

# ANÁLISE VIBRACIONAL DE UM ROTOR CONTENDO UMA TRINCA TRANSVERSAL UTILIZANDO DISTRIBUIÇÕES TEMPO-FRÉQUÊNCIA.

**M.Sc. Ubatan A. Miranda**

Departamento de Projeto Mecânico – Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP  
Rua Mendeleiev, s/n - Cidade Universitária "Zeferino Vaz" - Barão Geraldo - Caixa Postal 6122  
CEP: 13.083-860 - Campinas – SP  
E-mail: ubatan@fem.unicamp.br

**Prof. Dr. Milton Dias Jr.**

Departamento de Projeto Mecânico – Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP  
Rua Mendeleiev, s/n - Cidade Universitária "Zeferino Vaz" - Barão Geraldo - Caixa Postal 6122  
CEP: 13.083-860 - Campinas – SP  
E-mail: milton@fem.unicamp.br

**Resumo.** *O monitoramento de máquinas rotativas tem sido amplamente utilizado nos últimos anos como forma de prevenir falhas e paradas inesperadas durante a operação. Um eixo rotativo flexível suportado em mancais anisotrópicos pode ser submetido, em certas velocidades de rotação, a níveis elevados de tensão, possibilitando o surgimento e propagação de trincas por fadiga. Neste trabalho, utiliza-se um modelo de trinca transversal para simular o comportamento vibratório de um rotor Jeffcott, quando este é acelerado a partir do repouso e passa por suas primeiras velocidades críticas. As características da resposta do sistema rotativo são analisadas através de uma distribuição tempo-frequência (TF) direcional, uma vez que este tipo de ferramenta proporciona uma melhor compreensão do comportamento espectral variante no tempo. Os resultados do rotor contendo uma trinca são comparados aos resultados do rotor sem trinca, confirmando que as distribuições tempo-frequência podem ser utilizadas como uma ferramenta na detecção de trincas.*

**Palavras-chave:** *trinca transversal, vibração, rotor, suporte anisotrópico, tempo-frequência.*

## 1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o comportamento vibracional de rotores trincados tem sido estudado mais extensivamente. Máquinas rotativas operando a altas velocidades encontram-se submetidas à fadiga e a altos níveis de tensão no eixo devido às cargas cíclicas atuantes. No intuito de prevenir falhas repentinas e indesejadas, um sistema eficiente de monitoramento das condições operacionais do rotor é necessário para detectar prematuramente o surgimento ou propagação de uma trinca. Desta maneira, um modelo de trinca bem elaborado deve proporcionar, com boa aproximação, o comportamento dinâmico de um sistema rotativo contendo este defeito.

Gasch (1993) propôs um modelo de trinca transversal ao eixo de um rotor de Laval (um disco localizado na posição central de um eixo considerado sem massa), suportado por mancais rígidos (isotrópicos). Uma vez que a estabilidade do sistema é garantida, o modelo pode ser considerado linear, e a trinca passa a atuar como uma fonte de excitação do sistema. A resposta analítica do sistema mostra o surgimento de componentes sub-harmônicas em  $1/2$  e  $1/3$  da velocidade crítica do rotor.

Sekhar e Prabhu (1998), considerando o trabalho de Gasch (1993), analisaram a resposta do rotor de Laval submetido à aceleração. A resposta do sistema passando por sua velocidade crítica confirmou alguns resultados anteriores propostos por Gasch (1993), que indica que componentes sub-harmônicas em 1/2 e 1/3 da velocidade crítica são excitadas. Verificou-se também que o aumento da profundidade da trinca aumenta a amplitude das componentes sub-harmônicas.

Zou e Chen utilizaram as características tempo-frequência da distribuição de Wigner e da transformada de Wavelets para identificar trincas num sistema rotativo. A sensibilidade destas transformadas às variações de rigidez e desbalanceamento do sistema, na presença da trinca, foi investigada.

Muitos trabalhos têm usado técnicas diferentes para caracterizar e detectar trincas em sistemas rotativos. Chan e Lai (1995) compararam a resposta de um rotor com trinca à de um rotor com o eixo assimétrico, a também discutiram a influência da profundidade da trinca, do fator de amortecimento e da posição do desbalanceamento em relação à trinca na resposta do sistema. Sekhar (2004) utilizou o método dos elementos finitos para modelar o rotor, e a trinca foi introduzida considerando-se a flexibilidade local do eixo, na posição da trinca. Imam et al (1989) desenvolveram uma técnica de monitoramento e detecção de trincas, e mostraram que, com o aumento da profundidade da trinca, a amplitude da componente em 1/2X da velocidade crítica aumenta numa proporção maior que as componentes em 1X e 1/3X. Darpe et al (2004) analisaram a resposta transiente de um rotor com trinca no eixo, utilizando três modelos numéricos e dados experimentais. Foram verificados os comportamentos de abertura e fechamento da trinca e as influências da orientação e excentricidade do desbalanceamento, além da quantidade de amortecimento no sistema.

Alguns estudos (Dias Jr e Allemang, 2001; Miranda et al, 2002) mostram que características constitutivas de sistemas rotativos flexíveis, tais como anisotropia nos mancais e distribuição espacial do desbalanceamento, podem levar a movimentos catastróficos do eixo. Este é o caso do movimento de precessão retrógrada, em que os movimentos de translação e rotação própria do eixo ocorrem em sentido contrário, induzindo tensões alternadas em determinada posição do eixo.

