

ESTUDO DE FORMULAÇÕES SIMÉTRICAS DA POROELASTICIDADE ACOPLADA

Francisco Ilson da Silva Júnior¹

Renato Pavanello²

Janito Vaqueiro Ferreira³

Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Mecânica

Departamento de Mecânica Computacional

13083-970 - Campinas - SP

¹ ilson@fem.unicamp.br, ² pava@fem.unicamp.br, ³ janito@fem.unicamp.br

Resumo. Os projetos de sistemas de isolamento acústica desenvolvidos pela indústria automobilística e aeronáutica requerem o contínuo decréscimo nos níveis de ruído gerados. Neste contexto, as normas internacionais de qualidade são cada vez mais severas, impondo limites cada vez mais rígidos para os requisitos vibroacústicos. O desenvolvimento de ferramentas de projeto confiáveis e precisas é necessário para permitir um avanço tecnológico rápido com custos baixos. Ferramentas de simulação são bastante difundidas e podem ser aplicadas para este tipo de projeto. No presente trabalho são analisadas algumas formulações de elementos finitos em sistemas acoplados do tipo fluido-estrutura. O problema de propagação de ondas elásticas e acústicas nos meios acústicos e poroelásticos é tratado. Equações matriciais simétricas e não simétricas baseadas nas formulações clássicas de Biot e na teoria da propagação do som em meios poroelásticos de Allard-Champoux são estudadas. A formulação não simétrica escrita em termos do deslocamento estrutural " u " e da pressão acústica " p " é comparada com formulações simétricas escritas em termos do deslocamento estrutural " u ", da pressão acústica " p " e do potencial de deslocamento do fluido " ψ ". A implementação numérica da presente aproximação em elementos finitos possui seu código em linguagem C++ orientada a objetos. Exemplos com aplicações numéricas como o estudo do campo de pressões em uma análise da resposta em frequência a uma excitação acústica sobre um modelo simplificado de uma cabine veicular são apresentados para caracterizar a precisão e eficiência da formulação simétrica.

Palavras chave: Poroelasticidade, formulação simétrica, C++

1. INTRODUÇÃO

Estruturas contendo materiais poroelásticos são amplamente usadas em muitas aplicações de engenharia devido às suas propriedades de absorção e insuflação do som. Podem-se citar como aplicações destes materiais em engenharia: o controle de ruídos em automóveis, o controle da qualidade do som em ambientes domésticos e industriais, a construção de sistemas de isolamento acústica em aeronaves, etc. Além deste campo de aplicação citam-se os problemas em Mecânica dos Solos, que envolvem fenômenos de escoamento em meios porosos, além dos modelos estruturais biomecânicos, bastante desenvolvidos atualmente.

Uma aproximação física para se entender e modelar o comportamento dinâmico do mate-

rial poroelástico é baseada em um procedimento de homogenização das propriedades das fases sólida e fluida (Zwikker e Kosten, 1949) e (Biot, 1956). Ao nível macroscópico, o meio poroelástico pode ser representado através de um modelo homogêneo contínuo com acoplamento de volume entre as duas fases, como mostrado na Fig. (1).

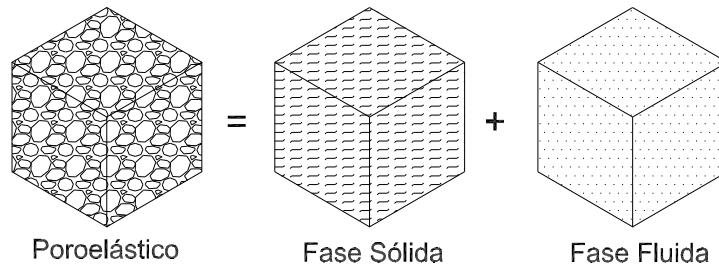


Figura 1: Fases do material Poroelástico

No presente trabalho, uma formulação simétrica inicialmente proposta em (Görransson, 1998) é apresentada. A aplicação primária da formulação proposta é a modelagem da transmissão de ruídos sobre estruturas como aeronaves, veículos, etc. Tal modelagem é derivada de uma formulação de elemento finitos para a propagação de ondas elasto-acústicas em um meio poroelástico. A característica de simetria da formulação estudada é estendida aos efeitos de acoplamento entre outros domínios: acústicos, elásticos, etc. As variáveis de estado nesta formulação simétrica são o vetor de deslocamento da fase sólida u_i , a pressão intersticial do fluido p e o potencial de deslocamento da partícula fluida ψ .

