se o campo de pressão que obriga aquele campo de velocidade a satisfazer a equação da continuidade. Este acoplamento entre pressão e velocidade é feito através do algoritmo SIMPLER [8, 16, 17].

Escrevendo as equações algébricas para todos os volumes de controle no domínio de solução, tem-se um sistema de equações que é resolvido iterativamente pelo método linha-por-linha. Este método é uma combinação do método de Gauss-Seidel com o algoritmo TDMA [8]. Tendo em vista a não linearidade da equação de Navier-Stokes, sub-relaxações se fazem necessárias para que o processo iterativo convirja [16]. A fim de acelerar a convergência do método, utilizou-se ainda o algoritmo de correção em bloco de [18].

Devido ao desacoplamento entre o problema hidrodinâmico e o térmico, na obtenção da solução numérica o cálculo do campo de temperatura só era iniciado depois dos campos de velocidade terem sido obtidos.

A precisão da solução numérica está relacionada com o número de volumes de controle utilizados na discretização do domínio de solução. No presente trabalho foram empregados 1120 pontos nodais na região do orifício de passagem e 1040 pontos na região entre os discos do difusor. Estes números representam um compromisso entre as melhorias oferecidas por uma população maior de pontos nodais e o tempo computacional necessário para se obter uma solução convergida. A comparação entre os resultados numéricos e experimentais serviu de suporte adicional para a validação da solução numérica.

## EXPERIMENTO

A determinação experimental dos coeficientes de transferência de calor entre o fluido e as paredes aquecidas é feita indiretamente através da analogia existente entre a transferência de calor e massa [19]. No presente trabalho utilizou-se a técnica de sublimação de naftaleno [9]. Esta técnica consiste em substituir a superfície que deveria estar aquecida a uma temperatura constante, por uma superfície coberta com naftaleno. A remoção de naftaleno, devida ao escoamento sobre a superfície, durante um certo intervalo de tempo, fornece a taxa de transferência de massa da superfície. Associado a esta massa transferida define-se o número de Sherwood, que é análogo ao número de Nusselt. Nos parágrafos subsequentes serão apresentados detalhes sobre o experimento.

Uma visão esquemática da bancada experimental é mostrada na fig. 2. Conforme mostra a figura, o ambiente é succionado através do tubo principal, e após percorrer 33 diâmetros chega na câmara de acrílico. No interior da câmara de acrílico está a secção de teste do experimento. O ar entra na secção de teste escoando axialmente através do orifício de passagem, deflete-se ao sair do orifício devido à presença da palheta, e, escoando radialmente, entra no ambiente da câmara de acrílico. A superfície do orifício de passagem e a superfície do difusor correspondente ao assento (ver Fig. 1), estão cobertas com naftaleno. A câmara de acrílico tem o formato de um prisma hexagonal com 41 cm de comprimento e raio da circunferência circunscrita à base igual a



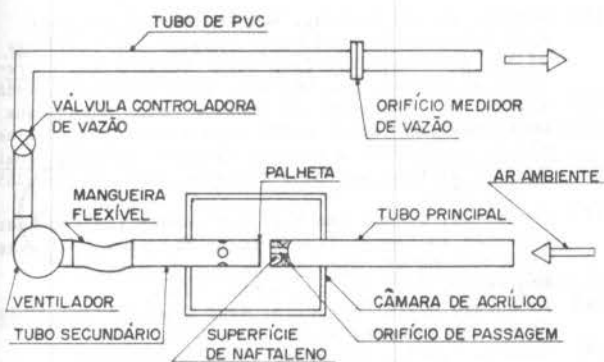


Fig. 2 - Vista esquemática da bancada experimental.

25 cm. Uma das faces laterais do prisma é a tampa da câmara. A abertura desta tampa dá acesso à seção de testes, permitindo a colocação e retirada da peça com naftaleno.

O ar é succionado da câmara de acrílico e entra no tubo secundário através de oito furos distribuídos circunferencialmente na região posterior à palheta. Do tubo secundário o ar é bombeado para a seção de medição de vazão. A mangueira flexível colocada entre o tubo secundário e o ventilador permite a movimentação deste tubo a fim de se estabelecerem os afastamentos desejados entre palheta e assento.

Para succionar o ar utilizou-se um ventilador centrífugo, marca IBRAM, com vazão máxima de  $2,5 \text{ m}^3/\text{min}$ . A vazão de ar é controlada por uma válvula reguladora marca FESTO, tipo 2103. Ao sair da válvula o ar escoava através de uma canalização de PVC com 78 mm de diâmetro interno e 6 m de comprimento até chegar no orifício medidor de vazão. A placa do orifício medidor de vazão foi projetada e fabricada conforme recomendações da ASME.

A placa é de cobre com um orifício de  $10 \pm 0,015 \text{ mm}$ , disposta perpendicularmente ao escoamento. As tomadas de pressão são posicionadas a 78 mm a montante e 39 mm a jusante da placa de orifício.

A pressão diferencial do orifício medidor de vazão e a pressão a montante da seção de teste foram medidas com um micromanômetro inclinado marca Wilhelm-Lambrecht, com menor divisão da escala de 1 mm e álcool etílico ( $\rho = 790 \text{ kg/m}^3$ ) como fluido de trabalho. Um barômetro Sato Keiryobi com resolução de 0,5 mbar foi utilizado para a medição da pressão ambiente.

A temperatura ambiente foi medida com um termopar de Cobre - Constantan com diâmetro de 0,5 mm e compensação eletrônica. Testes indicaram que a temperatura do ar permaneceu constante ao longo de todo o circuito de medição.

Os afastamentos entre o assento e a palheta foram efetuados com gabaritos em forma de calha, com superfícies retificadas e variação máxima de  $4 \mu\text{m}$  ao longo da semi-circunferência.

As medições das quantidades de massa sublimada foram realizadas com uma balança eletrônica digital, marca Sartorius com capacidade de 200g e resolução de 0,1 mg. O controle do tempo foi efetuado com um cronômetro Hanhart com menor divisão de 0,1s.

O molde utilizado para a deposição do naftaleno líquido é composto por uma peça de alumínio que conterá o naftaleno durante os testes, um eixo e uma tampa de aço. O eixo e a tampa, com superfícies polidas, permitem a obtenção da região de análise do experimento. O processo de deposição é realizado no molde previamente aquecido a  $60^\circ\text{C}$  utilizando-se um funil. Uma saída de ar permite o enchimento completo do molde. Efeitos de contração durante a solidificação são compensados através da colocação de uma quantidade adicional de naftaleno, após alguns segundos do enchimento inicial do molde. O molde é então resfriado, desmontado e a peça com naftaleno é limpa com um pincel de cerdas macias. A seguir a peça é pesada e montada na bancada de testes, con-

trolando-se o tempo gasto desde a pesagem. A distância e o paralelismo entre a peça e a palheta são ajustadas cuidadosamente e então inicia-se o teste em corridas padrões de 30 a 50 minutos. Durante os testes são anotadas as pressões e temperaturas em intervalos iguais de 5 minutos. Encerrado o teste, a peça com naftaleno é retirada da canalização e pesada. A diferença de massa antes e depois do teste inclui a sublimação ocorrida durante a montagem e desmontagem. Estas quantidades são determinadas simulando-se estas operações após a segunda pesagem. Assim a massa total de naftaleno sublimada durante o teste é determinada. Utilizou-se como parâmetro, com vistas à diminuição do erro experimental, uma sublimação da ordem de 100 mg durante os testes, para os diferentes números de Reynolds do escoamento. Maiores detalhes sobre o experimento estão apresentados em [20].

## RESULTADOS OBTIDOS

Com vistas à validação do esquema numérico utilizado foram feitas várias comparações entre os resultados numéricos e experimentais do número de Nusselt médio total para diferentes afastamentos entre a palheta e o assento, na faixa laminar do escoamento. A Fig. 3 apresenta tipicamente esta comparação para três afastamentos intermediários. Outras comparações feitas estão apresentadas e discutidas em [20]. O número de Prandtl para esta

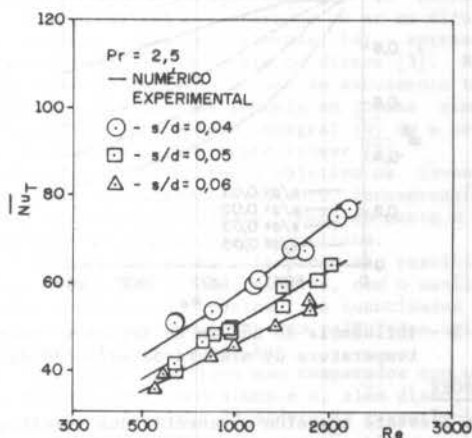


Fig. 3 - Comparação entre os resultados numéricos experimentais para diferentes Re e afastamentos da palheta.

validação foi mantido em 2,5, que corresponde ao número de Schmidt do naftaleno. As linhas cheias representam os dados obtidos numericamente enquanto que os símbolos correspondem aos resultados experimentais, medidos através dos ensaios de transferência de massa. Para todos os afastamentos testados, a maior diferença entre os resultados numéricos e experimentais é inferior a 8%, o que permite a validação do modelo numérico utilizado.

O número de Nusselt médio corresponde à média ponderada, com base nas áreas de troca de calor, dos números de Nusselt locais ao longo do orifício e do difusor. O número de Nusselt local é definido como

$$Nu = \frac{hd}{k} = qd / [k(T_p - T_e)] \quad (6)$$

onde  $h$  é o coeficiente local de transferência de calor e  $q$  é o fluxo local de calor entre o fluido e as paredes aquecidas. É importante notar que o número de Nusselt definido pela equação (6) é, na realidade, um fluxo de calor adimensional, uma vez que o coeficiente de transferência de calor  $h$  é baseado em uma diferença de temperatura constante. A temperatura de mistura foi calculada levando-se em conta os perfis de velocidade e de temperatura na seção desejada, conforme [20].

A incerteza associada com as medições do número de Nusselt médio total ao longo do orifício e difusor é inferior a 15%.

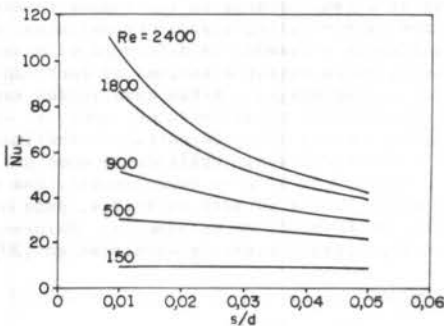


Fig. 4 - Influência do afastamento sobre o número de Nusselt médio total.

A Fig. 4 apresenta a influência do afastamento da palheta sobre o número de Nusselt médio total para diferentes números de Reynolds do escoamento no orifício alimentador e a Fig. 5 apresenta a influência do número de Reynolds sobre a temperatura média de mistura na saída do difusor, para diferentes afastamentos da palheta.

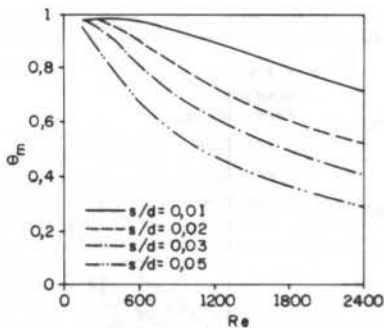


Fig. 5 - Influência do número de Reynolds sobre a temperatura de mistura na saída do difusor.

#### CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou uma investigação numérica com validação experimental, dos principais aspectos da transferência de calor laminar em válvulas de compressores.

Resultados associados à transferência de calor nas válvulas foram apresentados para diferentes vazões e afastamentos entre o assento e a palheta. O fluido de trabalho foi o ar com  $Pr = 0,7$ . Para comparação dos resultados numéricos com os experimentais utilizou-se a técnica da sublimação do naftaleno. Nesta comparação a solução numérica foi obtida para  $Pr = 2,5$ .

O número de Nusselt médio total aumenta bastante com o aumento do número de Reynolds e com a diminuição do afastamento e, para números de Reynolds baixos, o afastamento tem pequena influência sobre o número de Nusselt médio total.

Tanto a metodologia numérica como a experimental apresentadas neste trabalho mostraram ser adequadas para a análise da transferência de calor em válvulas de compressores.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*. John Wiley, 1960, p. 122.
- [2] Mochizuki, S., and Wang W.J., Self-sustained radial oscillating flows between parallel disks. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 154, pp. 377-397, 1985.
- [3] Centro de Pesquisas de Energia Elétrica, *Conservação de Energia em Eletrodomésticos*. CEPEL, Rio de Janeiro, 1985.
- [4] Hughes, J.M., A study of heat transfer and valve phenomena in a reciprocating compressor. *M.Sc. dissertation*, University of Purdue, 1972.

- [5] Hurjun, Z. and Yezheng, W., An investigation on heat transfer in reed valve passage. *Proceedings of the International Compressor Engineering Conference at Purdue*, pp. 464-471, West Lafayette, 1988.
- [6] Kreith, F., Transfert de chaleur et de masse dans un écoulement radial entre deux disques parallèles fixes, ou tournant à la même vitesse. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 9, pp. 265 - 282, 1966.
- [7] Mochizuki, S. and Yao M., Flow separation and heat transfer in radial flow between two parallel disks. *Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 49, pp. 48-63, 1983.
- [8] Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, Washington, D.C., 1980.
- [9] Mendes, P.R.S., The naphthalene sublimation technique. Invited Lecture, *Proceedings of the First World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics*, Dubrovnik, Yugoslavia, 1988.
- [10] Prata, A.T., Ferreira, R.T.S., e Deschamps, C.J., Escoamento laminar em difusores radiais, computação e experimento. *Anais do I Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, pp. 63-66, Rio de Janeiro, 1986.
- [11] Ferreira, R.T.S., Prata, A.T., and Deschamps, C.J., Laminar fluid flow in compressor valves: numerical and experimental results. *Fluid Flow and Heat Transfer in Reciprocating Machinery*, FED- vol. 62, HTD - vol. 93. ASME, pp. 33-38, Boston, 1987.
- [12] Deschamps, C.J., Prata, A.T., e Ferreira, R.T.S., Análise da influência do comprimento do orifício de passagem no escoamento em difusores radiais. *Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Vol. I, pp. 335-338, Florianópolis, 1987.
- [13] Deschamps, C.J., Ferreira, R.T.S., and Prata, A.T., The effective flow and force areas in compressor valves. *Proceedings of the International Compressor Engineering Conference at Purdue*, pp. 104-111, West Lafayette, 1988.
- [14] Ferreira, R.T.S., Deschamps, C.J., and Prata A.T., Pressure distribution on valve reed of hermetic compressors. *Proceedings of the First World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics*, Dubrovnik, Yugoslavia, 1988.
- [15] Patankar, S.V., A numerical method for conduction in composite materials, flow in irregular geometries and conjugate heat transfer. *Proceedings of the 6th International Heat Transfer Vol. 3*, pp. 297 - 302, Toronto, 1978.
- [16] Patankar, S.V., A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations. *Numerical Heat Transfer*, Vol. 4 pp. 409-425, 1981.
- [17] Minkowycz, N.J., Sparrow, E.M., Schneider, G.E. and Pletcher, R.H., *Handbook of Numerical Heat Transfer* Chapter 6, John Wiley, New York, 1988.
- [18] Settari, A. and Aziz, K. A generalization of the additive-correction methods for the iterative solution of matrix equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 10, pp. 506-521, 1973.
- [19] Eckert, E.R.G., and Drake Jr., R.M., *Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, Tokyo, 1959.
- [20] Todescat, M.L., Transferência de calor laminar em válvulas de compressores. *Dissertação de Mestrado*, UFSC, 1988.

#### ABSTRACT

The present work presents the numerical results experimentally validated, of the heat transfer in radial diffusers when the frontal disc is isolated. The numerical problem is solved by the finite volumes method considering a laminar, incompressible, constant properties flow of air. The validation of the numerical model is performed by means of the analogy between heat and mass transfer using the naphthalene sublimation technique.

APLICAÇÃO DO MODELO k-ε PARA O ESCOAMENTO  
TURBULENTO EM VÁLVULAS DE COMPRESSORES



C.J. DESCHAMPS, R.T.S. FERREIRA, A.T. PRATA  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina

RESUMO

O presente trabalho é uma investigação numérica do escoamento turbulento, incompressível e isotérmico em difusores radiais, utilizando-se o modelo k-ε de turbulência. A motivação do trabalho se deve à importância que o entendimento de tal fenômeno tem no projeto de válvulas tipo palheta, muito usadas em compressores alternativos. Resultados experimentais para a distribuição de pressão ao longo do difusor são obtidos visando a validação da solução numérica.

INTRODUÇÃO

Com o objetivo de determinar os parâmetros mais importantes na análise de sistemas de válvulas de compressores herméticos é necessário um completo entendimento do escoamento através dessas válvulas. Tal entendimento é particularmente importante em válvulas tipo palheta porque nestas situações o próprio escoamento é responsável pela abertura e fechamento das válvulas, sendo por esta razão denominadas automáticas.

A análise do escoamento através de válvulas automáticas pode ser muito complexa e laboriosa, especialmente se a geometria completa do sistema for considerada. Com o objetivo de se obter uma boa aproximação deste tipo de escoamento, geometrias mais simples são utilizadas. O escoamento através de difusores radiais pode ser considerado o problema básico para a análise de sistemas de válvulas, e é a geometria usada na presente investigação.

O difusor radial é composto de dois discos circulares, paralelos e concêntricos, sendo que um deles contém o orifício alimentador, como mostrado na fig. 1.

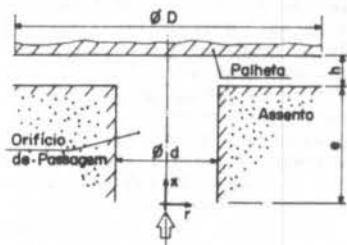


Fig. 1 - Geometria do escoamento.

Por analogia a um sistema de válvulas, o disco com o orifício por onde é suprida a vazão de fluido corresponde ao assento, o orifício é denominado orifício de passagem e o outro disco é denominado palheta. Esta nomenclatura será utilizada ao longo do desenvolvimento do trabalho.

Muitos investigadores têm estudado o escoamento em difusores radiais porque o mesmo serve como base para numerosas aplicações tecnológicas. Além da relevância do escoamento no projeto de válvulas de compressores, a análise de mancais de escora a ar e impactores de aerossol são exemplos adicionais.

Uma boa revisão dos trabalhos teóricos e experimentais publicados antes de 1956 é apresentada por Woodard [1]. O artigo de Ferreira e Driessen [2] apresenta a discussão de diferentes tipos de escoamentos comumente encontrados em válvulas tipo palheta, bem como a

revisão da bibliografia publicada anteriormente a 1986. Mais recentemente, uma solução numérica do escoamento laminar, incompressível e isotérmico do ar em difusores radiais, validada experimentalmente, foi apresentada para pequenos afastamentos entre os discos [3]. No entanto, observa-se que, para o caso do escoamento turbulento, soluções são obtidas somente em formas simplificadas, utilizando-se o método integral [4] ou a conservação da quantidade de movimento linear [5].

O presente trabalho tem o objetivo de investigar numericamente o escoamento turbulento, incompressível e isotérmico em difusores radiais, tendo em mente o sistema de válvulas de compressores herméticos.

As equações que regem o fenômeno são resolvidas usando-se o método dos volumes finitos, com o auxílio da técnica dos domínios sobrepostos. As quantidades pertinentes ao escoamento turbulento são calculadas utilizando-se o modelo de turbulência k-ε.

Os resultados numéricos são comparados com os resultados obtidos experimentalmente e, além disso, são discutidos alguns aspectos do modelo de turbulência utilizado.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O presente trabalho tem o objetivo de fornecer uma solução numérica do escoamento turbulento através da válvula representada na fig. 1. Como mostrado na figura, a alimentação do difusor é realizada através do orifício de passagem de diâmetro d e comprimento e. No orifício de passagem o escoamento é axial (direção x). Ao atingir a palheta, o escoamento é defletido e passa a ser radial (direção r). O diâmetro da palheta é D e o afastamento entre palheta e assento é h. A vazão de fluido através do sistema de válvulas é caracterizada pelo número de Reynolds, Re, baseado no diâmetro do orifício de passagem.

O cálculo numérico do escoamento foi baseado nas equações de Navier-Stokes, tomadas como uma média em relação ao tempo, para a situação axissimétrica. Para o escoamento permanente, isotérmico e incompressível, as equações da continuidade e da quantidade de movimento linear, utilizando-se a hipótese da viscosidade turbulenta, são:

$$\frac{\partial (RU)}{\partial X} + \frac{\partial (RV)}{\partial R} = 0 \tag{1}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial R} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_e \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \mu_e \frac{\partial U}{\partial R} \right) \right] + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_e \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \mu_e \frac{\partial V}{\partial R} \right) \right] \tag{2}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial R} = - \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} (\mu_e \frac{\partial V}{\partial X}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \mu_e \frac{\partial V}{\partial R}) \right] + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} (\mu_e \frac{\partial U}{\partial R}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \mu_e \frac{\partial V}{\partial R}) - 2 \mu_e \frac{V}{R} \right] \quad (3)$$

onde U e V representam, respectivamente, as componentes axial e radial da velocidade e P é a pressão. A viscosidade efetiva  $\mu_e$ , que representa a soma da viscosidade física do fluido e da viscosidade turbulenta, é obtida do modelo de turbulência k- $\epsilon$ , proposto por [6]. As equações diferenciais para k e  $\epsilon$  para a situação axissimétrica são

$$U \frac{\partial K}{\partial X} + V \frac{\partial K}{\partial R} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\mu_e}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial X} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\mu_e}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial R} \right) \right] + S_k \quad (4)$$

onde

$$S_k = \frac{\mu_T}{Re} \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{V}{R} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right\} - E \quad (5a)$$

ou

$$S_k = G - E \quad (5b)$$

$$U \frac{\partial E}{\partial X} + V \frac{\partial E}{\partial R} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\mu_e}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial E}{\partial X} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\mu_e}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial E}{\partial R} \right) \right] + S_E \quad (6)$$

onde

$$S_E = \frac{E}{K} (C_1 G - C_2 E) \quad (7)$$

Nas equações acima as seguintes adimensionalizações foram adotadas,

$$\begin{aligned} \mu_e &= (\mu + \mu_t) / \mu ; \quad \mu_t = \mu_t / \mu \\ X &= x/d ; \quad R = r/d ; \quad U = u/\bar{u} ; \quad V = v/\bar{u} \quad (8) \\ P &= p/(\rho \bar{u}^2) ; \quad E = \epsilon d/\bar{u}^3 ; \quad K = k/\bar{u}^2 ; \\ Re &= \rho \bar{u} d / \mu \end{aligned}$$

onde  $\rho$  e  $\mu$  são, respectivamente, a massa específica e a viscosidade absoluta do fluido que escoam através do orifício de passagem com velocidade média  $\bar{u}$ . Além disso, p é a pressão manométrica no escoamento,  $\mu_t$  é a viscosidade turbulenta, k é a energia cinética e  $\epsilon$  é a dissipação da energia cinética turbulenta.

As constantes no modelo de turbulência são tomadas diretamente de Launder e Spalding [6] e são:

$$C_\mu = 0,09; C_1 = 1,44; C_2 = 1,92; \sigma_k = 1,0; \sigma_\epsilon = 1,3 \quad (9)$$

A seguir são apresentadas as condições de contorno do problema.

Para o eixo de simetria (R=0),  $V = \partial U / \partial R = 0$ . Quanto à prescrição das condições de contorno na entrada do orifício de passagem, deve-se ter em mente que no presente trabalho são analisados escoamentos com pequenos afastamentos entre palheta e assento. Isto faz com que o perfil de velocidade prescrito na entrada do orifício de passagem tenha pouca influência na distribuição de pressão sobre a palheta, conforme demonstrado em [7]. O perfil de velocidade adotado na entrada do orifício foi o uniforme dado por  $U=1$ . Na saída do difusor, as condições de contorno para a componente radial V e para a componente axial U são  $\partial(RV)/\partial R = U = 0$ . Nas paredes sólidas, a condição de não escorregamento, ou velocidade zero, é adotada para a componente da velocidade paralela à superfície da parede. Para a outra componente, assume-se que sua derivada na direção normal à superfície

seja igual a zero. Para a energia cinética K e sua dissipação E assume-se que na região de entrada do orifício de passagem o escoamento turbulento seja completamente desenvolvido. Desta forma, conforme Karki [8], as condições de contorno nessa região para K e E são  $K=0,001$  e  $E=0,1K^2$ . Na saída do difusor, as condições de contorno foram tomadas como  $\partial(RK)/\partial R = \partial(RE)/\partial R = 0$ . Os gradientes normais de quantidades escalares em relação ao eixo de simetria devem ser nulos, logo  $\partial(RK)/\partial R = \partial(RE)/\partial R = 0$ . Finalmente, para as paredes sólidas é necessário um tratamento um pouco mais elaborado. A difusão da energia cinética nas paredes foi assumida nula. Já para o caso da dissipação da energia cinética é um tanto difícil fixar uma condição de contorno nas paredes sólidas já que nestas regiões  $E \rightarrow \infty$ . Para contornar este problema, fixa-se o valor de E para os pontos nodais adjacentes à parede de acordo com a seguinte expressão, apresentada em [8],

$$E = C_\mu^{3/4} K^{3/2} / (0,4 X_p) \quad (10)$$

onde  $X_p$  é a distância adimensional do ponto até a parede.

Nas regiões próximas das paredes sólidas ocorre a redução da intensidade da turbulência e na subcamada limite viscosa, os efeitos da turbulência são desprezíveis. O emprego do modelo k- $\epsilon$ , adotado na presente análise, não é adequado nestas regiões. Por esta razão, a função - parede sugerida por Launder e Spalding [6] foi utilizada para unir os pontos dos contornos sólidos com os pontos internos do domínio de cálculo.

A formulação do problema está concluída. Das equações diferenciais e das condições de contorno vê-se que o único parâmetro não geométrico a ser prescrito é o número de Reynolds.

A seguir é apresentada a metodologia utilizada na solução do problema.

#### SOLUÇÃO NUMÉRICA

As equações diferenciais que governam o escoamento turbulento e as do modelo de turbulência k- $\epsilon$  foram resolvidas utilizando-se o método dos volumes finitos [9] e observando-se as condições de contorno apresentadas anteriormente. No método dos volumes finitos, o domínio de solução é dividido em volumes de controle que não se superpõem e as equações diferenciais são então integradas em cada um destes volumes. Desta integração resultam equações algébricas que, quando resolvidas, fornecem os campos de velocidade, pressão, energia cinética e sua dissipação. O algoritmo SIMPLER [10] foi usado para a solução numérica das equações algébricas. Para acelerar a convergência na obtenção da solução, o algoritmo de correção em bloco de [11] foi implementado no programa computacional.

Na solução numérica foi utilizada a técnica dos domínios sobrepostos. Tal técnica é particularmente interessante quando regiões sólidas, que não contribuem na solução do escoamento, devem ser excluídas do domínio de cálculo. Geralmente, o uso desta técnica representa economia tanto no tempo computacional gasto como no armazenamento de variáveis. No presente trabalho foram utilizados dois domínios sobrepostos, conforme ilustrado na fig. 2. Na solução das equações discretizadas, os dois domínios são considerados individualmente como se fossem independentes, embora estejam acoplados pelas condições de contorno. As soluções são obtidas para cada domínio através de um processo iterativo, no qual os dois domínios interagem entre si até a solução final. Esta interação é realizada através da região de sobreposição, via condições de contorno das fronteiras desta região até que as grandezas de interesse não mais se alterem. Para maiores detalhes sobre esta metodologia de solução ver [7].

Atenção especial foi tomada na escolha da malha a ser utilizada na discretização do domínio de cálculo. Para o domínio A foi utilizada uma malha 38x15 nas direções x e r, respectivamente. Por sua vez, para o domínio B utilizou-se uma malha 15x34. A malha utilizada



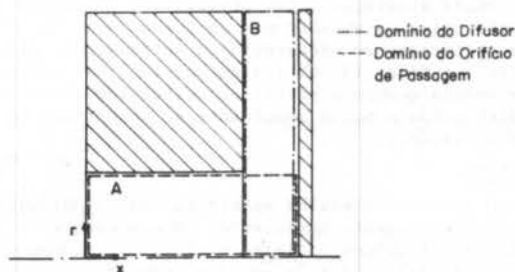


Fig. 2 - Geometria do escoamento e fronteiras dos domínios de cálculo do difusor e orifício de passagem.

em ambos os domínios não foi uniforme, dando-se um maior refino nas regiões próximas das paredes sólidas.

#### EXPERIMENTO

A fig. 3 apresenta uma vista esquemática da banca da experimental utilizada para validar os resultados numéricos. Ar comprimido armazenado em 3 reservatórios com aproximadamente  $1,6 \text{ m}^3$  e pressão máxima de 11 bar escoam através de um duto, de 75mm de diâmetro e 6,5 m de comprimento, até chegar à seção de teste. Uma vista ampliada da seção de teste é mostrada na fig. 4. Na figura pode-se ver o assento, o orifício de passagem, a palheta e o resto da estrutura usada no posicionamento da palheta.

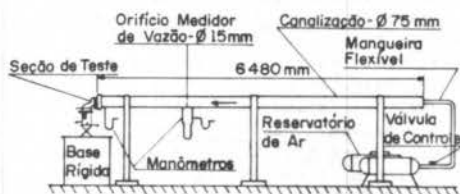


Fig. 3 - Vista geral esquemática do experimento.

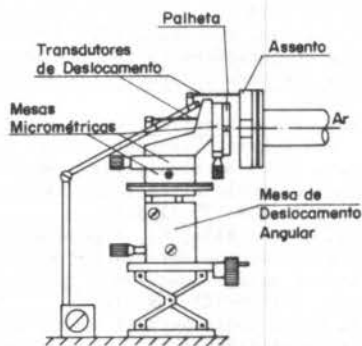


Fig. 4 - Seção de teste e sistema de posicionamento.

O diâmetro e o comprimento do orifício de passagem são, respectivamente, 30 e 28 mm e o diâmetro da palheta é 90 mm ( $e/d = 0,933$  e  $D/d = 3$ ).

O maior interesse na presente investigação é a determinação da distribuição de pressão na palheta. Por este motivo, a palheta tem uma característica especial como mostrado na fig. 5. Ao longo do diâmetro da palheta é instalado um cursor contendo uma tomada de pressão (0,7 mm de diâmetro). Esta tomada de pressão, por sua vez, é interligada através de um canal interno até uma das extremidades do cursor e ali conectada a um transdutor indutivo de pressão. Na outra extremidade é conectado um transdutor indutivo de deslocamento, responsá-

vel pela leitura da posição instantânea da tomada de pressão. Ambos os sinais dos transdutores indutivos são introduzidos em uma ponte amplificadora e depois a um registrador X-Y. À medida que o cursor é movido ao longo do diâmetro da palheta, o registrador X-Y vai desenhando simultaneamente sua distribuição de pressão. O transdutor de pressão tem um fundo de escala de 0,01 bar e o transdutor de deslocamento de  $\pm 100 \text{ mm}$ .

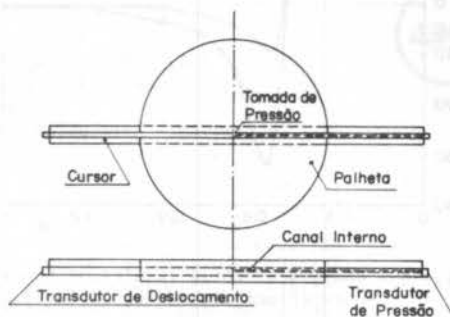


Fig. 5 - Palheta com tomada de pressão deslizante.

Um sistema de posicionamento foi usado para fornecer a posição correta da palheta, que é um requisito essencial no experimento. Ambos os discos devem estar concêntricos, paralelos e colocados a uma determinada distância um do outro. Inicialmente, a palheta é cuidadosamente posicionada utilizando-se uma máscara desenhada no assento, de tal forma a assegurar a concentricidade e alinhamento entre os discos. Três mesas micrométricas com divisão de escala igual a 0,01 mm permitem o deslocamento da palheta nos três eixos de coordenadas da fig. 4. Ajustes finos na rotação da palheta em torno de cada um desses eixos são possíveis com o uso da mesa de deslocamento angular.

Num próximo passo, duas esferas de aço com diâmetros de 9,520 e 3,960 mm suspensas em finas linhas de seda são postas em diferentes posições entre os discos para a verificação do paralelismo e afastamento entre os mesmos. A verificação final do posicionamento é feita através da simetria da distribuição de pressão obtida sobre a palheta.

As principais quantidades medidas no experimento são: distribuição de pressão ao longo da palheta, fluxo de massa no difusor e afastamento entre palheta e assento. O fluxo de massa através do difusor foi obtido através da queda de pressão em um orifício calibrado com um diâmetro mínimo de 15 mm. A queda de pressão foi medida com o uso de um manômetro diferencial de água em "U", com altura máxima de 1000 mm.

A análise da incerteza associada aos resultados experimentais foi efetuada seguindo-se a metodologia descrita por Moffat [12]. A máxima incerteza experimental, referente à pressão na região de estagnação da palheta ( $R=0$ ) é menor do que 3%.

A seguir são apresentados alguns resultados calculados pelo modelo de turbulência  $k-\epsilon$  para a distribuição de pressão na palheta. Adicionalmente, são indicados aspectos críticos e possíveis modificações no modelo numérico.

#### RESULTADOS

As figs. 6 e 7 apresentam a comparação entre os resultados experimentais e a solução numérica para  $h/d = 0,05$ ;  $Re = 13325$  e  $h/d = 0,05$ ;  $Re = 23275$ , respectivamente. Na abscissa das figuras está a posição radial adimensional  $R$  enquanto que na ordenada está o dobro da pressão manométrica adimensional  $P$ . Observa-se, em ambas as figuras, a boa concordância entre os resultados para  $R < 0,5$ . Porém, para a região de  $R > 0,5$  os níveis de pressão negativa preditos pela solução numérica, em ambas as situações, são menores do que aqueles obtidos experimentalmente. No entanto, a forma das curvas de pressão experimental e numérica são semelhantes.



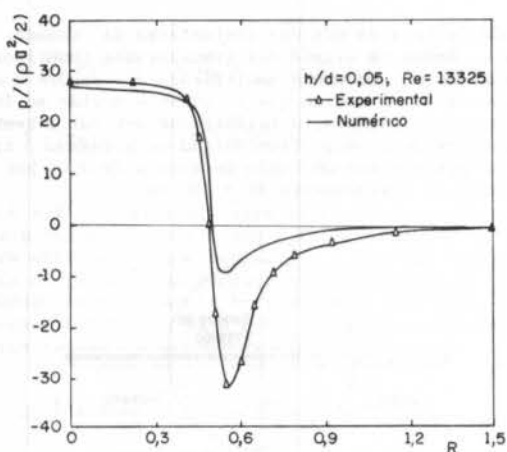


Fig. 6 - Comparação entre resultados numérico e experimental;  $h/d=0,05$ ,  $Re=13.325$ .

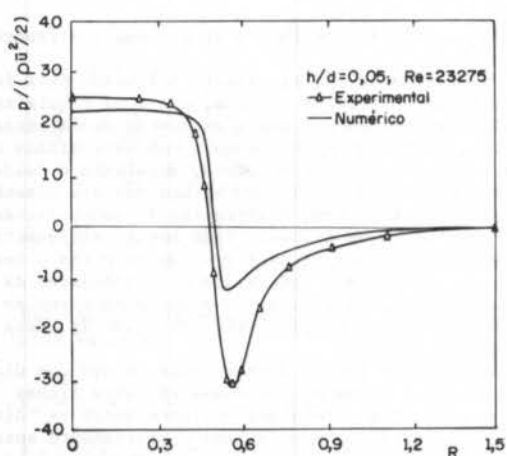


Fig.7 - Comparação entre resultados numérico e experimental;  $h/d=0,05$ ,  $Re=23.275$ .

O fato da distribuição de pressão obtida com a solução numérica não concordar plenamente com o resultado experimental tem algumas prováveis justificativas. Inicialmente, deve-se lembrar que o modelo de turbulência  $k-\epsilon$ , embora testado em muitas situações e ser o modelo mais difundido na análise de escoamentos turbulentos, tem algumas restrições quanto ao seu emprego. Ele não é recomendável em regiões onde o escoamento não seja completamente turbulento, por exemplo. Também regiões de separação e de aceleração do escoamento tem efeitos negativos sobre o modelo numérico. Segundo [3], o escoamento em difusores radiais apresenta basicamente as três características de escoamento apontadas acima. Na região central da palheta ( $R < 0,5$ ), devido ao pequeno afastamento entre palheta e assento, ocorre a estagnação do fluido e possivelmente ali os níveis de turbulência se jam baixos. Por outro lado, na entrada do difusor ( $R = 0,5$ ) ocorre grande aceleração do fluido devido à diminuição da área de passagem. Além disso, na entrada do difusor também ocorre a separação do escoamento em números de Reynolds elevados.

Apesar destas restrições, insistiu-se na utilização do modelo  $k-\epsilon$ , com o objetivo de promover alterações no esquema numérico que viessem a melhorar sua capacidade de previsão para este escoamento. A seguir são apresentadas algumas sugestões.

Para contornar o problema da existência de regiões com níveis baixos de turbulência, uma possível modificação no modelo numérico é a inclusão da relaminarização do escoamento, conforme proposto por Launder e Spalding [6]. Esta técnica prevê o retorno do escoamento turbu-

lento para laminar.

Outra alteração a ser introduzida no modelo  $k-\epsilon$  é a consideração da anisotropia da turbulência em virtude da aceleração do escoamento na entrada do difusor. Kobayashi e Yoda [13] obtiveram sucesso na utilização deste modelo quando o perfil de velocidade axial médio era distorcido e muito semelhante ao encontrado na presente situação.

#### CONCLUSÃO

O presente trabalho apresenta uma investigação numérica do escoamento turbulento, incompressível e isotérmico em difusores radiais, utilizando-se o modelo de turbulência  $k-\epsilon$ . Na solução do escoamento, o método dos volumes finitos foi utilizado com auxílio da técnica dos domínios sobrepostos. A motivação do trabalho veio da importância desta geometria no estudo do carregamento de válvulas tipo palheta utilizadas em compressores herméticos. Perfis de pressão ao longo da palheta foram obtidos numericamente, em função do afastamento entre os discos e do número de Reynolds do escoamento sendo comparados com resultados obtidos experimentalmente. Por fim, são apontados alguns aspectos críticos do modelo numérico com relação ao escoamento analisado e indicadas formas a serem implementadas no futuro.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Woolard, H.W., A theoretical analysis of the viscous flow in a narrowly spaced radial diffuser. *J. Appl. Mech.*, 79: 09-15 (1957).
- [2] Ferreira, R.T.S., and Driessen, J.L., Analysis of the influence of valve geometric parameters on the effective flow and force areas. *Proc. 9th Purdue Conference, West Lafayette, Indiana*, pp.632-646 (1986).
- [3] Prata, A.T., Ferreira, R.T.S. e Deschamps, C.J., Escoamento laminar em difusores radiais, Computação e experimento. *I Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, Rio de Janeiro, RJ, pp.63-66 (1986).
- [4] Moller, P.S., Radial flow without swirl between parallel disc. *Aero.Quart.*, 14: 163-186 (1963).
- [5] Takenaka, T., Yamane, R., Iwamizu, T., Thrust of the disc valves. *Bull. JSME*, 7: 558-566 (1964).
- [6] Launder, D. and Spalding, D.B., The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3:269-289 (1974).
- [7] Deschamps, C.J., Escoamento laminar através de válvulas de compressores. *Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, SC* (1987).
- [8] Karki, K.C. and Patankar, S.V., Use of subdomains for flow computations in complex geometries. *Numerical Methods in Heat Transfer*, ASME, HTD 62: 7-12 (1986).
- [9] Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington, D.C. (1980).
- [10] Patankar, S.V., A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations. *Numerical Heat Transfer*, 4: 409-425 (1981).
- [11] Settari, A. and Aziz, K., A generalization of the additive correction methods for the iterative solution of matrix equations. *SIAM J. Numer. Analysis*, 10:506-521 (1973).
- [12] Moffat, R.J., Contributions to the theory of single-sample uncertainty analysis. *J. Fluids Engng.*, 104:250-260 (1982).
- [13] Kobayashi, T. and Yoda, M., Modified  $k-\epsilon$  model for turbulent swirling flow in a straight pipe. *JSME International Journal*, 30: 66-71 (1987).

#### ABSTRACT

This paper is a numerical investigation of the turbulent radial outflow between parallel discs, using the  $k-\epsilon$  turbulence model. The problem is analyzed for steady, incompressible and isothermal flow. The motivation of this work comes from the importance that this type of flow has in reed type valves design, widely used in reciprocating compressors. Experimental results are obtained for pressure profiles along the diffuser in order to validate the numerical solution.



PARAMETROS DE DISEÑO INICIALES PARA QUEMADOR DE ASERRIN EN SUSPENSION

ROBINSON BETANCOURT ASTETE, RENE CIFUENTES BOBADILLA  
 Dpto.Ing.Mecánica, U.de La Frontera, Casilla 54-D Temuco, Chile  
 ALEJANDRO SAEZ CARREÑO  
 Dpto.Mecánica, U.T.F.S.M., Casilla 110-V Valparaíso - Chile

RESUMEN

La necesidad de disponer de un quemador de aserrín que permita la combustión de partículas en suspensión, con alto rendimiento de quemado, originó este trabajo. Se utilizaron diferentes promotores de giro para imprimir Swirl a las partículas a la salida del quemador, con lo que se logró incrementar el tiempo de residencia en la zona, alcanzando el proceso de combustión en la totalidad de ellas. La obtención de frente de llama estable muestra la factibilidad de utilizar quemadores para aserrín en suspensión.

INTRODUCCION

Como consecuencia de procesos de elaboración de maderas se generan importantes volúmenes de aserrín. La energía calórica que puede aportar este recurso en procesos de combustión, hace que se considere como alternativa atractiva, máxime si se alcanzan procesos de alto rendimiento de quemado, que trae como consecuencia además, no generar contaminación ambiental.

DESARROLLO

Se diseñó y construyó un prototipo de quemador que permitiera, a través de los ensayos, precisar los parámetros para alcanzar el proceso de combustión del aserrín, se determinó la velocidad de transporte, distribución granulométrica, concentración de partículas y perfiles de velocidad utilizando tamaños de 100% bajo 12, 16, 20 y 30 mallas.

Por ref. [1], [2], [3], [4], [5], [6], se tiene para el transporte de partículas:

$$C_R = \frac{V_p}{V+V_p} \tag{1}$$

$$C_T = \mu_f \frac{D}{D_p} \tag{2}$$

- $V_p$  = Concentración total de sólidos
- $C_R$  = Concentración volumétrica de sólidos
- $V$  = Volumen del fluido
- $C_T$  = Concentración de transporte
- $\mu_f$  = Carga del fluido.

Coefficiente de arrastre de las partículas

$$\xi = \frac{24}{Re_p} + \frac{4}{Re_p^{1/2}} + 0.4 \tag{3}$$

Cálculo de resistencia para el transporte de partículas.

$$\psi_T = \frac{3}{2} C_T \frac{d}{dp} \frac{\bar{u}}{up_x} \sqrt{\left(\frac{up_y}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{up_x}{u}\right)^2} \left[\left(\frac{up_y}{u}\right)^2 + \left(1 - \frac{up_x}{u}\right)\right] \xi \tag{4}$$

Velocidad de fluido  $\bar{u}$  > velocidad caída estacionaria.

$$up_y \ll \bar{u} \quad up_y \approx 0 \quad \frac{up_y}{u} \approx 0$$

$$\psi_T = \frac{3}{2} C_T \frac{d}{dp} \frac{\bar{u}}{up_x} \sqrt{\left(1 - \frac{up_x}{u}\right)^2} \xi \tag{5}$$

Se valora la resistencia adicional mediante:

$$\frac{up_x}{\bar{u}} = \frac{1}{1 + C \cdot \left(\frac{D_p}{D} - 1\right)^{2/3} \left(\frac{dp}{d}\right)^{2/3} \left(1 + \frac{200}{Fr - Fr_0}\right)} \tag{6}$$

El desarrollo analítico precedente y mediciones de laboratorio permitieron precisar velocidad de transporte 12 (m/s).

Se diseñaron tres promotores de giro con ángulos de 63°, 67° y 71° [Fig.1].

- $A_F$  = Area de Flujo: 1,77 E-3[m<sup>2</sup>],
- $A_h$  = Area de hélice: 0,40 -3[m<sup>2</sup>],
- $Z$  = Número de entradas: 6

Los difusores se construyeron con ángulos de 15°, 20°, 30° y 45°.

Por ref. [7] se utilizó para la determinación del número de Swirl:

$$S = \frac{2}{3} \frac{(dex^3 - din^3) \cdot tg\alpha}{(dex^2 - din^2) \cdot d} \tag{7}$$

Para alcanzar efectivamente el proceso de combustión del aserrín se determinó la relación aire-combustible mediante relaciones estequiométricas [8] [9]; en las experiencias de laboratorio se determinó la relación real.

Las mediciones que permitieron obtener los perfiles de velocidad y concentración de partículas se hicieron en equipo mostrado en la fig. [2]

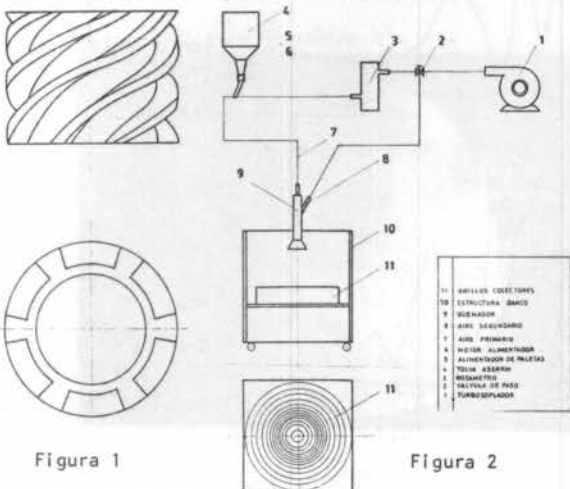
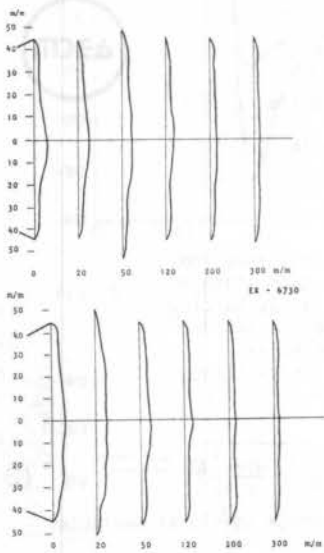


Figura 1

Figura 2

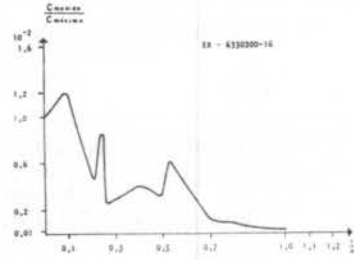
Perfiles de Velocidad obtenidos

Ex : Promotor de giro exterior  
 1° y 2° dígito: ángulo promotor de swirl  
 3° y 4° dígito: ángulo difusor  
 5° - 7° dígito: distancia axial quemador-colector

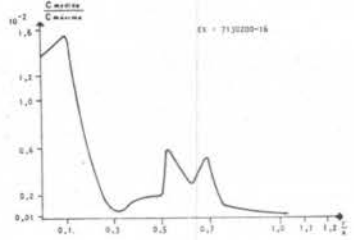


Con promotor de 63°  
 Gráfico 1

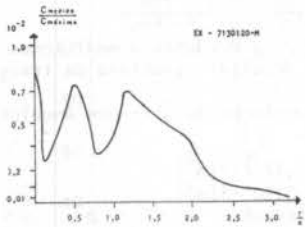
Con promotor de 67°  
 Gráfico 2



Con promotor de 63°  
 Gráfico 7



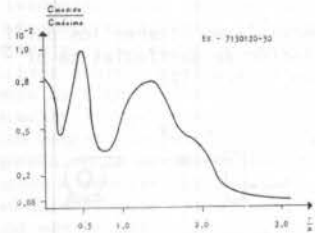
Con promotor de 71°  
 Gráfico 8



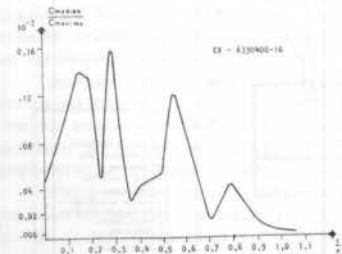
Concentración de partículas  
 Con promotor de 71°  
 Gráfico 3



Con promotor de 63°  
 Gráfico 4

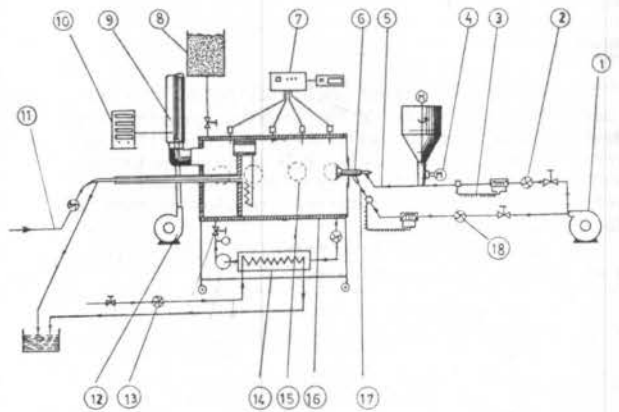


Con promotor de 71°  
 Gráfico 5



Con promotor de 68°  
 Gráfico 6

BANCO DE PRUEBAS HORNO ISOTERMICO



1. Turbosoplador
2. Medidor flujo aire primario
3. Calefactor aire primario
4. Motor alimentador de aserrín
5. Entrada aire primario
6. Quemador
7. Selector de termocuplas
8. Estanque de llenado
9. Display de temperatura
10. Analizador de gases
11. Entrada de agua a la red
12. Soplador para tiraje inducido
13. Medidor de flujo de agua
14. Intercambiador de calor
15. Mirillas al hogar
16. Horno isotérmico
17. Entrada aire secundario
18. Medidor de flujo aire secundario

**ENSAYOS REALIZADOS EN EL BANCO DE PRUEBAS HORNO ISOTERMICO.**

Se precalentó el horno mediante quemador utilizando F.O.N° 2. Una vez instalado el prototipo de quemador para aserrín, se conectan los calefactores de aire primario y secundario, controlando las revoluciones del alimentador para tener control exacto de la masa de combustible suministrada.

Se instalan tres promotores sucesivamente en el quemador, para todos los ensayos.

Se espera las condiciones de estabilidad de todo el sistema y se procede a registrar los valores requeridos para el análisis en forma simultánea, una vez que se observa la formación y característica de la llama.

Ensayos 1-2		Ensayos 3-4	
Vol. hogar	: 0.213 [m <sup>3</sup> ]	0.213 [m <sup>3</sup> ]	
m combustible	: 28 [kg/hr]	28 [kg/hr]	
t° aire normal	: 20°C	20°C	
partículas	: 100% bajo 12 mall.	100% bajo 16 mallas	
t° aire primario	: 50°C	50°C	
t° aire secund.	: 100°C	100°C	
ángulo hélice	: 63°	71°	
promotor			

**ENSAYOS 1-2**

λ (-)	Vtotal		VAP		VAS		
	m <sup>3</sup> N/h	m <sup>3</sup> /h	WAP	m <sup>3</sup> N/h	m <sup>3</sup> /h	m <sup>3</sup> N/h	m <sup>3</sup> /h
1.1	112,08	119,9	20	22,4	23,9	89,6	95,9
			25	28,0	29,9	84,1	89,9
			30	33,6	35,9	78,5	83,9
			35	39,2	41,9	72,9	77,9
1,15	120,64	129,09	20	24,2	25,8	96,5	103,2
			25	30,1	32,2	90,4	96,8
			30	36,2	38,7	84,4	90,3
			35	42,2	45,1	78,4	83,9

**ENSAYOS 3-4**

λ (-)	Vtotal		VAP		VAS		
	m <sup>3</sup> N/h	m <sup>3</sup> /h	WAP	m <sup>3</sup> N/h	m <sup>3</sup> /h	m <sup>3</sup> N/h	m <sup>3</sup> /h
1,1	120,64	129,09	20	24,1	25,8	96,5	103,2
			25	30,2	32,3	90,5	96,8
			30	36,2	38,7	84,4	90,3
			35	42,2	45,2	78,4	83,9
1,15	126,13	134,96	20	25,2	26,9	100,9	107,9
			25	31,5	33,7	94,6	101,2
			30	37,8	40,4	88,3	94,4
			35	44,1	47,2	81,9	87,7

**RESULTADOS OBTENIDOS**

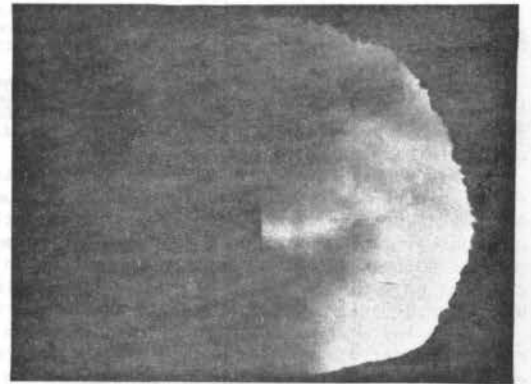
Parts. 100% bajo 20 mallas λ = 1.1



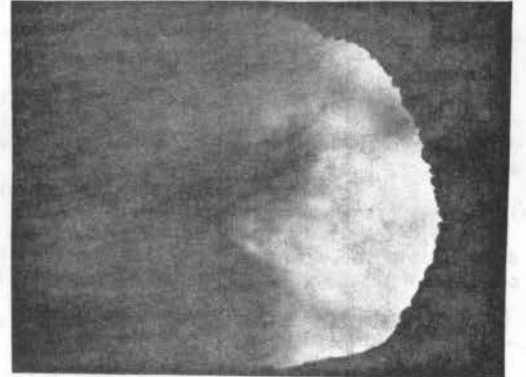
Parts. 100% bajo 20 mallas λ = 1.12



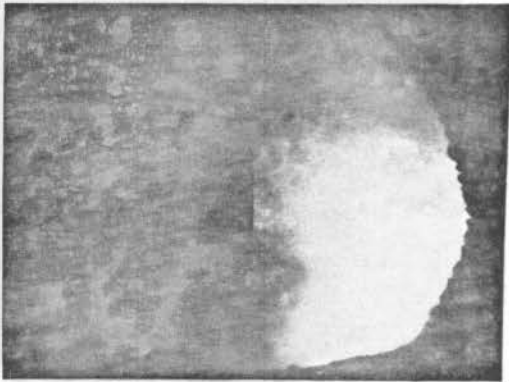
Parts. 100% bajo 30 mallas λ = 1.10



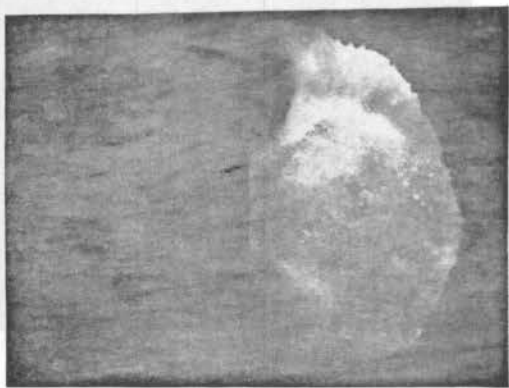
Parts. 100% bajo 30 mallas λ = 1.12



Mezcla al 50% 20-30 mallas  $\lambda = 1.12$



Mezcla al 50% 20-30 mallas  $\lambda = 1.23$



#### DISCUSION

En gráficos 1 y 2 se aprecia que los ángulos de hélice utilizados en los promotores, se logró perfiles de velocidad prácticamente constante para las distancias axiales y radiales medidas.

Las experiencias realizadas en la concentración radial de partículas, permitieron determinar que los ángulos de promotores que se utilicen en este tipo de quemadores, están entre los ensayados, se alcanzaron mezclas homogéneas; los máximos de concentración se alcanzaron en 3 ó 4 puntos, gráfico 3-8, lo que implica una mejor distribución de la mezcla aserrín-aire.

Con los ensayos se logró la relación aire primario y secundario adecuada, cuando esto no ocurre, en el centro del chorro se observan partículas con trayectorias rectilíneas, que no alcanzan a adquirir el momento angular, para aumentar el tiempo de residencia a la salida del quemador.

En fotografías 1 y 2 se aprecian partículas incandescentes con diversas trayectorias y retroceso del frente de llama, esto se generó por no existir aún volumen de hogar adecuado.

En 3 y 4 se alcanza el proceso de combustión para ese tamaño de partículas, se mantiene la relación de aire de ensayos anteriores y se aumenta el volumen de hogar.

En 5 se aprecia el quemado del combustible, sin lograr aún frente de llama definido.

En vista 6 se aprecia el frente de llama definido y estable, alcanzando el proceso de combustión adecuado.

#### CONCLUSIONES

Los resultados alcanzados en el trabajo experimental permiten recomendar que la velocidad promedio de transporte para este tipo de aserrín es 12 (m/s).

El coeficiente de transporte promedio, para los tamaños de partículas tratadas es 0,8.

El frente de llama estable se logra con caudal de aire primario 33 [m<sup>3</sup>/hrs] y secundario de 100 [m<sup>3</sup>/hr].

Del aire total suministrado al proceso de combustión, el 25% corresponde al aire primario.

La proporción de aire con que se alcanzó mayor rendimiento de quemado es  $\lambda = 1,23$ .

El rendimiento de combustión de 87% se alcanzó con 17,2% de CO<sub>2</sub> en los gases productos.

#### REFERENCIAS

- [1] Durand, R. Basic relations of the transportation of Solids. Int. Hydraulic Conv. Spet. 1953.
- [2] Newtt, D. "et al" Hydraulic Conveyings of Solids in horizontal pipes. Trans. Inst. Chem. Eng. 1955.
- [3] Schuchart, P. "et al" Widerstandsgesetze beim pneumatischen Transport durch gerade Rohre und Tohrkrümmen Chem-Ing. Techn. 1968.
- [4] Welschof, G. Pneumatische Förderung bei grossen Förderkonzentrationen. VDI Verlag Düsseldorf, Research report, 1962; 492.
- [5] Gasterdtadt, J. Die experimentelle Untersuchung des Pneumatischen Fördervorganges. VDI Verlag Berlin, N° 265, 1924.
- [6] Hitchcock, S. "et al" The Pneumatic conveying of spheres through straight pipes. National Coal Board, England, report N° 2053, 1956.
- [7] Chigier, N. "et al" Experimental Investigation of Swirlin Vortex Motion in Jets. Journal of Applied Mechanics Trans Asme. 1967.
- [8] Betancourt, R. Estudio teórico experimental de la combustión de aserrín de pino insigne. Temuco, Chile, 1987.
- [9] Wenzel, H. The chemical technology of wood. Academic Press, N. Y. 1970.

#### ABSTRACT

The requirement of to have a burner for sawdat that allow us the suspension particles combustion with high-efficiency burnt-out, is the origin of this paper.

Different turn promoter were used for to give up Swirl to particles in the burner diffusor. This is a method for to increase time residence in that zone, burning all sawdat particles, wath give us an steady flame.



TURBINE FLOWMETER - A COMPARISON BETWEEN HELICAL AND STRAIGHT  
BLADE SHAPE



VILSON CARLOS DA SILVA FERREIRA  
Deptº Engenharia Mecânica - UFRGS - P.Alegre - RS  
RICHARD A. FURNESS  
Technical Division - Moore Barret and Redwood Ltd  
Cheshire - England

ABSTRACT

A comparison between the flow behavior inside two types of turbine flowmeter is produced in this paper. The two types are the helical and straight blade shape. The study was based on the experimental velocities measured using a Laser Doppler Velocimeter (LDV) technique. The flow pattern inside the two types was pictured by two components of velocity: the axial and the circumferential one. Conclusions about the influence of the meter geometry on the flow field are finally produced.

INTRODUCTION

A turbine meter (TM) is a simple turbomachine which produces no external work. All the energy collected from the main flow is used to overcome the internal resistance which are very small comparing to the overall energy available in the flow.

The total resistance can be treated as consisting of two groups of different nature: the mechanical friction (non-fluid) and the fluid drag resistance. The former depends basically on bearing friction, hub thrust friction and pick up resistance while the latter depends on hydrodynamic drag on the blades, on the hub and at the tip. The flow behavior is affected by both groups through the physical and geometrical parameters. The main ones to be considered are: bearing specifications, number of blades, blade shape (twisted or straight), blade dimensions such as, thickness, chord, hub and tip radii, tip clearance, etc.

The paper investigates the flow patterns of two types of TM having different blade shape: helical and straight one. The study is aimed at understanding the flow process through the blade passage and the influence of the meter geometry on the flow field. Part of this study was already presented at the NEL Conference [1] and part at the COBEM 87 [2].

At the present stage no attempt was taken to predict the meter factor. It is believed that only after the flow throughout the meter is completely determined the meter factor can be better predicted.

TESTED TURBINES

The test rig, the equipment and the LDV technique adopted for the experimental measurements were presented and discussed in Ref. [3] and [4].

Four different 2" diameter turbine meters were used for measurement purposes. Two helical blade shape defined as type B and C and two straight blade defined as type D and E.

In order to have the fluid behavior affected by only one parameter (the blade shape), the tested turbines were designed to have similar the other remaining parameters. The mechanical friction was also minimized. The pick up resistance was virtually eliminated by using an optic-tachometer and the bearing friction reduced using ball bearing types. All turbine meters have the same flowrange and can perfectly fit inside the same test section using the same supports and hangers. Table 1 shows the main geometrical characteristics and Fig. 1 presents the four calibration curves.

Table 1 - Geometrical Characteristics of the Turbine Meters

	Turbine B (helical)	Turbine C (helical)	Turbine D (straight)	Turbine E (straight)
No. Blades	10	10	10	10
Blade Thickness (mm)	.6 to 1.3	.6 to 1.3	.5	.5
Blade Angle (Degree)	20 to 40	20 to 40	30	30
Tip Radius (mm)	22.25	22.25	22.21	22.15
Hub Radius (mm)	9.75	9.75	9.75	9.75
Hub Length (mm)	15.6	15.6	15.4	15.4
Outer meter Radius (mm)	22.65	22.65	22.65	22.65
Helical Pitch (mm)	164.4	164.4	--	--
Chamfered Angle	30° (inlet)	30° (outlet)	30° (inlet)	0°

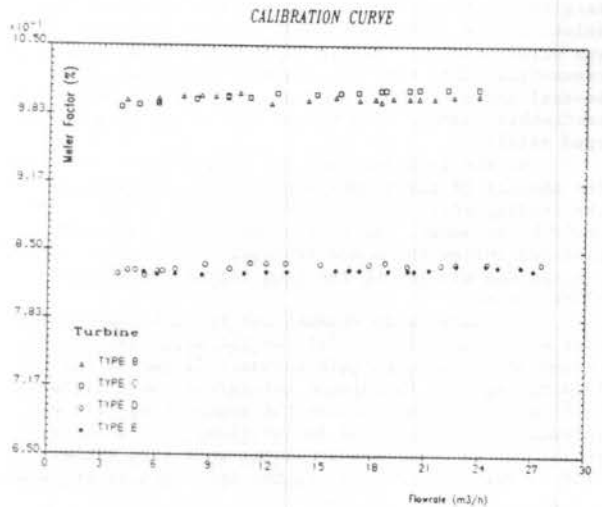


Fig.1 Calibration Curves (turbines B, C, D, and E)

$$\text{Meter Factor (\%)} = \frac{\text{Meter Factor (pulses/m}^3\text{)}}{50530.85} \quad \text{Eq. 1}$$

The value 50530.85 P/m<sup>3</sup> is the meter factor for Turbine B at 20 m<sup>3</sup>/h.

Several radial planes of measurement (Stations) were chosen along the test section defined by the z-coordinate [2]. At each station two profiles of the velocity vector were measured. Every single profile comprised a maximum of 12 points from hub to tip.

Two different flowrates, both in the linear part of its calibration curve were tested: flowrate 1 ( $6 \text{ m}^3/\text{h}$ ) and flowrate 2 ( $20 \text{ m}^3/\text{h}$ ).

The rotor of the turbine C was in fact the same as that of turbine B, mounted in reverse orientation.

#### MEASURED RESULTS

Two components of velocity were measured inside the blade passage: the axial component  $V_z$ , and the circumferential one,  $V_\phi$ . Although influence of the rotating blades was expected upon the two components, no dependence with the  $\phi$ -coordinate, was experimentally verified. The flow field inside the  $\text{TM}_S$  was then considered axisymmetric, that is:

$$V = f[V_z(z,r), V_\phi(z,r)] \quad \text{Eq. 2}$$

Axial Velocity Component - ( $V_z$ ). The axial component showed sensitivity to the flowrate and to the position of the measurement (z, and r-coordinates). Its variation (in magnitude) was linearly dependent on the flowrate, as was expected. For the same turbine at different flowrates, the non-dimensional representation of the profiles were practically unchanged. At the inlet, upstream of the rotor, the small difference of the flow pattern among the four turbines was attributed to the overall uncertainty of the measurement. At these stations the main conditioning of the flow was effectively performed by the supports and the meter central body.

At the leading edge, the most significant effect was the blockage caused by the blades. The flow acceleration depends on the blade shape, blade thickness and on the blade chamfer angle. If the chamfer angle was different from zero, the flow was accelerated in accordance with the inclination of the leading edge (turbines B and D). If the blades had zero chamfer angle, the flow acceleration has occurred equally at the same station (turbines C and E). The flow acceleration was more pronounced at the hub of the turbine B because its blade roots were thicker.

In the blade passage there was a remarkable difference between the helical and the straight blade shape turbines. Between helical blades the axial flow was practically unchanged. The blade shape compensated the distortion caused by the leading edge acceleration keeping the flow profile flatter than it was at the inlet. Inside a straight blade passage the axial flow was driven towards the tip producing a small radial cross-flow. This fact was visually confirmed after several hours of test running. Small streak lines were noticeable running from hub to tip as the flow developed axially.

At the trailing edge the deceleration caused by the absence of the blades works in the opposite way to the leading edge. In the outlet region, as far as it could be measured, the flow pattern kept the shape produced inside the blade passage. The "helical outlet" pattern was similar to the flow inside the helical blade passage.

The turbulence intensities for the axial component were higher (7% to 12%) at the wall than at the center of the passage (mid-radius). Closer to the leading edge the turbulence intensities were higher (12%) at any radius because the approaching blades introduced perturbations in the flow. At the outlet region the turbulence intensities were even higher (12% to 20%) due probably to the influence of the wake.

Fig. 2(a, b) shows axial velocity for turbines B (helical) and D (straight), respectively.

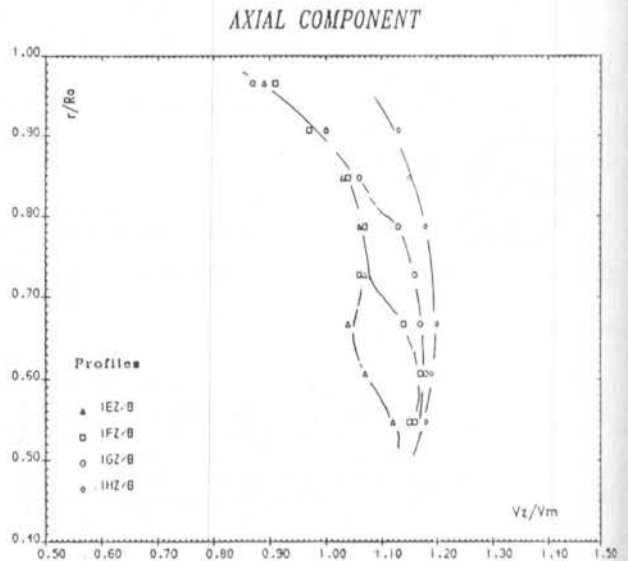


Fig. 2(a) axial velocity profiles (Turbine B - Flow 1)

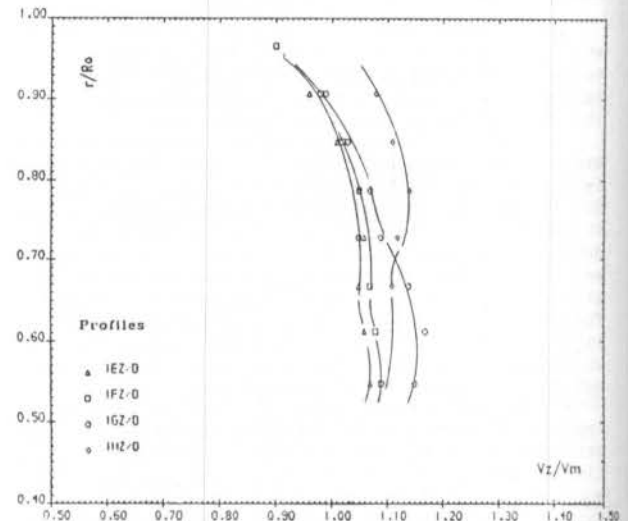


Fig. 2(b) axial velocity profiles (Turbine D - Flow 1)

Circumferential Velocity Component - ( $V_\phi$ ). The circumferential component was much more sensitive to the blade shape than the axial one. Its value was positive or negative depending on the shape of the blades. The helical blade shape turbines showed always positive values whereas the straight blade shape turbines had values ranging from positive near the hub till mid-radius to negative from mid-radius to the tip.

Although the magnitude of the circumferential component was very small, the influence of the rotor on the incoming fluid was noticeable. At inlet the value of the circumferential component was different from zero. In all tests a pre-rotation was noticeable and caused by the presence of the blades.

No linear dependence of the circumferential component with the flowrate was detected.

Fig. 3(a, b) shows circumferential velocity for turbines B and D, respectively.

CIRCUMFERENTIAL COMPONENT

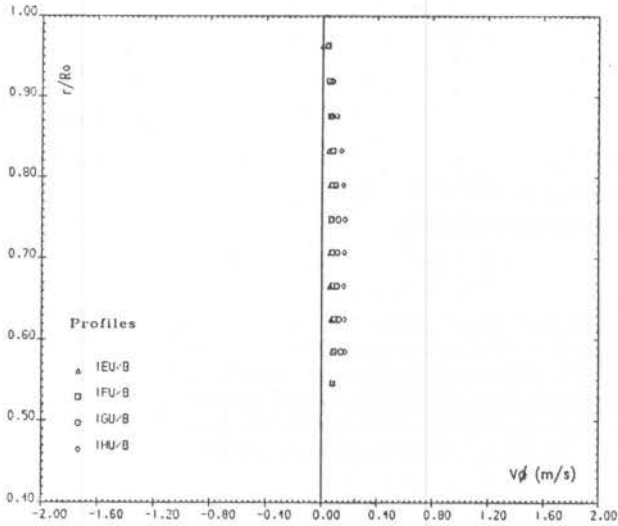


Fig. 3(a) Circumferential velocity profiles (Turbine B - Flow 2)

CIRCUMFERENTIAL COMPONENT

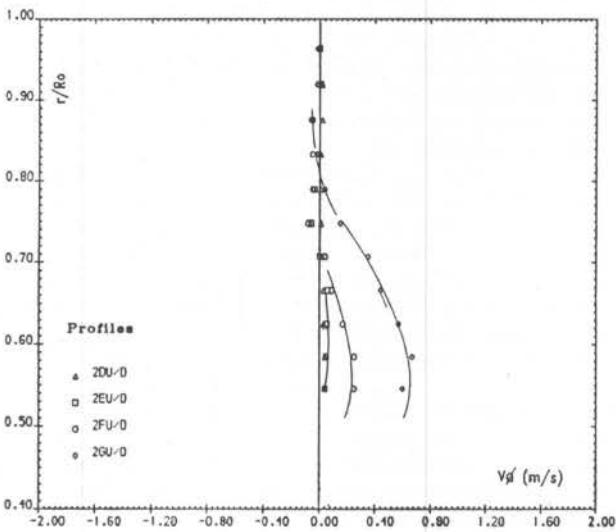


Fig. 3(b) Circumferential velocity profiles (Turbine D - Flow 2)

DISCUSSION

The distribution of the flow energy throughout the blade passage is analysed using the Effective Momentum Angle parameter (EMA) defined in Ref. [2].

The differential angle between the blade angle  $\beta(r)$  and the relative flow direction angle  $\alpha(r)$  is the angle EMA.

EMA differs from angle of attack because it is defined in whole blade passage,  $EMA = EMA(r, \phi, z)$ . The value of EMA can be positive or negative. Where EMA is positive the flow delivers energy to the rotor and where EMA is negative the blades drive the flow. The measurements inside the blade passage showed that the velocity components did not change much with the  $z$  and  $\phi$  coordinates. For analysis purpose EMA was calculated based on the mid-passage. So the value of EMA is represented depending only on  $r$  and given by:

$$EMA(r) = \beta(r) - \alpha(r) \quad \text{Eq. 3}$$

where  $\beta(r)$  is related to the axis of the turbine and  $\alpha(r)$  is defined as:

$$\alpha(r) = \tan^{-1} \left[ \frac{W_\phi(r)}{V_z(r)} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{r\omega_a - V_\phi(r)}{V_z(r)} \right] \quad \text{Eq. 4}$$

Fig. 4(a, b) shows the value of EMA versus radius for the helical blade types (B and C) and for the straight blade ones (D and E), respectively.

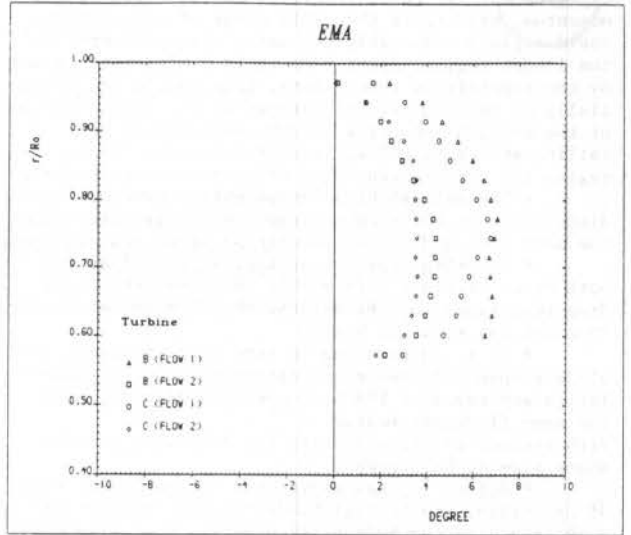


Fig. 4(a) EMA versus radius - (helical blade shape)

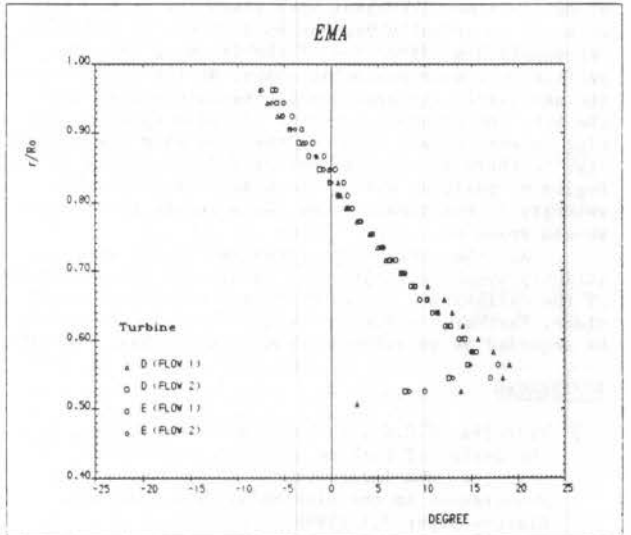


Fig. 4(b) EMA versus radius - (straight blade shape)

The blade shape affects the distribution of the Effective Momentum Angle along the radius. Turbine meters with helical blades always had positive EMA, with the maximum value at the center of the passage (mid-radius). Lower flowrate produced higher EMA. This seems to indicate that at low flowrates the retarding effects (mainly the bearing friction) were proportionally larger than those at the high flow.

The straight blade turbines produced maximum (positive) EMA close to the hub and minimum (negative value) at the hub compensated the negative one at the tip. The value near the hub (from  $15^\circ$  to  $20^\circ$ ) suggests that separation should occur at the suction side of the blade. The negative region of the EMA distribution

(at the tip) proved that in this region the blades drove the flow instead of being driven. This region is defined as "pumping effect region" commented early in the study [1].

[5] Hutton, S.P. "The Effects of Fluid Viscosity on Turbine Meter Calibration" - Internal Report - Dept of Mechanical Engineering - University of Southampton, 1986.

#### CONCLUSIONS

The main conclusions are:

\* The flow field inside both types can be considered as a two-dimensional one,  $V = f(z,r)$ . This explains why two basic theories, airfoil and angular momentum, used since the early stage of development, could explain reasonably the meter characteristic in the linear region. Apart from their limitations caused by the simplifying assumptions, both models are essentially of two-dimensional nature. At the rising portion of the calibration curve though, both models have failing systematically. Presumably because in that region the three-dimensional effects are significant.

\* The helical blade shape meters produced less disturbance in the flow so less energy was taken from the main flow and higher rotational speed was achieved.

\* Assuming that the mechanical frictions for both types of blade were almost the same, the fluid drag resistance for the helical shaped blade was less than for the straight blade.

\* It is interesting to note that, although both blade shapes had completely different flow characteristics expressed by EMA both operated linearly over the same flowrange tested.

With respect to the viscosity the following conclusions seem to be apparent:

\* Hutton [5] has shown that in the linear range of operation, the helical bladed turbine meters are much less affected by variation of the viscosity than the straight bladed ones. This is probably because the helical types have a more uniform and always positive energy distribution along the radius.

\* The fact the meter characteristic for straight bladed turbines increases with viscosity in Hutton's work [5] is probably because an increase of viscosity represents a modification of the incoming velocity profile to a more parabolic shape. At the inlet region the axial velocity profiles become more peaked near the hub. The boundary layer at the pipe wall (at the tip) is even thicker than for the flow with low viscosity. So there is an increment of axial velocity in the region of positive effect and a decrement of axial velocity in the negative one. As a result the rotor should speed up.

All the conclusions presented so far are, strictly speaking, valid only within the linear region of the calibration curve, where the experiments took place. Further conclusions beyond these limits should be regarded as an extrapolation from the basic results.

#### REFERENCES

- [1] Ferreira, V.C.S., Furness, R.A. and Goulas, A. - The design of turbine meters - theory and practice. NEL International Conference - Flow Measurement in the mind 80's, East Kilbride, Glasgow paper 7.1 (1986).
- [2] Ferreira, V.C.S., Furness, R.A. and Goulas, A. - Flow behavior inside a helical turbine meter. IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC, 1987 - Anais do COBEM 87, pp. 283-286 (1987).
- [3] Ferreira, V.C.S. - Flow patterns inside a turbine type flowmeter - PhD thesis - DFEI - Cranfield Institute of Technology. Cranfield - England - May (1988).
- [4] Goulas, A. and Versteeg, H.K. - A Guide and operating instructions to Argon-ion LDA system - Internal Report - 87/HKV/IR/IZ - DFEI - Cranfield Institute of Technology - Cranfield - England - Sept. (1987).

MODELO DINÂMICO DE BOMBA CENTRÍFUGA PARA  
UTILIZAÇÃO EM APLICAÇÕES EM TEMPO REAL



LUIZ VALCOV LOUREIRO  
ANTONIO CARLOS DE OLIVERIA BARROSO  
COORDENADORIA PARA PROJETOS ESPECIAIS - COPESP

RESUMO

O modelo de bomba centrífuga desenvolvido, insere-se no contexto de um simulador em tempo real para uma planta de processo. Permite a simulação deste equipamento em situações de regime estacionário e transitório. Em regime estacionário foram utilizadas as características fornecidas pelo fabricante e, durante os transitórios, as leis de afinidade em conjunto com a equação da quantidade de movimento angular resolvida através do método de Heun.

INTRODUÇÃO

Os transitórios decorrentes da partida/parada de bombas e da abertura/fechamento das válvulas associadas devem ser analisados quando do projeto e análise de sistemas termohidráulicos.

A modelagem e simulação de tais transitórios é abordada de diferentes maneiras em função das informações disponíveis a respeito dos equipamentos envolvidos e conforme a aplicação desejada. Diversos códigos computacionais para simulação de transitórios de bombas, sobretudo em instalações nucleares, são encontrados na literatura.

Daleas/1/ e Grandia/2/ simulam a evolução da vazão no circuito primário de um PWR durante a parada das bombas. A altura manométrica e a energia transferida ao fluido têm sua evolução descritas a partir das curvas de quatro quadrantes fornecidas pelos fabricantes das bombas.

O tratamento dado por Fuls/3/ é semelhante ao de Daleas e Grandia, sendo que a curva característica da altura manométrica é tratada através das leis de afinidade, e a transferência de energia para o fluido é avaliada através de métodos empíricos.

Wylie e Streeter/4/, Agrawal e Khatib-Rahbar/5/ e Vanni/6/ empregam tanto para a curva característica da altura manométrica, como para a do torque no eixo, as curvas homólogas utilizadas para bombas de mesma rotação específica.

Em todas as referências citadas acima, não há a preocupação com a simulação do transitório de partida e parada de bomba em tempo real.

O presente trabalho insere-se no contexto do desenvolvimento de um simulador em tempo real para uma planta de processo. Assim, a escolha do método numérico para a resolução do modelo e o tratamento conferido aos fenômenos em questão visam atender a condição de tempo real.

Testes realizados numa instalação experimental do IPEN foram comparados com resultados obtidos a partir do modelo proposto, sendo o transitório do sistema (tubos, válvulas, trocadores de calor) simulado como uma sucessão de estados "pseudo" estacionários.

DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo de bomba centrífuga aqui desenvolvido se aplica para simulação deste equipamento em situações de regime estacionário e transitório, tanto de partida como de parada da bomba.

Em regime estacionário foram utilizadas as curvas características fornecidas pelo fabricante, para o cálculo da vazão e altura manométrica transmitidas ao fluido pela bomba.

Durante os transitórios, foram empregadas as leis de afinidade em conjunto com as equações de conservação da quantidade de movimento angular do rotor para avaliar as variações da altura manométrica, vazão e velocidade de rotação da bomba. O método de Heun foi utilizado na resolução da equação de conservação da quantidade de movimento angular, por ser um método explícito e portanto veloz e permitir intervalos de integração maiores.

O fenômeno da cavitação não é simulado, assim como não foi considerada a possibilidade de fluxo reverso na bomba, devido à presença de válvulas de retenção nos sistemas para os quais este modelo será empregado. As situações de vazamento, extração e vazão para resfriamento de selo não foram também consideradas.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

No caso de regime estacionário a bomba recebe energia através do motor que a aciona, sendo que o torque do motor elétrico é suficiente para manter a velocidade de rotação aproximadamente constante. Neste caso o comportamento da bomba pode ser avaliado diretamente através da curva característica que relaciona vazão e altura manométrica. A curva característica foi aproximada por um polinômio usando o método dos mínimos quadrados.

Quando da análise de transitórios, necessita-se conhecer o comportamento dos torques envolvidos, da vazão, da altura manométrica e da rotação no tempo. É através das leis de afinidade e da equação de conservação da quantidade de movimento angular



que pode-se avaliar o comportamento da bomba nestas circunstâncias.

Hipóteses. As principais hipóteses assumidas no desenvolvimento do modelo são as seguintes:

- fluido incompressível,
- escoamento adiabático,
- não há fluxo reverso na bomba,
- a variação da rotação nominal do motor é desprezível com a mudança de carga aplicada (baixo escorregamento).

Equação da Continuidade. Como o fluido é incompressível e assumindo que não há estocagem do mesmo no interior da bomba, a vazão mássica na sucção,  $W_s$ , é igual à na descarga da bomba,  $W_d$ .

$$W_s = W_d \quad (1)$$

Equação da Conservação de Energia. A altura manométrica é o acréscimo de energia transmitido ao fluido num processo adiabático. O rendimento efetivo da bomba é definido conforme a equação que segue:

$$Ref = \rho \cdot H \cdot g \cdot gc / (hd - hs) \quad (2)$$

- onde Ref = rendimento efetivo, adimensional  
 $\rho$  = massa específica,  $kg/m^3$   
 $H$  = altura manométrica, m  
 $hs$  = entalpia do fluido na sucção, J/kg  
 $hd$  = entalpia do fluido na descarga, J/kg  
 $g$  = aceleração da gravidade,  $m/s^2$   
 $gc$  = fator de conversão,  $1 kg \cdot m / N \cdot m^2$

Conservação da Quantidade de Movimento. A equação de conservação da quantidade de movimento angular para a bomba que inclui o motor elétrico, é a seguinte:

$$J \cdot dw/dt = \sum T \quad (3)$$

- onde  $J$  = momento de inércia das partes girantes da bomba,  $m^2/s$   
 $dw/dt$  = derivada da velocidade angular da bomba,  $rad/s^2$   
 $\sum T$  = somatória dos torques envolvidos, Nm

Os torques nas partes girantes incluem o torque no rotor, induzido pela transferência de energia para o fluido, o torque resistente nos mancais e no enrolamento do motor, este devido à resistência do ar e o torque elétrico. O torque magnético foi desprezado.

O torque no rotor, também denominado torque hidráulico, costuma ser dividido em dois termos, torque hidráulico útil e dissipado. A expressão do torque hidráulico útil,  $Thu$ , que corresponde à

energia transmitida ao fluido sob a forma de acréscimo de pressão, é apresentada abaixo.

$$Thu = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H / w \quad (4)$$

- onde  $Q$  = vazão volumétrica,  $m^3/s$   
 $w$  = velocidade angular do rotor,  $rad/s$

Quanto ao torque hidráulico dissipado,  $Thd$ , que corresponde à energia perdida sob a forma de transferência de calor ao fluido, pelos efeitos da turbulência e viscosidade, é proporcional ao quadrado da velocidade relativa entre o rotor e o fluido. O torque hidráulico dissipado pode ser calculado a partir de uma condição nominal de funcionamento conhecida, segundo a expressão (5), estimando-se o rendimento hidráulico,  $Rhn$ , a partir da expressão (6) sugerida por Karassik et alli/7/.

$$Thd = \frac{\rho \cdot g \cdot Q_n \cdot H_n}{w_n} (1/Rhn - 1) \frac{(Rr \cdot w - V)^2}{(Rr \cdot w_n - V_n)^2} \quad (5)$$

$$Rhn = 1 - 0,0713 \cdot (Q_n)^{-0,25} \quad (6)$$

- onde  $Q_n$  = vazão volumétrica nominal,  $m^3/s$   
 $H_n$  = altura manométrica nominal, m  
 $w_n$  = velocidade angular nominal,  $rad/s$   
 $Rr$  = raio do rotor, m  
 $V$  = velocidade do fluido na descarga da bomba,  $m/s$   
 $V_n$  = velocidade do fluido na descarga da bomba nas condições nominais,  $m/s$

O torque resistente,  $Tr$ , devido ao atrito nos mancais e a resistência do ar nos enrolamentos do motor, possui um comportamento que varia conforme a velocidade de rotação da bomba, como mostra as equações (7), (8), e (9).

O torque resistente, assim como o torque hidráulico dissipado, pode ser calculado a partir de uma condição nominal de funcionamento conhecida. O torque resistente nominal,  $Trm$ , é calculado segundo a expressão (10), onde o rendimento mecânico,  $Rm$ , é avaliado através de correlações obtidas a partir do gráfico sugerido por Karassik et alli.

$$Tr = Trm \cdot (w/w_n)^2 \quad \text{se } w^2 > 0,035 \cdot w_n^2 \quad (7)$$

$$Tr = 0,035 \cdot Trm \quad \text{se } 0 < w^2 \leq 0,035 \cdot w_n^2 \quad (8)$$

$$Tr = 0,1 \cdot Trm \quad \text{se } w = 0 \quad (9)$$

$$Trm = \rho \cdot g \cdot Q_n \cdot H_n \cdot Rm / w \quad (10)$$

O torque elétrico, necessário para análise da partida da bomba, pode ser avaliado através da curva característica do torque fornecida pelo fabricante.

Na ausência dessa informação, pode-se aproximar esta curva por trechos de reta entre seus pontos de conjugado com rotor bloqueado, mínimo, máximo e nominal, disponíveis na Norma NBR-7094, conforme a categoria do motor.