Neste trabalho, o comportamento dinâmico simulado de um rotor Jeffcott é investigado, considerando-se a presença de uma trinca transversal no eixo. A trinca é modelada segundo seu comportamento de abertura e fechamento (*breathing*), similar ao de uma “dobradiça” (*hinge model*; Gasch, 1993). Os suportes são considerados anisotrópicos e a resposta do sistema é obtida quando o rotor é acelerado passando por suas primeiras velocidades críticas. A distribuição tempo-frequência direcional é então utilizada para analisar o comportamento do sistema, e as formas orbitais em condições estacionárias são mostradas. Os resultados do rotor com trinca são comparados aos do rotor sem trinca, sugerindo que as distribuições tempo-frequência podem ser utilizadas como uma ferramenta na detecção de trincas.

## 2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações de movimento do sistema ilustrado na Fig. (1) podem ser escritas, no sistema de coordenadas inerciais e considerando aceleração angular, como:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mg \\ 0 \end{Bmatrix} + m\varepsilon \begin{Bmatrix} \dot{\theta}^2 \cos(\theta + \beta) + \ddot{\theta} \sin(\theta + \beta) \\ \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \beta) - \ddot{\theta} \cos(\theta + \beta) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}(\mathbf{U}, t) \mathbf{U} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_U, \quad (2)$$

em que  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  são as matrizes diagonais de massa e amortecimento,  $\mathbf{K}(\mathbf{U}, t)$  é a matriz de rigidez variante no tempo devido à trinca,  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos do centro do eixo,  $\varepsilon$  é a excentricidade do desbalanceamento, e  $\beta$  é o ângulo entre a excentricidade e a trinca.  $\theta(t)$  é o deslocamento angular, e a trinca está localizada próxima ao disco, na posição central do eixo.

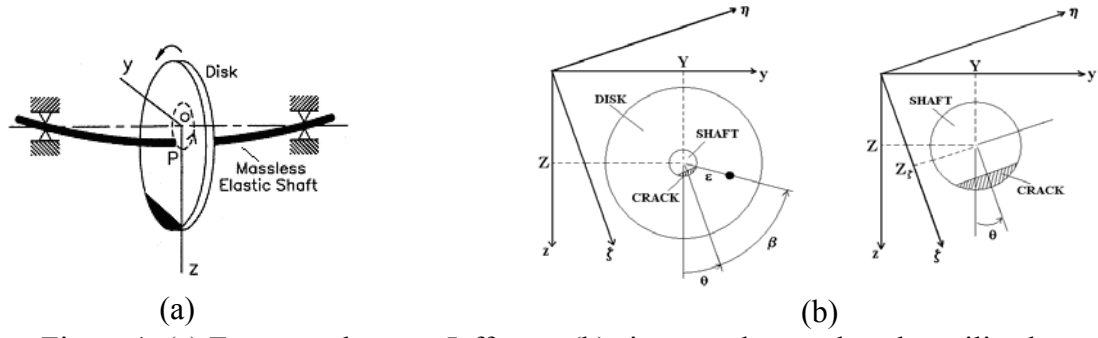


Figura 1. (a) Esquema do rotor Jeffcott e (b) sistemas de coordenadas utilizadas.

A presença da trinca torna a rigidez dependente do tempo e do deslocamento, de tal forma que esta pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}, t) = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}(\mathbf{U}, t), \quad (3)$$

em que  $\mathbf{K}_0$  é a matriz de rigidez do rotor sem trinca, e  $\Delta\mathbf{K}(\mathbf{U}, t)$  é a matriz de rigidez adicional devido à trinca.

O sistema da Eq. (2) apresenta duas componentes de excitação: a força gravitacional e o desbalanceamento. A primeira é responsável por uma deflexão estática,  $\mathbf{U}_0$ , e a última proporciona o comportamento vibratório do sistema,  $\Delta\mathbf{U}(t)$ , de tal maneira que a resposta total do sistema pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U}(t). \quad (4)$$

A deflexão estática,  $\mathbf{U}_0$ , pode ser escrita como

$$\mathbf{U}_0 = \begin{Bmatrix} Z_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mg/k_z \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{P}_0 \mathbf{K}_0^{-1} = \text{cte}, \quad (5)$$

e as derivadas do deslocamento são, de acordo com a Eq. (4),

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \Delta\dot{\mathbf{U}}(t) \Rightarrow \ddot{\mathbf{U}}(t) = \Delta\ddot{\mathbf{U}}(t). \quad (6)$$

Substituindo as Eqs. (3), (4), (5) e (6) na Eq. (2),

$$\mathbf{M} \Delta\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{D} \Delta\dot{\mathbf{U}}(t) + [\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}(\mathbf{U}, t)] [\mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U}(t)] = \mathbf{K}_0 \mathbf{U}_0 + \mathbf{P}_U, \quad (7)$$

em que o termo  $\Delta\mathbf{K}(\mathbf{U}, t)\Delta\mathbf{U}(t)$  pode ser desprezado, uma vez que é considerado pequeno e de segunda ordem, garantindo a estabilidade do sistema (Gasch, 1993). A equação de movimento se torna então,

$$\mathbf{M} \Delta\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{D} \Delta\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}_0 \Delta\mathbf{U}(t) = -\Delta\mathbf{K}(\mathbf{U}, t) \mathbf{U}_0 + \mathbf{P}_U. \quad (8)$$

Esta equação mostra que, se a estabilidade é assegurada, o sistema pode ser considerado linear, submetido a duas condições forçadas: uma devida à trinca, e outra ao desbalanceamento. O passo seguinte consiste em compreender as implicações do modelo de trinca utilizado sobre a rigidez do eixo.