O modelo de amortecimento para o material poroelástico foi o de Allard-Champoux (Allard, 1993), no qual há a introdução de efeitos físicos, principalmente de natureza viscosa e térmica, acrescidos ao modelo de Biot (Biot, 1962).

Uma solução fraca usando um modelo semi-discreto de Elementos Finitos é adaptada entre a formulação simétrica e o modelo do material poroelástico.

As integrais de contorno são avaliadas para o acoplamento entre os domínios acústicos e poroelásticos, a partir da definição das equações de compatibilidade na interface.

Um problema de contorno para validação da implementação computacional da formulação simétrica (u, p, ψ) é feita. Uma análise de resposta em frequência do campo de pressões acústicas no interior de uma cabine veicular é avaliada, predizendo o efeito da presença de um material absorvedor poroelástico sobre a resposta, as frequências de ressonância e os modos operacionais do sistema.

Este trabalho pode ser sintetizado como: inicialmente, aplica-se o modelo de propagação acústica de Allard-Champoux sobre a formulação simétrica (u, p, ψ) para materiais poroelásticos, em sequência, usa-se a simetria em um problema tipo fluido-estrutura visando a utilização de métodos de álgebra computacional complexa usuais e finalmente avalia-se o método proposto em exemplos simples mas representativos.

2. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA FORMULAÇÃO POROELÁSTICA (u, p, ψ)

Neste trabalho, a formulação de elementos finitos implementada é baseada nas equações diferenciais parciais formuladas inicialmente por Biot em (Biot, 1956) e escritas em uma forma

simétrica (Görransson, 1998).

As hipóteses clássicas da acústica linear e comportamento linear elástico são assumidos (Allard, 1993) sendo restrito às condições de fluido saturado nos poros. Todas as quantidades dependentes representam pequenas flutuações sobre um valor de referência estático e as propriedades poroelásticas (porosidade, tortuosidade, etc) são contínuas no domínio.

2.1 A formulação simétrica deslocamento-pressão-potencial (u, p, ψ)

A formulação simétrica (u, p, ψ) é um problema acoplado do tipo fluido-estrutura. Através das equações da continuidade e da conservação do momento linear para ambas as fases, fluida e sólida, esta aproximação é desenvolvida em termos das propriedades dos materiais, podendo ser escrita em uma notação tensorial cartesiana, no domínio da frequência ω , como sendo:

$$\frac{h^2}{\tilde{R}}p + h\psi_{,ii} + \frac{h\tilde{Q}}{\tilde{R}}u_{i,i} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,j}^f = -hp_{,j} = \omega^2\tilde{\rho}_{12}u_i + \omega^2\tilde{\rho}_{22}\psi_{,i}, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij,j}^s = \hat{\sigma}_{ij,j}^s - \frac{h\tilde{Q}}{\tilde{R}}p_{,i} = \omega^2\tilde{\rho}_{11}u_i + \omega^2\tilde{\rho}_{12}\psi_{,i}, \quad (3)$$

onde σ_{ij}^s e σ_{ij}^f representam os tensores de tensão da fase sólida e fluida, respectivamente. $\hat{\sigma}_{ij}^s$ é o tensor de tensão em condições drenadas. p é a pressão acústica e h é a porosidade do material poroelástico. $\tilde{\rho}_{11}$ e $\tilde{\rho}_{22}$ são os coeficientes de massa sólido e fluido corrigidos pela densidade ρ_{12} que corresponde à interação entre as inércias das duas fases, sendo função da tortuosidade do material (Bourbié et al, 1987). \tilde{R} e \tilde{Q} são coeficientes provenientes da teoria clássica de Biot (Biot, 1956), funções do módulo de deformação volumétrica do fluido \tilde{K}_f , variável complexa e dependente da frequência.