Curva Característica do Transitório. A partir das leis de afinidade deduz-se, conforme Fuls, a expressão abaixo para relacionar a altura manométrica com a vazão e a rotação da bomba, em situações de regime transitório.

$$H = \frac{(H_0 - H_1)(Q/Q_1)^2 + (H_1(Q_0/Q_2)^2 - H_0) \cdot (w/w_n)^2}{(Q_0/Q_1)^2 - 1} \quad (11)$$

onde  $0,1 =$  índices correspondentes à dois pontos conhecidos da curva característica para regime estacionário

Método Numérico. A solução da equação diferencial ordinária (3), correspondente à conservação da quantidade de movimento angular, foi resolvida através do método de Heun, ou Euler modificado. A escolha deste método explícito se justifica devido à rapidez inerente a este tipo de processo de solução numérica e à possibilidade de utilização de um passo de integração superior ao do método de Euler puro.

## RESULTADOS

O circuito experimental, descrito no fluxograma simplificado na figura 1, foi utilizado para levantar dados que permitiram a validação do modelo proposto. Este circuito consta, basicamente, além da bomba centrífuga, de um aquecedor-elétrico, de uma secção de testes, de um trocador de calor casco-tubo e de um pressurizador.

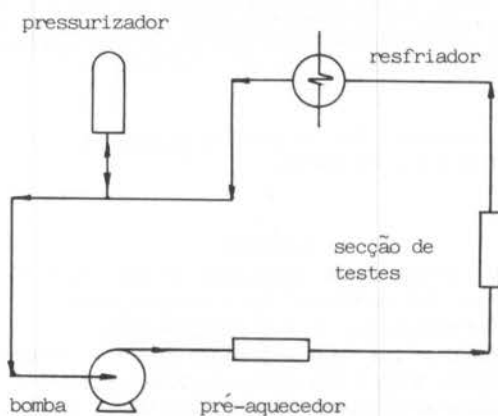


Figura 1. Fluxograma do circuito experimental.

As principais características do conjunto formado pela bomba e o motor elétrico, fornecidas pelo fabricante, encontram-se listadas a seguir:

- desempenho no ponto de rendimento máximo
  - . vazão volumétrica =  $0,020 \text{ m}^3/\text{s}$
  - . altura manométrica =  $90 \text{ m}$
  - . rendimento efetivo =  $22\%$
- altura manométrica com vazão nula =  $103 \text{ m}$
- rotação nominal =  $3540 \text{ rpm}$
- potência nominal do motor =  $85 \text{ kW}$

Parâmetros Críticos. A validação do modelo proposto foi feita através da comparação dos valores experimentais e calculados dos parâmetros críticos do sistema de bombeamento. As variáveis escolhidas como parâmetros críticos levaram em conta a disponibilidade do sistema de medição da instalação experimental. Os parâmetros empregados foram a vazão mássica e altura manométrica da bomba. A rotação também é uma variável de interesse na validação, mas como a bomba é encapsulada, não foi possível ter acesso às partes girantes para efetuar sua medição.

Dados Experimentais. Os dados experimentais sobre a parada da bomba, foram obtidos na instalação experimental, sob as seguintes condições de operação: após o regime permanente ter sido atingido, iniciou-se o registro de dados por 10 segundos, quando então o motor elétrico de acionamento da bomba foi desligado, sendo, a partir daí, registradas as condições do circuito por um período de 100 segundos.

Quatro diferentes experiências foram realizadas para a mesma vazão mássica de  $5 \text{ kg/s}$ , em regime estacionário. Variaram-se as condições médias de temperatura e pressão no circuito, conforme apresentado na tabela 1.

Tabela 1. Condições das experiências.

PARÂMETRO	EXPERIÊNCIA			
	A	B	C	D
Temperatura média (grau C)	160	70	180	90
Pressão média (bar)	19	19	70	70

Comparação de Resultados. Os cálculos de vazão, altura manométrica e rotação foram realizados com o modelo proposto. A condutividade hidráulica do circuito,  $Ch$ , definida em (12), foi avaliada através de uma correlação, onde o número de Reynolds,  $Re$ , é a variável independente. A correlação, levantada a partir dos dados dos quatro testes, é apresentada na equação (13).

$$Ch = w \cdot (\rho \cdot g \cdot H)^{-0,5} \quad (12)$$

$$Ch = 14,8832 \cdot Re^{-0,16485} \quad (13)$$

Os parâmetros críticos, vazão mássica e altura manométrica, foram normalizados com relação aos seus valores em regime estacionário. Foram levantadas curvas dos parâmetros em função do tempo, para o caso de parada da bomba, nas condições descritas na tabela 1. Devido ao comportamento semelhante dessas curvas nos quatro testes realizados, apresentam-se dois gráficos que correspondem aos testes B e C.

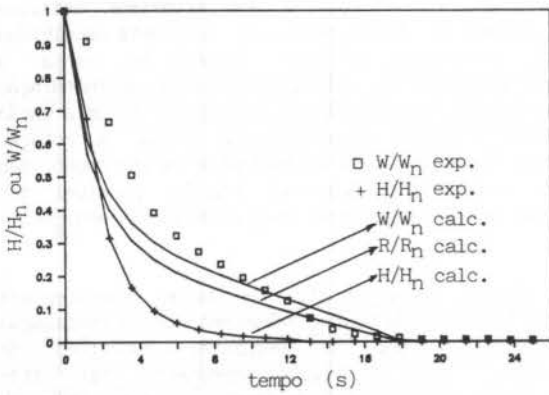


Figura 2. Evolução dos parâmetros críticos (Teste B).

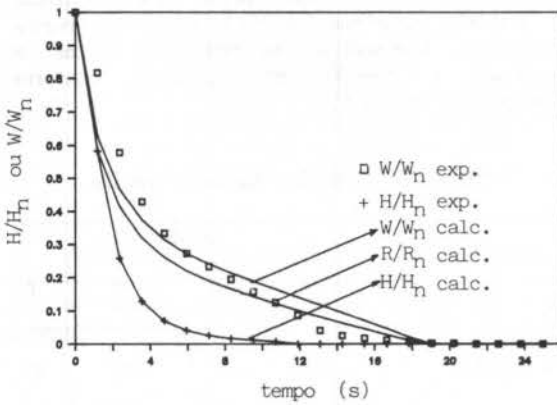


Figura 3. Evolução dos parâmetros críticos (Teste C).

As linhas contínuas representam os resultados obtidos através do modelo e os pontos os valores medidos experimentalmente.

Como pode-se observar nas figuras 2 e 3, verifica-se uma coincidência satisfatória entre os valores calculados e medidos da altura manométrica da bomba. No que concerne à vazão mássica, no início do transitório a vazão calculada cai mais rapidamente que a medida, situação que se inverte com a evolução do fenômeno. Pode-se observar além da curva da rotação normalizada que, em ambos os testes, os tempos de "coast-down", calculado e medido, coincidem.

## CONCLUSÃO

A modelagem de parada de bomba, como uma sucessão de estados "pseudo" estacionários, com a utilização conjunta do método de Heun, de expressões simplificadas para os torques e para a curva característica da bomba em transitório - sem a utilização das curvas homólogas - proporciona uma simulação precisa do fenômeno.

O tempo médio de processamento para a simulação da parada da bomba da instalação experimental, em um micro-computador IBM PC-XT, compatível, com coprocessador aritmético 8087 e "clock" de 4,77 MHz, foi de 2,5 segundos, sendo que o fenômeno dura aproximadamente 17 segundos.

Uma vez que a diferença entre o tempo de processamento e a duração do fenômeno é grande, torna-se possível a simulação de sistemas hidráulicos complexos, atendendo à condição de tempo real.

## REFERÊNCIAS

- /1/ Daleas, R.S., COAST Code Description. CENPD-98, Combustion Engineering, Inc. (1973).
- /2/ Grandia, M.R., Analog-Hybrid Reactor Coolant Hydraulic Transient Model. BAW-10073, Babcock & Wilcox (1973).
- /3/ Puls, G.M., FLOTL - Flow Transient Analysis of a Pressurized Water Reactor During Flow Coastdown. WAPD-TM-428, Bettis Atomic Power Laboratory (1968).
- /4/ Wylie, E.B. e Streeter, V.L., Fluid Transients. McGraw-Hill Inc., NY (1978).
- /5/ Agrawal, A.K. e Khatib-Rahbar, M., Dynamic Simulation of LMFBR Systems. Atomic Energy Review, vol. 18, No. 2 (1980).
- /6/ Vanni, E.A., Simulador Digital do Pressurizador e Bomba do Circuito Primário de Reator com Água Pressurizada. Tese de Mestrado, I.M.E., RJ (1978).
- /7/ Karassik, I.J. et alli, Pump Handbook. McGraw-Hill Inc., NY (1972).

## ABSTRACT

The present work takes part in the development of a real time simulator for a process plant.

The simulation of a centrifugal pump was performed, either in steady-state or in transient conditions, with a low time processing model. The comparison with experiments permits the validation of the proposed model.



## ANÁLISE DE SISTEMAS TÉRMICOS

APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXERGIA À ANÁLISE TERMODINÂMICA  
DE SISTEMAS DE COGERAÇÃO EM USINAS DE AÇÚCAR E ALCOOL




JORGE I. LLAGOSTERA BELTRAN, GEORGE A. OLIVA e SÉRGIO SALAZAR  
Engenheiros da Companhia Paulista de Força e Luz  
Assessoria de P & D - Área de Engenharia Térmica  
C.P. 1808 - tel. (0192) 41-8645 r.576 - 13100 - Campinas, SP.

## RESUMO

O método da exergia é aplicado à análise termodinâmica de sistemas de produção de potência elétrica e mecânica em usinas de açúcar e álcool para avaliação de alternativas de cogeração, com base em dados técnicos obtidos junto a usinas localizadas na área de concessão de fornecimento de energia elétrica da CPFL - Companhia Paulista de Força e Luz. São identificados os pontos onde ocorrem as maiores irreversibilidades, e são analisadas possibilidades de incremento da produção de potência e seus efeitos sobre o balanço energético e exerético dos sistemas.

## INTRODUÇÃO

Na área de concessão da CPFL localizam-se mais de oitenta usinas de açúcar e álcool e destilarias, responsáveis pela moagem de cerca de 40 % do total da cana processada no país. É usual nessas instalações o emprego de sistemas de produção simultânea e sequencial de potência elétrica e mecânica e de energia térmica, a partir de um único combustível, no caso, o bagaço de cana, caracterizando um processo de cogeração que utiliza turbinas a vapor de contrapressão como acionadores primários, e que opera em ciclo tipo "topping", onde a produção de potência se dá no fluxo de vapor de maior temperatura e pressão (1). Atualmente, essas indústrias produzem, em média, cerca de 70 % de suas necessidades de energia elétrica, correspondendo a uma potência instalada da ordem de 300 MW, e vem se observando um processo de incremento dessa auto-produção (2).

A CPFL vem promovendo o desenvolvimento da cogeração e a possível aquisição de excedentes de energia elétrica de autoprodutores em sua área de concessão. Entre os estudos que a empresa realiza, inclui-se a análise termodinâmica de sistemas de produção de potência em usinas de açúcar e álcool, que tem como objetivo básico avaliar as potencialidades de cogeração de alternativas técnicas em discussão.

## METODOLOGIA

**Método.** O método da exergia (3) foi aplicado à análise termodinâmica do sistema de produção de potência de usinas de açúcar e álcool, visando a comparação de alternativas de cogeração. Os balanços de energia usualmente efetuados (4) são complementados por balanços de exergia. Foi desenvolvido um programa computacional para o cálculo dos fluxos de energia e exergia, a partir dos dados de processo fornecidos pelas usinas, para as linhas e equipamentos dos circuitos de vapor direto. Os resultados dos cálculos são utilizados para a elaboração dos diagramas de Sankey e de Grassmann correspondentes a cada caso.

O diagrama de Sankey mostra a distribuição dos fluxos de energia no processo, correspondendo a uma abordagem baseada na Primeira Lei da Termodinâmica. O diagrama de Grassmann indica, por meio dos fluxos de exergia, as potencialidades de realização de trabalho e a dimensão das irreversibilidades nas diversas partes do sistema, correspondendo a uma análise com base na Segunda Lei da Termodinâmica. A utilização do conceito de exergia permite, na análise de sistemas térmicos de produção de potência, uma identificação mais nítida dos pontos onde ocorrem as maiores irreversibilidades e uma melhor avaliação das possibilidades técnicas de aumento da produção de potência.

**Programa.** O programa desenvolvido calcula inicialmente os fluxos de energia e exergia à saída das caldeiras, a partir da vazão e das propriedades do vapor gerado. A seguir é calculado o consumo de bagaço, com base em suas características físico-químicas, na eficiência das caldeiras (base PCI), e nas vazões e propriedades do condensado e da água de reposição. Posteriormente são avaliadas as irreversibilidades nos processos de expansão e mistura verificados entre a saída das caldeiras e a entrada das turbinas. Em sua parte final o programa calcula, em função da eficiência isentrópica das turbinas, os fluxos de energia e exergia, e suas respectivas variações, em cada máquina e em cada grupo de máquinas, bem como as irreversibilidades decorrentes dos processos de mistura do vapor antes de o mesmo ser enviado ao processo industrial.

Os fluxos de energia no circuito de vapor são avaliados considerando os fluxos de entalpia, referida a 25 °C, e os relativos ao combustível são determinados a partir do PCI do bagaço de cana com 50 % de umidade.

O PCI do bagaço é obtido em kJ/kg pela expressão (1), onde A, Z e U representam os teores percentuais de açúcar, cinza e umidade, respectivamente (5).

$$PCI = 186,1(100 - 0,18A - 1,13U - Z + 0,012U) \quad (1)$$

Para o bagaço seco obteve-se 18171 kJ/kg, e para o bagaço com 50 % de umidade 7842 kJ/kg, com teores de 2 % de açúcar e 2 % de cinza.

Os fluxos de exergia no circuito de vapor são avaliados considerando os fluxos de exergia física, referida a 25 °C, a partir dos valores específicos obtidos de acordo com a expressão (2).

$$E_f = h - h_0 - T_0(s - s_0) \quad (2)$$

Os fluxos de exergia do combustível são calculados por correlação entre a exergia química específica (estado de referência a 25 °C) e o PCI, estabelecida por Szargut e Styrylska para combustíveis sólidos (3), e corrigida em função do teor de umidade do bagaço. No caso de combustíveis sólidos secos onde as frações em massa de oxigênio e carbono satisfazem a relação (3), são utilizadas as expressões (4) e (5).

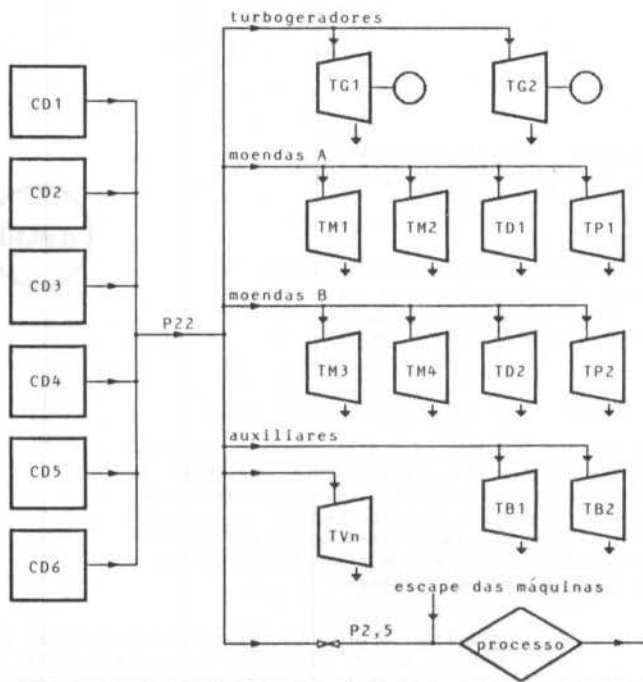
$$0,667 < \frac{O}{C} < 2,67 \quad (3)$$

$$E_{qo(s)} = PCI_{(s)} \psi_{(s)} \quad (4)$$

$$\psi_{(s)} = \frac{a + b \frac{H}{C} - c \frac{O}{C} (1 + d \frac{H}{C}) + e \frac{N}{C}}{1 - f \frac{O}{C}} \quad (5)$$

$$\begin{array}{lll} a = 1,0438 & b = 0,1882 & c = 0,2509 \\ d = 0,7256 & e = 0,0383 & f = 0,3035 \end{array}$$





CARACTERÍSTICAS DAS CALDEIRAS E TURBINAS

CALDEIRA	PRESSÃO/TEMPERAT. (kgf/cm <sup>2</sup> aba./°C)	PRODUÇÃO (t/h)	EFICIÊNCIA (%)
CD1 e CD2	22/280	2x55,0	80,0
CD3 e CD4	22/280	2x40,0	74,0
CD5 e CD6	22/280	2x30,0	68,0

TURBINA	POTÊNCIA (CV)	CONSUMO (t/h)	EFICIÊNCIA (%)
TG1 e TG2	2x2650*	2x32,8	68,0
TM1	1200	15,5	48,0
TM2	1150	13,9	51,0
TM3	1200	16,1	46,0
TM4	1150	14,2	50,0
TD1	1500	19,7	47,0
TD2	1500	18,5	50,0
TP1	1400	16,6	52,0
TP2	1400	16,3	53,0
TB1	800	12,7	39,0
TB2	800	11,0	45,0
TV1 a TV8	8x125	8x1,93	40,0

Obs.: \* Potência dos turbogeradores em kW

LEGENDA PARA IDENTIFICAÇÃO DAS MÁQUINAS

CD - Caldeira	TP - Turbopicador
TG - Turbogenerador	TB - Turbobomba
TM - Turbomoenda	TV - Turboventilador
TD - Turbodesfibrador	

Figura 1. Configuração atual do sistema de potência.

Nessas expressões H, C, O e N representam as frações percentuais em massa de hidrogênio, carbono, oxigênio e nitrogênio, respectivamente.

Para combustíveis sólidos contendo unidade a exergia química é calculada pela expressão (6), onde U corresponde ao teor percentual de umidade no combustível. As frações em massa adotadas foram 6,2 % para o hidrogênio, 49,5 % para o carbono e 44,3 % para o oxigênio (5). O conteúdo de nitrogênio foi desprezado. A exergia química obtida foi de 20517 kJ/kg para bagaço seco, e de 10258 kJ/kg para bagaço com 50 % de umidade.

$$E_{qo(u)} = PCI_{(s)} \left(1 - \frac{U}{100}\right) \psi_{(s)} \quad (6)$$

**Alternativas.** A metodologia descrita é ilustrada neste trabalho por meio de sua aplicação ao estudo do sistema de produção de potência de uma usina de açúcar e álcool, e de três possíveis alternativas para o aumento de sua produção de energia elétrica, visando a geração de excedentes comercializáveis.

O fluxograma esquemático da configuração atual do sistema de potência da usina e suas principais características técnicas são apresentados na Figura 1. Para alguns dos parâmetros, são utilizadas as unidades de medida comumente empregadas pelos técnicos do setor.

As outras configurações analisadas permitem aumentar a produção de energia elétrica, por meio da elevação da pressão e temperatura do vapor e do uso de caldeiras mais eficientes, promovendo a redução das irreversibilidades no processo de produção de vapor e um melhor aproveitamento do bagaço. Na primeira configuração o vapor destinado aos turbogeradores é produzido a 43 kgf/cm<sup>2</sup> (alternativa A). Na segunda configuração, vapor gerado a 63 kgf/cm<sup>2</sup> é utilizado em cascata, inicialmente para o acionamento de turbogeradores de alta pressão e, a seguir, dos turbogeradores atuais e das demais turbinas. Nessa configuração foram estudadas duas possibilidades: geração parcial (alternativa B) ou total (alternativa C) de vapor a alta pressão.

Em todas as alternativas permaneceram inalterados a quantidade de cana processada, o consumo específico de vapor no processo, e as características técnicas das turbinas de acionamento mecânico. As configurações e alternativas correspondentes são esquematizadas nos fluxogramas simplificados apresentados na Figura 2, e suas características principais estão na Tabela 1.

RESULTADOS

**Configuração atual.** Os diagramas de Sankey e de Grassmann referentes a configuração atual do sistema estão apresentados nas Figuras 3 e 4 respectivamente, juntamente com os valores dos principais fluxos de energia e de exergia representados nos diagramas.

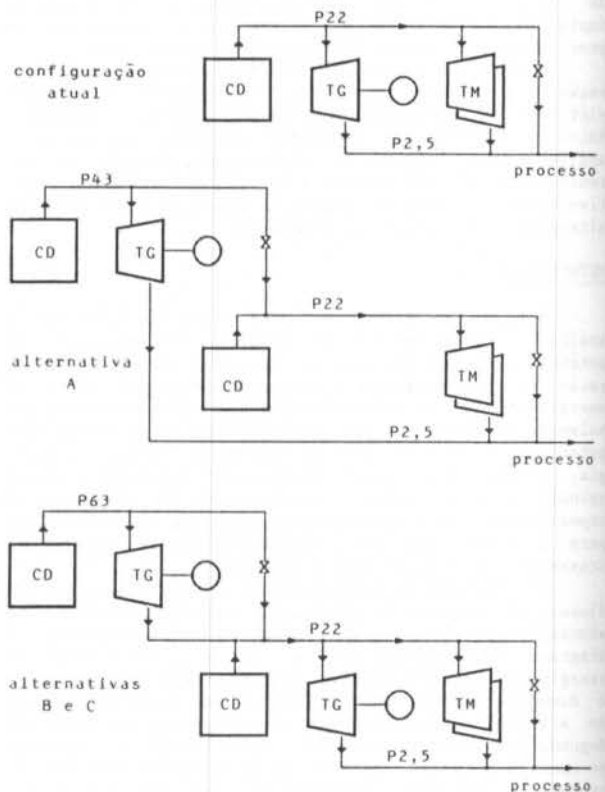


Figura 2. Configurações alternativas simplificadas.

Tabela 1. Características das alternativas.

	confi- guração atual	alternativa		
		A	B	C
Cana moída (t/h)	500	500	500	500
Geração de vapor				
a P22 (t/h)	250,0	184,5	125,0	--
a P43 (t/h)	--	65,5	--	--
a P63 (t/h)	--	--	125,0	250,0
total (t/h)	250,0	250,0	250,0	250,0
Eficiência média das caldeiras (t/h)	74,9	79,4	82,2	85,0
Bagaço de cana				
consumo (t/h)	111,3	107,2	107,9	110,5
excedente (%)	14,4	17,5	17,0	15,0
Consumo de vapor nos turbogeradores				
P22 a P2,5 (t/h)	65,5	--	62,5	59,5
P43 a P2,5 (t/h)	--	65,5	--	--
P63 a P22 (t/h)	--	--	125,0	250,0
Potência mecânica produzida (kW)	9635	9635	9635	9635
Potência elétrica				
P22 a P2,5 (kW)	5300	--	5300	5300
P43 a P2,5 (kW)	--	7563	--	--
P63 a P22 (kW)	--	--	6820	13640
total (kW)	5300	7563	12120	18940
Expansão direta de vapor (%)	5,8	5,8	10,0	14,3

Observações:

- Pressões (Pnn): em kgf/cm<sup>2</sup>, absolutas.
- Expansões diretas: entre P22 e P2,5.
- Eficiências das caldeiras de alta pressão: P43 (85,0 %); P63 (85,0 %).
- Eficiências dos turbogeradores: P22 (68,0 %); P43 (68,0 %); P63 (70,0 %).
- Temperaturas do vapor produzido: P22 (280 °C); P43 (390 °C); P63 (450 °C).
- Retorno de condensado: 90 %.

As maiores perdas de energia ocorrem na geração de vapor, e podem ser reduzidas pela utilização de caldeiras mais eficientes. As perdas ocorridas nas linhas de vapor não são consideradas. A energia efetivamente transformada em trabalho constitui apenas uma pequena parcela da energia total referente ao bagaço gerado.

Em relação ao balanço de exergia podem ser analisados três processos: de produção de vapor, de produção de potência e de expansões e misturas.

O processo de produção de vapor é responsável pelas maiores irreversibilidades: as intrínsecas ao processo de combustão, que se realiza a temperaturas bastante superiores à do ambiente; as relacionadas à transferência de calor entre os produtos de combustão e o fluido de trabalho com grandes diferenciais de temperatura, as quais podem ser reduzidas com a produção de vapor a níveis superiores de temperatura e pressão; e, finalmente, as irreversibilidades decorrentes de perdas térmicas diversas para o ambiente.

No processo de produção de potência as irreversibilidades relacionam-se à eficiência dos equipamentos de conversão. A redução das perdas de exergia nesses processos passaria pela substituição de equipamentos por outros de maior eficiência, o uso de turbomáquinas operando a níveis de pressão mais elevados ou o emprego de motores elétricos para o acionamento de bombas, ventiladores e moendas.

O processo de expansão direta de vapor, conveniente para o controle operacional do sistema, pode apresentar uma disponibilidade não desprezível de realização de trabalho, se parte desse vapor puder ser expandida nos turbogeradores. Na usina analisada, essa disponibilidade corresponde a 1,2 MW, da qual poderia resultar uma produção adicional de potência da ordem de 0,8 MW. Os processos de mistura de fluxos de vapor à mesma pressão, embora a temperaturas ligeiramente diferentes, não acarretam irreversibilidades importantes.

Da exergia total do bagaço, 2,6 % é convertido em potência mecânica, 1,4 % em potência elétrica, e 11,7 % é enviado ao processo industrial.

**Configurações alternativas.** Por meio da elevação, parcial ou total, do nível de pressão e temperatura do vapor, gerado em caldeiras mais eficientes, é possível, como pode ser visto na Tabela 1, aumentar a produção de potência elétrica de modo significativo e simultaneamente reduzir o consumo de bagaço. De acordo com os resultados e índices comparativos apresentados na Tabela 2, pode-se confrontar as três alternativas com a configuração atual. Por exemplo, na alternativa C, que apresentou um aumento de 257,4 % na produção de potência elétrica, obteve-se uma redução de 0,7 % no consumo de bagaço, consequência direta da maior eficiência das caldeiras utilizadas para a geração do vapor de alta pressão. Para essa mesma alternativa, a energia incorporada ao circuito de vapor aumentou em 12,8 % enquanto a exergia incorporada elevou-se em 31,4 %. Considerando que em todas as alternativas a geração total de vapor manteve-se inalterada, esses dois índices representam o efeito da qualidade do vapor nos fluxos de energia e de exergia, evidenciando a sua influência acentuada sobre a potencialidade de realização de trabalho.

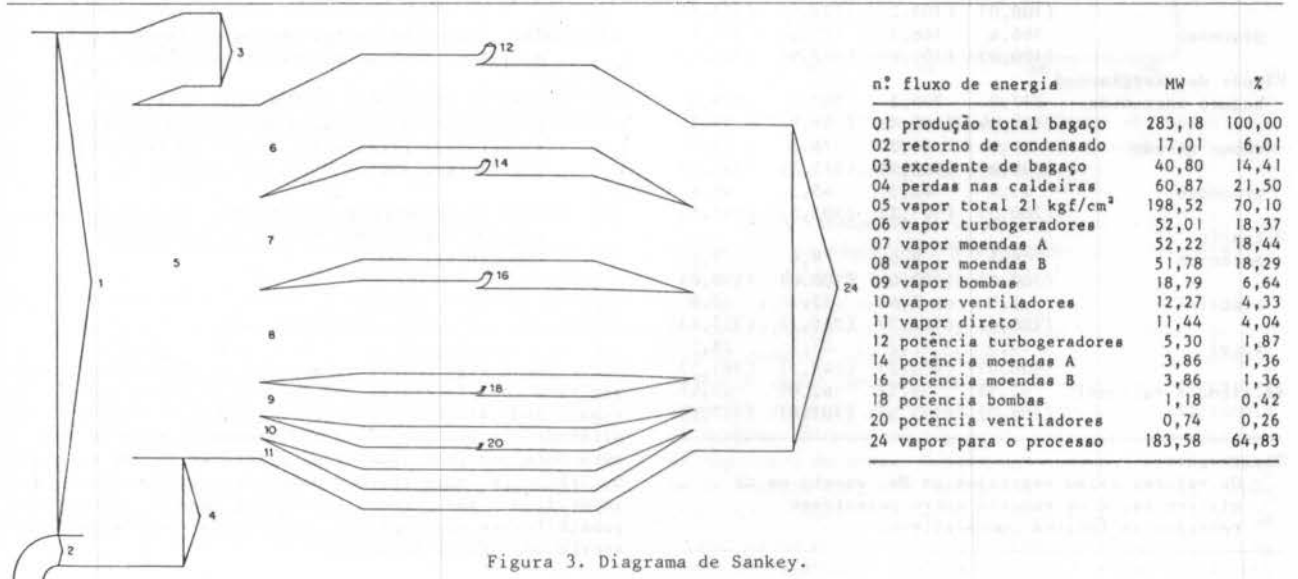


Figura 3. Diagrama de Sankey.

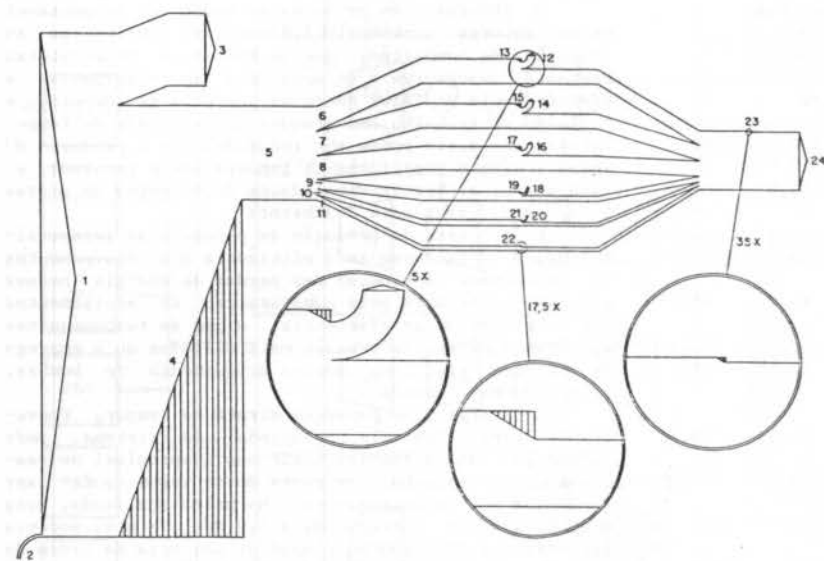


Figura 4. Diagrama de Grassmann.

Em termos das condições do vapor enviado ao processo industrial, observou-se um incremento de 5,7 % quanto ao fluxo de energia, e de 11,6 % em relação ao de exergia. Para as outras alternativas os resultados são bastante similares.

Pode-se também comparar o desempenho do sistema de máquinas nas diversas alternativas por meio de sua eficiência racional, definida como a relação entre a potência total produzida e a diferença entre a exergia incorporada ao circuito de vapor e a exergia enviada ao processo, apresentada também na Tabela 2, observando-se a sua elevação à medida que aumenta a fração de vapor de alta pressão, indicando um melhor aproveitamento das potencialidades de realização de trabalho.

Tabela 2. Comparação entre as alternativas.

	confi- guração atual	alternativa		
		A	B	C
<b>Fluxos de energia</b>				
bagaço consumido	242,4 (100,0)	233,5 (96,4)	234,9 (96,9)	240,8 (99,3)
vapor gerado	181,5 (100,0)	185,5 (102,2)	193,1 (106,4)	204,7 (112,8)
processo	166,6 (100,0)	168,3 (101,0)	171,3 (102,9)	176,1 (105,7)
<b>Fluxos de exergia</b>				
bagaço consumido	317,0 (100,0)	305,5 (96,4)	307,3 (96,9)	315,0 (99,3)
vapor gerado	67,9 (100,0)	71,2 (105,2)	78,3 (115,7)	88,9 (131,4)
processo	41,8 (100,0)	42,3 (101,2)	43,3 (103,5)	46,6 (111,6)
<b>Potência</b>				
<b>mecânica</b>				
	9,6 (100,0)	9,6 (100,0)	9,6 (100,0)	9,6 (100,0)
<b>elétrica</b>				
	5,3 (100,0)	7,6 (142,7)	12,1 (228,7)	18,9 (357,4)
total	14,9 (100,0)	17,2 (115,2)	21,7 (145,7)	28,5 (191,3)
Eficiência racional	57,5% (100,0)	59,5% (103,5)	62,0% (107,8)	67,4% (117,2)

Observações:

- Os valores estão expressos em MW, exceto os da eficiência, e os números entre parênteses representam índices comparativos.

CONCLUSÃO

Por meio da aplicação do método da exergia à análise termodinâmica de sistemas de produção de potência, como indicado neste trabalho, pode-se obter uma identificação mais completa e abrangente dos aspectos técnicos relevantes na geração de irreversibilidades termodinâmicas, as quais afetam diretamente a eficiência dos sistemas. Torna-se possível, também, comparar tecnicamente, com maior nitidez, as possíveis alternativas visando o aumento da produção de potência. No caso específico de usinas de açúcar e álcool, em que fica evidente a forte influência da elevação do nível de pressão e temperatura do vapor gerado sobre a potencialidade de produção de potência, a utilização do conceito de exergia permite uma melhor compreensão da qualidade e da extensão dessa influência.

REFERÊNCIAS

- (1) HU, S.D. *Cogeneration*. Reston, Va., Reston, 1985.
- (2) CPFL. *Avaliação do potencial de cogeração no setor sucro-alcooleiro na área de concessão da CPFL; elementos para uma análise de médio e longo prazo*. Campinas, CPFL, 1987.
- (3) KOTAS, T.J. *The exergy method of thermal plant analysis*. London, Butterworths, 1985.
- (4) CENTRO DE TECNOLOGIA COPERSUCAR. *Análise preliminar da cogeração de energia nas usinas cooperadas*. Piracicaba, Centro de Tecnologia Copersucar, 1986.
- (5) CENTRO DE TECNOLOGIA COPERSUCAR. *Seminário sobre bagaço*. Piracicaba, Centro de Tecnologia Copersucar, 1982.

ABSTRACT

The exergy method is applied to the thermodynamic analysis of electrical and mechanical power systems in sugar and alcohol industrial plants. Cogeneration alternatives are evaluated and compared using technical data obtained from industrial plants which are supplied by CPFL. The main thermodynamic irreversibilities are identified and some increasing power production possibilities are analysed, as well as their effects on energy and exergy balances.



APLICAÇÃO DO MÉTODO DA CONVOLUÇÃO NA ESTIMATIVA DO COMPORTAMENTO ENERGÉTICO DE SISTEMAS DE COGERAÇÃO



LUIZ AUGUSTO HORTA NOGUEIRA  
 AFONSO HENRIQUES MOREIRA SANTOS  
 Instituto de Engenharia Mecânica  
 Escola Federal de Engenharia de Itajubá

RESUMO

Em sistemas de cogeração é importante conhecer as eventuais disponibilidades de excedentes energéticos. Isto impõe determinar as curvas de cargas típicas e analisar instantaneamente a instantaneidade, o que em geral não é possível. Este trabalho propõe um enfoque alternativo, aplicando-se a convolução entre as distribuições de probabilidade do consumo de vapor e de energia elétrica/mecânica. Obtém-se o valor esperado de excedente ou déficit energético, bem como os parâmetros técnicos característicos de cogeração.

INTRODUÇÃO

Os sistemas de cogeração, acoplando a produção de calor útil à geração de energia elétrica ou mecânica, configuram uma maneira eficiente e racional para a utilização de combustíveis. Suas vantagens são reconhecidas, existindo diversos segmentos industriais no Brasil que já empregam tais sistemas, com destaques para o setor sucro-alcooleiro, através de turbinas a vapor de contrapressão. Ainda assim, acredita-se que exista um amplo espaço para a difusão de sistemas de cogeração no país, com efeitos positivos importantes sobre a situação energética brasileira.

O conceito de cogeração não pressupõe a interligação do autoprodutor com a concessionária, mas é sob estas condições que se potencializam as vantagens da cogeração, [1]. Esta prática já é comum em vários países e busca-se atualmente implantar condições para seu crescimento no país. Nesta situação, podem ocorrer transferências de energia em ambos sentidos entre a concessionária e a indústria cogeneradora, em função das disponibilidades ou necessidades de potência, cujas variações de demanda são inerentes aos processos industriais. Neste trabalho se discutem os métodos que permitem avaliar, probabilisticamente, os blocos de energia a transacionar, cuja determinação é essencial na análise das condições de concepção e operação de sistemas de cogeração, bem como para a discussão de contratos de interligação.

CONDIÇÃO DE OPERAÇÃO DE SISTEMAS DE COGERAÇÃO

O sistema de cogeração mais difundido e com maiores possibilidades de penetração é constituído por turbinas a vapor de contrapressão, em que a exaustão do vapor se realiza em níveis de pressão acima da condição atmosférica, de acordo com as imposições de temperatura do processo associado. A figura 1 esquematiza este sistema. As condições do vapor de alta pressão situam-se geralmente entre 21 atm e 280°C e cerca de 60 atm e 450°C, determinando a relação entre o trabalho e o calor produzidos, para um dado valor de pressão de escape e do rendimento da turbina. A Figura 2 apresenta a variação do parâmetro  $\beta$ , definido como o quociente entre a potência disponível na turbina e o calor latente no vapor de escape [2].

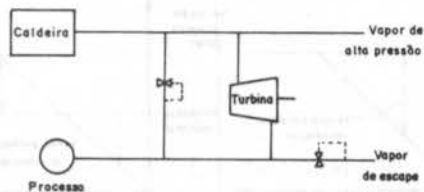


Figura 1. Esquema de sistema de cogeração com turbina a vapor de contrapressão.

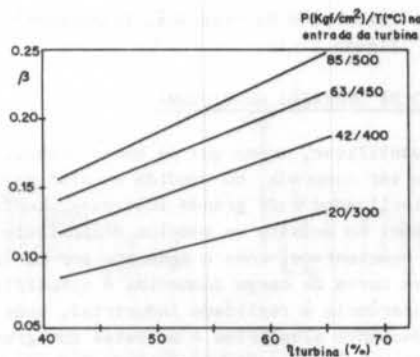


Figura 2. Variação de  $\beta$  com as condições do vapor admitido e rendimento da turbina, para uma pressão de escape de 2,5 ata [2].

Para apresentar as condições de operação de um sistema de cogeração não interligado, admita-se inicialmente uma demanda térmica constante e uma demanda de energia elétrica crescente, a partir de um valor nulo. Em uma primeira condição, a exaustão da turbina, em condições normais, não é suficiente para cobrir as necessidades de vapor para processo. Nesta situação, é preciso expandir vapor em um "by-pass" ou reduzir a eficiência da turbina, através de expansões isentálpicas no sistema de regulação da mesma. Continuando a elevação da demanda de energia elétrica, atinge-se outra condição, correspondente ao equilíbrio entre a necessidade de vapor de escape e sua produção pela turbina. Prosseguindo o aumento de demanda de energia elétrica, tem-se uma terceira situação, quando a produção de vapor de escape é superior à demanda, sendo geralmente liberado o excedente



para a atmosfera.

Quando interligado à concessionária o sistema de cogeração pode operar com menor irreversibilidade e maior eficiência, já que na condição de menor demanda de energia elétrica, mantém-se a geração em níveis correspondentes à necessidade térmica entregando-se à rede o excedente. Analogamente, altos níveis de demanda de energia elétrica podem ser atendidos complementando-se a produção com energia oriunda da rede, sem perdas de vapor. Além dos aspectos estritamente termodinâmicos, associam-se vantagens como maior confiabilidade operacional, estabilidade nos sistemas, etc.

A determinação do nível de autosuficiência energética a ser adotado é tema de considerações técnico-econômicas e estratégicas em cada caso, mas a cogeração interligada é sempre interessante, sobretudo quando coexistem altas demandas de vapor de baixa pressão e consumos variáveis de eletricidade. A figura 3 compara esquematicamente a cogeração independente e a interligada. É preciso qualificar a geração de irreversibilidade e a venda de energia associada como potenciais, já que estão condicionadas à existência de uma demanda de vapor de processo em volume compatível.

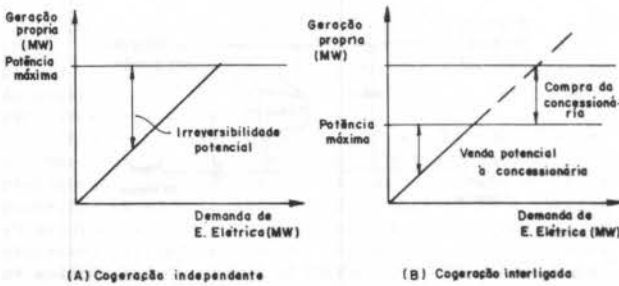


Figura 3. Comparação da cogeração independente e interligada.

#### SIMULAÇÃO DA OPERAÇÃO DO SISTEMA

Quantificar, mesmo que em bases probabilísticas, a energia a ser comprada ou vendida em sistemas de cogeração interligados é de grande interesse, conforme já apresentado. No entanto os modelos disponíveis são ainda pouco conclusivos, como o proposto por Hu [3], que assume uma curva de carga conhecida e simplificada, de difícil aderência à realidade industrial, onde as demandas são bastante aleatórias e as vezes com grande amplitude. A Figura 4 apresenta o registro de consumo de va-

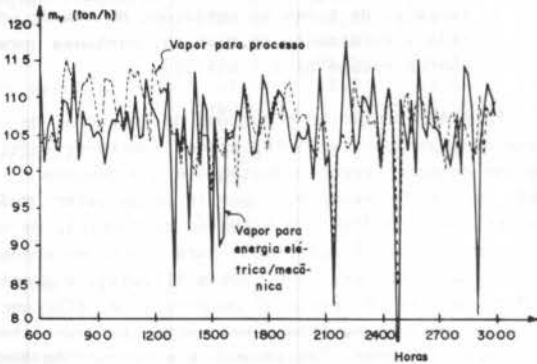


Figura 4. Registro diário de consumo de vapor para processo e geração de energia em uma usina de açúcar [4].

por para geração de energia elétrica/mecânica e para processo em uma usina de açúcar e álcool [4], onde fica patente a dificuldade de análise.

O método determinístico para avaliação da operação permite calcular o excedente ou deficit de potência em valores instantâneos, sendo contudo de pouca aplicabilidade, devendo ser construída uma curva de duração do excedente. Esta curva é o complemento da função probabilidade acumulada, F, relativa ao excedente. Observe-se que este método se apoia essencialmente no conhecimento preciso das curvas de carga representativas do sistema industrial, o que em geral é difícil em plantas existentes e mais ainda em plantas novas.

Ao se construir a curva de duração de excedente perde-se a informação sequencial de ocorrência de disponibilidades, aspecto irrelevante se considerada a limitada reprodutibilidade das curvas de carga. Por outro lado, as curvas de duração contém informações de fácil manuseio para a identificação de condições operacionais do sistema de cogeração. A Figura 5 apresenta uma curva genérica de duração de excedente, e a sua relação com a curva de probabilidade acumulada. Seja a função densidade de probabilidade de ocorrência de um dado nível de excedente,  $f(x)$ , cuja probabilidade acumulada é:

$$F(\text{exc}) = \int_{-\infty}^{\text{exc}} f(x) dx \quad (1)$$

A função duração de excedente é dada por:

$$D(\text{exc}) = 1 - F(\text{exc}) \quad (2)$$

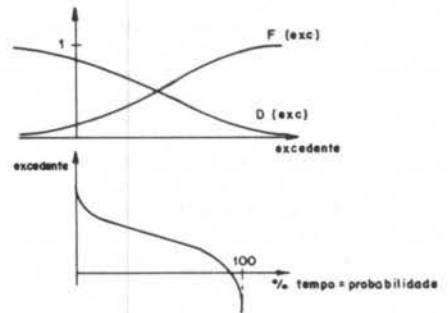


Figura 5. Curva genérica de duração de excedente.

A curva de duração dos excedentes de vapor pode ser transformada em uma curva correspondente para a potência, situação em que permite interessantes avaliações do sistema de cogeração, como mostra a Figura 6, se já priorizando a geração de vapor ou energia elétrica.

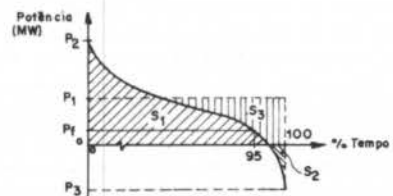


Figura 6. Curva de duração da potência excedente.



Assim, nesta figura, a área sob a curva no primeiro quadrante,  $S_1$ , representa a disponibilidade energética que pode ser vendida à concessionária de energia elétrica. A área sobre a curva  $S_2$ , no quarto quadrante, refere-se a energia a ser complementada pela rede para a operação em condições de equilíbrio. A área sobre a curva no primeiro quadrante, relativa a uma potência  $P_1$ , referida na Figura como  $S_3$ , somada à  $S_2$ , associa-se ao requerimento adicional de vapor para assegurar em 100% do tempo a geração a um nível de potência  $P_1$ . Em termos de potências,  $P_2$  corresponde à máxima potência excedente disponível,  $P_3$  a máxima demanda complementar, a ser suprida pela rede e  $P_f$  à potência excedente firme que no conceito usual dos sistemas hidrelétricos corresponde a uma duração de 95% do tempo. Desta forma,  $P_f$  poderia ser a potência a ser contratada pelo cogenerador em um fornecimento a rede. Outra interessante linha de estudos sobre a curva de duração contempla a otimização das condições de geração de vapor de alta pressão. É fácil perceber que níveis mais elevados de entalpia na entrada da turbina deslocam verticalmente e de forma assimétrica a curva de duração.

As curvas de duração são de uso corrente no setor energético e sua estimativa pode ser feita de diversas formas, desde métodos simplificados, como aproximação linear até modelos mais detalhados, envolvendo séries polinomiais. No caso linear, o conhecimento do fator de carga e da potência média, em energia elétrica/mecânica ou calor, são suficientes para a estimativa da curva de duração. Um caso intermediário é aproximação em patamares, que requer maiores informações do sistema. A Figura 7 apresenta esquemas destes casos [5].

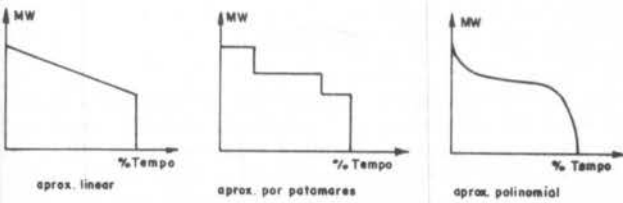


Figura 7. Curvas de duração aproximadas típicas.

#### O MÉTODO DE CONVOLUÇÃO NA ANÁLISE DA OPERAÇÃO

Após apresentar as limitações da análise determinística dos sistemas de cogeração através das curvas de carga e caracterizar os recursos analíticos que a interpretação das curvas de duração possui, descreve-se a seguir a proposta metodológica central deste trabalho.

Essencialmente, prescinde-se das curvas de carga e estima-se curvas de duração de demanda para energia e calor de processo. Efetuando-se a convolução das funções distribuição de probabilidade para calor e trabalho, obtém-se a função distribuição de probabilidade do excedente energético. As estimativas das curvas de duração de demanda que dão origem as densidades de probabilidades podem resultar de transposições de configurações industriais semelhantes ou de análises cuidadosas das condições operacionais, sem impor uma fase anterior de elaborada aquisição de informações, essencial no método determinístico.

O excedente energético em um sistema de cogeração depende, para uma dada configuração operacional, do excedente mássico de vapor, exc, dado por:

$$exc = q - p \quad (3)$$

onde  $q$  e  $p$  referem-se respectivamente as demandas de vapor para calor e para energia elétrica. Sejam as seguintes funções densidade de probabilidade:

$$f_1(q) \quad \text{- densidade de probabilidade da demanda } q, \text{ associada ao calor de processo}$$

$$f_2(p) = f(q-exc) \quad \text{- densidade de probabilidade da demanda } p, \text{ associada à potência elétrica/mecânica}$$

Considerando-se que as variáveis aleatórias calor e trabalho são independentes, pode-se mostrar que a demanda de probabilidade para o excedente,  $f_3(exc)$ , é dada pela seguinte integral de convolução modificada:

$$f_3(exc) = \int_{-\infty}^{exc} f_1(q) \cdot f_2(q-exc) dq \quad (4)$$

logo, tem-se que:

$$f_3(exc) = \int_{-\infty}^{exc} \frac{dF_1(q)}{dq} \cdot \frac{dF_2(q-exc)}{dq} dq \quad (5)$$

e, daí,

$$f_3(exc) = \int_{-\infty}^{exc} \frac{dD_1(q)}{dq} \cdot \frac{dD_2(q-exc)}{dq} \cdot dq \quad (6)$$

onde  $D$  e  $F$  referem-se às funções duração e probabilidade acumulada respectivamente, definidas em (1) e (2). Observa-se de (6) que conhecendo-se as durações das demandas de calor e potência elétrica/mecânica, tem-se a distribuição de probabilidade do excedente.

Numericamente, a integral em (6) pode ser resolvida discretizando-se as curvas de duração, como mostra a figura 8, que permite obter as funções discretas de probabilidades.

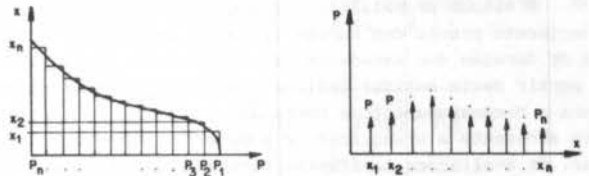


Figura 8. Discretização das curvas de duração e da função discreta de probabilidade.

Combinando-se as funções discretas de probabilidade para calor e potência, tem-se a função discreta de probabilidade do excedente de vapor. Isto é, em suma, a convolução das funções. De posse da função discreta de probabilidade para o excedente, pode-se obter diretamente a curva de duração desta variável.

#### APLICAÇÃO DO MÉTODO

Como o objetivo de mostrar a pertinência e adequação do método probabilístico proposto, desenvolve-se a seguir uma análise comparada com o método determinístico. Para tanto, utilizando-se de recursos computacionais e partindo das curvas de carga reais apresentadas na Figura 4, discretizada em intervalos de 15 min, obteve-se a curva de duração do excedente por ambos métodos. A Figura 9 apresenta os resultados obtidos nesta aplicação.

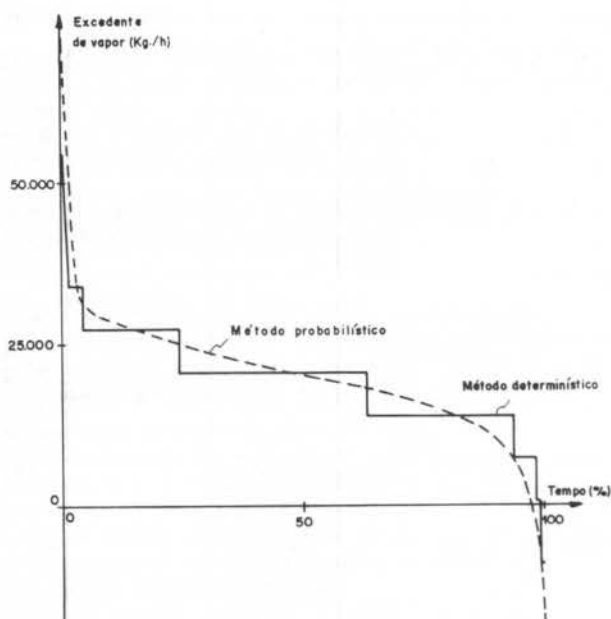


Figura 9. Comparação dos resultados para a curva de duração de excedentes pelos métodos determinístico e probabilístico, considerando as curvas de carga da figura 4.

Observa-se nesta figura a aderência da curva aproximada com a curva real, de maneira bastante satisfatória, neste nível de discretização. Também o traçado da curva pelo método determinístico, em largos patamares foi resultado da magnitude da classe do histograma correspondente à esta, e um maior número de classes certamente favoreceria a aproximação entre as curvas.

#### CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

O método probabilístico proposto permite sem o conhecimento prévio das curvas de carga, determinar a curva de duração dos excedentes em sistemas de cogeração e a partir desta estimar índices e parâmetros fundamentais para o dimensionamento e operação econômica, como a energia excedente e a adquirir, e a potência firme a contratar. Em avaliações tarifárias horosazonais, em que é importante o horário de ocorrência da disponibilidade de potência, impõe-se uma adaptação do método.

Este método, associado a um programa de análise energética global do sistema de cogeração, permite aperfeiçoar a determinação de condições da operação do sistema, como por exemplo os níveis ótimos de pressão e temperatura a adotar em determinada configuração. Acredita-se que tal ferramenta analítica seja de efetiva aplicação para o setor produtivo, sobretudo quando se consideram as atuais perspectivas de abastecimento energético.

#### AGRADECIMENTO

Os autores agradecem a seus alunos Hebert Gottzandt, Delson L. A. Silva e José B. Mota Junior, do Curso de Graduação da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, pela colaboração no desenvolvimento do programa computacional [6].

#### REFERÊNCIAS

- [1] Nogueira, L.A.H. e Santos, A.H.M., Considerações técnico econômicas aplicadas à cogeração de energia elétrica e calor de processo em indústrias. IX Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, B. Horizonte, MG, 1987, Anais do XI SNTPEE, grupo II, GPT/12, pp 1-6 (1987).
- [2] Nogueira, L.A.H. Análise da utilização de energia na produção de álcool de cana de açúcar - tese de doutoramento, UNICAMP, Campinas, SP (1987).
- [3] Hu, D.S., Cogeneration, Reston Publish., Reston (1986).
- [4] Instituto de Pesquisas Tecnológicas - Manual de Conservação de Energia em Usinas de Açúcar álcool - (cap. 7) - versão preliminar - IPT - São Paulo - SP (1987).
- [5] Sullivan, R.L., Power System Planning - McGraw-Hill, New York (1977).
- [6] Gottzandt, H. et alli - Cogeração de energia na indústria - trabalho da disciplina Centrais Térmicas e Hidráulicas, na Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, MG (1988).

#### ABSTRACT

In interconnected cogeneration systems is important to know the availability or scarcity of energy, in order to design and operate correctly these systems and to make possible energy sales agreements with public utilities. The usual method for this kind of energy analysis requires knowledge of thermal and electrical/mechanical load curves, which is in general difficult to obtain. Facing this obstacle, in this paper one proposes a probabilistic approach, based in the convolution integral of probability distribution function of thermal and electrical/mechanical power demands. Besides this, a discussion of the method is made for an application in real conditions of a sugar industry.

## PROJETO DE REDES COMPLEXAS DE COLETORES SOLARES

ABCN

ABCN

LEOPOLDO EURICO GONÇALVES BASTOS  
Professor Titular  
Programa de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ  
Caixa Postal. 68.503 - 21.945 - Rio de Janeiro

## RESUMO

O aquecimento industrial de fluidos numa faixa de baixas temperaturas ( $< 80^{\circ}\text{C}$ ) constitui-se num campo atraente para a utilização de coletores solares planos. Neste trabalho é apresentada uma metodologia de cálculo para redes de coletores com uma alimentação contínua de fluido e sem estocagem térmica. São analisados os requerimentos relativos aos níveis de temperatura e de energia propiciados pela instalação solar. Como um exemplo de aplicação é analisado o caso de uma instalação solar para o pré-aquecimento de óleo combustível pesado entre  $35^{\circ}\text{C}$  e  $51^{\circ}\text{C}$  a uma vazão de  $700 \text{ kg/h}$ .

## INTRODUÇÃO

A utilização de redes complexas de coletores solares para o aquecimento de fluidos na indústria é um assunto que vem sendo objeto de estudos recentes encontrados na literatura aberta. Isto sem dúvida é devido a importância crescente que vem tendo as fontes de energia renováveis, notadamente a solar, em programas de conservação de energia nas indústrias.

Entre as possíveis aplicabilidades pode-se citar aquelas, que requerem baixas temperaturas e grandes quantidades de energia térmica. Uma instalação solar adequada a este tipo de solicitação poderia ter uma alimentação contínua do fluido de trabalho e não possuir uma estocagem térmica. Para estas instalações a determinação da área requerida de coletores solares e da fração de contribuição solar é um assunto que vem sendo tratado na literatura, [1].

No entanto, visando uma segurança com relação ao funcionamento de tais tipos de instalações de aquecimento solar, observa-se que há a necessidade de serem incorporados à metodologia existente, os seguintes critérios adicionais: (i) a restrição do nível de temperatura requerido ao fluido de trabalho na saída dos coletores, (ii) situações de variação de vazão para o fluido de trabalho, (iii) tipos de arranjos dos coletores nos ramais, (iv) consideração das perdas térmicas na instalação.

Sendo assim, o presente trabalho pretende estender a metodologia existente para o projeto de redes complexas de coletores planos, sem estocagem, incorporando os pontos indicados.

## TEORIA

Considerando uma aplicabilidade industrial, há a necessidade de ser fixado como exigência de projeto o valor da temperatura do fluido de trabalho na saída da rede de coletores. Para tanto, necessita-se de curva de eficiência instantânea do coletor que será instalado, e de serem feitas correções apropriadas visando a instalação em rede.

Curva de Eficiência Instantânea. É definida como a razão entre a energia efetivamente cedida ao fluido circulante, pela energia solar total incidente e medida normalmente ao plano de abertura do coletor. É prática usual um ajuste por mínimos quadrados dos pontos experimentais por uma reta:

$$\eta_R = F_R (\tau\alpha)_n - F_R U_L \left[ \frac{T_R - T_{\infty}}{I} \right]$$

sendo:  $F_R$ : fator de transferência de calor, é função do tipo de fixação tubo-absorvedor, da vazão e massa específica do fluido e do coeficiente de transferência de calor sólido-fluido e perdas para o ambiente;  $I$ : nível de insolação total instantâneo e normal ao plano de abertura do coletor;  $T_R$ : temperatura de referência do coletor;  $T_{\infty}$ : temperatura ambiente;  $U_L$ : coeficiente de transferência de calor coletor-ambiente;  $\alpha$ : absorvidade do absorvedor;  $\tau$ : transmissividade do vidro.

Correções para a Curva de Eficiência: no processo de seleção de um coletor apropriado a uma instalação é comum o estabelecimento de comparações entre as eficiências apresentadas pelos fabricantes. Surgem porém dois problemas: (i) quase sempre há temperaturas de referência  $T_R$  distintas (temperatura de entrada do fluido  $T_e$ , ou a temperatura média do coletor  $T_m$ ) acarretando valores distintos para  $F_R$  ( $F_e$  ou  $F_m$ ) e  $U_L$  ( $\eta_e$  ou  $\eta_m$ ); (ii) também as vazões de testes podem ser diferentes porém estando situadas, dentro de uma mesma faixa de 25%, quando se admite uma correção, [2]

$$F_e (\tau\alpha)_n = \frac{1}{\frac{1}{F_m (\tau\alpha)_n} + \frac{U_L}{2(\tau\alpha)_n w c_p}}$$

$$F_e U_L = \frac{1}{\frac{1}{F_m U_L} + \frac{1}{2w c_p}}$$

onde  $c_p$ : calor específico do fluido de trabalho;  $w$  = vazão mássica por unidade de área de coletor.

(ii) Também para fins de comparação das eficiências as vazões de teste devem estar dentro de uma faixa de 25% para se admitir uma correção:

$$\frac{(F_e)_{\text{novo}}}{(F_e)_{\text{anterior}}} = \frac{1}{1 + \frac{(F_e U_L)_{\text{anterior}}}{2(w c_p)_{\text{novo}}} - \frac{(F_e U_L)_{\text{anterior}}}{2(w c_p)_{\text{anterior}}}}$$

Após, selecionado o coletor, a curva de eficiência instantânea deste deverá sofrer novas correções para que se possa representar fielmente o comportamento da rede.

(i) Como na prática o coletor solar é montado inclinado em relação à horizontal (em ângulo próximo à latitude do lugar), e os raios solares com ângulo variável (diá

rio e sazonal) é necessário uma correção no fator ( $\tau\alpha$ ) para que possa representar de fato o comportamento anual do coletor, [3], resultando um  $\overline{\tau\alpha}$ .

(ii) Quando for necessário montagem de coletores em séries, a eficiência de cada coletor no ramal poderá ser calculada, segundo [4]: aplicando-se o fator CFN à curva básica:

$$CFN = \frac{1}{N\psi} \left\{ 1 - (1 - \psi)^N \right\}$$

onde N: nº de coletores no ramal,  $\psi = \frac{F_R U_L}{wc_p}$ .

(iii) Considerando o problema da concepção da instalação, [5] sugeriu a adoção dos fatores de correção a seguir levando em conta os diâmetros e extensões das tubulações, acessórios e isolamentos:

$$(\overline{\tau\alpha})' = (\overline{\tau\alpha}) / \left( 1 + \frac{U_p A_o}{m c_p} \right)$$

$$U_L' = U_L \left[ 1 - \frac{U_p A_i}{m c_p} + \frac{U_p (A_i + A_o)}{A F_e U_L} \right] / \left( 1 + \frac{U_p A_o}{m c_p} \right)$$

sendo  $A_i$  ( $A_o$ ): área para perdas térmicas dos tubos na entrada (saída) do coletor,  $m^2$ ;  $m$ : vazão mássica do coletor;  $U$ : coeficiente global de transferência de calor da tubulação  $W/(m^2K)$ .

Temperatura de saída do fluido no coletor. Considerando a inércia térmica, a temperatura de saída do fluido será:

$$T_s = \frac{I-X}{wc_p} F_e \overline{\tau\alpha} + \frac{F_e U_L T_\infty}{w c_p} + T_e \left[ 1 - \frac{F_e U_L}{w c_p} \right]$$

sendo I: nível de insolação ( $W/m^2$ ); X: nível de insolação para  $\eta_c = 0$  ( $= [U_L / \overline{\tau\alpha}] (T - T_\infty)$ ); [6]. Para a região considerada, devido à grande regularidade climática foi adotado para a radiação solar um modelo senoidal de variação diária e um valor médio anual para a radiação instantânea de  $459 W/m^2$ , e  $T_\infty = 22,6^\circ C$ ; [7]. Através desta expressão pode-se analisar o comportamento das temperaturas do fluido de trabalho ao longo de uma montagem de coletores em série.

Dimensionamento da instalação e fração de contribuição solar. Levando em conta a temperatura pré-fixada de saída do fluido de trabalho, as condições locais de insolação e temperatura e a curva de eficiência instantânea do coletor, é possível numa primeira etapa de cálculo se estabelecer: um arranjo para a rede de coletores, a área de captação e da energia disponível. Após é feito o dimensionamento da rede de tubulações e isolamentos. Ficam determinados então as perdas de carga na rede devidas ao escoamento do fluido (necessária para o cálculo da bomba), e as perdas térmicas para o ambiente. Numa terceira etapa o sistema é recalculado para levar em conta estas perdas de energia e avaliação do nível final de temperatura a ser atingido pelo fluido de trabalho na saída da rede, para uma fixada área de captação. Neste ponto se avalia a contribuição que o sistema poderia dar em termos energéticos.

Como numa linha de N coletores montados em série são distintas as temperaturas de entrada do fluido em cada coletor, haverá para cada um destes uma insolação mínima para que possa entrar em operação. Ocorrerão em consequência num mesmo ramal diferentes contribuições da parte solar dependendo da posição do coletor no ramal. Define-se então, um valor médio para a fração de contribuição solar do ramal,  $\overline{f}_i$ :

$$\overline{f}_i = \sum_{i=1}^N f_i / N$$

Quando a rede possuir em cada ramal um número idêntico de coletores esta fração de contribuição solar do ramal será a mesma do sistema. A fração  $\overline{f}_i$  é definida por [1] como:

$$f_i = \frac{q(n)}{t(I_{max} - X)}$$

$f_i$ : fração de contribuição anual em termos energéticos pelo coletor,  $I_{max}$ : insolação de pico, máximo no ano para o sítio;  $q(\overline{f})$ : fator dependente do tipo do coletor do lugar e da média anual de radiação solar incidente, [1],  $t$ : ( $=3,17 \times 10^7 s$ ).

A energia útil solar fornecida pelo sistema durante o ano (carga de 24h) é calculada por:

$$Q_{util} (J/ano) = \overline{f}_i \cdot t \cdot Q_s$$

sendo  $Q_s$ : taxa de aquecimento correspondente ao sistema (J/s).

Caso a ser analisado. Projetar uma instalação de coletores solares planos para o pré-aquecimento de óleo combustível utilizado em geradores de vapor. São dados: (i) localização do lugar: Rio Grande do Norte  $4,7^\circ S, 37,5^\circ E$  (ii) óleo combustível: vazão de 700 kg/h entrando a  $35^\circ C$  e saindo a  $51^\circ C$ ,  $c_p = 2142 J/(kgK)$ ,  $\rho = 875 kg/m^3$ ,  $k = 0,135 W/(mK)$ , ponto de fluídos (APF):  $35^\circ C$ ,  $\alpha = 1,85 \times 10^{-4} m^2/s$ . (iii) água de alimentação provida de poço artesiano a  $40^\circ C$  e sendo aquecida pela bateria de coletores até  $62^\circ C$ .

## RESULTADOS

Curva de eficiência para o coletor. Em decorrência de análise efetuada para as eficiências instantâneas apresentadas por seis fabricantes nacionais: Giacomet, Espectrosol, Embrasol, Heliodinâmica, J. LowBeer e Tuma chegou-se a conclusão que a seguinte reta de eficiência seria a representativa para os coletores nacionais:

$$\eta_e = 0,7283 - 7,4489 (T_e - T_\infty) / I$$

e a vazão de teste de  $0,024 kg/s$  e  $1,6m^2$  de área.

Configuração do sistema. Na figura 1 é apresentada do esquematismo do sistema de pré-aquecimento solar. A água quente proveniente dos coletores é bombeada num circuito fechado trocando energia com o óleo por meio de dois permutadores bi-tubulares idênticos. O óleo flui no tubo interno  $1\frac{1}{4}''$  BWG 18 e em contracorrente a água escoa no tubo externo  $1\frac{3}{4}''$  BWG 12, sendo o comprimento do permutador de 23m. As tubulações de alimentação (drenagem) e dos ramais dos coletores são de  $1\frac{1}{2}''$  e  $3/4''$  respectivamente. As perdas de cargas nas tubulações e acidentes foram calculadas usando-se [8], e as perdas de cargas nos coletores nacionais foram obtidas através da expressão resultante de média para os coletores aqui fabricados:

$$\Delta p (\text{em mca}) = 0,180 + 2,727 \left[ \frac{m}{s} (\text{em kg/s}) - 0,057 \right]$$

Nos cálculos das perdas térmicas foram usados para o material isolante ( $k = 0,033 W/(mK)$ ,  $h = 10W/(m^2K)$  e espessura de 33mm, [5]).

Os resultados da simulação do sistema para duas vazões características de água nos coletores ( $0,018$  e  $0,024 kg/s$ ) e em função do número de coletores por ramal são apresentados na Tabela 1. Pode ser visto que para a vazão menor ( $0,018 kg/s$ ) são necessários 6 coletores em série para a elevação da temperatura de água até  $62^\circ C$  e com uma eficiência de coletor ainda razoável ( $\eta_c = 0,355$ ), sendo então esta a configuração adotada. A taxa de energia conseguida no ramal  $Q_R$  é de  $1,67 kW$ . Assim, o sistema será constituído de uma bateria com 24 coletores ( $38,4m^2$  de área): 4 ramais com 6 coletores em série por ramal, fornecendo uma taxa de energia útil

de 6,68 kW. A fração de energia solar útil anual  $\bar{F}$  é igual a 21,3%, conseguindo-se aproveitar uma energia anual de 44,8 GJ.

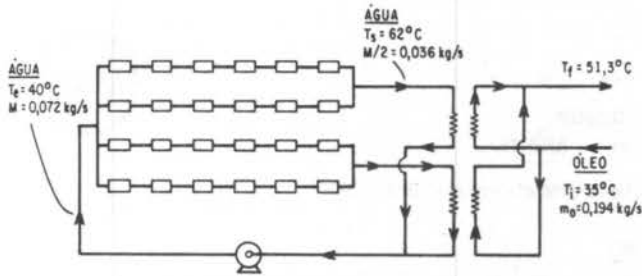


Figura 1 - Representação Esquemática do Sistema

Conclui-se então que a metodologia apresentada é viável para o dimensionamento de sistemas complexos de redes de coletores para uma utilização sem estocagem térmica.

vazão: 0,018 kg/s

N	$T_e$ (°C)	$T_s$ (°C)	$\eta_c$	$\eta_R$	$Q_R$ (kW)	$f_i$
1	40,000	48,007	0,539	0,539	0,60	0,242
2	48,007	53,388	0,469	0,495	1,10	0,227
3	53,388	57,005	0,422	0,455	1,28	0,215
4	57,005	59,436	0,390	0,420	1,46	0,206
5	59,436	61,070	0,369	0,389	1,59	0,199
6	61,070	62,168	0,335	0,361	1,67	0,194

vazão: 0,24 kg/s

N	$T_e$ (°C)	$T_s$ (°C)	$\eta_c$	$\eta_R$	$Q_R$ (kW)	$f_i$
1	40,000	46,131	0,550	0,550	0,62	0,242
2	46,131	50,722	0,496	0,516	1,08	0,230
3	50,722	54,161	0,455	0,484	1,42	0,221
4	54,161	56,737	0,424	0,455	1,68	0,213
5	56,737	58,665	0,401	0,428	1,88	0,206
6	58,665	60,110	0,384	0,404	2,02	0,201

TABELA 1 - Parâmetros do sistema para distintas vazões e número de coletores por ramal.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Gordon J.M.; Rabl, A. - "Design, Analysis and Optimization of Solar Industrial Process Heat Plants without Storage", Solar Energy, vol. 8, nº 6, pp. 519-530, 1982.
- [2] Lunde, P.J. - "Solar Thermal Engineering", John Wiley & Sons, N.Y. 1980.
- [3] Beckman, W.A.; Klein, S.A.; Duffie, J.A. - "Solar Heating Design by the F-Chart Method", John Wiley & Sons, USA, 1977
- [4] Oonk, R.L.; Jones, D.E.; Cole-Appel, B.E. - "Calculation of Performance of N Collectors in Series from Test DATA on a Single Collector"; Solar Energy, vol. 23, pp. 535-536, 1979.

- [5] Beckman, W.A. - "Duct and Pipe Losses in Solar Energy Systems", Solar Energy, vol. 4, pp. 531-532, 1978.
- [6] Klein, S.A.; Beckman, W.A. - "Review of Solar Radiation Utilizability", Journal of Solar Energy Engineering, vol. 106, pp. 393-402, Nov. 1984.
- [7] Normais Climatológicas - Instituto Nacional de Meteorologia 3ª ed. Rio de Janeiro, 1984.
- [8] Mac Intyre, A.J. - Tubulações Industriais, pág. 25, Ed. Edgard Blucher, S.P., 1984.

#### ABSTRACT

Solar industrial process heat using flat plate collectors are technically viable and suitable for low temperatures applications. This paper describes a theoretical procedure to design series/parallel collector networks without thermal storage.

An example is presented for the case of heating heavy oil, (rate of flow: 700 kg/h), between 35°C and 51°C. The heated water from the collectors array circulates inside a closed-loop and provides through heat exchangers the required amount of heat and the temperature level for the oil.



SOLUÇÃO DE REDES HIDRÁULICAS NA SIMULAÇÃO EM TEMPO REAL DE  
PLANTAS DE PROCESSO.



ANIBAL N. GEBRIM  
ANTONIO CARLOS de O. BARROSO

Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares - IPEN/CNEN

RESUMO

O presente trabalho insere-se no contexto de um desenvolvimento de um simulador em tempo real para uma planta de processo. Neste tipo de planta, embora exista um grande número de sistemas que conduzem fluidos, estes podem ser decompostos em redes de pequeno porte, que são modeladas independentemente. Ao invés de algoritmos gerais de solução, aplicáveis a qualquer rede, optou-se por algoritmos específicos para cada pequena rede hidráulica, no intuito de obter processamento computacional mais expedito.

INTRODUÇÃO

A distribuição de vazões em regime estacionário, numa rede de tubulações é um problema que, tanto tratado pela formulação nodal como pela formulação de malha resulta num conjunto de equações algébricas não lineares.

Um grande número de trabalhos tem abordado este problema e algumas tendências podem ser observadas.

- a. Embora o método de Newton e seus derivados /1/, possam ser usado em conjunção com ambas as formulações, aquelas baseadas na formulação nodal produzem equações que favorecem a eficiência destes métodos.
- b. Para redes grandes, mais de 100 nós, as dificuldades inerentes ao método de Newton e seus derivados tendem a se acentuar, isto é, o número de avaliações de funções necessárias ao cálculo da matriz Jacobiana e os requisitos de memória avolumam-se tendendo a cancelar as vantagens da rápida convergência do método.
- c. Algumas técnicas /2,3/ podem ser usadas para tirar partido do acoplamento restrito das equações do sistema, (Jacobiana esparsa) e reduzir as dimensões do problema original, substituindo-o por um conjunto de sistema menores e irreduzíveis.
- d. No trato de redes muito grandes, mais 1000 nós, uma abordagem baseada na formulação de malha e numa modificação do método de Hardy-Cross mostrou-se bastante eficiente /4/.

O presente trabalho insere-se no contexto do desenvolvimento de um simulador de tempo real para uma planta de processo. Neste tipo de planta, embora exista um grande número de sistemas que conduzem fluidos, estes podem ser decompostos em redes de pequeno porte, que do ponto de vista hidráulico são possíveis de resolução independente.

Para pequenas redes, algumas dezenas de nós, uma formulação nodal e método de solução tipo Newton parece ser uma abordagem adequada.

A nível de implementação preteriu-se algoritmos gerais, aplicáveis a qualquer rede e que geram as equações do modelo a partir de uma descrição topológica da mesma, optando-se por modelar individualmente as redes, explorando as características individuais de cada uma delas para se obter modelos de processamento mais expedito.

METODOLOGIA

Utilizando a formulação nodal escreve-se as equações para as perdas de pressão em cada ramo e as equações da continuidade para os nós. A partir daí 2 alternativas foram utilizadas:

- a. Manipula-se as equações de forma a chegar-se a um conjunto mínimo, que tenha que ser resolvido acopladamente, respeitando a condição de não se introduzir funções irracionais.

Seja,  $w$  o vetor de vazões nos  $n$  ramos  
 $u$  o vetor das vazões do conjunto irreduzível,  $k$  vazões  
 $v$  a partição de  $w$  excluindo  $u$

A solução do sistema original  $F(w)=0$ , onde  $F: R^n \rightarrow R^m$ , é reduzido à solução de um sistema menor, com  $k$  incógnitas:  
 $G(u)=0$ , onde  $G: R^k \rightarrow R^k$ , (1)  
 e ao cálculo de  $n-k$  relações explícitas que seriam usadas para obter as vazões do vetor  $v$ .

Para a solução do sistema (1) implementou-se o método de Brown /5/, que apresenta as mesmas características de convergência quadrática do método de Newton e reduz substancialmente os requisitos de avaliação das funções e armazenagem de variáveis.

- b. Observou-se que em muitos casos, a manipulação algébrica do sistema original, desde que permitida a introdução de funções irracionais, pode ser estendida. Nesta alternativa ao final da redução obtém-se :  
 (1) uma única equação não linear e irracional  $h(We)=0$ , (2)  
 completada por um conjunto de restrições  $Ri(We)<0$ ; (3)

(ii) um conjunto de n-1 relações explícitas para a determinação das outras vazões.

Para resolver a equação (1) com as restrições impostas pela expressão (3), precisa-se de um método, como por exemplo o método da Biseção, que faça uma procura de raiz em um intervalo confinado.

As alternativas acima foram usadas na modelagem de vários circuitos de uma instalação experimental em projeto no IPEN. Dois destes circuitos foram escolhidos para exemplificar a abordagem utilizada e nas seções subsequentes são apresentadas as redes, as equações, os resultados e as conclusões a que se chegou.

#### MODELAGEM DOS CIRCUITOS

Descrição do Circuito 1. O fluxograma deste circuito é mostrado na figura 1, trata-se de um circuito de resfriamento intermediário que atende a 10

trocadores de calor. É um sistema fechado, por onde circula a água impulsionada por duas bombas centrífugas, sendo posteriormente recirculada para a troca térmica com o trocador de calor a montante das bombas.

Na mesma figura, incluiu-se os símbolos usados para designar as vazões e as condutâncias nos ramos.

As situações operacionais consideradas no desenvolvimento do modelo, incluem transitórios causados pelo acionamento remoto de qualquer umas das válvulas e o acionamento remoto de qualquer uma das bombas.

Tendo em vista que o interesse na simulação destes circuitos é apenas prever a redistribuição de vazões, os transitórios são simulados como uma sucessão de estados "pseudo" estacionário.

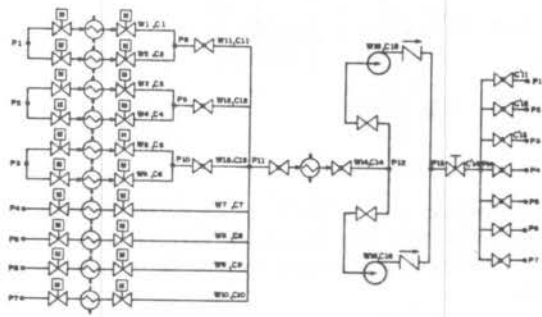


Figura 1 - Circuito 1

Equacionamento do Circuito 1. Utilizando-se das equações "nodais" e manipulando-as algebricamente de maneira que as pressões locais desapareçam e colocando as vazões W2 até W10 em função de W1 e utilizando-se da conservação de massa para o ramo 14:

$$W14 = W1 + W2 + W3 + W4 + W5 + W6 + W7 + W8 + W9 + W10 \quad (4)$$

e definindo-se A igual,

$$A = 1 + \frac{C2}{C1} + \frac{\sqrt{C11A^2 + (C1+C2)^2}}{C1 C11A} \left\{ \frac{(C3+C4) C12A}{\sqrt{C12A^2 + (C3+C4)^2}} + \frac{(C5+C6) C13A}{\sqrt{C13A^2 + (C5+C6)^2}} + (C7+C8+C9+C10) \right\} \quad (5)$$

onde,

$$\left( \frac{1}{C11A} \right)^2 = \left( \frac{1}{C11} \right)^2 + \left( \frac{1}{C11'} \right)^2, \quad \left( \frac{1}{C12A} \right)^2 = \left( \frac{1}{C12} \right)^2 + \left( \frac{1}{C12'} \right)^2 \quad (6)$$

$$e \quad \left( \frac{1}{C13A} \right)^2 = \left( \frac{1}{C13} \right)^2 + \left( \frac{1}{C13'} \right)^2$$

tem-se então o seguinte conjunto de equações:

$$W14 = A W1 \quad (7)$$

$$\left( \frac{W14}{C14A} \right)^2 + \left( \frac{W15}{C15} \right)^2 + \left( \frac{W1}{C1} \right)^2 + \left( \frac{W1+W2}{C11A} \right)^2 = DP1 \quad (8)$$

$$\text{com} \quad \left( \frac{1}{C14A} \right)^2 = \left( \frac{1}{C14} \right)^2 + \left( \frac{1}{C14'} \right)^2$$

$$\left( \frac{W14}{C14A} \right)^2 + \left( \frac{W16}{C16} \right)^2 + \left( \frac{W1}{C1} \right)^2 + \left( \frac{W1+W2}{C11A} \right)^2 = DP2 \quad (9)$$

$$W14 = W15 + W16 \quad (10)$$

W, C e DP são respectivamente vazão (kg/s), condutância (kg/s√bar) e pressão fornecida pela bomba (bar).

Os ganhos de pressão fornecidas pelas bombas, bem como a atualização das condutâncias a medida que as vazões se modificam são calculadas através de rotinas independente do programa principal.

Manipulando as equações acima temos uma equação dependente de uma variável, W1:

$$A W1 = C15 \sqrt{DP1 - W1 B} + C16 \sqrt{DP2 - W1 B}, \quad (11)$$

$$\text{onde } B = \left( \frac{1}{C1} \right)^2 + \left( \frac{C1+C2}{C1 C11A} \right)^2 + \left( \frac{A}{C14A} \right)^2$$

A expressão (11) é função só da vazão no ramo 1, e pode ser resolvida pelo método da biseção para o seguinte intervalo de validade no domínio dos reais.

$$0 < W1 < \frac{B}{DP1}, \quad i=1,2 \quad (12)$$

A simulação proposta permite a atuação do operador no decorrer do processo. Então, por exemplo, se houver uma desativação do ramo 1, causada pelo

fechamento da válvula, o programa computacional tem que estar preparado para mudar a solução do sistema para outro ramo qualquer, de 2 a 10.

**Descrição do Circuito 2.** A água captada pelo sistema é bombeada pelas quatro bombas centrífugas para um ponto comum, de onde é distribuído para resfriar 6 trocadores de calor. A vazão designada como W7 é considerada conhecida.

O fluxograma de modelagem mostrado na figura 2 abaixo contém os símbolos das vazões e das condutâncias utilizadas na próxima seção.

As situações operacionais consideradas no desenvolvimento do modelo, incluem o acionamento remoto de qualquer umas das válvulas e o acionamento remoto de qualquer uma das bombas.

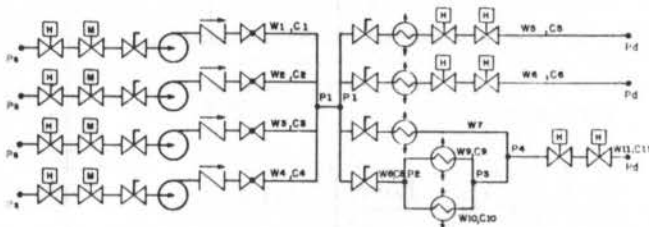


Figura 2 - Circuito 2

**Equacionamento Circuito 2.** Procedendo-se de forma análoga ao circuito anterior, tem-se o seguinte conjunto de equações.

$$\left(\frac{W1}{C1}\right)^2 = DP1 + Ps - Pd - \left(\frac{W5}{C5}\right)^2 \quad (13)$$

$$\left(\frac{W2}{C2}\right)^2 = DP2 + Ps - Pd - \left(\frac{W5}{C5}\right)^2 \quad (14)$$

$$\left(\frac{W3}{C3}\right)^2 = DP3 + Ps - Pd - \left(\frac{W5}{C5}\right)^2 \quad (15)$$

$$\left(\frac{W4}{C4}\right)^2 = DP4 + Ps - Pd - \left(\frac{W5}{C5}\right)^2 \quad (16)$$

$$\frac{W6}{C6} = \frac{W5}{C5} \quad (17)$$

$$W7 = 10.167 \quad (18)$$

$$W8 = W1+W2+W3+W4-W5-W6-W7 \quad (19)$$

$$\left(\frac{W8}{C8}\right)^2 + \left(\frac{W9}{C9}\right)^2 + \left(\frac{W11}{C11}\right)^2 = \left(\frac{W5}{C5}\right)^2 \quad (20)$$

$$\left(\frac{W8}{C8}\right)^2 + \left(\frac{W10}{C10}\right)^2 + \left(\frac{W11}{C11}\right)^2 = \left(\frac{W5}{C5}\right)^2 \quad (21)$$

$$W11 = W8 + W7 \quad (22)$$

$$W8 = W9 + W10, \quad (23)$$

No entanto, podemos manipula-las de tal maneira que a resolução do sistema seja a solução de uma equação só.

Manipulando as equações que governam o movimento do fluido em cada ramo, equações (13) à (23), e colocando as vazões nos ramos  $i=1,11, i \neq k$ , em função da vazão no ramo  $k$ , onde  $k$  pode assumir os valores de 1,2,3 e 4 ou 5,6 e 9. Aqui assumiremos  $k = 5$ . Então temos que:

$$W1 = C1 \sqrt{DP1 + A}, \quad (24)$$

$$\text{com } A = Ps - Pd - \left(\frac{W5}{C5}\right)^2 \quad \text{e } i=1,4$$

e

$$W6 = C6 \frac{W5}{C5} \quad (25)$$

Utilizando-se da equação (19), temos que

$$W8 = \sum_{i=1}^4 C1 \sqrt{DP1 + A} - (1 + \frac{C6}{C5})W5 - W7 \quad (26)$$

Explicitando W9 e W10 em função de W5, e utilizando-se de (23), temos finalmente uma expressão explicitada em W5:

$$(1+D) W8^2 - B \left[ A - \left(\frac{W8+W7}{C11}\right)^2 \right] = 0 \quad (27)$$

$$\text{com } B = (C9 + C10)^2 \quad \text{e } D = \frac{B}{C3^2}$$

A expressão (27) é função só da vazão no ramo 5 e pode ser resolvida pelo método da biseção para o seguinte intervalo de validade da equação no domínio dos reais.

$$0 < W5 < C5 \sqrt{Ps - Pd + DP1}, \quad i=1,4 \quad (28)$$

Como a modelagem proposta permite que o operador intervenha a qualquer momento no processo dinâmico do planta, como abrir/fechar válvulas, ligar/desligar bombas, a programação computacional tem que estar preparada para mudar a solução do sistema para qualquer outro ramo.

## RESULTADOS

Foram realizados alguns testes para a verificação do tempo de execução computacional do circuito 1 e circuito 2, para situações de transitório

e estacionário, utilizando-se da alternativa a e da alternativa b. Os testes foram realizados em um IBM-AT compatível, com coprocessador aritmético. Os valores das vazões nos ramos e o tempo de processamento, obtidos no teste 1 e 2, estão mostrados respectivamente nas tabelas 1 e 2.

Teste 1 (Circuito 1 e Circuito 2). Com todas as válvulas plenamente abertas e bombas funcionando normalmente.

Teste 2 (Circuito 1 e Circuito 2). Parada de uma bomba. Particularmente a estes circuitos, os momentos de inércia de rotação das bombas são pequenos, e com isto, quando uma delas é desligada, a vazão no ramo correspondente tende a zero rapidamente, equivalente ao intervalo de tempo usado na integração temporal do circuito. Considera-se portanto que as bombas ao serem desligadas/ligadas assumem instantaneamente a rotação plena/nula. Para o circuito 1, a bomba do ramo 16 é desligada e para o circuito 2, a bomba desligada é a do ramo 2. Os valores iniciais utilizados no método de Brown foram as do teste 1.

RAMOS	TESTE 1		TESTE 2	
	Circuito 1	Circuito 2	Circuito 1	Circuito 2
	VAZÕES (Kg/s)			
1	1.99	20.31	1.86	25.15
2	1.99	20.31	1.86	0.00
3	1.99	20.65	1.86	25.56
4	1.99	20.65	1.86	25.56
5	1.993	21.85	1.865	20.15
6	1.993	24.89	1.865	22.94
7	2.1	10.167	1.95	10.167
8	2.61	25.02	2.44	23.03
9	0.55	23.25	0.51	21.40
10	1.89	1.76	1.76	1.62
14	19.0		17.84	
15	9.5		17.84	
16	9.5		0.00	

Tabela 1 - Vazões nos ramos dos Circuitos 1 e 2 para os Testes 1 e 2

	TEMPO DE EXECUÇÃO (segundos)			
	TESTE 1		TESTE 2	
	Circ. 1	Circ. 2	Circ. 1	Circ. 2
Alternativa a	1.81	1.05	3.96	1.76
Alternativa b	0.11	0.18	0.11	0.16

Tabela 2 - Tempo de execução dos Circuitos 1 e 2 nos testes 1 e 2

Os valores dos resultados das vazões mostrados

na tabela acima, tanto para a alternativa a quanto para a alternativa b, nos testes 1 e 2, são os mesmos.

### CONCLUSÃO

Conforme os resultados apresentados neste trabalho, a alternativa b mostra-se bem mais vantajosa do que a alternativa a, mesmo que com isto, a idéia de um algoritmo geral não seja implementado, conforme comentado na introdução. Nos sistemas que não permitirem a implementação da alternativa b, nós optaremos pela alternativa a.

Com o intervalo de tempo de integração de 2 segundos para todos os circuitos semelhantes ao deste trabalho da planta de processo, é possível então utilizando-se da alternativa a, simular aproximadamente 10 a 15 circuitos. Entretanto, estes programas serão implementados em um microcomputador baseado em um microprocessador INTEL 80386 onde o tempo de processamento se acelerará em 10 vezes e, naturalmente, o número de circuitos simulados aumentará na mesma proporção.