### 3. MODELO DA TRINCA

O modelo “dobradiça” (Gasch, 1993) é válido para trincas rasas, em que sua profundidade não ultrapassa metade do diâmetro do eixo. Neste modelo, a força gravitacional é dominante, de forma que a trinca abre e fecha sucessivamente durante o giro do eixo, conforme mostra a Fig. (2).

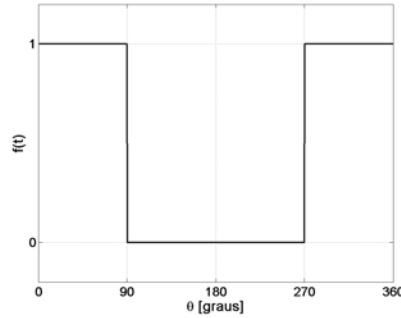


Figura 2. Comportamento de abertura e fechamento da trinca (modelo “dobradiça”).

A função descreve matematicamente o comportamento de “respiração” para pequenas trincas, e em geral, depende da posição do centro do eixo em relação à coordenada rotativa,  $Z_\zeta$ . Esta função pode ser definida como

$$f(t) = \begin{cases} 0, & Z_\zeta \leq 0 \text{ (trinca fechada)} \\ 1, & Z_\zeta > 0 \text{ (trinca aberta)} \end{cases} \quad (9)$$

Uma expansão trigonométrica em série de Fourier da função  $f(t)$  permite que esta seja expressa da seguinte maneira:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\theta) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\theta) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\theta) - \frac{2}{7\pi} \cos(7\theta) + \dots \quad (10)$$

### 4. MATRIZ DE RIGIDEZ

De acordo com a Eq. (8), é necessário conhecer a matriz de rigidez adicional para calcular a excitação do sistema. Para se obter a matriz de rigidez, Eq. (3), faz-se uso da formulação da matriz de flexibilidade. Para o sistema a ser analisado, esta matriz é considerada nas coordenadas rotativas e está desacoplada nas duas direções,  $\zeta$  e  $\eta$ . Assim, a matriz de flexibilidade,  $\mathbf{H}_{\text{rot}}$ , do eixo com a trinca totalmente aberta é expressa como se segue, considerando suportes isotrópicos (Gasch, 1993):

$$\begin{Bmatrix} Z_\zeta \\ Y_\eta \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} h_0 & 0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix} + f(t) \begin{bmatrix} \Delta h_{\zeta, \max} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} f_\zeta \\ f_\eta \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{U}_{\text{rot}} = \left( \mathbf{H}_{0, \text{rot}} + \Delta \mathbf{H}_{\text{rot}} \right) \mathbf{f}_{\text{rot}} \quad \therefore \mathbf{H}_{\text{rot}} = \mathbf{H}_{0, \text{rot}} + \Delta \mathbf{H}_{\text{rot}} \quad (12)$$

em que  $h_0$  é a flexibilidade do eixo sem trinca,  $\Delta h_{\zeta, \max}$  é a flexibilidade adicional correspondente à trinca totalmente aberta,  $f_\zeta$  e  $f_\eta$  são as forças atuando no eixo. A Eq. (11) pode ser reescrita, chegando-se à matriz de rigidez do eixo,  $\mathbf{K}_{\text{rot}}$ , em coordenadas rotacionais (Gasch, 1993):

$$\begin{Bmatrix} f_\zeta \\ f_\eta \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} - f(t) \begin{bmatrix} \Delta k_\zeta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} Z_\zeta \\ Y_\eta \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{f}_{\text{rot}} = \left( \mathbf{K}_{0, \text{rot}} - \Delta \mathbf{K}_{\text{rot}} \right) \mathbf{U}_{\text{rot}} \quad \therefore \mathbf{K}_{\text{rot}} = \mathbf{K}_{0, \text{rot}} - \Delta \mathbf{K}_{\text{rot}}, \quad (14)$$

em que  $\Delta k_\zeta$  é a rigidez adicional do eixo, que já inclui parâmetros geométricos como profundidade e posição da trinca no eixo. De acordo com a Fig. (1), uma matriz de transformação pode ser introduzida, relacionando as coordenadas rotativas às inerciais como se segue:

$$\begin{Bmatrix} Z_\zeta \\ Y_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ Y \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{U}_{\text{rot}} = \mathbf{T} \mathbf{U}. \quad (16)$$

Substituindo a Eq. (16) na Eq. (14), e pré-multiplicando por  $\mathbf{T}^T$ , chega-se à matriz de rigidez variante no tempo:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{t}) &= \mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}^T [\mathbf{K}_{0,\text{rot}} - \Delta \mathbf{K}_{\text{rot}}] \mathbf{T} \Rightarrow \\ K(t) &= \begin{bmatrix} k_{0,z} & 0 \\ 0 & k_{0,y} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} f(t) \Delta k_\zeta \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & 1 - \cos(2\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

em que a matriz de rigidez do rotor sem defeito já leva em consideração a anisotropia nos suportes. Substituindo a Eq. (17) na Eq. (8), tem-se a equação final de movimento do rotor Jeffcott contendo uma trinca, e suportado em mancais anisotrópicos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{0,z} & 0 \\ 0 & k_{0,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ Y \end{Bmatrix} = \\ \frac{1}{2} f(t) \Delta k_\zeta \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & 1 - \cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} mg/k_z \\ 0 \end{Bmatrix} + m \varepsilon \begin{Bmatrix} \dot{\theta}^2 \cos(\theta + \beta) + \ddot{\theta} \sin(\theta + \beta) \\ \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \beta) - \ddot{\theta} \cos(\theta + \beta) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