Ao modelo de Biot, adiciona-se o feito do amortecimento estrutural associado com a configuração do sistema. Os coeficientes de inércia são associados ao amortecimento dependente da frequência, o qual leva em consideração os efeitos das forças de interação viscosa do fluido sobre a estrutura (Johnson et al, 1987).

O módulo de deformação volumétrica do fluido \tilde{K}_f leva em consideração o efeito das interações térmicas do fluido presente no poro. Este efeito é de natureza dissipativa e pode ser compreendido como um amortecimento térmico (Johnson et al, 1987) e (Allard, 1993).

Ambos efeitos dissipativos são provenientes de um modelo micro-macro, nos quais, a nível de um poro, fenômenos de arraste do fluido em condições laminares (camadas limite dinâmica e térmica) são homogeneizados ao material.

A formulação detalhada dos termos do modelo de amortecimento do material pode ser encontrada em (Dazel et al, 2002) e (Panneton and Atalla, 1997), bem como simplificações ao problema não linear com a frequência, desejáveis em uma análise modal de autovalor.

Sendo U_i o deslocamento da partícula fluida, tem-se que o potencial de deslocamento ψ pode ser expresso como:

$$U_i = \psi_{,i}. \quad (4)$$

O uso do potencial de deslocamento ψ ao invés do deslocamento da partícula fluida como variável de estado reduz para cinco o número de graus de liberdade enquanto que a formulação clássica de Biot (u, U) utiliza seis tipos diferentes de graus de liberdade para problemas tridimensionais.

2.2 A Forma Fraca da formulação simétrica (u, p, ψ)

Utilizando-se do método de Galerkin nas Eq. (1), (2) e (3) e sendo δu_i , δp_i e $\delta \psi_i$ as variações virtuais admissíveis para o vetor de deslocamento estrutural (u_i) , o campo de pressão do fluido (p) e para o gradiente do potencial de deslocamento do fluido (ψ_i) , respectivamente, as formas integrais fracas destas equações resultam em:

$$-\frac{h^2}{\tilde{R}} \int_{\Omega_p} p \delta p d\Omega + h \int_{\Omega_p} \psi_{,i} \delta p_i d\Omega - \frac{h\tilde{Q}}{\tilde{R}} \int_{\Omega_p} u_{i,i} \delta p d\Omega - h \int_{\Gamma_p} \psi_{,i} n_i \delta p d\Gamma = 0, \quad (5)$$

$$h \int_{\Omega_p} p_{,i} \delta \psi_{,i} d\Omega - \omega^2 \tilde{\rho}_{12} \int_{\Omega_p} u_i \delta \psi_{,i} d\Omega - \omega^2 \tilde{\rho}_{22} \int_{\Omega_p} \psi_{,i} \delta \psi_{,i} d\Omega = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \hat{\sigma}_{ij}^s \delta u_{i,j} d\Omega - \frac{h\tilde{Q}}{\tilde{R}} \int_{\Omega_p} p \delta u_{i,j} d\Omega - \omega^2 \tilde{\rho}_{11} \int_{\Omega_p} u_i \delta u_i d\Omega - \\ - \omega^2 \tilde{\rho}_{12} \int_{\Omega_p} \psi_{,i} \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_p} n_j \sigma_{ij}^s \delta u_i d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

onde Ω_p e Γ_p denotam o domínio poroelástico e o seu contorno, respectivamente. O vetor n_j é unitário e normal ao contorno Γ_p . As integrais de contorno descritas nas Eq. (5) e (7) denotam as condições de contorno e acoplamento entre outros domínios.

2.3 Acoplamento acústico-poroelástico na formulação (u, p, ψ)

A seguir será apresentado o acoplamento entre meios acústicos e poroelásticos. Os resultados serão explicitados através das integrais de contorno resultantes dos diversos domínios. No presente trabalho, dá-se ênfase ao acoplamento ar-poros, o qual terá uma aplicação numérica a ser discutida no item seguinte.