### REFERÊNCIAS

- 1/ Dennis J. and J. More, Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory, SIAM Rev., 19, 1977, pp. 46-89.
- 2/ Sargent R. W. H., The Decomposition of Systems of Procedures and Algebraic Equations In Numerical Analysis - Proceedings. (G. A. Watson, Ed.) Springer - Verlag. Berlin (1978).
- 3/ Scacham M., Decomposition of Systems of Nonlinear Algebraic Equations. AIChE J1 30, 92 (1984).
- 4/ J. M. Martinez-Benet and L. Puigjaner, A powerful Improvement on the Methodology for Solving Large-Scale Pipeline Networks, Comput. Chem. Engng., Vol. 12 No 2/3. pp. 261-265 (1988).
- 5/ Brown K. M., Computer Oriented Algorithms for Solving Systems of Simultaneous Nonlinear Algebraic Equations, Institute of Technology, University of Minnesota.

### ABSTRACT

The present work is involved in the development of a real time simulator for a process plant.

In this plant, there are many transport fluid systems, that can be splitted into smaller hydraulic networks which are solved independently.

It was chosen a numerical algorithm specific to each small network instead of a general resolution algorithm, in order to obtain a faster computational solution.



GELADEIRA MOVIDA A FOGÃO DE LENHA

Evandro Ferreira Passos\* e João Francisco Escobedo\*\*  
 \* Depto. de Física - UFV - 36570 Viçosa - MG  
 \*\* Depto. de Biofísica - UNESP - 18610 Botucatu -SP

RESUMO

Este trabalho descreve os detalhes de construção de um protótipo de geladeira a adsorção destinado, em princípio, à conservação de leite em propriedades rurais desprovidas de eletricidade. O critério de escolha do par frigorífico é discutido e o dimensionamento do regenerador, condensador e evaporador é apresentado. A troca de calor entre os gases de combustão e o leito de zeólita é feito através de tubos de calor.

INTRODUÇÃO

Em propriedades rurais desprovidas de eletricidade, a ordenha da tarde fica frequentemente prejudicada, uma vez que o caminhão de leite passa em geral de manhã. O protótipo, destinado à conservação de 50 litros de leite desde a ordenha da tarde até a manhã do dia seguinte, utiliza o par frigorífico zeólita-água num ciclo intermitente a adsorção.

O ciclo de refrigeração a adsorção tem recebido recentemente uma grande atenção dos pesquisadores, e isto se deve à sua simplicidade e ausência de válvulas ou partes móveis. Além disso, possui um rendimento ótimo a temperaturas não muito elevadas, o que o torna interessante para aplicações com coletores solares planos [1,2,3,4,5].

O protótipo de geladeira descrito neste trabalho, de acordo com o conhecimento dos autores, é o primeiro do gênero no mundo, e foi construído com o apoio do CNPq e a colaboração da ENGEFRIL, de Belo Horizonte. Em relação às geladeiras solares, apresenta as vantagens de não depender das condições climáticas, além de sua forma mais compacta.

O fogão de lenha que fornecerá a energia necessária ao funcionamento do ciclo, é do tipo pré-moldado, em argamassa armada, e foi construído pelo Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Viçosa, com o apoio da CEMIG.

PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO

O funcionamento do ciclo pode ser entendido com auxílio da Figura 1, que representa esquematicamente o protótipo.

Antes do início do preparo do almoço, a zeólita está saturada com cerca de 250 gramas d'água por quilo de zeólita (ou 25% em peso). Durante o preparo do almoço os gases quentes são desviados perto da base da chaminé do fogão de lenha, sendo dirigidos até o evaporador dos tubos de calor. Os tubos de calor, nesta fase, têm a função de transferir o calor dos gases de combustão até o leito de zeólita.

Ao ser aquecida, a água no interior da zeólita vai sendo desorvida, migrando em forma de vapor até o condensador, onde se liquefaz e escorre em forma de líquido até o evaporador, onde vai se acumulando. O evaporador, situado na parte mais baixa da máquina, fica no interior de uma câmara isotérmica ca feita em argamassa armada.

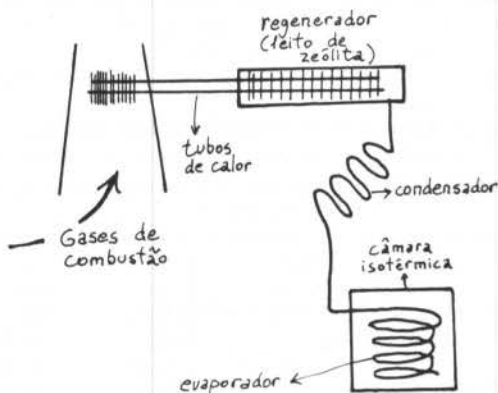


Figura 1. Diagrama esquemático do protótipo.

Após o término do preparo do almoço, os gases de combustão são desviados de volta para a chaminé do fogão de lenha, de forma a permitir o resfriamento do leito de zeólita.

Tendo sua temperatura diminuída, a zeólita começa a sentir "sede" da água que está no evaporador. Esta começa então a se evaporar, produzindo frio no interior da câmara isotérmica e indo em forma de vapor até o leito de zeólita, onde é adsorvida. Nesta fase, a função dos tubos de calor é invertida, passando a transferir calor do leito de zeólita para fora do regenerador.

O protótipo funciona sem válvulas ou partes móveis, graças ao jogo da convecção natural.

A ESCOLHA DO PAR FRIGORÍFICO

O COP térmico do ciclo (COP<sub>T</sub>), pode ser calculado a partir do diagrama isostérico da Figura 2. Neste diagrama, as linhas oblíquas representam as isosteras ou linhas de igual concentração.

O COP térmico pode ser definido como:

$$COP_T = F / (Q_s + Q_{lat}) \quad (1)$$

onde F é o frio disponível, Q<sub>s</sub> e Q<sub>lat</sub> são as somatórias dos calores sensível e latente.

A seguir explicamos resumidamente o procedimento adotado para o cálculo teórico do COP térmico [3,4].



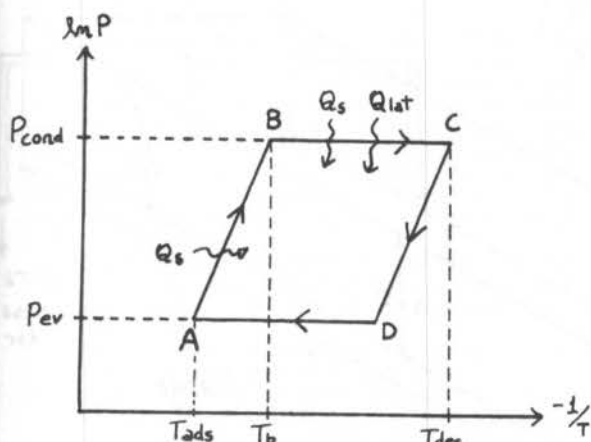


Figura 2. O ciclo simplificado no diagrama isotérmico.

No trecho AB, aquecimento isotérmico, o calor sensível do leito poroso e das partes metálicas do regenerador vai sendo somado, mediante sucessivos aumentos de temperatura. Neste trecho, a concentração é constante e igual à concentração no ponto A. A cada acréscimo de temperatura a pressão no sistema é calculada através da equação de estado do par frigorífico, em função da nova temperatura e da concentração. Quando a pressão no sistema atinge o valor da pressão de saturação do fluido na temperatura do condensador, pode-se dizer que o leito poroso atingiu a temperatura limiar de dessorção,  $T_b$ .

No trecho BC, dessorção-condensação, além dos calores sensíveis, começa a ser somado também o calor latente de dessorção, calculado como sendo o produto da massa dessorvida pelo calor isotérmico de adsorção. Neste trecho, a pressão no sistema é suposta constante e igual à pressão de saturação do fluido na temperatura do condensador. Com auxílio da equação de estado, a concentração vai sendo calculada em função da nova temperatura e da pressão. Este cálculo termina quando a temperatura do leito poroso atinge o valor de  $T_{des}$ , arbitrado como sendo a temperatura máxima de dessorção.

Os trechos CD e DE (resfriamento isotérmico e evaporação-adsorção, respectivamente), não precisam ser computados neste cálculo.

O frio disponível F pode ser calculado multiplicando-se a massa de fluido frigorífico condensada pelo seu respectivo calor de vaporização na temperatura do evaporador.

O COP térmico do ciclo pode assim ser calculado em função das quatro temperaturas seguintes: temperatura mínima do leito poroso ( $T_{ads}$ ), temperatura máxima do leito poroso ( $T_{des}$ ), temperatura do condensador ( $T_{cond}$ ) e temperatura do evaporador ( $T_{ev}$ ). Estas temperaturas são supostas constantes no ciclo simplificado da Figura 2.

A Figura 3 mostra o COP<sub>t</sub> em função da temperatura máxima de dessorção  $T_{des}$ , para os pares frigoríficos zeólita-água e carvão ativo-AC35-metanol (carvão este de fabricação francesa). Nota-se que o desempenho do par zeólita-água é superior ao do par carvão ativo-metanol, para  $T_{des}$  superior a 120 °C. Esta superioridade foi observada em relação a vários outros tipos de carvão ativo [3,6].

Tendo em vista o elevado nível de temperatura da fonte quente do nosso protótipo (gases de combustão), optamos pelo par zeólita-água. Outra razão desta escolha foi sua estabilidade química já bem comprovada.

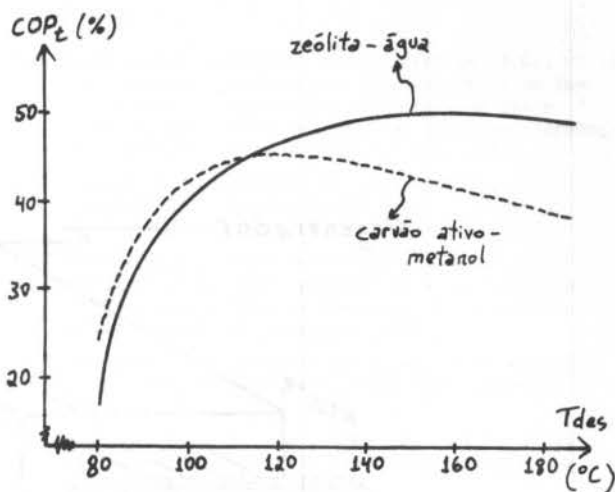


Figura 3. COP térmico em função de  $T_{des}$  para dois pares frigoríficos,  $T_{ev} = 0$  °C,  $T_{ads} = 35$  °C e  $T_{cond} = 35$  °C.

#### DIMENSIONAMENTO

A carga de refrigeração necessária ao resfriamento de 50 litros de leite de cerca de 40 °C até 0 °C é próxima de 2000 Kcal. Para a conservação deste frio até o dia seguinte precisa-se de mais 500 Kcal, aproximadamente, perfazendo uma carga de 2500 Kcal. Esta estimativa está de acordo com cálculos feitos por outros autores [6]. Como o calor de vaporização da água a 0 °C é cerca de 600 Kcal/kg, é preciso evaporar cerca de 4,2 kg d'água para satisfazer a carga de refrigeração.

Os valores experimentais apresentados na literatura para a massa de água ciclada em função da temperatura máxima de dessorção, são em geral inferiores aos previstos pela equação de estado [4,7]. Assim, para o cálculo da massa de zeólita a ser utilizada dentro do regenerador, tomando como referência uma temperatura máxima de 160 °C, consideramos que 12 % em peso seriam ciclados. Isto corresponde a 35 kg de zeólita.

A seguir, para o cálculo do volume do evaporador, fomos mais otimistas, e consideramos que até 15 % em massa poderiam ser ciclados, o que corresponde, em relação aos 35 kg de zeólita, a um volume de cerca de 5,3 litros.

#### O REGENERADOR

O regenerador, mostrado na Figura 4, consiste de uma caixa metálica em aço inoxidável, tendo numa das tampas uma flange para vácuo destinada à introdução da zeólita. Pela tampa oposta passam oito tubos de calor, de uma polegada de diâmetro. No interior do regenerador, os tubos são aletados com um espaçamento de 4 cm. Na parte de fora do regenerador, os tubos são aletados com espaçamento de 0,5 cm. Cada uma destas aletas é constituída de uma placa fina de aço inoxidável, de 130 por 300 mm, com oito furos circulares, pelos quais passam os tubos de calor.

O regenerador tem ainda duas saídas, próximas da tampa que possui a flange, destinadas à circulação do vapor d'água entre o regenerador e o condensador.

Os tubos de calor usam água como fluido de trabalho e telas de bronze fosforado como suporte poroso. Na fase de preparo do almoço (trecho ABC da Figura 2), o lado dos tubos externa ao regenerador funciona como evaporador. A função dos tubos é

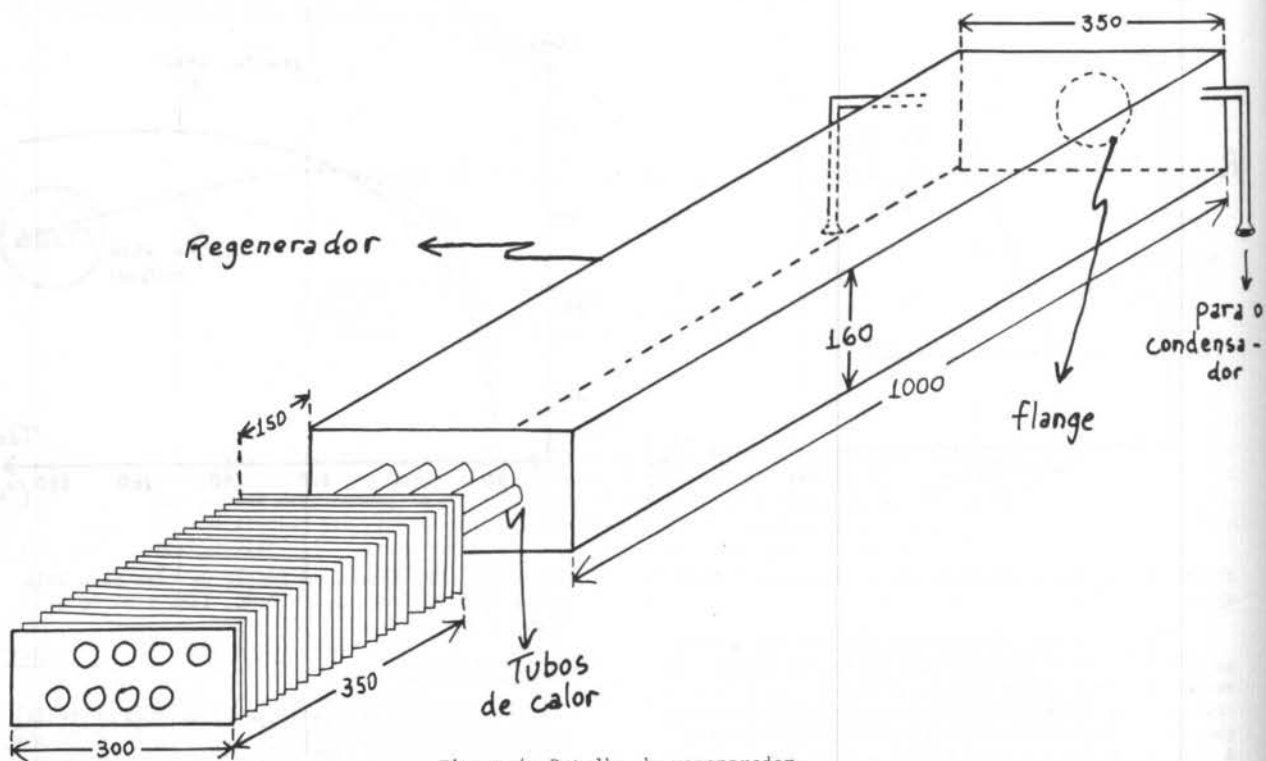


Figura 4. Detalhe do regenerador.

então a de transferir calor dos gases de combustão até o leito de zeólita. Na fase seguinte (trecho CDA da Figura 2), a função dos tubos passa a ser a de transferir calor do leito de zeólita para fora do regenerador, dissipando o calor latente de adsorção e favorecendo assim a cinética de adsorção.

#### O CONDENSADOR

O condensador, mostrado na Figura 5, é do tipo inundado, e consiste de duas serpentinas de aço, situadas dentro de uma caixa d'água de amianto cujo volume é de 250 litros. Cada serpentina é constituída de um tubo de aço de uma polegada de diâmetro e cerca de 6 metros de comprimento, perfazendo uma área total de troca de calor de quase um metro quadrado.

A conexão entre estas duas serpentinas e as duas saídas do regenerador foi feita através de duas conexões próprias para vácuo, com "o-ring" e brachadeiras, de forma a facilitar a instalação do protótipo no local definitivo, bem como seu transporte.

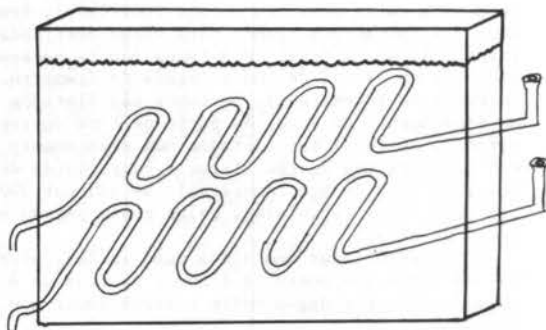


Figura 5. Detalhe do condensador.

#### O EVAPORADOR

O evaporador, mostrado na Figura 6, consiste de uma serpentina feita com um tubo de aço de 10,7 metros de comprimento e uma polegada de diâmetro, enrolado na forma de uma hélice com 53 cm de diâmetro, totalizando 6,5 voltas. A área de troca da serpentina é de 0,85 m<sup>2</sup> e o volume interno é de 5,4 litros.

O evaporador funciona mergulhado em água, dentro de uma câmara isotérmica feita em argamassa armada. A água no interior da câmara isotérmica terá a dupla finalidade de resfriar o galão de 50 litros de leite e de armazenar o frio em forma de calor sensível.

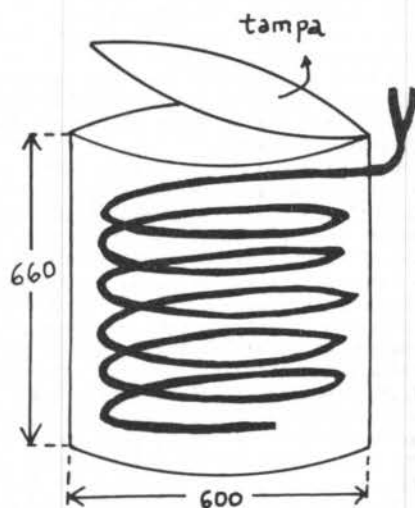


Figura 6. Detalhe do evaporador.

#### OBSERVAÇÕES FINAIS

A massa do regenerador, Figura 4, é de 70 kg. A massa do condensador, Figura 5, é de 42 kg e a do evaporador, Figura 6, é de 37 kg (apenas as partes metálicas). Desde já pode-se prever uma redução no peso do protótipo, com uma consequente redução de custos e aumento de eficiência. Esta redução do peso pode ser obtida utilizando-se chapas e tubos com paredes mais finas, sem prejuízo para as propriedades mecânicas requeridas em função das pressões de operação.

A zeólita 13X utilizada no protótipo foi fabricada pela Bayer. O preço da zeólita (importada) é um pouco superior ao preço do carvão ativo (já fabricado no país).

Uma especial atenção foi dada à desgasificação da zeólita e da água antes de se lacrar o protótipo. A presença de ar dentro do sistema, ainda que com baixa pressão parcial, pode comprometer a cinética de adsorção e o próprio funcionamento da geladeira. Da mesma forma, a água introduzida em cada tubo de calor sofreu uma desgasificação prévia.

Durante a fase de testes serão monitoradas as temperaturas das diversas partes da geladeira, além da pressão em seu interior.

Esperamos estar em condições de apresentar, durante nossa participação no ENCIT-88, resultados preliminares relativos ao desempenho do protótipo descrito neste trabalho

#### AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Dr. Paulo de Andrade Nogueira e aos funcionários da Engefril, pela graciosa colaboração na construção do protótipo. Agradecemos ainda ao Prof. Lauro Gontijo Couto, da UFV, pela construção da câmara isotérmica em argamassa armada.

#### REFERÊNCIAS

- [1] PASSOS, E.F., MEUNIER, F. and GIANOLA, J.C., Thermodynamic performance improvement of an intermittent solar-powered refrigeration cycle using adsorption of methanol on activated carbon, *Heat Recovery Systems* 6(3) 259-264, 1986.
- [2] PASSOS, E.F., MEUNIER, F. and ESCOBEDO, J.F., Simulation of an adsorptive solar cooling system, *Solar Energy*, aceito para publicação.
- [3] PASSOS, E.F., Étude des couples charbon actif-méthanol et de leur application à la réfrigération solaire, Thèse de Doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1986.
- [4] ESCOBEDO, J.F., Refrigeração com uso de energia solar, Tese de Doutorado, IFQSC-USP, dezembro de 1987.
- [5] Solar machine for the production of ice, Solar refrigeration unit, BLM (França), catálogos do fabricante.
- [6] ALVARES, S.G., A computer aided assessment study on the viability of a solar powered single stage aqua-ammonia absorption refrigeration system for milk cooling at remote Brazilian dairy farms, Tese de doutorado, Escola Politécnica Federal de Zurique, 1985.
- [7] HINOTANI, K. et al, Development of solar actuated zeolite refrigeration system, Proceedings of the ISES Conference, Perth (Austrália), pp 527-531, Pergamon Ed., 1983.

#### ABSTRACT

This paper describes the design of an intermittent adsorptive refrigeration prototype for milk cooling at remote dairy farms. The prototype is coupled to a wood burning stove and heat pipes are used to transfer heat from combustion gases to the zeolite bed.



**TÓPICOS ESPECIAIS EM MECÂNICA DOS FLUÍDOS**



DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DOS PARÂMETROS FENOMENOLÓGICOS, RELACIONADOS COM O FUNCIONAMENTO DE UM TENSÍOMETRO EM MEIOS POROSOS INSATURADOS.



MARINTHO B. QUADRI  
 Depto. Eng. Química/UFSC  
 PAULO C. PHILIPPI  
 Depto. Eng. Mecânica/UFSC

## RESUMO

No presente trabalho, apresenta-se a quantificação experimental pormenorizada dos parâmetros fenomenológicos ligados à migração de umidade envolvida no funcionamento de um tensiômetro. Os valores médios obtidos, bem como a dispersão dos resultados individuais em torno da média, atendem o grau de precisão encontrado na literatura para medições similares. Em trabalho subsequente, pretende-se chegar à elaboração de um modelo apto a reproduzir, de maneira aceitável, a dinâmica de resposta do tensiômetro verificada durante os ensaios práticos.

## INTRODUÇÃO

A análise da dinâmica de resposta do tensiômetro é objeto de grande interesse no que diz respeito à monitoração e à pesquisa de fenômenos ligados à migração de umidade, e à transferência de massa de um modo geral, no âmbito dos meios porosos. A possibilidade de realização de medidas localizadas "in situ" do potencial matricial (sucção), a simplicidade na construção e operação, bem como o baixo custo, justificam a necessidade de um conhecimento mais profundo do tensiômetro; de sua natureza e de suas potencialidades como sensor.

No presente trabalho, procede-se a todo um desenvolvimento prévio necessário à análise pretendida das questões relacionadas com o comportamento dinâmico do tensiômetro em problemas transitentes. Primeiramente, aborda-se o problema da seleção e caracterização do meio poroso para os ensaios e o adequado acondicionamento das amostras. Em seguida, considera-se a determinação de propriedades e parâmetros que caracterizam o processo de transporte sob condições de insaturação.

Devido à dificuldade na previsão dos parâmetros fenomenológicos envolvidos no funcionamento do tensiômetro - potencial matricial em função do conteúdo volumétrico de umidade,  $\Psi(\theta)$ ; difusividade e condutividade hidráulicas em função do conteúdo de umidade para o meio poroso de teste,  $D(\theta)$  e  $K(\theta)$ ; e a condutividade hidráulica saturada para a cápsula porosa do tensiômetro,  $K_c$  -, torna-se necessário a adoção de técnicas experimentais que permitam a medição direta.

Uma questão importante a ser considerada no levantamento dos parâmetros de transporte mencionados é a manifestação, muito comum, do fenômeno de histerese - em especial a que se refere a função  $\Psi(\theta)$  - relativo aos processos de infiltração e drenagem [1]. Tal fato normalmente vem complicar e dificultar ainda mais a descrição quantitativa dos processos envolvendo fluxo insaturado.

As técnicas experimentais de que se fez uso para a determinação das funções  $\Psi(\theta)$ ,  $K(\theta)$  e  $D(\theta)$ , utilizam-se de sistemas onde se verifica a cessão de água (molhamento) do meio poroso de teste. Esta característica vem de encontro ao processo de migração de umidade durante as medições com o tensiômetro; desde o momento do contato inicial da cápsula com a amostra até o estado de equilíbrio. Além disso, a preferência por métodos onde os ensaios fossem de duração relativamente curta (no máximo alguns dias), o baixo custo e a facilidade na montagem e operação dos equipamentos orientaram as opções feitas.

## NATUREZA E PREPARAÇÃO DAS AMOSTRAS UTILIZADAS NOS ENSAIOS

Misturou-se areia com uma quantidade de caulim necessária para perfazer 5% em peso no material misto as-

sim obtido.

A análise da distribuição granulométrica da areia foi procedida com a utilização de peneiras. Para o caulim, após uma análise prévia por peneiramento, realizaram-se ensaios de sedimentação contínua baseados na Lei de Stokes. - Também se fez a determinação da área superficial específica das partículas através da técnica de condensação de nitrogênio baseada na isoterma B.E.T. de adsorção. O valor encontrado para o caulim foi de  $6,0 \text{ m}^2/\text{g}$ . Para a areia, muito embora a referida técnica não apresente grande precisão para a determinação de áreas superficiais específicas de valor reduzido, o valor encontrado foi de  $0,3 \text{ m}^2/\text{g}$ , portanto, vinte (20) vezes menor do que o verificado para o caulim.

A massa específica média das partículas da mistura areia-caulim,  $\rho_s$ , foi determinada com o auxílio de uma proveta, observando-se o volume de água deslocado por uma massa conhecida da mistura.

Na Tabela 1, apresenta-se a distribuição granulométrica e a massa específica média das partículas da mistura,  $\rho_s$ , utilizada nos ensaios

Tabela 1

Distribuição Granulométrica (%), diâmetros em $\mu\text{m}$						(%)	$\rho_s$
Areia			Caulim			total	( $\text{g}/\text{cm}^3$ )
297-250	250-210	210-149	149-105	>74	74-37		
8,5	9,5	66,5	10,5	0,5	4,5	100,0	2,73

Com o emprego da mistura areia-caulim foi possível registrar valores de sucção nas vizinhanças de 300cm de coluna de água.

Para a determinação do potencial matricial, antes de acondicionar o material no recipiente, promoveu-se, por malaxação a perfeita distribuição da água adicionada à amostra seca. O teor de umidade foi averiguado mediante a coleta de três pequenas porções da amostra, tomadas em posições diversas, e submetidas a pesagem posterior secagem em estufa.

Buscou-se garantir, dentro das limitações operacionais, que o grau de compactação fosse igual e uniforme para as várias amostras. O ideal seria submeter as amostras a medidas de atenuação de radiação gama [2]. Como não se dispunha do equipamento necessário, procurou-se manter igual o valor da massa específica aparente global das amostras. Carregaram-se os recipientes outros, conforme a natureza do ensaio, sempre da mesma forma, acomodando sucessivas camadas de material - de mesma espessura inicial: cinco centímetros em todos os casos -, compactando cada uma por sua vez com o cuidado de proporcionar perfeito contato entre as mesmas, homogeneizando a zona de junção.



Para que se evitasse a ocorrência de diferenciais de pressão entre as amostras e o meio ambiente [3], os recipientes — frascos de vidro para as medidas de potencial matricial, e o tubo de vidro no caso dos ensaios de infiltração — foram providos de um respiro que, no entanto, deve ser suficientemente pequeno para que não se tenha problemas com perdas de umidade por evaporação para o meio ambiente.

A determinação da umidade das amostras em todos os ensaios foi feita por pesagem e secagem, utilizando uma estufa a 105°C por um período de pelo menos 24 horas. Para as pesagens usou-se uma balança analítica.

Adotou-se o valor de 1,65 g/cm<sup>3</sup> para a massa específica aparente global do material poroso no estado seco em todos os casos. Não obstante os cuidados, comprovou-se variações de até 5% em torno desse valor.

A determinação da porosidade foi feita com base nos valores da massa específica aparente global e da massa específica média das partículas.

Todos os ensaios foram realizados em uma sala dispendo de ar condicionado, fixando-se a temperatura na faixa de 22 ± 3°C. Negligenciou-se qualquer efeito de temperatura nos resultados obtidos.

#### O TENSÍOMETRO - CARACTERÍSTICAS DE RETENÇÃO DE UMIDADE DO MATERIAL POROSO

O tensiômetro aqui empregado é munido de um manômetro de mercúrio, sendo o espaço entre a cápsula porosa e o mercúrio preenchido com água [4].

As cápsulas porosas usadas foram obtidas a partir das guarnições de suportes utilizados em laboratório para o aquecimento de recipientes sobre bicos de Bunsen. Não se dispõe dos dados a respeito das condições em que foram fabricadas. Possuem um comprimento de 13mm, diâmetro externo de 6,9mm e interno de 4,7mm.

Na construção da haste do tensiômetro, colou-se a uma das extremidades da cápsula porosa um tubo de vidro transparente sendo a outra extremidade vedada com resina epóxi. A haste é ligada ao manômetro através de uma mangueira de plástico transparente flexível com especiais cuidados para evitar vazamentos.

Para as medições de potencial matricial, as amostras são acondicionadas em frascos de vidro com aproximadamente 18 cm de comprimento e 7,5 cm de diâmetro interno.

Uma pequena folga entre a haste do tensiômetro e a tampa do recipiente propicia o permanente equilíbrio da amostra com a pressão reinante no meio ambiente.

No momento de dar início ao processo de medição, a haste do tensiômetro munida da cápsula porosa é inserida na amostra devidamente preparada. Já nos primeiros instantes de contato da cápsula com o meio poroso, o mercúrio do manômetro começa a ser movimentado a partir do nível correspondente à situação de ausência de sucção ("zero" do aparelho). Depois de um lapso de tempo necessário para que se atinja o equilíbrio, a coluna de mercúrio situa-se numa posição que corresponde ao poder de sucção matricial desenvolvido, pelo meio poroso na condição de conteúdo de umidade em que se encontra, conforme a Fig.- 1.

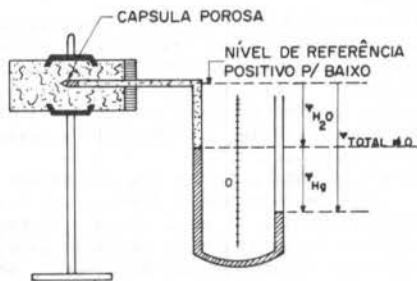


Fig 1 - CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO: MANÔMETRO UMA SUÇÃO ≠ TOTAL ≠ 0

Os valores de sucção medidos são expressos em termos de centímetros de coluna de água:

$$\Psi_m = \Psi_{H_2O} + \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{H_2O}} \cdot \Psi_{Hg} \quad (1)$$

onde:  $\Psi_{H_2O}$  = altura da coluna de água no manômetro (cm); valor positivo;  $\Psi_{Hg}$  = altura da coluna de mercúrio no manômetro (cm); valor positivo no sentido de cima para baixo desde a interface água-mercúrio até a interface ar-mercúrio. Como a altura da coluna de água num dado momento é dada por:

$$\Psi_{H_2O} = \Psi_{H_2O_0} - \Psi_{Hg}/2 \quad (2)$$

onde  $\Psi_{H_2O_0}$  = altura da coluna de água quando os níveis de mercúrio coincidem na posição zero. chega-se a que:

$$\Psi_m = \left( \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{H_2O}} \cdot \Psi_{Hg} \right) + (\Psi_{H_2O_0} - \Psi_{Hg}/2) \quad (3)$$

Na tarefa de obter a curva de retenção a partir de pontos experimentais, mediante a utilização de uma série de amostras com umidades diferenciadas e previamente conhecidas, a forma de operar o aparelho pode levar a resultados diversos (histerese).

Com o fim de avaliar a importância do fenômeno de histerese relacionado à migração de umidade no meio em questão, também determinou-se uma curva segundo um processo de drenagem a partir da saturação. Uma curva deste tipo representa o limite superior em termos dos valores de potencial matricial para os correspondentes teores de umidade; vale dizer, é uma curva isenta de histerese.

Verificou-se que, sempre após a ocorrência de desconexão, acontecia uma queda sensível na condutividade hidráulica das cápsulas. Mesmo em condições normais, com o uso repetido das cápsulas, notaram-se quedas de condutividade hidráulica, porém não tão drásticas quanto nas situações de desconexão. Observou-se que o fenômeno é, em certa extensão, reversível, sendo o máximo valor de condutividade hidráulica verificado, quando a cápsula é nova, ou seja, sem uso anterior.

Levando-se em conta que na desconexão, ar a baixa pressão é admitido nos poros da cápsula do tensiômetro, infere-se a queda na condutividade das cápsulas possivelmente está associada ao aprisionamento de uma quantidade variável de ar no interior da estrutura porosa do material.

Observou-se que para as cápsulas afetadas, embora não haja alterações no valor final de equilíbrio para o potencial de sucção medido, ocorre um atraso na etapa inicial da resposta do tensiômetro.

Os resultados relativos à determinação da curva de retenção de umidade são apresentados na Fig.- 2 na forma de circunferências, cada qual representando a média de pelo menos dois (2) ensaios diversos com os conteúdos de umidade das amostras tão próximos quanto possível. Com relação à reprodutibilidade dos valores medidos, é lícito afirmar que a mesma está diretamente condicionada à homogeneidade das amostras (massa específica aparente e conteúdo de umidade uniformes por toda a extensão da amostra). Em princípio, é difícil aqui estabelecer quantitativamente o grau de reprodutibilidade associado às medições em função de ser praticamente impossível obter duas amostras iguais. No entanto, utilizandose amostras tão semelhantes quanto possível (conteúdos de umidade muito próximos), e procedendo à medições paralelas e simultâneas com o uso de dois tensiômetros, logrou-se, na maior parte das vezes, obter medições com ótima concordância.

Os resultados obtidos para a curva de retenção pelo processo de drenagem a partir da saturação, são também apresentados na Fig.- 2 na forma de triângulos, cada qual expressando o valor da média de quatro (4) medidas diferentes.

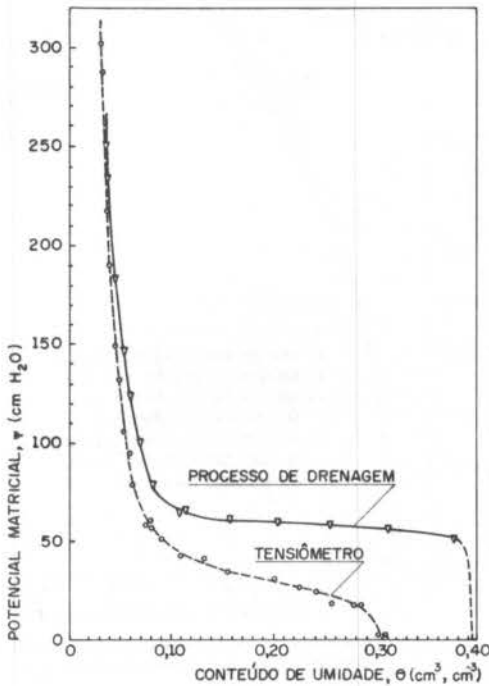


Fig. 2 - CURVAS EXPERIMENTAIS DE RETENÇÃO DE UMIDADE PARA A MISTURA AREIA-CAULIM

Em vista dos resultados apresentados, pode-se afirmar que o caulim atua de maneira decisiva no estabelecimento da posição das curvas de retenção no que diz respeito aos conteúdos de umidade mais baixos onde se tem a predominância dos efeitos da adsorção relacionados à textura (área superficial específica) do material. Já para os conteúdos mais elevados de umidade, onde os efeitos de capilaridade dominam, a areia, por determinar a estrutura (geometria dos poros), estabelece a posição das curvas. Fica ainda evidente que a curva é bastante mais sensível à histerese nas zonas de alto conteúdo de umidade.

#### DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA DIFUSIVIDADE HIDRÁULICA

Utilizou-se o método sugerido por Bruce & Klute (1956) [5]. Um esquema da montagem experimental é apresentado na Fig.- 3.

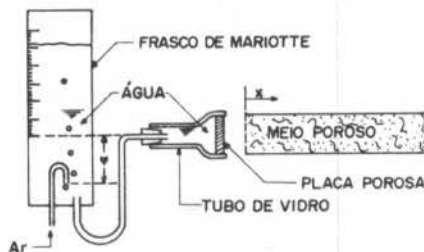


Fig. 3 - ESQUEMA DA INFILTRAÇÃO HORIZONTAL

A formulação matemática da situação em questão é feita considerando-se a equação da difusão unidimensional:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (4)$$

com as condições de contorno

$$\theta = \theta_0; \quad x > 0; \quad t = 0, \quad (5)$$

$$\theta = \theta_1; \quad x = 0; \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\theta = \theta_0; \quad x \rightarrow \infty; \quad t > 0, \quad (7)$$

onde:  $t$  = variável temporal;  $\theta_0$  = conteúdo volumétrico de umidade do meio poroso no instante inicial;  $\theta_1$  = conteúdo volumétrico de umidade na fronteira de umidificação; e  $x$  = variável de posição.

Com o uso da Transformação de Boltzmann, gera-se uma função unívoca entre  $\theta$  e a variável  $\eta$ , onde  $\eta(\theta) = x \cdot t^{-1/2}$ . Procedendo-se os arranjos necessários, obtêm-se:

$$D(\theta) = - \frac{1}{2} \frac{d\eta}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \eta d\theta \quad (8)$$

Assim, levantando-se experimentalmente a curva  $\eta \times \theta$  é possível quantificar  $D(\theta)$  no intervalo entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$ .

As colunas da mistura areia-caulim foram acondicionadas num tubo de vidro de 3cm de diâmetro interno o qual recebia internamente uma manga de plástico com marcações de maneira a possibilitar o acompanhamento da posição da frente de molhamento. Tão logo interrompida a infiltração a coluna era retirada para fora do tubo de vidro, puxando a manga de plástico. A coluna era então cortada em fatias de 1cm de espessura, sendo providenciada a determinação do perfil de umidade por pesagem e secagem (estufa).

As placas de contato foram construídas a partir de filtros de água comerciais por corte e lixamento.

Na aplicação do método, os valores da derivada e da integral (Eq.- 8) foram obtidos graficamente a partir das curvas experimentais.

Realizou-se uma série de sete (7) ensaios de infiltração horizontal. Para cada um dos casos, verificou-se uma razoável linearidade na distribuição dos pontos, confirmando a equação empírica de Gardner e Mayhugh (1958) [6]:  $D(\theta) = \alpha e^{\beta \theta}$ , sendo  $\alpha$  e  $\beta$  constantes do processo. Reunidos os resultados dos sete ensaios, obteve-se uma "nuvem" composta de um total de 182 pontos, conforme Fig.-4. Procedeu-se, então, considerando a totali-

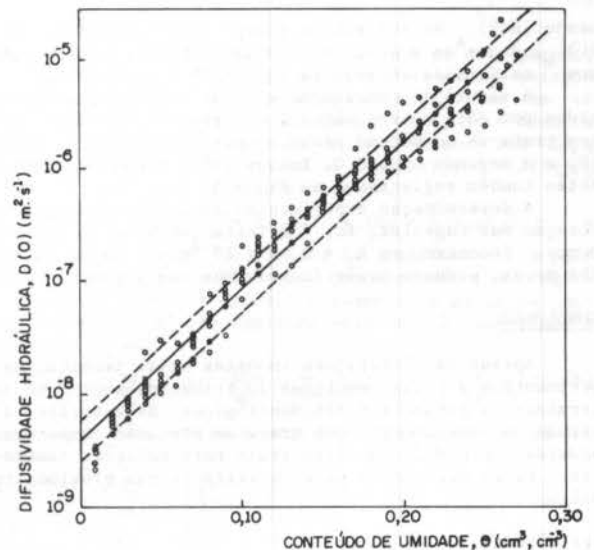


Fig. 4 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS DOS SETE ENSAIOS DE INFILTRAÇÃO HORIZONTAL PARA A DETERMINAÇÃO DA DIFUSIVIDADE HIDRÁULICA PARA A MISTURA AREIA-CAULIM

dade dos pontos, a determinação da reta de melhor ajuste pelo critério dos mínimos quadrados. Como resultado, chegou-se a seguinte expressão:

$$\ln D(\theta) = 31,0328 \cdot \theta - 19,3971 \quad (9)$$

com coeficiente de correlação igual a 0,9831 (linha cheia na Fig.-4).  $\ln D(\theta)_m$  expressa o valor médio do logaritmo do coeficiente de difusão hidráulica, expresso em  $m^2 \cdot s^{-1}$ . Um estudo estatístico da dispersão dos valores experimentais de  $\ln D(\theta)$  em relação à média  $\ln D(\theta)_m$  indica um desvio padrão, S, igual a 0,4377 (linha tracejada na Fig.-4). A expressão para a média logarítmica para  $D(\theta)$  fica:

$$D(\theta)_{m \ln} = 3,7667 \times 10^{-9} \cdot e^{31,0328 \theta} \quad (10)$$

Com isso, conclui-se que praticamente 70% dos pontos experimentais apresentam, em relação à média, Eq. (10), um desvio não superior a 55%. Este nível de precisão atende perfeitamente às previsões de espalhamento e os resultados obtidos por outros autores em medições similares [7,8].

#### DETERMINAÇÃO DA CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA DO MEIO POROSO E DAS CÁPSULAS DO TENSÍOMETRO

A condutividade hidráulica,  $K(\theta)$ , do meio poroso foi determinada através da difusividade,  $D(\theta)$  e das derivadas  $-d\psi/d\theta$  relativas à curva de retenção de umidade obtida com o tensiômetro. A expressão usada no cálculo foi a seguinte:

$$|K(\theta)|_m = \frac{|D(\theta)|_{m \ln}}{(-d\psi/d\theta)}, \quad (11)$$

onde  $|K(\theta)|_m$  expressa um valor médio. As derivadas  $d\psi/d\theta$  foram avaliadas geometricamente. Os resultados obtidos com o uso da Eq. (11) estão registrados na Fig.-5. Nessa figura, a linha cheia é resultado da interpolação pelo método dos mínimos quadrados, da equação empírica  $K(\theta) = \gamma \theta^\epsilon$  proposta por Gardner (1960), sendo  $\gamma$  e  $\epsilon$  constantes do processo. A equação para a referida linha é:

$$|K(\theta)|_a = 1,6875 \times 10^{-2} \cdot \theta^{5,8492}, \quad (12)$$

sendo  $|K(\theta)|_a$  os valores de ajuste sobre as médias  $|K(\theta)|_m$ , dados em  $m \cdot s^{-1}$ . A correlação obtida com os pontos calculados através da Eq. (11) é de 0,9984.

A título de comparação valores para  $K(\theta)$  foram obtidos por dois outros métodos diversos. O primeiro deles trata-se do método proposto por Millington e Quirk [9] e o segundo o de E.G. Youngs [10]; estes resultados estão também registrados na Fig.-5.

A determinação experimental da condutividade de saturação das cápsulas,  $K_c$ , foi feita com base na Lei de Darcy. Encontrou-se  $K_c = 9,44 \times 10^{-8} m \cdot s^{-1}$  para cápsulas novas, podendo haver decréscimos com o uso.

#### CONCLUSÃO

Apesar das limitações impostas pelas técnicas experimentais e pelas condições de trabalho, logrou-se de terminar os parâmetros fenomenológicos, necessários ao estudo do Tensiômetro, com graus de precisão comparáveis aqueles encontrados na literatura para medições similares. Esses resultados serão utilizados num próximo trabalho.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Hillel, D. Fundamentals of soil physics. New York, Academic Press. Inc., 1980.
- [2] Reichardt, K. Uso das Radiações Gama na Determina

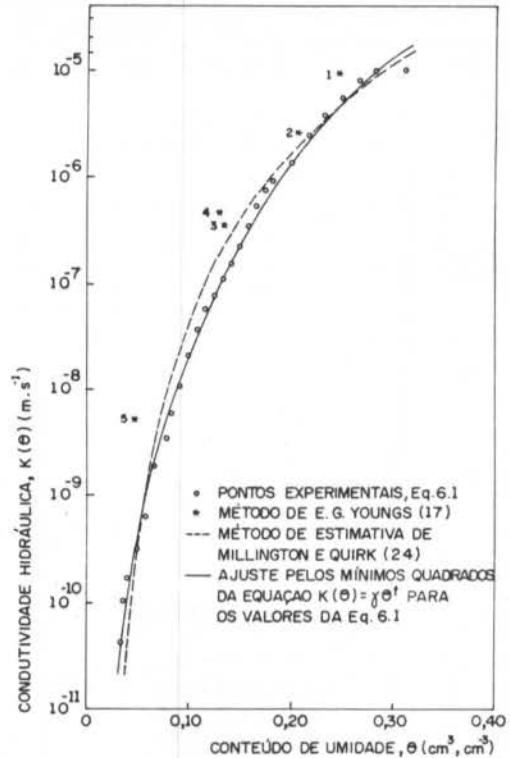


Fig.5 - DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA PARA A MISTURA AREIA-CAULIM.

ção da Umidade e da Densidade do Solo. (tese de doutoramento), ESALQ-USP, Piracicaba-SP, 1965.

- [3] Vachaud, G. Rapport d'activité scientifique. Institut de Mécanique de Grenoble, 1 juillet 1985 - 30 juin 1987, p. 87-95.
- [4] Richards, L.A. and Gardner W. Tensiometers for measuring the capillary tension of soil water. Journal of the American Society of Agronomy, 1936, v. 28, p. 352-358.
- [5] Bruce, R.R. and Klute, A. The measurement of soil water diffusivity. Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1956, v. 20, p. 458-462.
- [6] Gardner, W.R. and Mayhugh, M.S. Solutions and tests of the diffusion equation for the movement of water in soil. Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1958, v. 22, p. 197-201.
- [7] Crausse, P. Etude fondamentale des transferts couplés de chaleur et d'humidité en milieu poreux non saturé. These d'Etat I.N.P. Toubuse Janvier, 1982.
- [8] Jackson, R.D. Porosity and soil-water diffusivity relations. Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1963, v. 27, p. 123-126.
- [9] Millington, R.J. and Quirk, J.P. Permeability of porous media. Nature (London), 1959, v. 183, p.378-388.
- [10] Youngs, E.G. An infiltration method of measuring the hydraulic conductivity of unsaturated porous materials. Soil Sci., 1964, v. 109, p. 307-311.

#### Abstract

This paper presents the detailed experimental evaluation of the parameters related with the migration of moisture produced during the operation of a tensiometer. The attained average values, and the dispersion of individual results agrees with the degree of accuracy found in the literature.



TRANSFERÊNCIA DE UMIDADE EM MEIOS POROSOS INSATURADOS;  
A DINÂMICA DE RESPOSTA DE UM TENSÍOMETRO

MARINTHO B. QUADRI - Depto. Eng. Química/UFSC  
PAULO C. PHILIPPI - Depto. Eng. Mecânica/UFSC  
ARIOVALDO BOLZAN - Depto. Eng. Química/UFSC

RESUMO

Este trabalho, propõe um equacionamento para o problema do tensiômetro envolven- do o tempo de resposta associado às medições. Procede-se a resolução numérica do mode- lo com a utilização do Método da Colocação Ortogonal. Os parâmetros fenomenológicos en- volvidos na análise foram quantificados experimentalmente em trabalho anterior. Obti- dos e analisados os resultados, conclui-se que o modelo reproduz de maneira satisfató- ria o comportamento do tensiômetro observado nos ensaios práticos.

INTRODUÇÃO

Um equacionamento para o problema da interação en- tre um tensiômetro, munido de um manômetro de mercúrio, e uma amostra finita de material poroso (mistura de a- reia com 5% de caulim) com conteúdo de umidade conheci- do é proposto.

Através do modelo ora apresentado, torna-se possí- vel prever, de maneira satisfatória, o comportamento do tensiômetro verificado durante os ensaios práticos. Pa- ra a resolução do modelo, é fundamental o conhecimento dos coeficientes e parâmetros físicos pertinentes ao fe- nômeno. Esse levantamento foi feito a nível experimen- tal e constitui-se objeto de trabalho anterior [ 1 ].

As simplificações e hipóteses adotadas na conside- ração do problema físico são apresentadas.

Por fim, discute-se os resultados da resolução nu- mérica do modelo pelo Método da Colocação Ortogonal, pro- cedendo-se ainda um cotejo junto aos resultados experi- mentais.

HIPÓTESES E SIMPLIFICAÇÕES

Para a formulação e solução do problema, utilizou- -se as seguintes hipóteses simplificativas: i) Conside- ra-se que os fenômenos de migração de umidade ocorrem exclusivamente na direção radial (problema unidirec- cional), e adota-se, por conveniência, coordenadas cilín- dricas; ii) Admite-se que  $\Psi$  (potencial matricial) e u- ma função única de  $\theta$  (conteúdo de umidade); iii) Não se considera qualquer efeito de temperatura; iv) Tanto o meio poroso (amostra) quanto o material da cápsula são considerados meios contínuos e indeformáveis; v) Despre- zam-se os efeitos de fricção e aceleração da coluna de mercúrio no manômetro; vi) Admite-se que a resistência hidráulica de contato entre a parede externa da cápsula e a amostra é desprezível; vii) Admite-se que os poros da cápsula estão permanentemente saturados; viii) Admi- te-se não existir acumulação de líquido no interior da cápsula (a água é considerada incompressível); ix) Con- sidera-se a condutividade hidráulica da cápsula  $K_c$  cons- tante.

EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

Utilizando-se a equação da difusão em coordenadas cilíndricas considerada apenas na direção do raio,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r}) \quad (1)$$

Observando a Fig.- 1, tem-se como condição inici- al do problema,  $t = 0 : \theta = \theta_0; r > r_1$ ,  $(2)$   
 $\theta = \theta_s; r = r_1$ ,  $(3)$

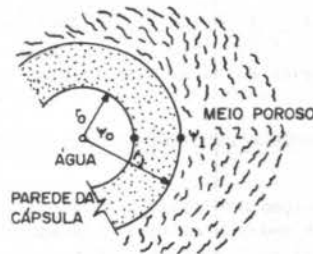


Fig. 1 - PARÂMETROS GEOMÉTRICOS RELATIVOS A CÁPSULA

onde:  $t$  = variável tem- poral;  $r_1$  = raio ex- terno da cápsula do tensiômetro;  $\theta_0$  = con- teúdo de umidade ini- cial da amostra ( $\text{cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$ ); e  $\theta_s$  = conteú- do de umidade de satu- ração ( $\text{cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$ ). As condições de contorno são: (a) fluxo zero na parede do recipiente que contém a amostra.

$$t > 0 : \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0; r = r_0 =$$

$$= \text{raio do recipiente}, \quad (4)$$

(b) na unidade de tempo, o volume de água deslocado do interior do manômetro é igual ao volume de água que a- flora à superfície da cápsula passando para a amostra. Não existe acumulação de líquido no interior da cápsu- la.

$$t > 0 : A_c K(\theta) \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \frac{A \phi m}{2} \frac{\partial h}{\partial t}; r = r_1, \quad (5)$$

onde:  $K(\theta)$  = condutibilidade hidráulica do meio poroso;  $\Psi_1$  = potencial de sucção em cm de  $\text{H}_2\text{O}$  na parede externa da cápsula ( $r=r_1$ );  $\Psi_0$  = potencial de sucção em cm de  $\text{H}_2\text{O}$  na parede interna da cápsula ( $r = r_0$ );  $A_c$  = área da superfície externa da cápsula do tensiômetro;  $A \phi m$  = área da secção transversal do tubo do manômetro;  $h$  = diferen- ça entre os níveis de mercúrio em cm.

Tendo-se que:  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Psi_0 = (\rho_{\text{Hg}} \cdot h) + (h_0 - \frac{h}{2}) \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}}$  e

$h_0$  = desnível entre a cápsula do tensiômetro e a posi- ção zero em cm, veja Fig.-2. Considerando que  $\rho_{\text{Hg}} = 13,6/\text{cm}^3$  e  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1\text{g}/\text{cm}^3$ , e fazendo os arranjos ne- cessários, a condição expressa pela Eq.- 5 pode tomar a seguinte forma:

$$A_c K(\theta) \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \frac{A \phi m}{26,2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \frac{A \phi m}{26,2} \frac{\ln(r_1/r_0)}{2\pi K_c l} \frac{\partial (K(\theta) \frac{\partial \Psi_1}{\partial r})}{\partial t}; r=r_1 \quad (6)$$

Expressando a Eq.- 6 em termos de conteúdo de umidade  $\theta$ , tem-se:

$$A_c D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{A \phi m}{26,2} \cdot \frac{D(\theta)}{K(\theta)} \cdot \frac{D(\theta)}{K(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{A \phi m}{26,2} \frac{\ln(r_1/r_0)}{2\pi K_c l} \frac{\partial (D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r})}{\partial t}; r = r_1 \quad (7)$$

onde:  $D(\theta)$  = difusividade hidráulica do meio poroso;  $K_c$  = condutividade hidráulica saturada da cápsula;  $\theta_1$  = conteúdo de umidade na parede externa da cápsula;  $l$  = comprimento da cápsula.



E a Eq.- 7 traduz a condição de contorno expressa pela Eq.- 5 em termos do conteúdo de umidade  $\theta$ .

O exame da Eq.-7 deixa claro que a taxa de variação do conteúdo de umidade na parede da cápsula  $\theta_1$  com o tempo é estabelecida em função de duas parcelas distintas. A primeira delas - correspondente ao membro esquerdo da equação - mostra a atuação do meio poroso ao proporcionar a força motriz necessária ao transporte, a qual se configura pela existência do gradiente  $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ . A outra, representada pela segunda parcela no membro direito da equação, estabelece a influência da resistência hidráulica da cápsula em interação com o meio poroso. Percebe-se que quanto maior a resistência hidráulica da cápsula, maior a influência da taxa de variação do fluxo na dinâmica do processo.

Uma vez solucionada a Eq.- 1 submetida às condições (2), (3), (4) e (7), obtêm-se os resultados experimentais, passíveis de comparação com a solução obtida a partir do modelo, dizem respeito ao acompanhamento da evolução da coluna de mercúrio do manômetro durante a realização das medidas de potencial matricial das várias amostras testadas, ou seja,  $\Psi_0$  em função de t para um determinado  $\theta_0$ . Portanto, é interessante expressar as previsões do modelo em termos de  $\Psi$ . Para isso, pode-se escrever:

$$\Psi_0(t) = \Psi_1(t) + \frac{\lambda n(r_1/r_0)}{2\pi Kc\ell} D(\theta) \frac{\partial \theta_1(t)}{\partial r}; r=r_1 \quad (8)$$

sendo  $\Psi_1(t)$  obtido através da curva experimental  $\Psi$  versus  $\theta$ .

#### RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO MODELO PELO MÉTODO DA COLOCAÇÃO ORTOGONAL (Apêndice)

O Método da Colocação Ortogonal aplicado na direção radial (variável r) reduz a equação diferencial parcial não linear com suas condições de contorno a um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares que podem ser integradas por um método do tipo Runge-Kutta Gears. [ 2, 3 ]

Primeiramente, as Eqs.- 1, 4 e 7 são adimensionalizadas com relação à variável r, de maneira a satisfazer o intervalo de ortogonalidade do polinômio interpolador. A adimensionalização resulta na seguinte formulação:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{D(\theta)}{\eta^2} \left[ \frac{\eta}{r^* \eta + r_1} \frac{\partial \theta}{\partial r^*} + \beta \left( \frac{\partial \theta^2}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} \right] \quad (9)$$

Condição inicial:

$$t = 0 : \theta = \theta_0 ; r^* > 0, \\ \theta = \theta_s ; r^* = 0. \quad (10)$$

Condições de contorno:

$$t > 0 : \frac{\partial \theta}{\partial r^*} = 0 ; r^* = 1 \quad (11)$$

$$t > 0 : aD(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r^*} = b \frac{D(\theta)}{K(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{D(\theta)}{K(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right); \\ r^* = 0 \quad (12)$$

onde:  $r^* = (r-r_1)/(r_0-r_1)$ ;  $\eta = r_0-r_1$ ;  $D(\theta) = ae^{\beta\theta}$ ;  $K(\theta) = \gamma\theta^\epsilon$ ;  $a = Ac$ ;  $b = A\phi m/26,2$ ;  $c = -A\phi m \cdot \lambda n(r_1/r_0)/52,4 \cdot \pi \cdot Kc \cdot \ell$ .

Na resolução numérica, todas as grandezas são expressas em unidades de centímetros e/ou segundos. Os valores numéricos utilizados foram os seguintes:  $r_1 = 0,345$ ;  $r_0 = 0,235$ ;  $r_0 = 13,96$ ;  $\alpha = 3,7667 \cdot 10^{-5}$ ;  $\beta = 31,0328$ ;  $\gamma = 1,6875$ ;  $\epsilon = 5,8492$ ;  $a = 2,82$ ;  $b = 1,76 \cdot 10^{-3}$ ;  $c = 8,74$ ;  $A\phi m = 0,046$ ;  $Kc = 9,44 \cdot 10^{-6}$ ;  $\ell = 1,30$ ;  $\theta_s = 0,3089$ .

A aplicação da colocação ortogonal nas Eqs.- 9, 11 e 12 usando como pontos de colocação internos as raízes do polinômio de Jacobi, transforma-as no seguinte sistema de equações:

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} = \frac{ae^{\beta\theta}}{\eta} \left[ \frac{\eta}{r_i^* \eta + r_1} \sum_{j=1}^{N+2} A_{ij} \theta_j(t) + \beta \left( \sum_{j=1}^{N+2} A_{ij} \theta_j(t) \right)^2 + \sum_{j=1}^{N+2} B_{ij} \theta_j(t) \right] \quad (13)$$

$$\frac{d\theta_{N+2}(t)}{dt} = - \left( \sum_{j=1}^{N+1} A_{N+2,j} \frac{d\theta_j}{dt} \right) / A_{N+2,N+2} \quad (14)$$

$$\frac{d\theta_1(t)}{dt} = \frac{\frac{a}{\eta} \sum_{j=1}^{N+2} A_{1,j} \theta_j(t) - \frac{c}{\eta} \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{N+2} A_{1,j} \theta_j(t) \right)}{\frac{b}{K(\theta_1)} + \frac{c\beta}{\eta} \sum_{j=1}^{N+2} A_{1,j} \theta_j(t)} \quad (15)$$

onde: N = número de pontos de colocação internos, i, j = subíndice que designam determinado ponto de colocação;  $\theta_i(t)$  = conteúdo de umidade no ponto de colocação i;  $A_{ij}$  = derivada do polinômio de Lagrange,  $\ell_i(r^*)$ , em  $r^* = r^*_i$ ;  $B_{ij}$  = derivada segunda do polinômio j de Lagrange em  $r^* = r^*_i$ .

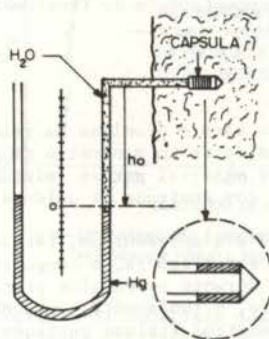


Fig 2 - TENSIOMETRO NA CONDIÇÃO INICIAL (ACUSANDO SUÇÃO ZERO)

A resolução numérica desse sistema foi efetuada com o uso de um microcomputador do tipo PC compatível 4. Obtidas  $\theta_1(t)$  e as derivadas  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  relativas a uma dada condição inicial  $\theta_0$  de conteúdo de umidade da amostra - o subíndice 1 indica a posição correspondente à parede externa da cápsula do tensiômetro. —, determinou-se  $\Psi_0(t)$  com o uso da Eq.- 8 devidamente adimensionalizada.

Para isso, os valores de  $\Psi_1(t)$  correspondentes aos de  $\theta_1(t)$  foram obtidos através da curva experimental  $\Psi$  X  $\theta$  determinada para o material das amostras.

Para os cálculos, o raio do frasco que contém o meio poroso,  $r_0$ , foi tomado como igual a 13,96cm em vez do valor real que é igual a 3,75cm. Isso se deve ao fato de que no modelo é considerado que a migração de umidade ocorre exclusivamente na direção radial. Se fosse mantido o valor de 3,75cm, o conteúdo de umidade inicial do meio  $\theta_0$  sofreria um aumento sensível, maior do que o verificado na prática, em função de que o volume efetivo para a migração de umidade é bem menor do que a que disponível na situação em que se realizaram os experimentos. Por isso, optou-se por considerar um raio maior, de maneira a preservar o volume na qual se dá em realidade a migração de umidade.

O número e a distribuição dos pontos de colocação utilizados ficaram sujeitos a determinadas restrições impostas pelas características do método numérico. Constatou-se sérios problemas de instabilidade numérica ao se tentar situar pontos de colocação internos nas proximidades da parede da cápsula do tensiômetro. Por esta razão, optou-se por distribuir os pontos de colocação de maneira a concentrá-los mais na região junto à fronteira impermeável. Maiores detalhes sobre a natureza do problema podem ser encontrados na referência [ 4 ].

Normalmente, no Método da Colocação Ortogonal o aumento do número de pontos de colocação usados tende a melhorar a precisão da solução. Para o presente problema, começa-se a ter pioras na solução a partir de um determinado número de pontos, chegando-se por fim a problemas de convergência. O motivo para tal comportamento, reside possivelmente no fato de que, com o aumento do número de pontos, alguns deles passam a se posicionar demasiado próximos à parede da cápsula, à despeito dos parâmetros de distribuição adotados. Com isso, vol



ta a se manifestar o problema de instabilidade mencionada. Para cada caso, o número de pontos internos de colocação foi escolhido em função da consideração do problema de instabilidade numérica e da melhor precisão dentro da tendência observada. Para a totalidade dos casos a utilização de um ponto a mais ou um ponto a menos não alterou sensivelmente a solução obtida; ou seja, o Método da Colocação Ortogonal fornece soluções aproximadas que, para fins de comparação com os resultados experimentais, são satisfatórios.

Uma dinâmica de resposta acelerada numa primeira etapa, seguida de um comportamento bastante mais moroso até a condição de equilíbrio, é uma característica geral encontrada para os casos computados. Esta característica é menos marcante para os casos onde o conteúdo inicial de umidade  $\theta_0$  tem valor superior a  $0,07 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$ , observando-se respostas relativamente rápidas. Em situações extremas o valor final do potencial é atingido em poucos minutos. Observe a Fig.- 3.

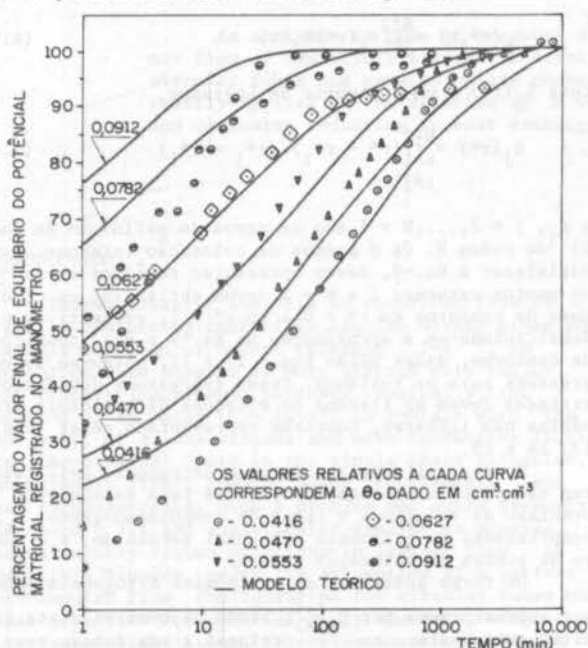


Fig 3 - COMPARAÇÃO ENTRE OS TEMPOS DE RESPOSTA PARA DIFERENTES VALORES DE  $\theta_0$

Nas curvas que representam as soluções numéricas obtidas para valores de  $\theta_0$  inferiores a  $0,07 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$ , observa-se uma inflexão que pode ser considerada como evidência da existência de duas etapas no desenvolvimento da resposta. Para os casos em que  $\theta_0$  possui valores mais elevados, a inflexão não é visível, possivelmente por ocorrer no transcurso do primeiro minuto, o qual não está computado.

Pelo exame da Fig.- 3 constata-se de maneira indubitável que a constante de tempo relativa ao processo de medição do potencial matricial, tal como descrito pela resolução do modelo, depende do conteúdo de umidade  $\theta_0$  do meio poroso. A constante de tempo — entendida aqui como o tempo necessário para que uma determinada fração do valor final da resposta seja atingida — é, para os casos computados, progressivamente menor à medida que a condução  $\theta_0$  do meio tem valores maiores.

Ao examinar-se a influência do valor adotado para a condutividade hidráulica da cápsula  $K_c$  nas soluções obtidas, constata-se que as mesmas sofrem variações apenas no que se refere à primeira etapa da resposta, justamente quando o fluxo de água através da cápsula é potencialmente maior. Observando-se a Eq.- 12, percebe-se que  $K_c$ , incluída na constante  $c$ , é tanto mais importante para a definição do fluxo junto à parede da cápsula quanto maior a derivada deste mesmo fluxo em relação ao tempo. Como o fluxo varia intensamente na fase inicial da resposta, passando posteriormente a apresentar mudanças com grande lentidão, tem-se a justificativa pa-

ra o fato apontado. Em todos os casos utilizou-se  $K_c = 9,44 \times 10^{-6} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , conforme determinado experimentalmente.

Em suma, pode-se dizer que a dinâmica de resposta do tensiômetro está subordinada a um conjunto de duas principais resistências ao fluxo associadas em série. São elas:

- a resistência relativa à cápsula porosa do tensiômetro, a qual é dada por  $\ln(r_1/r_0)/2\pi K_c l$ ;
- e a resistência ao fluxo insaturado no seio do próprio meio poroso, onde se realiza a medição. Esta resistência, relacionada com a resistividade hidráulica do meio  $l/K(\theta)$ , varia durante a medição, sendo fortemente dependente do conteúdo de umidade  $\theta$ .

Na fase inicial da resposta, a resistência ao fluxo no seio do meio poroso é mínima em função dos conteúdos de umidade elevados nas proximidades da cápsula. A resistência da cápsula é suportadamente constante durante todo o processo, entretanto, no que concerne à definição da dinâmica de resposta do tensiômetro, deve perder importância frente ao incremento da resistência oferecida pelo meio poroso, em especial ao se configurar a segunda etapa da resposta.

Todos os resultados experimentais aqui expostos foram obtidos mediante a utilização de um conjunto de cápsulas de cerâmica. As cápsulas foram usadas alternadamente, sem a observância de um critério mais rígido.

Pela observação da Fig.- 3, constata-se que o comportamento delineado pelos pontos experimentais é da mesma natureza daquele previsto pelo modelo. Percebe-se que, quase para a totalidade dos casos, a fase inicial da resposta observada experimentalmente exibe um certo atraso em relação à previsão. Esta discordância inicial parece indicar a presença de resistências adicionais como, por exemplo, a resistência hidráulica de contato entre a cápsula e o meio poroso, e/ou um acréscimo na resistência hidráulica da cápsula em relação àquela considerada no modelo. Conforme discutido no trabalho anterior [1], as cápsulas são bastante suscetíveis à inclusão de ar, o que provoca o aumento da resistência hidráulica das mesmas. Como, em todos os casos, o valor de  $K_c$  utilizado nos cálculos ( $9,44 \times 10^{-6} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ) corresponde à cápsulas sem utilização prévia, portanto, apresentando condutividade hidráulica máxima, é possível que o efeito da inclusão de ar esteja se manifestando.

Principalmente para conteúdos de umidade inicial do meio,  $\theta_0$ , mais baixos, constata-se discrepâncias acentuadas no que se refere à fase final da resposta. Esse tipo de ocorrência pode ser explicado em função do fato de que na resolução do modelo, a condição de umidade do meio poroso  $\theta_0$ , sofre um incremento em relação ao valor inicial. Tal incremento é tanto mais sensível quanto menor o valor da condição inicial  $\theta_0$ , pois nestas situações um maior volume de água é transferido do manômetro para o meio poroso. Além disso, na faixa de baixos conteúdos de umidade, uma pequena variação em  $\theta$  produz grande alteração no valor do potencial matricial,  $\psi$ .

Na situação experimental, esses acréscimos em  $\theta_0$  foram considerados, de forma que, na determinação da curva  $\psi \times \theta$  para o tensiômetro, os conteúdos de umidade das amostras são relativos à condução de equilíbrio, já incluído o volume de água transferido do manômetro.

#### CONCLUSÃO

Não obstante os problemas de instabilidade numérica e as discrepâncias apontadas pode-se dizer que o modelo descreve de maneira satisfatória a dinâmica de resposta do tensiômetro, observada experimentalmente. Para vários casos, os desvios para toda a extensão da resposta, a menos da porção correspondente aos primeiros minutos, não ultrapassam a 10%. Nos casos extremos de baixo conteúdo de umidade,  $\theta_0$ , os desvios máximos são da ordem de 20%.

REFERÊNCIAS

- 1 Quadri, Marinho B. e Philippi P.C. Determinação Experimental dos parâmetros Fenomenológicos relacionados com o funcionamento de um tensiômetro em meios porosos insaturados. Encit 88 - Águas de Lindóia, SP, 1988. (a ser publicado)
- 2 Finlayson, A.B. The method of weighted residuals and variational principles. Academic Press. London, 1972.
- 3 Villadsen, J. and Michelsen, M.L. Solution of differential equation models by polynomial approximation. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1978.
- 4 Quadri, Marinho B. Dinâmica de resposta de tensiômetros: desenvolvimento experimental e modelação numérica (tese de mestrado), EMC - UFSC, Florianópolis-SC, 1988.

ABSTRACT

The dynamics of the response of a tensiometer is important in measuring the transient physical phenomena related to moisture transfer in unsaturated porous media. Tensiometers are measuring devices widely used, specially in soil physics, for measuring the energy state of water inside porous media. The transient response of a tensiometer, depends on the moisture diffusivity in the medium, which is a strong function of the water content, on the saturated hydraulic conductivity of the porous cup and on the moisture potential characteristic curve. These parameters have been experimentally determined by the authors in terms of the water content, for a sand-kaolin mixture. In the present work, these parameters have been used for predicting the dynamical response of a cylindrical ceramic cup tensiometer, by using a collocation method. The results are compared with experimental data obtained by monitoring the time evolution of the tensiometer readings.

Apêndice: MÉTODO DA COLOCAÇÃO ORTOGONAL

A colocação ortogonal é uma técnica que pertence à classe dos métodos conhecidos como "Métodos dos Resíduos Ponderados" que, normalmente, reduz a dimensão do sistema de equações matemáticas do modelo para determinado problema, permitindo um decréscimo no tempo e no uso de memória do computador, sem perda de precisão na solução numérica.

Os "Métodos dos Resíduos Ponderados" - para um estudo mais aprofundado consulte FINLAYSON [2] - requerem uma solução polinomial aproximada, que, tendo em vista o problema abordado no presente trabalho, pode ser representada pela seguinte equação:

$$\theta_N(r^*, t) = \sum_{j=1}^{N+2} a_j(r^*)\theta_j(t), \quad (A.1)$$

N corresponde ao número de pontos dentro do domínio da solução. As funções perturbação,  $\theta_j$ , podem ser escolhidas livremente, desde que satisfaçam as condições de contorno da equação e sejam linearmente dependentes, VILLADSEN e MICHELSEN [3]. A substituição da solução polinomial aproximada na equação diferencial, fornecerá uma expressão chamada de resíduo,  $R_N(a, r^*)$ , função dos coeficientes  $a_j$ . Os "Métodos dos Resíduos Ponderados" determinam os valores de  $a_j$  impondo que:

$$\int_0^1 R_N(a, r^*) W_j(r^*) dr^* = 0 \quad (A.2)$$

Os diferentes métodos caracterizam-se pela escolha da função de ponderação  $W_j(r^*)$ . Para o caso:

$$W_j(r^*) = (r^* - r_j^*) \text{ com } j = 1, 2, \dots, N; \quad (A.3)$$

com

$$W_j(r^*) = \begin{cases} \infty & \text{para } r^* = r_j^* \\ 0 & \text{para } r^* \neq r_j^* \end{cases}$$

onde  $r_j^*$  são N pontos dentro de um dado intervalo. Dito de outra forma:

$$R_N(a, r_j^*) = 0 \text{ com } j = 1, 2, \dots, N \quad (A.4)$$

ou seja, o resíduo será nulo em cada ponto  $r_j^*$ , chamado de ponto de colocação. A colocação ortogonal é uma extensão deste método para quando os pontos são as raízes de um polinômio ortogonal e a função  $\theta_j(t)$  faz parte de uma família desses polinômios.

Na resolução do modelo proposto usou-se a seguinte aproximação para o conteúdo de umidade,  $\theta$ , na direção radial r:

$$\theta_N(r^*, t) = \sum_{j=1}^{N+2} \lambda_j(r^*) \theta_j(t) \quad (A.5)$$

onde  $\lambda_j(r^*)$  é um polinômio de Lagrange,

$$\lambda_j(r^*) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N+2} (r^* - r_i^*) / (r_j^* - r_i^*) \quad (A.6)$$

e  $r_j$ ,  $j = 2, \dots, N+1$  são os zeros do polinômio de Jacobi de ordem N. Os N pontos de colocação internos para satisfazer a Eq.-9, devem apresentar resíduos nulos. Já os pontos externos 1 e N+2 devem satisfazer as condições de contorno em  $r^* = 0$  e em  $r^* = 1$ , respectivamente. Substituindo-se a aproximação na Eq.-9 e nas condições de contorno, dadas pelas Eqs.- 11 e 12, obtêm-se as expressões para os resíduos. Essas expressões devidamente tratadas levam ao sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares, conforme representado pelas Eqs.- 13, 14 e 15.

Ao ser aplicada a colocação ortogonal, dois fatores são particularmente importantes para estabelecer a precisão da solução e o tempo de computação gasto: as propriedades do polinômio ortogonal escolhido, e o número de pontos de colocação usados.

De forma genérica, os polinômios ortogonais podem ser representados por  $P_i^{\lambda, \xi}(x)$ , sendo os membros desta família ortogonais em relação a uma função peso  $W(x)$ . Desse modo, para  $W(x) = (1-x)^\lambda \cdot x^\xi$ , diferentes valores de  $\lambda$  e/ou  $\xi$  produzem diferentes polinômios. Os valores de  $\lambda$  e  $\xi$  determinam a distribuição dos zeros do polinômio dentro do intervalo de aproximação. Quando  $\lambda$  e  $\xi$  são grandes, os zeros encontram-se no meio do intervalo. A utilização de valores baixos faz com que os zeros fiquem mais distribuídos.

O grau de aproximação obtido em relação à distribuição de zeros depende do problema específico. A adoção do polinômio adequado pode significar boa precisão para poucos pontos de colocação e, consequentemente, pequeno tempo de processamento. Para o modelo do tensiômetro em estudo, tendo em vista suas características e a estabilidade das aproximações obtidas, acabou-se por adotar  $\lambda = 1$  e  $\xi = 3$ .



THERMOHYDRAULICS IN LAMINAR FLOW OF  
IMMISCIBLE LIQUIDS FOR FOULING REDUCTION



E. NOGUEIRA AND R.M. COTTA

PROGRAMA DE ENGENHARIA MECÂNICA-COPPE/UFRJ

ABSTRACT

An analysis is made of pressure drop and heat transfer rates in cocurrent laminar flow of immiscible liquids in direct contact inside simple shaped ducts such as circular tubes and parallel-plate channels. The analytical expressions obtained are readily applied to the solution of a water-kerosene system of interest to fouling and corrosion reduction in heat exchangers.

INTRODUCTION

Thermohydraulic analysis in cocurrent flow of directly contacting immiscible liquids within pipes and channels has been of recent interest [1-4], in connection with pumping of very viscous oils and/or heat transfer enhancement purposes. Basically, the addition of an outer thin layer, in contact with the duct wall, of a less viscous and more conductive liquid than the original fluid in the single phase situation, can markedly affect pumping power requirements and heat exchange rates. Such a problem was quite recently addressed [5] and analytically handled to provide thermal entry region solutions in laminar flow of immiscible liquids, under the assumption of a perfect core-annular flow configuration for circular tubes and sheat-core flow for parallel-plate channels, without interface instabilities. Extensive numerical results were then obtained for an oil-water combination, and the relative merits of adding the water film were analysed, under different operating conditions as compared to the single phase problem. A second and quite relevant application in this class of problems [6], is that concerned with fouling prevention in heat exchange equipment through the addition of an outer solvent layer, which can eventually be more viscous and less conductive than the working liquid and, therefore, might affect the overall heat exchanger performance. The present contribution makes use of the analytical developments in [5] to study such a situation, here illustrated through a water-kerosene system, for various operation conditions and both circular tube and parallel-plates geometry. Numerical results for pumping power and heat transfer rates are then critically compared for various relative thicknesses of the kerosene layer and examined against the single phase results (water flow only).

ANALYSIS

The problem formulation is given by the energy equation for thermally developing, hydrodynamically fully developed cocurrent flow of immiscible liquids in direct contact within circular tubes or parallel-plate channels. Under the assumptions of constant physical properties, negligible viscous dissipation and axial conduction, and a stable interface between the fluids without considerable stratification, the appropriate equations are written as:

$$u_m(r) \frac{\partial T_m(r,z)}{\partial z} = \frac{\alpha_m}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^n \frac{\partial T_m(r,z)}{\partial r} \right],$$

$$\text{in } r_{m-1} < r < r_m, \quad m=1,2,z>0 \quad (1a,b)$$

subjected to the following inlet and boundary conditions

$$T_m(r,0) = T_{om}, \quad r_{m-1} < r < r_m \quad (1c,d)$$

$$\left. \frac{\partial T_1(r,z)}{\partial r} \right|_{r_o} = 0, \quad z>0 \quad (1e)$$

$$T_1(r_1,z) = T_2(r_1,z), \quad z>0 \quad (1f)$$

$$K_1 \frac{\partial T_1(r_1,z)}{\partial r} = K_2 \frac{\partial T_2(r,z)}{\partial r}, \quad z>0 \quad (1g)$$

$$T_2(r_2,z) = T_w, \quad z>0 \quad (1h)$$

$$\text{with } n = \begin{cases} 0, & \text{for parallel-plates} \\ 1, & \text{for circular duct} \end{cases}$$

which allow definition of the following dimensionless groups

$$R = \frac{r}{r_2}; \quad \delta = \frac{r_1}{r_2}; \quad Z = \frac{\alpha z}{u D_h^2}; \quad K = \frac{K_1}{K_2}$$

$$\bar{\theta}_m(R,Z) = \frac{T_m(r,z) - T_w}{\Delta T}; \quad F_m(R) = \frac{T_{om} - T_w}{\Delta T} \quad (2,a-f)$$

where,

$$\bar{\alpha} = \delta^{n+1} (\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2; \quad \Delta T = T_{o1} - T_w \quad (2,g,h)$$

and  $D_h$  is the duct's hydraulic diameter.

System(1) above can be readily solved by the



integral transform technique [7], from the establishment of the related eigenvalue problem

$$\frac{d}{dR} \left[ R^n \frac{d\psi_{mi}(R)}{dR} \right] + \lambda_i^2 \left[ \frac{r_2}{D_h} \right]^2 C W_m(R) R^n \psi_{mi}(R) = 0, \quad \text{in } R_{m-1} < R < R_m, m=1,2 \quad (3.a,b)$$

with boundary and interface conditions

$$\frac{d\psi_{1i}(R)}{dR} = 0, \quad R_0 = 0 \quad (3.c)$$

$$\psi_{1i}(R) = \psi_{2i}(R), \quad R_1 = \delta \quad (3.d)$$

$$\frac{1}{K} \frac{d\psi_{1i}(R)}{dR} = \frac{d\psi_{2i}(R)}{dR}, \quad R_1 = \delta \quad (3.e)$$

$$\psi_{2i}(R) = 0, \quad R_2 = 1 \quad (3.f)$$

where,

$$W_m(R) = \frac{\bar{\alpha} U_m(R)}{\alpha_m C}, \quad C = \frac{n+3}{2} \quad (4.a,b)$$

and the dimensionless velocity profiles given by the solution of the appropriate momentum equations [5]

$$U_1(R) = \frac{u_1(r)}{\bar{u}} = \frac{C [1 - \delta^2 + \hat{\mu}(\delta^2 - R^2)]}{\delta^{n+3}(\hat{\mu}-1) + 1}, \quad 0 \leq R \leq \delta \quad (4.c)$$

$$U_2(R) = \frac{u_2(r)}{\bar{u}} = \frac{C [1 - R^2]}{\delta^{n+3}(\hat{\mu}-1) + 1}, \quad \delta < R < 1 \quad (4.d)$$

with,

$$\hat{\mu} = \text{viscosities ratio} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$\bar{u} = \text{average flow velocity} = \frac{\bar{K} r_2^2}{(n+3)(n+1)\mu_2} \cdot [\delta^{n+3}(\hat{\mu}-1) + 1] \quad (4.f)$$

$$\bar{K} = -\frac{dp}{dz} = \text{pressure gradient} \quad (4.g)$$

The Sturm-Liouville type problem (3) can be quite accurately and automatically solved for the associated eigenvalues,  $\lambda_i$ 's, and eigenfunctions,  $\psi_{mi}$ 's, by making use of recently advanced extensions to the so-called sign-count method [7]. Once such eigenquantities have been evaluated, the analytical solution of problem(1) is computed from

$$\Theta_m(R,Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{F}_i}{N_i} \psi_{mi}(R) \exp(-\lambda_i^2 Z) \quad (5.a)$$

where, the normalization integral and transformed inlet condition are given by

$$N_i = \sum_{m=1}^2 \int_{R_{m-1}}^{R_m} W_m(R) R^n \psi_{mi}^2(R) dR \quad (5.b)$$

$$\bar{F}_i = \sum_{m=1}^2 \int_{R_{m-1}}^{R_m} W_m(R) R^n F_m(R) \psi_{mi}(R) dR \quad (5.c)$$

Quantities of practical interest in heat exchanger design can then be considered, from the above determined velocity and temperature profiles, eqs.(4.c,d) and (5.a), respectively. Therefore, the required pumping power for a specified duct length L, is obtained from

$$w = \bar{K} L \dot{m} = \bar{K} L (\bar{u}_1 A_1 + \bar{u}_2 A_2) \quad (6.a)$$

where the total flow rate  $\dot{m}$  is obtained from adding up the flow rates for each liquid. For comparison purposes, however, we take the pumping power ratio, with respect to the single (internal) fluid situation, which becomes

$$\frac{w}{w^*} = \frac{\bar{K}}{\bar{K}^*} \left[ \delta^{n+1} \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}^*} + (1 + \delta^{n+1}) \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}^*} \right] \quad (6.b)$$

where,

$$w^* = \bar{K}^* L \dot{m}^* = \bar{K}^* L \bar{u}^* (A_1 + A_2) \quad (6.c)$$

is the required pumping power when the internal fluid occupies the entire channel cross section. Eq.(6.b) above allows the inspection of the extra power required by adding an outer layer of a more viscous liquid ( $\delta < R < 1$ ), between the duct's wall and the working fluid. Also, the total heat exchange rate with the wall, over a length z of duct is obtained from:

$$Q(z) = -P \int_0^z K_2 \frac{\partial T_2(r_2, z)}{\partial r} dz \quad (7.a)$$

where P is the wetted perimeter of the duct.

For the flow of just the internal fluid, the maximum heat exchange rate, obtained for an infinite duct, is given by

$$Q^*(\infty) = \frac{P r_2 \rho_1 C_{p1} \bar{u}^* \Delta T}{(n+1)} \quad (7.b)$$

which can be used to normalize Q(z) and provide the heat exchange ratio in the form

$$\hat{Q}(Z) = \frac{Q(z)}{Q^*(\infty)} = \left[ \delta^{n+1} \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}^*} + (1 - \delta^{n+1}) \frac{\rho_2 C_{p2} \bar{u}_2}{\rho_1 C_{p1} \bar{u}^*} \right] + \frac{C(n+1) K_2 \bar{u}}{\rho_1 C_{p1} \bar{u}^*} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{F}_i}{\beta_i^2 N_i} \cdot \frac{d\psi_{2i}(1)}{dR} \cdot e^{-\lambda_i^2 Z} \quad (7.c)$$

where,

$$\beta_1^2 = \lambda_1^2 \left( \frac{r}{D_h} \right)^2 C \quad (7.d)$$

The asymptotic heat exchange ratio, attained for a sufficiently long duct is then recovered by letting  $Z \rightarrow \infty$  in eq.(7.c) above, yielding:

$$\hat{Q}(\infty) = \frac{\bar{K}}{\bar{K}^*} \left\{ \delta^{n+1} \frac{[(n+3)(1+\delta^2(\bar{\mu}-1)) - (n+1)\bar{\mu}\delta^2]}{2\bar{\mu}} + \frac{\rho_2 C_{p2}}{\rho_1 C_{p1}} \frac{[(n+3)(1-\delta^{n+1}) + (n+1)(\delta^{n+3}-1)]}{2\bar{\mu}} \right\} \quad (7.e)$$

Eq.(7.c) above allows for the inspection of the heat exchange rates reductions when an outer layer of a more viscous and less conductive liquid is added to the main internal flow.

It should be noticed that  $\bar{K}$  and  $\bar{K}^*$  were allowed to differ, since one might be particularly interested in prescribing either the total flow rate or just the internal fluid flow rate, after adding the outer layer, despite the flow area reduction. Actually, for eqs.(6.b, 7.c and 7.e) to be computed for different values of the dimensionless interface position,  $\delta$ , knowledge of the average velocities ratio is required, once some operating condition has been prescribed, i.e., flow rates, pumping power, or pressure gradients ratio with respect to the single fluid situation. Therefore, we have chosen to consider the following conditions more closely:

- $\bar{K} = \bar{K}^*$  - same prescribed pressure drop for the double and single fluid flow situations;
- $\dot{m} = \dot{m}^*$  - total flow rate kept unaltered, after adding the outer liquid layer;
- $\dot{m}_1 = \dot{m}^*$  - flow rate of the internal(original) fluid kept unaltered;
- $w = w^*$  - pumping power kept unaltered.

## RESULTS AND DISCUSSION

An application is considered that deals with the quite relevant problem of reducing fouling and corrosion in heat exchangers, through adding a thin layer of solvent, such as kerosene, between the main water stream and the duct's wall [6]. The objective is then to investigate how the pumping power and heat exchange rate are affected, for different thicknesses of the kerosene layer, with respect to the pure water original flow situation. The required data are the viscosities, thermal conductivities and thermal diffusivities ratios, here taken as:

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 2.43; \quad \bar{K} = \frac{K_1}{K_2} = 6.99; \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0.38$$

Also, both streams are considered to enter the channel at the same uniform temperature,  $T_0$ , and exchange heat with the wall at the prescribed temperature  $T_w$ .

For the sake of comparing numerical results for various interface positions,  $\delta$ 's, it is of interest to define a dimensionless axial coordinate that does not depend on the value of  $\delta$ . Therefore, for graphing purposes, the following coordinate is defined in terms of properties for the internal fluid only as:

$$Z^* = \frac{C \alpha_1 z}{u \max D_h} \quad (8.a)$$

where,

$$u_{\max}^* = \frac{\bar{K}^* r_2^2}{2\mu_1(n+1)} \quad (8.b)$$

First, on figures 1 and 2, it is shown the pumping power ratios from eq.(6.b) as a function of interface position,  $\delta$ , for different operating conditions and, respectively, for a circular tube ( $n=1$ ) and a parallel-plates channel ( $n=0$ ). When the total flow rate is to be maintained ( $\dot{m}=\dot{m}^*$ ) after adding the kerosene layer, the pumping power has to be increased, so as to accommodate the larger friction due to the presence now of a more viscous fluid close to the wall; in this case, the pumping power ratio tends to the viscosities ratio as the internal fluid vanishes ( $\delta \rightarrow 0$ ). For the case of  $\dot{m}_1 = \dot{m}^*$ , the pumping power needs to increase markedly, so as to conserve the same water flow rate through progressively smaller cross sectional areas; however, for thin kerosene films, the extra power required for these two situations are practically coincident to the graph scale. If the pressure drop is prescribed ( $\bar{K} = \bar{K}^*$ ) then the pumping power ratio decreases with  $\delta$ , since smaller flow rates are now needed to dissipate the same amount of energy through friction with the wall, tending to the inverse of the viscosities ratio as  $\delta \rightarrow 0$ .