## 5. DIRECIONALIDADE

A direcionalidade do movimento de um rotor em relação à rotação do eixo geralmente pode ser relacionada a um sinal complexo calculado a partir das respostas do sistema em direções ortogonais:

$$P(t) = Y(t) + j Z(t). \quad (19)$$

Este sinal complexo corresponde a um vetor girante tomado a partir da origem até o centro do eixo, e descreve o movimento orbital do mesmo. Pode-se escrever este sinal na forma polar, a partir de uma expansão trigonométrica em série de Fourier dos sinais  $Y(t)$  e  $Z(t)$  (Han e Lee, 1998),

$$P(t) = p_f(t) + j p_b(t) = r_f(t) e^{j\Omega t} + j r_b(t) e^{-j\Omega t}, \quad (20)$$

de modo que pode-se evidenciar suas componentes direta e retrógrada. A amplitude relativa entre estas componentes define se o movimento de uma posição específica do rotor é de precessão direta (translação no mesmo sentido de rotação do eixo) ou retrógrada (translação no sentido contrário ao de rotação do eixo), e se a forma orbital é circular, elíptica ou retilínea:

- $|r_b(t)| = 0$  → Movimento circular, precessão direta;
- $|r_f(t)| > |r_b(t)|$  → Movimento elíptico, precessão direta;
- $|r_f(t)| = |r_b(t)|$  → Movimento retilíneo;
- $|r_f(t)| < |r_b(t)|$  → Movimento elíptico, precessão retrógrada;
- $|r_f(t)| = 0$  → Movimento circular, precessão retrógrada.

## 6. DISTRIBUIÇÕES TEMPO-FREQÜÊNCIA

Existem vários tipos de distribuição capazes de transformar a energia de um sinal no domínio do tempo para o domínio tempo-freqüência. A maioria delas pertence a um grupo geral, a classe de Cohen, que apresenta algumas propriedades e características peculiares. Neste trabalho, apenas uma breve discussão a respeito destas características é apresentada, uma vez que as distribuições tempo-freqüência têm sido discutidas na literatura (Cohen, 1995, Hammond e White, 1996; Han e Lee, 1998; Miranda et al, 2002). A distribuição de Wigner, utilizada neste estudo, pertence à classe de Cohen e é uma das mais comumente utilizadas. Esta distribuição, quando aplicada a sinais que apresentam direcionalidade, é chamada distribuição de Wigner direcional (dWD) e foi introduzida por Han e Lee (1998). Miranda et al (2002) utilizaram esta ferramenta para identificar movimentos simultâneos de precessão direta e retrógrada em diferentes pontos de um rotor flexível anisotrópico.

Considerando o sinal complexo,  $P(t)$ , e sua transformada de Hilbert,  $\hat{P}(t) = H[P(t)]$ , pode-se definir os sinais analíticos de precessão direta e retrógrada,  $p_f(t)$  e  $p_b(t)$ , como (Han e Lee, 1998):

$$\begin{aligned} p_f(t) &= \{P(t) + j \hat{P}(t)\} / 2 \\ p_b(t) &= \{P(t) - j \hat{P}(t)\} / 2 \end{aligned} \quad (21)$$

A distribuição de Wigner pode ser então escrita como (Han e Lee, 1998)

$$dW_{pp}(t, f) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} p_f(t + \frac{\tau}{2}) \bar{p}_f(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, & \text{for } f > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} p_b(t + \frac{\tau}{2}) \bar{p}_b(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, & \text{for } f < 0 \end{cases} \quad (22)$$

em que a barra sobrescrita indica o complexo conjugado.

## 7. RESULTADOS NUMÉRICOS

### 7.1. Identificação da trinca

O comportamento dinâmico de um rotor Jeffcott contendo uma trinca transversal em seu eixo é investigado sob condições não-estacionárias. O sistema da Fig. (1) é analisado numericamente com os seguintes parâmetros:  $m=50$  kg,  $c=2000$  Ns/m,  $k_{0,y}=1 \times 10^6$  N/m,  $k_{0,z}=2 \times 10^6$  N/m,  $\Delta k_c=5\%$ ,  $\varepsilon=1 \times 10^{-6}$  m,  $\beta=0$  rad. O sistema é sujeito a uma aceleração angular constante de aproximadamente  $26,2 \text{ rad/s}^2$ , em que a velocidade de rotação do rotor varia de 0 a 2500 rpm em 10 segundos. Os sinais da resposta nos eixos  $y$  e  $z$ , e da amplitude do centro do eixo,  $P(t)$ , são mostrados na Fig. (3).