O acoplamento entre os domínios acústico e poroelástico na formulação (u, p, ψ) consiste na determinação da matriz de interface, Fig. (2).

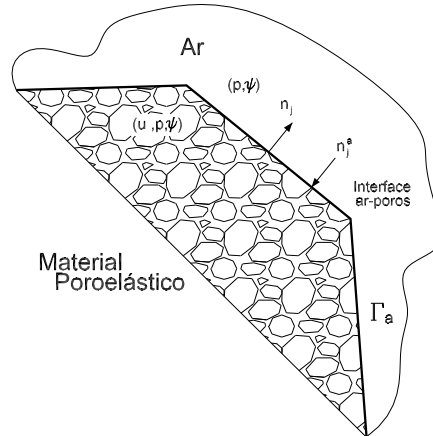


Figura 2: Interface do acoplamento acústico-poroelástico

O equilíbrio das forças entre os diferentes domínios, o equilíbrio das vazões e as relações de compatibilidade cinemática na interface ar-poros são escritas como se segue:

$$\sigma_{ij}^s n_j = -p^a n_j \quad (8)$$

$$\frac{1}{\rho_a \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} = (1-h)u^n + hU^n \quad (9)$$

$$p = p^a \quad (10)$$

Reescrevendo a integral de contorno da equação da fase sólida do material poroelástico, mostrada na Eq. (7), tem-se:

$$I_1 = - \int_{\Gamma_p} n_j \sigma_{ij}^s \delta u_i d\Gamma \quad (11)$$

De forma similar para a equação do fluido, pode-se reescrever a integral de contorno I_2 , descrita na Eq. 5.

$$I_2 = -h \int_{\Gamma_p} n_j \psi_{,j} \delta p d\Gamma \quad (12)$$

e para o domínio acústico adjacente, a integral de contorno I_3 é escrita:

$$I_3 = - \int_{\Gamma_a} n_j^a \psi_{,j}^a \delta p^a d\Gamma \quad (13)$$

Através da combinação linear das equações integrais descritas nas Eq. (11) (12) e (13) com as relações cinemáticas e de equilíbrio no contorno, Eq. (8), (9) e (10), chega-se às Eq. (14) e (15), o que corresponde a um par simétrico de acoplamento ar-poros.

$$L = (1-h) \int_{\Gamma_a} n_j p^a \delta u_i d\Gamma \quad (14)$$

$$L^t = -(1-h) \int_{\Gamma_a} n_j^a u_i \delta p^a d\Gamma \quad (15)$$

A partir da implementação computacional da formulação (u, p, ψ) proposta e de operações matriciais, determinadas a partir do método de elementos finitos e utilizando-se uma aproximação linear de um elemento quadrilateral, pode-se analisar o campo acústico em um modelo simplificado de cabine veicular.

3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional utilizada não usa ferramentas comerciais e foi totalmente feita no projeto Meflab++, um programa em desenvolvimento no Departamento de Mecânica Computacional da Unicamp. No Meflab++, o gerenciamento dos dados, a montagem e o método de resolução do problema foram concebidos com a filosofia de programação orientada ao objeto (Oriented Object Programming - OOP) e tendo seu código fonte implementado em C++. Ao projeto Meflab++, foi adicionado um conjunto de classes com as responsabilidades de modelar, configurar e resolver vários tipos de problemas poroelásticos e poro-acústicos propostos.

O problema será dividido em domínios, cada um com uma equação diferencial regente e cada uma com seu respectivo operador diferencial e material que se comporta segundo a sua lei constitutiva. Os tipos e quantidades de graus de liberdade são função da escolha do operador diferencial e da dimensão do domínio. A malha de elementos finitos é processada com o recebimento das coordenadas dos nós e da conectividade de seus elementos. As condições de contorno e iniciais são dados de entrada e finalizam a montagem do domínio.