Figures 3 and 4 present the asymptotic heat exchange ratios, eq.(7.e), in terms of  $\delta$  for all four operating conditions here considered and, again, for both circular tubes and parallel-plate channels. As expected, at least from intuition, the total heat exchange decreases due to the addition of a less conductive layer of fluid close to the wall, for the cases  $\bar{K} = \bar{K}^*$ ,  $w = w^*$ , and  $\dot{m} = \dot{m}^*$ . However when the water flow rate is conserved ( $\dot{m}_1 = \dot{m}^*$ ), the heat exchange actually increases as  $\delta$  decreases, although not significantly for thin kerosene films. Such a behavior is due to the larger velocities imposed to the overall flow field, making the convective exchange gain more important than the added thermal resistance of the kerosene layer; of course, the heat transfer enhancement observed is paid at the price of a quite significant increase in pumping power, as shown in figs. 1 and 2.

Figures 5 to 8 correspond to the heat exchange ratios,  $\hat{Q}(Z^*)$ , along the thermal entry region within a circular tube for the operating conditions, respectively,  $\dot{m}_1 = \dot{m}^*$ ,  $\dot{m} = \dot{m}^*$ ,  $w = w^*$ , and  $\bar{K} = \bar{K}^*$ . The representative values of  $\delta = 0.9999, 0.99, 0.95, 0.8$ , and  $0.6$  were taken, where the value  $\delta=0.9999$  was considered so as to verify the convergence to the single fluid flow solution. For the cases  $\dot{m} = \dot{m}^*$ ,  $w = w^*$ , and  $\bar{K} = \bar{K}^*$ , the thermal entrance length does not seem to be significantly altered by the second fluid layer, even for smaller values of  $\delta(0.6)$ . In the case of  $\dot{m}_1 = \dot{m}^*$  (fig.5), however, some interesting remarks can be made. First, for short ducts, a decrease in heat exchange ratio is observable, with respect to the maximum heat exchange rate,  $Q^*(\infty)$ . Clearly, it takes a certain duct length for the convective gain to overcome the added conductive resistance, and reach the integrated results presented in figs.3 and 4. Therefore, close to the inlet, these two effects practically compensated each other, and the curves for different values of  $\delta$  were not so different from each other. In the remaining figures, the two effects work in the direction of reducing heat exchange, since flow rates are less or equal to the original one and the less conductive fluid is still present, and the various curves for different  $\delta$ 's are markedly distant even for short duct length. Also, from fig.5, it can be said that the thermal entrance length in this case ( $\dot{m}_1 = \dot{m}^*$ ) increases as  $\delta \rightarrow 0$ , since it now takes a longer duct for full heat exchange to be attained.



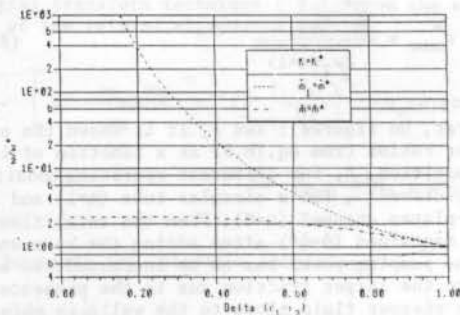


Fig.1-Pumping power ratios (n=1)

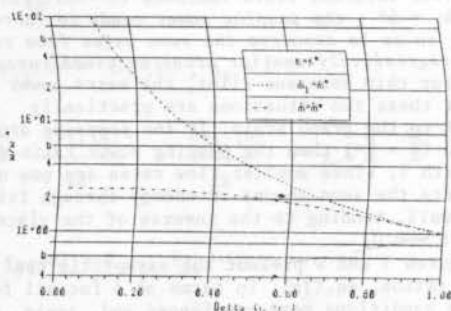


Fig.2-Pumping power ratios (n=0)

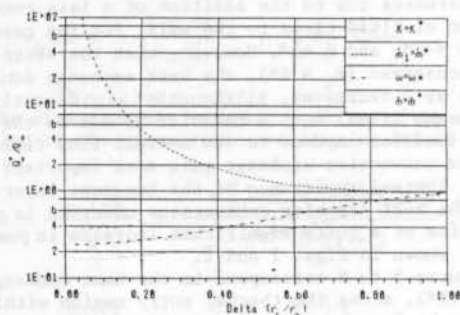


Fig.3-Asymptotic heat exchange ratios (n=1)

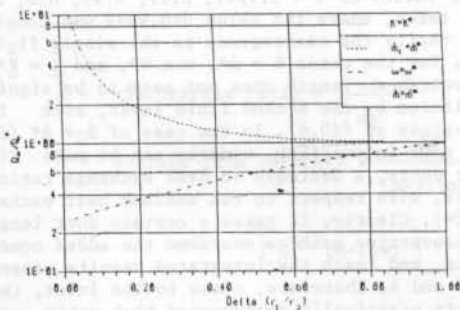


Fig.4-Asymptotic heat exchange ratios (n=0)

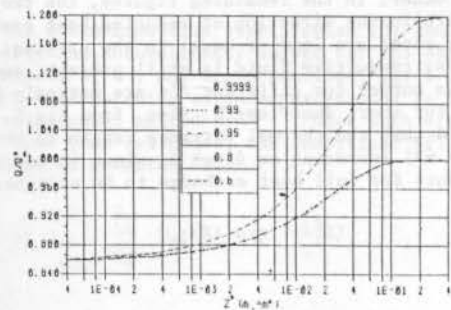


Fig.5-Total heat exchange ratios ( $\dot{m}_1 = \dot{m}^*$ )

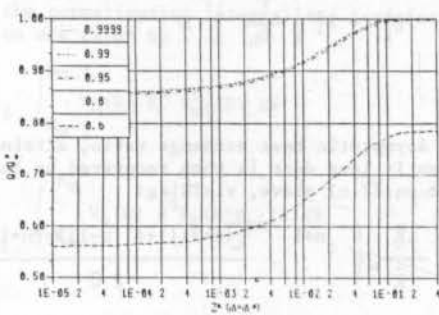


Fig.6-Total heat exchange ratios ( $\dot{m} = \dot{m}^*$ )

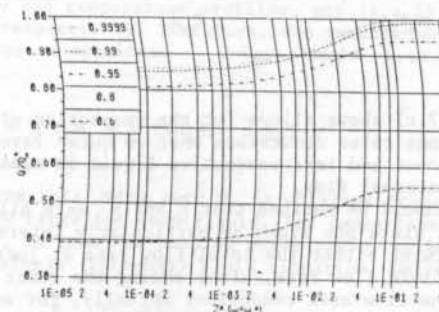


Fig.7-Total heat exchange ratios ( $w = w^*$ )

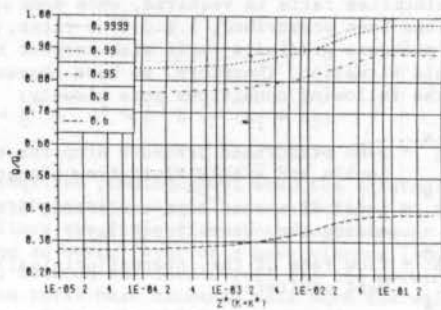


Fig.8-Total heat exchange ratios ( $\bar{K} = \bar{K}^*$ )

#### REFERENCES

1. Bentwich, M. and S. Sideman, "Temperature Distribution and Heat Transfer in Annular Two-Phase (Liquid-Liquid) Flow", *Can.J.Chem.Eng.*, V.42, pp.9-12, 1964.
2. Rice, R.G. and R.J. Marshall, "Short Penetration Models for Direct and Indirect Contact, Co-Current Heat Transfer", *Can.J.Chem.Eng.*, V.53, pp.453-455, 1975.
3. Yalvac, S. and B. Kiskurek, "Direct Contact Heat Transfer Between Immiscible Liquids in Turbulent Flow", *Two-Phase Flow and Heat Transfer*, V.III, Proc. of Nato ASI, pp.16-27, 1976.
4. Ooms, G. et alii, "A Theoretical Model for Core-Annular Flow of a Very Viscous Oil Core and a Water Annulus Through a Horizontal Pipe", *Int.J.Multiphase Flow*, V.10, pp. 41-60, 1984.
5. Nogueira, E. and R.M. Cotta, "Heat Transfer Solutions in Laminar Cocurrent Flow of Immiscible Liquids", *Warme-und-Stoff.*, submitted.
6. Leib, T.M., M Fink, and D. Hasson, "Heat Transfer in Vertical Annular Laminar Flow of Two Immiscible Liquids", *Int.J.Multiphase Flow*, V.3, pp.533-549, 1977.
7. Cotta, R.M. and M.N. Ozisik, "Thermally Developing Cocurrent-Flow Circular Double-Pipe Heat Exchanger Analysis", *8th Int.Heat Transfer Conf.*, San Francisco V.6, pp. 2805-2810, 1986.

OBTENÇÃO DE PERFIS DE TEMPERATURA POR SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA DO  
TRANSPORTE DE CALOR EM ESCOAMENTO TURBULENTO CISALHANTE  
ANISOTRÓPICO ENTRE PLACAS PARALELAS.



RALF GIELOW

Instituto de Pesquisas Espaciais - 12201 São José dos Campos - SP  
DALE W. KIRMSE e RAY W. FAHIEN  
University of Florida - Gainesville FL 32601

RESUMO

Perfis de temperatura para um escoamento turbulento entre placas paralelas de temperaturas constantes são obtidos através de simulação estocástica Lagrangeana utilizando estatísticas locais experimentais. A comparação dos resultados com dados experimentais é favorável, desta forma apontando uma alternativa para a solução da equação da energia (ou da conservação de espécies em mistura), em especial para geometrias complexas.

INTRODUÇÃO

Turbulência é uma das ocorrências mais comuns em qualquer sistema em escoamento, natural ou artificial. Fenômenos atmosféricos, oceanográficos e fluviais de grande e pequena escala são usualmente turbulentos, tal como muitos sistemas astrofísicos. O mesmo é válido para a maioria das situações industriais e domésticas onde ocorre o escoamento de fluidos ou a sua mistura. Não obstante, dada a complexa natureza estocástica não-linear dos fenômenos turbulentos, seu tratamento ainda é bastante incipiente, mesmo nas situações mais simples. Neste trabalho, apresenta-se um modelo estocástico para simular o comportamento dos elementos de fluido em escoamento turbulento não-homogêneo anisotrópico permanente, aplicando-se-o para a obtenção do perfil de temperatura em um escoamento de Hagen-Poiseuille incompressível entre placas paralelas infinitas.

MODELO

**Movimento.** A trajetória de um elemento de fluido é dada por

$$\underline{X}(t_0+t) = \underline{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+t} \underline{V}(t_1 | t_0, \underline{x}_0) dt_1, \quad (1)$$

e sua velocidade é expressa por

$$\underline{V}(t_0+t) = \underline{V}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+t} \underline{\dot{V}}(t_1 | t_0, \underline{x}_0) dt_1, \quad (2)$$

onde

$$\underline{\dot{V}}(t) = \frac{d}{dt} \underline{V}(t) \quad (3)$$

é a aceleração Lagrangeana e  $t$  o tempo.

Desenvolvendo a velocidade e a posição em séries de Taylor em torno de um instante de tempo arbitrário  $t_k$ , resultam

$$\underline{V}_i(t) = \underline{V}_i(t_k) + (t - t_k) \underline{\dot{V}}_i(t_k) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} X_i(t) = & X_i(t_k) + V_i(t_k) (t - t_k) + \\ & + \frac{1}{2} \dot{V}_i(t_k) (t - t_k)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Em campo turbulento estacionário os elementos de fluido são continuamente submetidos a forças aleatórias, que se manifestam sob a forma das acelerações aleatórias  $\underline{\dot{V}}$ . Os componentes destas forças são supostas atuarem *sem memória* de efeitos anteriores, além de possuírem propriedades estatísticas dependentes de posição. Desta forma, pela escolha aleatória de flutuações de aceleração estacionárias para os tempos entre mudanças nas forças que atuam sobre o elemento do fluido em escoamento anisotrópico não-homogêneo como os cisalhantes, a trajetória deste elemento e dos componentes de sua velocidade podem assim ser computados através da aplicação sucessiva de equações (4) e (5).

Evidências experimentais como as obtidas por Simmons and Salter (1938)[1] e Townsend (1947)[2] mostram que as distribuições probabilísticas marginais das flutuações de velocidade e de aceleração turbulentas são normais para todos os efeitos práticos, como sejam, respectivamente,  $V_i \cap N(\langle V_i \rangle; \sigma_{V_i})$  e  $\dot{V}_i \cap N(\langle \dot{V}_i \rangle; \sigma_{\dot{V}_i})$ , onde  $\langle \dots \rangle$  é o operador valor esperado (média) e  $\sigma^2$  a variância.

Como as forças que causam as flutuações de aceleração atuam sem memória, o tempo entre suas mudanças é exponencialmente distribuído [3], isto é,  $T_i \cap \exp(-\lambda_{t_i} t_i)$ , onde o parâmetro é o tempo médio entre mudanças em cada direção  $i$  [4]. Para o caso isotrópico (unidimensional), partindo do tempo médio entre os zeros de uma função estacionária normalmente distribuída  $V$ , Kirmse (1964) [5] concluiu que  $\lambda_t = K\sigma_V/\sigma_{\dot{V}}$ , com  $K < \pi$ , tendo Gielow (1972) [6] determinado por experimentação numérica ser  $K$  igual a 0,5, deste modo mostrando  $\lambda_t$  igual a  $1/(2\pi)$  do tempo médio entre os zeros da função  $V$ . Este resultado é então estendido para o caso não-homogêneo anisotrópico. (bi- e tridimensional), supondo-se-o válido independentemente em cada direção, como seja,  $\lambda_{t_i} = 0,5 \sigma_{V_i}/\sigma_{\dot{V}_i}$ , onde  $\lambda_{t_i}$  representa o tempo médio entre as mudanças do  $i$ -ésimo componente da aceleração aleatória  $\underline{\dot{V}}$ .

Deste modo, tem-se todos os conceitos para efetuar as integrações nas equações (1) e (2), com a conseqüente obtenção da posição e velocidade do elemento de fluido considerado. Caso este elemento atinja uma das paredes, sua trajetória sofrerá reflexão total. Por sinal, deve-se notar que os valores das propriedades estatísticas do escoamento variam com a posição no espaço. Por este motivo, divide-se o tempo de integração em sub-incrementos  $\tau$ , suficientemente pequenos, ao fim de cada um dos quais se atualizam as propriedades citadas, cujos valores são obtidos de dados experimentais. Ver esquema na Figura 1.

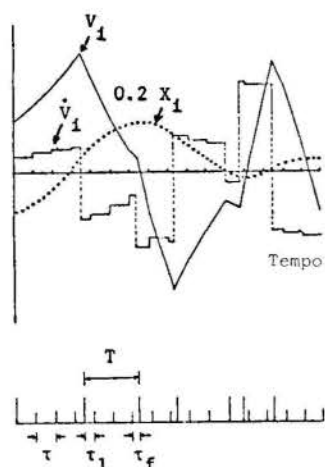


Figura 1. Obtenção da aceleração, velocidade e posição.

Para o escoamento de Hagen-Poiseuille incompressível permanente completamente estabelecido entre placas paralelas infinitas, das Equações (4) e (5) resulta, para cada sub-incremento  $\tau$ , que:

$$V_z(t_k + \tau) = V_z(t_k) + \tau(\langle \dot{V}_z(y) \rangle + \dot{V}'_z(t_k)) \quad (6)$$

$$V_y(t_k + \tau) = V_y(t_k) + \tau(\langle \dot{V}_y(y) \rangle + \dot{V}'_y(t_k)) \quad (7)$$

$$Z(t_k + \tau) = Z(t_k) + \frac{1}{2} (V_z(t_k) + V_z(t_k + \tau))\tau \quad (8)$$

$$Y(t_k + \tau) = Y(t_k) + \frac{1}{2} (V_y(t_k) + V_y(t_k + \tau))\tau \quad (9)$$

em que todas as médias e variâncias necessárias dependem tão somente da posição lateral  $y$  que o elemento de fluido ocupa no instante  $t_k$ .

**Transporte de Calor.** Para simular o transporte de calor com paredes atuando como fontes ou sumidouros deste, segue-se simultaneamente um número suficiente de elementos de fluido que se deslocam independentemente como acima descrito, partindo de posições aleatórias no interior da região de interesse e sendo repostos sem alteração fluidodinâmica na entrada da região caso a deixem. Adiante se descreve a determinação da temperatura de cada elemento de fluido. Outrossim, para obter os perfis de temperatura, a região de interesse é dividida em células, cuja temperatura num dado instante é determinada pela média das temperaturas dos elementos de fluido nelas contidos neste instante, procedendo-se assim sucessivamente até chegar ao regime permanente, no qual a configuração do campo de temperaturas médias locais permanece estatisticamente constante. Assim, para o caso permanente, é suficiente acompanhar apenas um elemento de fluido, como descrito, por um número suficiente de passagens pela região de interesse. Na prática, em tempos igualmente espaçados, determina-se a célula em que se situa o elemento de fluido e se adiciona sua temperatura ao acumulador a ela associado; a temperatura de cada célula, no fim, é obtida dividindo-se o valor de seu acumulador pelo número de determinações nela feitas.

**Temperatura.** No que se refere à temperatura do elemento de fluido, a região de interesse limitada por paredes laterais é dividida em regiões *centrais* e *próximas às paredes* não se podendo nestas últimas cuja espessura é igual ao dobro da subcamada viscosa desprezar o transporte molecular de calor. Se o elemento de fluido inicia seu movimento na região central, fica com a temperatura da entrada; caso contrário, recebe a temperatura determinada pelo perfil de Deissler para a subcamada viscosa [7] na interface desta com a região central. Outrossim, sempre que a trajetória subsequente do elemento de fluido penetrar em subcamada viscosa, adquire a temperatura a ela correspondente.

#### DADOS

A simulação da trajetória do elemento de fluido conforme o modelo descrito requer o conhecimento das propriedades estatísticas Lagrangeanas do escoamento turbulento. Entretanto, os dados experimentais disponíveis são Eulerianos, pois são medidos em pontos fixos e supondo a hipótese ergódica válida, esta última implicando a igualdade dos operadores valor esperado  $\langle \dots \rangle$  e média temporal  $\overline{\dots}$ .

Felizmente, com a exceção das variâncias dos componentes da aceleração, todas as características Lagrangeanas do escoamento são iguais a, ou podem ser obtidas de dados Eulerianos (Gielow, 1972, Apêndice E) [6].

Para determinar a variância da aceleração Lagrangeana local, supõe-se uma dependência linear entre as macroescalas temporais Euleriana e Lagrangeana (Mickelsen, 1966 [8]; Kirmse, 1964[5]), resultando

$$\sigma_{\dot{V}_z} = B \left\{ \frac{\partial u'_z}{\partial z} \right\}^2 \sigma_{u'_z} \quad (10)$$

$$\sigma_{\dot{V}_y} = \sqrt{2} B \left\{ \frac{\partial u'_y}{\partial y} \right\}^2 \sigma_{u'_y} \quad (11)$$

onde  $B$  é um parâmetro e  $u'$  a flutuação Euleriana da velocidade. O valor de  $B$ , para o número de Reynolds igual a 12.300 é 0,7 [6], tendo sido obtido por tentativa e erro de que resultou simulação do espalhamento lateral  $Y'$  idêntico ao esperado matematicamente; por outro lado, para o caso-limite isotrópico, esta simulação reproduz bem dados experimentais de dispersão gasosa medidos por Flint et alii (1960) [9].

Neste trabalho se estuda a simulação do transporte de calor entre placas paralelas com o número de Reynolds igual a 12.300, utilizando-se dados experimentais obtidos por Laufer (1952) [10] e Conte-

Bellot (1965) [11], devidamente adimensionalizados e mostrados na Figura 2.

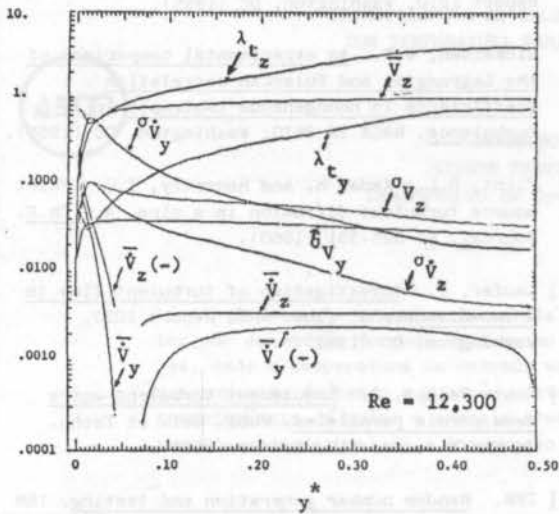


Figura 2. Dados utilizados na Simulação.

**ALGORITMO**

A simulação dos perfis de temperatura em um escoamento turbulento cisalhante anisotrópico permanente entre placas paralelas mantidas a temperaturas constantes, com o fluido entrando isotermicamente na região de interesse, é feita através de algoritmo, elaborado em conformidade com o modelo descrito. Os passos deste algoritmo são os que se seguem, em que os dados necessários são sempre determinados na posição lateral onde o elemento de fluido se encontra (ver Figura 1): a) Escolher aleatoriamente a posição lateral inicial  $y$  e determinar a velocidade média local e todas as suas características estatísticas, assim como a temperatura ( $z^*=0$ ); b) escolher para  $i = y, z$ , fazendo  $t_i = t_0$ , os valores  $V_i(t_0) \in N(\langle V_i \rangle, \sigma_{V_i})$ ; c) para  $i=y, z$  escolher  $\hat{V}_i \in N(\langle \hat{V}_i \rangle, \sigma_{\hat{V}_i})$ , positiva; d) para  $i=y, z$  escolher  $S \in N(\langle S \rangle, \sigma_S)$ ; para cada  $i$ , se  $S > V_i$  fazer  $\hat{V}_i > 0$  ou, se não,  $\hat{V}_i < 0$ ; e) para  $i = y, z$  escolher o tempo  $T \in \text{EXP}(\lambda_{t_i})$  de atuação de  $\hat{V}_i$  e dividir  $T$  em sub-incrementos  $\tau$ ; f) calcular, utilizando as equações (6) a (9) para cada incremento  $\tau$ , os valores de  $V_i, V_y, Y$  e  $Z$ , verificando se há reflexão em parede ou saída da região de interesse (prosseguindo em conformidade com o verificado); atualizar os dados estatísticos para a nova posição lateral, além de verificar se há alteração de temperatura, acumulando a informação a esta referente na célula em que o elemento de fluido então se encontra. Existe provisão para tratar os eventuais sub-incrementos temporais finais  $\tau_f$ , menores que  $\tau$ , e consequentes sub-incrementos  $\tau_1$  mostrados na Figura 1; g) incrementar o tempo de  $T$  e repetir os passos a partir de (c) até alcançar o número desejado de passagens do elemento de fluido pela região de interesse, ocasião em que se obtém a temperatura de cada célula. Estas temperaturas são iguais ao valor por célula acumulado conforme (f) dividido pelo número de

ações nela realizadas, podendo-se suavizar os perfis de temperatura resultantes.

Este algoritmo pode ser caracterizado como um método de Monte Carlo, pois envolve o uso de técnicas de amostragem estatística para a solução de um problema. No caso, para o computador de 32 Bits utilizado, os números aleatórios necessários foram obtidos pela relação recursiva multiplicativa congruencial  $R_{K+1} = 65539R_K \pmod{2^{31}}$  (IBM, 1970) [12], cuja aleatoriedade local foi provada pelos testes usuais como os de Kendall e Babington-Smith (1938) [13]. A Figura 3 mostra algumas trajetórias típicas na região de interesse, tendo-se acompanhado o elemento de fluido em cada uma por 200 unidades adimensionais de tempo; outrossim, as reflexões nas paredes são indicadas por traços verticais onde ocorrem.

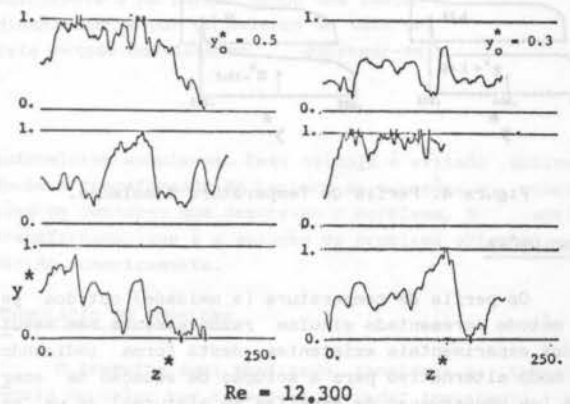


Figura 3. Trajetórias Típicas.

**RESULTADOS**

Perfis de temperatura obtidos pela simulação para um escoamento turbulento cisalhante anisotrópico permanente entre placas paralelas - com número de Reynolds igual a 12.300 e com a temperatura adimensional na parede inferior mantida em -0,5, a superior em 0,5 e a de entrada na região em 0,0 - são mostrados na Figura 4. Referem-se (i) à região de entrada, que se estende axialmente ( $z^*$ ) de 0 a 23,75 distâncias entre as placas, cujos perfis foram obtidos com 590 passagens do elemento de fluido pela região [esquerda] e (ii) a região mais extensa-típica de equipamentos experimentais [14,15] - que se estende até  $z^* = 237,5$ , cujos perfis foram obtidos com 240 passagens pela região. O comportamento dos perfis obtidos é coerente com o fisicamente esperado.

Outrossim, para a posição axial adimensional  $z^* = 237,5$ , o perfil simulado compara-se bem com medidas realizadas por Page et alii (1952) [14], com diferenças da ordem dos erros experimentais. Finalmente, para uma simulação de transporte de massa semelhante, o perfil de umidade para  $z^* = 87,5$  também se compara favoravelmente com dados experimentais obtidos por Towle e Sherwood (1939) [15], sendo as diferenças da ordem dos erros experimentais.



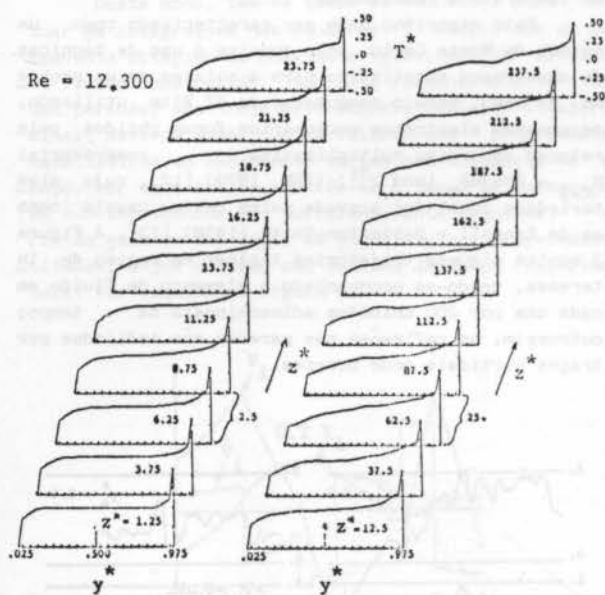


Figura 4. Perfis de Temperatura Simulados.

#### CONCLUSÕES

Os perfis de temperatura (e umidade) obtidos pelo método apresentado simulam razoavelmente bem resultados experimentais existentes, desta forma indicando um modo alternativo para a solução da equação da energia (ou conservação de espécies em misturas) de um escoamento turbulento anisotrópico, principalmente considerando geometrias mais complexas para as quais esta metodologia pode ser estendida sem dificuldades.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Simmons, L.F.G. and Salter, C. An experimental determination of the spectrum of turbulence. *Proceedings of the Royal Society*, A165: 73-89 (1938).
- [2] Townsend, A.A. The measurement of double and triple correlation derivatives in isotropic turbulence. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43 : 560-570 (1947).
- [3] Aczél, J. *On applications and theory of functional equations*. Academic Press, New York (1969).
- [4] Parzen, E. *Modern probability theory and its applications*. Wiley, New York (1960).
- [5] Kirmse, D.W. *A Monte Carlo study of turbulence diffusion*. Doctoral Dissertation, Iowa State University, Ames, IO (1964).
- [6] Gielow, R. *Stochastic modeling of turbulent heat and mass transport in anisotropic shear flow*. Doctoral Dissertation, University of Florida, Gainesville, FL (1972).

- [7] Deissler, R.G. *Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer, and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt Numbers*. NACA Report 1210, Washington, DC (1955).
- [8] Mickelsen, W.R. *An experimental comparison of the Lagrangian and Eulerian correlation coefficients in homogeneous isotropic turbulence*. NACA TN 3570, Washington, DC (1955).
- [9] Flint, D.L.; Kada, H. and Hanratty, T.J. Point source turbulent diffusion in a pipe. *A.I.Ch.E. Journal*, 6: 325-331 (1960).
- [10] Laufer, J. *Investigation of turbulent flow in a two-dimensional flow*. NACA Report 1033, Washington, DC (1951).
- [11] Comte-Bellot, G. *Écoulement turbulent entre deux parois parallèles*. Publ. Sci. et Techn. du Min Air, no. 419, France (1965).
- [12] IBM. *Random number generation and testing*. IBM Ref. Manual GH-20-0205-4, White Plains, NY (1959).
- [13] Kendall, M.G. and Babington-Smith, B. Randomness and Random sampling numbers. *Royal Statistical Society Journal*, 101: 147-166 (1938).
- [14] Page, F. Schlinger, W.G.; Breaux, D.K. and Sage, B.H. Temperature gradients in turbulent gas streams—point values of eddy conductivity and viscosity in uniform flow between parallel plates. *Industrial and Engineering Chemistry*, 44: 424-430 (1952).
- [15] Towle, W.L. and Sherwood, T.K. Eddy diffusion-mass transfer in the central portion of a turbulent air stream. *Industrial and Engineering Chemistry*, 31: 457-462 (1939).

#### ABSTRACT

Temperature profiles for a turbulent flow between parallel plates maintained at constant temperatures are obtained through a Lagrangian stochastic simulation which utilizes local experimental statistical data. The comparison of the results with experimental data is favorable, thus showing an alternative way to solve the energy equation (or the conservation of mass equation), specially for more complex geometries.



TRANSFERÊNCIA DE CALOR TRANSIENTE NO INTERIOR DE DUTOS  
COM TEMPERATURA VARIANDO PERIODICAMENTE NA ENTRADA.

ABCN

ABCN

JERÔNIMO DOS SANTOS TRAVELHO  
WILSON FERNANDO NOGUEIRA DOS SANTOS  
Laboratório de Combustão e Propulsão - LCP/INPE

## RESUMO

O presente trabalho apresenta um método de solução para a transferência de calor por convecção forçada laminar no interior de um canal de placas planas paralelas, onde a temperatura na entrada varia periodicamente e na parede sendo uma função desconhecida do tempo e posição, determinada dinamicamente por um balanço da taxa de transferência de calor e energia armazenada. Este método consiste em empregar-se transformada de Laplace e integração numérica.

## INTRODUÇÃO

O estudo da transferência de calor por convecção forçada, no regime transiente no interior de dutos e com condições na entrada variando periodicamente, tem sido de interesse para controle de trocadores de calor. Para muitas aplicações em engenharia, os transientes iniciais são negligenciados e a solução quase-estacionária e normalmente assumida para fornecer o comportamento térmico do equipamento.

Como uma consequência deste interesse, alguns trabalhos tem surgido na literatura.

Sucec e Sawant [1] analisaram este problema no interior de um canal de placas planas paralelas, onde a temperatura da parede não era determinada a priori, mas determinada por um balanço da taxa de transferência de calor e energia armazenada. O perfil de velocidades empregado foi o parabólico e a solução foi obtida para um regime quase-estacionário.

Novamente, Sucec [2] analisa o mesmo problema considerando o escoamento do tipo "Slug Flow" e a interação entre parede-fluido ocorrendo apenas em uma parede.

O modelo de escoamento do tipo "slug flow" tem sido empregado na solução de um número de problemas transiente conjugado, simplificando então a análise e sendo representativo de situações físicas em engenharia.

Importantes contribuições foram dadas por Sparrow e Farias [3] e Cotta et al [4]. Sparrow and Farias estudaram o problema transiente conjugado no interior de um canal de placas planas paralelas (assumindo do "slug flow") e obtiveram uma solução na forma de série de exponenciais cossenos. Esta solução no entanto necessitava do cálculo de autovalores complexos que dependiam das propriedades do fluido e parede, e da frequência de oscilação da temperatura. Um processo de tentativa e erro foi utilizado para avaliar numericamente as partes real e imaginária dos mesmos. Cotta et al avançaram nesta análise estendendo-a para o escoamento no interior de tubos, e sugeriram o uso do método da contagem (Count Method) para a obtenção dos autovalores complexos.

O presente trabalho apresenta uma maneira alternativa de se resolver a mesma situação física apresentada por [3] e [4], sem a necessidade do cálculo dos

autovalores complexos. Esse cálculo é evitado aplicando-se a transformada de Laplace as equações e condições de contorno que descrevem o problema. A anti-transformada, que é a solução do problema original, é obtida numericamente.

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O trabalho aqui analisado, considera a transferência de calor por convecção forçada, transiente no interior de um canal de placas paralelas separadas de  $2L$  e espessura  $l$ . A temperatura do fluido na entrada varia senoidalmente. A temperatura na parede não é conhecida, mas determinada por um balanço da taxa de transferência de calor e energia armazenada.

A formulação matemática do problema, levando-se em conta que as propriedades de transporte do fluido e parede foram mantidas constantes e que a condução axial em ambos foi negligenciada, é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, z, t) + U \frac{\partial}{\partial x} T(x, z, t) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, z, t) \quad (1)$$

em  $0 < x < L, z > 0, t > 0.$

Com a condição na entrada dada por

$$T(x, 0, t) = T_0 + \Delta T_0 e^{i\omega t} \quad (2a)$$

e as seguintes condições de contorno

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, z, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad (2b)$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial x}(x, z, t) \Big|_{x=l} = \rho_w c_w l \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \quad (2c)$$

Como o objetivo do trabalho é obter a solução periódica, então torna-se desnecessária a condição inicial em  $t=0$ .

Assumindo escoamento do tipo "slug flow",  $U = \text{const}$ , as equações (1) e (2) são modificadas pela introdução dos seguintes parâmetros adimensionais:

$$X = \frac{x}{L} \quad (3a)$$

$$Z = \frac{\alpha z}{UL^2} \quad (3b)$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (3c)$$

$$\theta(X, Z, \tau) = \frac{T(x, z, t) - T_0}{\Delta T_0} \quad (3d)$$

$$\Omega = \frac{\omega L^2}{\alpha} \quad (3e)$$

$$a^* = \frac{\rho C_p L}{\rho_w C_w l} \quad (3f)$$

Portanto as equações (1) e (2) adimensionaliza das transformam-se em:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \quad (4)$$

em  $0 < X < 1, Z > 0, \tau > 0$

$$\theta(X, 0, \tau) = e^{i\Omega\tau} \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} \theta(X, Z, \tau) \Big|_{x=0} = 0 \quad (5b)$$

$$a^* \frac{\partial \theta}{\partial X} \theta(X, Z, \tau) \Big|_{x=1} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \theta(1, Z, \tau) = 0 \quad (5c)$$

Para se obter a solução periódica a partir da equação (4) sujeita as condições impostas em (5), define-se que

$$\theta(X, Z, \tau) = T^+(X, Z) e^{i\Omega(\tau-Z)} \quad (6)$$

Resultando no seguinte problema para  $T^+(X, Z)$ , após ser introduzida nas equações (4) e (5):

$$\frac{\partial T^+}{\partial Z} T^+(X, Z) = \frac{\partial^2 T^+}{\partial X^2} T^+(X, Z) \quad (7)$$

$$T^+(X, 0) = 1 \quad (8a)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial X} T^+(X, Z) \Big|_{x=0} = 0 \quad (8b)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial X} T^+(X, Z) \Big|_{x=1} + ib^* T^+(1, Z) = 0 \quad (8c)$$

O parâmetro adimensional  $b^*$  que aparece na equação (8c) representa os efeitos de capacidade térmica da parede, sendo definido por:

$$b^* = \frac{\Omega}{a^*} = \frac{\omega L c l}{K} \quad (9)$$

#### MÉTODO DE SOLUÇÃO

A transformada de Laplace com respeito a  $Z$  foi empregada para resolver as equações (7) e (8), transformando-as em (10) e (11) com  $\tilde{T}$  definido como:

$$\tilde{T} = \int_{z \rightarrow s} T^+(X, Z) = \int_0^\infty T^+(X, Z) e^{-sZ} dZ$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial X^2} \tilde{T}(X, s) = s\tilde{T}(X, s) - 1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial X} \tilde{T}(X, s) \Big|_{x=0} = 0 \quad (11a)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial X} \tilde{T}(X, s) \Big|_{x=1} + ib^* \tilde{T}(1, s) = 0 \quad (11b)$$

onde  $s$  é o parâmetro da transformada de Laplace. A solução da equação (10) é dada a seguir,

$$\tilde{T}(X, s) = c_1 e^{\sqrt{s}X} + c_2 e^{-\sqrt{s}X} + \frac{1}{s} \quad (12)$$

Aplicando as condições de contorno impostas em (11), determina-se  $c_1$  e  $c_2$ , e a solução da equação (12) é dada por:

$$\tilde{T}(X, s) = \frac{1}{s} - \frac{ib^*}{s} \cdot \frac{1}{\left[ \sqrt{s}(e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}) + ib^*(e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}) \right]} (e^{\sqrt{s}X} + e^{-\sqrt{s}X}) \quad (13)$$

Rearranjando a equação (13), tem-se:

$$T(X, s) = \frac{1}{s} - \frac{ib^*}{s} \cdot \frac{e^{-\sqrt{s}X} (e^{\sqrt{s}X} + e^{-\sqrt{s}X})}{\sqrt{s} + ib^*} \cdot \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\sqrt{s} - ib^*}{\sqrt{s} + ib^*} \right) e^{-2\sqrt{s}}} \right] \quad (14)$$

Observando-se o termo entre parenteses, verifica-se que o mesmo pode ser aproximado por uma série da seguinte forma:

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \dots \quad (15)$$

onde a condição  $|w| < 1$  deve ser satisfeita para que a convergência seja alcançada.

Introduzindo esta mudança na equação (14), tem-se

$$\tilde{T}(X, s) = \frac{1}{s} - \frac{ib^*}{s} \cdot \frac{e^{-\sqrt{s}(e^{\sqrt{s}X} + e^{-\sqrt{s}X})}}{(\sqrt{s} + ib^*)} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt{s} - ib^*}{\sqrt{s} + ib^*} \right) e^{-2\sqrt{s}} + \left( \frac{\sqrt{s} - ib^*}{\sqrt{s} + ib^*} \right)^2 e^{-4\sqrt{s}} + \dots \right] \quad (16)$$

A anti-transformada da equação (16) que é a solução periódica do problema proposto, é obtida numericamente por

$$T^+(X, Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sZ} \tilde{T}(X, s) ds \quad (17)$$

onde  $c$  é escolhido de maneira que todos os pontos singulares da expansão de  $\tilde{T}(X, s)$  em série, fiquem a esquerda da linha  $\text{Re}\{s\} = c$  no plano complexo  $s$ . Os pontos singulares são  $s=0$  e  $s=-b^*$ .

A interação foi feita numericamente utilizando-se a regra de Simpson.

A anti-transformada de Laplace foi obtida numericamente para os casos de  $b^*$  iguais a 5, 10 e 20. Em todos os casos foi assumido  $a^* = 0,001$ . Os valores de  $Z$  utilizados foram 0,1, 0,2, 0,5 e 1,0.

Esses valores foram escolhidos de modo a possibilitar a comparação dos resultados de Cotta et al com os do presente trabalho. A Figura 1 mostra tal comparação para a amplitude  $A$  da flutuação da temperatura na parede e a defasagem  $\phi$  com relação à oscilação na entrada do duto. Essas grandezas são obtidas por:

$$A = |T^+| = \sqrt{T_r^{+2} + T_i^{+2}} \quad (18)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{T_r^+}{T_i^+} \right) - \Omega Z \quad (19)$$

onde  $T_r^+$  e  $T_i^+$  são as partes real e imaginária de  $T^+$ .

Como ficou evidente pelo descrito anteriormente, o método apresentado é de simples aplicação e evita a necessidade do cálculo de autovalores. Isto é possível porque aplica-se as condições de contorno (Equação (11)) antes de se fazer a anti-transformada. Quando isso não é feito encontra-se a solução geral da equação como descrito por [3] e [4].

- [1] Sucec, J. and Sawant, A.M., Unsteady Conjugated, forced convection Heat Transfer in a Parallel Plate Duct. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 27(1): 95-100 (1984).
- [2] Sucec, J., Transient Heat Transfer Between a Plate and a Fluid Whose Temperature Varies Periodically with Time. *Journal of Heat Transfer*, 102: 126-131 (1980).
- [3] Sparrow, E.M. and de Farias, F.N., Unsteady Heat Transfer in Ducts With Time-Varying Inlet Temperature and Participating Walls. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 11: 837-853 (1968).
- [4] Cotta, R.M. Mikhailov, M.D. and Ozisik, M. N., Transient Conjugated forced Convection in Ducts with Periodically Varying Inlet Temperature. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30(10): 2073-2082 (1987)

ABSTRACT

This work presents a method for the solution of the heat transfer with laminar forced convection inside a parallel plate channel. The temperature in the inlet varies periodically and the wall temperature is an unknown function of time and position. The latter is obtained through the study of the transient heat transfer between fluid and the wall. Laplace transforms are used in this study together with numerical integration.

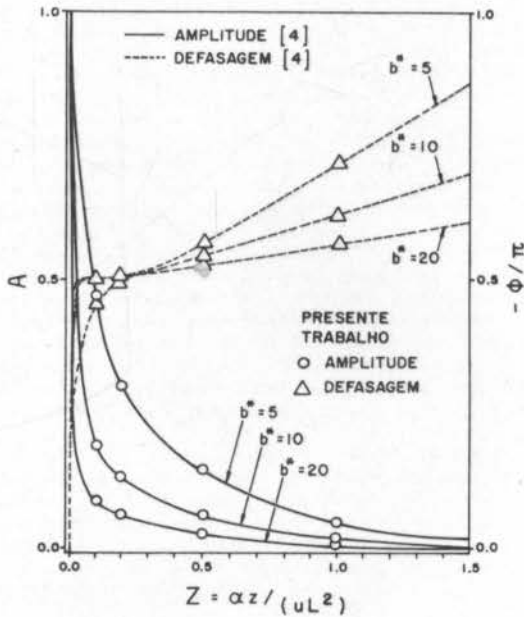


Figura 1. Amplitude e defasagem da temperatura na parede em função da distância axial.

### NATURAL CONVECTION IN A CAVITY: A COMPARISON OF SEVERAL NUMERICAL METHODS

D. BARKER, Y. YAGLACI, T. DE VITO, JAMES and S. CHINN  
School of Mechanical and Industrial Engineering, University of  
New South Wales, Sydney, Australia  
\*Departamento de Mecânica e Engenharia Térmica, UFPA, Belém, Brasil

#### ABSTRACT

The problem of natural convection of air in a two-dimensional square cavity is used as a vehicle to compare the accuracy and cost of techniques proposed by two different finite difference computer codes. Velocity profiles and stream function contour plots are compared. Results have been obtained on Rayleigh numbers of  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$  and  $10^7$  using different meshes. It has been found that the most accurate solutions are obtained by a fourth order method and a lower order method involving coarse considerably reduces the truncation error.

#### INTRODUCTION

Because of its many engineering applications, natural convection in enclosures has been the topic of much research, particularly in the last few decades. Comprehensive surveys by Gebhart [1] and Grubb [2] give an account of much of what is now known of the convection of air in a rectangular cavity. The problem has been the subject of both theoretical and experimental investigation. Several papers have been published which use numerical methods to solve the problem. An extensive bibliography which has been assembled by the authors is available [3]. In order to give a better understanding of the governing equations, a large number of numerical studies of the problem has been reported. In addition to this, a significant number of papers have been published which deal with the problem of natural convection in a rectangular cavity. In this paper, the results of the numerical studies are compared with the results of the experimental studies. A comparison of the results of the numerical studies and the experimental results is presented in Section 4.

In the work presented here, two different computer codes are used to obtain solutions to the problem of natural convection of air in a two-dimensional square cavity. A comparison of the results of the two codes is presented in Section 4.

#### THE NUMERICAL SOLUTION

Consider a rectangular enclosure which has one of its diagonals much longer than the other. The problem is a two-dimensional flow over a heated wall. The present problem is a two-dimensional natural convection in a square cavity with differentially heated horizontal side walls and adiabatic horizontal boundaries. The velocity field is assumed to be steady and the temperature distribution is assumed to be steady. The governing equations are given by

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4)$$

The velocity components  $u$  and  $v$  are assumed to be zero at the walls. The stream function  $\psi$  is assumed to be zero at the walls. The temperature  $\theta$  is assumed to be zero at the walls. The governing equations are solved by the finite difference method.

The problem of natural convection in a square cavity is used as a vehicle to compare the accuracy and cost of techniques proposed by two different finite difference computer codes.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (5)$$

The governing equations are solved by the finite difference method. The results are compared with the results of the experimental studies.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (6)$$

Equations (1) and (2) describe the flow in the enclosure of temperature and velocity. These are the differential equations which are to be solved to obtain the velocity field.

(3) is a stream function  $\psi$  and is determined such that

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

From (1), an equation involving  $\psi$  and  $\theta$  is obtained

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \theta \quad (8)$$

This equation along with Eqs. (1) and (2) can be solved to determine  $u$ ,  $v$  and  $\theta$ . The velocity components  $u$  and  $v$  are then calculated from (7). The boundary conditions on  $\psi$  are derived from those on the velocity (boundary), the adiabatic condition and the zero velocity condition. The boundary conditions of the stream function and a zero stream function on the solid walls. This second condition is the

for the velocity boundary condition.

## MÉTODOS NUMÉRICOS: DIFERENÇAS FINITAS

NATURAL CONVECTION IN A CAVITY:  
A COMPARISON OF DIFFERENT NUMERICAL METHODS

M. BEHNIA\*, F. STELLA\*\*, G. DE VAHL DAVIS\* and G. GUJ\*\*  
\* School of Mechanical and Industrial Engineering, University of  
New South Wales, Sydney, Australia  
\*\* Dipartimento di Meccanica e Aeronautica, Univ. di Roma, Italia

ABSTRACT

The problem of natural convection of air in a two-dimensional square cavity is used as a vehicle to compare the accuracy and cost of solutions produced by four different finite difference computer codes. Velocity-vorticity and stream function-vorticity formulations are compared. Results have been obtained at Rayleigh numbers of  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  and  $10^6$  using different meshes. It has been found that the most accurate solutions are obtained by a fourth order method and a novel super stable marching scheme considerably reduces the computational cost.

INTRODUCTION

Because of its many engineering applications, natural convection in enclosures has been the topic of much research, particularly in the last two decades. Comprehensive reviews by Catton [1] and Ostrach [2] give an account of nearly a half century of work. The importance of flow structure and heat transfer processes in double pane windows, solar collectors, double wall insulation, nuclear reactor insulation, ovens and rooms has been the stimulus for much research in the area. Buoyancy-driven natural convection in differentially heated upright cavities with adiabatic ends has become the classical research problem which has been extensively studied experimentally, analytically, and numerically in order to gain a better understanding of the governing processes. A large number of numerical studies of the problem has been reported. Reference is made to a comparison exercise carried out by de Vahl Davis and Jones [3] to which some 37 contributions from different researchers were submitted. In that comparison exercise the solutions were compared to a very accurate numerical solution of the problem produced by de Vahl Davis [4] which was used as the bench mark. However, no comparison was made of the cost (i.e. computer time and memory requirements) of different methods used to produce a solution.

In the work presented here, four different computer codes are used to obtain solutions to the problem of natural convection of air in a two-dimensional square cavity. A comparison of the cost as well as the accuracy is made.

THE GOVERNING EQUATIONS

Consider a rectangular enclosure which has one of its dimensions much longer than the other two, so that a two-dimensional flow can be assumed to exist. The standard problem is the two-dimensional natural convection in an upright square cavity with differentially heated isothermal side walls and adiabatic horizontal boundaries. The confined fluid (e.g. air) is Newtonian and such that the Boussinesq approximation is valid. The governing equations to be solved are

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u - g\beta(T-T_0) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \nabla^2 T \quad (4)$$

where  $u$  and  $v$  are the velocity components in the  $x$  (vertical) and  $y$  (horizontal) directions,  $T$  and  $p$  denote temperature and pressure,  $\rho_0$  is the reference density at  $T_0$ , and  $\beta$ ,  $\nu$  and  $\kappa$  are the volumetric expansion coefficient, kinematic viscosity and thermal diffusivity of the fluid.

The equations of motion and the continuity equation can be combined by defining the vorticity  $\xi$  given by

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

The resulting equation, which is referred to as the vorticity transport equation, is

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = \nu \nabla^2 \xi + g\beta \frac{\partial T}{\partial y} \quad (6)$$

Equations (4) and (6) constitute the set for the determination of temperature and vorticity. There are two different formulations which can be used to obtain the velocity field.

(i) A stream function  $\psi$  can be introduced such that

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

From (5), an equation connecting  $\psi$  and  $\xi$  is obtained

$$\nabla^2 \psi + \xi = 0 \quad (8)$$

This equation along with Eqs. (4) and (6) can be solved to determine  $T$ ,  $\xi$  and  $\psi$ . The velocity components  $u$  and  $v$  are then calculated from (7). The boundary conditions on  $\psi$  are derived from those on the velocity components; the no through-flow and no slip conditions result in a constant value of the stream function and a zero normal gradient on the solid walls. This second condition is the one that can be used to construct a boundary condition for the vorticity transport equation.



(ii) The velocity field can also be determined directly from the definition of the vorticity. By considering the appropriate derivatives of the vorticity definition (5) and using the continuity equation (1) the following can be derived

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (10)$$

In this formulation, Eqs. (4), (6), (9) and (10) can be solved to determine  $T$ ,  $\xi$ ,  $u$  and  $v$ . In this approach, the boundary conditions for (9) and (10) are simply zero velocities on the boundaries. The temperature boundary conditions for the problem are

$$T = T_1 \text{ at } y = 0 \quad \text{and} \quad T = T_2 \text{ at } y = Y;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ at } x = 0 \quad \text{and} \quad x = X$$

where  $X$  and  $Y$  are the dimensions of the cavity.

The equations are non-dimensionalized by choosing the appropriate scales for length, time, velocity and temperature. The length and time scales are  $Y$  and  $Y^2/\nu$ , respectively. The velocity scale was chosen to be  $\kappa/Y$  and the non-dimensional temperature was taken as  $\theta = (T-T_1)/(T_2-T_1)$ . Two dimensionless parameters, Prandtl number [ $Pr = \nu/\kappa$ ] and Rayleigh number [ $Ra = g\beta(T_2-T_1)Y^3/\kappa\nu$ ] are then emerged. For the case of natural convection of air considered here,  $Pr = 0.71$ .

#### METHOD OF SOLUTION

For most problems of engineering interest, the steady state solution of the equations is sought. It has been found [5] that the computer time for a numerical solution of the transient equations can be substantially reduced if each equation is marched in time to steady state with different time steps. The governing differential equations are approximated by finite differences. Forward differences are used for the time derivatives. Four different methods of solution have been developed and their features will be briefly discussed here. All marching in time is done by the false transient technique.

Second Order Velocity-Vorticity. The velocity-vorticity formulation with second order central differences for the space derivatives is adopted. The vorticity transport and the energy equation are solved by a classical scalar Alternating Direction Implicit (ADI) scheme. A line Gauss-Siedel relaxation is used for solving the Poisson equations (9) and (10) for the velocity components. The computational mesh is staggered such that the vorticity is located at the corner of the computational cell and the velocity components are located at the cell midsides. It is noted that the staggering of the mesh is a requirement for the mass conservation. Further, the centre of the cell is chosen as the location of the temperature so that the non-linear terms of the energy equation are conservative which will ensure a uniform heat flux (i.e. Nusselt number) through any vertical plane. The staggering of the variables involves a greater complexity in developing the finite difference approximations. Also interpolation operations are required to compute the unknown variables at the desired locations which makes it computationally more expensive in comparison to non-staggered grids. Further details of this solution method are given by Guj and Stella [6].

Stream Function-Vorticity. In the stream function-vorticity formulation a false transient

time derivative term is added to the right hand side of the Eq. (8) which turns it into a parabolic equation. We have developed three computer programs using this formulation. In all of these codes forward time differences are used. The vorticity transport, stream function and energy equations are solved by the Samarskii-Andreyev [7] ADI method. Some features of each code are as follows.

Second order method: The space derivatives are approximated by second order central differences. The false transient ADI solution procedure is simple and effective. In fact, this code was used in conjunction with Richardson's extrapolation by de Vahl Davis [4] to produce the bench mark solution.

Fourth order method: the space derivatives are approximated by fourth order finite differencing. In doing so, the tridiagonal nature of the finite difference approximations are lost which slows down the ADI solution procedure. In order to overcome this problem and take advantage of the efficient tridiagonal solvers, the fourth order terms are placed on the right hand side and regarded as source terms such that the tridiagonal nature of the left hand side is preserved. Then the same efficient ADI solution procedure used for the second order method can be used with the advantage of the fourth order terms acting as a correction (deferred correction) with an overall higher degree of accuracy.

Second order super stable method: In this method second order central differences in space are used. The only difference between this method and the previous second order method is the more stable time marching technique. Since the vorticity transport equation is the least stable one, this method is only applied to this equation. Consider the vorticity transport equation which is a partial differential equation of the form

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = L\xi + S \quad (11)$$

where  $L$  is the elliptic linear differential operator and  $S$  is the source term. The usual (Crank-Nicolson) two point finite-difference expression of this equation is based on the times,  $t = n\Delta t$ , and  $t = (n+1)\Delta t$  such that

$$\frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (L\xi^{n+1} + L\xi^n) + S^n \quad (12)$$

This is the most stable two point second order scheme (Crank-Nicolson). Behnia et al. [8] have shown that a more stable scheme can be developed by adding a third level in time ( $n-1$ ), yielding

$$\frac{\Omega}{\Delta t} (\xi^{n+1} - \xi^n) + \frac{(1-\Omega)}{\Delta t} (\xi^n - \xi^{n-1}) = (\Omega - \frac{1}{2}) L\xi^{n+1} + (\frac{3}{2} - \Omega) L\xi^n + S^n/\Omega \quad (13)$$

where  $\Omega$  is a parameter to be chosen for increased stability. It depends on the time step and other problem parameters. A compromised value of 1.309 for all time steps is proposed by Behnia et al. [8]. From a series of numerical experiments optimum values of  $\Omega$  have emerged for different problems. It should be noted that in this scheme an additional array is stored compared to the standard scheme.

#### RESULTS

Solutions of the problem of natural convection of air ( $Pr = 0.71$ ) in a square cavity using the four computer codes outlined above have been obtained. Three different uniform computational grids of  $21 \times 21$ ,

41x41 and 81x81 have been used. The Rayleigh numbers considered were  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  and  $10^6$ . The steady state solution was assumed to be reached when the average rate of change of each variable reduced to  $10^{-5}$  (i.e. convergence criteria). In order to determine the CPU time required to produce each solution, an identical CPU timing routine was incorporated in all programs. For a meaningful comparison of computational requirements all computations were carried out on the same computer (IBM 4381). Double precision was used in all cases. The accuracy of each method was determined by comparing selected features of each solution with those of the very accurate bench mark solution [4].

Initially, several numerical experiments were carried out to determine the optimum time step of each equation for fast convergence. The CPU time (seconds) for each iteration divided by the total number of mesh points for the four codes is given in Table 1. It is evident that the second order stream function-vorticity methods consume the least amount of CPU seconds per iteration. The second order velocity vorticity uses 26% more due to the additional Poisson equation for the velocity. The fourth order deferred correction's time used is the highest and the additional operations on the right hand side cost 34% more in computer time.

Table 1. CPU seconds per iteration per mesh point

Second order $\psi\xi$	$1.75 \times 10^{-4}$
Second order $V\xi$	$2.20 \times 10^{-4}$
Fourth order $\psi\xi$	$2.35 \times 10^{-4}$
Super stable second order $\psi\xi$	$1.75 \times 10^{-4}$

The number of iterations and the total CPU seconds for obtaining a solution at different Rayleigh numbers are presented in Table 2. In all cases except two, it takes a larger number of iterations for the fourth order method to converge. In fact, the fourth order solution time is consistently higher than the others. The super stable scheme is remarkably faster than all the others. It is noted that at  $Ra = 10^6$  this scheme converges starting from "rest" ( $u=v=0$ ) whilst the others require a previous solution at a lower Rayleigh number as the initial condition. The velocity-vorticity method, in some cases, takes twice as long as the second order stream function-vorticity.

In order to determine the accuracy, a comparison is made between some characteristic features of the solution and the bench mark values. To this end, the maximum vertical velocity on the horizontal mid-plane ( $u_{max}$ ), the average Nusselt number ( $Nu_{mid}$ ) and the maximum horizontal velocity on the vertical

centreline ( $v_{max}$ ) are chosen. The results are given in Table 3. It is noted that since both second order stream function-vorticity schemes converge to the same steady state solution, only one is given here. Further, the maximum values given in Table 3 are the mesh point values (except the bench mark ones) and not the true interpolated maximums.

In almost every case, the fourth order solution is generally better than the second order solution, provided that the mesh is not coarse for the five point fourth order approximations to handle the wall boundary layers. The second order velocity-vorticity formulation yields more accurate velocity components than the stream function-vorticity. This is believed to be due to the staggered mesh. However, the accuracy of this method in the calculation of  $\psi_{max}$  and  $Nu_{mid}$  diminishes such that in all instances the error is higher than the second order stream function-vorticity scheme. Although this might be surprising despite the more accurate velocities, it can be attributed to the errors introduced in the integration for calculation of the stream function and Nusselt number.

The trade off between computational cost and accuracy can be demonstrated by plotting the error versus the CPU time. Suppose that the error criterion is the sum of the absolute values of the velocity errors. For  $Ra = 10^5$ , this error is plotted against the CPU seconds for all four methods in Figure 1. The performance of the three second order schemes shows the same trend with the velocity-vorticity indicating a higher degree of accuracy at a given computer cost. The trend of the fourth order scheme is somewhat different with a slope much greater than all the second order ones. If a high degree of accuracy is not required, a second order method is more efficient than the fourth order. However, for highly accurate solutions, the fourth order outperforms all the others. A similar plot can be constructed for the error in Nusselt number (Figure 2) at  $Ra = 10^5$ . The rate of heat transfer is not very sensitive to the accuracy of flow field. It is evident that second order super stable scheme predicts more accurate Nusselt numbers at a given computational cost.

#### CONCLUSION

The comparison of four methods for the solution of the problem of natural convection in a cavity has indicated that higher order methods can only be justified if a very high degree of accuracy is required. The marching in time to the steady state is very critical in saving computer time as demonstrated by the super stable scheme. The second order velocity vorticity method compared to stream function-vorticity gives more accurate solutions for a given mesh size. Super stable scheme must be incorporated in marching for reduced computer cost.

Table 2. Number of iterations for different schemes. The figures in ( ) are CPU seconds.  
\* Starting from the previous solution. \*\* Starting from the second order solution.

Mesh	Ra	Number of Iterations for Convergence (CPU seconds)							
		2nd order $\psi\xi$		2nd order $V\xi$		4th order $\psi\xi$		super stable $\psi\xi$	
21x21	$10^3$	321	(22.5)	376	(33.5)	521	(59.3)	62	(4.4)
21x21	$10^4$	172	(12.0)	376	(33.5)	359	(40.7)	64	(4.6)
21x21	$10^5$	289	(20.0)	651	(58.2)	527	(59.8)	125	(8.9)
41x41	$10^3$	1258	(345)	1326	(454)	2042	(927)	246	(67.5)
41x41	$10^4$	667	(181)	1200	(408)	1405	(637)	180	(48.9)
41x41	$10^5$	1057	(287)	2000	(680)	2272	(1029)	175	(47.5)
41x41	$10^6$	1323*	(359)	2300*	(782)	5720**	(2582)	228	(61.9)
81x81	$10^5$	4248	(4830)	7075	(9964)	9093	(13867)	1145	(1310)
81x81	$10^6$	5197	(5909)	8450*	(11900)	24550**	(45350)	1539	(1754)

Table 3. Some features of the solutions. The values in ( ) are percent errors from the bench mark values

		$\Delta x^{-1}$	2nd order $\psi\xi$	2nd order $V\xi$	4th order $\psi\xi$	Bench mark	
$Ra = 10^3$	$u_{max}$	20	3.594 (-2.8)	3.729 (0.9)	3.663 (-0.9)	3.697	
		40	3.675 (-0.6)	3.699 (0.05)	3.679 (0)		
	$v_{max}$	20	3.569 (-2.2)	3.672 (0.6)	3.637 (0.3)		3.649
		40	3.619 (-0.8)	3.657 (0.2)	3.640 (0.2)		
	$\psi_{max}$	20	1.170 (-0.3)	1.197 (2.0)	1.174 (0)		1.174
		40	1.173 (-0.09)	1.180 (0.5)	1.175 (0.09)		
$Nu_{mid}$	20	1.115 (-0.3)	1.123 (0.5)	1.117 (-0.09)	1.118		
	40	1.117 (-0.09)	1.119 (0.09)	1.118 (0)			
$Ra = 10^4$	$u_{max}$	20	18.47 (-5.9)	19.64 (0.1)	19.33 (-1.5)	19.617	
		40	19.42 (-1.0)	19.64 (0.1)	19.61 (-0.04)		
	$v_{max}$	20	15.78 (-2.5)	16.18 (0.01)	16.07 (-0.7)		16.178
		40	16.09 (-0.5)	16.14 (-0.2)	16.20 (0.1)		
	$\psi_{max}$	20	5.088 (0.3)	5.132 (1.2)	5.093 (0.4)		5.071
		40	5.070 (-0.02)	5.088 (0.3)	5.079 (0.2)		
$Nu_{mid}$	20	2.213 (-1.3)	2.304 (2.7)	2.241 (-0.09)	2.243		
	40	2.235 (-0.4)	2.260 (0.8)	2.245 (0.09)			
$Ra = 10^5$	$u_{max}$	20	57.68 (-15.9)	66.77 (-2.7)	61.69 (-10.1)	68.59	
		40	66.28 (-3.4)	69.03 (0.6)	67.94 (-1.0)		
		80	67.95 (-0.9)	68.71 (0.2)	68.54 (-0.07)		
	$v_{max}$	20	34.97 (0.7)	34.70 (-0.08)	33.87 (-2.5)	34.73	
		40	34.51 (-0.6)	34.83 (0.3)	34.83 (0.3)		
		80	34.62 (-0.3)	34.78 (0.2)	34.75 (0.06)		
$\psi_{max}$	20	10.00 (4.0)	9.907 (3.1)	9.376 (-2.5)	9.612		
	40	9.657 (0.5)	9.704 (1.0)	9.634 (0.2)			
$Nu_{mid}$	20	4.507 (-0.3)	4.912 (8.7)	4.419 (-2.2)	4.519		
	40	4.508 (-0.2)	4.623 (2.3)	4.520 (0.02)			
$Ra = 10^6$	$u_{max}$	40	200.3 (-8.7)	223.7 (2.0)	204.0 (-7.0)	219.36	
		80	216.1 (-1.5)	218.5 (-0.4)	220.9 (0.7)		
	$v_{max}$	40	65.65 (1.6)	65.92 (2.0)	63.76 (-1.4)	64.63	
		80	64.70 (0.1)	65.18 (0.9)	64.97 (0.5)		
	$\psi_{max}$	40	17.46 (4.2)	17.39 (3.8)	16.43 (-1.9)	16.750	
		80	16.91 (1.0)	16.97 (1.3)	16.83 (0.5)		
$Nu_{mid}$	40	8.951 (1.7)	9.426 (7.1)	8.695 (-1.2)	8.799		
	80	8.840 (0.5)	8.892 (1.1)	8.824 (0.3)			

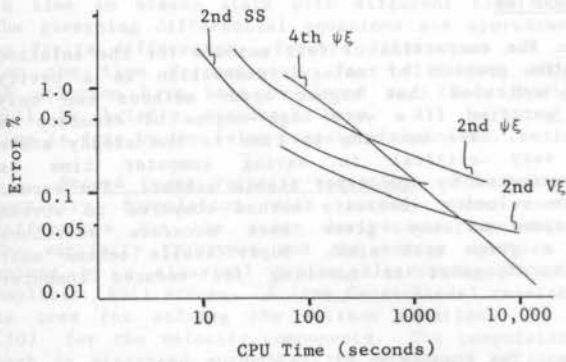


Figure 1. Velocity error versus CPU time.

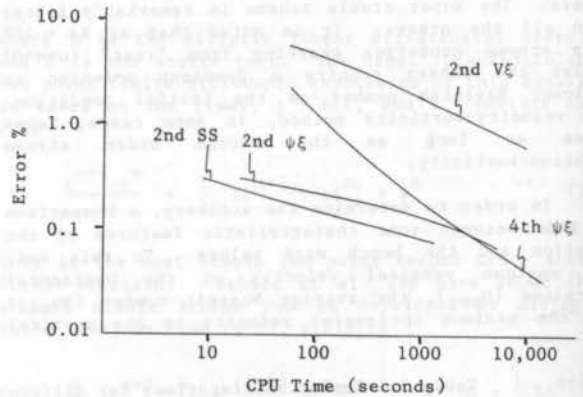


Figure 2. Nusselt number error versus CPU time.

ACKNOWLEDGEMENT

The computer resources were provided by a joint IBM/UNSW project on an IBM 4381 for which the authors are grateful.

REFERENCES

[1] Catton, I., *Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf.*, Toronto, vol. 6, pp. 13-43 (1979).  
 [2] Ostrach, S., *Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Co., vol. 1, pp. 365-379 (1982).  
 [3] de Vahl Davis, G. and Jones, I.P., *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 3, pp. 227-248 (1983).

[4] de Vahl Davis, G., *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 3, pp. 249-264 (1983).  
 [5] Mallinson, G.D. and de Vahl Davis, G., *J. Comp. Phys.*, vol. 12, pp. 435-461 (1973).  
 [6] Guj, G. and Stella, F., *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 8, pp. 405-416 (1988).  
 [7] Samarskii, A.A. and Andreyev, V.B., *USSR Comp. Maths. & Math. Phys.*, vol. 3, no. 6, pp. 1373-1382 (1963).  
 [8] Behnia, M., Wolfshtein, M. and de Vahl Davis, G., A stable fast marching scheme. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, accepted for publication.



A NOTE ON NUMERICAL DIFFUSION IN TWO-DIMENSIONAL  
CONVECTION-DIFFUSION PROBLEMSCarlos Magno Fernandes  
Departamento de Física, UFV  
Viçosa, MGMarcelo J.S. de Lemos  
Departamento de Energia, ITA/CTA  
São José dos Campos, São Paulo 12225

ABCm

ABCm

Abstract

This paper shows a numerical investigation on the False-Diffusion problem appearing in two-dimensional convection-diffusion situations. The flow here considered is a stepwise scalar profile convected by a uniform velocity field at a constant angle with the coordinate axes. Profiles smearing along the flow was calculated with the CENTRAL, UPWIND, SKEW UPWIND and EXPONENTIAL differencing schemes. Best overall results were obtained with the Skew Upwind formulation showing consistency with recent works in the literature.

INTRODUCTION

It is well established in the literature that pure-upwind differencing of equations governing fluid flow phenomena leads to the so-called False-Diffusion problem [1]. The extrapolation of one-dimensional models to multi-dimensional flows is commonly accepted as the main cause of numerical diffusion [2]. When flow is aligned parallel to one of the coordinate grid lines, the magnitude of numerical diffusion is generally small and can be usually neglected. For complex multidimensional recirculating flows, however, the magnitude of numerical diffusion increases with an increase in the angle between flow direction and coordinate grid lines. Estimates of false-diffusion effects become then of mandatory nature in order to fully assess overall calculation errors.

Several investigations have been reported in the literature with the aim of reducing False-Diffusion. Among the most common methods available one can mention: cubic spline scheme [3], skew upwind difference scheme [4], quadratic upwind difference scheme [5], third-order-accurate difference scheme [6], Hermitian Scheme [7], and more recently the upstream scheme [8]. Among those, the Skew Upwind technique of Raithby [4] has been successfully applied to many flow cases.

The majority of the methods above was developed guided by the desired characteristics of economy in computing complex real flow problems and ease of implementation in existing fluid dynamic codes. Other procedures may as well prevent false-diffusion but may suffer from the disadvantage of being either computationally more expensive or requiring too much modification in already-established elliptic solvers. Falling into this category one can mention the Flux Correct Transport theory [9,10] and the Asymmetric Weighted Residual method [11].

Many other methods have been proposed, and a recently-published survey on the performance of eleven differencing schemes [12] just confirms the amount of work spent in this area. Usually, those works account for a single cell Peclet number  $Pe$  ( $Pe$ =Convection Strength/Diffusion Strength), or at most, refer to a narrow range of  $Pe$ .

Considering the importance of false-diffusion studies for reliable recirculating flows calculations, this paper shows an evaluation of four commonly-used differencing schemes, namely the UPWIND, CENTRAL, EXPONENTIAL and SKEW-UPWIND techniques for predicting a stepwise scalar profile convected by a slanted uniform velocity field. Cell Peclet numbers equal to 50 and 500 were considered. Angles of attack studied were from  $0^\circ$  to  $45^\circ$ . The findings herein are expected to contribute

to the current development of a two-dimensional code for analyzing twin-parallel jets.

DIFFERENCING TECHNIQUES

The energy equation for a steady-state source-free convection-diffusion problem reads

$$\frac{\delta}{\delta x_j} \left[ \rho u_j \phi - \Gamma \frac{\delta \phi}{\delta x_j} \right] = 0 \quad (1)$$

where  $\rho$  stands for the fluid density,  $u_j$  is the velocity component in the  $x_j$ -direction,  $\Gamma$  is the coefficient of diffusion and  $\phi$  is the temperature.

Writing equation (1) for planar twodimensional flows using the nondimensional parameters

$$u^* = u/V, \quad v^* = v/V, \quad \phi^* = (\phi - \phi_0)/\Delta\phi, \quad x^* = x/\Delta,$$

$$y^* = y/\Delta \quad \text{and} \quad Pe = \rho V \Delta / \Gamma$$

where  $u, v$  are the components of a characteristic velocity vector of length  $V$ ,  $\phi_0$  the minimum  $\phi$ ,  $\Delta\phi$  the maximum variation of  $\phi$  in the domain,  $\Delta$  a characteristic cell dimension, and  $Pe$  the cell Peclet number, the equation becomes

$$\frac{\delta}{\delta x^*} (u^* \phi^*) + \frac{\delta}{\delta y^*} (v^* \phi^*) = \frac{\delta}{\delta x^*} \left[ \frac{1}{Pe} \frac{\delta \phi^*}{\delta x^*} \right] + \frac{\delta}{\delta y^*} \left[ \frac{1}{Pe} \frac{\delta \phi^*}{\delta y^*} \right] \quad (2)$$

Integrating (2) around point P in Figure 1 using the widely-used control-volume approach of Patankar [13] gives

$$a_P \phi_P^* = a_E \phi_E^* + a_W \phi_W^* + a_N \phi_N^* + a_S \phi_S^* + b \quad (3)$$

In (3), the  $a$ 's are coefficients representing convection-diffusion influences of neighbor points E, W, N and S in the Figure. Different finite-differencing schemes will originate distinct sets of coefficients. Three of the methods here considered are the Upwind Difference Scheme (UDS), the Central Difference Scheme (CDS), the Exponential Difference Scheme (EDS). Details of these schemes can be found elsewhere [13] and for that coefficients are here just presented. The fourth method is the widely-used Skew Upwind Difference Scheme (SUD) of Raithby [4] with the coefficients  $a$ 's written

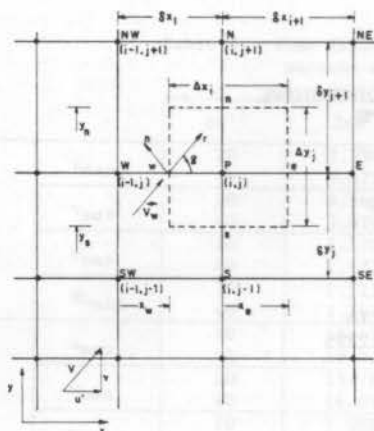


FIG. 1 - Control-Volume Notation

for the case of positive velocity components, as applicable in the present analysis. Following the traditional notation of Patankar [13] the coefficients can then be summarized in Table 1 below as

Table 1 - Coefficients for Neighbor Points

	UDS	CDS	EDS	SUD
$a_E$	$D_E + \ \alpha, \beta\  F_E, 0$	$D_E + F_E/2$	$\frac{F_E}{[\exp(F_E/D_E) - 1]}$	$D_E$
$a_W$	$D_W + \ \alpha, \beta\  F_W, 0$	$D_W + F_W/2$	$\frac{F_W \exp(F_W/D_W)}{[\exp(F_E/D_E) - 1]}$	$D_W + 2(\frac{F_W}{2} - K_W)$
$a_N$	$D_N + \ \alpha, \beta\  F_N, 0$	$D_N + F_N/2$	$\frac{F_N}{[\exp(F_N/D_N) - 1]}$	$D_N$
$a_S$	$D_S + \ \alpha, \beta\  F_S, 0$	$D_S + F_S/2$	$\frac{F_S \exp(F_S/D_S)}{[\exp(F_E/D_E) - 1]}$	$D_S + 2(\frac{F_S}{2} - K_S)$

In Table 1 the operator  $\|\alpha, \beta\|$  means the greater between  $\alpha$  and  $\beta$ ,  $F_j = u_j \Delta x_j$  is the  $j$ -nondimensional convection strength perpendicular to  $i$ -direction,  $D_j = \Delta x_i / (Pe \delta x_j)$  is similarly the  $j$ -nondimensional diffusion strength and  $K_j$  is Raithby's coefficient for the  $j$ -direction given by

$$K_j = \min \left\{ \frac{|F_j|}{2}, \frac{\rho \Delta y}{(\delta y)_j} |v_j| \frac{\delta x_i}{4} \right\} \quad (4)$$

COMPARISONS AND DISCUSSION

The four schemes above were applied to the two-dimensional flow problem of Figure 2. The situation involves a stepwise scalar profile convected by a uniform velocity field at a constant angle with the coordinate axes. In this case,  $V$  is the length of the uniform velocity vector, taken equal to unity. Boundary conditions for temperature at domain faces are  $\phi^* = 0$  for below the step and  $\phi^* = 1$  for above. Smeared profiles along the line  $y/4y = 5$  are compared with the non-diffused step profile. A total of 11x11 grid points was used in all computations with  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ . Results are presented for  $\theta = 0^\circ, 22.5^\circ$  and  $45^\circ$  and for  $Pe$  equal to 50 and 500.

The system (2) of algebraic is solved by means of the Line-by-Line (LL) technique. The LL method here considered consists of applying the Tri-Diagonal-Matrix-Algorithm (TDMA) sequentially to all rows and columns of the physical domain [10]. Convergence is attained after reducing the residual of (2) to a certain preselected value.

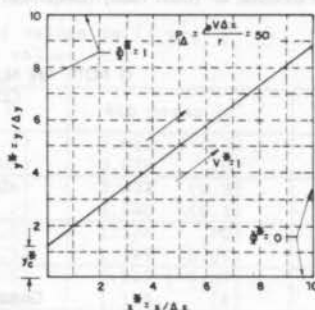


FIG. 2 - Geometry Considered

Figure 3 shows results for temperature profile for the case of cell Peclet number equal to 50. The Figure clearly shows that for  $\theta = 0^\circ$  all schemes present equal performance except the EDS which displays best results. For  $\theta = 22.5^\circ$  and  $45^\circ$  the SUD gave results closer to the step solution.

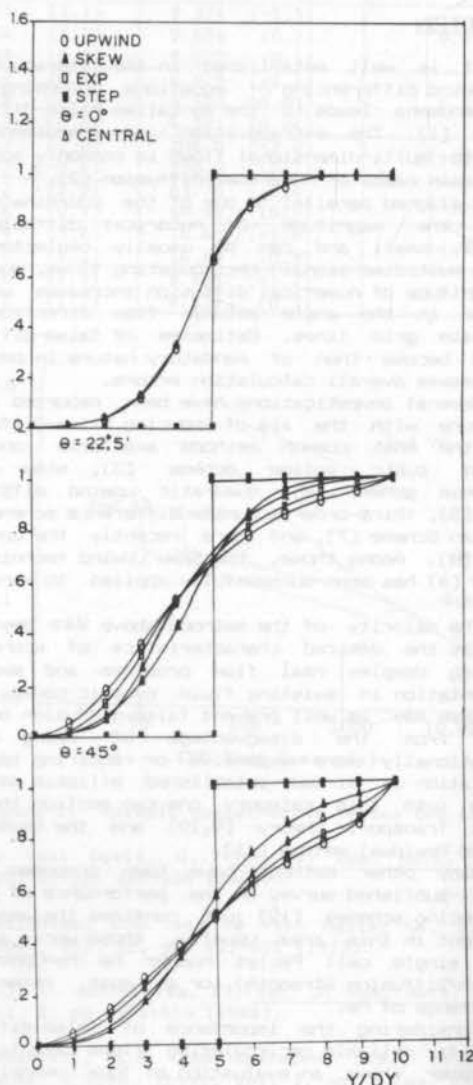


Figure 3 - Comparison of Several Differencing Schemes Pe = 50



Comparisons for  $Pe=500$  are presented in Figure 4. The Figure indicates that for  $\theta=0^\circ$  all four schemes show better results than for  $Pe=50$ , indicating, as expected, that false-diffusion errors are relatively less important as the flow becomes convection dominated. The wiggles for the SUD and  $\theta=22.5^\circ$  were also present in [8] where computations with a  $Pe$  of the same order was presented. It is important to point out that physically unrealistic solutions were calculated, since by no means equation 1 can give temperatures higher than those at the boundaries. In spite of the economy and ease of implementation in most codes, over and undershot values are known as one of the major drawbacks of the SUD [8].

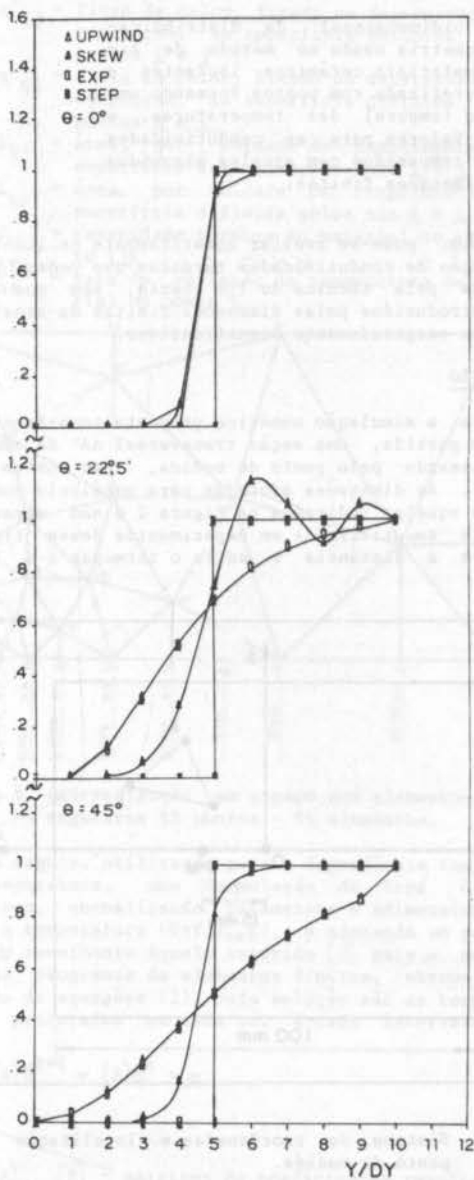


Figure 4 - Comparison of Several Differencing Schemes  
 $Pe = 500$

#### CONCLUDING REMARKS

This paper presented an evaluation of four differencing schemes for calculating a step scalar profile convected in a uniform flow field. Results were presented for  $Pe=50$  and  $500$ . Prediction with the Skew Upwind differencing technique of Raithby were found to produce better results than the other methods compared. These findings are in agreement with the literature [8]. The study herein is being used to investigate the recirculation zone formed by the interaction of two parallel jets.

#### ACKNOWLEDGEMENT

MJSL is thankful to CNPq, Brazil, for supporting this work under grant #30.2276/86.

#### REFERENCES

- [1] Roache, J.P., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publ., Albuquerque, New Mexico, 1972
- [2] Raithby, G.D., A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 9, pp. 75-103, 1976.
- [3] Rubin, S.G., Graves Jr, R.A., Viscous Flow Solutions With a Cubic Spline Approximation, *Comp. & Fluids*, vol. 3, pp. 1-36, 1975.
- [4] Raithby, G.D., Skew Upstream Differencing Schemes For Problems Involving Fluid Flow, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 9, pp. 153-164, 1976.
- [5] Leonard, B.P., A Stable And Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 19, pp. 59-98, 1979.
- [6] Agarwal, R.,K., A Third-Order Accurate Scheme For Navier-Stokes Solutions At High Reynolds Numbers, *AIAA J.*, vol. 81, 112, 1981.
- [7] Glass, J., Rodi, W., A Higher Order Numerical Scheme For Scalar Transport, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 31, pp. 337-358, 1982.
- [8] Patel, M.K., Markatos, N.C., Cross, M., Method of Reducing False-Diffusion Errors In Convection-Diffusion Problems, *Appl. Math. Modell.*, vol. 9, pp. 302-306, 1985.
- [9] Boris, J.P., Book, D.L., Flux-Corrected Transport. III. Minimum Errors FCT Algorithms, *J. Comp. Phys.*, vol. 20, pp. 397-431, 1976.
- [10] Zalezak, S.T., Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms For Fluids, *J. Comp. Phys.*, vol. 31, pp. 335-362, 1979.
- [11] Romstedt, P., Werner, W., Efficient High-Order Method For The Solution of Fluid Dynamics Equations, *Nucl. Sc. and Eng.*, vol. 64, 1977.
- [12] Patel, M.K., Cross, M., Markatos, N.C., An Evaluation of Eleven Discretization Schemes For Predicting Elliptic Flow And Heat Transfer In Supersonic Jets, *Int. J. Heat & Mass Trans.*, vol. 30, pp. 1907-1925, 1987
- [13] Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc-Graw Hill, New York, 1980.

ANÁLISE NUMÉRICA DA INFLUÊNCIA DE DIMENSÕES FINITAS DE AMOSTRAS EM MEDIDAS DE CONDUTIVIDADE TÉRMICA PELA TÉCNICA DE FIO QUENTE



Joaquim de Sylos Cintra Filho  
 Wilma Hehl Cintra  
 Depto. Engenharia de Materiais - UFSCar  
 Caixa Postal 676 - 13560 - São Carlos

RESUMO

Neste trabalho é feita uma análise numérica bidimensional da distribuição transiente de temperaturas, numa amostra com a geometria usada no método de fio quente para a medida da condutividade térmica de materiais cerâmicos isolantes e refratários. Uma seção transversal da amostra é discretizada com pontos formando uma malha de elementos triangulares e, para a variação temporal das temperaturas, é empregada uma formulação do tipo Crank-Nicholson. Valores para as condutividades térmicas são calculados pela técnica de fio quente e comparados com aqueles assumidos no cálculo numérico, afim de avaliar os efeitos de dimensões finitas.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tem-se utilizado bastante a técnica de fio quente para a determinação experimental da condutividade térmica de materiais cerâmicos isolantes e refratários [1]. Essa técnica baseia-se na detecção experimental, com um termopar, de um transiente térmico provocado, numa amostra do material, por um fio quente aquecido eletricamente. O esquema, usualmente empregado é o representado na Figura 1. A amostra é constituída por 2 blocos do material cerâmico a ser ensaiado, que são superpostos de modo a envolver a resistência filiforme de aquecimento e o termopar. O cálculo da condutividade térmica do material é feito, então, a partir de uma análise do transiente de temperatura registrado considerando a amostra como se fosse um meio sólido infinito. Essa hipótese implica em limitações desse método experimental, uma vez que o transiente térmico registrado pelo termopar no ponto de medida não pode estar alterado significativamente pelo fato da amostra ter dimensões finitas.

O objetivo deste trabalho é, então, o de fazer uma análise numérica da distribuição de temperaturas na amostra, em regime transitório, levando em conta as suas dimensões finitas e, conseqüentemente, as eventuais perdas de calor pelas suas superfícies externas. A seguir, utilizando o perfil de temperaturas obtido numericamente naquele que seria o ponto de medida (PM) da técnica de fio quente calcula-se, adotando o procedimento padrão da técnica de fio quente, a condutividade térmica do material, que é, então, comparada com o valor utilizado na simulação numérica do transiente térmico.

Assim, pode-se avaliar numericamente os limites de variação de condutividades térmicas que podem ser estudadas pela técnica de fio quente, sem que os erros introduzidos pelas dimensões finitas da amostra se tornem exageradamente significativos.

FORMULAÇÃO

Para a simulação numérica proposta toma-se como ponto de partida, uma seção transversal AA' da amostra, passando pelo ponto de medida, como mostra a Figura 1. As dimensões adotadas para o cálculo numérico são aquelas indicadas na Figura 2 e são aproximadamente as utilizadas em experimentos desse tipo, inclusive a distância  $r$  entre o termopar e o fio quente.

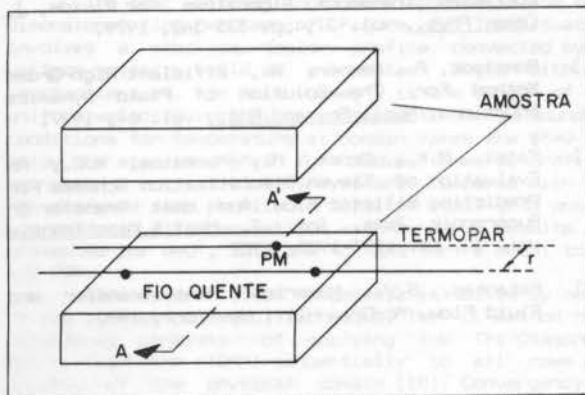


Figura 1. Técnica de Fio Quente: Arranjo Experimental

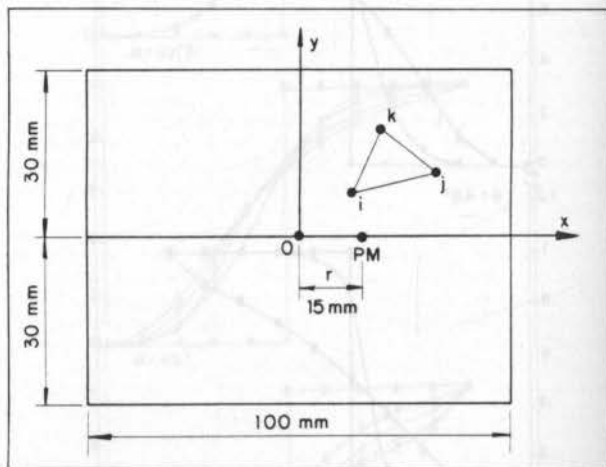


Figura 2. Sistema de coordenadas e localização de ponto de medida.

A discretização espacial do problema é feita, então, considerando-se, no quadrante que contém o ponto de medida, um conjunto de 65 pontos, distribuídos de modo a formar 94 elementos triangulares, conforme mostra a Figura 3. Escreve-se, então, para cada nó, uma equação geral de balanço de energia que leva em conta as transferências de calor por condução, por convecção, a geração interna de calor e a taxa de variação da energia interna do material associado ao nó.