Pode-se perceber que o rotor sem trinca apresenta duas velocidades críticas, devido à anisotropia nos suportes nas direções horizontal e vertical. A Figura (3a) mostra que quando o sistema atinge a primeira velocidade crítica, em aproximadamente 5,5 segundos, a amplitude da resposta é de cerca de  $4\mu\text{m}$ , enquanto a amplitude na segunda crítica atinge  $5\mu\text{m}$  em aproximadamente 7,8 segundos. Já a Fig. (3b) indica claramente a presença de componentes antes inexistentes no sinal temporal. Embora as velocidades críticas nas duas direções ocorram aproximadamente nos mesmos instantes, percebe-se que suas amplitudes aumentaram consideravelmente para cerca de  $25\mu\text{m}$  e  $35\mu\text{m}$ , respectivamente. A Figura (4) ilustra o plano tempo-freqüência de cada um dos sinais não-estacionários de resposta do rotor: eixo sem trinca e eixo com trinca.

Os mapas tempo-freqüência mostram que o rotor contendo a trinca apresenta componentes harmônicas em 1X, 2X e 3X a velocidade de rotação, tanto nas componentes diretas (freqüências positivas nos gráficos), quanto nas componentes retrógradas (freqüências negativas). Estas

harmônicas excitam o sistema quando o rotor atinge, respectivamente, 1X, 1/2X e 1/3X as velocidades críticas, nas duas direções, confirmando os resultados propostos por Gasch (1993).

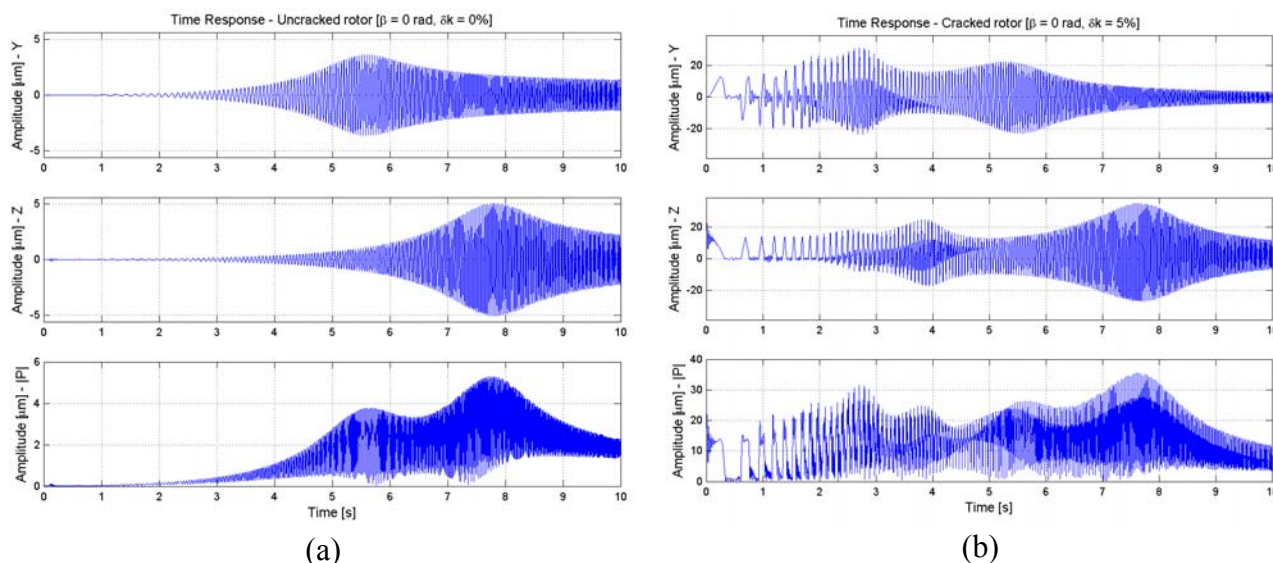


Figura 3. Resposta temporal do rotor acelerando através das velocidades críticas: (a) eixo sem trinca, (b) eixo com trinca ( $\beta=0$  rad,  $\Delta k_{\zeta}=5\%$ ).

Os gráficos das distribuições tempo-frequência também podem ser utilizados para se ter uma idéia da direcionalidade da órbita do rotor (Han e Lee, 1998; Miranda et al, 2002). Para isso, a distribuição de energia nas frequências positivas e negativas devem ser comparadas no instante desejado. Se a magnitude da distribuição na componente de frequência positiva for maior que a da componente negativa, então o movimento é de precessão direta. Caso contrário, o movimento é de precessão retrógrada.

Para o caso do rotor sem trinca, Fig. (4a), pode-se perceber que as velocidades críticas ocorrem em aproximadamente 1350rpm (22,5Hz) e 1910rpm (31,8Hz). Entre as duas críticas, a componente em frequências negativas se mostra mais acentuada que a componente em frequências positivas, o que indica um movimento de precessão retrógrada. Nos outros intervalos (antes da primeira crítica e após a segunda), a componente nas frequências positivas possui amplitudes maiores que a das frequências negativas, sugerindo o movimento de precessão direta. Para o caso do rotor contendo a trinca, Fig. (4b), existem múltiplas harmônicas, o que impossibilita uma análise direcional adequada através dos mapas tempo-frequência da Fig. (4b). Entretanto, é possível realizar uma análise orbital, juntamente com o gráfico tempo-frequência, do rotor operando a uma velocidade de rotação constante, como mostra a Figura (5).