O problema proposto é finalizado com a solução do sistema de equações lineares, ou para o caso específico de uma análise modal, deve-se utilizar um algoritmo de extração de autovalores e autovetores para determinação dos modos e frequências naturais para o sistema poroelástico. Considerando que neste caso o sistema é complexo e dependente da frequência, métodos especiais para o cálculo de autovalores e autovetores devem ser aplicados.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Validação da formulação simétrica implementada

Uma metodologia para validação do modelo numérico implementado é apresentada. Neste caso, os resultados obtidos pela formulação (u,p), (Silva e Pavanello, 2003) são usados como referência, uma vez que foram previamente validados com respeito a soluções analíticas. Os campos de pressão e deslocamento para o problema de contorno descrito na Fig. (3) para uma específica frequência são avaliados.

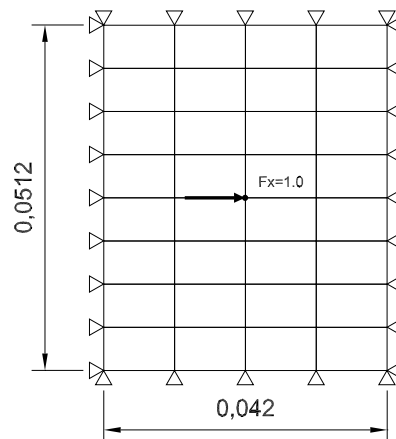


Figura 3: Domínio Poroelástico com excitação mecânica

Os parâmetros físicos do material absorvedor poroelástico utilizado na simulação do problema descrito na Fig. (3) estão na Tab. (1).

Tabela 1: Propriedades do material poroelástico utilizado nas simulações numéricas

	α_∞	$\rho_1 (kg/m^3)$	$\sigma (Ns/m^4)$	h	$N (kPa)$	ν_b	$\Lambda (m)$	$\Lambda' (m)$
Espuma	7.8	30	25000	0.90	28.6(1+i0.27)	0.4	$18,6 \cdot 10^{-3}$	$18,6 \cdot 10^{-5}$

Utilizando o programa Meflab++, os modos operacionais para o sistema poroelástico descrito na Fig. (3) na frequência de 500Hz foram determinados utilizando-se das formulações (u,p) não simétrica e (u, p, ψ) simétrica. A seguir, os resultados obtidos por ambas formulações são comparados.

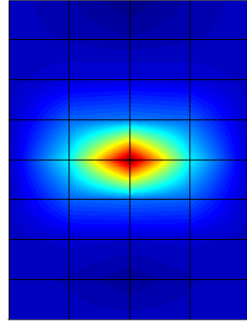


Figura 4: deslocamento x - parte real - (u, p)

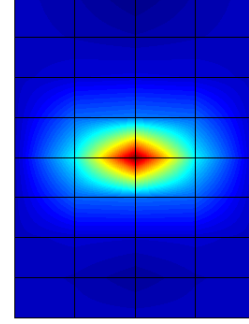


Figura 5: deslocamento x - parte real - (u, p, ψ)

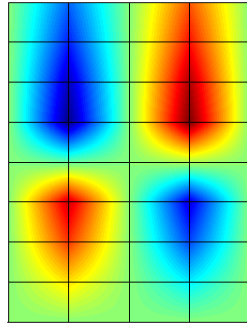


Figura 6: deslocamento y - parte real - (u, p)

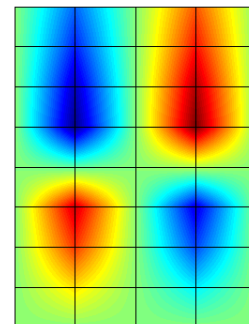


Figura 7: deslocamento y - parte real - (u, p, ψ)

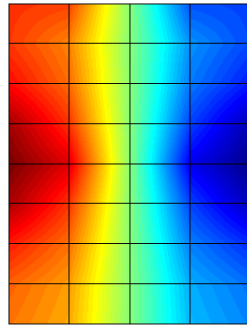


Figura 8: pressão acústica - parte real - (u, p)

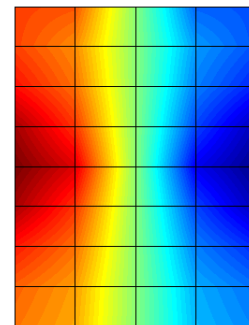


Figura 9: pressão acústica - parte real - (u, p, ψ)

Os modos operacionais obtidos por ambas formulações, para este valor específico de frequência de 500Hz, são idênticos.