Assim, referindo-se à Figura 2, para um nó  $i$  de um elemento triangular genérico  $ijk$  esse balanço pode

ser representado por uma equação do tipo:

$$-\frac{\Delta T_{ij}}{R_{ij}} + \frac{\Delta T_{ki}}{R_{ki}} + q''' S_i + \frac{1}{2} q''_{ij} L_{ij} + \frac{1}{2} q''_{ki} L_{ki} = C S_i \frac{\Delta T_i}{\Delta t} \quad (1)$$

onde

- $\Delta T_{ij}$  = diferença de temperatura entre pontos  $i$  e  $j$
- $\Delta T_{ki}$  = diferença de temperatura entre pontos  $k$  e  $i$
- $R_{ij}$  = resistência térmica para condução de calor entre  $i$  e  $j$
- $R_{ki}$  = resistência térmica para condução de calor entre  $k$  e  $i$
- $q'''$  = taxa de geração interna de calor no elemento  $ijk$
- $S_i$  = área do elemento  $ijk$  associada ao nó  $i$
- $q''_{ij}$  = fluxo de calor, fixado ou determinado por convecção, na superfície definida pelos pontos  $i$  e  $j$
- $q''_{ki}$  = fluxo de calor, fixado ou determinado por convecção, na superfície definida pelos pontos  $k$  e  $i$
- $L_{ij}$  = área, por unidade de comprimento, da superfície definida pelos nós  $i$  e  $j$
- $L_{ki}$  = área, por unidade de comprimento, da superfície definida pelos nós  $k$  e  $i$
- $C$  = capacidade térmica do material no elemento  $ijk$
- $\frac{\Delta T_i}{\Delta t}$  = taxa de variação da temperatura do material no ponto  $i$

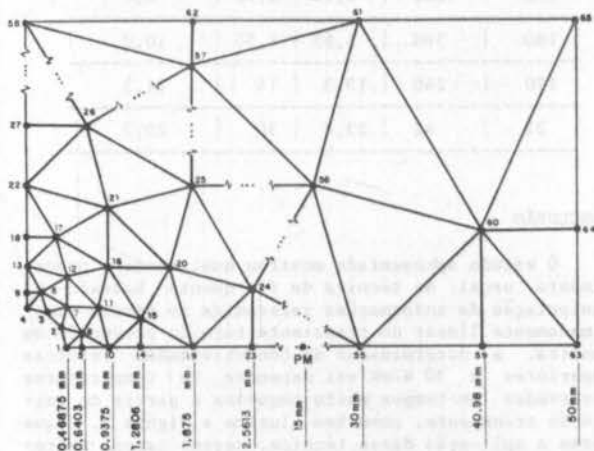


Figura 3. Discretização em espaço com elementos triangulares 65 pontos - 94 elementos.

A seguir, utilizando para a dependência temporal da temperatura, uma formulação do tipo Crank-Nicholson, normalizando parâmetros e adimensionalizando a temperatura ( $\Theta = T/T_{ref}$ ), e adotando um procedimento semelhante àquele sugerido [2] para a montagem de programas de elementos finitos, obtém-se o sistema de equações (2), cuja solução são as temperaturas procuradas em cada nó, a cada intervalo de tempo

$$[A]\Theta^{k+1} = [B]\Theta^k + p \quad (2)$$

onde

- $[A]$ ,  $[B]$  = matrizes de coeficientes resultantes da discretização em espaço e tempo
- $\Theta^{k+1}$  = vetor contém as temperaturas adimensionais nos nós, no instante  $k+1$
- $\Theta^k$  = vetor que contém as temperaturas adimensionais nos nós, no instante  $k$
- $p$  = vetor de coeficientes independentes

O programa, assim montado, recebe como dados de entrada, as coordenadas dos nós  $i$ ,  $j$  e  $k$ , as caracte-

rísticas dos elementos  $ijk$ , e as condições das superfícies  $ij$ ,  $jk$  e  $ki$ .

Assim, no problema em estudo, para a simulação dos efeitos de geração de calor no fio quente, na distribuição de temperaturas no material durante o transiente, impõe-se, a partir do instante inicial, um fluxo de calor não nulo  $q''_0$  nas superfícies delimitadas pelos nós 1-2, 2-3 e 3-4, da Figura 3. Já os efeitos de dimensões finitas da amostra são levados em conta considerando-se uma troca de calor por convecção com o meio ambiente, com um coeficiente de troca de calor  $h$ , nas superfícies delimitadas pelos nós 58-62, 62-61, 61-65, 65-64 e 64-63. O contorno da amostra completa-se, adotando-se como superfícies adiabáticas (fluxo de calor nulo) aquelas correspondentes aos pontos situados nos eixos  $x = 0$  e  $y = 0$ .

#### RESULTADOS NÚMERICOS E COMENTÁRIOS

O sistema representado por (2) é resolvido adotando-se:

- a) fluxo de calor devido ao fio quente =  $3,5 \times 10^4 \text{ W/m}^2$
- b) material padrão com capacidade térmica =  $2 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$
- c) coeficiente de troca de calor por convecção =  $400 \text{ W/m}^2\text{K}$
- d) temperatura inicial do material = temperatura ambiente =  $20^\circ\text{C}$  e variando-se a condutividade térmica do material entre  $0,15 \text{ W/mK}$  e  $30 \text{ W/mK}$ .

Os perfis de temperatura gerados pela simulação numérica, no nó correspondente ao ponto de medida da técnica de fio quente, são aqueles mostrados na Figura 4, onde

$$\Theta_{PM}(t) = \frac{T_{PM}(t) - T_0}{T_a} \quad (3)$$

em que

- $T_{PM}(t)$  = temperatura no ponto de medida no instante  $t$
- $T_0$  = temperatura inicial da amostra
- $T_a$  = temperatura ambiente

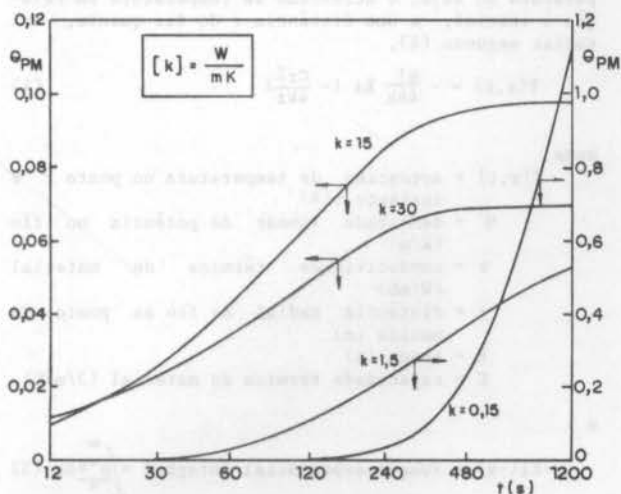


Figura 4. Transientes de temperatura no ponto de medida da técnica de fio quente.

Observa-se, na Figura 4, que os efeitos das perdas de calor para o ambiente, que tendem a levar a temperatura no ponto de medida para um valor de equilíbrio, se pronunciam mais cedo para condutividades térmicas crescentes. Essa tendência ao equilíbrio torna-se evidente para tempos ainda menores, quanto maior for o coeficiente de troca de calor nas superfícies externas da amostra, em contato com o meio ambiente, como indica a Figura 5.



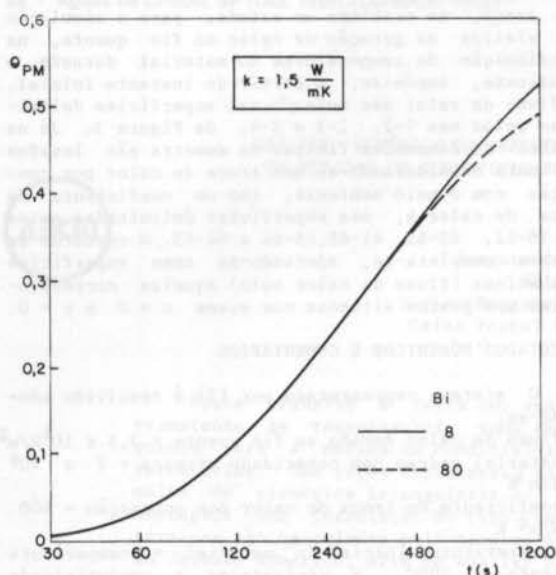


Figura 5. Influência da convecção externa de calor no transiente de temperatura no ponto de medida.

Para avaliar quantitativa e aproximadamente os efeitos das perdas de calor devidas ao tamanho finito da amostra, pode-se aplicar a cada um dos perfis de temperatura, gerados pela simulação numérica e indicados na Figura 4, o procedimento de análise, que se usa na técnica de fio quente para a determinação da condutividade térmica, e, a seguir, comparar os valores assim obtidos com aqueles assumidos no cálculo numérico.

O modelo teórico da técnica de fio quente [3] prescreve que a temperatura, na realidade a sobretemperatura ou seja, o acréscimo de temperatura em relação à inicial, a uma distância  $r$  do fio quente, vai variar segundo (4).

$$T(r,t) = -\frac{q'}{4\pi k} Ei\left(-\frac{Cr^2}{4kt}\right) \quad (4)$$

onde

$T(r,t)$  = acréscimo de temperatura no ponto  $r$  e instante  $t$  (K)

$q'$  = densidade linear de potência no fio (W/m)

$k$  = condutividade térmica do material (W/mK)

$r$  = distância radial do fio ao ponto de medida (m)

$t$  = tempo (s)

$C$  = capacidade térmica do material (J/m<sup>3</sup>K)

e

$$-Ei(-x) = \text{função exponencial integral} = \int_x^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds \quad (5)$$

Um procedimento usual [4] para a determinação da condutividade térmica  $k$ , conhecido o transiente de temperatura, é anotar o seu valor em 2 instantes  $t$  e  $2t$  e calcular  $k$  com (6).

$$k = \frac{q'}{4\pi} \frac{-Ei(-x/2)}{T(t)} \quad (6)$$

onde o valor  $x$  é tal que (7) seja satisfeita.

$$\frac{T(2t)}{T(t)} = \frac{Ei(-x/2)}{Ei(-x)} \quad (7)$$

Aplicando agora este mesmo procedimento às curvas de temperatura vs. tempo, geradas no cálculo numérico e mostradas na Figura 4, tem-se como resultado, os valores indicados na Tabela 1.

Observa-se, na Tabela 1, que a divergência entre os valores assumidos para a condutividade térmica do material e aqueles calculados com as curvas temperatura vs. tempo e o procedimento de análise da técnica de fio quente, aumenta para valores crescentes da condutividade térmica, sinal indicativo de que os efeitos de dimensões finitas podem ser extremamente significativos para valores muito altos da condutividade térmica do material. Note-se que, na determinação das condutividades térmicas calculadas, indicadas na Tabela 1, utilizam-se apenas 2 pontos da curva temperatura vs tempo, correspondentes aos instantes  $t$  e  $2t$ ; existe, entretanto, um procedimento de análise mais preciso [5], mas bem mais trabalhoso, que obtém a condutividade térmica a partir de um ajuste por regressão não linear de (4) a toda a curva temperatura vs. tempo.

Tabela 1. Comparação de condutividades térmicas: calculada e assumida

INSTANTES (S)		k CALC	k NUM	[DIFERENÇA]
t	2t			%
600	1200	0,16	0,15	6,7
180	360	1,65	1,50	10,0
120	240	13,3	15	11,3
21	42	23,8	30	20,7

#### CONCLUSÃO

O estudo apresentado mostrou que, sendo o procedimento usual da técnica de fio quente baseado na manipulação de informações referentes ao trecho aproximadamente linear do transiente térmico provocado na amostra, a determinação de condutividades térmicas superiores a 30 W/mK vai depender de temperaturas observadas em tempos muito pequenos a partir do início do transiente, como bem ilustra a Figura 4, o que torna a aplicação dessa técnica, nesses casos, extremamente difícil.

Por outro lado, fica, também, evidente que, para a maioria dos materiais cerâmicos, refratários e isolantes, cujas condutividades térmicas são baixas, o método de fio quente, com a sua hipótese de meio sólido infinito, é perfeitamente aplicável, respeitadas as devidas limitações quanto aos intervalos de tempo a serem considerados, e utilizadas amostras com as dimensões usualmente encontradas na indústria cerâmica.

#### REFERÊNCIAS

- [1] - Hagemann, L. e Peters, E. "Thermal conductivity comparison of methods: ASTM method - Hot wire method and its variations" *Interferam*, 2, pp.131-135, (1982).
- [2] - Desai, C.S. e Abel, J.F. - *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Co. NY, (1972).
- [3] - Carslaw, H.S. e Jaeger, J.C. - *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Univ. Press, (1959).
- [4] - Staff, P.R.E. - "Essai des matières premières et produits céramiques. Détermination de la conductivité thermique jusqu'à 1600 C par la méthode du fil chaud.méthode en parallèle", *Bull. Soc. Fr. Ceram.*, 126, pp.15-24, (1980).

[5] - Santos, W.N e Cintra Fo., J.S. - "Método de fio quente com ajuste por regressão não linear na determinação da condutividade térmica de materiais cerâmicos" *Cerâmica*, 32(198), pp.151-154, (1986).

**ABSTRACT**

In this work is presented a numerical analysis of the two-dimensional temperature distribution in a body with the same geometry and dimensions as the ones used in samples for the application of the hot wire technique in measuring thermal conductivities of ceramic materials. The numerical simulation of the temperature transient is accomplished with a spatial discretization of a cross section of the sample in a triangular mesh and with a discretization in time by using a Crank-Nicholson type formulation. The usual procedure for determining the thermal conductivity of materials when using the hot wire parallel technique is then applied to the numerically generated curves temperature = f(time) and the resulting values for the thermal conductivities are hence compared with the ones assumed in the numerical simulation, in order to verify the extent of the effects of using samples with finite dimensions.



... (mirrored text from the reverse side of the page) ...



... (mirrored text from the reverse side of the page) ...



NUMERICAL SIMULATION OF LAMINAR FLOW IN A REFRIGERATED MOLD



NORBERTO MANGIACACCHI  
 Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ  
 S. G. Pesquisa e Desenvolvimento, CSN  
 WASHINGTON BRAGA  
 Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ

ABSTRACT

The laminar viscous flow and heat transfer in a refrigerated mold is simulated in a body fitted curvilinear generalized coordinates system. Plots of stream function and temperature contours are presented. The simulation shows the existence of two stagnant flow regions in the vicinity of the jet entrance. In some cases, a third recirculation region appears downstream the jet impact zone. This recirculation affects the heat transfer coefficient, creating a local minimum in the Nusselt number (Nu). The equations are discretized using a low numerical viscosity scheme, to allow the study of high Reynolds number range with good accuracy.

Introduction

The molten steel flow in the mold of continuous casting machines has an important role in the characterization of the solidification process and the quality of the product. An inadequate distribution of molten steel flow in the mold can result in surface and internal defects or even cause a break out, as described by Brimacombe [1].

The numerical simulation of the fluid flow in the mold is a powerful tool in the study of the phenomena involved in the process. Using this tool, the influence of parameters such as casting speed, nozzle geometry, mold width, superheat temperature, etc., can be investigated.

The Physical Problem

Molten metal flows into the continuous casting mold through a submerged refractory tube with two symmetrical bores, as described on fig 1.

The mold walls are refrigerated so that a thin shell of freezing metal develops along them, and is continuously extracted from the mold by a system of pinch rolls.

The molten pool in the mold is stirred by the incoming jet, forming recirculation regions whose amplitude and intensity are modified by the casting conditions. Consequently, the temperature field in the pool and heat transfer between the molten metal and the freezing shell, together with the fluctuation of non-metallic inclusions are affected by the molten steel flow.

Through the analysis of the flow pattern it can be inferred the relationship between operational conditions and the quality of castings.

Mathematical Model

For this preliminary study, it was decided to use a simple model as no accurate information concerning the relevant aspects of the flow problem were available and the computer requirements associated to a full description is still prohibitive. The most severe simplifications involved on the current model are shown on fig 2 and are listed below:

- 1.-Two-dimensional (plane) flow
- 2.-Plane symmetry

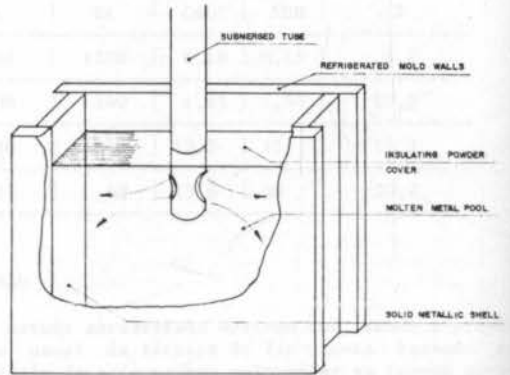


FIG. 1 - SUBMERGED TUBE AND MOLD SET.

- 3.-Fixed walls
- 4.-Laminar flow
- 5.-No latent heat involved

These limitations make the model more tractable but reduce the validity of the results which must be analysed as a first step towards a full simulation of the continuous casting molten metal flow.

The equilibrium partial differential equations are written in the stream function-vorticity formulation ( $\omega, \psi$ ), in generalized curvilinear coordinates system.

The discretizing grid is generated by an automatic numerical method, based on the solution of a set of elliptical partial differential equations, as proposed by Thompson [2]. The transformed governing equations are:

$$\frac{\alpha}{J^2} \psi_{\eta\eta} - 2\frac{\beta}{J^2} \psi_{\eta\tau} + \frac{\gamma}{J^2} \psi_{\tau\tau} + P\psi_{\tau} + Q\psi_{\eta} = -\omega \tag{1}$$

and

$$C[\psi_{\eta} \phi_{\eta} - \psi_{\tau} \phi_{\tau}] = \frac{\alpha}{J^2} \phi_{\eta\eta} - 2\frac{\beta}{J^2} \phi_{\eta\tau} + \frac{\gamma}{J^2} \phi_{\tau\tau} + P\phi_{\eta} + Q\phi_{\tau} \tag{2}$$

where  $\phi$  may indicate the vorticity profile  $\omega$  or the

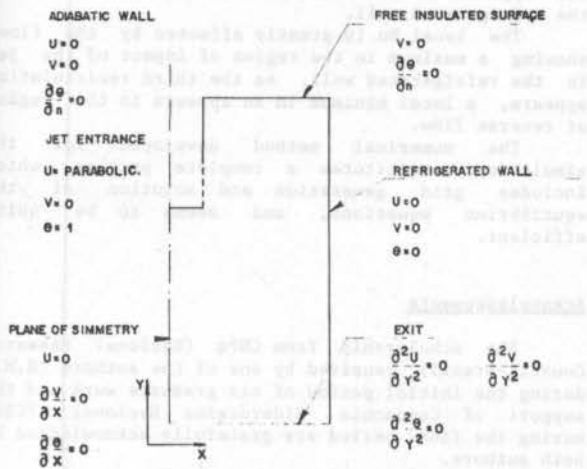


FIG. 2 - MATHEMATICAL MODEL : BOUNDARY CONDITIONS.

temperature profile  $\theta$ ,  $C$  indicates  $Re$  or  $RePr$ , respectively,  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  are the metric coefficients,  $J$  is the Jacobian of the transformation, and  $P$  and  $Q$  are spacing control functions, which allow point concentration towards or from any region of interest, such as boundaries.

The boundary conditions are:

$$\psi = \text{constant along the non-slip walls}$$

$$\theta = 1 \text{ in the entrance of the jet}$$

$$\theta = 0 \text{ in the refrigerated wall}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta^2} = 0 \text{ in the outflow region.}$$

The second derivatives appearing on equations 1 and 2 are discretized using a standard finite difference approximation. However, the first derivatives appearing in equation 2 are discretized using a 5-point adaptative scheme proposed by Braga [3], which minimizes numerical viscosity, avoids wiggle formation, and it is stable. The reasoning for such scheme and a comparison with others are available on Braga [4]. For instance, using the adaptative scheme, the first derivative  $\phi_{\eta}$  is discretized as:

$$\phi_{\eta} = \frac{(3-2s)\phi_{i+1} + 6s\phi_i - 3(2s+1)\phi_{i-1} + 2s\phi_{i-2}}{6h} \quad (3)$$

where  $s$  is equal to  $1.5 - 3/Re_c$ ,  $Re_c$  being the cell Reynolds number. The above expression holds for positive flows, i.e.  $\psi_i > 0$  on equation (2). Similar expressions for negative flows are available on [6].

#### Numerical Boundary conditions

The numerical boundary condition for vorticity in the solid walls is given by

$$\omega = -\frac{\delta}{J^2} \psi_{,\eta\eta} \quad (4)$$

The second derivative, normal to the wall, is discretized using a second order approximation

described by Gupta & Manohar [5], generically denoted as  $(p,q)$  formulae, where  $p$  and  $q$  represent the distance, in nodal points, between the wall and the point used to evaluate the derivative. The results shown here were obtained using the  $(2,1)$  formula. However, comparative results obtained with other values are shown on Mangiacacchi [6].

In the entrance, the vorticity and stream function are calculated by a modified version of the method proposed by Atkins [7].

The discretized equilibrium partial differential equations are solved by a combined procedure. The vorticity and the energy equations are solved by an ADI method and the stream function equation is solved by MSIP (Modified Strongly Implicit Procedure).

#### Numerical Results

The flow in the mold is investigated for  $10 < Re < 150$ , for  $1 > Pr > 0.01$ , with aspect ratio  $D/L$  varying from 0.2 to 0.5, assuming the jet entering the mold with a parabolic velocity distribution.

Some typical results for stream lines are shown in fig. 3. It can be seen that, for small  $Re$  there are

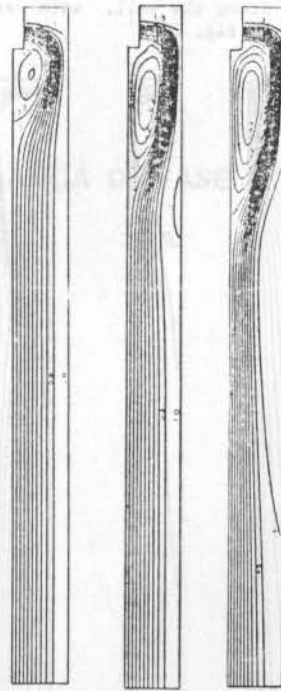


Fig. 3 Stream Line Contours.

Aspect Ratio 12:1,  $D/L = 0.3$ ,  $Pr = 1.0$   
 a.  $Re=20$ , b.  $Re=50$ , c.  $Re=125$

two recirculation zones, one above and one below the jet entrance. As  $Re$  increases, and  $D/L$  decreases, the intensity and extension of the recirculations grow, until a third recirculation appears (at  $Re$  on the order of 50,  $D/L = 0.3$ ), attached to the impinging wall, downstream from the region of impact of the jet. The third recirculation also grows as  $Re$  increases, up to the values analysed in the present work ( $Re < 150$ ), in the direction of the exit of the mold.

The simulation was interrupted at such Reynolds number for some reasons. First, the computer requirements were already quite high. For example, the CPU time at this situation was about 1000 s, on an IBM 4381. Second, at such  $Re$  number, the real flow is

very likely turbulent. Since no turbulent model was proposed in the current work and the usage of any one available from the literature would only increase the CPU time for the simulation, with no clear contribution to the understanding of the heat problem, only the laminar regime was investigated.

Finally, it was noticed that in the region close to the incoming jet, the cell Reynolds number was very high,  $O(1000)$ . Although no wiggles were observed, probably due to the adaptative scheme used, the accuracy of the so obtained solution at this stage should be confirmed with a physical experimentation, at least qualitative, again not available.

The temperature field in the mold can be analysed by the observation of the isotherms on fig. 4. The temperature field in the mold is strongly influenced by the jet. The thermal gradient near the refrigerated incoming wall is quite moderate showing a maximum in correspondence with the region of impact of the jet, and decreases monotonically upwards and downwards along the wall.

As the Reynolds number increases, the thermal gradient in front of the cold wall increases considerably, but shows a local minimum as the third recirculation appears, since in the region of the recirculation the flow departs from the wall, and there is a local slow reverse flow. The variation of Nusselt number along the wall, with various Reynolds values is shown in fig. 5.

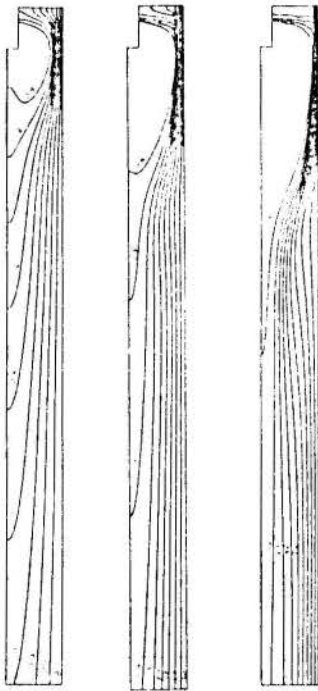


Fig. 4 Temperature Contours.  
Aspect Ratio 12:1,  $D/L = 0.3$ ,  $Pr = 1.0$   
a.  $Re=20$ , b.  $Re=50$ , c.  $Re=125$

### Conclusion

The description of the laminar flow in the mold with heat transfer obtained by numerical simulation may help the understanding of the relationship between flow and thermal fields in the mold.

For low  $Re$ , the flow is dominated by a double recirculating pattern. As  $Re$  increases, both intensity and extension of the recirculation increases, until

the appearance of a third recirculation, attached to the refrigerated wall.

The local  $Nu$  is greatly affected by the flow, showing a maximum in the region of impact of the jet on the refrigerated wall. As the third recirculation appears, a local minimum in  $Nu$  appears in the region of reverse flow.

The numerical method developed for the simulations constitutes a complete package, which includes grid generation and solution of the equilibrium equations, and seems to be quite efficient.

### Acknowledgements

The scholarship from CNPq (National Research Council-Brazil) received by one of the authors (M.M.) during the initial period of his graduate work and the support of Companhia Siderurgica Nacional (CSN) during the final period are gratefully acknowledged by both authors.

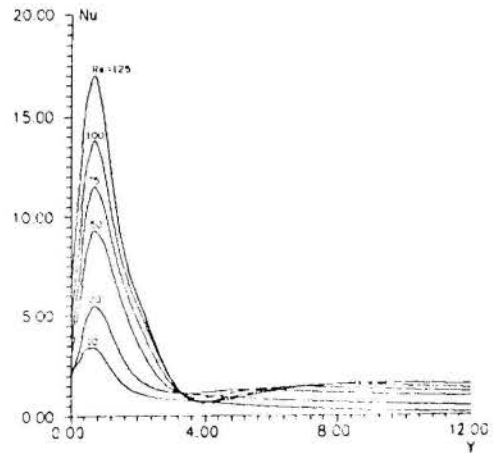


Fig. 5 Nusselt number dependence on Reynolds number

### References

- [1] BRIMACOMBE, J.K., et Al.. Continuous casting; heat, Flow, Solidification, and Crack formation. Warrendale, Iron and Steel Institute of AIME, v.1, 1985.
- [2] THOMPSON, J.F et Al.. Numerical Grid Generation-Foundations and Applications, New York, Elsevier Science Publishing, 1985.
- [3] BRAGA, W.. A Variable Four-Point Interpolating Scheme for Strongly Convective Flows. I ENCIT, ABCM, 1986.
- [4] BRAGA, W.. A higher Order Scheme for Convective Flows : Analysis and Implementation, IAS, ASME, Chicago, IL, USA, 1988.
- [5] GUPTA, M.M & MANOHAR, K.P.. Boundary Approximations and accuracy in Viscous Flow Computations. Journal of Computational Physics, 31: 263 - 288, 1979.
- [6] MANGIACACCHI, N., M. Sc. Thesis, Mechanical Eng. Depart., PUC/RJ, 1988, in portuguese.
- [7] ATKINS, B.J., MASKELL, S.J. & PATRICE, M.A., Numerical Prediction of Separated Flows. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15: 129 - 144, 1980.

**CONDUÇÃO DE CALOR INCLUINDO MUDANÇA DE FASE**

ANÁLISE DE UM ARMAZENADOR TÉRMICO TIPO TUBO-CARÇAÇA



CARLOS LINEU F. ALVES  
NEI G. BRAZÃO  
OROZIMBO A.A. REGO\*

CTA-ITA-IEM - 12225 - São José dos Campos-SP  
\*DEM-CETEC-UFU - Uberlândia - MG

RESUMO

É apresentado um armazenador de calor sensível do tipo tubo-carçaça onde a troca de calor entre o fluido frio e o fluido quente se dá através de um tubo de parede espessa que funciona como armazenador sensível. Obtém-se a distribuição de temperatura na parede e a evolução das temperaturas dos fluidos ao longo do armazenador. É feita uma análise dos parâmetros efetividade e NTU. O problema de transferência de calor na parede acoplado aos balanços de energia é resolvido numericamente.

INTRODUÇÃO

A utilização de armazenadores térmicos em vários sistemas de conversão de energia tem sido amplamente discutido na literatura [1, 2 e 3], tanto em sistemas convencionais como em sistemas alternativos, notadamente os solares.

Os armazenadores térmicos nada mais são do que trocadores de calor com um meio armazenador. O tipo mais usual é o tubo-carçaça.

Os armazenadores térmicos usuais armazenam a energia térmica na sua forma sensível ou latente [1]. Existem vários trabalhos sobre armazenadores por calor latente na configuração tubo-carçaça [4 e 5], contudo não se conhece na literatura trabalhos em que os resultados da análise de armazenadores tubo-carçaça por calor sensível tenham sido discutidos utilizando os parâmetros usuais de trocadores de calor, ou seja, NTU e efetividade.

O objetivo deste trabalho é apresentar tal análise que é feita com base na solução do campo de temperatura em tubos cilíndricos de paredes espessas, onde o problema de transferência de calor é controlado por condução.

A solução da equação de energia é feita através de um esquema numérico utilizando a técnica dos volumes de controle.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o esquema do armazenador tubo-carçaça mostrado abaixo,

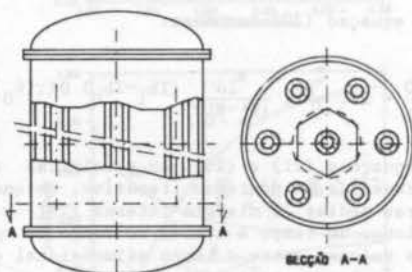


Figura 1. Esquema do armazenador tubo-carçaça

os tubos de paredes espessas estão organizados em um arranjo triangular e em torno de cada um deles existe uma região hexagonal de simetria que não difere significativamente de um círculo.

A análise do problema será então realizada com base no domínio a seguir representado.

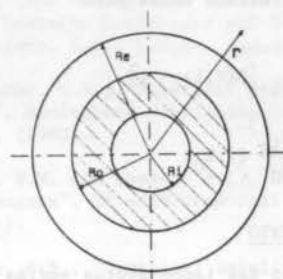


Figura 2. Domínio do estudo

Sendo o processo de transferência de calor controlado por condução tem-se que a equação que rege o problema é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot K \frac{\partial T}{\partial r} \right) = C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

onde C é o calor específico volumétrico, T é a temperatura, t é o tempo, K a condutividade térmica e r a coordenada radial.

As condições de contorno são dadas por:

$$-K \frac{\partial T}{\partial r} (t, r_i) = h_i [T_{b1} - T(t, r_i)] \quad (2)$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial r} (t, r_o) = h_o [T(t, r_o) - T_{b0}] \quad (3)$$

onde r<sub>i</sub> é o raio interno da parede cilíndrica, r<sub>o</sub> é o raio externo da parede, T<sub>b1</sub> e T<sub>b0</sub> as temperaturas médias de mistura do fluido interno e externo, h<sub>i</sub> e h<sub>o</sub> os coeficientes de convecção interna e externa.

A condição inicial é dada por:

$$T(0, r) = T_i \quad (4)$$

A análise do problema é facilitada com sua adimensionalização. Define-se:

$$\theta = \frac{T(t, r) - T_{b0}}{T_{b1} - T_{b0}}, \text{ como temperatura adimensional} \quad (5)$$



$$R = \frac{r}{r_i} \quad , \text{ como coordenada radial adimensional;} \quad (6)$$

$$\tau = \frac{ct}{Kr_i^2} \quad , \text{ como tempo adimensional;} \quad (7)$$

$$B_{ii} = \frac{h_i \cdot r_i}{K} \quad , \text{ como n}^\circ \text{ de Biot interno;} \quad (8)$$

$$B_{io} = \frac{h_o \cdot r_o}{K} \quad , \text{ como n}^\circ \text{ de Biot externo;} \quad (9)$$

Desta forma o problema é escrito como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \quad (10)$$

com a condição inicial dada por:

$$\theta(0, r) = \theta_i \quad (11)$$

e as condições de contorno dadas por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} (\tau, 1) = B_{ii} [\theta(\tau, 1) - 1] \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} (\tau, R_o) = -\frac{B_{io}}{R_o} (\tau, R_o) \quad (13)$$

#### ANÁLISE DO ACOPLAMENTO

Para o cálculo das temperaturas médias de mistura do escoamento ao longo do tubo, é necessário efetuar um acoplamento com o fluido. Este acoplamento é conseguido através de um balanço de energia como mostra a figura (3).

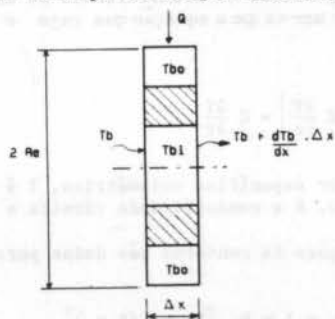


Figura 3. Elemento de Volume para Balanço Térmico

Para o fluido interno temos:

$$\dot{m}_i \cdot C_i \cdot T_{b1} = Q_i \cdot \Delta x + \dot{m}_i \cdot c_i \left( T_{b1} + \frac{dT_{b1}}{dx} \cdot \Delta x \right) \quad (14)$$

onde  $\dot{m}$  é a vazão em massa do fluido e pode ser colocada como função da velocidade média do escoamento  $u$  como,

$$\dot{m}_i = \rho_i \cdot \pi \cdot r_i \cdot u_i \quad (15)$$

$$Q_i = -K \frac{\partial T}{\partial r} \cdot 2\pi \cdot r_i \quad (16)$$

A equação (16) pode ser adimensionalizada, obtendo-se

$$\frac{Q_i}{2\pi \cdot r_i \cdot (T_{b1} - T_{b0})} = -\frac{1}{B_{ii}} \frac{\partial \theta}{\partial R} (\tau, 1) = \hat{Q}_i \quad (17)$$

Mas da condição de contorno interna dada pela equação (12) temos:

$$\frac{1}{B_{ii}} \frac{\partial \theta}{\partial R} (\tau, 1) = [\theta(\tau, 1) - 1] \quad (18)$$

Logo a equação (17) torna-se:

$$\hat{Q}_i = [1 - \theta(\tau, 1)] \quad (19)$$

Levando-se a equação (19) na (14), e fazendo com que o sistema de coordenadas mova-se com o fluido, ou seja:

$$u_i = \frac{dx}{dT_i} \quad (20)$$

A equação (14) torna-se:

$$\frac{dT_{b1}}{dT_i} = 2 \cdot \hat{C}_i \cdot B_{ii} \cdot (T_{b1} - T_{b0}) [1 - \theta(\tau, 1)] \quad (21)$$

Analogamente para o fluido externo obtém-se:

$$\frac{dT_{b0}}{dT_o} = 2 \cdot \frac{\hat{C}_o \cdot B_{io}}{(R_e^2 - R_o^2)} (T_{b1} - T_{b0}) \cdot \theta(\tau, R_o) \quad (22)$$

onde  $\hat{C}_*$  e  $\tau_*$  são dados por:

$$\hat{C}_* = \frac{\rho c}{\rho_* C_*} \quad \text{e} \quad \tau_* = \frac{\alpha \tau}{r_i^2} \quad (23)$$

mas:

$$u_i = \frac{dx}{dT_i} \quad \text{e} \quad u_o = \frac{dx}{dT_o} \quad (24)$$

ou na sua forma adimensionalizada:

$$\bar{U} = \frac{u_i}{u_o} = \frac{dT_o}{dT_i} \quad (25)$$

E a equação (22) torna-se:

$$\frac{dT_{b0}}{dT_i} = 2 \cdot \frac{\hat{C}_o}{\bar{U}} \cdot \frac{B_{io}}{(R_e^2 - R_o^2)} (T_{b1} - T_{b0}) \theta(\tau, R_o) \quad (26)$$

As equações (21) e (26) são resolvidas simultaneamente, através de um processo iterativo, obtendo-se as temperaturas médias de mistura interna ( $T_{b1}$ ) e externa ( $T_{b0}$ ) ao longo do tempo e também ao longo do tubo, já que existe uma relação entre o tempo adimensional e a coordenada, através das equações (9) e (20).

Para a análise do desempenho através dos parâmetros envolvidos em trocadores de calor, nós definimos a efetividade como a razão entre o calor real trocado e o calor máximo possível de ser trocado, ou seja:

$$\epsilon = \frac{Q}{Q_{\max}} = \hat{Q} \quad (27)$$

onde  $Q$  e  $Q_{\max}$  são dados por:

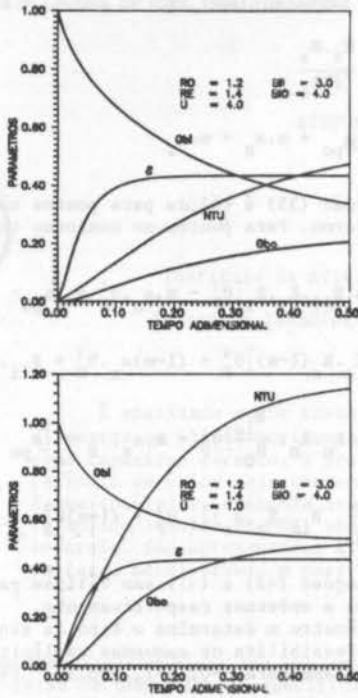


Figura 6. Influência da razão de velocidade

Outro parâmetro analisado é a influência da razão de velocidade, a qual pode ser observada na figura 6. Note que, para este arranjo geométrico, as curvas de efetividade não variam significativamente o mesmo não ocorrendo com as de  $NTU$ .

Finalmente pode-se notar na figura 7, a influência dos números de Biot. Observe que apesar do aumento dos números de Biot fornecerem uma curva de  $NTU$  com valores mais elevados a curva de efetividade apresenta valores menores que para o caso de valores de Biot menores.

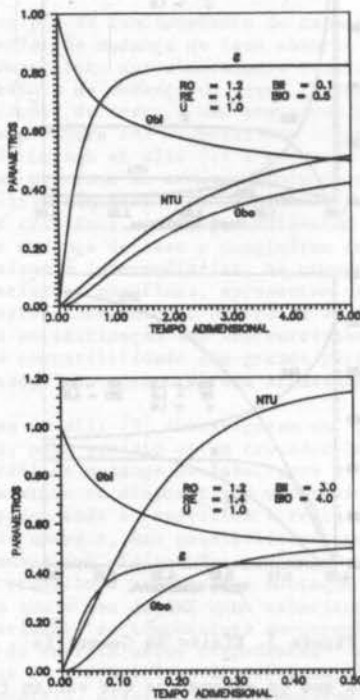


Figura 7. Influência do número de Biot

#### CONCLUSÕES

Com esta formulação é possível avaliar o desempe

no de uma unidade de armazenamento em termos dos parâmetros  $\epsilon$ - $NTU$ .

No dimensionamento de um armazenador pode-se utilizar o programa para se saber qual será o seu desempenho também na simulação de um sistema completo onde um dos componentes é o armazenador o programa possibilita a sua simulação.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Abhat, A., "Short term thermal energy storage", *Revue Phys.Appl.*, V. 15 (1980) pp. 477-501.
- [2] Lorsch, H.G. et al., "Thermal energy storage for Solar heating and off peak air conditioning", *Energy Conversion*, V. 15 (1975), pp. 1-8.
- [3] Griggs, E.I. and Humphries, W.R., "A design handbook for phase-change thermal control and energy storage devices", NASA TP-1074., (1977).
- [4] Shansundar, N. and Srinivasan, R., "Effectiveness- $NTU$  charts for heat recovery from latent heat storage units", *J.of Solar Energy Engineering*, V. 102, Nov (1980).
- [5] Ismail, K.A.R. and Alves, C.L.F., "Analysis of shell-tube PCM storage system". 8<sup>th</sup> International Heat Transfer Conference and Exhibition - San Francisco, C.A., U.S.A., Ago (1986).
- [6] Patankar, S.V., "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill, (1980).
- [7] Kays, W.M. and London, A.L., "Compact heat exchangers", 2<sup>d</sup> ed McGraw-Hill Book Company, N.Y. (1964).
- [8] Smith, G.D., "Numerical solution of partial differential equations", Oxford University Press, London, (1969).

#### ABSTRACT

A sensible heat, shell and tube type, storage system is considered, where heat exchange between the cold and hot fluids takes place through a thick walled tube for storing. The temperature distribution across the wall is obtained, as well as the time history of the fluids temperature along the storage system. A performance analysis is under taken through the use of the  $\epsilon$ - $NTU$  parameters. The heat transfer problem at the wall coupled with the energy balances at both fluids, is solved numerically.

$$Q = \frac{\dot{m}_0 \cdot C}{\ell} [Tb_0(\ell) - Tb_0(0)] \quad (28)$$

$$Q_{\max} = 2\pi \cdot r_0 \cdot h_0 [Tb_1(0) - Tb_0(0)] \quad (29)$$

já que para o tempo igual a zero nenhuma energia foi ainda trocada e portanto a efetividade torna-se:

$$\epsilon = \frac{\dot{m}_0 \cdot C}{2\pi \cdot r_0 \cdot h_0 \cdot \ell} \left[ \frac{Tb_0(\ell) - Tb_0(0)}{Tb_1(0) - Tb_0(0)} \right] \quad (30)$$

a qual pode ser colocada em função de NTU como segue:

$$\epsilon = \frac{\theta_{b0}(\ell)}{NTU} \quad (31)$$

$$NTU = \frac{2\pi \cdot h_0 \cdot r_0 \cdot \ell}{\dot{m}_0 \cdot C} \quad (32)$$

$$\theta_{b0} = \frac{Tb_0(\ell) - Tb_0(0)}{Tb_1(0) - Tb_0(0)} \quad (33)$$

sendo  $\ell$  o comprimento do tubo.

#### OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Para discretização da equação diferencial, será utilizada a técnica de volume de controle, desenvolvida por Patankar [6], que consiste em integrar a equação diferencial (10) nos volumes de controle conforme a figura (4).

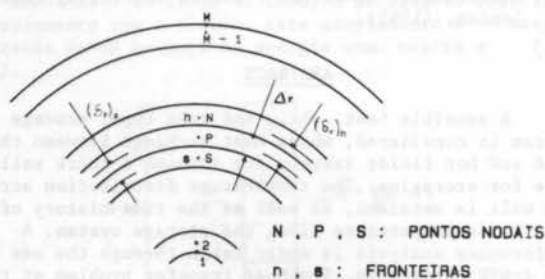


Figura 4. Volumes de controle utilizado

Efetuada as integrações dentro do volume de controle, com variação linear de  $\theta$  e  $R$ , supondo que  $\theta$  permanecerá uniforme durante o intervalo de tempo  $\Delta\tau$ , e que o integral de  $\theta$  no tempo seja:

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \theta_p \cdot d\tau = [m\theta_p^1 + (1-m)\theta_p^0] \Delta\tau \quad (34)$$

Obtém-se as seguintes equações algébricas:

$$a_p \cdot \theta_p^1 - m \cdot a_n \cdot \theta_n^1 - m \cdot a_s \cdot \theta_s^1 = (1-m)a_n \cdot \theta_n^0 + (1-m)a_s \cdot \theta_s^0 + [a_{po} - a_n(1-m) - a_s(1-m)] \theta_p^0 \quad (35)$$

onde

$$a_{po} = \frac{C}{2\Delta\tau} (R_n^2 - R_s^2) \quad (36)$$

$$a_n = \frac{R \cdot K}{(\delta R)_n} \quad (37)$$

$$a_s = \frac{R_s \cdot K_s}{(\delta R)_s} \quad (38)$$

$$a_p = a_{po} + m \cdot a_n + m \cdot a_s \quad (39)$$

onde a equação (35) é válida para pontos não pertencentes ao contorno. Para pontos no contorno temos:

$$[a_{po} + m \cdot a_n + m \cdot B_{ii} \cdot K_s \cdot R_s] \theta_p^1 - m \cdot a_n \cdot \theta_n^1 = [a_{po} - (1-m)a_n - B_{ii} \cdot K_s \cdot R_s (1-m)] \theta_p^0 + (1-m)a_n \cdot \theta_n^0 + B_{ii} \cdot K_s \cdot R_s \quad (40)$$

$$[a_{po} + m \cdot a_s + m \cdot K_n \cdot R_n \cdot \frac{B_{io}}{R_0}] \theta_p^1 - m \cdot a_s \cdot \theta_s^1 = [a_{po} - (1-m) \cdot (1 + \frac{R_n}{R_0} \cdot B_{io} \cdot K_n \cdot a_s)] \cdot \theta_p^0 + (1-m)\theta_s^0 \cdot a_s \quad (41)$$

onde as equações (40) e (41) são válidas para os contornos internos e externos respectivamente.

O parâmetro  $m$  determina o tipo de esquema numérico utilizado. Possibilita os esquemas explícito, implícito e Crank-Nicolson para  $m=0$ ,  $m=1$ ,  $m=0.5$  respectivamente [8].

#### RESULTADOS

Alguns resultados típicos são apresentados, usando água como fluido de trabalho e como material do tubo.

Variação de Efetividade e NTU com a geometria do problema podem ser vistas na figura 5.

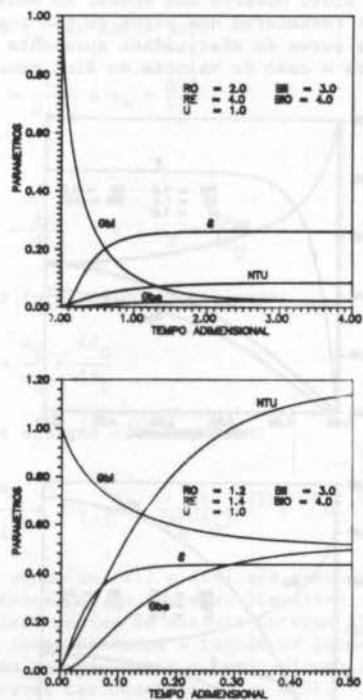


Figura 5. Efeito da Geometria

Observe que os parâmetros que variam foram  $R_0$  e  $R_e$ . Quanto menor  $R_e$  significa um arranjo de tubos mais denso e que a relação  $R_e/R_0$  mais o valor de  $\bar{U}$  fixa a relação de vazão entre os fluidos. O dimensionamento do armazenador deve ser cuidadosamente analisado em função dos parâmetros, isto é, o comprimento deve ser tal que corresponda ao tempo adimensional em que os parâmetros não mais variem significativamente.

DISPOSITIVOS ELETRÔNICOS REFRIGERADOS  
POR MATERIAL DE MUDANÇA DE FASE



PAULO GILBERTO DE PAULA TORO  
Instituto de Atividades Espaciais - Centro Técnico Aeroespacial  
CARLOS LINEU DE FARIA E ALVES  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica - Centro Técnico Aeroespacial  
São José dos Campos - SP

RESUMO

É analisado neste trabalho um sistema de refrigeração de dispositivos eletrônicos, dispostos em placas horizontais, utilizando material de mudança de fase (MMF), atuando como capacitor térmico. O problema no MMF é formulado supondo que o processo de transferência de calor seja controlado por condução. A equação da energia é escrita na sua forma entálpica, evitando assim a não linearidade causada pela movimentação da fronteira sólida líquida no MMF, sendo resolvida através da formulação numérica de volume de controle. São apresentadas a temperatura de parede, a massa solidificada e a de mudança de fase, considerando a parafina n-Eicosana como MMF e a água como fluido refrigerante.

INTRODUÇÃO

Os componentes eletrônicos são projetados para operarem em uma faixa de temperatura específica. Quando estes estão em operação dissipam uma quantidade de energia, que é necessário retirar por algum mecanismo térmico. O objetivo do controle térmico é realizar a troca de energia entre os dispositivos eletrônicos e o ambiente, de modo que a temperatura dos componentes eletrônicos se estabilizem na faixa operacional.

O resfriamento, que era inicialmente feito por convecção natural, tornou-se em alguns casos insuficiente e a convecção forçada foi utilizada. Porém, o desenvolvimento eletrônico gerou a necessidade de pesquisar novas maneiras de controle térmico, pois a energia gerada por unidade de área de dissipação de calor aumentou consideravelmente, conforme descrito em Oktay et alii [1].

O princípio de funcionamento do capacitor térmico é que o material de mudança de fase absorve e libera energia à temperatura aproximadamente constante, em torno da temperatura de mudança de fase, fazendo que as bruscas variações de energia não provoquem grandes diferenças de temperatura nos dispositivos eletrônicos.

Segundo Lorsch et alii [2] a mudança de fase mais apropriada ao processo de armazenamento térmico é a transição sólido-líquido.

Vários trabalhos, [2 a 4], analisaram os diversos materiais de mudança de fase e concluíram que, para temperaturas baixas e intermediárias, os compostos orgânicos, em especial as parafinas, apresentam vantagens sobre os compostos inorgânicos. Dentre as vantagens, salientam-se a solidificação sem subresfriamento, fusão congruente e compatibilidade com grande parte dos materiais utilizados na construção dos armazenadores térmicos.

Witzman et alii [5] investigaram um procedimento simplificado, para projeto de um trocador de calor utilizando material de mudança de fase, para a estabilização da temperatura de dispositivos eletrônicos, contudo a solução apresentada é analítica e feita a partir de um balanço de energia, não possibilitando uma análise mais aprofundada dos efeitos dos parâmetros envolvidos.

Neste trabalho é analisado a montagem mostrada na Figura 1, em que o uso de MMF como capacitor térmico atenua as variações de temperatura decorrentes da geração interna de energia pelos componentes eletrônicos. Supõem-se que os dispositivos eletrônicos, dispostos em placas horizontais, dissipam calor conforme Figura 2, com potência dissipada constante durante o tempo ligado dos dispositivos eletrônicos, curva 1.

O MMF é inserido entre duas placas finas de alta condutividade térmica, de forma que não há gradiente de temperatura através das placas. A temperatura da placa de separação entre os dispositivos eletrônicos e o MMF

é a própria temperatura dos dispositivos eletrônicos.



Figura 1. Geometria estudada

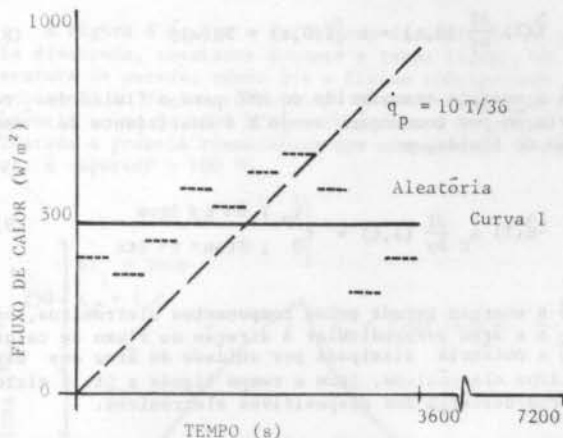


Figura 2. Regime de carga/descarga

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO MATERIAL DE MUDANÇA DE FASE

Considerando a geometria ilustrada pela Figura 1, tendo a hipótese de que o processo de transferência de calor no MMF seja controlado por condução de calor, unidimensional e transiente. Aplicando a formulação entálpica de Bonacina [6] no equacionamento energético do MMF, obtém-se a equação diferencial, sendo ela válida para as regiões sólida, líquida e em mudança de fase, portanto:

$$\tilde{C}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \tilde{K}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] ; 0 < y < a, t > 0 \quad (1)$$



onde  $T$  é a temperatura no MMF,  $t$  o tempo,  $y$  a direção do fluxo de calor,  $K(T)$  a condutividade e  $\hat{C}(T)$  o calor específico volumétrico do MMF. Sendo:

$$T = T(y, t) \quad (2)$$

$$\hat{C}(T) = \begin{cases} C_1(T); & T < T_m^- \\ \frac{\rho_1 L}{2 \Delta T} + \frac{C_1(T_m^-) + C_2(T_m^+)}{2}; & T_m^- < T < T_m^+ \\ C_2(T); & T \geq T_m^+ \end{cases} \quad (3)$$

$$K(T) = \begin{cases} K_1(T); & T < T_m^- \\ K_1(T_m^-) + \frac{K_2(T_m^+) - K_1(T_m^-)}{2 \Delta T}; & T_m^- < T < T_m^+ \\ K_2(T); & T \geq T_m^+ \end{cases} \quad (4)$$

onde os índices "1" e "2" indicam respectivamente as propriedades do MMF nos estados sólido e líquido,  $L$  é o calor latente de fusão,  $T_m$  a temperatura de fusão e  $\Delta T$  a metade do intervalo de temperatura de mudança de fase, e

$$T_m^+ = T_m + \Delta T \quad (5)$$

$$T_m^- = T_m - \Delta T$$

A condição inicial e as condições de contorno necessárias para a solução da equação diferencial são dadas por:

$$T(y, 0) = T_m^- \quad (7)$$

que é a própria temperatura de solidificação do MMF;

$$\hat{K}(T) \frac{\partial T}{\partial y}(0, t) = h [T(0, t) - T_b(x)] \quad (8)$$

que é a energia transferida do MMF para o fluido de refrigeração por convecção, sendo  $h$  o coeficiente de convecção do fluido, e

$$-\hat{K}(T) A_c \frac{\partial T}{\partial y}(a, t) = \begin{cases} \dot{q}_p^0; & 0 \leq t \leq \Delta t_{on} \\ 0; & \Delta t_{on} < t < \Delta t_c \end{cases} \quad (9)$$

que é a energia gerada pelos componentes eletrônicos, onde  $A_c$  é a área perpendicular à direção do fluxo de calor,  $\dot{q}_p^0$  é a potência dissipada por unidade de área dos dispositivos eletrônicos,  $\Delta t_{on}$  o tempo ligado e  $\Delta t_c$  o ciclo de carga/descarga dos dispositivos eletrônicos.

**Acoplamento entre Material de Mudança de Fase e Fluido de Refrigerante.** É analisado a evolução da temperatura do fluido refrigerante através de um balanço de energia em um elemento de volume do fluido, como sugerido por Shamsundar [7].

Considerando que a variação da temperatura do fluido,  $T_b$ , não varia consideravelmente com o tempo, já que o tempo que o fluido leva para escoar pelo canal é muito pequeno comparado com os tempos de evolução da fronteira sólido-líquido do MMF, obtém-se a equação:

$$\bar{u} \frac{d T_b(x)}{dx} = \frac{2 h}{b C_f} [T(0, t) - T_b(x)] \quad (10)$$

Colocando o sistema de coordenadas se movendo com o fluido, tem-se que:

$$\bar{u} = \frac{dx}{dt} \quad (11)$$

que relaciona o tempo que o fluido escoou no canal e a posição do fluido no referido canal, obtendo-se a temperatura do fluido refrigerante ao longo do tempo e ao longo do canal de escoamento do fluido. Substituindo-se (11) em (10), tem-se:

$$\frac{d T_b(\tau)}{[T_m^+ - T_b(\tau)]} = 2 \frac{h \Delta t_{on}}{b C_f} \theta(0, \tau) d\tau \quad (12)$$

onde  $C_f$  é o calor específico volumétrico do fluido e,

$$\theta(0, \tau) = \frac{T(0, t) - T_b(\tau)}{T_m^+ - T_b(\tau)} \quad (13)$$

$$\tau = \frac{\Delta t}{\Delta t_{on}} \quad (14)$$

Sabendo-se que  $\theta(0, \tau)$  varia com  $\tau$  somente, efetua-se a integração, obtendo:

$$T_b(\tau) = T_m^+ - [T_m^+ - T_b(0)] \exp \left[ -2 \frac{h \Delta t_{on}}{b C_f} \int_0^\tau \theta(0, \tau) d\tau \right] \quad (15)$$

**Método de Solução.** Utiliza-se para a obtenção das equações algébricas a técnica numérica de volume de controle desenvolvida por Patankar [8], que consiste em integrar a equação diferencial em cada um dos volumes da discretização ilustrada na Figura 3.

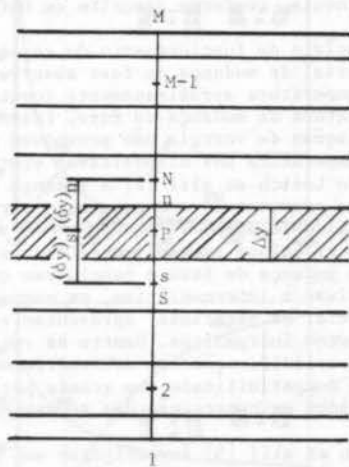


Figura 3. Discretização do material de mudança de fase

Considerando a formulação implícita, obtém-se a equação algébrica para os volumes de controle internos à malha de discretização:

$$-a_{sS} \theta_s^1 + [a_{po} + a_{s+n}] \theta_p^1 - a_{nN} \theta_N^1 = a_{po} \theta_p^0; \quad l < p < M \quad (16)$$

Para os volumes de controle dos contornos, aplica-se as condições de contorno na equação diferencial integrada nos volumes respectivos, obtendo para o volume de controle 1, aquele em contato com o fluido refrigerante, a equação:



$$\left[ a_{po} + Bi_1 A_b + a_n \right] \theta_P^{1-a} \theta_N^a = a_{po} \theta_P^0 ; P=1 \quad (17)$$

e para o volume de controle M, que está em contato com os dispositivos eletrônicos, as equações:

$$\left. \begin{aligned} -a_s \theta_s^1 + [a_{po} + a_s] \theta_P^1 &= a_{po} \theta_P^0 + L_1 q_P^0 ; 0 < \tau < 1 \\ -a_s \theta_s^1 + [a_{po} + a_s] \theta_P^1 &= a_{po} \theta_P^0 ; 1 < \tau < \Delta \tau_c \end{aligned} \right\} ; P=M \quad (18)$$

onde o expoente "1" indica o tempo seguinte e o expoente "0" o tempo atual, os índices em letras maiúsculas indicam os pontos nodais e as minúsculas as fronteiras dos volumes de controle. Sendo:

$$\theta(Y, \tau) = \frac{T(Y, t) - T_b(x)}{T_m - T_b(x)} \quad (19)$$

$$A_b = \frac{a}{b} \quad (20)$$

$$Bi_1 = \frac{h b}{K_1 (T_m)} \quad (21)$$

$$L_1 = \frac{a}{K_1 (T_m) A_c [T_m - T_b(\tau)]} \quad (22)$$

onde: a e b são as espessuras do MMF e do fluido refrigerante respectivamente.

Os coeficientes  $a_s$ ,  $a_{po}$  e  $a_n$  são determinados por:

$$a_s = \frac{\tilde{K}_s}{(\delta y)_s} \quad (23)$$

$$a_n = \frac{\tilde{K}_n}{(\delta y)_n} \quad (24)$$

$$a_{po} = \frac{\tilde{C} \Delta y}{\Delta t_{on} \Delta \tau} \quad (25)$$

Analisando as equações (23-25) observa-se que os coeficientes são funções das propriedades  $\tilde{C}$  e  $\tilde{K}$  do MMF, logo são funções da temperatura e da posição, portanto o método de solução é iterativo.

Uma discussão detalhada desta formulação pode ser encontrada em Toro [9].

## RESULTADOS

As Figuras 4, 5 e 6 ilustram a variação de temperatura da parede, junto aos dispositivos eletrônicos, em função do tempo. Considerando dois regimes de escoamento do fluido, regime laminar (Figuras 4 e 5) e regime turbulento (Figura 6).

A Figura 4 mostra a influência da variação da potência dissipada, constante durante o tempo ligado dos dispositivos eletrônicos, na temperatura da parede. Observa-se que quanto maior a potência dissipada maior é a temperatura da parede. A temperatura máxima ocorre no final do tempo ligado. Para uma potência dissipada de  $1000 \text{ W/m}^2$  verifica-se uma temperatura da parede de  $100^\circ\text{C}$ , que é a máxima temperatura especificada para os componentes eletrônicos, de modo que operem eficientemente.

A Figura 5 ilustra a influência da potência dissipada, variável durante o tempo ligado conforme a Figura 2. Verifica-se que para uma distribuição aleatória no tempo ligado não se tem praticamente variação da temperatura de parede, que é um indicativo do MMF, para fins na n-Eicosane, operar como um capacitor térmico.

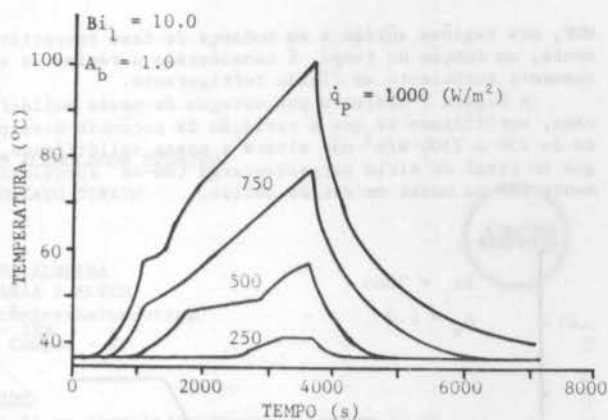


Figura 4. Influência da potência dissipada sobre a temperatura da parede

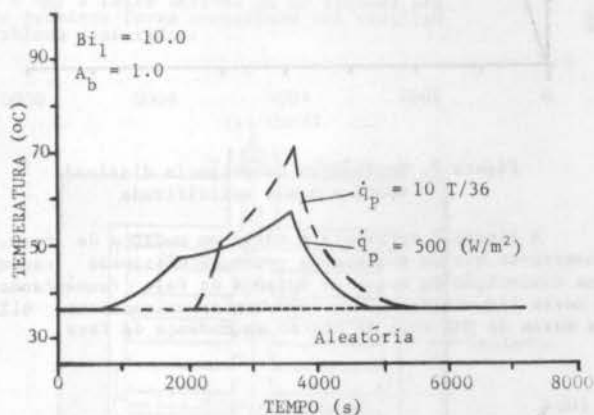


Figura 5. Influência da potência dissipada sobre a temperatura da parede

A Figura 6 mostra a influência da variação da potência dissipada, constante durante o tempo ligado, na temperatura de parede, sendo que o fluido refrigerante está escoando no regime turbulento. Observa-se que para uma potência acima de  $1000 \text{ W/m}^2$ , a temperatura de parede (considerada a própria temperatura dos componentes eletrônicos) é superior a  $100^\circ\text{C}$ .

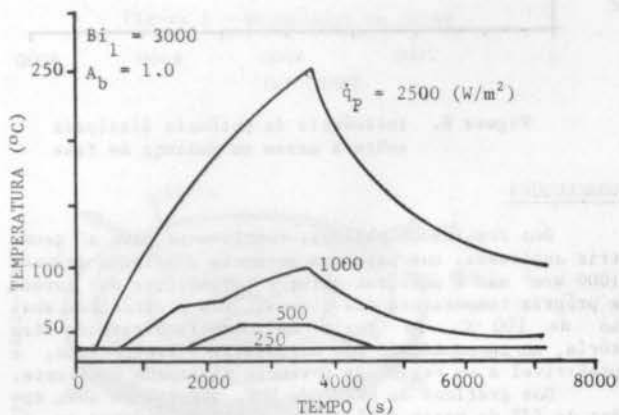


Figura 6. Influência da potência dissipada sobre a temperatura da parede

As Figuras 7 e 8 ilustram a variação da massa do

MMF, nas regiões sólida e em mudança de fase respectivamente, em função do tempo. É considerado o regime de escoamento turbulento no fluido refrigerante.

A Figura 7 mostra a porcentagem da massa solidificada, verificando-se que a variação da potência dissipada de 250 a 2500 W/m<sup>2</sup> não altera a massa solidificada, e que no final do ciclo carga/descarga tem-se aproximadamente 16% da massa em estado sólido.

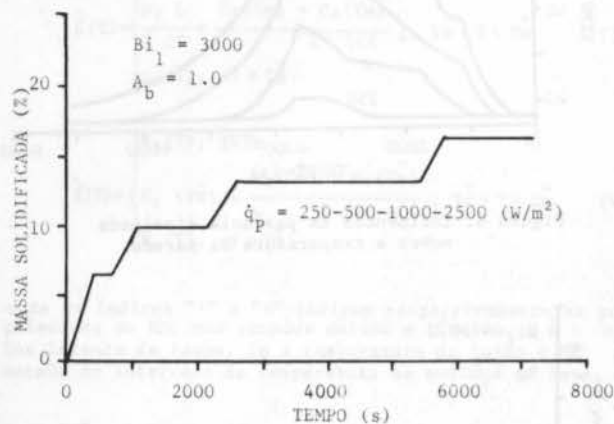


Figura 7. Influência da potência dissipada sobre a massa solidificada

A Figura 8 apresenta a massa em mudança de fase. Observa-se que um aumento da potência dissipada causa uma diminuição da massa em mudança de fase (aumentando a massa liquefeita). Para 2500 W/m<sup>2</sup> aproximadamente 61% da massa do MMF está na região em mudança de fase.

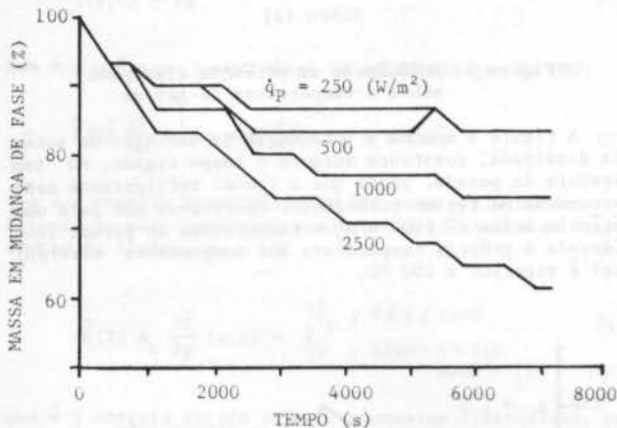


Figura 8. Influência da potência dissipada sobre a massa em mudança de fase

#### CONCLUSÕES

Dos resultados obtidos, concluem-se para a geometria analisada, que para uma potência dissipada acima de 1000 W/m<sup>2</sup> não é possível obter a temperatura da parede, a própria temperatura dos dispositivos eletrônicos, abaixo de 100 °C. Um regime de potência dissipada aleatória, no tempo ligado dos dispositivos eletrônicos, é preferível a um regime de potência dissipada constante.

Dos gráficos da massa do MMF, observa-se que apesar de 77% da massa (16% sólida e 61% em mudança de fase) estar sendo governado por condução de calor, tem-se 23% da massa do MMF na região líquida, o que torna importante o estudo da convecção natural para complementar este trabalho.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Oktay, S.; Hannemann, R. and Bar-Cohen, A., High heat from a small package. *Mechanical Engineering* pp. 36-42 (1986).
- [2] Lorsch, H.G.; Kauffman, K.W. and Denton, J.C., Thermal energy storage for solar heating and off-peak air conditioning. *Energy Conversion*, 15:1-8 (1975).
- [3] Abhat, A., Short term thermal energy storage. *Revue Phys*, 15: 477-501 (1980).
- [4] Humphries, W.R. and Griggs, E.I., A design handbook for phase-change thermal control and energy storage devices. *NASA-TP-1074* (1977).
- [5] Witzman, S.; Shitzer, A and Zvirin, Y., Simplified calculation procedure of a latent heat reservoir for stabilizing the temperature of electronic devices. *Heat Transfer in Electronic Equipment*, 28:29-34 (1983).
- [6] Bonacina, C.; Comini, G.; Fasano, A. and Primicero, M., Numerical solution phase-change problems. *Int. J. Heat Transfer*, 16: 1825-1832 (1973).
- [7] Shamsundar, N. and Srinivasan R., Effectiveness-NTU charts for heat recovery from latent heat storage units. *J.Solar Energy Engineering* 102: 263-271 (1980).
- [8] Patankar, S.V., Numerical heat transfer and fluid flow. *McGraw-Hill Book Co.*, (1980).
- [9] Toro, P.G.P., Estabilização da temperatura de dispositivos eletrônicos utilizando material de mudança de fase. *Tese de Mestrado*, ITA (1988).

#### ABSTRACT

It is analysed in this work a cooling system of electronic devices, arranged in horizontal plates and using Phase Change Material (PCM), which actuate as thermal capacitor. The PCM problem is formulated assuming that, the heat transfer process it is being controlled by conduction. The energy equation in written under the enthalpy form, so, avoiding a non linearity, caused by solid-liquid boundary movement in the PCM. This PCM problem is solved through numerical formulation of control volum. It is presented here the wall temperature, the solidified mass and the phase change, by considering a n-Eicosane paraffin as a PCM and the water as a cooling fluid.

MODELAMENTO NUMÉRICO DE UM ACUMULADOR TÉRMICO  
A CALOR LATENTE E CONTATO DIRETO

ABCN

ABCN

ELIZABETH MALTA DE ALMEIDA  
CARLOS LINEU DE FARIA E ALVES  
Divisão de Engenharia Mecânica-Aeronáutica  
-CTA - ITA - IEM  
12225 - São José dos Campos - SP

RESUMO

Analisa-se numericamente o comportamento de um acumulador de calor a contato di- reto, utilizando-se a mistura eutética  $KNO_3-NaNO_3$  como material de mudança de fase (MMF) e ar como fluido de trabalho. A finalidade deste sistema é a recuperação de re- jeitos industriais na faixa de temperatura de 200 a 300°C e a termotransformação de um sinal térmico cíclico em sinal restituído a nível de temperatura constante. O pro- blema de mudança de fase é formulado usando-se a equação da energia na sua forma en- talpica. As equações algébricas foram obtidas pela técnica dos volumes de controle. A solução do problema do escoamento do ar sobre o MMF é feita através de um esquema pre- ditor-corretor de segunda ordem. Os resultados teóricos foram comparados com resulta- tados experimentais e alguns parâmetros do problema discutidos.

INTRODUÇÃO

A recuperação do calor rejeitado por gases de com- bustão não constitui unicamente uma economia de ener- gia, mas pode em certos casos condicionar a rentabi- lidade de um processo de fabricação. Este calor é, em geral, utilizado para o pré-aquecimento do ar de com- bustão e para a produção de vapor.

Uma grande parte destes rejeitos térmicos se a- presentam com temperaturas na faixa de 200 a 300°C. Os métodos de recuperação existentes estão com frequên- cia comprometidos com a defasagem existente entre a ocorrência dos rejeitos térmicos e a sua utilização po- tencial. Além disso estes rejeitos, frequentemente li- gados a processos descontínuos, são por natureza in- termitentes.

É necessária então a utilização de um sistema que permita, não só, a recuperação da energia térmica contida nestes rejeitos mas também, que seja capaz de transformar um sinal térmico cíclico, em um sinal res- tituído a nível de temperatura constante.

Este objetivo pode ser atingido através de um a- cumulador térmico a calor latente e contato direto en- tre o material de mudança de fase e o fluido de trans- porte.

O material de mudança de fase escolhido é a mis- tura eutética  $KNO_3 - NaNO_3$ , cuja temperatura de fu- são é 222°C. O fluido de transporte é o ar e a faixa de temperatura de estudo situada entre 200 a 300°C.

Através de um modelo numérico, pode-se analisar a influência de diferentes parâmetros sobre o funcio- namento do acumulador.

O acumulador de calor é representado na figura 1. Ele consiste de um recipiente cilíndrico de altura  $H=0,9m$  e de diâmetro  $D=0,6m$ . O MMF é disposto dentro de pratos empilhados verticalmente. Dentro de cada pra- to, aletas circulares perfuradas são dispostas concen- tricamente e meio imersas no MMF.

O estudo da influência dos diferentes parâmetros de funcionamento é feito para um prato representativo do conjunto. (Figura 2).

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Como o prato contendo o MMF é simétrico em rela- ção ao seu eixo vertical a análise do problema é fei- ta sobre a região de simetria mostrada na figura 3.

As equações do problema são escritas para esta região de simetria com  $T_{bi}$  e  $T_{bf}$  representando respec- tivamente as temperaturas de entrada e saída do ar. A espessura da camada do MMF é representada por  $(f)$  e a espessura da camada de ar sobre o MMF por  $(a)$ .

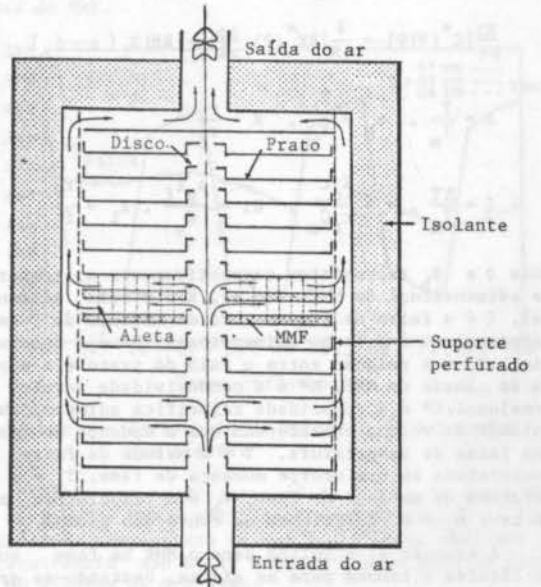


Figura 1 - Acumulador de calor.

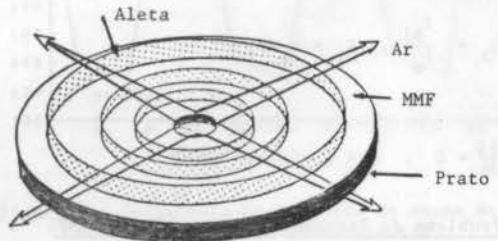


Figura 2 - Geometria de um prato.

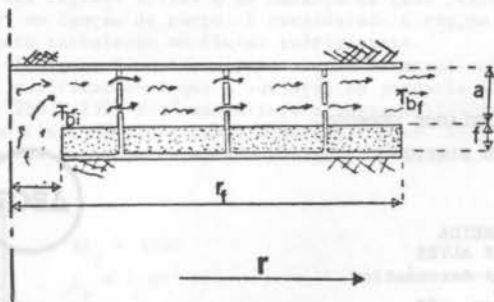


Figura 3 - Região de simetria do problema

Problema de Mudança de Fase.

Para esta análise supõe-se: ausência de convecção natural e que a transferência de calor no sentido da espessura do MMF é negligenciável em relação a transferência de calor no sentido radial, regime transitório e ausência de geração interna de calor.

O balanço de energia feito sobre uma porção elementar de uma região situada entre duas aletas no sentido do escoamento do fluido pode ser expressa, na forma adimensional, pela seguinte equação:

$$\frac{RQ}{\partial \tau} [C^*(\phi)] = \frac{\partial}{\partial R} [RK^*(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial R}] - Bi X_L [\phi - \phi_b] \quad (1)$$

com:

$$\phi = \frac{T}{T_m}, \quad \phi_b = \frac{T_b}{T_m}, \quad R = \frac{r}{r_f}$$

$$\xi = \frac{\Delta T}{T_m}, \quad \tau = \frac{K_s t}{r_f C_s}, \quad Bi = \frac{h_g r_f}{K_s}, \quad X_L = \frac{r_f}{f}$$

onde  $\phi$  e  $\phi_b$  representam respectivamente a temperatura adimensional do MMF e do ar,  $R$  é o raio adimensional,  $\xi$  é a faixa de temperatura de mudança de fase adimensional,  $\tau$  é o tempo adimensional,  $Bi$  é o número de Biot,  $X_L$  é a relação entre o raio do prato e a espessura da camada do MMF,  $K^*$  é a condutividade térmica adimensional,  $C^*$  é a capacidade calorífica adimensional por unidade de volume considerado que a mudança de fase em uma faixa de temperatura,  $T$  é a metade da faixa de temperatura em que ocorre mudança de fase,  $T_m$  é a temperatura de mudança de fase,  $T_b$  é a temperatura média do ar e  $h_g$  é o coeficiente de convecção global.

A equação 1. é válida para o MMF na fase sólida ou líquida e também para as aletas, bastando-se apenas considerar as propriedades da região analisada.

Para o MMF supõe-se conforme sugerido por Bonaccina et alii [1] que a capacidade calorífica do MMF na fase sólida ou líquida ( $C_s$  e  $C_l$ ) não dependem da temperatura no intervalo  $T - \Delta T < T < T + \Delta T$ , e que a condutividade de térmica do MMF na fase sólida ou líquida ( $K_s$  e  $K_l$ ) variam linearmente neste intervalo.

As condições de contorno, adimensionais, do problema são:

$$\phi_i = \frac{T_{bi}}{T_m}, \quad R_i = r_i / r_f \quad (2)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = 0, \quad R = 1 \quad (3)$$

Problema do Escoamento do Ar sobre o MMF.

Um balanço de energia é feito sobre uma porção elementar do fluido no sentido de seu escoamento.

Supõe-se que a temperatura média do ar não varia de forma significativa com o tempo. Esta simplificação é justificada pelo fato de que o tempo necessário para a mudança de fase é muito maior que o tempo necessário

para o fluido atravessar o prato. [2]

A equação do balanço térmico, na forma adimensional é:

$$\frac{d\phi_b}{dR} = A^* [St(\phi - \phi_b) - St_p(\phi_b - \phi_{amb})] \frac{r}{r_i} \quad (4)$$

com

$$St = \frac{h_g}{\rho v_1 C}, \quad St_p = \frac{K_p}{\rho v_1 C}$$

$$A^{**} = \frac{r_f}{a}, \quad \phi_{amb} = \frac{T_{amb}}{T_m}$$

onde  $St$  e  $St_p$  representam respectivamente o número de Stanton de referência para a troca de calor entre MMF-ar e ar-parede do acumulador,  $\phi_{amb}$  é a temperatura adimensional do ar no exterior,  $\rho, C$  representam a densidade e a capacidade calorífica do ar,  $v_1$  a velocidade do ar na entrada do prato e  $K_p$  é uma condutância global de transferência entre o fluido a temperatura  $T_b$  e o meio ambiente a temperatura  $T_{amb}$ .

SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

A solução da equação diferencial (1) representando o problema de mudança de fase e de condução de calor através das aletas é feita utilizando-se a técnica dos volumes de controle. [3]

A região de estudo é dividida em um número conveniente de volumes de controle e a equação (1) é integrada em um volume de controle (figura 4).

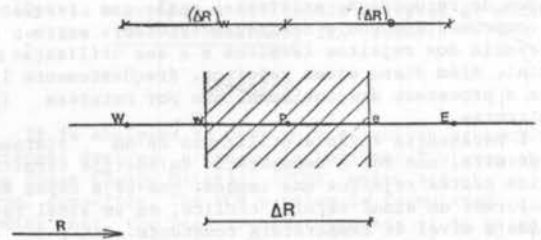


Figura 4 - Representação de um volume de controle.

Os índices  $e$  e  $w$  representam respectivamente as faces este e oeste do volume de controle e  $P$  o ponto nodal central.

Assume-se conforme sugerido por Patankar [3] uma variação da temperatura com o tempo dada pela seguinte expressão:

$$\int_{\tau}^{\tau + \Delta \tau} \phi \, d\tau = [m \phi_p^1 + (1-m) \phi_p^0] \Delta \tau \quad (5)$$

Deste modo obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \text{apo} [\phi_p^1 - \phi_p^0] &= a_e [m \phi_E^1 + (1-m) \phi_E^0] + \\ &+ a_w [m \phi_W^1 + (1-m) \phi_W^0] - a_e [m \phi_p^1 + (1-m) \phi_p^0] - \\ &- a_w [m \phi_p^1 + (1-m) \phi_p^0] - a_{sc} [m \phi_p^1 + (1-m) \phi_p^0] + \\ &+ a_{sc} [m \phi_{bp}^1 + (1-m) \phi_{bp}^0] \end{aligned} \quad (6)$$



com

$$apo = (R^2 - R_w^2) \frac{C^*}{2\Delta\tau}, \quad a_e = \frac{R K_e^*}{(\Delta R)_e}$$

$$a_w = \frac{R K_w^*}{(\Delta R)_w}, \quad a_{sc} = B_1 X_L \left( \frac{R_e^2 - R_w^2}{2} \right) \quad (7)$$

Para as faces do volume de controle W e E situadas respectivamente nos limites  $R = r_i/r_f$  e  $R=1$  têm-se:

$$\text{em } P = 1 \quad \phi_w = \phi_p = \phi_i \quad (8)$$

$$\text{e em } P = \text{IMAX} \quad \phi_E^1 = \phi_p^1 = \frac{4}{3} \phi_{p-1}^1 - \frac{1}{3} \phi_{p-2}^1 \quad (9)$$

obtida através de um desenvolvimento em série de Taylor. A equação (4) correspondente ao balanço térmico no fluido pode ser reescrita como:

$$\frac{d\phi_b}{dR} + [(A^*St + A^*St_p) \phi_b - (A^*St\phi + A^*St_p\phi_{amb})] \frac{r}{r_i} = 0 \quad (10)$$

Fazendo-se:

$$X = (A^*St + A^*St_p) \frac{r}{r_i} = X(R) \quad (11)$$

$$Y = -(A^*St\phi + A^*St_p\phi_{amb}) \frac{r}{r_i} = Y(R) \quad (12)$$

através de a equação do balanço térmico no fluido to ma a seguinte forma:

$$\frac{d\phi_b}{dR} + X(R)\phi_b + Y(R) = 0 \quad (13)$$

com

$$\phi_b(r_i/r_f) = \phi_i(\tau) \quad (14)$$

Num instante fixo a equação dando a distribuição de temperatura no fluido ao longo do prato  $\phi_b = \phi_b(R)$  se identifica com uma equação diferencial de primeira ordem, com coeficientes constantes. Este tipo de problema, dito de valor inicial, é aqui resolvido numericamente através de um esquema do tipo preditor-corretor de segunda ordem em diferenças finitas.

O balanço térmico no MMF é resolvido simultaneamente com o balanço térmico no fluido, de modo a se de terminar  $\phi$  e  $\phi_b$  a qualquer instante e em qualquer po sição R do prato.

## RESULTADOS E CONCLUSÕES

A figura 5 mostra a comparação de resultados obti dos através do modelo numérico, para uma formulação ex plicita, com resultados experimentais. [4]

A experiência foi realizada alimentando-se o acu mulador com ar alternativamente a 270 e 130°C, segu in do seqüências de 15 minutos. A vazão volumétrica do ar foi fixada em 4,8 Nm<sup>3</sup>/h e isto em presença de 4 aletas de espessura 0,1cm.

Nota-se que os resultados teóricos aqui obtidos estão bem próximos dos resultados experimentais. Pode-se concluir que os resultados aqui encontrados são sa tisfatórios e comprovam a eficiência do método utiliza do.

Os parâmetros analisados numericamente são: espe sura das aletas, a massa do MMF ligada à duração dos períodos de intermitência e o número de aletas.

Na figura 6 comparam-se os resultados obtidos pa ra três diferentes espessuras de aletas. Este ensaio foi realizado alimentando-se o acumulador, com ar, al ternativamente a 270 e 130°C seguindo seqüências de 15 minutos. A vazão volumétrica sendo fixada em 11,6 Nm<sup>3</sup>/h e isto em presença de 4 aletas e uma massa de MMF de 4,5 kg.

Observa-se a partir desta figura a pouca influên cia deste parâmetro sob a constância da temperatura de

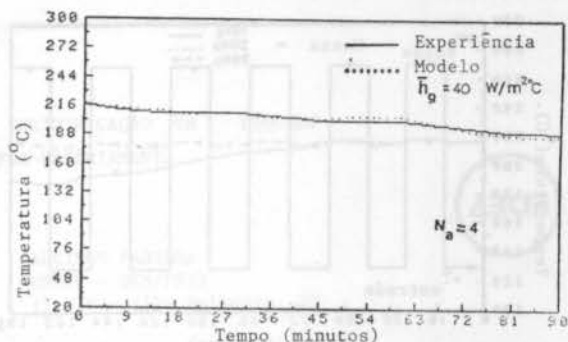


Figura 5 - Comparação dos resultados teóricos com resultados experimentais.

saída do ar. Um maior aumento na espessura das aletas poderá eventualmente conduzir a melhores resultados, mas a espessura de 0,4cm já é demasiado grande tendo em vista as dimensões do prato (52cm de diâmetro e 1,5cm de altura).

Para analisarmos a influência da variação da massa sobre a qualidade do amortecimento da temperatura de entrada do ar, utilizou-se o exemplo do ensaio descrito anteriormente fazendo-se apenas modificar a massa do MMF.

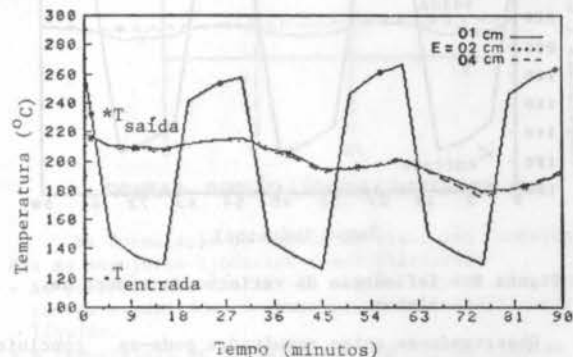


Figura 6 - Influência da variação da espessura das aletas.

Pode-se constatar, através da figura 7, que a massa de 15kg de MMF é suficiente para amortecer as flutuações de temperatura de uma fonte cujos períodos de intermitência são de 15 minutos e isto para um tempo de 90 minutos de processo.

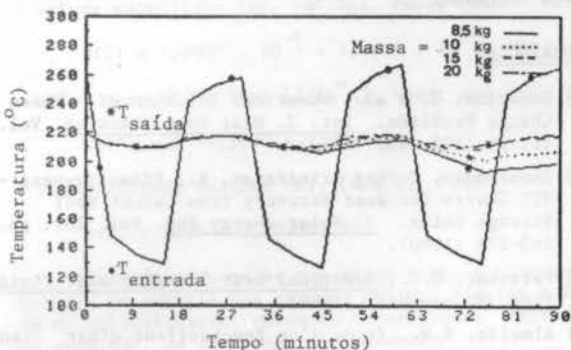


Figura 7 - Influência da variação da massa do MMF por um período de 90 minutos.

Observando-se agora a figura 8 percebe-se que para um período de 180 minutos de processo a massa de 15kg é insuficiente. Neste caso a massa ótima é de 20kg de MMF.



numerical method. This phase-change heat storage is supposed to recover industrial heat from 200°C up to 300°C and to transform an alternate signal into a constant one. This transfer is made from the hot air to phase change material (KNO<sub>3</sub> - NaNO<sub>3</sub>) by direct contact. The energy equation is solved in its enthalpy form by control volume technic. The numerical results are compared with experimental ones and the influence of some, parameters discussed.

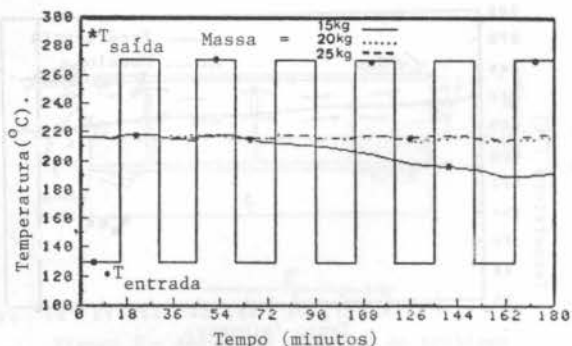


Figura 8 - Influência da variação da massa do MMF por um período de 180 minutos.

Na figura 9 apresentam-se os resultados obtidos, variando-se o número de aletas para uma massa de 15kg de MMF com períodos de intermitência de 15 minutos e uma vazão de ar de 11,6 Nm<sup>3</sup>/h.

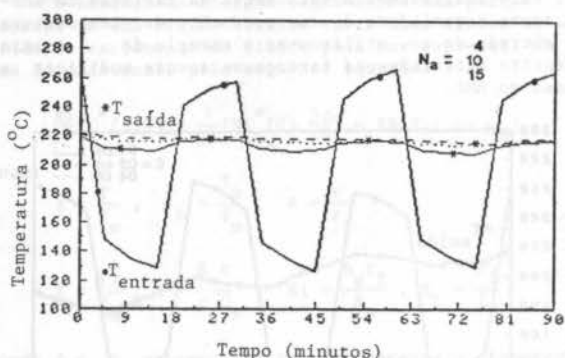


Figura 9 - Influência da variação do número de aletas.