Considerando a Fig. (4b), foram escolhidas três frequências para análise orbital (e direcional, quando possível) em rotação constante. A Figura (5a) mostra a órbita do rotor e o plano tempo-frequência do sinal do rotor a uma velocidade de 480rpm (8Hz). O mapa tempo-frequência mostra a presença de componentes harmônicas em 1X, 2X e 3X a rotação nas frequências positivas, e em 2X e 3X a rotação nas frequências negativas. Mesmo se for feita uma comparação entre amplitudes das componentes correspondentes, nas frequências positivas e negativas, não é possível especular a respeito da direcionalidade da órbita, como mostra o gráfico. Quando a velocidade de rotação é de 750rpm (12,5Hz), o gráfico tempo-frequência, Fig. (5b), mostra a componente em -2X a rotação mais acentuada que a componente em 2Xrpm, nas frequências positivas. Além disso, observa-se que o mapa orbital mostra um movimento em precessão retrógrada, seguido de precessão direta, em uma revolução do eixo. Finalmente, a Fig. (5c) ilustra a presença apenas da componente em 1X a rotação (1650rpm). Neste caso, é possível assegurar que, como o mapa tempo-frequência apresenta a componente em frequências negativas com amplitude maior que a componente em frequências positivas, o movimento é elíptico e retrógrado. O gráfico da órbita mostra que o movimento se dá em sentido anti-horário.

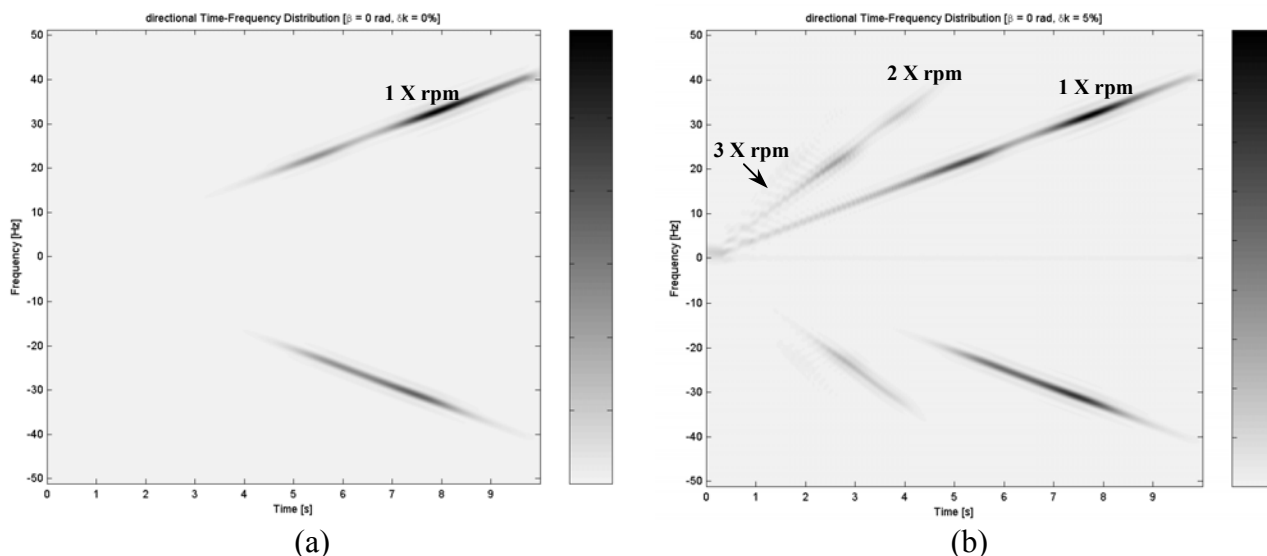


Figura 4. Distribuição tempo-frequência da resposta do rotor acelerando através de suas velocidades críticas: (a) eixo sem trinca, (b) eixo com trinca ( $\beta=0$  rad,  $\Delta k_c=5\%$ ).

## 7.2. Variação do ângulo de orientação do desbalanceamento, $\beta$

Nesta seção, será analisada a influência do ângulo de orientação do desbalanceamento em relação à trinca,  $\beta$ , além da sensibilidade das distribuições tempo-frequência à modificação destes valores. A Figura (6) mostra o sinal de resposta do sistema, nos domínios do tempo e tempo-frequência, quando  $\beta$  assume valores iguais a  $\pi/2$  e  $\pi$  rad. Tomando-se o sinal da Fig. (3b) como referência, pode-se perceber que, para  $\beta = \pi/2$  rad e  $\beta = \pi$  rad, as amplitudes de vibração da componente principal são menos severas que no caso em que  $\beta = 0$  rad, quando o desbalanceamento encontra-se na mesma direção da trinca. Os mapas tempo-frequência também indicam que as componentes sub-críticas, em  $1/3X$  e  $1/2X$  a velocidade crítica, encontram-se mais acentuadas que no caso de  $\beta = 0$  rad. Estes resultados confirmam alguns dados fornecidos na literatura (Gasch, 1993; Darpe et al, 2004).

## 8. CONCLUSÕES

A análise numérica do comportamento vibracional de um rotor Jeffcott contendo uma trinca transversal no eixo proporciona uma interpretação satisfatória da resposta do sistema operando em condições não estacionárias. A distribuição tempo-frequência direcional mostrou ser uma ferramenta adequada para detecção de trincas, uma vez que é evidenciado o comportamento espectral do sistema variante no tempo. Algumas de suas vantagens podem ser listadas a seguir:

- É possível obter uma interpretação compreensiva do comportamento dinâmico da resposta do rotor trincado em aceleração. A Figura (4) mostra a identificação de componentes harmônicos em  $1X$ ,  $2X$  e  $3X$  a velocidade de rotação, e também as frequências que são excitadas por estas componentes ( $1X$ ,  $1/2X$  e  $1/3X$  a velocidade crítica, respectivamente).
- A distribuição tempo-frequência pode se mostrar útil também na análise a velocidade de rotação constante, para se identificar a direcionalidade do movimento do eixo.
- É possível perceber a influência da variação do ângulo  $\beta$  na amplitude de vibração do sistema operando na velocidade crítica e suas sub-componentes.

Vale ressaltar que alguns dos resultados obtidos utilizando as distribuições tempo-frequência confirmam estudos anteriores de Gasch (1993), Sekhar e Prabhu (1998) e Darpe et al (2004).



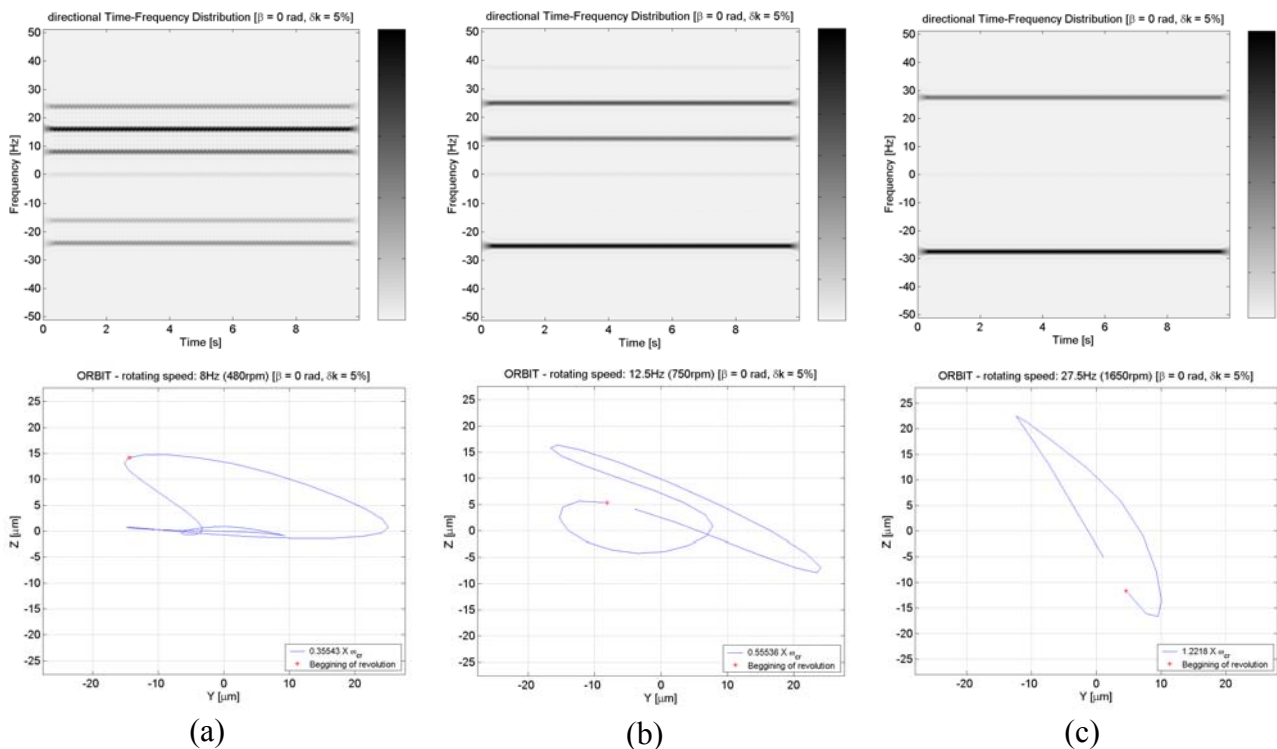


Figura 5. Distribuições tempo-frequência e órbitas em velocidade de rotação constante: (a) 480rpm, (b) 750rpm, (c) 1650rpm.

## 9. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq – Brasil.

## 10. REFERÊNCIAS

- Chan, R. K. C., Lai, T. C., 1995, “Digital simulation of a rotating shaft with a transverse crack”, *Appl. Math. Modeling*, vol. 19, pp. 411-420.
- Cohen, L., 1995, *Time-frequency analysis*, New York, Prentice-Hall.
- Darpe, A. K., Gupta, K., Chawla, A., 2004, “Transient response and breathing behaviour of a cracked Jeffcott rotor”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 272, pp. 207-243.
- Dias Junior, M., Allemang, R. J., 2001, “Some Insights into the Simultaneous Forward and Backward Whirling of Rotors”, *Proceedings of the 19<sup>th</sup> IMAC - International Modal Analysis Conference*, Bethel - USA.
- Gasch, R., 1993, “A survey of the dynamic behaviour of a simple rotating shaft with a transverse crack”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 160, n. 2, pp. 313-332.
- Hammond, J. K., White, P. R., 1996, “The analysis of non-stationary signals using time-frequency methods”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 190, n.3, pp.419-447.
- Han, Y. S., Lee, C. W., 1998, “The directional Wigner distribution and its application”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 216, pp. 585-600.
- Imam, A., Azzaro, S. H., Bankert, R. J., Scheibel, J, 1989, “Development of an on-line rotor crack detection and monitoring system”, *Trans. of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, stress, and Reliability in Design*, vol. 111, pp. 241-250.
- Miranda, U. A., Dias Junior, M., Idehara, S. J., Mesquita, A. L. A., 2002, “On the application of directional time-frequency distributions to the identification of simultaneous forward and backward whirling in flexible rotors”, *IFTToMM 6th International Conference on Rotor Dynamics*, vol.1, pp. 504-511, Sydney, Australia.
- Sekhar, A. S., 2004, “Crack identification in a rotor system: a model-based approach”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 270, pp. 887-902.