Observando-se estes resultados pode-se concluir que o aumento do número de aletas conduz a uma temperatura de saída mais constante. Entretanto, nota-se que existe um número ótimo a partir do qual um aumento no número de aletas não irá conduzir a melhores resultados.

Através do modelo numérico aqui proposto podemos obter resultados que nos levam a concluir que o acumulador de calor apresentado é capaz de transformar um sinal térmico de entrada intermitente em um sinal de saída contínuo.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Bonacina, C. e al., Numerical Solution of Phase Change Problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 16, pp.1825-1832 (1973).
- [2] Shamsundar, N. and Srinivasan, R., Effectiveness - NTU Charts for Heat Recovery from Latent Heat Storage Units. *J. Solar Energy Eng.* Vol. 102, pp. 263-271 (1980).
- [3] Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill (1980).
- [4] Almeida, E.M., Etude d'un Prechauffeur d'air en Continu utilisant um Stockage Latent. Application: La Valorisation des Rejets Thermiques Intermittents. *These de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France* (1987).

#### ABSTRACT

A phase-change heat storage is analysed by a

ESTUDO EXPERIMENTAL DA FRENTE DE SOLIDIFICAÇÃO EM LÍQUIDO CONFINADO SUBMETIDO A SUPER-RESFRIAMENTO



KAMAL A.R. ISMAIL  
UNICAMP - DEM/FEC  
13.081 - Campinas, SP

ALCIDES PADILHA  
UNESP - DEM/FEIS  
15.378 - Ilha Solteira, SP

RESUMO

É desenvolvido um estudo teórico e experimental do processo de solidificação por super-resfriamento de líquido confinado. Considerando o balanço de energia nas regiões sólida, líquida e frente de solidificação, é proposto um modelo teórico, unidimensional, transiente, com propriedades físicas da região sólida dependentes da temperatura. Um aparato experimental é desenvolvido, obtendo-se o processo de solidificação por super-resfriamento, utilizando-se nitrogênio líquido como refrigerante.

INTRODUÇÃO

Problemas de condução de calor envolvendo mudança de fase, ocorrem tanto na natureza como em aplicações industriais sendo de considerável importância na indústria de vidros, aço, gelo e recentemente em sistemas de estocagens, de refrigeração de produtos e conservação de energia.

O crescente interesse neste campo, evidenciado pela grande quantidade de trabalhos disponíveis na literatura, é devido às complexidades, oriundas do movimento da interface sólido-líquido e da dependência das propriedades físicas da região sólida, com a temperatura. Isto torna o problema não linear. Assim sendo as soluções exatas disponíveis são limitadas e restritas a regiões unidimensional, infinita e semi-infinita, Carslaw e Jaeger [1], Özisik [2].

Em uma região finita, sujeita a mudança de fase, a taxa de transferência de calor, pode ser admitida em duas superfícies extremas, o que dará origem a duas frentes de solidificação, movendo-se uma contra a outra. Se as taxas de transferência de calor nestas superfícies forem iguais, o problema torna-se simétrico. Para estas situações e considerando que as propriedades físicas das regiões sólidas não dependem da temperatura, várias soluções aproximadas foram obtidas [3-5].

Neste trabalho, é apresentado a solução, para um problema de mudança de fase, unidimensional, com propriedades físicas da região sólida dependentes da temperatura, envolvendo movimento da frente de solidificação. Foi desenvolvido um aparato experimental, para super-resfriamento, da região de mudança de fase, utilizando-se nitrogênio líquido como refrigerante. Os dados experimentais foram, então, comparados com os resultados teóricos.

ANÁLISE TEÓRICA

Considera-se uma região líquida homogênea, limitada por duas paredes planas e paralelas, estendendo-se para o infinito nas direções y e z, e separadas na direção-x, por uma largura finita 2L, conforme ilustra a figura 1. Admite-se o líquido inicialmente a uma temperatura T<sub>i</sub>, acima de sua temperatura de mudança de fase T<sub>f</sub> e que para instantes de tempo t > 0, as paredes localizadas em x = 0 e x = 2L, são instantaneamente super-resfriadas a uma temperatura T<sub>w</sub>, mantida constante e menor que T<sub>f</sub>. Nestas condições, obtém-se a formação simétrica de camadas sólidas, nas paredes x = 0 e x = 2L, devido ao estabelecimento do gradiente de temperatura entre parede e líquido. O encerramento do processo ocorre com o encontro das frentes de solidificação no centro da região x = L.



FIGURA 1 - REGIÃO LÍQUIDA LIMITADA EM X

Na formulação do modelo teórico, são consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- As propriedades físicas da região líquida são constantes e admitidas à temperatura de solidificação do líquido.
- A temperatura de solidificação da região líquida é admitida definida e constante.
- O mecanismo de transferência de calor na região líquida é considerado somente por condução.
- O líquido é assumido como Newtoniano e o sistema de equações escrito para a metade da região, devido à simetria para x = L.

Para as propriedades físicas da água, líquido utilizado para o estudo da mudança de fase, são empregadas as seguintes correlações:

- volume específico (v), [m<sup>3</sup>/Kg], Perry [6],

$$v(T) = 1,0907 \cdot 10^{-3} + 1,4635 \cdot 10^{-7} \cdot T$$

- calor específico (Cp) [J/Kg °C], Weast and Astle [7],

$$C_p(T) = 2116,5607 + 7,2845 \cdot T$$

- condutividade térmica (k), [W/m °C], Powell [8],

$$k(T) = 2,09 - 0,003553 \cdot T$$

Considerando-se as hipóteses simplificadoras e o balanço de energia nas regiões sólida, líquida e frente de solidificação, obtém-se a formulação matemática do problema, na sua forma dimensional.

Para uma análise mais geral, as equações são adimensionalizadas, aplicando-se os parâmetros adimensionais,

$$x = \bar{x}/L \quad s = \bar{s}/L \quad \eta = \frac{\bar{x}}{\bar{s}} \quad \xi = \frac{\bar{x} - \bar{s}}{L - \bar{s}}$$

$$t = \frac{\alpha \cdot Ste}{L} \cdot \bar{t} \quad T = \frac{\bar{T} - T_f}{T_f - T_w}$$

As transformadas de Landau foram aplicadas na

## APARATO EXPERIMENTAL E PROCEDIMENTOS

Um esquema do aparato experimental desenvolvido é apresentado nas figuras 2 e 3.

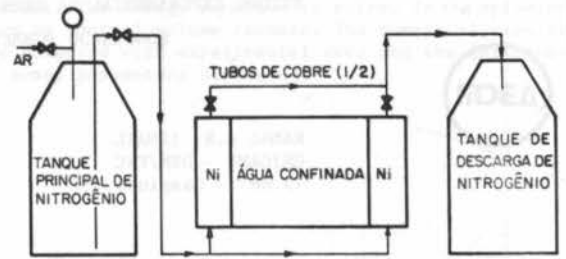


FIGURA 2 - ESQUEMA DO APARATO EXPERIMENTAL



FIGURA 3 - DETALHES DA SEÇÃO DE TESTE

As dimensões internas da seção de teste são de 1000 mm de comprimento, 100 mm de largura na direção do movimento da interface e 34 mm de altura. As paredes da seção de teste, através das quais é aplicado o super-resfriamento, são formadas pelas próprias paredes dos dois canais de circulação de nitrogênio. Para o topo do canal (superfície graduada para observação visual do fenômeno) e para o fundo, onde foram fixados 18 termopares, cobre-constantan, para controle das temperaturas internas das paredes super-resfriadas e do líquido confinado, utilizou-se placas de acrílico de 12 mm de espessura. As duas superfícies restantes foram isoladas. Devido ao aparecimento de trincas nas placas de acrílico, em contato com as superfícies de cobre, para temperaturas abaixo de  $-120^{\circ}\text{C}$ , foi aplicado uma camada de silicone industrial, como isolante térmico. A circulação de nitrogênio, nos canais de super-resfriamento, foi mantida por injeção de ar à pressão constante de 0,5 atm, no tanque de armazenamento de nitrogênio. Uma câmara fotográfica (marca ASAHI PENTAX, equipada com lente tipo angular e filme 35 mm, 400 ASA), fixada a uma distância de 1200 mm, do centro da seção de teste, registrou o crescimento da camada sólida em intervalos de tempo de 60 segundos. As temperaturas foram medidas por um registrador de 20 canais, marca FLUK. Os resultados experimentais são mostrados na figura 4.

## APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados teóricos e experimentais para a frente de solidificação são mostrados na figura 4, para uma temperatura de super-resfriamento  $T_w = -170^{\circ}\text{C}$ , e para uma temperatura inicial do líquido de  $1,7^{\circ}\text{C}$ .

A duração do teste experimental foi de 13 minutos, quando a espessura da camada solidificada atingiu 40 mm. Através do modelo teórico foi possível acompanhar o fenômeno até um tempo de aproximadamente 19 minutos, quando a espessura da camada solidificada atingiu 48,53 mm. A espessura de sólido máxima seria de 50 mm. A partir do tempo igual a 19 minutos, a velocidade da interface líquido-sólido atinge valores da ordem de 2,5 mm/min, conforme pode ser observado na figura 5, exigindo uma sub-relaxação no passo de tempo do esquema numérico, elevando-se o tempo computacional.

adimensionalização das equações, a fim de facilitar o esquema numérico do problema, resultando no seguinte sistema de equações:

### Região Sólida

$$\rho(T) C_p(T) \left[ \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\eta}{s} \frac{ds}{dt} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] = K(T_s) \frac{1}{\alpha Ste} \left( \frac{1}{s} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - \frac{\beta(T_f - T_w)}{\alpha Ste s^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2 \quad (1)$$

### Região Líquida

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \left( \frac{1-\xi}{1-s} \right) \frac{ds}{dt} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \left( \frac{1}{1-s} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \quad (2)$$

sujeitas as seguintes condições inicial e de contorno:

$$T(\xi, t) = T_i, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad t = 0 \quad (3)$$

$$T(\eta, t) = -1, \quad \eta = 0, \quad t > 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(\xi, t)}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 1, \quad t > 0 \quad (5)$$

$$T(\xi, t) = T(\eta, t) = 0, \quad \eta = 1, \xi = 0, \quad t > 0 \quad (6)$$

$$\frac{K(T)}{s} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \left( \frac{1}{1-s} \right) \frac{\partial T}{\partial \xi} = \gamma \frac{ds}{dt}, \quad \eta = 1, \xi = 0, \quad t > 0 \quad (7)$$

onde:

$$Ste = C_p(T_f - T_w)/C_L, \quad \alpha = k/\rho C_p$$

$$\beta = v(T) \left( \frac{\partial k(T)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta}, \quad \gamma = \rho(T_f)/\rho$$

$$K(T) = k(T)/k$$

A relação  $ds/dt$ , pode ser interpretada como a velocidade da frente de solidificação e os termos que a contém, nas equações (1) e (2), podem ser interpretados como termos pseudoconvectivos. A pseudoconvecção é gerada pela imobilização da interface, Sparrow and Chuck [5].

## MÉTODO DE SOLUÇÃO

O sistema de equações (1) - (7), foi discretizado aplicando-se a técnica das diferenças finitas e o sistema de equações algébricas não lineares, resolvido numericamente.

Foi estabelecido 10 pontos, igualmente espaçados, para cada região do sistema de mudança de fase. Este número de pontos foi adotado considerando o problema da estabilidade na análise numérica, a precisão do esquema numérico e o tempo computacional.

As equações da energia (1) e (2), relativas às regiões sólida e líquida, foram discretizadas utilizando-se o método implícito de Crank-Nicolson. O sistema de equações resultantes foi resolvido pelo método iterativo de Gauss-Seidel, mas suas derivadas de tempo,  $\partial T/\partial t$ , assim como a equação (7), do balanço de energia na interface, calculadas explicitamente pelo método preditor-corretor de Milne, para manter a estabilidade numérica.

Para inicializar o processo, é estabelecido uma variação degrau de temperatura na parede resfriada, o que dificulta a partida do esquema numérico para  $t = 0$ , já que a espessura da casca sólida na parede também é nula. Isto foi contornado admitindo uma espessura inicial para a casca sólida da ordem de  $s = 10^{-2}$  e uma solução analítica, para este instante. A velocidade da frente de solidificação, neste início, atinge seu valor máximo, devido ao elevado gradiente de temperatura, requerendo passos de tempo muito pequenos da ordem de 0,001 segundos. Após os instantes iniciais, da ordem de 2 segundos, para um gradiente de temperatura de  $-170^{\circ}\text{C}$ , foi aplicado um fator de relaxação 1,5, em cada passo de tempo. Os resultados teóricos são apresentados nas figuras 4, 5 e 6.

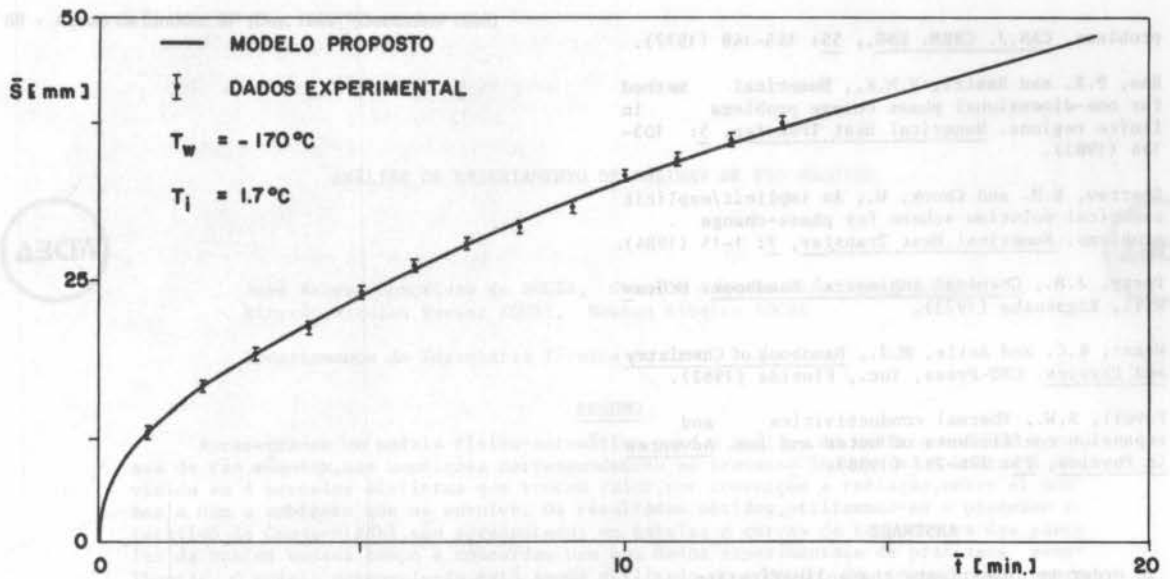


FIGURA 4 - DESENVOLVIMENTO DA FRENTE DE SOLIDIFICAÇÃO

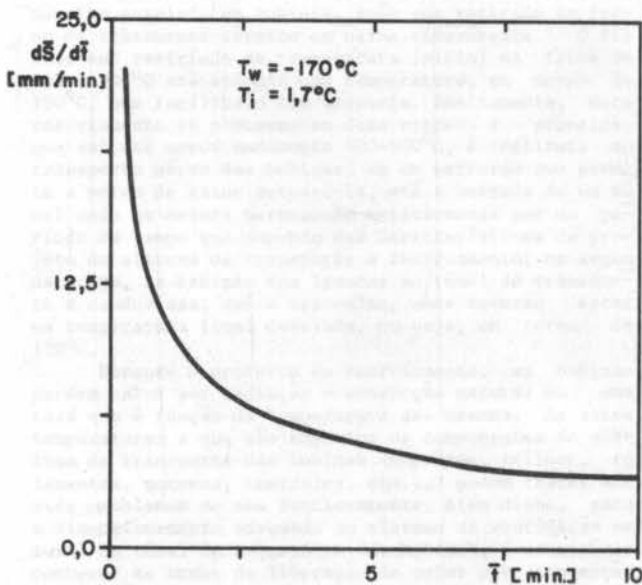


FIGURA 5 - VELOCIDADE DA FRENTE DE SOLIDIFICAÇÃO

O desenvolvimento dos perfis de temperatura na região sólida é mostrado na figura 6.

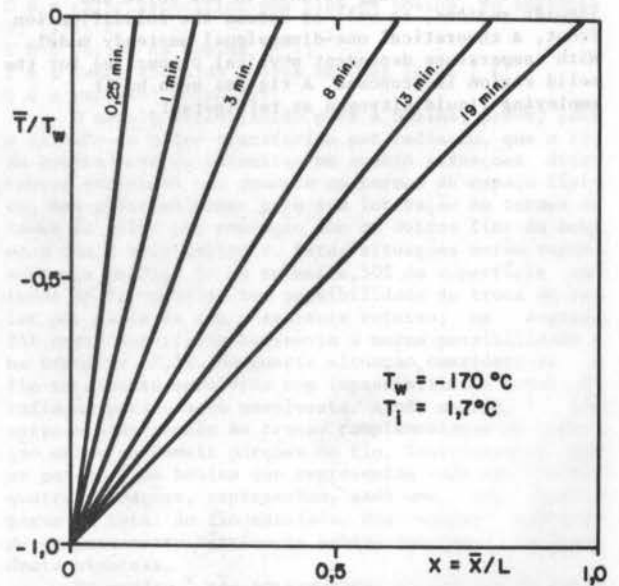


FIGURA 6 - EVOLUÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA NA REGIÃO SÓLIDA.

CONCLUSÃO

O modelo de solução proposto forneceu resultados que estão em boa concordância com os dados experimentais, embora não tenha sido possível compará-lo com resultados de outros modelos, por falta de dados disponíveis na literatura relativos ao tipo de equacionamento utilizado.

REFERÊNCIAS

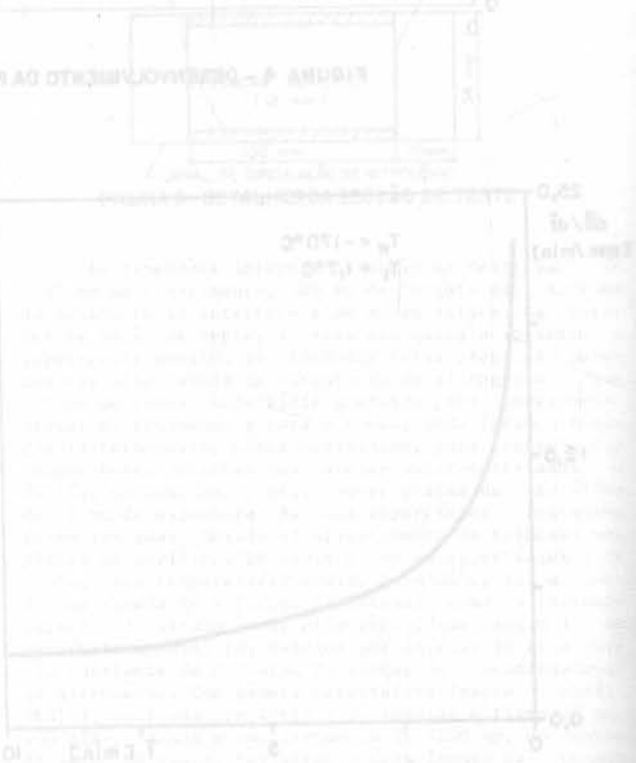
- [1] Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., Conduction of Heat in Solids, 2ª ed., Cap. 11, Clarendon, Oxford (1959).
- [2] Özisik, M. Necati, Heat Conduction. Ed. John Willey & Sons (1980).
- [3] Özisik, M.N. and Guceri, S.I., A variable eigenvalue approach to the solution of phase change

problems, CAN.J. CHEM. ENG., 55: 145-148 (1977).

- [4] Rao, P.R. and Sastri, V.M.K., Numerical method for one-dimensional phase change problems in finite regions. Numerical Heat Transfer, 5: 103-114 (1983).
- [5] Sparrow, E.M. and Chuck, W., An implicit/explicit numerical solution scheme for phase-change problems. Numerical Heat Transfer, 7: 1-15 (1984).
- [6] Perry, J.H., Chemical engineers' handbook. McGraw Hill, Kogakusha (1973).
- [7] Weast, R.C. and Astle, M.J., Handbook of Chemistry and Physics. CRC Press, Inc., Florida (1982).
- [8] Powell, R.W., Thermal conductivities and expansion coefficients of water and ice. Advances in Physics, 25: 276-297 (1958).

**ABSTRACT**

In order to investigate the solidification process in confined liquids submitted to superfreezing a theoretical and experimental study is developed. Considering the energy balance in the solid and liquids regions, as well as across the solidification front, a theoretical one-dimensional unsteady model. With temperature dependent physical properties for the solid region is proposed. A rig has been built employing liquid nitrogen as refrigerant.





ANÁLISE DE RESFRIAMENTO DE BOBINAS DE FIO MÁQUINA



José Rubens Gonçalves de SOUZA, Geraldo Augusto Campolina FRANCA,  
Ricardo Nicolau Nassar KOURY, Newton Ribeiro ROCHA

Departamento de Engenharia Térmica da UFMG

RESUMO

Apresenta-se um modelo físico-matemático para a análise do resfriamento de bobinas de fio máquina, nas condições correspondentes ao processo industrial. A bobina é dividida em 4 parcelas distintas que trocam calor, por convecção e radiação, entre si mesmas e com o ambiente que as envolve. Os resultados obtidos, utilizando-se o processo iterativo de Gauss-Siedel, são apresentados em tabelas e curvas de temperatura das parcelas da bobina versus tempo e concordam bem com dados experimentais de processos semelhantes. O modelo desenvolvido está sendo utilizado no projeto de instalações para transporte de bobinas em indústria siderúrgica.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho estuda o resfriamento de fio máquina enrolado em bobinas, após sua retirada de forno de tratamento térmico em usina siderúrgica. O fio deve ser resfriado de temperatura inicial na faixa de 700 a 900°C até atingir uma temperatura, em torno de 150°C, que facilita o seu manuseio. Basicamente, este resfriamento se processa em duas etapas: a primeira, que vai até aproximadamente 400-500°C, é realizada no transporte aéreo das bobinas, em um percurso que permite a perda de calor necessária, até a entrada de um túnel onde as mesmas permanecem estacionadas por um período de tempo que depende das características de projeto do sistema de transporte e resfriamento; na segunda etapa, as bobinas são levadas ao túnel de transporte e conduzidas, até a sua saída, onde deverão estar na temperatura final desejada, ou seja, em torno de 150°C.

Durante o processo de resfriamento, as bobinas perdem calor por radiação e convecção natural em uma taxa que é função da temperatura das mesmas. As altas temperaturas a que são expostos os componentes do sistema de transporte das bobinas (suportes, trilhos, rolamentos, motores, controles, etc...) podem trazer sérios problemas ao seu funcionamento. Além disto, para o dimensionamento adequado do sistema de ventilação natural do túnel de transporte das bobinas, é necessário conhecer as taxas de liberação de calor por convecção e radiação ao longo do trajeto.

Este trabalho tem por objetivo apresentar um modelo matemático que permita determinar o perfil de temperaturas e as taxas de transferência de calor das bobinas durante o seu transporte.

MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático foi baseado em balanços globais de energia nas bobinas para intervalos de tempo pré-estabelecidos. A equação básica do modelo é |1|:

$$\dot{Q}_k(\theta) + \dot{Q}_r(\theta) + \dot{Q}_c(\theta) = \int_V \rho \cdot C \cdot V \cdot \frac{dT}{d\theta} \cdot dV \quad (1)$$

em que:

- $\dot{Q}_k(\theta)$  é a taxa de calor transferida por condução entre os fios da bobina e seu suporte, no instante  $\theta$ . [W];
- $\dot{Q}_r(\theta)$  é a taxa de calor líquida transferida por radiação pelos fios da bobina para o ambiente que a envolve no instante  $\theta$ . [W];
- $\dot{Q}_c(\theta)$  é a taxa de calor transferida por convecção para o ar ambiente, no instante  $\theta$ . [W];
- $\rho$  é o peso específico da bobina, no instante  $\theta$ . [kg/m<sup>3</sup>];

- C é o calor específico dos fios da bobina, no instante  $\theta$ . [J/kg.K];
- V é o volume da bobina [m<sup>3</sup>];
- T é a temperatura da bobina em cada seção [K];
- $\theta$  é a variável tempo [s];

O modelo estabelecido para a bobina, prevê, para o cálculo do calor transferido por radiação, que o fio da bobina pode se encontrar em quatro situações diferentes definidas não somente em termos de espaço físico, mas principalmente pela sua interação em termos de troca de calor por radiação com os outros fios da bobina e com o meio ambiente. Estas situações estão representadas na Fig. 1: na primeira, 50% da superfície externa do fio máquina tem possibilidade de troca de calor por radiação com o ambiente externo; na segunda, 25% desta superfície apresenta a mesma possibilidade e na terceira 12,5%. Na quarta situação, considera-se o fio totalmente envolvido com impossibilidade total de radiação para o meio envolvente. Ainda na Fig. 1 são apresentadas também as trocas complementares de radiação entre as demais porções do fio. Considerou-se que as parcelas da bobina que representam cada uma destas quatro situações, representam, cada uma, uma quarta parte do total do fio enrolado. Observações práticas do comportamento térmico da bobina indicam a validade desta hipótese.

No quadro 1 são apresentados os fatores de forma decorrentes das quatro situações apresentadas. Os índices i e j de 1 a 4 referem-se as quatro situações dos fios e j = 5 ao meio receptor envolvente da bobina (ar ambiente ou parede do túnel). A fig. 2 mostra o modelo de resistências equivalentes para o sistema de radiação térmica na bobina.

Quadro 1			
Fatores de forma decorrentes dos percentuais de troca de calor por radiação entre os fios da bobina considerados*.			
i = 1	i = 2	i = 3	i = 4
F <sub>1-1</sub> = 0,05	F <sub>2-1</sub> = 0,25	F <sub>3-1</sub> = 0,150	F <sub>4-1</sub> = 0,05
F <sub>1-2</sub> = 0,25	F <sub>2-2</sub> = 0,20	F <sub>3-2</sub> = 0,200	F <sub>4-2</sub> = 0,10
F <sub>1-3</sub> = 0,15	F <sub>2-3</sub> = 0,20	F <sub>3-3</sub> = 0,325	F <sub>4-3</sub> = 0,20
F <sub>1-4</sub> = 0,05	F <sub>2-4</sub> = 0,10	F <sub>3-4</sub> = 0,200	F <sub>4-4</sub> = 0,65
F <sub>1-5</sub> = 0,50	F <sub>2-5</sub> = 0,25	F <sub>3-5</sub> = 0,125	F <sub>4-5</sub> = 0,00
EF <sub>ij</sub> = 1,00	EF <sub>ij</sub> = 1,00	EF <sub>ij</sub> = 1,000	EF <sub>ij</sub> = 1,00

\* fio máquina com 12,5mm de diâmetro.

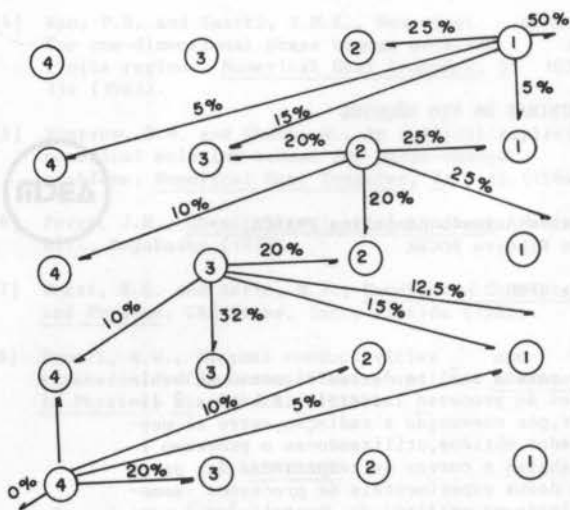


Figura 1. Trocas por radiação entre parcelas do fio da bobina, considerando-se quatro situações diferentes para as mesmas.

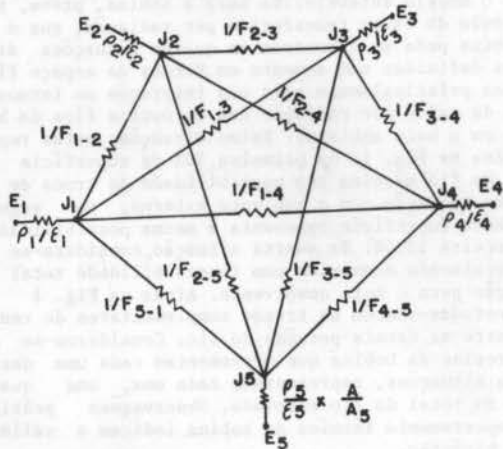


Figura 2. Sistema de resistências equivalentes para a troca de calor por radiação nas bobinas.

As equações de transferência de calor utilizadas no modelo são as seguintes:

Para a condução:

$$\dot{Q}_k = (T_i - T_s) / R_k \quad (2)$$

$$R_k = (\Delta x / kA) + R_c \quad (3)$$

sendo:

- $T_i$  = temperatura do fio na seção  $i$  da bobina [K];
- $T_s$  = temperatura da parte do suporte em contacto com o fio da bobina [K];
- $R_k$  = resistência térmica entre a seção  $i$  da bobina e a parte do suporte em contacto com a mesma [K/W];
- $k$  = condutividade média do material contínuo (aço) entre a bobina e o suporte, [W/(m.K)];
- $A$  = área transversal à transmissão do calor por condução [m<sup>2</sup>];

$\Delta x$  = distância a ser percorrida pelo calor entre a bobina e o suporte [m];

$R_c$  = soma das resistências de contacto entre as espirais da bobina e entre estas e o suporte [K/W].

No presente problema, o cálculo de  $\dot{Q}_k$  torna-se bastante impreciso devido a dificuldades de se estabelecer os valores de  $A$ ,  $\Delta x$  e  $R_c$ . Após análise de diversas situações físicas possíveis, calculando-se o calor dissipado por condução para o suporte e por convecção deste para o ambiente, decidiu-se optar, para o estabelecimento do histórico de temperatura na bobina, por um modelo simplificado que supõe a bobina dissipando calor para o ar ambiente por convecção e radiação sem a presença do suporte.

Desta maneira, na equação (1), o termo  $\dot{Q}_k$  foi anulado.

Para a convecção [2]:

$$\dot{Q}_{c,i} = h_{c,i} (T_i - T_{ar,i}) A, \text{ para } i = 1 \text{ a } 4 \quad (4)$$

$$h_{c,i} = 0.53 k/D (Gr,i.Pr,i)^{0.25} \quad (5)$$

sendo:

$h_{c,i}$  = o coeficiente de transmissão de calor entre a bobina e o ar que o envolve, [W/(m<sup>2</sup>.K)];

$k$  = condutividade térmica do ar envolvente [W/(m.K)];

$D$  = diâmetro do fio da bobina [m];

$Gr,i$  = número de Grashof correspondente ao sistema considerado, [adim.];

$Pr,i$  = número de Prandtl correspondente ao sistema considerado, [adim.];

$T_i$  = temperatura do fio na seção  $i$  da bobina, [K];

$T_{ar,i}$  = temperatura do ar que envolve a parcela  $i$  do fio, [K];

$A$  = área superficial do fio da bobina, [m<sup>2</sup>];

$i$  = índice relativo à parcela da bobina.  
Como a temperatura do ar no interior da bobina sofre grande influência da temperatura da própria bobina, essa temperatura será calculada pela seguinte expressão obtida por tentativas, através de balanços parciais:

$$T_{ar,i} = T_{amb} + (T_i - T_{amb}) \times C_{T,i} \quad (6)$$

sendo:

$T_{amb}$  = a temperatura do ar ambiente, [°K];

$C_{T,i}$  = um coeficiente que corresponde à variação da temperatura do ar entre a do ambiente e da superfície da bobina.

Considerações práticas conduziram a se arbitrar os seguintes valores para as correspondentes parcelas da bobina com fio máquina de 12,5mm:

$$C_{T1} = 0; \quad C_{T2} = 0,1; \quad C_{T3} = 0,2; \quad C_{T4} = 0,3.$$

Para a radiação [3]:

$$\dot{Q}_{r,i} = J_i - \sum_j F_{ij} J_j, \text{ para } i = 1 \text{ a } 4 \text{ e } j = 5 \quad (7)$$

$$J_i = \frac{1}{1 - \epsilon_i} \left[ (1 - \epsilon_i) \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j + \epsilon_i E_{ni} \right] \quad (8)$$

para  $i = 1 \text{ a } 4, \quad j = 1, 5 \quad \text{e,}$

$$J_5 = E_{n5} = \sigma T_5^4 \quad (9)$$

sendo:

$J_i$  = a radiosidade relativa ao componente  $i$  na malha estabelecida para a radiação, (ver figura 2), [W/(m<sup>2</sup>.K<sup>4</sup>)];

$F_{ij}$  = fator de forma entre os componentes  $i$  e  $j$ , [adim.];

$\epsilon_i$  = emissividade [adim.];

$E_{ni} = \sigma T_i^4$  = potência emissiva do corpo negro na temperatura  $T_i$ , [W/ (m<sup>2</sup>.K<sup>4</sup>)].

Para o cálculo das variações de temperatura nas diversas seções da bobina, em função do tempo, utilizou-se o método iterativo de Gauss-Seidel. Foi elaborado um programa de computador para a solução do sistema de equações gerado em cada intervalo de tempo da simulação, obtendo-se como resultado os perfis de temperatura versus tempo nas quatro seções da bobina. Este programa foi aplicado para simular situação real em usina siderúrgica onde a bobina é transportada nos primeiros 540s através do galpão amplo e aberto e, a partir deste tempo, através de um túnel. Estudou-se o resfriamento de bobinas com fios máquina de 12,5 e de 32mm. Para o fio de 32mm, os fatores de forma (quadro 1) foram modificados e são apresentados no quadro 2. Também os coeficientes  $C_{Ti}$  da equação(6) foram modificados e os novos valores são apresentados a seguir:

$C_{T1} = 0$ ;  $C_{T2} = 0,05$ ;  $C_{T3} = 0,10$ ;  $C_{T4} = 0,15$

Quadro 2			
Fatores de forma decorrentes dos percentuais de troca de calor por radiação entre os fios da bobina considerados.			
i = 1	i = 2	i = 3	i = 4
$F_{1-1} = 0,03$	$F_{2-1} = 0,12$	$F_{3-1} = 0,09$	$F_{4-1} = 0,06$
$F_{1-2} = 0,12$	$F_{2-2} = 0,07$	$F_{3-2} = 0,12$	$F_{4-2} = 0,09$
$F_{1-3} = 0,09$	$F_{2-3} = 0,12$	$F_{3-3} = 0,14$	$F_{4-3} = 0,20$
$F_{1-4} = 0,06$	$F_{2-4} = 0,09$	$F_{3-4} = 0,20$	$F_{4-4} = 0,30$
$F_{1-5} = 0,70$	$F_{2-5} = 0,60$	$F_{3-5} = 0,45$	$F_{4-5} = 0,35$
$\Sigma F_{ij} = 1,00$	$\Sigma F_{ij} = 1,00$	$\Sigma F_{ij} = 1,00$	$\Sigma F_{ij} = 1,00$

Fio máquina com 32,0 mm

TABELA 1 - Temperaturas das parcelas de bobina

Tempo(s)	Fio: $\phi$ 12,5 mm				Fio: $\phi$ 32,0 mm			
	T(1)	T(2)	T(3)	T(4)	T(1)	T(2)	T(3)	T(4)
0	900	900	900	900	900	900	900	900
40	798	823	841	864	847	852	855	864
80	722	758	788	826	801	809	855	831
120	661	705	742	789	760	772	780	800
160	610	658	700	753	725	738	748	772
200	567	617	661	719	692	707	719	746
240	529	581	626	687	663	680	692	721
280	495	548	594	656	637	654	668	698
320	465	517	565	627	612	631	645	677
360	437	490	537	600	590	609	624	657
400	412	464	512	575	569	589	605	638
440	389	441	488	551	550	570	586	621
480	368	419	466	528	531	552	569	604
520	349	399	445	507	514	535	553	588
560	331	380	426	487	499	520	538	573
600	315	363	408	466	484	505	523	559
640	300	346	391	450	470	491	510	546
680	285	331	375	433	456	478	497	533
720	272	316	359	417	444	466	485	521
760	260	303	345	402	432	454	473	509
800	248	290	331	387	420	443	462	498
840	237	278	319	373	409	432	451	487
880	227	267	306	360	399	421	441	477
920	217	256	295	347	389	411	431	467
960	208	246	284	335	379	402	421	457
1000	199	236	273	324	370	392	412	448
1040	191	227	263	313	361	384	403	439
1080	183	218	254	303	353	375	395	431
1120	176	210	245	293	345	367	387	422
1160	169	202	237	283	337	359	379	414
1200	163	195	228	274	329	351	371	406
1240	157	188	221	266	322	344	364	399
1280	151	181	213	257	315	337	357	392
1320	146	175	206	249	308	330	350	385
1360	141	169	199	242	302	324	343	378
1400	136	163	193	234	295	317	337	371
1440	131	158	187	227	289	311	331	365
1480	127	153	181	221	283	305	325	359
1520	123	148	175	214	278	299	319	353
1560	119	143	170	208	271	293	313	347

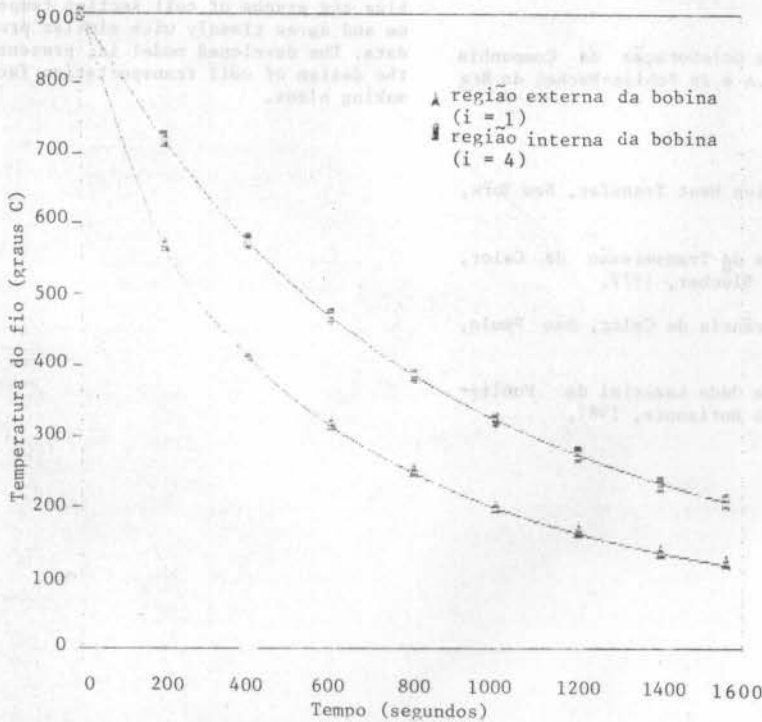


Fig. 3. Temperaturas do fio em duas regiões da bobina de  $\phi = 12,5$ mm

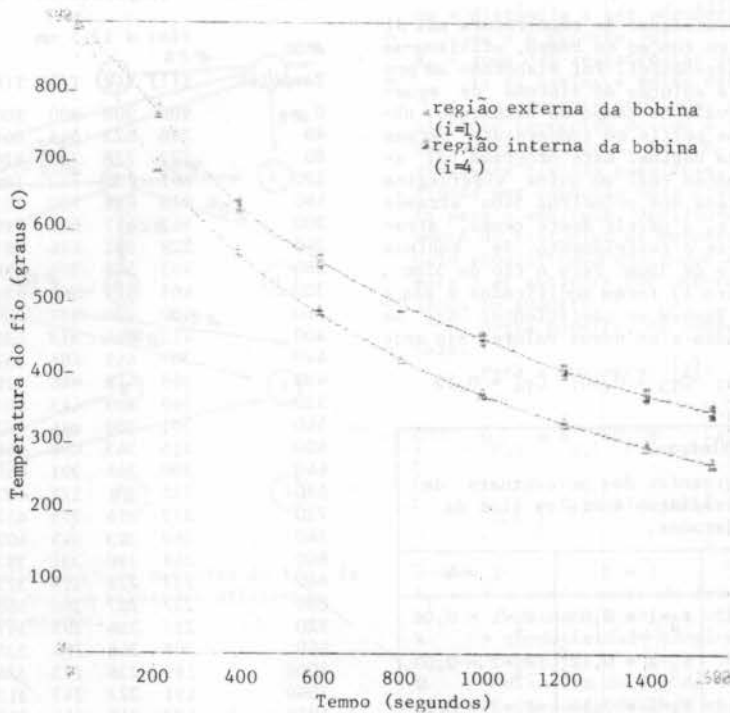


Fig. 4. Temperaturas do fio em duas regiões da bobina de  $\phi = 32\text{mm}$ .

**CONCLUSÕES**

Os resultados obtidos apresentam boa concordância com medidas experimentais efetuadas em sistemas semelhantes fornecidos pela POHLIG-HECKEL DO BRASIL [4].

Para confirmação final do modelo e ajuste dos fatores empíricos, pretende-se efetuar medidas no sistema a ser montado na Usina de Monlevade da Cia. Siderúrgica Belgo-Mineira.

**AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem a colaboração da Companhia Siderúrgica Belgo-Mineira S.A e da Pohlrig-Heckel do Brasil.

**REFERÊNCIAS**

- [1] ARPACI, V.S., Conduction Heat Transfer, New York, A. Wesley, 1966.
- [2] KREITH, F., Princípios da Transmissão de Calor, 3ª ed., São Paulo, E. Blucher, 1977.
- [3] HOLMAN, J.P., Transferência de Calor, São Paulo, McGraw-Hill, 1983.
- [4] Comunicação pessoal de Oddo Lazarini da Pohlrig-Heckel do Brasil, Belo Horizonte, 1987.

**ABSTRACT**

A physical mathematical model of rod coil cooling is presented and analysed under industrial process conditions. The coil is divided into four sections which exchange convective and radiative energy among themselves and the environment. The solutions, obtained through a Gauss-Seidel iterative process are presented in tables and graphs of coil section temperature against time and agree closely with similar process experimental data. The developed model is, presently, utilized in the design of coil transportation facilities in steel-making plant.





ANÁLISE EXPERIMENTAL DO DESEMPENHO TÉRMICO  
DE COBERTURAS VENTILADAS

ABCN

ABCN

JOSÉ ANTONIO BELLINI DA CUNHA NETO - EMC-UFSC  
VICENTE DE PAULO NICOLAU - EMC-UFSC  
PAULO CÉSAR PHILIPPI - EMC-UFSC  
FERNANDO OSCAR RUTTKAY PEREIRA - DAU-UFSC

## RESUMO

Coberturas ventiladas são utilizadas em edificações para redução da carga térmica de radiação solar. Neste trabalho os resultados da monitoração de uma cobertura deste tipo são apresentados. Apesar das dificuldades inerentes ao fenômeno físico, os resultados mostram-se coerentes, sendo comparados com os de uma simulação numérica. A monitoração é realizada em dias do verão de 86/87 em um dos prédios do CRSC-ELETROSUL, no município de São José - SC.

## INTRODUÇÃO

Na área de análise térmica de edificações, tem-se o conhecimento de que, para regiões de grande insolação, uma forma de reduzir os ganhos de calor pelo telhado seria através da ventilação do ático. Um estudo prévio deste assunto foi feito em 1984 utilizando a simulação numérica do desempenho térmico das edificações do CRSC - ELETROSUL [1]. Essa simulação mostrou que uma parcela significativa da carga térmica originária do telhado poderia ser eliminada. A solução deveria ser tentada e os edifícios do CRSC foram efetivamente projetados e construídos com esse recurso passivo incorporada à estrutura.

Uma vez construída a edificação, é bastante recomendável uma avaliação "in-situ" do dispositivo, no caso o telhado ventilado, não apenas para quantificar as reduções de carga mas também para avaliar os algoritmos e programas de simulação quanto à sua capacidade de descrever o fenômeno físico sob análise.

Com este fim foi iniciado um programa experimental no verão 86/87 para medição dos principais parâmetros térmicos relacionados à cobertura. Temperaturas, fluxos de calor, radiação solar e velocidade do ar foram adquiridos para alguns dias de verão e são aqui apresentados. Alguns destes dados foram usados como entrada na simulação, sendo os resultados desta comparação com as medições.

## PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Com o conhecimento dos processos envolvidos, instalou-se os equipamentos de medidas de modo a tentar quantificar cada processo. A figura 1 mostra de modo esquemático, os equipamentos e sua localização na cobertura.

Para medição da radiação solar global utilizou-se um piranômetro tipo estrela, com termopares como sensores. Este foi disposto com a mesma inclinação do telhado para indicação direta.

Para medição do campo de radiação no interior do telhado tentou-se usar um pirgeômetro de troca líquida para ondas longas [2]. Como este é projetado para medição de perdas radiativas noturnas (ondas longas), mostrou-se inadequado pois uma parcela de radiação solar difusa estava presente.

A condução na superfície superior da laje foi monitorada por dois transdutores de fluxo de calor [3], adaptados à superfície de modo a não alterar seu comportamento pela radiação recebida.

Como a vazão de ar exterior pelo ático é um parâmetro importante, usou-se um anemômetro integrador e um anemômetro de velocidade instantânea na medição.

Além destas variações citadas, mediu-se as temperaturas da telha, da laje e do ar de ventilação com termopares.

## RESULTADOS OBTIDOS

Na experimentação realizada alguns elementos complicadores se fizeram presentes. Como exemplo citamos a passagem de nuvens no céu e a natureza aleatória da velocidade do ar exterior. Enquanto esta tem influência direta sobre o ar que circula na cobertura, aquela causa quedas bruscas na radiação solar e flutuações que atingem até a superfície da laje. Em caso de não obstrução a passagem de uma nuvem pode aumentar a taxa de radiação incidente por reflexão.

Mediu-se, conforme a figura 2, as temperaturas da capa e canal sobre e sob a telha. Estes resultados sofreram um tratamento no qual o valor da temperatura foi obtido como o valor médio de temperaturas de quatro instantes anteriores e quatro posteriores.

Em geral as temperaturas dos dois pontos medidos sobre a superfície superior são bastante próximas, exceção feita às primeiras e últimas horas de aquisição. Para altitudes muito baixas o que ocorre no início da manhã e no final da tarde, o canal da telha pode ser sombreado pela capa e portanto apresenta uma temperatura menor. Entretanto, quando ambos os pontos encontram-se igualmente insolados, o canal tem a temperatura ligeiramente superior do que a capa. Este fato pode ser atribuído a duas causas principais: Em primeiro lugar, pode-se constatar que, devido à ação de chuvas, o canal apresenta um escurecimento consideravelmente maior que a capa. Isso o torna mais absorvedor para a radiação solar. Em segundo lugar, devemos considerar que o canal se encontra mais abrigado da ação do vento que a capa e por isso é arrefecido com maior dificuldade pelas brisas porventura existentes.

Os pontos situados sob a superfície inferior apresentam um comportamento muito diverso entre si. O ponto situado sob o canal tem uma variação de temperatura regular, seguindo a temperatura da superfície superior com o decréscimo de aproximadamente 5 °C, ao longo de todo o período. O ponto situado sob a capa, apresenta um comportamento inesperado, como pode ser verificado na figura 2. Um tal comportamento seria esperado se o material da telha apresentasse uma elevada inércia térmica, o que não foi observado durante o período de aquecimento. Podemos concluir portanto, que o comportamento se deve à dificuldade daquele ponto em rejeitar calor para o ambiente.

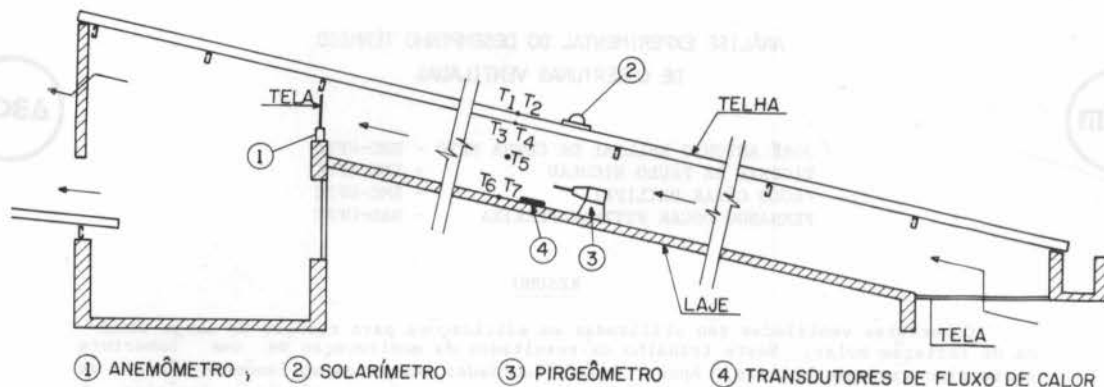


Figura 1. Corte esquemático da cobertura, com os equipamentos de medição

A temperatura do ar foi obtida com termopar blindado em alumínio. A superfície polida de alumínio apresenta baixa absorptividade e emissividade à radiação. Apresenta uma flutuação elevada, que pode ser constatada em corridas especiais onde a medição se faz com intervalos de 5 segundos. A flutuação pode ser explicada pelo escoamento turbulento que ocorre no espaço entre a telha e a laje, com vórtices induzidos pela estrutura de fixação das telhas e efeitos de entrada acentuados pelo pequeno comprimento longitudinal (figura 3).

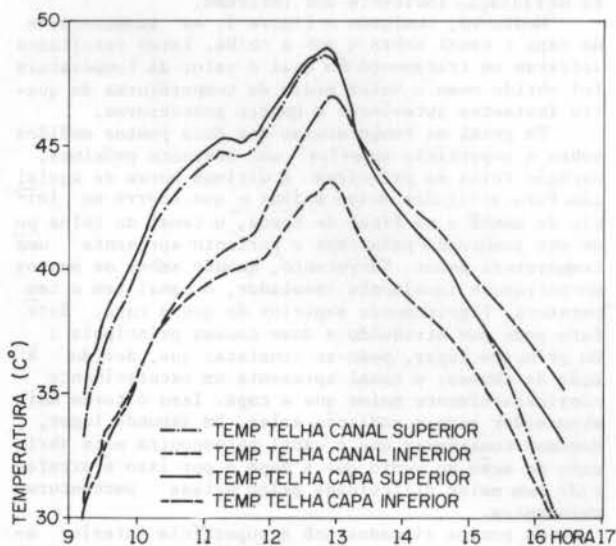


Figura 2. Temperaturas da telha

A laje teve sua temperatura medida em dois pontos situados lado a lado, com um afastamento de aproximadamente 2 m, no sentido leste-oeste (figura 3). Essas temperaturas são bastantes estáveis, principalmente devido à inércia térmica propiciada pela espessura de concreto que forma a laje. São pouco sensíveis às flutuações de temperatura e velocidade do ar e apresentam um comportamento crescente ao longo do dia.

Entre os dois pontos medidos verificou-se uma diferença de aproximadamente 1°C a favor da temperatura medida no lado oeste. Devido à participação dos ambientes internos, o sensor leste se situa acima de uma sala climatizada enquanto o sensor oeste se encontra acima de uma sem climatização.

O fluxo de calor por condução na superfície superior da laje foi medido com os transdutores de fluxo de calor [3], embutidos sob uma camada de argamassa de aproximadamente 5 mm. Os resultados mostraram-se consistentes com as temperaturas da laje, sendo que o transdutor sobre a sala climatizada apresentou um fluxo de calor ligeiramente superior ao transdutor sobre a sala não climatizada (figura 7).

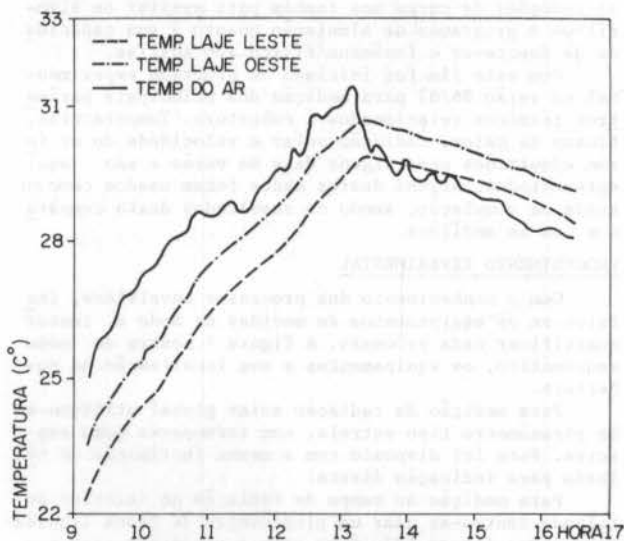


Figura 3. Temperaturas superiores da laje e do ar

A velocidade do ar no espaço entre as telhas e a laje é muito influenciada pela velocidade e pela direção do vento externo. A flutuação de seu valor nos obrigou à aquisição da velocidade em dois modos distintos, ou seja, instantâneo e integrada. A velocidade instantânea do vento foi obtida com um anemômetro elétrico e registrada em três momentos distintos de cada corrida. A velocidade média durante a

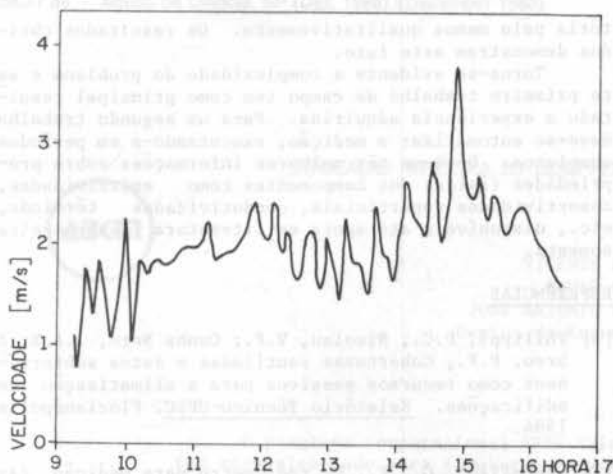


Figura 4. Velocidade média do ar no ático.

corrida, foi obtida com um anemômetro integrador mecânico, representa a média temporal durante o período de uma corrida, aproximadamente 3 minutos (figura 4).

#### COMPARAÇÃO ENTRE A MONITORAÇÃO E A SIMULAÇÃO

A simulação numérica do comportamento térmico de edificações constitui-se em poderosa ferramenta para a análise térmica pois, permitindo a obtenção dos resultados para inúmeras combinações das variáveis de clima e diferentes concepções para o envoltório externo do edifício, em curto espaço de tempo e a baixos custos, pode ser facilmente empregada no teste das diferentes alternativas de projeto. Entretanto, estará sempre sujeita às imperfeições dos modelos matemáticos e algoritmos que descrevem os fenômenos físicos presentes na edificação, uma vez que estes são extremamente complexos e requerem simplificações no processo de modelagem que os podem comprometer. No presente caso, a simulação foi tentada com o programa S.P.T.E, já utilizado anteriormente no projeto térmico básico destas mesmas edificações, onde se utilizou como dados de entrada os valores medidos "in-loco". Os resultados foram parcialmente comprometidos pelo fato de não estarem disponíveis dados de clima para o período completo de 24 horas. Consequentemente, valores arbitrários foram utilizados para complementar o conjunto de variáveis para aqueles períodos em que não foi feita a medição. Mesmo assim, os resultados mostram-se bastante satisfatórios tendo-se em conta que o período monitorado não chega a ser 1/3 do período calculado (um dia). Essa fração torna-se menor ainda se forem considerados os efeitos de armazenamento em dias subsequentes. Não havia dados disponíveis para uma sequência de dias.

Assim, tomemos por exemplo, as temperaturas da laje e inferiores da telha. Os valores foram medidos entre 9:00 e 16:30 horas. Como mostra a figura 5, a tendência da curva é a mesma, seja na simulação, seja na monitoração. No entanto um afastamento de até 4°C pode ser observado nas curvas devido ao fato de estarem os termopares sobre salas em condições diferentes entre si (condicionada e não condicionada). A temperatura da laje e pode ser influenciada pela temperatura do ar externo e esta não é conhecida para o período imediatamente anterior ao início da monitoração. Isto provavelmente causará um afastamento maior entre as curvas no período inicial de medição. Ao longo do dia as curvas se aproximam e pode-se esperar que se encontrariam se a medição fosse estendida para além das 20 horas. Outro ponto a ser considerado é o fato de o algoritmo de Jurges [5], utilizado para o cálculo do coeficiente de convecção sobre a laje, ser bastante simplificado, podendo ser muito afetado quando aplicado a um escoamento interno, como é o caso, pois foi desenvolvido para escoamentos exteriores. A intensidade de turbulência, embora

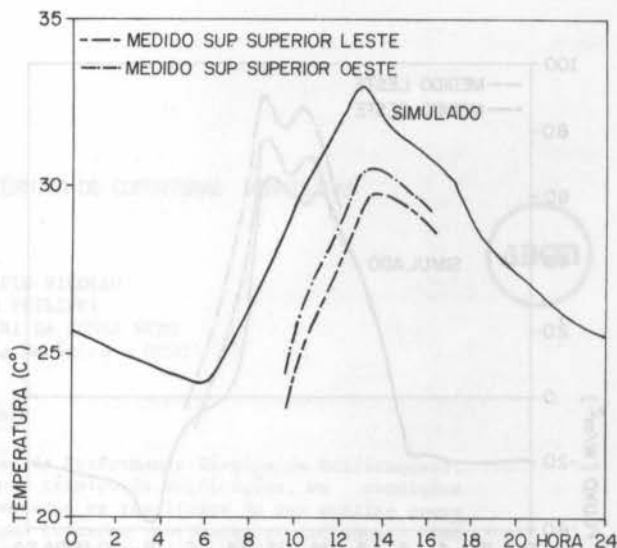


Figura 5. Temperatura da laje.

não considerada na simulação também desempenha um papel importante na convecção.

Como já tivemos oportunidade de observar, a temperatura da superfície inferior da telha apresenta um comportamento inesperado, devido ao acúmulo de ar aquecido na parte mais alta sob a capa. Um tal comportamento não poderia ser esperado na simulação posto que o telhado nesse caso é considerado uma superfície plana e portanto não apresenta regiões côncavas para acúmulo de ar a alta temperatura. Além do problema da retenção de ar aquecido, as ondulações da telha favorecem o aparecimento de fortes gradientes de temperatura por exposição diferenciada de regiões da telha à radiação solar (figura 6). Por exemplo, para baixas altitudes solares um lado da capa encontra-se exposto enquanto o outro permanece sombreado. Os afastamentos entre as temperaturas previstas pelo programa de simulação e aquelas observadas na monitoração são desse modo compreensíveis e justificáveis. Mesmo nesse caso, a proximidade das curvas é grande e pode-se aceitar o modelo, com suas simplificações, como descrevendo adequadamente o fenômeno, tendo em vista a pluralidade de processos que ocorrem simultaneamente sobre essa superfície e que deveriam ser levados em consideração. Certamente aperfeiçoamentos devem ser feitos nos algoritmos utilizados mas pode-se admitir que estes expressem adequadamente as trocas térmicas em muitas situações de aplicação, como por exemplo,

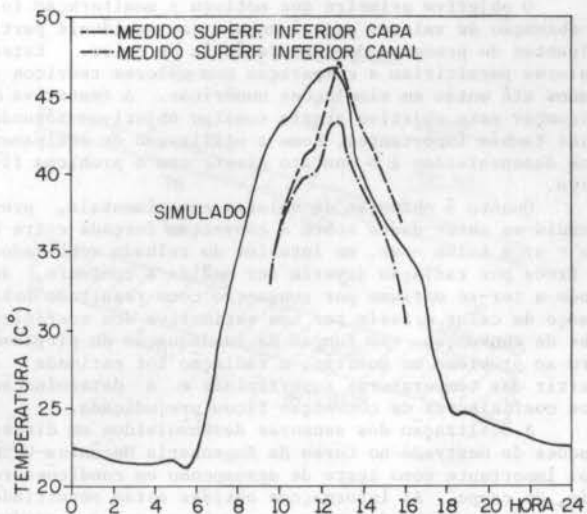


Figura 6. Temperaturas da superfície inferior da telha.



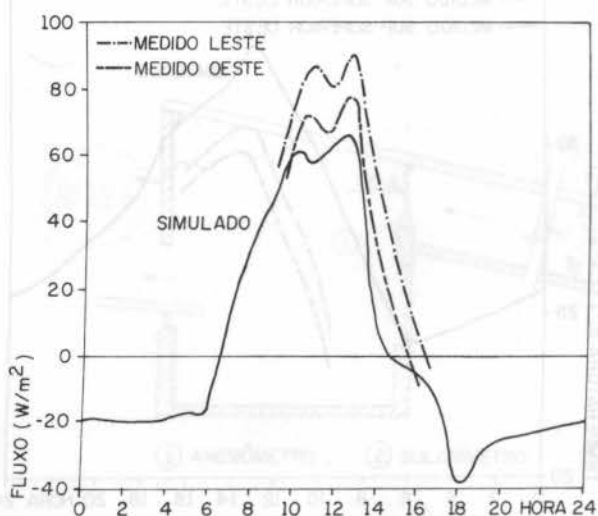


Figura 7. Fluxos por condução na laje.

na análise do consumo de energia em climatização mecânica.

O fluxo de condução na superfície superior da laje é apresentado na figura 7. As curvas têm o mesmo formato no período de medição, indicando certa concordância de comportamento. Apesar das diferenças existentes, o resultado não deixa de ser importante em vista do problema abordado. Também aqui observa-se diferenças nos transdutores, em grande parte função da posição sobre as salas com e sem climatização.

O modelo utilizado no programa de simulação considera que a temperatura interna dos ambientes permanece constante, o que não foi exatamente o caso, tendo sido observadas oscilações de temperatura do ar dos ambientes internos, mesmo naqueles condicionados mecanicamente. A simulação mostra um fluxo de calor na superfície externa da laje algo menor que os valores medidos, entretanto as variações são de mesma magnitude para os dois casos e a forma da curva é semelhante. Também nesse ponto, não se conhecia a espessura real da laje, sua composição ou as propriedades térmicas do material.

Em todos os casos comparados pode-se notar um atraso entre os valores medidos e simulados, de magnitude entre 30 minutos e 1 hora.

#### CONCLUSÃO

O objetivo primeiro que motivou a monitoração foi a obtenção de valores experimentais das variáveis participantes do processo de transferência de calor. Estes valores permitiriam a comparação com valores teóricos usados até então em simulações numéricas. A tentativa de alcançar este objetivo trazia consigo objetivos secundários também importantes, como a utilização de equipamentos desenvolvidos e o contato direto com o problema físico.

Quanto à obtenção de valores experimentais, pretendia-se obter dados sobre a convecção forçada entre laje - ar e telha - ar, no interior do telhado ventilado. A troca por radiação deveria ser medida a contento, de modo a ter-se o fluxo por convecção como resultado do balanço de calor e assim ter uma estimativa dos coeficientes de convecção. Em função da inadequação do pirgeômetro ao problema em questão, a radiação foi estimada a partir das temperaturas superficiais e a determinação dos coeficientes de convecção ficou prejudicada.

A utilização dos sensores desenvolvidos em dissertações de mestrado no Curso de Engenharia Mecânica-UFSC foi importante como teste de desempenho em condições reais, de campo. As informações obtidas estão permitindo um aperfeiçoamento dos mesmos como no caso dos transdutores de fluxo por condução, embutidos sobre a laje.

Deve-se citar contudo, que o fenômeno físico e as variáveis componentes foram tratados de maneira satisfatória pelo menos qualitativamente. Os resultados obtidos demonstram este fato.

Torna-se evidente a complexidade do problema e este primeiro trabalho de campo tem como principal resultado a experiência adquirida. Para um segundo trabalho deve-se automatizar a medição, executando-a em períodos completos. Deve-se ter melhores informações sobre propriedades físicas dos componentes como emissividades, absorvidades superficiais, condutividades térmicas, etc., disponíveis até agora em literatura estrangeira somente.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Philippi, P.C.; Nicolau, V.P.; Cunha Neto, J.A.B.; Abreu, P.F., Coberturas ventiladas e dutos subterrâneos como recursos passivos para a climatização de edificações. Relatório Técnico-UFSC. Florianópolis, 1984.
- [2] Charmillot, G.J.F., Um radiômetro para medição das trocas de calor por radiação em ondas longas. Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1986.-
- [3] Guimarães, G., Um transdutor de fluxo de calor: aplicação às edificações. Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1986.
- [4] Philippi, P.C.; Cunha Neto, J.A.B.; Nicolau, V.P.; Pereira, F.O.R.; Bento Júnior, H. Monitoração do desempenho térmico de uma cobertura ventilada. Relatório Técnico - UFSC. Florianópolis, 1988.
- [5] Pratt, A.W., Heat transmission in buildings, J. Wiley and Sons, New York, 1981.
- [6] Abreu, P.F., Um modelo para a simulação do comportamento térmico de edificações. Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis-SC, 1986.
- [7] Guimarães, G., Philippi, P.C., Cunha Neto, J.A.B., Análise dos erros de medição em transdutores de fluxo de calor: aplicação às edificações. IX COBEM Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, 1987 pp. 439-442.

#### ABSTRACT

Double ventilated roofs are being increasingly used in buildings for reducing the radiant solar load. Heat is transferred from the tiles by thermal convection with cooling breezes which flow in the spacing between the covers and this process will define the thermal efficiency of the roof. In this paper, the results of an experimental work are presented, regarding the thermal performance of ventilated roofs. The measuring process is complicated due to the following factors: i) high turbulence intensity of atmospheric flows, ii) high frequency temperature fluctuations of the cooling breezes, iii) need of high accuracy in temperature measurement, specially for predicting the temperature difference between the air flow and the internal cover. These factors contribute to a high dispersion in the values of the heat transfer coefficient with the air speed in the roof, and difficult the modelisation of the process.

Nevertheless, taking the above difficulties in account, the results appear to be reliable and have been compared with a numerical model for simulating the thermal behaviour of the roof.

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO DESEMPENHO TÉRMICO DE COBERTURAS VENTILADAS



VICENTE DE PAULO NICOLAU  
 PAULO CESAR PHILIPPI  
 JOSE ANTONIO BELLINI DA CUNHA NETO  
 Depto. de Engenharia Mecânica - UFSC

RESUMO

O programa computacional SPTE (Simulação da Performance Térmica de Edificações), tem sido elaborado para simular o comportamento térmico de edificações, em condições de alta insolação. Neste trabalho são apresentados os resultados de uma análise comparativa entre diferentes tipos de telhados, como telhados ventilados e telhados com blindagem, utilizando o programa. A simulação ocorre para dias típicos de verão, com dados de clima referente à região de Florianópolis-SC.

INTRODUÇÃO

Da ação do meio ambiente sobre a edificação, conforme o tipo de clima local, resulta um ambiente interno sob certas condições. Para ter-se o ambiente interno adequado à habitação pode-se atuar ativamente sobre o mesmo com sistemas corretivos, como sistemas de condicionamento do ar.

Tem-se buscado, contudo, adequar o projeto da edificação ao tipo de clima, procurando-se reduzir a atuação destes sistemas corretivos, com diminuição dos custos de instalação e funcionamento. Muitos esforços têm sido empreendidos em análises globais da edificação ou parciais, considerando-se a participação de cada componente.

A cobertura, por sua grande área e por sua exposição direta aos raios solares, em regiões de insolação intensa, é um dos principais elementos do conjunto.

Neste trabalho é feita uma comparação entre quatro tipos de coberturas, estimando-se a ação de cada tipo sobre o ambiente interno, para dias típicos de verão.

A análise processa-se através do programa computacional SPTE [1], que simula o comportamento da edificação como um todo.

Neste caso particular a atenção concentra-se na cobertura, ficando os demais elementos imutáveis.

MODELAÇÃO DO PROBLEMA

A figura 1 apresenta a nomenclatura pertinente. Tem-se o ambiente interno à temperatura  $T_{ai}$ , coberto com a laje cuja superfície inferior está à  $T_{ii}$  e superior à  $T_{is}$ . Acima da laje situa-se o espaço de ar (ático) à  $T_{at}$ . Este espaço pode possuir uma blindagem contra a radiação, paralela a laje. Na parte superior situa-se o telhado com temperatura exterior  $T_{ts}$  e interior  $T_{ti}$ . O ar externo possui temperatura  $T_{ae}$ .

A partir das condições externas e radiação incidente, obtém-se o seguinte balanço de calor para a superfície exterior do telhado:

$$h_c (T_{ae\tau} - T_{ts\tau}) + \alpha_c I_c + S = \frac{k_t}{L_t} (T_{ts\tau} - T_{ti\tau}) \quad (1)$$

onde o 1º termo representa a troca de calor por convecção ar exterior - telha, o 2º a radiação solar absorvida, o 3º a contra-radiação atmosférica [2,3] e o 4º a condução de calor através da telha. O índice  $\tau$  representa a variável tempo.

Para a superfície inferior da telha tem-se:

$$\frac{k_t}{L_t} (T_{ts\tau} - T_{ti\tau}) = h_c (T_{ti\tau} - \frac{T_{ae\tau} + T_{at\tau}}{2}) +$$

$$+ \sigma F_{tl} (T_{ti\tau}^4 - T_{ps\tau}^4), \quad (2)$$

onde, a partir da esquerda, tem-se a condução na telha, a convecção e a radiação. A convecção ocorre entre a telha e o ar que circula no telhado, no caso de telhado com ventilação. O ar entra à temperatura  $T_{ae}$  e sai à  $T_{at}$ . Para o caso de telhado não ventilado, a convecção ocorre entre a telha e o ar do telhado, este à  $T_{at}$ .

A radiação trocada entre a telha e a laje é obtida a partir da troca entre superfícies cinzas planas e paralelas, sendo  $F_{tl}$  o fator de forma modificado [4], dado por:

$$F_{tl} = (\frac{1}{\alpha_t} + \frac{1}{\alpha_\ell} - 1)^{-1}, \quad (3)$$

sendo  $\alpha_t$  e  $\alpha_\ell$  as absorptividades, em ondas longas, da telha e da laje, respectivamente.  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann. A não linearidade da equação (2) é eliminada no processo de cálculo iterativo usando-se as temperaturas, no caso inferior da telha e superior da laje, no instante  $\tau-1$ .

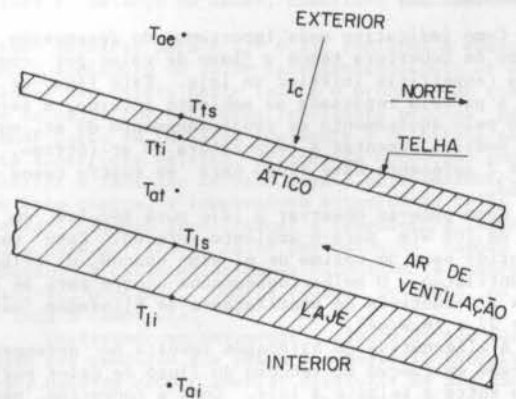


Figura 1. Esquema da cobertura analisada.

Para o caso de uso de blindagem, que consiste numa folha metálica refletora, de absorptividade  $\alpha_b$ , paralela à laje e à telha, pode-se calcular o fator de for-



ma  $F_{t1}$  por:

$$F_{t1} = \frac{F_{tb} F_{bl}}{F_{tb} + F_{bl}} \quad (4)$$

sendo  $F_{tb}$  e  $F_{bl}$  calculados de acordo com a equação (3), usando-se os índices respectivos.

Para a superfície da laje tem-se:

$$\sigma F_{t1} (T_{ti}^4 - T_{ls}^4) + h_c (T_{es} - \frac{T_{ae} + T_{at}}{2}) = \sum_{j=0}^{\infty} (X_j T_{ls_{\tau-j}} - Y_j T_{li_{\tau-j}}) \quad (5)$$

onde  $X_j$  e  $Y_j$  são os fatores de resposta da laje [5], caracterizando a condução transiente de calor, o 1º termo representa a troca por radiação, equação (4) e o 2º termo a convecção para o caso de ventilação na cobertura.

Para a superfície inferior da laje tem-se o seguinte balanço:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (Z_j T_{li_{\tau-j}} - Y_j T_{ls_{\tau-j}}) = \sum_{i=1}^N \sigma F_{il} (T_{si}^4 - T_{li}^4) + h_c (T_{li} - T_{ai}) \quad (6)$$

representando o 1º termo a condução transiente na laje ( $Z_j$  e  $Y_j$ , os fatores de resposta), o 2º termo a troca por radiação entre as  $N$  superfícies internas da edificação e a superfície inferior da laje e o 3º termo a convecção laje-ar interno.

#### CASOS ANALISADOS

A partir dos modelos apresentados a edificação foi simulada mantendo-se a temperatura do ar interno constante e trocando-se o tipo de cobertura. Os casos analisados foram os seguintes:

- a - Telha, laje e ático ventilado;
- b - Telha, laje e ático não ventilado;
- c - Apenas laje;
- d - Telha, laje, ático não ventilado, com blindagem contra a radiação.

As características dos materiais componentes são:

- Telha: cimento-amianto de 6mm de espessura;
- Laje: concreto de 120mm de espessura;
- Blindagem: folha de alumínio, de absorvidade igual a 0,25.

#### RESULTADOS

Como indicativo mais importante do desempenho de um tipo de cobertura temos o fluxo de calor por condução na superfície inferior da laje. Este fluxo de calor é a parcela repassada ao ambiente interno, a ser retirado pelo equipamento de condicionamento do ar, ou de outro modo, a aumentar a temperatura do ar interno. A figura 2 apresenta este fluxo para os quatro casos em questão.

Como pode-se observar a laje pura resulta em um fluxo de 108 W/m<sup>2</sup> para o ambiente interno. Este valor é reduzido para um máximo de 61 W/m<sup>2</sup> usando o telhado sem ventilação. O melhor desempenho ocorre para as soluções alternativas de ventilação e de blindagem (máximos de 27 e 16 W/m<sup>2</sup>).

A alternativa de blindagem resulta no desempenho observado em função da redução do fluxo de calor por radiação entre a telha e a laje. Como a convecção neste espaço ocorre em situação adversa, com a superfície aquecida na parte superior e a superfície fria embaixo, seu valor não chega a influenciar no resultado.

A figura 3 compara os fluxos de calor por radiação com e sem o uso de blindagem. Observa-se nesta figura a razão do desempenho obtido.

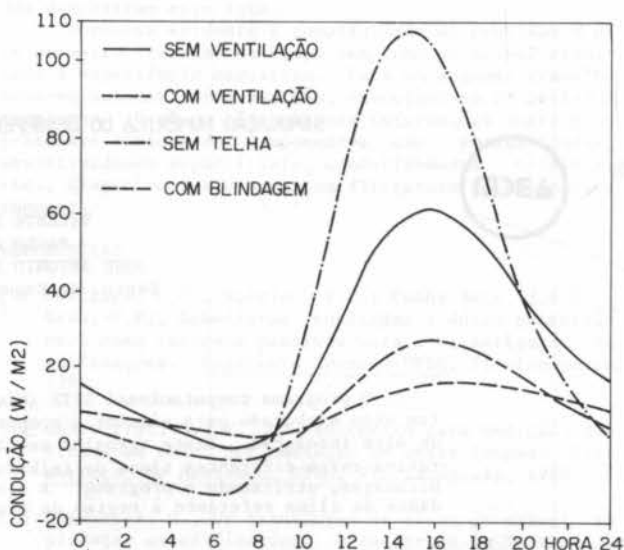


Figura 2. Fluxo por condução na laje.

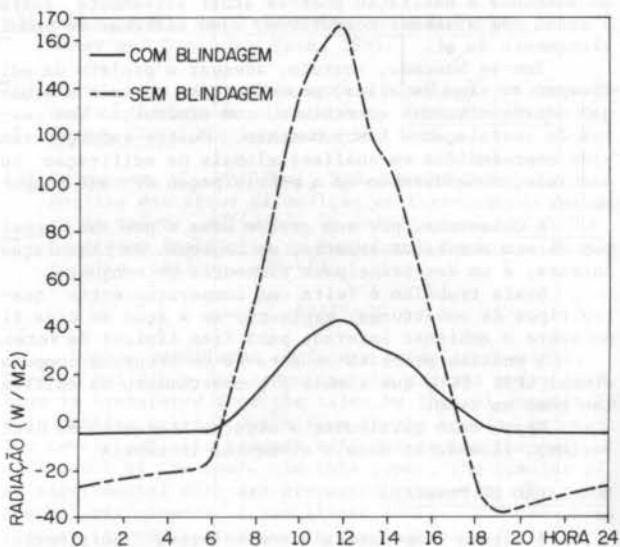


Figura 3. Fluxo por radiação para a laje.

A alternativa de ventilação, por sua vez, não interfere diretamente na radiação trocada. A razão do seu desempenho favorável está associada ao fluxo por convecção entre a telha e o ar circulante e entre este e a laje. O ar circulante rebaixa a temperatura da telha, mas, mais do que isto, retira boa parte do calor irradiado para a laje. A figura 4 compara os fluxos por convecção entre a laje e o ar do telhado, com e sem ventilação. Para o caso "ventilado", o fluxo ocorre sempre no sentido laje-ar, como pode-se observar.

Os valores numéricos do balanço de calor em cada superfície da cobertura, figuras 5 e 6, demonstram o funcionamento típico de cada solução. Estes dados referem-se ao horário de 12 horas quando a insolação é máxima. Nas figuras 7 e 8 tem-se os balanços de calor para o caso de cobertura com telha, laje e ático não ventilado e o caso de cobertura com laje apenas.

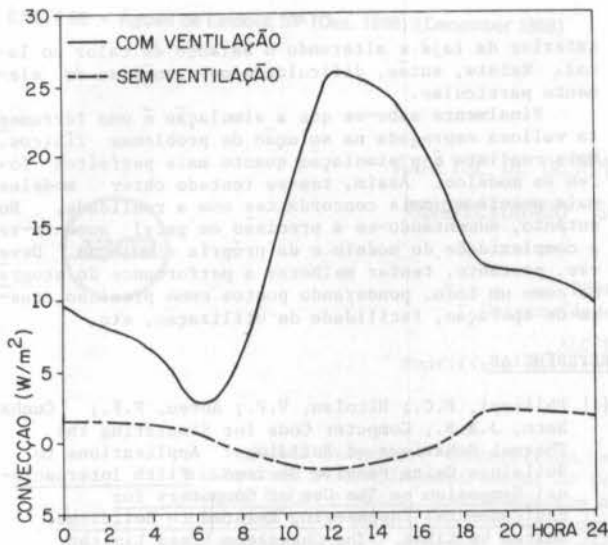


Figura 4. Fluxo por convecção sobre a laje.

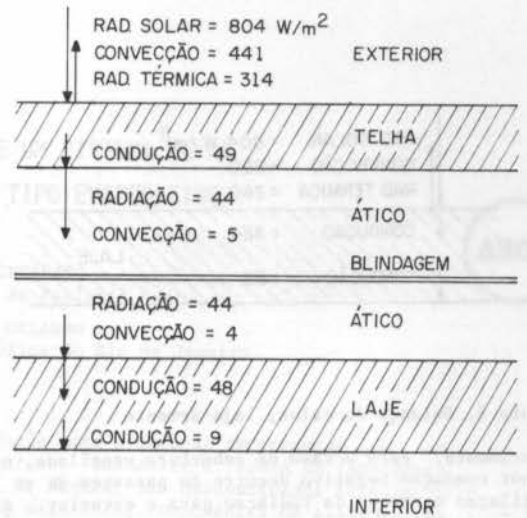


Figura 6. Balanço de calor, cobertura com blindagem.

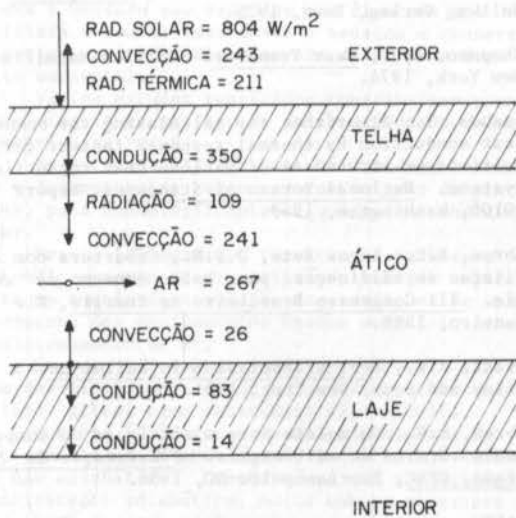


Figura 5. Balanço de calor, cobertura ventilada.

Para a mesma taxa de radiação solar direta e difusa incidente na superfície exterior da telha a resposta do conjunto torna-se dependente da solução adotada. O tipo de cobertura determina o tipo de comportamento.

Na cobertura com ventilação a condução pela telha é alta, como também a radiação para a laje. A convecção existente é a convecção forçada, conseguindo uma troca de calor eficiente. Deste modo a temperatura inferior da telha é rebaixada, bem como a superior da laje. Apesar de um fluxo de calor por condução pela telha considerável, existe um sumidouro caracterizado pelo ar circulante, proporcionando um menor fluxo para o ambiente interno.

Considerando o caso de uso de blindagem, a diferença em relação ao "ventilado" é marcante. A blindagem reduz drasticamente o fluxo de calor por radiação nas superfícies do ático. Para emissividades em ondas longas de 0,9 para superfícies da telha e superior da laje, tem-se, pela equação (3) um fator de forma modificado  $F_{t,l} = 0,82$ . Colocando-se a blindagem (de alumínio oxidado, por exemplo, com emissividade de 0,25), o fator de forma mo-

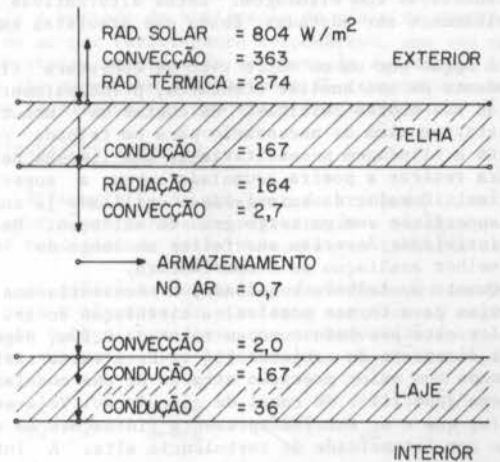


Figura 7. Balanço de calor, cobertura sem ventilação.

ficado reduz-se para  $F_{t,l} = 0,24$ , conforme a equação (4) Como o sumidouro de calor, caracterizado pelo ar de ventilação não existe neste caso e o processo de transmissão de calor por convecção representa pequena parcela, grande parte da radiação incidente é rejeitada na própria superfície externa, através de convecção com o ar exterior e radiação térmica para o meio ambiente. Para que isto ocorra, a temperatura exterior da telha deve crescer. Também deve crescer a temperatura inferior da telha pois o fluxo de calor por condução também sofre redução. A característica da blindagem já esperada, confirma-se, portanto. Ocorre redução do fluxo de calor em toda a cobertura.

Observando-se novamente a figura 2, que fornece o fluxo por condução que chega à superfície inferior da laje, nota-se comportamentos distintos no período noturno. O fluxo, negativo, da superfície inferior para o interior da laje, ocorre somente no caso de laje simples e no caso da cobertura ventilada. Para o caso de laje simples este fato é decorrente da grande perda radiativa noturna que a superfície da laje exposta ao céu

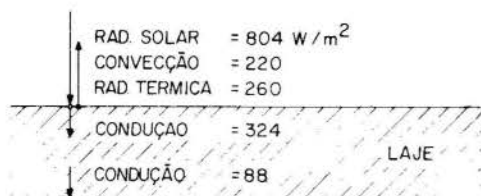


Figura 8. Balanço de calor, laje somente

experimental. Para o caso de cobertura ventilada, o fluxo por condução negativo decorre da passagem de ar de ventilação e também da radiação para o exterior. A colocação de blindagem não permite este fluxo contrário, como ocorre nos casos citados entre 24:00 e 8:00 horas.

#### CONCLUSÃO

A partir dos resultados confirmam-se as expectativas em torno do desempenho das coberturas ventiladas e das coberturas com blindagem. Estas alternativas podem perfeitamente ser adotadas, desde que previstas em projeto.

A opção por um ou outro tipo de cobertura ficaria dependente de uma análise econômica, principalmente em relação aos custos iniciais. Os custos de manutenção não estariam além do necessário para um telhado comum. Somente a blindagem necessitaria de uma limpeza periódica para retirar a poeira acumulada sobre a superfície superior. O valor da emissividade utilizado já considerava a superfície com um certo grau de oxidação. Medidas de emissividade deveriam ser feitas ao longo do tempo para melhor avaliação do comportamento.

Quanto ao telhado ventilado, é necessária uma altura mínima para tornar possível a circulação do ar. Este valor está previsto como em torno de 0,80m, dependendo das dimensões do conjunto [6]. Este valor seria determinado com maior precisão através de uma modelação do problema específico do canal de circulação. Veja-se, por exemplo, que o ar externo apresenta flutuações de velocidade com intensidade de turbulência alta. A interação ar externo - escoamento interno, com os problemas de interferência da entrada do canal e da estrutura de suporte do telhado, conforme a solução arquitetônica concebida, deveria ser resolvida. Acoplado a ação dos ventos exteriores sobre a circulação no canal existe o mecanismo da convecção, neste caso, a convecção forçada. Em vista do tipo de telha adotado, de cimento-amianto de 6mm, com baixa massa térmica, a convecção assume papel importante, considerando a quantidade de calor a ser retirada.

No caso de uso de blindagens, a altura entre o telhado e a laje ficaria dependente da convecção, no caso convecção natural (telhado sem ventilação), que possui participação reduzida no processo de transferência de calor. O espaço necessário estaria definido de acordo com o tipo de fixação da blindagem e da estrutura do telhado. A massa térmica representada pelo ar armazenado é pequena não sendo um dado a ser considerado na decisão.

Vale lembrar que a simulação visou diretamente a comparação entre tipos de coberturas. Eliminou-se totalmente as parcelas de radiação direta e difusa que possivelmente penetrariam no ambiente interno da edificação pelas superfícies transparentes.

Também a taxa de ocupação do ambiente com pessoas e equipamentos foi reduzida a zero. Deste modo pode-se considerar que praticamente só existe fluxo de calor para o ambiente interno pela cobertura. Em uma simulação global da edificação a radiação em ondas curtas que penetra no ambiente interno acaba atingindo a superfície

inferior da laje e alterando o balanço de calor no local. Existe, então, dificuldade para análise do elemento particular.

Finalmente sabe-se que a simulação é uma ferramenta valiosa empregada na solução de problemas físicos. Mais realista é a simulação quanto mais perfeitos forem os modelos. Assim, tem-se tentado obter modelos mais precisos, mais concordantes com a realidade. No entanto, aumentando-se a precisão em geral aumenta-se a complexidade do modelo e da própria simulação. Deve-se, portanto, tentar melhorar a performance do programa como um todo, ponderando pontos como precisão, custo de operação, facilidade de utilização, etc.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Philippi, P.C.; Nicolau, V.P.; Abreu, P.F.; Cunha Neto, J.A.B., Computer Code for Simulating the Thermal Behaviour of Buildings: Applications to Buildings Using Passive Devices. Fifth International Symposium on The Use of Computers for Environmental Engineering Related to Buildings. Edited by CIBSE. The Chameleon Press Limited. London, 1986. pp. 356-371.
- [2] Geiger, R. The climate near the ground, Harvard University Press, Cambridge, 1975.
- [3] Valko, P., Insolation des bâtiments in fonction de leur forme et de leur orientation, Meteoplan I., Hallwag Verlag, Bern, 1975.
- [4] Chapman, A.J., Heat Transfer. Collier Macmillan, New York, 1974.
- [5] Kusuda, T., Algorithms for calculating the transient heat conduction by thermal response factors for multi-layer structures of various heat conduction systems. National Bureau of Standards, Report 10108, Washington, 1969.
- [6] Abreu, R.C.; Lagos Neto, J.S.M., Cobertura com ventilação em edificações para baixo consumo de energia. III Congresso Brasileiro de Energia, Rio de Janeiro, 1985.
- [7] Pratt, A.W., Heat transmission in buildings, J. Wiley and Sons, New York, 1981.
- [8] Abreu, P.F., Um modelo para a simulação do comportamento térmico de edificações. Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis-SC, 1986.

#### ABSTRACT

A computer code SPTE (Simulação da Performance Térmica de Edificações), has been written for simulating the thermal behaviour of buildings, in conditions of high insolation. The code has been validated against experimental data for predicting the thermal performance of double ventilated roofs. In this paper, the results of a comparative analysis between different kinds of building covers are presented. The numerical simulation takes a sequence of typical summer days in account, predicting the effect of natural ventilation and of using reflecting surfaces between the covers. As a result of the numerical analysis, the thermal efficiency of the building covers is obtained as a function of related parameters.



## ANÁLISE DE DESEMPENHO DE UM SISTEMA DE AR CONDICIONADO SOLAR DO TIPO EVAPORATIVO



PEDRO PAULO ZUCARATO  
Universidade Federal do Espírito Santo  
ALCIR DE FARO ORLANDO  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

### RESUMO

Neste trabalho é desenvolvida uma metodologia para avaliação em operação de um sistema de ar condicionado solar do tipo evaporativo. Usando-se a Teoria de Transferência de Calor e Massa, juntamente com a integral de Merkel, são desenvolvidas correlações semi-empíricas para caracterizar o desempenho de diferentes componentes do sistema. Esta metodologia foi validada contra dados experimentais, e usada para prever o desempenho em situações diferentes das do protótipo.

Assim, os valores ótimos para os parâmetros de projeto são apresentados neste trabalho, indicando uma viabilidade técnica de utilização de tais sistemas.

### INTRODUÇÃO

Atualmente, as mais variadas combinações de temperatura e umidade são exigidas nas diversas aplicações industriais e domésticas: desde a secagem e conservação de alimentos, até o condicionamento de ar para fins de conforto ambiental.

Vários estudos realizados contribuíram para o desenvolvimento do projeto de ar condicionado solar desenvolvido na PUC-RJ.

Zylberstajn [1] fez uma análise das características e desempenho de regeneradores solares de placas para lelas, para desumidificantes líquidos em condicionamento de ar.

Pessoa [2] analisou teoricamente sistemas abertos de condicionamento de ar utilizando energia solar. Apresenta um modelo de simulação das condições de operação e desempenho dos equipamentos usados num ciclo aberto de condicionamento de ar.

Azevedo [3] fez uma análise teórica experimental e um desumidificador de ar adiabático, utilizando tri-etileno glicol como substância higroscópica.

Queiroz [4] segue o mesmo procedimento de Azevedo [3], somente utilizando em seu trabalho um desumidificador não adiabático. Constatam-se que a utilização do desumidificador adiabático, muito embora apresente um grau de secagem do ar satisfatório, ocasiona uma elevação significativa da temperatura de bulbo seco do ar, afetando o rendimento do sistema.

Pareja [5] analisa o desempenho de torres de resfriamento que funcionam como regeneradores da substância higroscópica líquida e desumidificador do ar do sistema de ar condicionado solar projetado. Determina experimentalmente, para vários níveis de concentração da solução higroscópica, a influência das variáveis temperatura de regeneração e temperatura de secagem no valor do coeficiente de desempenho. Analisa também a torre que funciona como umidificador.

O sistema projetado [6] utiliza duas torres de absorção semelhantes: uma para regenerar a solução de tri-etileno glicol e água; a outra para desumidificar o ar proveniente do ambiente condicionado.

Uma terceira torre, o lavador de ar, proveniente do ambiente condicionado, funciona como umidificador de ar, proveniente da torre de secagem.

Um trocador de calor, do tipo carcaça e tubos com defletores, serve para compatibilizar os níveis de temperatura da solução higroscópica, entre os processos de secagem e regeneração, no funcionamento contínuo do sistema.

No sistema de aquecimento de água tem-se uma bateria de coletores solares com área de 60 m<sup>2</sup>, um reservatório de água quente para 4.500 l e um aquecedor auxiliar a gás com capacidade nominal de 40.000 kcal/h.

O sistema utiliza como agente higroscópico uma solução de tri-etileno glicol e água. A característica do

ciclo utilizado possibilita a adoção no processo de regeneração de equipamentos que aproveitem calor de processo rejeitado em unidades industriais. Esta substituição amplia o mercado de utilização do ciclo de condicionamento de ar por resfriamento evaporativo, uma vez que as temperaturas exigidas na regeneração da solução higroscópica são normalmente inferiores às temperaturas dos produtos rejeitados nos processos industriais.

### CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

A formulação do processo de troca de calor e massa que ocorre nas torres de regeneração e secagem do ciclo de ar condicionado solar baseou-se no trabalho de Queiroz [4].

As equações resultantes da formulação foram obtidas para a regeneração e secagem operando em regime permanente e considerando-se que nenhum calor é trocado com o meio ambiente. São apresentadas por Queiroz [4].

$$\frac{dh}{dW} = Le \left[ \left( \frac{h - h_{eq}}{w - w_{eq}} \right) - 2501 \right] + h_{gm} \quad (1)$$

$$\frac{dt}{dw} = \frac{\dot{m}_a}{C_{pm} \dot{m}_m} \left[ \frac{dh}{dw} - h_f - h^* - \lambda \left( \frac{t - t_{med}}{w - w_{eq}} \right) \right] \quad (2)$$

onde,

- h - entalpia específica do ar, kJ/kg de ar seco
- w - razão de umidade do ar, kg de água/kg de ar seco
- Le - número de Lewis
- h<sub>eq</sub> - entalpia específica de equilíbrio, kJ/kg ar seco
- w<sub>eq</sub> - razão de umidade de equilíbrio, kg de água/kg de ar seco
- h<sub>gm</sub> - entalpia específica do vapor d'água saturado na temperatura do tri-etileno glicol, kJ/kg de ar seco
- t<sub>m</sub> - temperatura do tri-etileno glicol, °C
- $\dot{m}_a$  - vazão de ar seco, kg/s
- $\dot{m}_m$  - vazão de tri-etileno glicol, kg/s
- C<sub>pm</sub> - calor específico do tri-etileno glicol, kJ/kg °C
- h<sub>f</sub> - entalpia específica da água, kJ/kg
- h\* - Calor de mistura de tri-etileno glicol, kJ/kg
- λ - coeficiente de transferência, kJ/kg °C
- t<sub>med</sub> - temperatura média da água entre a entrada e saída da torre, °C.

Tendo-se as condições do ar e tri-etileno glicol ao longo da torre, pode-se calcular o coeficiente global de transferência de massa para a secagem e regeneração, através da integral de Merkel [7], conforme aparece na equação (3).

$$h_{Dv} A_v = - \frac{\dot{m}_a}{V} \int_{w_1}^{w_2} \frac{dw}{w - w_{eq}} \quad (3)$$

onde,

$h_{Dv}$  - coeficiente de transferência de massa, kg/s.m<sup>2</sup>  
 $A_v$  - área interfacial por unidade de volume, m<sup>2</sup>/m<sup>3</sup>  
 $V$  - volume efetivo da torre, m<sup>3</sup>

Na determinação do coeficiente de troca de calor e massa da torre que compõe o processo de resfriamento evaporativo do ciclo de ar condicionado (umidificador), utiliza-se o modelo apresentado por Pareja [6] para o lavador de ar usado no sistema.

Considerando a torre operando em regime permanente isolada do meio ambiente e desprezando a energia adicionada pela bomba para efeito de aumento da temperatura da água, têm-se o valor do coeficiente de transferência de massa calculado pela equação que segue:

$$h_{Dv} A_v = - \frac{\dot{m}_a}{V} \cdot \ln \frac{(w_s - w_2)}{(w_s - w_1)} \quad (4)$$

Como o processo de lavagem de ar é um processo de mesma temperatura de bulbo úmido ( $t_{bu}$ ):

$$w_s = 0,622 \frac{P}{P_{atm} - P} \quad (5)$$

$$P = 10^Y \times 1000 \quad (6)$$

$$Y = 28,5905 - 8,2 \cdot \log(t_{bu}) + 0,0024804 \cdot t_{bu} - \frac{3142,31}{t_{bu}} \quad (7)$$

onde,

$P_{atm}$  - pressão atmosférica, bar  
 $P$  - pressão de vapor, bar  
 $t_{bu}$  - temperatura absoluta em bulbo úmido

Para as torres de regeneração e secagem a solução do problema se constitui em resolver numericamente um sistema de equações diferenciais e a integral de Merkel [7].

Utilizou-se na solução o método de Runge-Kutta de 4ª ordem [8] que permite obter solução numérica de sistemas de equações diferenciais, dado o valor inicial. Adotou-se o número de Lewis como sendo 0,9 para o vapor d'água difundindo-se no ar [7] e o valor do calor de mistura ( $h^*$ ) igual a 211,65 kJ/kg [4].

#### PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

No equipamento utilizado, realizaram-se várias experiências, variando-se alternadamente a vazão de água quente e da solução de tri-etileno glicol na regeneração, bem como a vazão de ar na secagem e da água no umidificador. Aproveitaram-se aquelas experiências, cujas combinações das diferentes vazões fecham o ciclo de operação do sistema, com o abaixamento da umidade e entalpia do ar na secagem.

As medidas de temperatura foram feitas com termopares cobre-constantan, com uma incerteza de 0,2°C para as medidas de temperatura do ar e 0,1°C para as temperaturas da solução higroscópica e da água. Nas medidas de temperatura de bulbo seco e bulbo úmido do ar na entrada e na saída na regeneração utilizou-se um psicrômetro de ventilação forçada, com termômetros de mercúrio com menor divisão da escala de 0,2°C.

Utilizaram-se para as medidas de vazão de tri-etileno glicol e da água no sistema, placas de orifício calibrados conforme a norma ASME [9]. A incerteza associada aos valores de vazão medida é de 3,5%.

Para se medir a vazão de ar na torre de regeneração, foi utilizado um bocal convergente colocado na saída

da da torre, com  $C = 0,98$  e uma incerteza associada aos valores medidos de 4%.

Na medida de vazão de ar na torre de secagem foi introduzido na tubulação de entrada do ar um anemômetro tipo ventoinha. O anemômetro mede a velocidade do ar na parte central da seção de medição. A incerteza associada ao valor de vazão de ar obtida por este procedimento é de 13%.

A concentração da solução aquosa de tri-etileno glicol é medida através do índice de refração da luz de sódio nesta substância. A curva de calibração que relaciona concentração com índice de refração, foi determinada à temperatura de 20°C por Azevedo [3] com uma incerteza associada de 0,1%.

Vários experimentos foram realizados no sentido de balancear o sistema de ar condicionado solar projetado. Conseguiu-se fechar o ciclo de condicionamento do ar com o abaixamento da entalpia do ar na secagem ( $\Delta h = 8 \text{ kJ/kg}$ ) e o aumento da umidade e a consequente diminuição na temperatura do ar na torre de umidificação ( $t_e = 27,6^\circ\text{C}$  e  $t_A = 20,8^\circ\text{C}$ ) para uma operação do sistema nas faixas de 0,66 kg/s a 1,20 kg/s de vazão da água quente, 0,47 a 0,60 kg/s de vazão da solução de tri-etileno glicol, 0,54 kg/s a 0,75 kg/s de vazão de ar na secagem, uma vazão de 1,00 kg/s de água no umidificador e 0,09 kg/s de ar no regenerador.

Com os dados obtidos com a operação do sistema, procedeu-se a um balanço de energia, com cada conjunto de dados que compõem um experimento, com o objetivo de avaliar o desempenho de cada equipamento e dos instrumentos componentes do sistema de medidas. Foram encontrados desvios médios de 13% para os sistemas de secagem e umidificação, e 17% para a regeneração. Não foram computadas as perdas de energia através das tubulações de interligação (consideradas desprezíveis).

Utilizando-se o modelo teórico proposto, montaram-se programas em linguagem BASIC. Com estes programas, calcularam-se os valores de  $\lambda$  (coeficiente de transferência) e na  $h_{Dv}$  (coeficiente de transferência de massa) nas torres de secagem e regeneração, pelo método dos mínimos quadrados para vários dados experimentais. Assim foram obtidas correlações semi-empíricas para o coeficiente de transferência de massa como função das vazões.

#### ANÁLISE DOS RESULTADOS

Com a utilização das correlações empíricas, montou-se o programa de simulação para o sistema de ar condicionado solar em estudo, possibilitando uma análise de desempenho do mesmo. Cabe ressaltar, que as equações empíricas foram obtidas a partir de dados correlacionados através do método de mínimos quadrados; e portanto, o uso destas expressões deve ser limitado às condições de operação pesquisadas.

Na análise de desempenho do sistema, utilizaram-se os parâmetros COP (coeficiente de desempenho) e TR (capacidade frigorífica em toneladas de refrigeração), equações (8) e (9). Não se utilizou, no cálculo do COP, a energia consumida pelas bombas e ventiladores (em torno de 1,5 kw), ainda não otimizada no protótipo:

$$\text{COP} = \frac{\dot{m}_a \Delta h}{\dot{m}_w C_{pw} \Delta t} \quad (8)$$

$$\text{TR} = \frac{\dot{m}_a \Delta h}{3,52} \quad (9)$$

onde,

$\Delta h$  - variação de entalpia do ar na secagem, kJ/kg ar seco  
 $\dot{m}_w$  - vazão de água quente no regenerador, kg/s  
 $C_{pw}$  - calor específico da água quente, kJ/kg°C  
 $\Delta t$  - variação de temperatura da água quente no regenerador, °C

Aplicou-se inicialmente o programa de simulação na reprodução das curvas de taxa de regeneração obtidas



por Pareja [5]. Conseguiu-se reproduzir a curva de taxa de regeneração para uma temperatura de regeneração de 45°C, com 12% de desvio; a curva para uma temperatura de regeneração de 51°C foi reproduzida com um desvio de 11% (Figura 1).

A seguir, utilizou-se o programa analisando-se através dos parâmetros COP e TR, o desempenho do sistema projetado com relação à variação da temperatura de água quente no regenerador, à vazão de ar na secagem, vazão e concentração da solução de tri-etileno glicol.

Obteve-se, dentro de uma variação de 40°C a 54°C na temperatura da água no regenerador, um contínuo crescimento dos valores de COP e TR, atingindo a 54°C um valor de COP de 0,5 e com uma capacidade Frigorífica de 1,3 TR (Figuras 2 e 3).

Variando-se a vazão de ar, encontra-se a melhor condição de operação para o sistema em estudo (COP de 0,55 e com 1,2 TR), dentro da faixa de vazão que vai de 0,53 a 0,57 kg/s de ar. (Figuras 4 e 5).

A análise do sistema, com a variação da vazão da solução de tri-etileno glicol, indica que dentro da faixa de vazão de 0,50 a 0,55 kg/s, os parâmetros COP e TR permanecem aproximadamente constantes. (Figura 6 e 7).

A variação de concentração, na simulação do sistema, indica a faixa de 93% a 93,5% de concentração, como a faixa de melhores valores de COP (0,5) e TR (1,2) para o sistema em estudo. (Figuras 8 e 9).

As linhas tracejadas encontradas nas figuras apresentadas, indicam a incerteza associada aos valores de COP e TR, devido à utilização no programa de simulação das correlações empíricas desenvolvidas.

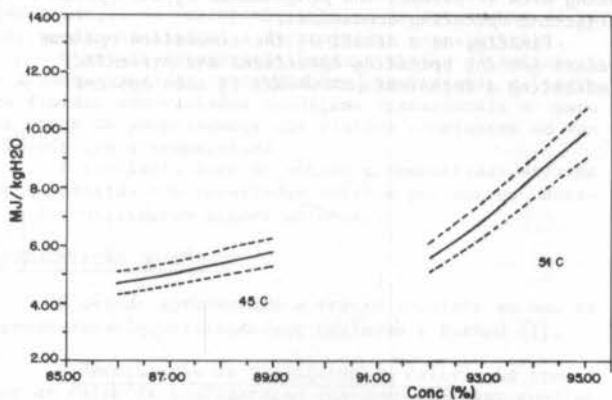


Figura 1- Curvas para taxa de regeneração (concentração Versus relação de energia utilizada no processo pela quantidade de água retirada do TEG)

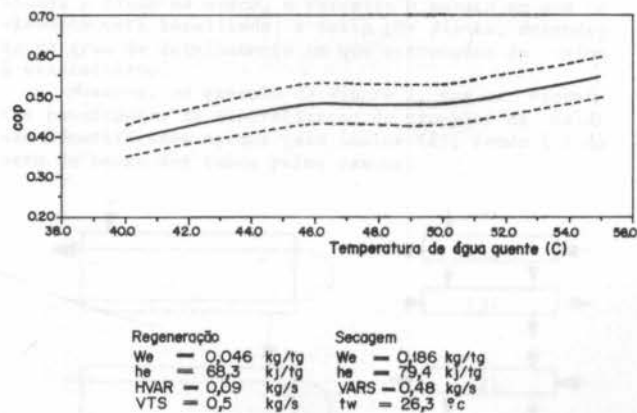


Figura 2- Curva da temperatura da água quente versus COP.

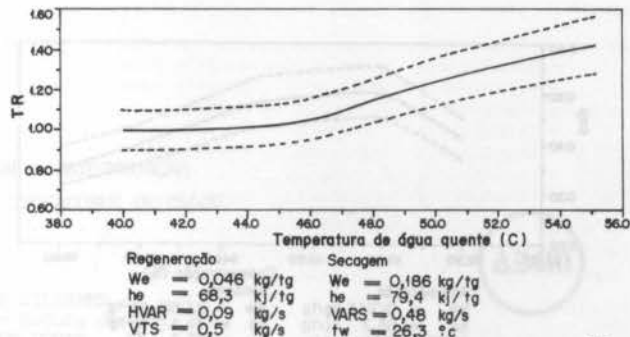


Figura 3- Curva da temperatura da água quente versus TR.

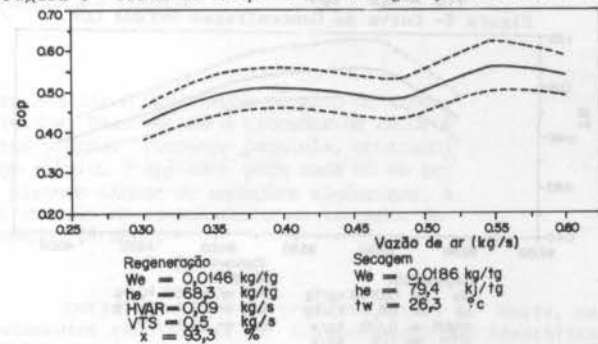


Figura 4- Curva da vazão de ar na secagem versus COP.

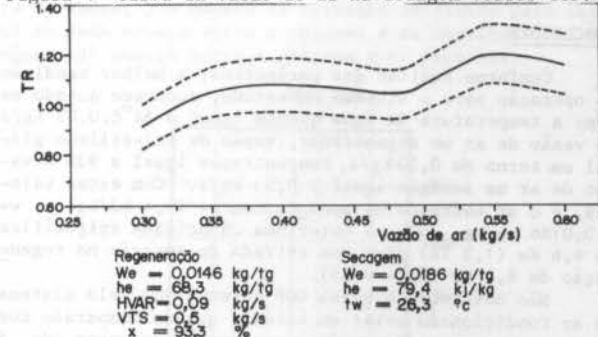


Figura 5- Curva da vazão de ar na secagem versus TR.

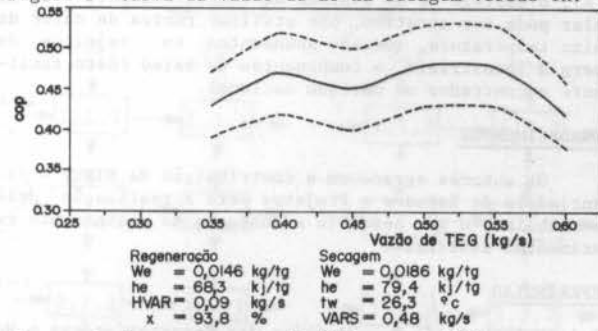


Figura 6- Curva da vazão de TEG versus COP.

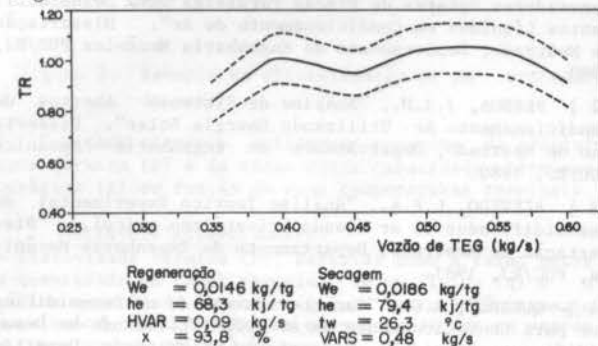


Figura 7- Curva da temperatura da água quente versus COP.

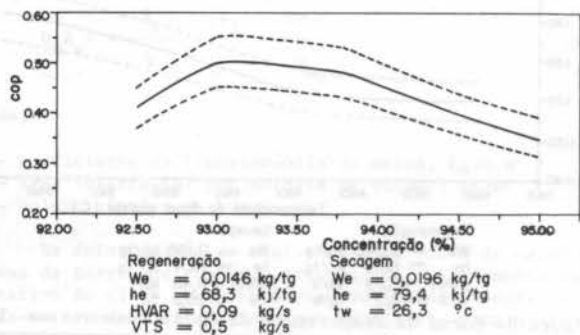


Figura 8 - Curva de Concentração versus COP.

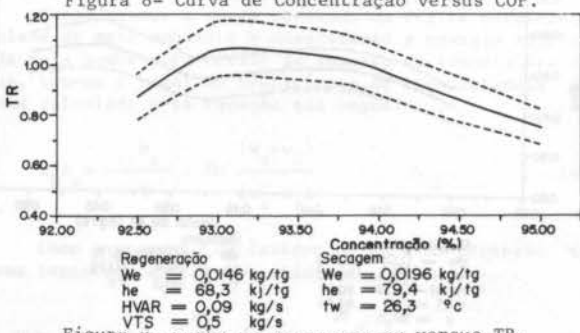


Figura 9 - Curva de Concentração versus TR.

#### CONCLUSÕES

Conforme análise dos parâmetros, a melhor condição de operação para o sistema em estudo, acontece quando se têm: a temperatura da água quente igual a 54°C, 0,09 Kg/s de vazão de ar no regenerador, vazão de tri-etileno glicol em torno de 0,50 kg/s, concentração igual a 93% e vazão de ar na secagem igual a 0,55 kg/s. Com estes valores, e o ar entrando na secagem com  $h = 79,4$  kJ/kg e  $w = 0,0186$  kg/kg, pode-se obter uma capacidade frigorífica de 4,6 Kw (1,3 TR) para uma entrada de energia na regeneração de 8,4 Kw (COP= 0,55).

Não obstante, o baixo COP apresentado pelo sistema de ar condicionado solar em estudo, quando comparado com sistemas de ar condicionado à compressão de vapor (de 3 a 4), o emprego de um sistema de condicionamento de ar solar pode ser atrativo, por utilizar fontes de calor de baixa temperatura, que são abundantes em rejeitos de energia industriais, e componentes de baixo custo facilmente encontrados no mercado nacional.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a contribuição da FINEP - Financiadora de Estudos e Projetos para a realização deste trabalho, o que permitiu a montagem do equipamento experimental utilizado.

#### REFERÊNCIAS

[1] ZYLBERSTAJN; D., "Análise das Características e Regeneradores Solares de Placas Paralelas para Desumidificantes Líquidos em Condicionamento de Ar". Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica PUC/RJ, 1980.

[2] PESSOA, J.J.M., "Análise de Sistemas Abertos de Condicionamento de Ar Utilizando Energia Solar". Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica PUC/RJ, 1980.

[3] AZEVEDO, L.F.A., "Análise Teórico Experimental de desumidificador de ar usando tri-etileno glicol". Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, 1981.

[4] QUEIROZ, A.G., "Características de um Desumidificador para Condicionamento de Ar Solar Utilizando-se Desumidificante Líquido". Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, 1983.

[4] PAREJA, H.A.L., "Características de um Sistema de Ar Condicionado Solar Utilizando um Desumidificante Líquido". Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, 1986.

[6] PAREJA, H.A.L., "Cálculo do Coeficiente de Transferência de Massa em Torre de Resfriamento". Projeto de Graduação, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, 1982.

[7] THRELKELD, J.L., "Thermal Environmental Engineering Prentice-Hall, 2ª edição, 1970.

[8] LAMBERT, J.L., "Computational Methods in Ordinary Differential Equations", John Wiley & Sons, 1977.

[9] American Society of Mechanical Engineers, "Flow Measurements by means of thin Plate Orifices, Flow Nozzles and Venturi", ASME Power Test Codes Supplement on Instruments and Apparatus, USA.

[10] UnionCarbide Corporation, "glycols", USA (1964).

#### ABSTRACT

A methodology is developed in this research, aiming the evaluation of an evaporative type solar air conditioning system, while in operation. The heat and mass transfer theory, together with the Merkel integral is used to develop semi-empirical correlations, so that the performance of the system can be established. This methodology has been validated against experimental data, being used to predict the performance of the system under different operating conditions.

Finally, as a result of the simulation optimum values for the operating conditions are presented, indicating a technical feasibility of such systems.

MÉTODO GENERALIZADO PARA A DETERMINAÇÃO DO DESEMPENHO TÉRMICO DE TROCADORES DE CALOR



OTÁVIO DE MATOS SILVARES  
Escola Politécnica da USP - Escola de Eng. Mauá  
OSVALDO GUILLEN LOPES  
Companhia Siderúrgica Paulista - COSIPA

RESUMO

Foi desenvolvido um método generalizado para avaliar o desempenho térmico de trocadores de calor com diferentes geometrias e fluidos. Pelo método o trocador de calor é discretizado através de três tipos de elementos nodais: corrente paralela, contracorrente e corrente cruzada. A equação do balanço térmico é aplicada para cada nó em termos das variáveis adimensionais, formando um sistema linear de equações algébricas. A solução do sistema de equações fornece a distribuição de temperaturas no trocador de calor e são calculados os parâmetros de desempenho térmico.

INTRODUÇÃO

A literatura apresenta diversos métodos para a determinação do desempenho térmico de trocadores de calor, particularizados a determinadas configurações.

O método apresentado neste trabalho é aplicável a grande número de configurações geométricas e pares de fluidos sob variadas condições operacionais e para os casos de propriedades dos fluidos constantes ou variáveis com a temperatura.

A confiabilidade do método é demonstrada através da comparação com resultados obtidos por outros autores que utilizaram outros métodos.

APRESENTAÇÃO DO MÉTODO

O método apresentado a seguir consiste em uma extensão daquele utilizado por Caglayan e Buthod [1].

**Discretização de Trocadores de Calor.** Um trocador de calor de configuração qualquer pode ser subdividido em três elementos básicos, ou seja, elemento de correntes opostas, paralelas ou cruzadas; associados de acordo com a configuração do trocador de calor.

Os elementos são identificados por índices (i, j, k, ..., w), onde o primeiro índice pode indicar a fileira de tubos, o segundo a corrente em que foi subdividido o fluxo no casco, o terceiro o espaço em que o elemento está localizado, e assim por diante, dependendo do grau de detalhamento em que o trocador de calor é discretizado.

Observe, no exemplo da Figura 1, que os elementos resultantes da discretização do trocador de calor são identificados apenas pelo índice (i), sendo i o número do passe dos tubos pelos cascos.

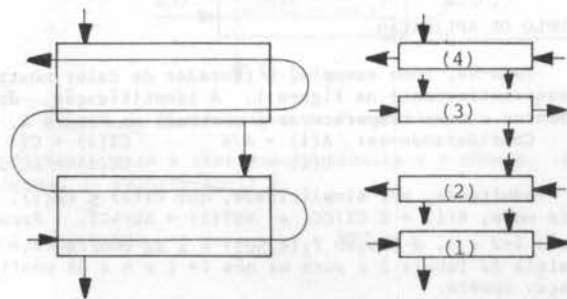


Figura 1. Exemplo de discretização de um trocador de calor

Outro exemplo é mostrado na Figura 2. Neste, os elementos resultantes da discretização são identificados pelos índices (i, j, k), sendo i o número da fileira de tubos, j o número da corrente do fluido pelo casco em cada espaço entre a chicana e os espelhos e K o número do espaço entre a chicana e os espelhos.

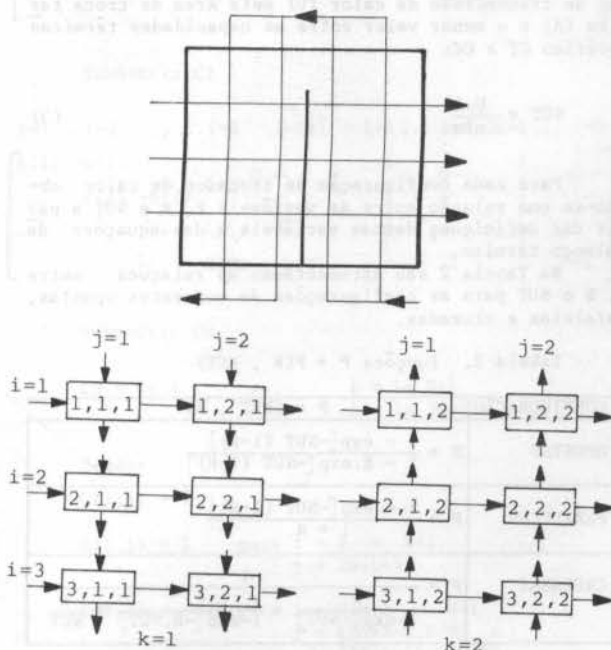


Figura 2. Exemplo de discretização de um trocador de calor

A cada elemento aplicam-se equações da efetividade térmica (P) e da razão entre capacidades térmicas horárias (R) em função de suas temperaturas terminais.

Variáveis Adimensionais.

- Efetividade térmica (P): definida como a razão entre a quantidade de calor removida de um fluido (q) e a máxima quantidade de calor (qmáx) termodinamicamente possível de ser trocada nas mesmas condições de vazões e temperaturas de entrada.

$$P = \frac{q}{q_{\max}} = \frac{CT(t_2 - t_1)}{C_{\min}(T_1 - t_1)} = \frac{CC(T_1 - T_2)}{C_{\min}(T_1 - t_1)} \quad (1)$$

onde:

- CT = capacidade térmica do fluido pelo tubo (W/K)
- CC = capacidade térmica do fluido pelo casco (W/K)
- Cmin = menor valor entre CT e CC (W/K)
- t1 = temperatura de entrada do fluido pelo tubo (°C)
- T1 = temperatura de entrada do fluido pelo casco (°C)
- t2 = temperatura de saída do fluido pelo tubo (°C)
- T2 = temperatura de saída do fluido pelo casco (°C)

- Razão entre capacidades térmicas horárias (R): definida como a razão entre os valores mínimo e máximo das capacidades térmicas horárias.

$$R = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \quad (2)$$

As variáveis adimensionais P e R podem ser expressas em função somente das temperaturas terminais, conforme Tabela 1.

Tabela 1. Efetividade Térmica e Razão entre Capacidades Térmicas Horárias

	CT = Cmin	CC = Cmin
P =	$\frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1}$	$\frac{T_1 - T_2}{T_1 - t_1}$
R =	$\frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1}$	$\frac{t_2 - t_1}{T_1 - T_2}$

- Número de Unidades de Transferência (NUT): definida como sendo a razão entre o produto do coeficiente global de transmissão de calor (U) pela área de troca térmica (A) e o menor valor entre as capacidades térmicas horárias CT e CC:

$$NUT = \frac{U \cdot A}{C_{\min}} \quad (3)$$

Para cada configuração de trocador de calor obtém-se uma relação entre as variáveis P, R e NUT a partir das definições destas variáveis e das equações de balanço térmico.

Na Tabela 2 são apresentadas as relações entre P, R e NUT para as configurações de correntes opostas, paralelas e cruzadas.

Tabela 2. Funções P = P(R, NUT)

CONFIGURAÇÃO	P = (NUT, R)
OPOSTAS	$P = \frac{1 - \exp[-NUT(1-R)]}{1 - R \cdot \exp[-NUT(1-R)]}$
PARALELAS	$P = \frac{1 - \exp[-NUT(1+R)]}{1 + R}$
CRUZADAS	$P = \frac{1}{\frac{1}{1 - \exp[-NUT]} + \frac{R}{1 - \exp[-R \cdot NUT]} + \frac{1}{NUT}}$

Sistemas de Equações Lineares. Tomando-se, como exemplo um elemento genérico (Figura 3), as equações de efetividade térmica e da razão entre capacidades térmicas horárias em função de suas temperaturas terminais são as seguintes:

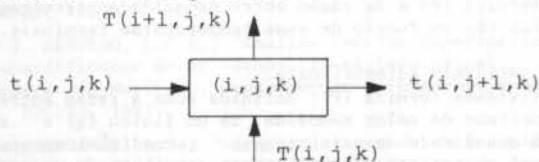


Figura 3. Elemento (i, j, k)

Para  $CT(i, j, k) \leq CC(i, j, k)$ :

$$t(i, j, k) - t(i, j+1, k) = P(i, j, k) [t(i, j, k) - T(i, j, k)] \quad (4)$$

$$T(i, j, k) - T(i+1, j, k) = R(i, j, k) [t(i, j+1, k) - t(i, j, k)] \quad (5)$$

Para  $CT(i, j, k) > CC(i, j, k)$ :

$$T(i+1, j, k) - T(i, j, k) = P(i, j, k) [t(i, j, k) - T(i, j, k)] \quad (6)$$

$$t(i, j, k) - t(i, j+1, k) = R(i, j, k) [T(i+1, j, k) - T(i, j, k)] \quad (7)$$

O valor de  $P(i, j, k)$  pode ser obtido sem o conhecimento das temperaturas terminais pela relação  $P(i, j, k) = f[NUT(i, j, k), R(i, j, k)]$ , conforme Tabela 2.

Da mesma forma, o valor de  $R(i, j, k)$  pode ser obtido sem o conhecimento das temperaturas terminais, através da Equação (2):

$$R(i, j, k) = \frac{C_{\min}(i, j, k)}{C_{\max}(i, j, k)} \quad (2)$$

A aplicação das Equações (4) e (5), ou (6) e (7) a todos os elementos resultantes da discretização do trocador de calor, juntamente com as condições de contorno e de compatibilidade entre os elementos, resulta um sistema de equações que rege o comportamento térmico do trocador de calor. Com a solução do sistema de equações obtém-se a distribuição de temperaturas no trocador de calor e, conseqüentemente, a sua efetividade térmica.

O conhecimento das temperaturas dos fluidos ao longo do trocador de calor permite que se considere os valores reais de suas propriedades termofísicas em cada ponto, caso suas variações sejam significativas. Nestes casos, adota-se um processo iterativo para solução do sistema de equações.

Generalização de Modelos. O sistema de equações obtido pode ser colocado na forma de equação matricial com o seguinte aspecto:

$$C(P, Q) \times T(Q) = S(Q) \quad (8)$$

onde:

- C(P, Q) = é a matriz dos coeficientes
- T(Q) = é a matriz das incógnitas
- S(Q) = é a matriz dos termos independentes

A matriz C(P, Q) apresenta uma distribuição espacial de seus elementos definida pela seqüência de colocação das equações e dos termos da matriz T(Q).

Para trocadores de calor cuja discretização permite a identificação dos elementos com os mesmos índices (i, j, k, ..., w), os formatos das matrizes C(P, Q) são semelhantes se for mantido um mesmo critério de colocação das equações e dos termos das matrizes T(Q).

Através da observação desta semelhança, foi elaborado um programa que gera automaticamente os sistemas de equações lineares para diferentes trocadores de calor.

#### EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Toma-se, como exemplo, o trocador de calor mostrado esquematicamente na Figura 1. A identificação dos elementos e suas temperaturas é mostrada na Figura 4.

$$\text{Considerando-se: } A(i) = A/4 \quad CT(i) = CT$$

$$U(i) = U \quad CC(i) = CC/2$$

Admite-se, por simplicidade, que  $CT(i) \leq CC(i)$ . Deste modo,  $R(i) = 2 CT/CC$  e  $NUT(i) = AU/4CT$ . Para os nós  $i=2$  e  $3$ , a função  $P_i(R, NUT)$  é a da configuração paralela da Tabela 2 e para os nós  $i=1$  e  $4$  a da configuração oposta.



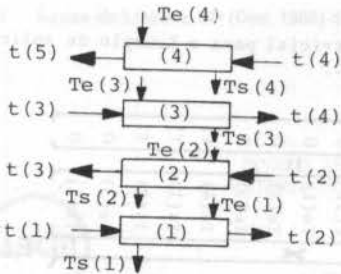


Figura.4 Discretização Adotada

A aplicação de  $P(i)$  e  $R(i)$  em função das temperaturas terminais, das condições de contorno e de compatibilidade, resultam no seguinte sistema de equações lineares:

Equações de efetividade térmica:

$$\begin{aligned} P(1) [Te(1) - t(1)] + t(1) - t(2) &= 0 \\ P(2) [Te(2) - t(2)] + t(2) - t(3) &= 0 \\ P(3) [Te(3) - t(3)] + t(3) - t(4) &= 0 \\ P(4) [Te(4) - t(4)] + t(4) - t(5) &= 0 \end{aligned}$$

Equações de razões entre capacidades térmicas hoarárias:

$$\begin{aligned} R(1) [t(1) - t(2)] + Te(1) - Ts(1) &= 0 \\ R(2) [t(2) - t(3)] + Te(2) - Ts(2) &= 0 \\ R(3) [t(3) - t(4)] + Te(3) - Ts(3) &= 0 \\ R(4) [t(4) - t(5)] + Te(4) - Ts(4) &= 0 \end{aligned}$$

Condições de contorno:

$$T(1) = t1 \quad Te(3) = T1 \quad Te(4) = T1$$

Condições de compatibilidade:

$$\begin{aligned} Te(1) &= \frac{1}{2} [Ts(3) + Ts(4)] \\ Te(2) &= \frac{1}{2} [Ts(3) + Ts(4)] \end{aligned}$$

Colocando-se este sistema de equações lineares na forma de equação matricial tem-se a matriz do Anexo 1.

Aplicação numérica:

Considerando  $A=5 \text{ m}^2$ ,  $U=170 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $CT=283 \text{ W/K}$ ,  $CC=1.132 \text{ W/K}$ ,  $t1=200 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T1=0 \text{ }^\circ\text{C}$ , obtém-se a seguinte distribuição de temperaturas:

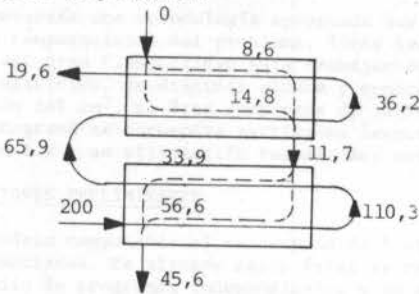


Figura 5. Distribuição de Temperaturas

Neste caso a efetividade térmica e o número de unidades de transferência é:

$$P = 0,905 \quad NUT = 3$$

Generalização do modelo: Observando-se a distribuição dos elementos da matriz  $C(P,Q)$ , é possível

generalizar o modelo para  $M$  cascos em série e  $N$  passes dos tubos, sendo  $M$  um número inteiro positivo e  $N$  múltiplo de  $M$ .

A equação matricial na forma generalizada tem o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_2 \\ \vdots \\ C_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t(1) \\ \vdots \\ t(N+1) \\ Te(1) \\ \vdots \\ Te(N) \\ Ts(1) \\ \vdots \\ Ts(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ t1 \\ T1 \\ \vdots \\ T1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\left. \begin{matrix} 2N \\ \\ N/M \\ N - \frac{N}{M} \end{matrix} \right\}$

Submatriz  $C1$

$$\begin{bmatrix} i=1 & i=2 & \dots & i=N & i=N+1 & i=1 \dots i=N & i=1 \dots i=N \\ 1-P(1) & -1 & & 0 & - & P(1) & 0 & - & 0 & - \\ & -0 & \dots & 0 & - & & 0 & - & & - \\ & & & 1-P(N) & -1 & & P(N) & & & \end{bmatrix}$$

Submatriz  $C2$

$$\begin{bmatrix} i=1 & i=2 & \dots & i=N & i=N+1 & i=1 \dots i=N & i=1 \dots i=N \\ R(1) & -R(1) & & 0 & - & 1 & 0 & - & -1 & 0 & - \\ & R(2) & -R(2) & & 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 & - \\ -0 & & & & & & & & & & & \\ & & & & R(N) & -R(N) & & & 1 & & & -1 \end{bmatrix}$$

Submatriz  $C3$

$$C3 = C_{i,j} \quad \begin{matrix} i = 1a N+1 \\ j = 1a 3N+1 \end{matrix}$$

Sendo:

$$C(1,j) = 1$$

$$C(i,j) = 1 \quad \text{para } i = 2 \text{ a } N+1 \quad j = 2N-i+3$$

$$C(i,j) = -M/N \quad \text{para } i = N/M+2 \text{ a } N+1 \quad j = (3N+2-\ell.N/M) \text{ a } (3N+1-(\ell-1)N/M)$$

$$\ell = 1 \quad \text{para } i = N/M + a \quad 2N/M + 1$$

$$\ell = 2 \quad \text{para } i = 2N/M + a \quad 3N/M + 1$$

$$\ell = M-1 \quad \text{para } i = N + 2 - N/M \text{ a } N + 1$$

Mostra-se na Tabela 3 os resultados da efetividade térmica obtidos no presente trabalho para alguns pares  $(M,N)$ , juntamente com os obtidos por autores que empregaram outros métodos.





MODELO ANALITICO COMPUTACIONAL PARA DETERMINACION DEL ENMASCARAMIENTO SOLAR EN ZONAS URBANAS



ALFREDO ESTEVES, CARLOS DE ROSA, JOSE LUIS CORTEGOSO  
 Laboratorio de Ambiente Humano y Vivienda (LAHV) Centro de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CRICYT). Casilla de Correo 131 - 5500 Mendoza ARGENTINA - Tel.241797 - Tx.55438 CYTME AR

RESUMEN

En el proyecto del emplazamiento de un edificio solar pasivo, se necesita conocer el grado de enmascaramiento de la radiación solar directa por el entorno. El cálculo por métodos gráficos habituales se complica si el edificio se encuentra en un ambiente urbano. Se presenta una metodología que permite el cálculo computacional del área asoleada de cada fachada del edificio. Se ha encontrado una relación entre el azimut del sol y los rumbos de los lados que permite obtener el volumen de sombras total de los edificios del lugar para cada hora del día. El programa de computación desarrollado permite obtener el área asoleada con la aproximación del  $cm^2$ .

INTRODUCCION

En todo intento de emplazamiento de un edificio solar, ya sea una construcción nueva o un "retrofit" se necesita conocer el grado de enmascaramiento de la radiación solar directa por el entorno.

En el caso de un nuevo emplazamiento esto podría ser la causa de un giro en la orientación del mismo con el objeto de aprovechar el máximo de radiación solar realmente disponible.

Cuando se quiere reciclar un edificio existente, conocer el potencial solar es imprescindible para determinar y evaluar mediante modelos, su comportamiento térmico en las distintas épocas del año.

Existen métodos gráficos sencillos [1] que pueden utilizarse, cuando el emplazamiento es abierto, en general en ambientes suburbanos. Pero el cálculo se complica cuando el edificio se encuentra en un ambiente urbano, donde la construcción queda rodeada de edificios en altura, lo que puede significar un recorte sustancial de la radiación solar en las épocas críticas del año.

Cuando uno o varios edificios participan de un ambiente de alta densidad edilicia, la interacción de cada uno de ellos con el sol puede ocasionar que la sombra arrojada sobre una fachada sea el resultado de una combinación de sombras de varios edificios. Esta situación resulta de difícil cálculo por medio de métodos gráficos.

Se presenta una metodología apropiada que permite el cálculo computacional del problema. Tiene las ventajas de poseer gran flexibilidad para trabajar con gran número de edificios, de distinta altura y conocer con aproximación del  $cm^2$ , el área sombreada de la fachada.

El programa se encuentra escrito en lenguaje BASIC Versión 1.2 y su utilización resulta muy sencilla.

CONSIDERACIONES PRELIMINARES

El modelo computacional se compone de 5 etapas bien diferenciadas. En algunos casos éstas se representan por medio de programas independientes y en otros en forma de subrutinas del programa principal. Las distintas etapas son:

1. Ingreso de datos.
2. Determinación de la posición del sol.
3. Obtención del volumen de sombras de la manzana.
4. Determinación del área asoleada.
5. Cálculo de la energía solar sobre cada fachada.

La determinación de la posición del sol queda determinada por la altitud y el azimut solar, y se obtiene por medio de un programa escrito en BASIC, ALTSOL. BAS. Esto resulta muy cómodo para el caso de calcular un día completo. Cuando se desea conocer el efecto de la sombra en una hora determinada, tanto la altitud co

mo el azimut pueden ingresarse por teclado directamente al programa principal.

El punto 3 constituye el programa principal de cálculo. El objetivo es la obtención del volumen de sombras que resulta del aporte y combinación de sombras de cada edificio de la manzana.

En el punto 4 se obtiene el área asoleada por medio de la intersección de este volumen de sombras con las fachadas de cada edificio.

DESCRIPCION DE LA METODOLOGIA

Ingreso de datos. Se ha determinado que la forma más sencilla para el ingreso de datos resulta la representación del conjunto de edificios por medio de coordenadas x, y, z de cada uno de sus vértices superiores. Se hace uso de una grilla (x, y) que tiene un paso P (ajutable) y cuya extensión es la de la manzana en análisis.

El programa ejecuta el cálculo tomando en consideración volúmenes prismáticos no necesariamente regulares. Esto implica una subdivisión de aquellos edificios con techos a dos aguas o aquellos conformados por cuerpos de volúmenes compuestos o de distintas alturas. Figura 1.

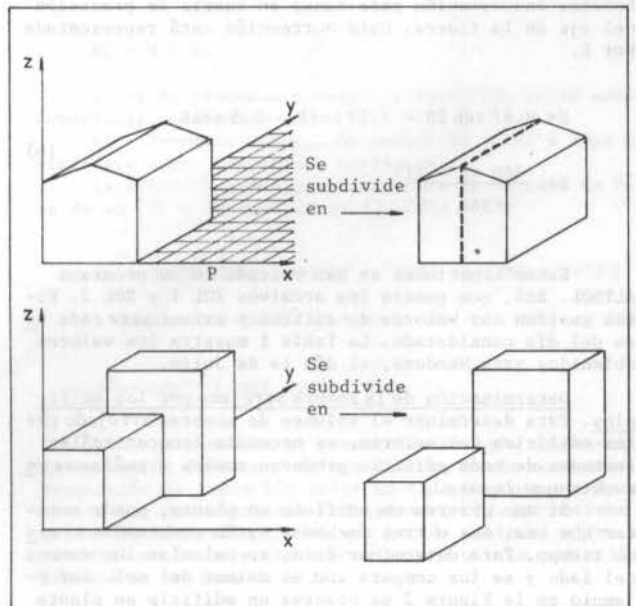


Figura 1. Subdivisión de edificios en volúmenes prismáticos

Además de la distribución de los edificios, se requiere la situación geográfica del lugar (latitud y longitud), y el día del año elegido.

Determinación de la posición del sol. Tanto el azimut, ángulo desde la posición del sol hasta la orientación sur, medido sobre el plano horizontal, como la altitud, altura del sol sobre el horizonte, definen la posición del sol en un día, a una hora elegida y en un lugar determinado (latitud y longitud). Los valores correspondientes a los ángulos mencionados pueden obtenerse de las siguientes fórmulas [2]:

$$\sin \alpha = \cos L \cos \delta \cos \omega + \sin L \sin \delta \quad (1)$$

$$\alpha = \begin{cases} \sin^{-1} \left( \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos \alpha} \right); & \text{si } \cos \omega > \frac{\text{tg } \delta}{\text{tg } L} \\ 180^\circ - \sin^{-1} \left( \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos \alpha} \right); & \text{si } \cos \omega < \frac{\text{tg } \delta}{\text{tg } L} \end{cases} \quad (2)$$

$\alpha$  = altitud solar.

$\alpha_s$  = azimut solar.

$L$  = latitud.

$\delta$  es la declinación y puede obtenerse de la siguiente ecuación:

$$\delta = 23.45 \sin \left( 360 \frac{(284 + n)}{365} \right) \quad (3)$$

$n$  = día del año  $1 \leq n \leq 365$

$\omega$  es el ángulo horario del sol, se mide desde el Norte, positivo al Oeste y negativo hacia el Este.

$$\omega = \frac{\text{Hora Solar} [\text{min}]}{4} = [\text{grados}] \quad (4)$$

$$\text{Hora Solar} = \text{Hora Standard} + \frac{60(L_{st} - L_{loc})}{15} + E \quad [\text{min}] \quad (5)$$

$L_{st}$  = Longitud del meridiano de referencia horaria para el país.

$L_{loc}$  = Longitud local.

Como usualmente se lee la hora en un reloj, debe hacerse la corrección para tener en cuenta la precesión del eje de la tierra. Esta corrección está representada por  $E$ .

$$E = 9.87 \sin 2B - 7.53 \cos B - 1.5 \sin B \quad (6)$$

$$B = \frac{360 (n - 81)}{364}$$

Estas ecuaciones se han volcado en un programa ALTSOL. BAS, que genera los archivos SOL 1 y SOL 2. Estos guardan los valores de altitud y azimut para cada hora del día considerado. La Tabla 1 muestra los valores obtenidos para Mendoza, el día 14 de Julio.

Determinación de la sombra arrojada por los edificios. Para determinar el volumen de sombras arrojado por los edificios del entorno, se necesita conocer cuáles fachadas de cada edificio producen sombra y cuáles se encuentran asoleadas.

Si uno observa un edificio en planta, puede suceder que una, dos o tres fachadas estén sombreadas al mismo tiempo. Para determinar esto, se calculan los rumbos del lado y se los compara con el azimut del sol. Por ejemplo en la Figura 2 se observa un edificio en planta

de cuatro lados (a,b,c,d) cuyos vértices se indican por los números 1,2,3 y 4 y cuyos valores de coordenadas se refieren a los ejes  $x$  e  $y$  siendo el eje  $y$  coincidente con la dirección sur.

Tabla 1. Determinación de la posición del sol

MENDOZA	Latitud: -32.86	Longitud: 68.85
n: 195	$\delta$ : 21.67	
Hora Solar	Altitud (grados)	Azimut (grados)
6.99	0.0	243.9
7.00	0.1	243.8
8.00	10.9	235.1
9.00	20.6	224.6
10.00	28.4	211.9
11.00	33.6	196.8
12.00	35.5	180.0
13.00	33.6	163.2
14.00	28.4	148.1
15.00	20.6	135.4
16.00	10.9	124.9
17.00	0.1	116.2
17.01	0.0	116.1

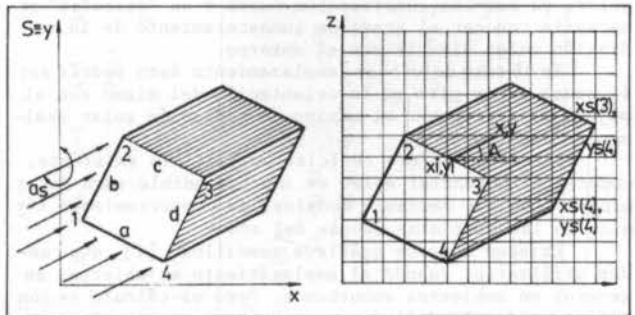


Figura 2 y 3.

Cuando el sol (que se encuentra en una posición representada en planta por el azimut  $\alpha_s$ ) ilumina el edificio, en este caso el lado  $c$  y  $d$  estarán en sombra. Figura 2.

Los rumbos de los lados se calculan comenzando por la dirección Oeste y tomando los ángulos que forman las direcciones  $\overline{4-1}$  y  $\overline{1-4}$  respecto del Sur. Estos son los del lado  $d$ . Luego para el lado  $a$ , se toma la dirección  $\overline{1-2}$  y  $\overline{2-1}$ . Así se continúa hasta obtener los rumbos respecto al Sur de todos los lados. Cuando el azimut del sol se encuentra entre los dos rumbos de un lado, la cara correspondiente estará asoleada, en caso contrario estará sombreada.

Los rumbos se deben comenzar a calcular por el lado Oeste, en este caso el lado  $d$ . Su expresión será:

$$R_{4-3} = \text{rumbo}(\overline{4-3}) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{x(3) - x(4)}{y(3) - y(4)} \right) \quad (7)$$

$$R_{3-4} = R_{4-3} + 180^\circ$$

$$R_{1-4} = 90^\circ + \text{tg}^{-1} \left( \frac{y(1) - y(4)}{x(4) - x(1)} \right) \quad (8)$$

$$R_{4-1} = R_{1-4} + 180^\circ$$

De la misma manera se procede para el cálculo de los rumbos restantes. En nuestro caso, el lado  $d$  estará asoleado si se cumple:  $R_{4-3} < \alpha_s < R_{3-4}$ . Cabe destacar que el orden de cálculo es de suma importancia ya que en este caso el lado  $d$  y el  $b$  son paralelos pero los rumbos

son distintos o iguales dependiendo de la forma de cálculo. Conociendo ya la situación de todos los lados, para aquellos en sombra encontramos el área de sombras que indica los límites de influencia de la misma. Para el lado d, el área de sombras será la encerrada por los puntos 4, 3, xs(3), ys(3) y xs(4), ys(4). Figura 2. Los puntos xs, ys representan la intersección de la sombra del lado con el plano horizontal. Su expresión será:

$$\begin{aligned} x_s(i) &= x(i) + z(i) \operatorname{sen}(as - \pi) / \operatorname{tg}(\alpha) & (9) \\ y_s(i) &= y(i) + z(i) \operatorname{cos}(as - \pi) / \operatorname{tg}(\alpha) & (10) \end{aligned}$$

Se ha confeccionado una subrutina AZIMUT que calcula los rumbos de cada cara respecto del Sur. Estos luego se comparan en el programa principal y se determina el lado en sol y el lado en sombra.

Como puede observarse en la misma Figura, el edificio arroja un volumen de sombras sobre su entorno. Puede calcularse la altura de la sombra para cada punto x, y dentro del área de sombras. Para esto se necesita conocer cuál es la coordenada del rayo inverso en su intersección con el volumen y a partir de allí, se calcula la altura de sombra en base a la distancia desde el punto considerado hasta el edificio siguiendo el camino del rayo. En la Figura 3 aparece el punto x, y al cual queremos calcularle la altura de sombra correspondiente y el punto xi, yi sobre el edificio. El valor del ángulo A es el complementario de (as - 180°).

Las coordenadas del rayo inverso resultan de la intersección entre el segmento 2-3 y el segmento que une los puntos x, y e xi, yi. De esta manera:

$$y_i = \frac{y(3) + B3(x(3) - x + y/\operatorname{tg}(A))}{1 - B3/\operatorname{tg}(A)} \quad (11)$$

$$x_i = x - \frac{(y - y_i)}{\operatorname{tg}(A)} ; \quad B3 = \frac{y(3) - y(2)}{x(3) - x(2)} \quad (12)$$

La altura de sombra para el punto x, y dentro de la zona de sombras se obtiene en función de la posición del sol en ese momento, a través de la ecuación (13).

zi es la altura del edificio en el punto xi, yi. Es necesario calcularla cuando la altura del vértice 2, z(2), es distinta a la altura del vértice 3, z(3) y se obtiene de la expresión (14).

$$z_P(x, y) = z_i - \frac{y - y_i}{\operatorname{cos}(as - 180^\circ) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)} \quad (13)$$

$$z_i = z(3) + \frac{z(3) - z(2)}{y(3) - y(2)} (y_i - y(2)) \quad (14)$$

De esta manera recorriendo el campo de influencia, en este caso la manzana, por medio de puntos (x, y), puede obtenerse la altura de sombra para cada uno de ellos.

Puede ocurrir que la sombra de un edificio en un punto se superponga y sea mayor que la producida por el edificio anterior. Es por lo tanto necesario crear un archivo donde se almacenen los valores de altura de sombra para cada punto x, y y que se recicle el cálculo, edificio por edificio, para permitir de esta manera comparar y dejar la mayor altura de sombra en el archivo.

Este archivo está constituido en realidad por una matriz m x n donde m = longitud de la manzana en el sentido E-O; n = longitud de la manzana N-S. Los valores de la matriz son los correspondientes a la altura de la sombra en cada punto.

**Determinación del área asoleada.** Para calcular las áreas asoleadas de las distintas fachadas, se tiene en cuenta la altura correspondiente a cada punto de la misma y la altura de sombra en el mismo punto. La ecuación resultante es la expresión (15), donde P es el paso de la grilla y los valores de I, J y J+1 de la fachada se dan en la Tabla 2.

$$AS = \sum_J^{J+1} (z(I, J) - z^P(I, J)) P \quad (15)$$

Tabla 2

FACHADA	I	J	J + 1
Este	x(1)	y(1)	y(2)
Sur	y(2)	x(2)	x(3)
Oeste	x(3)	y(4)	y(1)
Norte	y(4)	x(1)	x(4)

En el caso que la fachada esté oblicua respecto a la orientación Norte-Sur (tenga un azimut distinto de 0° múltiplo de 90°) los valores de I, J y J+1 se determinan encontrando la ecuación de la recta que pasa por sus puntos extremos y se aplica (15). En este caso I variará punto por punto.

**Cálculo de la energía incidente sobre cada fachada.** Para el cálculo de la radiación solar incidente en cada fachada, se parte del promedio diario de Radiación Solar global sobre superficie horizontal. Valor que se obtiene de los valores publicados por la Red Solarimétrica de la R.A. El cálculo se divide en dos partes bien diferenciadas:

- Cálculo de la proporción de radiación directa y difusa.
- Obtención de la distribución horaria de ambas componentes.

**Cálculo de la radiación solar directa y difusa.** Para separar la radiación solar global en sus componentes directa y difusa, se ha desarrollado una ecuación donde se establece la dependencia de la relación entre la radiación difusa a la global (Hd/H) con el ángulo horario del amanecer (ws). Esta correlación fue presentada por Collares-Pereyra y Rabl [3] y se expresa como:

$$\begin{aligned} Hd/H &= 0.775 + 0.00653(\omega_s - 90) - [0.505 + \\ &+ 0.00455(\omega_s - 90)] \operatorname{cos} [115KT - 103] \end{aligned} \quad (16)$$

KT es el índice de claridad, la relación entre la radiación global a la radiación a tope de atmósfera, ambas medidas sobre plano horizontal. El índice de claridad media es el correspondiente al día medio del mes.

$$KT = H / H_o \quad (17)$$

donde H = promedio mensual de radiación solar sobre superficie horizontal.

Ho = Promedio mensual de radiación solar a tope de atmósfera sobre superficie horizontal.

La ecuación correspondiente para el cálculo de Ho, se da en [3] y se obtiene en KJ/m<sup>2</sup>día. (18)

$$\begin{aligned} H_o &= 24/\pi \cdot 3600 \left\{ 1353(1 + 0.033 \operatorname{cos}(360 n/365)) \right. \\ &\cdot \left. (\operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta \operatorname{cos} \omega_s / 180 + \operatorname{cos} L \operatorname{cos} \delta \operatorname{sen} \omega_s) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\omega_s = \operatorname{cos}^{-1} (-\operatorname{tg} L \operatorname{tg} \delta)$$

Una vez conocida la proporción de cada componente, la radiación directa y difusa diaria, puede conocerse la proporción de radiación solar en cada hora, teniendo en cuenta las correlaciones indicadas en [3], se obtiene I que es la radiación global que incide sobre el plano horizontal en la hora correspondiente a ω. La radiación directa se obtiene de (22).



Tabla 3. Areas Asoleadas de las Fachadas.

Edificio	Fach. Norte		Fach. Oeste	
	AT	AA	AT	AA
1	90	90	90	90
2	135	135	90	84.72
3	60	60	60	60
4	60	71.50	30	8.23
5	120	120.0	156	156
6	90	90	60	49.44

$$r_t = \pi/24 (a + b \cos \omega) K_l ; r_d = \pi/24 K_l \quad (19)$$

$$a = 0.409 + 0.5016 \sin(\omega_s - 60) \quad (20)$$

$$b = 0.6609 - 0.4767 \sin(\omega_s - 60)$$

$$K_l = \cos \omega - \cos \omega_s / \sin \omega_s - (2\pi \omega_s \cos \omega_s / 360) \quad (21)$$

$$I_b = r_t H - r_d H_d \quad (22)$$

Para conocer la intensidad de radiación solar directa sobre un plano de cualquier inclinación, se debe tener en cuenta el factor  $R_b$  que se expresa en (23) donde  $\theta_i$  = ángulo cenital de un plano con inclinación  $\beta$ ,  $\theta_z$  = ángulo cenital de un plano horizontal.

$$R_b = \cos \theta_i / \cos \theta_z \quad (23)$$

$$\cos \theta = \sin \delta \sin L \cos \beta - \sin \delta \cos L \sin \beta \cos \gamma_{pl} + \cos \delta \cos L \cos \beta \cos \omega + \cos \delta \sin L \sin \beta \cos \omega \cos \gamma_{pl} + \cos \delta \sin \beta \sin \gamma_{pl} \sin \omega \quad (24)$$

La expresión (24) corresponde al coseno del ángulo cenital, para un plano de inclinación  $\beta$  y azimut  $\gamma_{pl}$ .

La radiación solar directa incidente sobre cada fachada se obtiene entonces de  $I_i = R_b I_b$ .

#### EJEMPLO DE CALCULO

Se presenta una manzana en donde se distribuyen edificios de distintas alturas. En la Figura 4 puede observarse una vista en perspectiva de la disposición de los mismos.

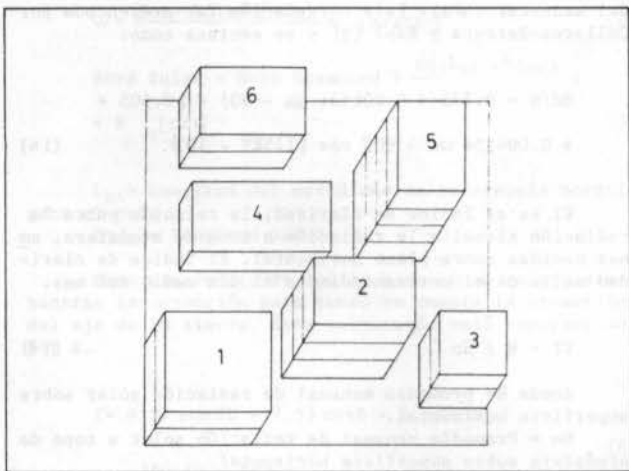


Figura 4. Vista en perspectiva de la manzana.

La posición del sol para el 14 de Julio se obtiene del programa ALTSOL.BAS y los valores de altitud y azimut para cada hora pueden leerse de la Tabla 1.

En la Figura 5, puede observarse la graficación de los volúmenes de sombra para las 14 horas (hora solar). En ésta se representan las alturas de sombra para cada punto de la manzana. Para este ejemplo, el paso elegido es de 1 metro pero puede elegirse un paso menor si se desea.

Las áreas asoleadas de cada fachada se presentan en la Tabla 3 donde AT es el área total de la fachada, y AA es el área asoleada de la misma. Los valores representan la situación para la hora 14; puede observarse la correspondencia con la Figura 5.

#### CONCLUSIONES

Se presenta una metodología completa para el cálculo computacional del área asoleada de edificios o si se desea la radiación solar directa incidente en cada una de ellas. En un tiempo posterior se incorporará la radiación difusa y reflejada por el entorno en función de la bóveda celeste vista por cada punto de la fachada. Esta metodología otorga la flexibilidad necesaria en la etapa de proyecto.

#### REFERENCIAS

- 1 MAZRIA, E., The Passive Solar Energy Book. Rodale Press. Emmaus. PA (1979).
- 2 KREIDER, J.F. y KREITH, F., Solar Energy Handbook. Mc Graw Hill, NY (1980).
- 3 DUFFIE, J. y BECKMAN, W., Solar Energy Engineering of Thermal Processes. John Wiley, NY (1980).

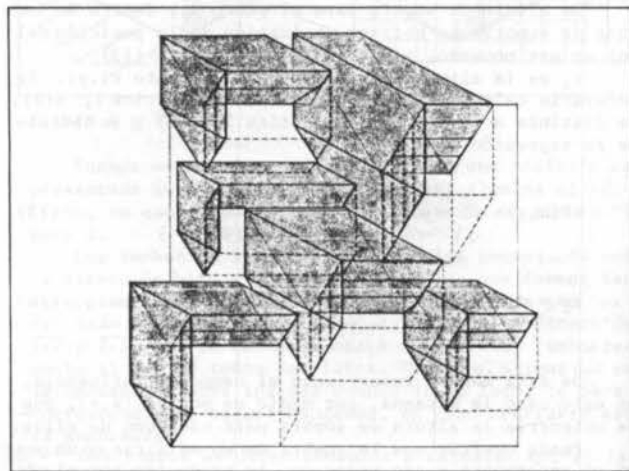


Figura 5. Volúmenes de sombras de la manzana.

#### ABSTRACT

When deciding on the site for a passive solar building it is necessary to know the degree of masking of direct solar radiation due to the environment. The usual graphic methods to calculate it, are cumbersome and complex for dense urban conditions. A method is presented, that allows the computational calculation of the areas of facades that receive direct radiation. A relationship has been found between the solar azimuth and the bearing of a building's sides which yields as a result the total volume of shades due to neighbouring buildings, hourly. The computation program developed, calculates the area of directly irradiated elevations with the approximation of the  $cm^2$ , in a fast and flexible manner.



Francisco Manuel Sáez, Efra Contreras, Carlos e José María de Almeida

Investigador do Programa de Pós-graduação em Nutrição, 1979

RESUMO

O presente trabalho descreve a metodologia de teste de equilíbrio alimentar do modelo teórico de equilíbrio de nutrientes de Sáyez de 1979. Este teste foi realizado no laboratório de Nutrição do Instituto de Nutrição da Universidade de Chile, com 12 vacas leiteiras de raça Jersey, com idades entre 3 e 10 anos, com produção média de 12,5 litros de leite por lactação.

O teste de equilíbrio alimentar foi realizado com repetição tripla e modelo teórico de equilíbrio de nutrientes e variáveis de equilíbrio de nutrientes com nutrientes essenciais em 25 ambientes variáveis.

Foram utilizadas 25 dietas variáveis e as dietas foram avaliadas em termos de balanço alimentar e de nutrientes essenciais. Os resultados mostraram que o modelo teórico de equilíbrio de nutrientes é capaz de prever o balanço alimentar e de nutrientes essenciais em dietas variáveis. O teste de equilíbrio alimentar foi realizado com repetição tripla e modelo teórico de equilíbrio de nutrientes e variáveis de equilíbrio de nutrientes com nutrientes essenciais em 25 ambientes variáveis.

Foram utilizadas 25 dietas variáveis e as dietas foram avaliadas em termos de balanço alimentar e de nutrientes essenciais. Os resultados mostraram que o modelo teórico de equilíbrio de nutrientes é capaz de prever o balanço alimentar e de nutrientes essenciais em dietas variáveis. O teste de equilíbrio alimentar foi realizado com repetição tripla e modelo teórico de equilíbrio de nutrientes e variáveis de equilíbrio de nutrientes com nutrientes essenciais em 25 ambientes variáveis.

Foram utilizadas 25 dietas variáveis e as dietas foram avaliadas em termos de balanço alimentar e de nutrientes essenciais. Os resultados mostraram que o modelo teórico de equilíbrio de nutrientes é capaz de prever o balanço alimentar e de nutrientes essenciais em dietas variáveis.

disponível e adaptado às necessidades para a produção de leite e de gordura para a produção de leite.

Avaliação de nutrientes em dietas variáveis com nutrientes essenciais e variáveis de equilíbrio de nutrientes com nutrientes essenciais em 25 ambientes variáveis.

RADIACIÓN

Investigaciones e experimentos con dietas variáveis e nutrientes essenciais em dietas variáveis.

Investigaciones e experimentos con dietas variáveis e nutrientes essenciais em dietas variáveis.

Investigaciones e experimentos con dietas variáveis e nutrientes essenciais em dietas variáveis.

Investigaciones e experimentos con dietas variáveis e nutrientes essenciais em dietas variáveis.

O presente trabalho descreve a metodologia de teste de equilíbrio alimentar do modelo teórico de equilíbrio de nutrientes de Sáyez de 1979. Este teste foi realizado no laboratório de Nutrição do Instituto de Nutrição da Universidade de Chile, com 12 vacas leiteiras de raça Jersey, com idades entre 3 e 10 anos, com produção média de 12,5 litros de leite por lactação.

CONCLUSÃO

O modelo teórico de equilíbrio de nutrientes é capaz de prever o balanço alimentar e de nutrientes essenciais em dietas variáveis. O teste de equilíbrio alimentar foi realizado com repetição tripla e modelo teórico de equilíbrio de nutrientes e variáveis de equilíbrio de nutrientes com nutrientes essenciais em 25 ambientes variáveis.

O modelo teórico de equilíbrio de nutrientes é capaz de prever o balanço alimentar e de nutrientes essenciais em dietas variáveis. O teste de equilíbrio alimentar foi realizado com repetição tripla e modelo teórico de equilíbrio de nutrientes e variáveis de equilíbrio de nutrientes com nutrientes essenciais em 25 ambientes variáveis.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO ENSAIO DO MODELO TÉRMICO DO SATÉLITE DE  
COLETA DE DADOS

Fernando Manuel Ramos, Ezio Castejon Garcia e José Sérgio de Almeida

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE

RESUMO

O presente trabalho descreve o desenvolvimento do teste de balanço térmico do modelo térmico de Satélite de Coleta de Dados. Este teste foi realizado na câmara de 21000 litros de volume útil do Laboratório de Integração e Testes/INPE em fevereiro de 1988.

O teste de balanço térmico tem por objetivos validar o modelo termo-matemático do satélite e verificar o desempenho do controle térmico sob condições semelhantes às do ambiente espacial.

INTRODUÇÃO

O projeto do controle térmico é um dos aspectos fundamentais no desenvolvimento de um satélite, pois tem como objetivo garantir que todos os equipamentos que compõem o sistema operem dentro de limites de temperatura adequados. Para que este projeto seja considerado qualificado para voar, o controle térmico deve ser submetido a um teste de balanço térmico (TBT) de modo a verificar seu desempenho global e a validar e refinar o modelo termo-matemático. Normalmente o TBT é realizado em um protótipo, chamado de Modelo Térmico (MT), que reproduz do ponto de vista térmico as características dimensionais e materiais do satélite. Ao longo deste teste, o MT é submetido a condições ambientais próximas às que vai encontrar em órbita durante as fases críticas da missão, devendo atingir níveis de temperatura previamente especificados. Caso isto não ocorra, o modelo matemático deve ser corrigido e, eventualmente, o projeto térmico modificado.

Durante o TBT, as cargas térmicas externas são usualmente produzidas por meio de simulador solar com auxílio de um sofisticado sistema de suporte que permite posicionar o espécime em diferentes atitudes com relação ao feixe solar. Esta técnica possui a desvantagem de ter um alto custo operacional e de manutenção, além de não possibilitar a simulação da carga térmica devido ao albedo e à radiação terrestre. No caso de satélites de geometria externa simples, com órbita baixa, a simulação solar pode ser substituída com vantagem por outros dispositivos como, por exemplo, lâmpadas de infravermelho, dissipadores térmicos de contacto ("skin heaters") ou camisas térmicas ("infrared shrouds"), desde que as propriedades termo-ópticas das superfícies externas sejam conhecidas com precisão [1]. Para o TBT do Satélite de Coleta de Dados descartou-se o emprego de um simulador solar devido ao elevado custo envolvido, optando-se pela utilização de "skin heaters" em razão das condições favoráveis de geometria e das características da missão. Os "skin heaters" são resistências de níquel-cromo com isolamento de Kapton que, colados às superfícies externas do espécime, simulam o fluxo solar absorvido em termos de intensidade e uniformidade. Cada dissipador térmico de contacto deve possuir a mesma emissividade do substrato de modo a também reproduzir a emissão de calor do satélite para o espaço.

Algumas das principais vantagens da técnica de "skin heaters", segundo Presley e Clifford [2], são:

- boa precisão na medida do calor dissipado;
- distribuição uniforme do fluxo de calor;

- dispensa a necessidade de dispositivos para rotação do satélite e de estruturas para aplicação do calor;
- inexistência de interferências na visibilidade entre satélite e a parede fria da câmara de vácuo;
- boa repetibilidade e adaptável a controle automático;
- inexistência de limitações quanto ao tamanho do satélite;
- menor investimento e consumo de energia.

As principais desvantagens são:

- impossibilidade de verificação do valor da absortividade das superfícies externas do satélite;
- risco de degradação das coberturas externas como, por exemplo, células solares pela colagem dos "skin heaters".

O presente trabalho tem por objetivo descrever o teste de balanço térmico do MT do Satélite de Coleta de Dados, realizado com sucesso no Laboratório de Integração e Testes (LIT) do INPE. O teste do MT teve uma duração de 72 horas ininterruptas e consumiu aproximadamente três meses de preparação, mobilizando mais de 20 engenheiros e técnicos de diversas equipes do INPE.

DESCRIÇÃO DO SATÉLITE DE COLETA DE DADOS

O Satélite de Coleta de Dados, ilustrado pela Figura 1, tem a forma de um prisma octogonal, com 100 cm de diâmetro e 67 cm de altura. O principal elemento estrutural é um cilindro central vertical. Internamente, os equipamentos vão montados principalmente sobre dois painéis horizontais (central e inferior). A massa total do satélite está limitada a 115 kg. A estrutura é feita de alumínio e colmeia de alumínio, pesando 23 kg.

Em órbita, o satélite será estabilizado inercialmente por uma rotação de 180 rpm em torno do eixo do prisma. O satélite possui os seguintes subsistemas: suprimento de energia, computador de bordo, controle de atitude, repetidor-modulador de coleta de dados, repetidor coerente para comunicações de serviço, estrutura e controle térmico. A órbita nominal do satélite é circular com uma altitude 750 km, com duração de 99 minutos, num plano com inclinação de 25 graus em relação ao Equador.

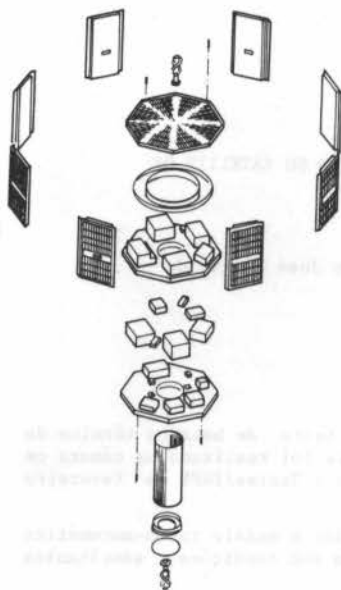


Figura 1 - Vista explodida do Satélite de Coleta de Dados

O controle térmico é feito de forma passiva, por meio de tintas, revestimentos e arruelas, possibilitando regular as trocas de calor por condução e/ou radiação entre regiões do satélite e entre este e o meio exterior. A Tabela 1 sumariza algumas das soluções adotadas para o controle térmico do MT. A distribuição de temperatura no satélite é calculada pelo método de diferenças finitas, dividindo-se o sistema numa malha de 10<sup>6</sup> nós isotérmicos (21 nós para equipamentos e 83 para a estrutura).

TABELA 1

CARACTERÍSTICAS DO CONTROLE TÉRMICO DO MODELO TÉRMICO

LOCALIZAÇÃO	CARACTERÍSTICA	OBJETIVO
Compartimento Superior	Tinta preta $\epsilon = 0.9$	Minimizar gradientes internos
Compartimento Inferior	Fita aluminizada $\epsilon = 0.03$ Arruelas de inox entre painéis laterais e octogonais	Evitar resfriamento excessivo
Bateria	Fita aluminizada $\epsilon = 0.03$ Graxa térmica na base Revestimento na face externa do painel inferior	Minimizar variações de temperatura excessivas
Transponder DCP	Fita aluminizada $\epsilon = 0.03$ Arruelas de inox na base	Desacoplar do ambiente

FONTE: referência [3], pp 6-8.

MONTAGEM DE TESTE

O teste de balanço térmico do MT foi realizado na câmara vácuo-térmica de 3 m x 3 m do LIT/INPE. Esta câmara possui a forma de um cilindro horizontal e totaliza mais de 21000 litros de volume útil. Seu sistema de vácuo é constituído por uma bomba mecânica rotativa de palhetas duplo estágio, de 93 m<sup>3</sup>/h, uma bomba tipo Roots Blower, de 480 m<sup>3</sup>/h, e duas bombas criogênicas de 890 mm de diâmetro, refrigeradas a He e LN<sub>2</sub>, com capacidade de 25000 l/s cada uma. O sistema térmico é composto por uma camisa de alumínio e um circuito para circulação forçada de GN<sub>2</sub> a densidade constante e temperatura controlada entre -180°C e +150°C. A camisa térmica é pintada internamente com tinta preta com emissividade de 0.9. Os sistemas térmico e de vácuo possuem controladores dedicados podendo operar automaticamente.

As cargas térmicas foram simuladas por meio de "skin heaters" instalados nas superfícies externas do MT e, internamente, nas caixas de simulação dos equipamentos. O suprimento e o controle de potência para alimentação dos "skin heaters" foi realizado através de um controlador programável Edwards 2012, seis fontes de tensão DC e um conjunto de relés e resistências calibradas.

Para aquisição das medidas de temperatura e potência elétrica durante o teste utilizou-se um sistema de aquisição de dados HP3054, terminais gráficos de vídeo e impressoras, gerenciados por um computador central HP1000. Os sistemas de suprimento de potência, de aquisição de dados e de controle da câmara de vácuo foram alimentados por um sistema "no break" de energia elétrica.

Nas medidas de temperatura foram empregados 99 termopares Omega tipo T (AWG 36, com isolamento de teflon) e duas termoresistências de platina Omega Pt 100. Outros 22 termopares foram utilizados para monitoração da câmara vácuo-térmica. Todos os termopares foram verificados em LN<sub>2</sub> e em água destilada com gelo e apresentaram desvios inferiores a 0.2°C. O nível de vácuo no interior da câmara foi medido com sensores Pirani Edwards PRH 10 (vácuo primário) e de ionização Varian (vácuo secundário).

Durante o teste, o MT foi acoplado ao suporte de espécime da câmara por meio de quatro cabos de aço inox 316, com 1.8 mm de diâmetro e 670 mm de comprimento, com buxas de teflon nas extremidades inferiores para minimizar as perdas de calor. O suporte de espécime da câmara foi envolto com camadas de superisolação de modo a reduzir o acoplamento radiativo deste com o MT.

A Figura 2 apresenta um esquema geral da montagem do teste de balanço térmico do MT do Satélite de Coleta de Dados.

PROGRAMA DE TESTE

O teste de balanço térmico do MT foi dividido em cinco fases distintas, conforme apresentado na Tabela 2, e procurou reproduzir as três condições de operação mais críticas do ponto de vista térmico que nortearam o projeto térmico do satélite. Para as fases em regime permanente, a potência dissipada em cada "skin heater" correspondeu a carga térmica média absorvida por cada nó ao longo de uma órbita.

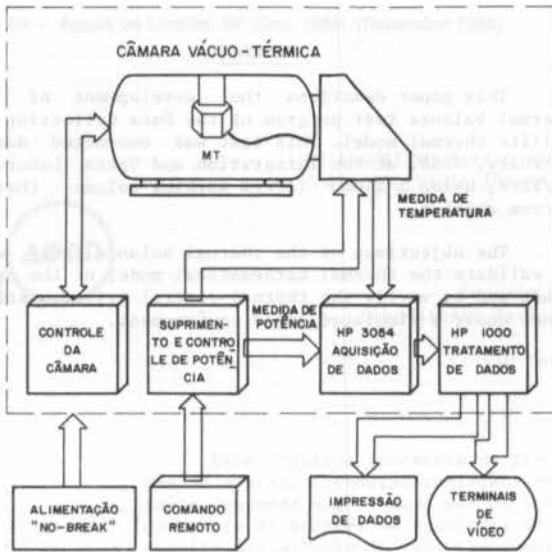


Figura 2 - Esquema Geral da Montagem de Teste

TABELA 2

FASES DO TESTE DE BALANÇO TÉRMICO DO MT

FASE/REGIME	CARACTERÍSTICA	DURAÇÃO
AGEOMAX/ Permanente	Máxima carga térmica Fluxo solar a 49 graus do eixo de rotação	em regime: 3 horas total: 15 horas
AGEOMAX/ Transitório	Máxima carga térmica Fluxo solar a 49 graus do eixo de rotação	em regime: 99 min total: 11 horas
LATMIN/ Transitório	Mínima carga térmica Fluxo solar perpendi- cular ao eixo de rotação	em regime: 99 min total: 21.5 horas
AGEOMIN/ Transitório	Máximo gradiente Fluxo solar paralelo ao eixo de rotação	em regime: 99 min total: 11 horas
AGEOMIN/ Permanente	Máximo gradiente Fluxo solar paralelo ao eixo de rotação	em regime: 3 horas total: 7.5 horas

Durante a execução das diversas fases do teste, o nível de vácuo na câmara foi mantido na faixa de  $1 \times 10^{-6}$  Torr e a temperatura da camisa térmica permaneceu inferior a  $-175^{\circ}\text{C}$ . A variação da potência elétrica dissipada nos "skin heaters" foi comandada automaticamente pelo controlador programável Edwards 2012 durante as fases de regime transitório, e manualmente por um disparador remoto quando da mudança de uma fase para outra. O critério de estabilização adotado durante o teste foi o seguinte:

. regime permanente,  $\Delta T < 0.1$  C/h em 80% dos nós,

. regime transitório,  $\Delta T < 0.5$  C para o mesmo instante de duas órbitas consecutivas, em 80% dos nós.

A precisão requerida foi de  $\pm 1.0^{\circ}\text{C}$  nas medidas de temperatura na faixa de  $-50^{\circ}\text{C}$  a  $+100^{\circ}\text{C}$ , de  $\pm 1.5^{\circ}\text{C}$  na faixa de  $-50^{\circ}\text{C}$  a  $-100^{\circ}\text{C}$ , e de 0.5% nas leituras de potência.

O teste de balanço térmico foi coordenado e executado pela equipe de testes térmicos do LIT, sob a supervisão do grupo de controle térmico do Departamento de Mecânica, responsável pela especificação do MT, e do grupo de Garantia do Produto do INPE.

## RESULTADOS

O teste de balanço térmico do MT transcorreu ininterruptamente durante 72 horas sem que nenhum incidente ou anomalia relevante fossem verificados, tendo sido acumulados 16 MBytes de dados tratados de temperatura e potência. Todos os sistemas que compunham a montagem de teste operaram neste período dentro das condições nominais previstas inicialmente. As potências dissipadas nos "skin heaters" apresentaram desvios inferiores a 10% em relação aos valores previamente especificados. Dos 99 termopares instalados no espécime, seis canais foram perdidos durante o teste e outros quatro apresentaram problemas intermitentes ao longo de algumas fases. Não foram constatados, também, sinais de contaminação química por materiais voláteis no MT nem na camisa térmica da câmara de vácuo.

Com relação ao desempenho do MT, não foram verificadas discrepâncias relevantes entre as temperaturas medidas nos principais equipamentos do espécime, ao longo das cinco fases do teste, e as temperaturas previstas pelo modelo matemático desenvolvido. Durante as fases AGEOMAX e AGEOMIN, por exemplo, após a atualização do valor das potências efetivamente dissipadas nos diversos nós, esta diferença foi inferior a  $5^{\circ}\text{C}$  [3] na maioria dos equipamentos, como ilustram as Figuras 3 e 4. Assim, de um modo geral, os equipamentos eletrônicos, simulados por caixas de alumínio no interior do MT, permaneceram dentro das faixas de temperatura admissíveis para o seu funcionamento normal.

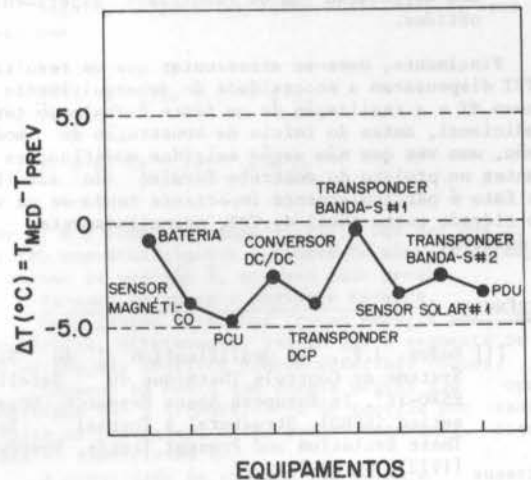


Figura 3 - Diferença entre as temperaturas medidas e previstas, durante a fase AGEOMAX.



**ABSTRACT**

This paper describes the development of the thermal balance test program of the Data Collecting Satellite thermal model. This test was conducted during February, 1988, at the Integration and Tests Laboratory/INPE, using a 21000 liters working volume thermal vacuum chamber.

The objectives of the thermal balance test were to validate the thermal mathematical model of the spacecraft and to verify the thermal control system performance under a simulated space environment.

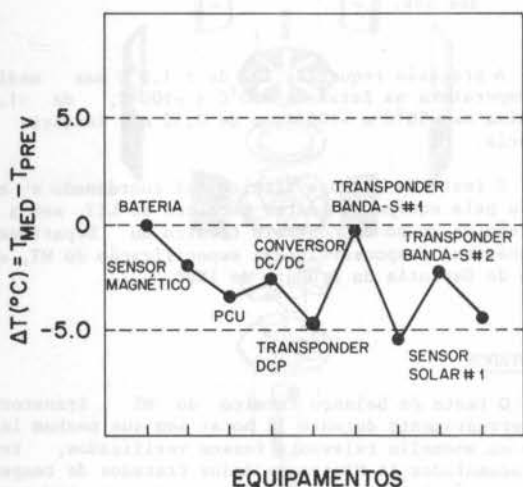


Figura 4 - Diferença entre as temperaturas medidas e previstas, durante a fase AGEOMIN.

**CONCLUSÕES**

A partir da experiência e dos resultados adquiridos durante o teste de balanço térmico do MT, conclui-se que:

- a utilização da técnica de "skin heaters" pode ser considerada uma solução simples, eficaz e de baixo custo para o teste de satélites com as características do Satélite de Coleta de Dados;
- a montagem de teste adotada bem como os procedimentos e as rotinas empregadas mostraram-se adequadas às exigências de um teste de longa duração como o TBT;
- o modelo matemático desenvolvido apresentou uma boa correlação com os resultados experimentais obtidos.

Finalmente, deve-se acrescentar que os resultados do TBT dispensaram a necessidade do desenvolvimento de um novo MT e a realização de um teste de balanço térmico adicional, antes do início da construção do modelo de vôo, uma vez que não serão exigidas modificações relevantes no projeto do controle térmico do satélite. Este fato é particularmente importante tendo-se em vista o elevado custo total do TBT, aproximadamente 150 mil dólares.

**REFERÊNCIAS**

- [1] Redor, J.F., "La Qualification du Sous-Systeme de Controle Thermique du Satellite ESRO-IV", In European Space Research Organisation (ESRO), Structural & Thermal Tests Their Evolution and Present Trends, Noordwijk (1972), pp 69-92.
- [2] Presley, H.W. and Clifford, R.P., "Tape Heating Method for Space Simulation Testing", TRW Space & Technical Group.
- [3] Cardoso, H.P. et alii, "Critical Design Review Document - Thermal Control Sub-system", INPE, São José dos Campos, Brasil (1988).

Equipamento	T <sub>MED</sub> (°C)	T <sub>PREV</sub> (°C)	ΔT (°C)
BATERIA	0.0	0.0	0.0
SENSOR MAGNETICO	-1.5	0.0	-1.5
PCU	-2.5	0.0	-2.5
CONVERSOR DC/DC	-2.0	0.0	-2.0
TRANSPONDER BANDA-S #1	0.0	0.0	0.0
TRANSPONDER DCP	-4.5	0.0	-4.5
TRANSPONDER BANDA-S #2	-2.0	0.0	-2.0
SENSOR SOLAR #1	-4.5	0.0	-4.5



UM ALGORÍTMO PARA O PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA  
(CONDUÇÃO/RADIAÇÃO) EM CORPOS NEGROS SEPARADOS POR VÁCUO



Rogério M. Saldanha da Gama  
Laboratório Nacional de Computação Científica  
LNCC/CNPq  
Rio de Janeiro - Brasil

RESUMO

Este trabalho apresenta um procedimento para a solução do problema de transferência de energia (condução/radiação) em corpos negros separados por vácuo. Este importante fenômeno é governado por um sistema de  $N$  equações diferenciais parciais acopladas entre si através de condições de contorno não-lineares. O algoritmo proposto aqui permite a simulação de tais fenômenos através da solução de uma sequência de problemas (não acoplados) cujo limite existirá sempre e fornecerá a solução do problema original.