- Sekhar, A. S., Prabhu, B. S., 1998, "Condition monitoring of cracked rotors through transient response", Mech. Mach. Theory, vol. 33, n. 8, pp. 1167-1175.
- Zou, J., Chen, J., "A comparative study on time-frequency feature of cracked rotor by Wigner-Ville distribution and wavelet transform", Journal of Sound and Vibration, in press (available online).

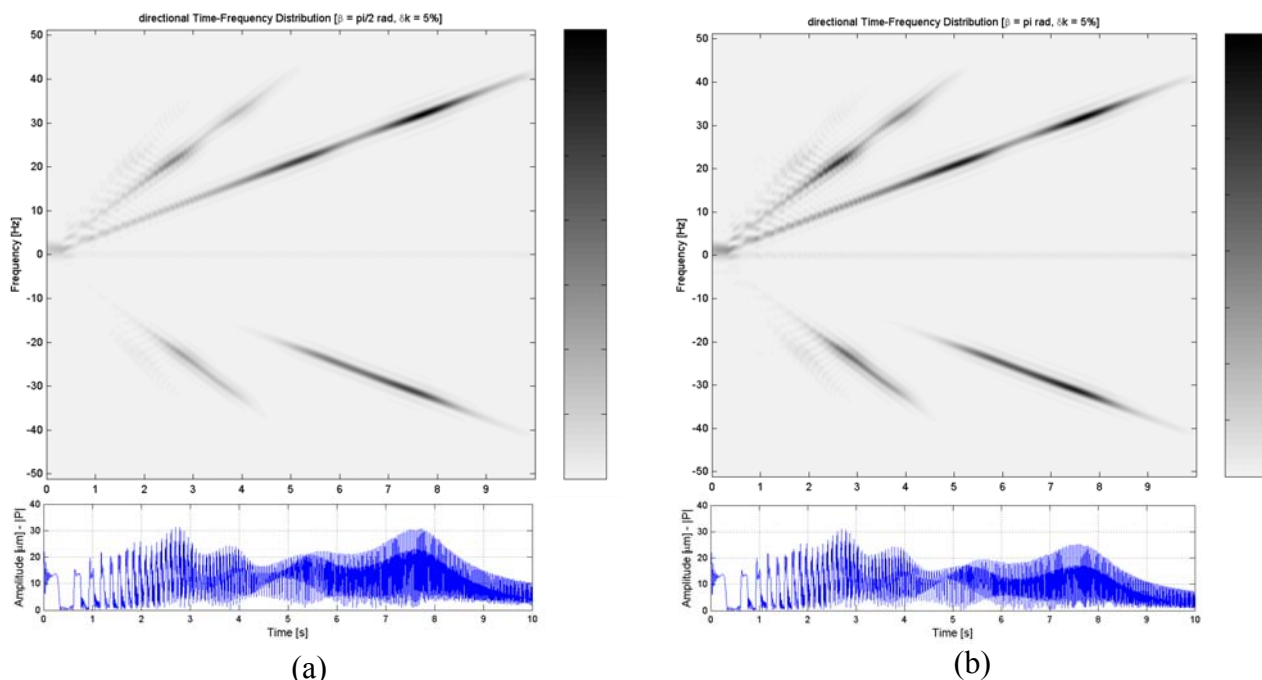


Figura 6. Variação do ângulo de orientação do desbalanceamento: (a)  $\beta = \pi/2$  rad, (b)  $\beta = \pi$  rad.

## 11. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no trabalho.

## VIBRATIONAL ANALYSIS OF A ROTOR CONTAINING A TRANSVERSE CRACK USING TIME-FREQUENCY DISTRIBUTIONS

**Ubatan A. Miranda**

Department of Mechanical Design - Faculty of Mechanical Engineering – UNICAMP - Rua Mendeleiev, s/n - Cidade Universitária "Zeferino Vaz" - Barão Geraldo - Caixa Postal 6122 - CEP: 13.083-860 - Campinas - SP

**Prof. Dr. Milton Dias Jr.**

Department of Mechanical Design - Faculty of Mechanical Engineering – UNICAMP - Rua Mendeleiev, s/n - Cidade Universitária "Zeferino Vaz" - Barão Geraldo - Caixa Postal 6122 - CEP: 13.083-860 - Campinas - SP

**Abstract.** Monitoring of rotating machinery vibration has been widely used as a tool to prevent sudden malfunctions during operation. A flexible shaft supported on anisotropic bearings is subjected, under certain rotational speeds, to high levels of stress, providing possible fatigue failures due to crack growth in such element. In this study, the hinge model of a breathing crack is used, once it provides a comprehensive approximation of the vibrational behavior of this system. The characteristics of a cracked Jeffcott rotor are obtained when it is accelerated through its critical speeds. The time-frequency (TF) features are analyzed, once this tool provides a better understanding of time-varying spectral behavior. The results of the cracked rotor response are compared to the results of the uncracked rotor.

**Keywords:** breathing crack, rotor vibration, anisotropic support, time-frequency.