INTRODUÇÃO

A transferência de calor por radiação térmica é um mecanismo de troca de energia que se encontra presente em qualquer situação real envolvendo corpos imersos em meios não-opacos.

Quando a transferência de energia se processa entre corpos imersos em meios contínuos e as temperaturas são baixas, a transferência de energia por radiação térmica é geralmente desprezada. No entanto alguns fenômenos de vital importância (tais como transferência de energia em altos-fornos, satélites espaciais, etc...) não podem ser estudados sem um tratamento rigoroso que leve em conta a troca de calor por radiação térmica.

Este trabalho trata do fenômeno de transferência de energia entre  $N$  corpos (negros e rígidos) imersos no vácuo. A transferência de energia se processará por radiação térmica (através do vácuo) e por condução (no interior de cada um dos corpos), sendo governada por um sistema de  $N$  equações diferenciais parciais (que governarão a condução de calor em cada um dos  $N$  corpos) acopladas por condições de contorno não-lineares (que representarão a troca de calor por radiação térmica entre as superfícies dos  $N$  corpos).

O objetivo principal do trabalho é apresentar um algoritmo que permite a simulação do problema (acoplado) de transferência de energia através de uma sequência de problemas (desacoplados), cuja abordagem é bem mais simples. Este algoritmo é convergente (como será provado mais adiante) e é uma prova de existência para a solução do problema em questão.

Para atingir a este objetivo será apresentada a seguir uma rápida discussão sobre a modelagem matemática do fenômeno em questão.

O BALANÇO DE ENERGIA

Suponhamos que  $N$  corpos negros rígidos, separados por vácuo perfeito, ocupem as regiões (disjuntas) do  $R^3$  denotadas por  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  cujas fronteiras (regulares) são denotadas respectivamente por  $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \dots, \partial\Omega_N$ .

Em tal situação ocorrerá uma transferência de energia por condução (nas regiões  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ ) e por radiação (entre as superfícies  $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \dots, \partial\Omega_N$ ).

No interior de cada uma das regiões  $\Omega_i$  o balanço de energia será representado por uma equação diferencial [1]. O fluxo de calor através das superfícies  $\partial\Omega_i$  será a condição de contorno para as equações definidas nas regiões  $\Omega_i$ . Esta condição de contorno será estabelecida a partir da igualdade entre os fluxos de calor por condução e por radiação nas superfícies  $\partial\Omega_i$ .

Este tipo de fenômeno, onde se acoplam os mecanismos de transferência de energia por condução e por

radiação, é inerentemente não-linear devido à lei de Planck (que relaciona a emissão de radiação térmica com a temperatura, de forma não-linear) [2].

Vamos apresentar agora, sumariamente, as equações de balanço de energia necessárias para a simulação dos fenômenos até aqui sugeridos.

Equação de balanço de energia no interior do corpo  $i$ .

Definindo o  $i$ -ésimo corpo como sendo o sólido (rígido e em repouso) que ocupa a região  $\Omega \subset R^3$  com fronteira  $\partial\Omega_i$  temos que o balanço de energia, no interior deste corpo, é dado por [1]

$$\rho_i \frac{\partial e_i}{\partial t} = -\text{Div } \vec{q}_i + q_i''', \quad t > 0, \quad \vec{r} \in \Omega_i \quad (1)$$

onde  $t$  é o tempo,  $\vec{r}$  a posição espacial e os campos  $\rho_i$ ,  $e_i$ ,  $\vec{q}_i$  e  $q_i'''$  são respectivamente a densidade mássica, a energia interna específica, o vetor fluxo de calor (por unidade de tempo e área) e a geração interna de energia por unidade de tempo e volume.

Segundo o ponto de vista clássico [1], será suposto que

$$\vec{q}_i = -k_i \text{ Grad } T_i, \quad \vec{r} \in \Omega_i \quad (2)$$

$$k_i = \hat{k}_i(T_i, \vec{r}), \quad \vec{r} \in \Omega_i \quad (3)$$

onde  $T_i$  é o campo de temperaturas. Uma vez que os corpos são supostos rígidos a densidade mássica  $\rho_i$  dependerá apenas da posição  $\vec{r}$ , no caso mais geral.

Balanço de energia radiante térmica.

Dois pontos materiais trocam energia por radiação térmica, diretamente, sempre que o segmento de reta que os une não contiver pontos materiais opacos.

Levando em conta que corpos negros são opacos, concluímos que a transferência de energia por radiação térmica se processará entre pontos materiais situados sobre as superfícies  $\partial\Omega_i$ .

A quantidade de energia que deixa a superfície  $\partial\Omega_i$ , no ponto  $\vec{r}$ , por unidade de tempo e de área é dada por [2]

$$E_i = \sigma T_i^4, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i \quad (4)$$

onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann e o campo  $T_i$  deve ser considerado numa escala absoluta de temperaturas (Kelvin ou Rankine).

A energia incidente (por unidade de tempo e de área) no ponto  $\vec{r}$  da superfície  $\partial\Omega_i$  é dada por [2, 3]

$$H_i = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} \sigma T_j^4 K ds, \quad K = \hat{K}(\vec{r}, \vec{s}), \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i, \quad \vec{s} \in \partial\Omega_j \quad (5)$$

onde o núcleo  $\hat{K}(\vec{r}, \vec{s})$  leva em conta a posição relativa das superfícies  $\partial\Omega_i$  e  $\partial\Omega_j$  para o cálculo da parcela de energia que, deixando  $\partial\Omega_j$  atinge  $\partial\Omega_i$ . Este núcleo é da do por [3]

$$K = \hat{K}(\vec{r}, \vec{s}) = \hat{K}(\vec{s}, \vec{r}) = - \frac{[(\vec{r}-\vec{s}) \cdot \vec{n}_i] \vec{n}_j \cdot \vec{n}_i}{\pi \|\vec{r}-\vec{s}\|^4}, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i, \quad \vec{s} \in \partial\Omega_j \quad (6)$$

se os pontos  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  puderem trocar energia diretamente. Se dois pontos  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  não puderem trocar energia diretamente então (para estes dois pontos)  $K = 0$ . Na equação (6)  $\vec{n}_i$  e  $\vec{n}_j$  são as normais unitárias exteriores nos pontos  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  respectivamente.

O calor trocado por radiação (por unidade de tempo e de área) será dado pela diferença entre a energia que deixa a superfície e da energia incidente (ambas por unidade de tempo e de área), sendo dado por

$$q_i = \sigma T_i^4 - H_i, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i \quad (7)$$

#### Condições de contorno.

Para um corpo imerso no vácuo a condição de contorno natural é a que relaciona o calor trocado por condução com o calor trocado por radiação na fronteira do corpo. Esta condição pode ser expressa por

$$\vec{q}_i \cdot \vec{n}_i = \sigma T_i^4 - H_i, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i \quad (8)$$

onde  $\vec{q}_i$  é o fluxo de calor (por unidade de tempo e de área) por condução na fronteira,  $\vec{n}_i$  é a normal exterior unitária no ponto  $\vec{r}$ ,  $H_i$  é a energia incidente por unidade de tempo e de área e  $T_i$  é a temperatura absoluta.

Considerando agora as equações (2), (4) e (5) podemos escrever a condição (8) como

$$-k_i \text{Grad } T_i \cdot \vec{n}_i = \sigma T_i^4 - \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} \sigma T_j^4 K ds, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i \quad (9)$$

Pode ser notado que (9) é uma equação não linear definida para todo ponto da fronteira  $\partial\Omega_i$ , para todo  $i$  (inteiro) entre 1 e  $N$ .

#### TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA EM REGIME PERMANENTE

A partir deste ponto vamos restringir nosso estudo às situações onde as condutividades térmicas sejam constantes e a transferência de energia se processe em regime permanente. Matematicamente estas hipóteses são equivalentes ao seguinte problema

$$k_i \text{Div}(\text{Grad } T_i) + q_i''' = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1,2,\dots,N \quad (10)$$

$$-k_i \text{Grad } T_i \cdot \vec{n}_i = \sigma T_i^4 - \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} \sigma T_j^4 K ds, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i, \quad i=1,2,\dots,N \quad (11)$$

O problema acima é bastante complexo e, por este motivo, vamos discutir inicialmente dois casos particu-

lares onde este problema toma formas mais simples. Estes casos, obtidos quando consideramos  $N=1$ , fornecerão subsídios para a obtenção da solução do problema (10)+(11).

No caso onde  $N=1$  e a região  $\Omega_1$  é convexa teremos que a transferência de energia será governada por

$$k_1 \text{Div}(\text{Grad } T_1) + q_1''' = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_1 \quad (12)$$

$$-k_1 \text{Grad } T_1 \cdot \vec{n}_1 = \sigma T_1^4, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_1 \quad (13)$$

O problema acima é bem conhecido. Sua solução nem sempre existe porém, se existir, é única.

Suponhamos agora que  $N=1$  e a região  $\Omega_1$  não seja convexa. Neste caso a transferência de energia será governada por

$$k_1 \text{Div}(\text{Grad } T_1) + q_1''' = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_1 \quad (14)$$

$$-k_1 \text{Grad } T_1 \cdot \vec{n}_1 = \sigma T_1^4 - \int_{\partial\Omega_1} \sigma T_1^4 K ds, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_1 \quad (15)$$

onde o núcleo  $K = \hat{K}(\vec{r}, \vec{s})$  será diferente de zero sempre que os pontos  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ , ambos pertencentes a  $\partial\Omega_1$ , puderem ser ligados por segmento de reta que não corte a região  $\Omega_1$ .

Os problemas (12)+(13) e (14)+(15) irão desempenhar um papel muito importante na construção do algoritmo para a solução do problema (10)+(11).

O primeiro resultado importante, que será usado mais adiante, pode ser enunciado como: "Se  $T_1$  é solução de (12)+(13) e  $\bar{T}_1$  é solução de (14)+(15) (para os mesmos  $k_1$ ,  $q_1'''$  e  $\Omega_1$ ) então teremos que

$$\bar{T}_1 \geq T_1 \quad \text{para todo } \vec{r} \in \Omega_1 \quad (16)$$

Para demonstrar (16) vamos definir o campo  $\theta$  como

$$\theta = \bar{T}_1 - T_1 \quad (17)$$

Assim sendo teremos que

$$\text{Div}(\text{Grad } \theta) = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_1 \quad (18)$$

$$-k_1 \text{Grad } \theta \cdot \vec{n}_1 = \sigma(\bar{T}_1^4 - T_1^4) - \int_{\partial\Omega_1} \sigma T_1^4 ds, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_1 \quad (19)$$

onde, pela definição de  $K$ ,

$$\int_{\partial\Omega_1} \sigma \bar{T}_1^4 K ds \geq 0, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_1 \quad (20)$$

O campo  $\theta$  assumirá máximo e mínimo em  $\partial\Omega_1$ . Assim, para o ponto  $\vec{r}^* \in \partial\Omega_1$ , onde  $\theta$  assume seu valor mínimo, podemos escrever que

$$-k_1 \text{Grad } \theta \cdot \vec{n}_1 = \sigma(\bar{T}_1^4 - T_1^4) - \int_{\partial\Omega_1} \sigma T_1^4 K ds \geq 0 \quad (21)$$

uma vez que o gradiente aponta no sentido de maior crescimento do campo  $\theta$ . Combinando (20) com (21) concluímos que

$$\sigma(\bar{T}_1^4 - T_1^4) \geq 0 \quad \text{logo} \quad \bar{T}_1 \geq T_1 \quad (22)$$

o que completa a prova.

Este importante resultado pode ser facilmente generalizado. Para isto, sejam os campos  $u^m$ , os quais são soluções dos seguintes problemas

$$k \operatorname{Div}(\operatorname{Grad} u^m) + q^m = 0, \quad \vec{r} \in \Omega \quad (23)$$

$$-k \operatorname{Grad} u^m \cdot \vec{n} = \sigma(u^m)^4 - q^m, \quad \vec{r} \in \partial\Omega \quad (24)$$

onde  $q^{m+1} \geq q^m \geq 0$ .

Podemos então afirmar que

$$u^{m+1} \geq u^m \quad \text{para todo } \vec{r} \in \Omega \quad (25)$$

#### ALGORITMO PROPOSTO

O algoritmo proposto pode ser resumido no seguinte enunciado: "Os campos  $T_i$  que formam a solução de

$$k_i \operatorname{Div}(\operatorname{Grad} T_i) + q_i^m = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (26)$$

$$-k_i \operatorname{Grad} T_i \cdot \vec{n}_i = \sigma T_i^4 - \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} \sigma T_j^4 K ds, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (27)$$

são dados por

$$T_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_i^m, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (28)$$

onde a sequência  $[\psi_i^1, \psi_i^2, \psi_i^3, \dots]$  é tal que

$$k_i \operatorname{Div}(\operatorname{Grad} \psi_i^1) + q_i^m = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (29)$$

$$-k_i \operatorname{Grad} \psi_i^1 \cdot \vec{n}_i = \sigma(\psi_i^1)^4, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (30)$$

$$k_i \operatorname{Div}(\operatorname{Grad} \psi_i^m) + q_i^m = 0, \quad m > 1, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (31)$$

$$-k_i \operatorname{Grad} \psi_i^m \cdot \vec{n}_i = \sigma(\psi_i^m)^4 - \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} \sigma(\psi_j^{m-1})^4 K ds, \quad m > 1, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (32)$$

sendo não decrescente para todo  $i$  (ou seja:  $\psi_i^1 \leq \psi_i^2 \leq \psi_i^3 \leq \dots \leq T_i$  para todo  $\vec{r} \in \Omega_i$ ).

Deve ser notado que cada um dos campos  $\psi_i^m$  é solução de um problema do tipo

$$k_i \operatorname{Div}(\operatorname{Grad} \psi_i^m) + q_i^m = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (33)$$

$$-k_i \operatorname{Grad} \psi_i^m \cdot \vec{n}_i = \sigma(\psi_i^m)^4 - q^m, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (34)$$

onde  $q^m$  é um campo conhecido, sendo  $q^{m+1} \geq q^m$ .

#### A MÉTRICA EMPREGADA

Para demonstrar a convergência da sequência  $[\psi_i^1, \psi_i^2, \psi_i^3, \dots]$  para a solução  $T_i$  vamos considerar a seguinte métrica

$$d(\vec{f}, \vec{g}) = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} |\sigma f_j^4 - \sigma g_j^4| ds, \quad \vec{f} = (f_1, \dots, f_N); \quad \vec{g} = (g_1, \dots, g_N) \quad (35)$$

onde os campos  $f_i$  e  $g_i$  são definidos para todo  $\vec{r} \in \Omega_i$  e a métrica "d" é calculada considerando-se apenas os pontos  $\vec{r} \in \partial\Omega_i$  (o ferramental necessário para provar que "d" é uma métrica pode ser encontrado em [4]).

A sequência  $[\psi_i^1, \psi_i^2, \psi_i^3, \dots]$  convergirá na métrica "d", para a solução  $T_i$  se e somente se existir um número inteiro  $M$  tal que

$$d(\vec{\psi}^n, \vec{\psi}^m) < \delta \quad \text{para todo } n > M \text{ e } m > M \quad (36)$$

onde  $\delta$  é um número positivo tão pequeno quanto se queira. Os vetores  $\vec{\psi}^n$  e  $\vec{\psi}^m$  são formados pelas componentes  $(\psi_1^n, \psi_2^n, \dots, \psi_N^n)$  e  $(\psi_1^m, \psi_2^m, \dots, \psi_N^m)$  respectivamente.

#### CONVERGÊNCIA

Podemos agora provar a convergência do algoritmo. Começemos com  $\psi_i^1 (i=1, \dots, N)$  e  $\psi_i^2 (i=1, \dots, N)$  que são as soluções de (29)+(30) e de (30)+(31) (quando  $m=2$ ).

Uma vez que

$$\psi_i^1 > 0 \quad \text{para todo } \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (37)$$

e, conseqüentemente

$$\int_{\partial\Omega_j} \sigma(\psi_j^1)^4 K ds \geq 0 \quad \text{para todo } \vec{r} \in \partial\Omega_i \text{ e todo } j \quad (38)$$

concluimos que (vide (25))

$$\psi_i^2 \geq \psi_i^1 > 0 \quad \text{para todo } \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (39)$$

Esta conclusão pode ser estendida para

$$\psi_i^m \geq \psi_i^n > 0 \quad \text{para todo } \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N, \quad m \geq n \quad (40)$$

o que nos permite escrever

$$d(\vec{\psi}^m, \vec{\psi}^n) = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} |\sigma(\psi_j^m)^4 - \sigma(\psi_j^n)^4| ds = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} (\sigma(\psi_j^m)^4 - \sigma(\psi_j^n)^4) ds \quad \text{para } m \geq n \quad (41)$$

para todo  $\psi_i^m$  (e  $\psi_i^n$ ) solução de (31)+(32), onde

$$\sigma(\psi_i^m)^4 = -k_i \operatorname{Grad} \psi_i^m \cdot \vec{n}_i + \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} (\psi_j^{m-1})^4 K ds \quad (42)$$

$$\sigma(\psi_i^n)^4 = -k_i \operatorname{Grad} \psi_i^n \cdot \vec{n}_i + \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} (\psi_j^{n-1})^4 K ds \quad (43)$$

Integrando agora (43) e (42) sobre todas as superfícies  $\partial\Omega_i$  obtemos

$$\sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} \sigma(\psi_i^m)^4 ds = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} -k_i \operatorname{Grad} \psi_i^m \cdot \vec{n}_i ds + \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} \sigma(\psi_j^{m-1})^4 K ds ds \quad (44)$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} \sigma(\psi_i^n) dS = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} -k_i \text{Grad } \psi_i^n \cdot \vec{n}_i dS + \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} \sigma(\psi_j^{n-1})^4 K dS dS \quad (45)$$

Subtraindo agora (45) de (44) ficamos com

$$\sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} (\sigma(\psi_i^m)^4 - \sigma(\psi_i^n)^4) dS = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} (-k_i \text{Grad } \psi_i^m \cdot \vec{n}_i + k_i \text{Grad } \psi_i^n \cdot \vec{n}_i) dS + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_i} \int_{\partial\Omega_j} (\sigma(\psi_j^{m-1})^4 - \sigma(\psi_j^{n-1})^4) K dS dS \quad (46)$$

Uma vez que  $\psi_i^m$  e  $\psi_i^n$  são soluções de (31) teremos que

$$\int_{\partial\Omega_i} -k_i \text{Grad } \psi_i^m \cdot \vec{n}_i dS = \int_{\partial\Omega_i} -k_i \text{Grad } \psi_i^n \cdot \vec{n}_i dS = \int_{\Omega_i} q_i^{m''} dV \quad (47)$$

Logo (46) pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} (\sigma(\psi_i^m)^4 - \sigma(\psi_i^n)^4) dS = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_i} \int_{\partial\Omega_j} (\sigma(\psi_j^{m-1})^4 - \sigma(\psi_j^{n-1})^4) K dS dS \quad (48)$$

onde

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_i} \int_{\partial\Omega_j} (\sigma(\psi_j^{m-1})^4 - \sigma(\psi_j^{n-1})^4) K dS dS = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} (\sigma(\psi_j^{m-1})^4 - \sigma(\psi_j^{n-1})^4) \left( \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} K dS \right) dS \quad (49)$$

O termo  $\sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} K dS$  é o fator de forma [2] do elemento de superfície definido para  $\vec{r} \in \partial\Omega_i$  para o conjunto formado por todas as superfícies  $\partial\Omega_i$ . Este termo depende do ponto  $\vec{r} \in \partial\Omega_i$  e é sempre menor do que a unidade [2, 3]. Isto nos permite concluir que

$$\sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} (\sigma(\psi_i^m)^4 - \sigma(\psi_i^n)^4) dS \leq \alpha \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} (\sigma(\psi_i^{m-1})^4 - \sigma(\psi_i^{n-1})^4) dS \quad (50)$$

onde

$$\alpha = \max \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} K dS < 1 \quad (51)$$

A desigualdade (50) é equivalente a

$$d(\vec{\psi}^m, \vec{\psi}^n) \leq \alpha d(\vec{\psi}^{m-1}, \vec{\psi}^{n-1}), \quad m \geq n \quad (52)$$

ou ainda

$$d(\vec{\psi}^{m+1}, \vec{\psi}^m) \leq \alpha^{(m-1)} d(\vec{\psi}^2, \vec{\psi}^1) \quad (53)$$

Uma vez que  $\alpha < 1$  temos que a seqüência  $\{\psi_i^1, \psi_i^2, \dots\}$  é de Cauchy [4]. Uma vez que todos os elementos desta seqüência são contínuos nas fronteiras  $\partial\Omega_i$ , assim como os campos  $T_i$ , temos que a seqüência converge na fronteira. Falta agora caracterizar a convergência no interior das regiões  $\Omega_i$ .

Sabemos que os campos  $\psi_i^m$  e  $T_i$  são tais que

$$k_i \text{Div}(\text{Grad } T_i) + q_i^{m''} = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (54)$$

$$k_i \text{Div}(\text{Grad } \psi_i^m) + q_i^{m''} = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N, \quad m > 1 \quad (55)$$

Consideremos agora a seguinte condição de contorno

$$T_i = \psi_i^m + \delta_i^m, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (56)$$

Combinando (54) e (55) com (56) obteremos que

$$k_i \text{Div}(\text{Grad } \delta_i^m) = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (57)$$

$$\delta_i^m = \delta_i^m, \quad \vec{r} \in \partial\Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (58)$$

onde

$$\delta_i^m = T_i - \psi_i^m, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (59)$$

Uma vez que  $\delta_i^m$  tende para zero, para todo  $\vec{r} \in \Omega_i$ , à medida que  $m$  tende para o infinito teremos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_i^m = 0, \quad \vec{r} \in \Omega_i, \quad i=1, \dots, N \quad (60)$$

já que  $\delta_i^m$  será sempre um campo de classe  $C^2$  no interior das regiões  $\Omega_i$ .

Com este resultado concluímos que a seqüência  $\{\psi_i^1, \psi_i^2, \dots\}$  converge para  $T_i$ , uniformemente, para todo  $\vec{r} \in \Omega_i$ , o que completa a prova de convergência do algoritmo. Este resultado é também uma prova de existência para a solução de (10)+(11).

#### REFERÊNCIAS

- [1] Holman, J.P., Heat transfer, Mc.Graw-Hill (1976).
- [2] Sparrow, E.M. and Cess, R.D., Radiation heat transfer, Mc.Graw-Hill (1978).
- [3] Saldanha da Gama, R.M., A note on the solutions of thermal radiant energy interchange problems, Journal of Heat Transfer (to appear) (1988).
- [4] Kreyszig, E., Introductory functional analysis, John Wiley (1978).

#### ABSTRACT

In this paper it is presented a procedure for solving the energy transfer problem in black bodies separated by vacuum. The algorithm proposed here allows the simulation of such phenomena through the solution of a sequence of problems whose limit will always exist and will give the solution of the original problem.



## ESTUDO COMPARATIVO DE DIFERENTES MODELOS DE GERAÇÃO DE SÉRIES DE RADIAÇÃO SOLAR

ABCN

ABCN

ARNO KRENZINGER e MARIO H. MACAGNAN  
 UFRGS, Departamento de Engenharia Mecânica, Grupo de  
 Energia Solar - Porto Alegre - RS

## RESUMO

Neste trabalho se apresenta um estudo comparativo entre vários procedimentos para sintetizar séries de radiação solar diária para aplicação no dimensionamento de sistemas de energia solar. Dois procedimentos, entre os apresentados na literatura, se salientam pela simplicidade e eficácia, sendo que um deles foi modificado no presente trabalho produzindo uma melhora significativa. A partir de séries sintetizadas por estes procedimentos e séries medidas, foram feitas comparações entre os resultados de simulações de sistemas fotovoltaicos autônomos, sendo os resultados satisfatórios mas não garantindo a universalidade desejada.

## INTRODUÇÃO

O estudo da radiação solar que incide na superfície da Terra tomou impulso desde que sua aplicação diversificou com o aumento da utilização de equipamentos de aproveitamento da energia solar. Além do conhecimento do espectro, distribuição e valores instantâneos, também é importante poder prever-se a radiação incidente no tempo futuro para que o dimensionamento de um determinado equipamento seja adequado. Esta previsão é feita normalmente sobre uma base estatística de medidas de radiação global horizontal realizadas por muito tempo, isto é, se considera que a radiação média mensal, determinada a partir de medidas diárias observadas por vários anos num mesmo mes, seja a mais provável para um dia típico deste mes. Estudos da geometria do movimento aparente do sol combinada com correlações empíricas permitem distribuir esta radiação média ao longo das horas e separá-la nas parcelas direta e difusa, procedimentos estes hoje considerados clássicos [1] nos projetos de engenharia solar.

Ainda que este procedimento clássico permita realizar previsões muito boas no comportamento médio dos equipamentos solares em cada mes e em resultados anuais, ele não pode ser utilizado em simulações onde se busquem resultados mais afinados envolvendo a sequencialidade da energia diária disponível. Conhecer a probabilidade de que ocorra uma determinada sequência de radiação solar diária é fundamental para executar simulações de equipamentos solares por períodos longos, que resultam num melhor dimensionamento dos sistemas de captação e acumulação de energia. Naturalmente este conhecimento tem uma aplicação muito mais ampla também em outros setores. Apenas para citar um exemplo, a partir destes dados se poderia estudar a viabilidade econômica de implantar sistemas de irrigação em determinados lugares, etc...

## SEQUÊNCIAS SINTÉTICAS

Como os anos não são mera repetição de anos anteriores, para uma simulação de longo período não se pode utilizar como dados de entrada os dados diários de um ano e repeti-los várias vezes. Assim como é um absurdo pensar que um determinado dia teria a mesma radiação do mesmo dia no ano anterior, também não se pode considerar que todos os dias respondam segundo o dia típico do mes ou mesmo distribuídos aleatoriamente sem nenhum critério além da média de radiação mensal. Para que os dados sequenciais tivessem valor estatístico seriam necessárias sequências de medidas de muitos anos e mesmo assim seu valor seria limitado ao lugar onde os dados foram medidos. Infelizmente são poucas as estações meteorológicas

que dispõem de medidas diárias de radiação solar por longos períodos de tempo.

A escassez dos dados sequenciais leva a procura de soluções multiplicadoras que nos últimos anos tem despertado interesse nos meios científicos ligados a energia solar. O ideal, naturalmente, é obter um método de sintetizar séries de radiação solar diária que produzam os mesmos resultados em uma simulação que as séries reais e, além disto, que estas séries sejam sintetizadas a partir de um mínimo de dados. Vergara-Dominguez e outros [2] demonstraram que é possível, a partir de uma série de um ano, gerar a "continuidade" desta série utilizando geradores aleatórios combinados com coeficientes de Fourier. Brinkworth [3] e Boileau [4] produziram sequências de radiação utilizando modelos de Média Deslizante Auto Regressiva (ARMA-Auto Regressive Moving Average) que infelizmente não são capazes de reproduzir a distribuição de probabilidade de ocorrência de radiação. Um modelo mais completo, tratando de corrigir as deficiências dos citados, é o apresentado por Graham, Hollands e Unny [5] que se descreve a seguir. Um ponto comum entre todos os métodos é que há necessidade de eliminar em primeiro lugar a dependência da radiação solar com a variação que a mesma sofre com a mudança das estações (Figura 1), fazendo com que a sequência oscile em torno de um valor médio fixo.

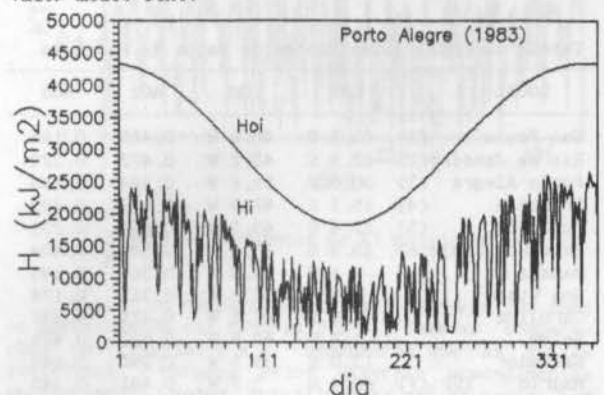


Figura 1. Radiação Extraterrestre Hoi e Radiação Diária Horizontal Hi medida em 1983 em Porto Alegre.

O método mais natural de realizar isto é trabalhar com sequências de índice de transparência no lugar de sequências de radiação diária. O índice de transparência é definido como a relação entre a radiação global recebida no plano horizontal na superfície da Terra e a radiação extraterrestre horizontal



no mesmo período de tempo considerado. O resultado é uma sequência como a que está representada na Figura 2.

#### METODO DE GRAHAM

Para chegar ao modelo do trabalho citado [5], os autores do mesmo analisam as séries de Kt utilizando a metodologia ARMA, antes porém realizando um mapeamento entre Kt e uma nova variável X com distribuição normal (com média zero e variância unitária). Esta transformação é obtida igualando-se a distribuição acumulada de probabilidade de X com a distribuição acumulada de probabilidade de Kt, resultando a equação abaixo:

$$X = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \{2F(\bar{K}t, Kt) - 1\}$$

A distribuição acumulada de probabilidade de Kt podem ser obtida experimentalmente através das séries de Kt ou teoricamente [6, 7].

Aplicando a metodologia ARMA para esta nova série os autores encontraram como mais adequado o modelo AR(1), obedecendo os critérios de parsimônia.

O modelo resultante é representado da seguinte forma:

$$X(n) = \phi_1 X(n-1) + w(n)$$

onde  $\phi_1$  é o coeficiente de autocorrelação de primeira ordem, e  $w(n)$  uma variável randômica independente e uniformemente distribuída, com variância  $\sigma_w^2$ , governada de acordo com  $\sigma_w^2 = 1 - \phi_1^2$ .

Algumas observações dos autores deste modelo, junto com as conclusões de Amato e outros [8] os levaram a sugerir que a utilização de um valor constante para o coeficiente de autocorrelação de primeira ordem, de 0,29, permitiria que o modelo pudesse ser utilizado em qualquer parte do globo.

Foi salientado por Aguiar e outros [9] e comprovado para as 14 cidades utilizadas no presente trabalho (Tabela 1) que na verdade este coeficiente de autocorrelação de primeira ordem varia bastante e que portanto o modelo de Graham não seria tão universal como se supunha. Foi com Aguiar e outros [9] que apareceu pela primeira vez uma solução que permite a sintetização das séries em lugares onde não se dispõe nem sequer de um ano completo de dados sequenciais de radiação solar. Na verdade, o que é requerido para iniciar a geração são apenas dados em média mensal da radiação diária horizontal, que por sua vez podem ser estimados, quando não são disponíveis, a partir de dados de número de horas de ocorrência de sol. Devido a que estes são os dados mais comumente encontrados e porque o procedimento apresentado por

Tabela 1. Localidades Fontes de Dados de Radiação.

LOCAL	LAT	LON	AC1	AC2
Sao Paulo (1)	23,5 S	46,6 W	0,468	0,198
Rio de Janeiro(2)	22,9 S	43,2 W	0,472	0,229
Porto Alegre (3)	30,0 S	51,2 W	0,384	0,150
Brasilia (4)	15,8 S	47,9 W	0,613	0,493
Curitiba (5)	25,4 S	49,3 W	0,454	0,231
Belo Horizonte(6)	19,9 S	43,9 W	0,585	0,404
Manaus	3,1 S	60,0 W	0,368	0,195
Boa Vista	2,5 N	60,6 W	0,315	0,174
Carolina	7,3 S	47,5 W	0,475	0,392
Belem	1,4 S	48,5 W	0,503	0,429
Salvador	13,0 S	38,5 W	0,397	0,249
Madrid ESP (7)	40,4 N	3,7 W	0,491	0,340
Murcia ESP (8)	38,0 N	1,1 W	0,387	0,216
Santander ESP	43,5 N	3,8 W	0,289	0,135
Salamanca ESP	41,0 N	5,5 W	0,431	0,292

AC1 = Coef. de Autocorrelação de primeira ordem  
AC2 = Coef. de Autocorrelação de segunda ordem

Aguiar, juntamente com o método de Graham, são os modelos disponíveis que melhor simulam a realidade, será detalhado este método a seguir.

#### METODO DE AGUIAR

O método apresentado por Aguiar e outros baseia-se em duas observações resultantes de análises de diversas sequências de radiação diária: (1) existe uma significativa correlação entre dois dias consecutivos na sequência; (2) a densidade de probabilidade dos valores de radiação parece depender apenas do valor médio mensal do índice de transparência e não da época do ano ou do local.

A primeira das observações citadas levou os autores do método a optarem por modelar as sequências de acordo com um processo estocástico Markoviano de primeira ordem, utilizando Matrizes de Transição de Markov (MTM) que contém a probabilidade  $P(i,j)$  de transição do índice de transparência de um certo intervalo de valores, estado i, para um outro intervalo, estado j.

A segunda observação sugere a universalidade da utilização de uma coleção de matrizes MTM cada uma correspondendo a determinados intervalos de Kt.

#### OBTENÇÃO DAS MATRIZES DE MARKOV

Uma Matriz de Transição de Markov (MTM) é uma matriz quadrada contendo  $N \times N$  elementos onde cada elemento representa a probabilidade de transição de um estado i para um estado j. Para obtenção destas matrizes a partir de uma boa quantidade de dados sequenciais é necessário um procedimento muito simples. Em primeiro lugar deve ser removida a tendência da série, transformando-a em uma série de índices de transparência diários. A seguir se divide a amplitude de valores possíveis de Kt em N estados e classifica-se cada Kt diário da sequência no estado correspondente, obtendo-se assim uma sequência de estados. O próximo passo é determinar a probabilidade de transição entre estados adjacentes nesta série, o que é feito através da frequência de ocorrências observadas na própria série. Finalmente a matriz obtida deve ser normalizada por linhas, de forma que a soma de todos os elementos de uma mesma linha sempre seja a unidade.

A sintetização das sequências de radiação a partir das MTM's prontas é realizada escolhendo-se um estado de partida i e sorteando um número aleatório R entre 0 e 1 e somando os elementos (i,1), (i,2) ... (i,j) até que a soma ultrapasse R, sendo então j o próximo estado da sequência.

Aguiar e outros [9] calcularam por este procedimento 10 matrizes cada uma com  $10 \times 10$  elementos e correspondendo a um Kt médio mensal. Esta matrizes foram geradas utilizando dados radiações das cidades portuguesas de: Lisboa (75,76,77), Faro (72,73), Bragança (77,78,79), Ponta Delgada (76,78,79), Porto Santo (76,77,78); das cidades francesas de: Trappes (72,73) e Carpentras (72,73); da cidade de Polana, Moçambique (65-70) e Macau (76-78). Seus resultados foram testados confrontando parâmetros estatísticos das séries geradas com séries medidas de cidades que não participaram da elaboração das matrizes. Estes testes aparentam testemunhar o ótimo funcionamento do procedimento apresentado na maioria dos casos. Entretanto para algumas cidades as matrizes calculadas não funcionam. Entre as cidades do teste as que apresentaram maus resultados foram El Paso (USA) e Ely (USA), sendo que os autores das comparações não detectaram as causas do insucesso nestes casos.

#### APLICAÇÕES DAS SEQUENCIAS SINTETICAS A SIMULAÇÕES

O interesse primeiro dos autores do presente trabalho é o de buscar métodos eficazes de simular sistemas de energia solar para aperfeiçoar seu dimensionamento em projetos. Nada mais natural, portanto, que testar diretamente este novo método de sintetizar séries de radiação em programas de simulação de sis-

temas solares. Como já estava em andamento um estudo de simulação de sistemas fotovoltaicos a partir de séries reais medidas em diversas cidades brasileiras e espanholas, foi feita uma comparação dos resultados decorrentes da utilização das séries sintéticas com as reais. O modelo utilizado para os sistemas fotovoltaicos é de extrema simplicidade, de forma que as diferenças de resultados devem ser atribuídas apenas ao efeito de diferença nas sequências utilizadas.

O objetivo desta aplicação-teste é encontrar a probabilidade de perda de carga em baterias de sistemas autônomos de energia solar fotovoltaica, para o caso hipotético de consumo constante e invariável a cada dia. Como a energia gerada em um painel fotovoltaico é diretamente proporcional a' radiação solar incidente sobre o mesmo, o balanço de energia simplificado fica reduzido a (1) calcular a radiação nos módulos inclinados, expressa em kWh, a partir da radiação diária horizontal (obtida das séries); (2) multiplicar este valor pela corrente que o painel pode gerar no ponto de máxima potência quando iluminado por 1 sol nominal (1kW/m<sup>2</sup>) obtendo a energia elétrica gerada ao longo do dia expressa em Ah; (3) descontar do resultado a energia consumida no dia (constante); (4) somar este resultado à energia acumulada nas baterias, expressa em Ah. Naturalmente nesta última etapa existem limitantes superiores e inferiores, isto é, a energia acumulada nas baterias não poderá ultrapassar a máxima capacidade das mesmas e não poderá baixar de um mínimo que é definido segundo critérios práticos de proteção à vida útil das baterias. A Álgebra do item (4) faz com que em dias com muita radiação solar coincidentes com baterias carregadas, haja desperdício de energia e se a energia acumulada se aproxima da mínima permitida, os dias que geram menos energia que a prevista para o consumo vão registrar falta de energia, desligando o circuito de consumo. Estas ocorrências serão chamadas doravante de falhas do sistema.

A técnica utilizada para se determinar a probabilidade de que ocorra um determinado número de falhas foi a de repetir o procedimento descrito acima, do item (1) ao (4), sequencialmente por períodos não inferiores a cinco anos (em geral 10 anos) somando o número de dias em que o estado de carga das baterias estaria abaixo do mínimo e relacionando este total com o número total de dias de simulação. Naturalmente esta probabilidade é função da área de módulos fotovoltaicos e do tamanho dos acumuladores elétricos, pelo qual a simulação é repetida para várias combinações destes parâmetros, resultando em diagramas de iso-confiabilidade, da maior utilidade em projetos de sistemas autônomos.

#### PARAMETROS DE COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS

Para comparar os diversos modelos de sintetização de radiação diária sequencial e as séries reais disponíveis foram utilizados parâmetros estatísticos e os resultados da simulação. Os primeiros devem verificar a adequação estatística do método e os segundos avaliam a aplicabilidade do sistema num problema prático, dando a segurança necessária para estender a utilização.

Os parâmetros estatísticos de comparação utilizados foram: (1) curvas de distribuição de frequência de Kt; (2) coeficientes de autocorrelação de primeira e segunda ordem; (3) variância; (4) média e (5) valores máximos e mínimos. Os resultados das simulações foram comparados pelo desvio no valor da área necessária de painéis para uma mesma aplicação e confiabilidade.

Foram comparados os seguintes procedimentos:

a- Séries reais [10]

b- (MTM 1) Séries sintetizadas pelo método de Aguiar, porém com 20 matrizes de 10X10 elementos obtidas a partir de séries de radiação horizontal medidas nas cidades constantes da tabela 1. Os intervalos mais finos de Kt ( de .02) se distribuem entre  $.34 < Kt < .66$

c- (MTM 2) Séries sintetizadas por método similar ao de Aguiar, sendo a diferença fundamental a escolha dos valores de Kt para cada uma de 10 matrizes de 10X10 elementos: em vez de serem igualmente espaçadas em Kt, se escolheram valores de Kt com intervalos de igual probabilidade de ocorrência. Isto soluciona em parte o fato de que as matrizes dos Kt's mais extremos fiquem com fraco significado, já que são construídas com poucos dados e, assim, otimiza a aplicação das mesmas. As matrizes foram obtidas a partir dos dados das cidades da Tabela 1.

d- (MTM 3) Séries sintetizadas pelo método de Aguiar, utilizando as matrizes MTM publicadas na referência [9]. São 10 matrizes de 10X10 elementos sendo uma para  $Kt < .3$ , oito em intervalos de .05 entre  $.3 < Kt < .7$  e a última para  $Kt > .7$

e- (GRAHAM 1) Séries sintetizadas pelo método de Graham, utilizando para cada cidade a autocorrelação de primeira ordem do próprio lugar.

f- (GRAHAM 2) Séries sintetizadas pelo método de Graham, utilizando o valor de 0,29 como coeficiente universal, conforme [5].

Tabela 2. Comparação Estatística para Porto Alegre

	MEDIA ANUAL	VAR	AC1	AC2	Kt1	Ktu
1	0,480	0,036	0,384	0,150	0,0142	0,866
2	0,475	0,027	0,398	0,190	0,0173	0,862
3	0,484	0,035	0,406	0,170	0,0704	0,851
4	0,472	0,026	0,292	0,122	0,0299	0,805
5	0,480	0,047	0,402	0,177	0,0096	0,873
6	0,480	0,048	0,265	0,082	0,0097	0,873

Tabela 3. Comparação Estatística para Madrid.

	MEDIA ANUAL	VAR	AC1	AC2	Kt1	Ktu
1	0,575	0,032	0,491	0,340	0,0377	0,860
2	0,501	0,027	0,347	0,154	0,0307	0,792
3	0,541	0,035	0,457	0,214	0,0576	0,841
4	0,503	0,026	0,311	0,115	0,0303	0,807
5	0,575	0,040	0,525	0,303	0,0113	0,873
6	0,575	0,039	0,362	0,203	0,0092	0,873

- |               |             |
|---------------|-------------|
| 1. Série real | 4. MTM 3    |
| 2. MTM 1      | 5. GRAHAM 1 |
| 3. MTM 2      | 6. GRAHAM 2 |

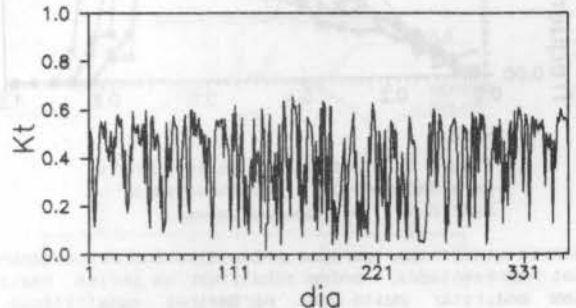


Figura 2. Sequência de Kt medido em Porto Alegre.

Tanto as comparações visuais via gráficos como os apresentados nas Figuras 2 a 5, como as comparações das Tabelas 2 e 3, demonstram que as séries sintéticas, geradas pelos diversos procedimentos apresentados, podem substituir as séries reais sem modificar muito seus parâmetros estatísticos. Entretanto, quando se realizou uma série de simulações para encontrar a potência necessária, com uma probabilidade de perda de carga de 0,0005 (equivalente a um dia a cada cinco anos) notou-se que o uso das

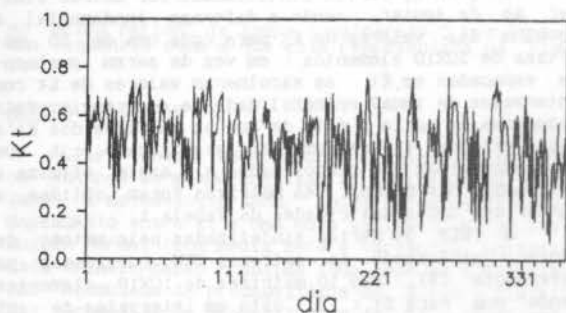


Figura 3. Sequência de Kt simulada para Porto Alegre (MTM 2).

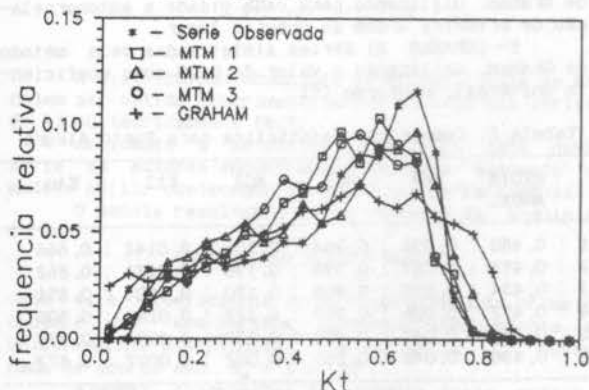


Figura 4. Distribuição de frequência para dados reais e simulados para Porto Alegre.

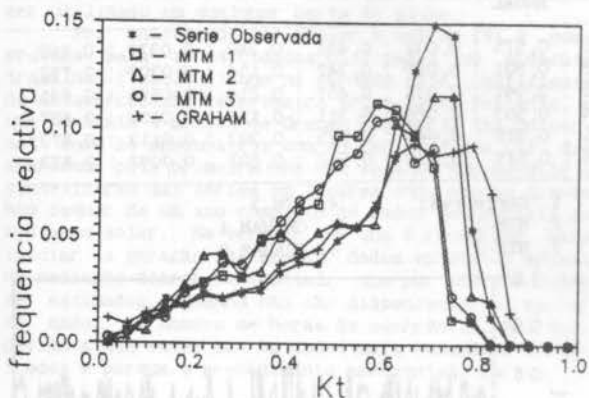


Figura 5. Distribuição de frequência para dados reais e simulados para Madrid.

séries sintéticas, geradas pelos diversos procedimentos apresentados, podem substituir as séries reais sem modificar muito seus parâmetros estatísticos. Entretanto, quando se realizou uma série de simulações para encontrar a potência necessária, com uma probabilidade de perda de carga de 0,0005 (equivalente a um dia a cada cinco anos) notou-se que o uso das séries sintéticas, em determinadas cidades, induziu um erro da ordem de até 100% (caso de Brasília - GRAHAM 2), como pode ser observado na Figura 6.

Este resultado sugere que embora as séries estudadas estejam conseguindo acompanhar vários indicadores estatísticos e reproduzam com relativo sucesso a distribuição de frequência de ocorrência dos níveis de radiação, os dias de baixa radiação não estão agrupados como no caso real, em algumas cidades.

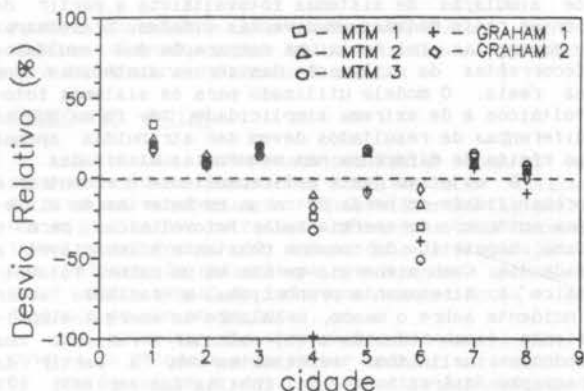


Figura 6. Desvios (%) entre os valores obtidos nas simulações com as diferentes séries e a série real (0,0005).

#### CONCLUSÕES

Foram estudados e reproduzidos vários procedimentos para sintetizar séries de radiação solar sendo selecionados alguns mais adequados e modificados para poderem gerar séries para simulações numéricas de instalações fotovoltaicas. As modificações realizadas (modelo MTM 2 e MTM 3) melhoraram as séries resultantes de maneira significativa. Mesmo assim, os procedimentos estudados não estão suficientemente trabalhados para substituir as séries reais no dimensionamento de equipamentos fotovoltaicos autônomos de alta confiabilidade, sendo recomendada cautela em sua utilização.

#### ABSTRACT

In this work we present a comparative study about several procedures for generating synthetic sequences of daily solar radiation for application on solar energy systems sizing. Two of the analysed procedures was selected because their simplicity and efficacy and one of them was modified in this work yielding significantly better results. By using sequences synthesized with these procedures and measured sequences, the results of stand alone photovoltaic systems simulations was compared as satisfactory but not warranting the universality as it was desired.

#### REFERENCIAS

- [1] Collares-Pereira, M. e Rabl, A., The Average Distribution of Solar Radiation - Correlations Between Diffuse and Hemispherical and Between Daily and Hourly Insolation Values. *Solar Energy*, 22: 155-164 (1979).
- [2] Vergara-Dominguez, L., Garcia-Gomez, R., Figueiras-Vidal, A.R., Casar-Corredera, J.R. and Casajus-Quiros, F.J., Automatic Modelling and Simulation of Daily Global Solar Radiation Series. *Solar Energy*, 35: 483-489 (1985).
- [3] Brinkworth, B.J., Autocorrelation and Stochastic Modelling of Insolation Sequences. *Solar Energy*, 19: 343-347 (1977).
- [4] Boileau, E., Use of Some Simple Statistical Models in Solar Meteorology. *Solar Energy*, 30: 333-339 (1983).
- [5] Graham, V.A., Hollands, K.G.T. and Unny, T.E., A Time Series Model for Kt with Application to Global Synthetic Weather Generation. *Solar Energy*, 40: 83-92 (1988).
- [6] Bendt, P., Collares-Pereira, M. and Rabl, A., The Frequency Distribution of Daily Insolation Values. *Solar Energy*, 27: 1-5 (1981).
- [7] Hollands, K.G.T. and Huget, R.G., A Probability Density Function for the Clearness Index with Applications. *Solar Energy*, 30: 195-209 (1983).



USO DE FUNÇÕES DE GREEN NA ANÁLISE TRANSIENTE  
DE UM PIRANÔMETRO TERMORESISTIVO

ABCN

ABCN

GUIMARÃES, G., LIMA, L.C., TEODORO, E.B.  
Departamento de Engenharia Mecânica - UFU/MG

## RESUMO

Analisa-se o comportamento térmico de um Piranômetro sob condições transientes, utilizando-se a técnica de funções de Green. A solução transiente do campo de temperatura é obtida com o auxílio de dados experimentais, buscando a interpretação das condições reais do instrumento. Os resultados mostram a adequacidade do método das funções de Green, quando se requer soluções de problemas de condução transientes associados a condições de contorno que também evoluem com o tempo.

## INTRODUÇÃO

Existem vários tipos de sensores com uso comum em medições de fluxo de calor [1,3]. Um pequeno número desses sensores, empregados extensivamente na indústria ou centros de pesquisa, possui equacionamento adequado em termos de análise dos problemas de transferência de calor acarretados com o seu uso [4], ou quanto ao seu próprio desempenho [5]. A maior dificuldade é a obtenção de soluções analíticas que possibilitem a análise do comportamento térmico do instrumento, em condições reais. Neste sentido, diversas análises têm sido realizadas em instrumentos que investigam a transferência de calor. Kirchhoff [6], apresenta uma análise teórica em seu trabalho sobre o tempo de resposta de um sensor de fluxo de calor tipo Gardon [1].

Este trabalho foi estimulado pela necessidade do projeto de sensores mais robustos, necessitando conhecer-se o efeito da espessura do corpo do sensor na resposta do transdutor. Prasad and Mohanty [7], fazem uma análise onde incluem uma estimativa teórica da sensibilidade e uma revisão da região onde a relação F.E.M. (Força Eletromotriz) e fluxo de calor é linear para medições de troca de calor por convecção com transdutores do tipo Gardon. Ainda sobre o transdutor de Gardon, ASH [8], obtém com a distribuição da temperatura sobre o corpo do sensor, a resposta do transdutor.

A utilização desse resultado permite a escolha de temperaturas de referência na realização de experimentos. Borodin et Al [9], investiga a sensibilidade e o tempo da resposta de sensores tipo filme termoeletrônico e termomagnético. A partir da distribuição de temperatura no corpo dos sensores, Borodin et Al concluem que a sensibilidade de um sensor tipo termoeletrônico não varia para raios de discos, acima de 3mm. Um resultado importante é o que permite a redução de peso do elemento de trabalho sem a variação de sensibilidade para sensores tipo termomagnético. Obtém-se ainda expressões que definem o tempo de resposta a cada um dos sensores, relacionando os parâmetros de saída dos sensores aos materiais usados na sua construção.

Beck and Wedekind [10] apresentam os resultados de uma investigação para avaliar a superfície efetiva de uma camada de absorção de um fluxo de calor radiante não uniforme. A análise sugere que, se um transdutor é projetado de forma apropriada, aliado a uma técnica experimental conveniente, a história temperatura - tempo do sensor, permite a obtenção da energia absorvida mesmo que o sensor esteja localizado em uma posição arbitrária. Esse fato confirma-se devido a distribuição de temperatura do sensor ser uma consequência da não uniformidade do fluxo de calor absorvido.

Justifica-se o desenvolvimento deste trabalho pela necessidade de aperfeiçoamento de projeto de um piranômetro termoresistivo já existente em nossos laborató-

rios [2]. O equacionamento a partir de condições de contorno transientes obtidas experimentalmente, simulam em condições reais o uso deste piranômetro. Uma solução analítica da distribuição de temperatura através do corpo do sensor é apresentada, utilizando-se a técnica de funções de Green.

## ANÁLISE

Assumindo a incidência de calor radiante constante e uniforme sobre a superfície do sensor do piranômetro [2], sendo o filme termoresistivo aplicado num substrato de vidro de área  $2,8 \times 2,8 \text{ cm}^2$  e 1mm de espessura, mostrado na figura 1, e desprezando-se os efeitos de perda lateral no corpo do sensor, a análise da resposta de temperatura transiente do sensor pode reduzir-se ao seguinte problema de calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

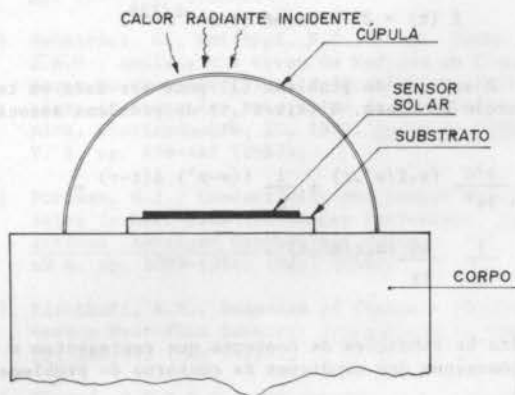


Fig. 1 - Piranômetro termoresistivo [2].

Na região R ( $0 \leq x \leq L$ ), que é a equação para a distribuição de temperatura ao longo da espessura do sensor do piranômetro, sujeito às condições de contorno:

$$-\frac{\partial T}{\partial x} + HT = \frac{q''}{K} \quad x = 0, t > 0 \quad (1.a)$$

$$T = f(t) \quad x = L, t > 0 \quad (1.b)$$

e a condição inicial

$$T(x,0) = T_0 \quad \text{em } R \quad (1.c)$$

onde,  $\alpha$  e  $K$  são a difusividade e condutividade térmica do substrato, respectivamente.  $q$  é o fluxo de calor incidente e  $H = h/k$ , sendo  $h$  o coeficiente de transferência de calor por convecção, e  $f(t)$  a condição de contorno obtida experimentalmente através da aplicação radian te de  $1000 \text{ W/m}^2$  e uma temperatura inicial de  $T = 23^\circ\text{C}$ .

A figura 2 mostra a evolução da temperatura na face do substrato localizado em  $x = L$ .

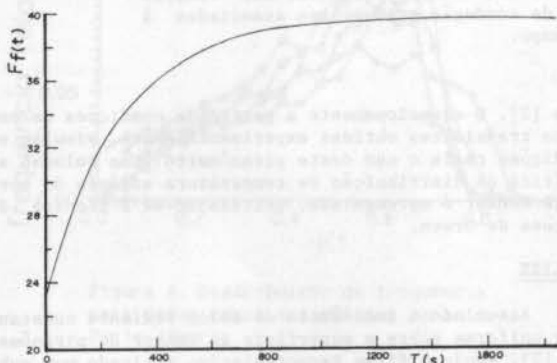


Fig. 2 - Curva de ajuste obtida a partir de dados experimentais para obtenção da condição de contorno em  $x = L$ .

Obtêm-se, assim, a expressão para  $f(t)$  através de uma curva de ajuste.

$$f(t) = 23 + 16,66(1 - e^{-t/225}) \quad (2)$$

A solução do problema (1) pode ser dada em termos da função de Green,  $G(x,t/x',\tau)$  do problema associado.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t/x',\tau) + \frac{1}{\alpha} \delta(x-x') \delta(t-\tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t}(x,t/x',\tau) \quad (3)$$

sujeito às condições de contorno que representam a versão homogênea das condições de contorno do problema original

$$\frac{-\partial G}{\partial x}(x,t/x',\tau) + HG(x,t/x',\tau) = 0$$

$$\text{Em } x = 0, t > \tau \quad (3.a)$$

$$G(x,t/x',\tau) = 0 \quad x = L, t > \tau \quad (3.b)$$

onde,  $\delta$  é a função delta de Dirac.

Desta forma, a solução do problema (1) é escrita

$$T(x,t) = \int_0^L G \cdot T_0 dx' + \alpha \int_{\tau=0}^t \frac{\partial G}{\partial x'} \bigg|_{x'=L} f(t) d\tau + \alpha \int_0^t G \bigg|_{x'=0} q''/k \cdot d\tau \quad (4)$$

Determina-se a função de Green definida pela equação (3) através da solução da versão homogênea do problema (1), para a mesma região,  $R$ , dada por

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{em } R \quad (5)$$

sujeito às condições de contorno:

$$\psi = 0 \quad \text{em } x = L, t \quad (5.a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = H\psi \quad \text{em } x = 0, t \quad (5.b)$$

e à condição inicial:

$$\psi = T_0 \quad \text{em } R \text{ para } t = 0 \quad (5.c)$$

Utilizando-se da técnica de solução por separação de variáveis, obtêm-se:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} D_n \text{Sen}[\lambda_n(L-x)] \cdot \int_0^L T_0 \text{Sen}[\lambda_n(1-x)] dx' \quad (6)$$

onde  $\lambda_n$  são os valores obtidos através da equação transcendental

$$L \cdot \lambda_n \text{Cotg}(\lambda_n L) = -H \cdot L \quad (7)$$

sendo

$$D_n = \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{L \cdot (\lambda_n^2 + H^2) + H} \quad (7.a)$$

Comparando-se a equação (6) com a solução geral

$$\psi(x,t) = \int_0^L G(x,t/x',\tau) \bigg|_{\tau=0} T_0 dx' \quad (8)$$

Do problema auxiliar (5), obtêm-se

$$G(x,t/x',\tau) \bigg|_{\tau=0} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \cdot \text{Sen}[\lambda_n(L-x)] \text{Sen}[\lambda_n(L-x')] \quad (9)$$

Substituindo-se adequadamente na equação (4) os valores

$$\frac{\partial G}{\partial x'} \bigg|_{x'=L} \text{ e } G \bigg|_{x'=0}$$
 encontrados a partir da e-



quação (9), obtém-se:

$$T(x,t) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \frac{\text{Sen}[\lambda_n(L-x)] [1 - \text{Cos}(\lambda_n L)]}{\lambda_n} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\text{Sen}[\lambda_n(L-x)] f(t)}{\lambda_n} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\text{Sen}[\lambda_n(L-x)] \text{Sen}[\lambda_n L]}{\lambda_n^2} \frac{q''}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\text{Sen}[\lambda_n(L-x)] e^{-\alpha \lambda_n^2 t}}{\lambda_n} \left\{ -f(0) - \int_0^t e^{\alpha \lambda_n^2 \tau} f'(\tau) d\tau - \frac{q''}{k} \frac{\text{Sen}[\lambda_n L]}{\lambda_n} \right\} \quad (10)$$

que é a expressão para a distribuição do campo de temperatura ao longo da espessura L do substrato do Piranômetro.

Aplicando-se a condição de contorno em  $x=L$ , observa-se que o lado direito da equação (10) se anula, não satisfazendo a equação (1.a). Esse fato justifica-se devido aos termos envolverem séries que não são uniformemente convergente nesta localização [10]. Contorna-se essa dificuldade através da obtenção de expressões fechadas para estas séries (ver apêndice) ou simplesmente observando-se a convergência da solução na vizinhança do contorno, como mostrado na figura 3.

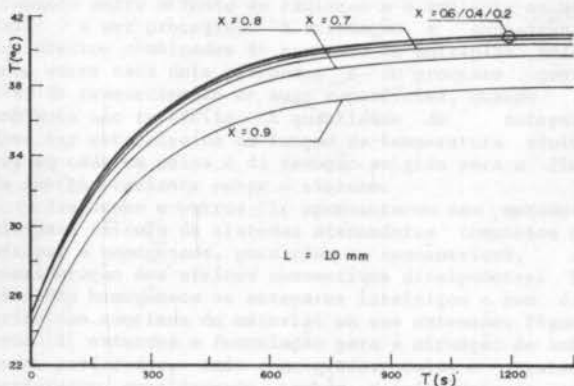


Fig. 3 - Resposta transiente do Piranômetro ao longo da espessura L, do substrato.

#### RESULTADOS E DISCUSSÕES

A figura 4 apresenta a resposta do piranômetro para diversos valores de espessura do substrato. Observa-se que para valores de espessura superiores a 1mm, o tempo de resposta do piranômetro não se altera, sendo aproximadamente 250s o valor encontrado para 63% da resposta em regime permanente. Este valor é considerado lento para investigações transientes sugerindo-se a alteração do material do substrato.

Na hipótese de se utilizar substrato com maior difusividade (metais) observa-se contudo que a espessura do substrato permite uma construção mais robusta.

#### CONCLUSÃO

A adequabilidade do método das funções de Green quando se requer soluções de problema de condução transientes associados às condições de contorno que também evoluem com o tempo é demonstrada. O uso do método da separação de variáveis com condições de contorno transientes

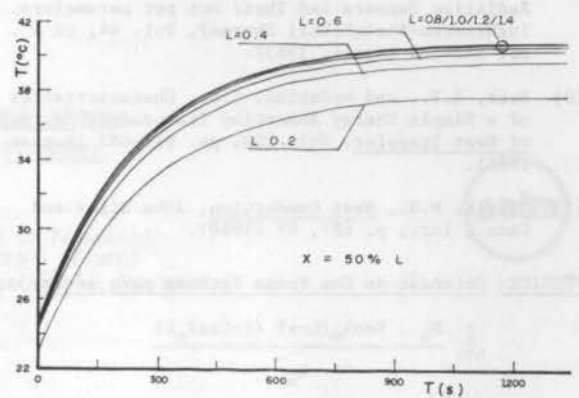


Fig. 4 - Resposta transiente do piranômetro considerando espessuras diferentes de substrato.

torna-se neste caso impraticável.

A solução para a distribuição de temperatura, apresenta a resposta transiente do piranômetro, permitindo também uma avaliação do tempo de resposta. A partir da distribuição de temperatura, observa-se que uma mudança de substrato, com um conseqüente aumento de difusividade térmica, diminuiria o tempo de resposta, sem contudo diminuir demasiadamente a sua espessura. A relação entre a área transversal e espessura do substrato pode ser obtida, usando-se um procedimento análogo, sendo entretanto, necessário uma análise bidimensional no substrato.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Gordon, R., An Instrument for the direct measurement of intense thermal radiation. *Rev. Sci. Instrum.* V. 24, pp. 366-370 (1953).
- [2] Lima, L.C., Um piranômetro com sensores de platina. *Ciência e Cultura*, Vol. 39, nº 1 (1987).
- [3] Van Heinigen, A.R.P., Douglas, W.J.M. and Mujundin, A.S., A High Sensitivity, Fast Response Heat Flux Sensor. *Int. J. Heat Mass Transfer*, V.28, pp. 1657-1667 (1985).
- [4] Guimarães, G., Philippi, P.C., e da Cunha Neto, J.A.B., Análise dos Erros de Medição em Transdutores de Fluxo de Calor: Aplicação às Edificações, IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC, 1987. *Anais do COBEM 87*, V. 1, pp. 439-442 (1987).
- [5] Portman, D.J., Conductivity and Length relationships in Heat-Flow Transducer Performance. *Transactions American Geophysical Union*. Vol. 39, nº 6, pp. 1089-1094. (Dec. 1958).
- [6] Kirchhoff, R.H., Response of Finite - Thickness Gardon Heat-Flux Sensors. *Transaction of ASME*, pp. 244-245 (May 1972).
- [7] Phasad, B.V.S.S.S., and Mohanty, A.K., Analysis and Calibration of a foil Heat flux sensor for Convective heat Loss from a Solid surface to an Airstream. *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, V. 12, pp. 270-271 (1979).
- [8] Ash, R.L., Response Characteristics of Thin Foil Heat Flux Sensors. *Aiaa Journal*, V.7, nº 12, pp. 2332-2335 (1969).
- [9] Borodin, V.V., Gelfgat, D.M., and Dashevskil, Z.M., FILM-TYPE Thermoelectric and Thermomagnetic Thermal

Radiation Sensors and Their output parameters. Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal, Vol. 44, nº 4, pp. 573-580 (April, 1983).

- [10] Beck, B.T., and Wedekind, G.L., Characteristics of a Simple Energy Absorption Transducer, *Journal of Heat Transfer*. Vol. 108, pp. 676-683 (August 1986).
- [11] Özisik, M.N., *Heat Conduction*, John Wiley and Cons., Inc., p. 687, NY (1980).

APÊNDICE: Obtenção de Uma Forma Fechada para série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n \cdot \text{Sen} \lambda_n(L-x) (1 - \text{Cos} \lambda_n L)}{\lambda_n}$$

Considerando o seguinte problema de condução de calor

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (\text{A.1.a})$$

$$\phi = 0 \quad x = L, \quad t > 0 \quad (\text{A.1.b})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = H\phi \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (\text{A.1.c})$$

$$\phi = 1 \quad 0 < x < L, \quad t = 0 \quad (\text{A.1.d})$$

a solução é dada por

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \cdot D_n \cdot \text{Sen}[\lambda_n(L-x)] \cdot \int_0^L 1 \cdot \text{Sen}[\lambda_n(L-x')] dx' \quad (\text{A.2.a})$$

onde,

$$L \lambda_n \text{Cotg} \lambda_n L = -HL \quad (\text{A.2.b})$$

$$D_n = \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H} \quad (\text{A.2.c})$$

A equação (2) deve satisfazer à condição inicial (A.1.d) o que resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n \cdot \text{Sen} \lambda_n(L-x) (1 - \text{Cos} \lambda_n L)}{\lambda_n} = 1$$

A partir de procedimentos análogos, pode-se obter formas fechadas das diferentes séries que envolvem a equação (10).

ABSTRACT

On this study the thermal behaviour of a pyranometer is analysed under transient conditions, using the technique of Green functions. The transient solution from the field of temperature is obtained through the use of experimental data, seeking interpretation of the real operation from the instrument. The results showed the feasibility from the method of Green functions when it is necessary to have solution of transient conduction problems associated to boundary conditions that evolves

with time.



ATENUAÇÃO DA RADIAÇÃO TÉRMICA  
COM ANTEPAROS PERFURADOS



Antonio Mac Dowell de Figueiredo  
PEM - COPPE/UFRJ, DEM - EE/UFRJ  
Manoel Joaquim Magalhães de Queiroz\*  
DEM - EE/UFRJ

RESUMO

Apresenta-se um modelo para avaliação do desempenho de sistemas atenuadores de radiação térmica compostos por placas paralelas. As placas são perfuradas e construídas de material semitransparente. O modelo permite determinar as temperaturas dos anteparos e o fluxo líquido de energia radiante a atravessar o sistema. Considera-se o efeito arrefecedor da convecção natural.

INTRODUÇÃO

A utilização de escudos de radiação para atenuação dos níveis de radiação térmica é um recurso frequentemente necessário para proteção ambiental e para proteção de instrumentos e equipamentos. Tais escudos consistem, geralmente, de painéis planos ou curvos, dispostos concêntrica ou paralelamente uns aos outros e posicionados entre a fonte de radiação e o ambiente ou artefato a ser protegido. A atenuação é consequência dos efeitos combinados do processo de múltiplas reflexões entre cada dois anteparos e do processo convectivo de reaquecimento de suas superfícies, quando em ambiente não rarefeito. A quantidade de anteparos deve ser estabelecida em função da temperatura admissível em cada um deles e da redução exigida para o fluxo da energia radiante sobre o sistema.

Isachenko e outros [1] apresentaram uma metodologia para cálculo de sistemas atenuadores compostos por anteparos homogêneos, paralelos ou concêntricos, sem consideração dos efeitos convectivos dissipadores. São chamados homogêneos os anteparos inteiros e com distribuição contínua de material em sua extensão. Figueiredo [2] estendeu a formulação para a situação de anteparos perfurados, tais como grades, telas e painéis perfurados, considerando, também, a influência da convecção natural no processo de atenuação. Este tipo de sistema atenuador encontra aplicação em situações onde seja necessário, por exemplo, redução de peso, visão e ventilação não obstruída, etc.

O presente trabalho propõe uma nova extensão da formulação, incluindo a situação na qual, além de perfurados, os anteparos constituem-se de materiais transparentes à radiação térmica. Objetiva-se obter uma maior generalização do modelo, que será aplicado a cada situação particular ao atribuir-se valores apropriados aos diversos parâmetros envolvidos.

MODELO ANALÍTICO

Considere o sistema mostrado na Figura 1, composto por n anteparos planos e paralelos, de largura e comprimento infinitos, imerso num meio não-participante de volume infinito e temperatura  $T_{\infty}$ , sobre o qual incide um fluxo de energia radiante de densidade superficial  $E_0^*$ . O anteparo i é suposto isotérmico, com temperatura  $T_i$ ; o seu material constituinte é semitransparente, de modo que

$$\alpha_i + \rho_i + \tau_i = 1 \quad (1)$$

onde  $\alpha$ ,  $\rho$  e  $\tau$  representam valores médios, respectivamente da absorptividade, da refletividade e da transmitividade

\* Bolsista de Iniciação Científica CNPq

relativos a todo o espectro de radiação térmica. O sistema é analisado para a condição regime estacionário, para o qual admitem-se valores iguais para a absorptividade e para a emissividade.

As superfícies do anteparo i emitem difusamente numa fração

$$p_i = \frac{A_{ef,i}}{A} \quad (2)$$

de sua área frontal total A, onde  $A_{ef,i}$  representa a área frontal efetiva de material.  $A_{ef,i}$  fração  $(1-p_i)$  da área A é vazia do material.

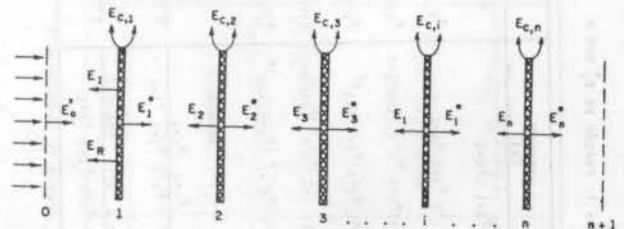


Figura 1: Sistema Atenuador de Radiação

A transferência de energia através do sistema é condicionada pelo processo de múltiplas reflexões entre cada dois anteparos, tal como descrito nas Tabelas 1 e 2. Nestas,  $E_i^*$  representa a densidade superficial de fluxo de energia radiante na face direita do anteparo i, na direção do anteparo i + 1, e  $E_{i+1}^*$  aquela na face esquerda do anteparo i + 1, na direção do anteparo i. Por indução, chega-se às expressões representativas dos efeitos cumulativos da reflexão, da absorção, da transmissão e da transferência de energia através dos vazios no processo de múltiplas reflexões entre os anteparos i e i + 1.

A densidade de fluxo de energia radiante  $E_{i+1}^*$  na face direita do anteparo i + 1, na direção do anteparo i + 2, compõe-se das parcelas correspondentes ao efeito cumulativo líquido, para a direita, do processo de múltiplas reflexões entre os anteparos i e i + 1, acrescido daquela emitida nesta mesma face, ou seja, as frações (3) e (4) de  $E_i^*$  no anteparo i + 1 somados às fra-

ções (7) e (8) de  $E_{i+1}$ , também no anteparo  $i+1$ , e a parcela emitida  $E_{e,i+1}^*$ . Assim, das Tabelas 1 e 2,

$$E_{i+1}^* = P_{i+1} E_{e,i+1}^* + \frac{1 - P_{i+1}(1 - \tau_{i+1})}{1 - P_{i+1}\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}} (E_i^* + P_{i+1}\rho_i E_{i+1}^*), \quad (3)$$

onde

$$E_{e,i+1}^* = E_{e,i+1} = \alpha_{i+1} \sigma T_{i+1}, \quad (4)$$

sendo  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzmann. Similarmente, a densidade de fluxo de energia radiante  $E_i$ , na face esquerda do anteparo  $i$ , na direção do anteparo  $i-1$  é dada pela soma das frações (3) e (4) de  $E_{i+1}^*$ , no anteparo  $i$ , das frações (7) e (8) de  $E_{i+1}$ , também no anteparo  $i$ , e da parcela de emissão,  $E_{e,i}^*$ . Das Tabelas 1 e 2, vem

$$E_i = P_i E_{e,i} + \frac{1 - P_i(1 - \tau_i)}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}} (E_{i+1} + P_{i+1}\rho_{i+1} E_i^*), \quad (5)$$

com

$$E_{e,i} = E_{e,i}^* = \alpha_i \sigma T_i. \quad (6)$$

O fluxo líquido de energia radiante entre os anteparos  $i$  e  $i+1$ , cuja densidade superficial é  $E_{i,i+1}^*$ , é determinado pelo efeito cumulativo das múltiplas reflexões de  $E_i^*$  e  $E_{i+1}$  na direção do anteparo  $i$  para o anteparo  $i+1$ , subtraído deste mesmo efeito na direção oposta. Utilizando os resultados constantes nas Tabelas 1 e 2, parcelas (1) e (5), tem-se

$$E_{i,i+1}^* = \left( 1 - \frac{P_{i+1}\rho_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}} + \frac{P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}} \right) E_i^* - \left( 1 - \frac{P_i\rho_i}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}} + \frac{P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}} \right) E_{i+1}, \quad (7)$$

que se reduz a

$$E_{i,i+1}^* = \frac{1}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}} \left| (1 - P_{i+1}\rho_{i+1}) E_i^* - (1 - P_i\rho_i) E_{i+1} \right|. \quad (8)$$

Em condições de regime estacionário e de ausência de outro processo de transferência de energia, tem-se

$$E_{i,i+1}^* = E_{i+1,i+2}^* = \text{cte}. \quad (9)$$

Havendo, porém, dissipação de energia para o ambiente, os fluxos líquidos de energia radiante entre os anteparos  $i$  e  $i+1$  e os anteparos  $i+1$  e  $i+2$  diferem entre si, de modo que

$$E_{i,i+1}^* = E_{i+1,i+2}^* + E_{c,i+1}^* + E_{c,i+1}, \quad (10)$$

onde  $E_c^*$  e  $E_c$  representam densidades superficiais de fluxo convectivo, respectivamente, nas faces direita e esquerda do anteparo. Sendo o anteparo isotérmico e o ambiente apresentando temperatura uniforme, tem-se  $E_c^* = E_c$ , vindo

$$E_c = p h (T - T_\infty), \quad (11)$$

onde  $h$  representa um coeficiente convectivo de transferência de energia, apropriadamente escolhido.

#### APLICAÇÃO

O modelo analítico do sistema atenuador, composto pelas relações de recorrência (3), (5) e (8)/(10) e pelas relações constitutivas (4)/(6) e (11), permite determinar as densidades de fluxo  $E_i^*$  e  $E_i$  e as temperaturas  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Para tanto, é conveniente introduzir-se dois anteparos virtuais,  $i = 0$  e  $i = n+1$ , com as propriedades  $P_0 = P_{n+1} = 1$ ,  $\rho_0 = \rho_{n+1} = 0$ . Para aplicações particulares, devem ser especificados valores apropriados para os demais parâmetros do sistema de equações.

Uma aplicação importante é aquela na qual o sistema atenuador é adiabático, ou seja, deseja-se diminuir o efeito de uma alta temperatura numa das paredes extremas do sistema, sobre a outra. Para esta situação, tem-se  $P_1 = P_n = 1$ ,  $\tau_1 = \tau_n = 0$ ,  $E_0^* = E_1 = E_n^* = E_{n+1} = 0$ .

Como ilustração geral, procedeu-se ao estudo do comportamento de um sistema atenuador imerso numa atmosfera a  $T_\infty = 300\text{K}$ , composto por anteparos opacos e verticais de altura  $l = 1,5\text{m}$ , sobre o qual incide uma dada quantidade de energia radiante. Supôs-se a ocorrência de convecção natural.

A Figura 2 mostra a variação do fluxo líquido de energia radiante através do sistema em função do número de anteparos e da sua área efetiva de material, conside

TABELA 1: FRAÇÃO DE  $E_i^*$  QUE

ANTEPARO	REFLETE (1)	ABSORVE (1)	TRANSMITE (5)	DEIXA-PASSAR (4)
$i+1$	$P_{i+1}\rho_{i+1}$	$P_{i+1}\alpha_{i+1}$	$P_{i+1}\tau_{i+1}$	$1 - P_{i+1}$
$i$	$P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}$	$P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}$	$P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}$	$(1 - P_i) P_{i+1}\rho_{i+1}$
$i+1$	$P_{i+1}\rho_i (P_{i+1}\rho_{i+1})^2$	$P_{i+1}\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}$	$P_{i+1}\tau_i P_{i+1}\rho_{i+1}$	$(1 - P_{i+1}) P_{i+1}\rho_{i+1} P_{i+1}\rho_{i+1}$
$i$	$(P_i\rho_i)^2 (P_{i+1}\rho_{i+1})^2$	$P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1} (P_{i+1}\rho_{i+1})^2$	$P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1} (P_{i+1}\rho_{i+1})^2$	$(1 - P_i) P_{i+1}\rho_{i+1} (P_{i+1}\rho_{i+1})^2$
$i+1$	$(P_{i+1}\rho_i)^2 (P_{i+1}\rho_{i+1})^2$	$P_{i+1}\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1} (P_{i+1}\rho_{i+1})^2$	$P_{i+1}\tau_{i+1} P_{i+1}\rho_{i+1} (P_{i+1}\rho_{i+1})^2$	$(1 - P_{i+1}) P_{i+1}\rho_{i+1} (P_{i+1}\rho_{i+1})^2$
$i$	$(P_i\rho_i)^3 (P_{i+1}\rho_{i+1})^3$	$P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1} (P_{i+1}\rho_{i+1})^3$	$P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1} (P_{i+1}\rho_{i+1})^3$	$(1 - P_i) P_{i+1}\rho_{i+1} (P_{i+1}\rho_{i+1})^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i+1$	$\frac{P_{i+1}\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}$	$\frac{P_{i+1}\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}$	$\frac{P_{i+1}\tau_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}$	$\frac{1 - P_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}$
$i$	$\frac{P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}$	$\frac{P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}$	$\frac{P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}$	$\frac{(1 - P_i) P_{i+1}\rho_{i+1}}{1 - P_i\rho_i P_{i+1}\rho_{i+1}}$



rados iguais. Não há convecção, os anteparos são opacos,  $T_i=0$  e sua emissividade vale  $\alpha_i=0,3$ . Sobre o sistema incide um fluxo  $E_0^* = 4000 \text{ W/m}^2$  de energia radiante.

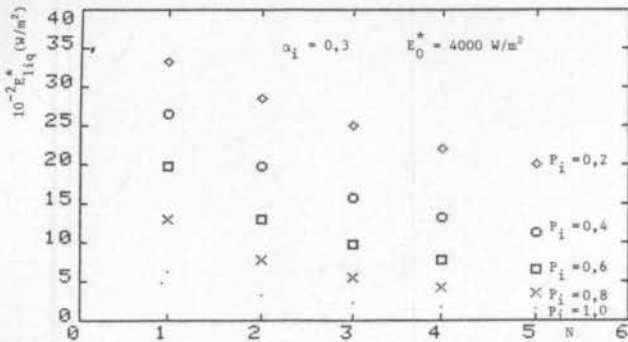


Figura 2: Fluxo Líquido de Radiação em Função do Número de Anteparos e de suas Áreas Efetivas - Caso sem convecção.

A Figura 3 aponta a variação de temperatura  $T_i$  dos anteparos em função do fluxo incidente  $E_0^*$ . O sistema é composto por anteparos de emissividades e áreas efetivas distintas entre si. Os resultados são apresentados para situações com e sem efeitos de convecção natural. A altura dos anteparos mede  $l=3,0 \text{ m}$ , e temperatura do ambiente é  $T_\infty = 300 \text{ K}$ . Quando não há efeito convectivo, o fluxo de radiação reduz-se a 26% de fluxo incidente. Havendo dissipação convectiva este valor importa em apenas 18%.

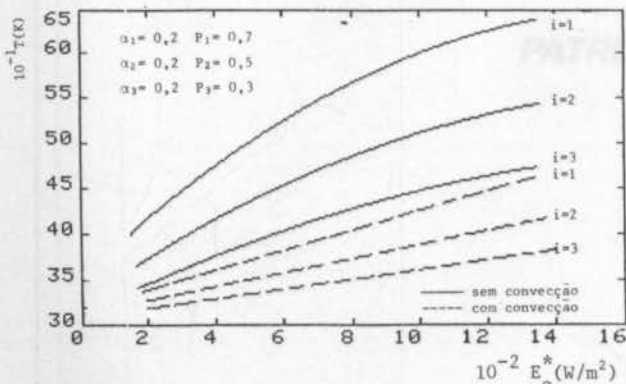


Figura 3: Temperatura dos Anteparos em Função do Fluxo Incidente

O estudo exaustivo de várias situações de interesse se poderá ser encontrado no trabalho de Queiroz [3].

### CONCLUSÃO

Apresenta-se um modelo estendido para cálculo do desempenho de sistemas atenuadores de radiação do tipo "escudos de radiação". Os escudos são representados por superfícies não homogêneas transparentes e refletoras. Considera-se o efeito do arrefecimento convectivo, sendo necessário introduzir uma correlação apropriada para o coeficiente de transferência de calor.

O modelo permite avaliar o comportamento do sistema, podendo-se comprovar o seu desempenho em função de variações do número de anteparos, da área efetiva de cada um deles e dos materiais empregados.

### REFERÊNCIAS

- [1] Isachenko, V.P. Osipova, V.A. and Sukomel, A.S., Heat Transfer, MIR Publishers, Moscou, 1977.
- [2] Figueiredo, A.M.D., Escudos de Radiação com Anteparos Perfurados, Anais do COBEM 83, Vol. A, pp. 417-430 (1983).
- [3] Queiroz, M.J.M., Atenuação de Radiação Térmica com Anteparos Perfurados, Relatório Interno, PEM - COPPE/UFRJ, 1988.

### ABSTRACT

A model is proposed to evaluate the performance of heat shield systems. The shield are composed of semitransparent materials and are perforated. The formulation allows the calculation of the temperature of the screens and of the net radiation flux across the system. Natural convection effects are also considered.

TABELA 2: FRAÇÃO DE  $E_{i+1}$  QUE O

ANTEPARO	REFLETE (5)	ABSORVE (6)	TRANSMITE (7)	DEIXA PASSAR (8)
i	$P_i \rho_i$	$P_i \alpha_i$	$P_i \tau_i$	$1 - P_i$
i + 1	$P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i$	$P_{i+1} \alpha_{i+1} E_i \rho_i$	$P_{i+1} \tau_{i+1} P_i \rho_i$	$(1 - P_{i+1}) P_i \rho_i$
i	$P_{i+1} \rho_{i+1} (P_i \rho_i)^2$	$P_i \alpha_i P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i$	$P_i \tau_i P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i$	$(1 - P_i) P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i$
i + 1	$(P_{i+1} \rho_{i+1})^2 (P_i \rho_i)^2$	$P_{i+1} \alpha_{i+1} P_{i+1} \rho_{i+1} (P_i \rho_i)^2$	$P_{i+1} \tau_{i+1} P_{i+1} \rho_{i+1} (P_i \rho_i)^2$	$(1 - P_{i+1}) P_{i+1} \rho_{i+1} (P_i \rho_i)^2$
...	...	...	...	...
i	$\frac{P_i \rho_i}{1 - P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i}$	... somando ... $\frac{P_i \alpha_i}{1 - P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i}$	$\frac{P_i \tau_i}{1 - P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i}$	$\frac{1 - P_i}{1 - P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i}$
i + 1	$\frac{P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i}{1 - P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i}$	$\frac{P_i \alpha_i P_{i+1} \rho_{i+1}}{1 - P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i}$	$\frac{P_i \tau_i P_{i+1} \rho_{i+1}}{1 - P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i}$	$\frac{P_i \rho_i (1 - P_{i+1})}{1 - P_{i+1} \rho_{i+1} P_i \rho_i}$



# AVANÇOS AVANÇOS em tecnologia espacial

- DEFESA • QUÍMICA
- PESQUISA ESPACIAL
- ELETRÔNICA E
- COMUNICAÇÕES

## **PATROCÍNIOS**

AVANÇOS em tecnologia espacial  
AVANÇOS em tecnologia espacial  
AVANÇOS em tecnologia espacial  
AVANÇOS em tecnologia espacial  
AVANÇOS em tecnologia espacial

TECNOLOGIA DE FONTO GERANDO OBTENÇÃO PARA O BRASIL

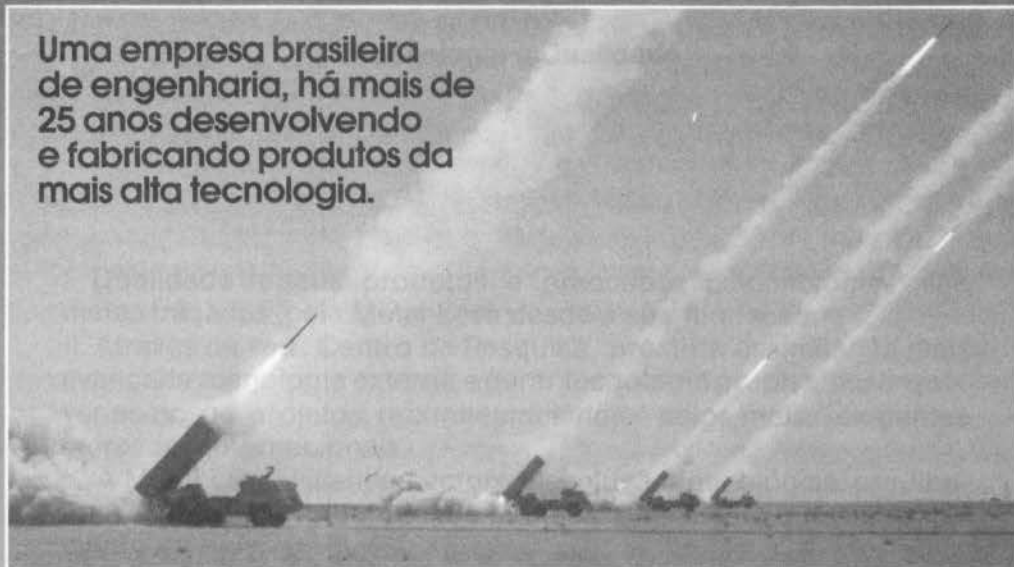
AVANÇOS em tecnologia espacial  
AVANÇOS em tecnologia espacial  
AVANÇOS em tecnologia espacial  
AVANÇOS em tecnologia espacial  
AVANÇOS em tecnologia espacial

# AVIBRAS aeroespacial

- DEFESA • QUÍMICA
- PESQUISA ESPACIAL
- ELETRÔNICA E COMUNICAÇÕES



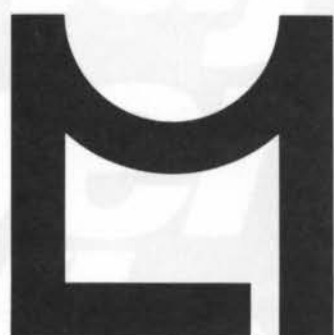
Uma empresa brasileira de engenharia, há mais de 25 anos desenvolvendo e fabricando produtos da mais alta tecnologia.



TECNOLOGIA DE PONTA GERANDO DIVISAS PARA O BRASIL

AVIBRAS AEROESPACIAL S.A.

Antiga Estrada de Paraibuna, Km 118 - Caixa Postal 229 - 12.200 - São José dos Campos - S.P.  
Tel.: (0123) 21-7433 - Telex (123) 3493 AIAE BR - FAX (0123) 221689



METAL LEVE

**Tecnologia e Qualidade**

Qualidade de seus produtos e preocupação tecnológica são metas traçadas pela Metal Leve desde a sua fundação.

Através de seu Centro de Pesquisa procura assimilar a mais avançada tecnologia externa e gerar tecnologia própria, desenvolvendo novos projetos, reconhecidos hoje pelos mais exigentes mercados internacionais.

A Metal Leve, visando sempre a evolução tecnológica, orgulha-se de estar contribuindo, de maneira eficaz, para o desenvolvimento do País.