4.2 Análise da resposta em frequência de uma cabine veicular

Este item refere-se à criação de um modelo simplificado de um habitáculo veicular. O modelo consiste na criação de uma cavidade acústica com condição de contorno rígidas. Primeiramente, estuda-se o modelo acústico desacoplado das equações da poroelasticidade. Em seguida um material poroelástico foi fixado no teto da cavidade acústica configurando o caso acoplado (acoplamento ar-poros).

Procura-se evidenciar para este exemplo, o grau de mudança na absorção e atenuação do sinal de resposta em frequência de pressão ao comparar-se os dois sistemas, com e sem o material absorvedor, Fig. (10).

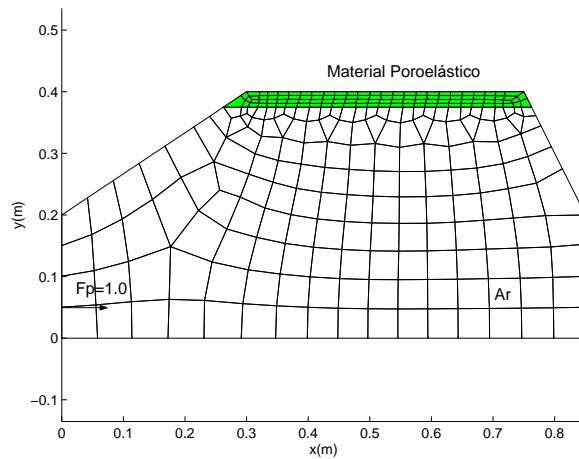


Figura 10: Malha de Elementos Finitos para a cabine veicular - presença de material absorvedor

As propriedades físicas do material utilizado nesta simulação estão descritas na Tab. (1). As respostas em frequência da pressão, para os dois casos, acoplado e desacoplado, são descritos na Fig. (11):

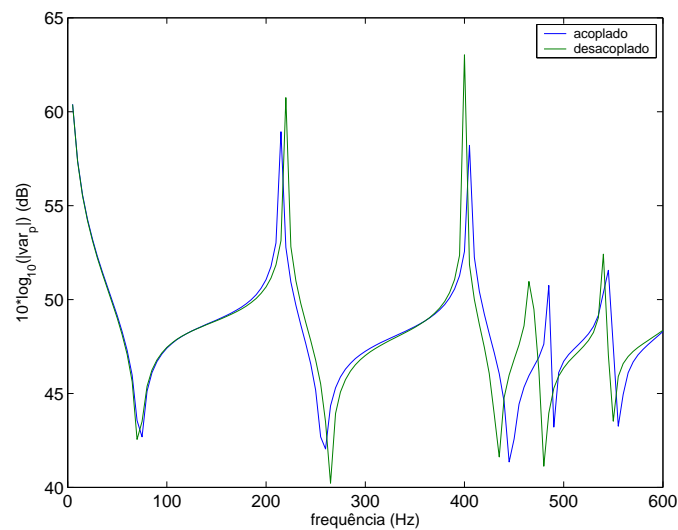


Figura 11: Curvas de resposta em frequência para a cabine veicular

Nota-se que para o problema acoplado, na faixa das baixas frequências, as amplitudes da resposta do sistema sofrem influência devido à presença do material poroelástico.

Os valores das frequências de ressonância do sistema também sofreram uma pequena variação como se nota nos resultados mostrados na Tab. (2):

Tabela 2: Comparação das frequências de ressonância da cavidade acústica - desacoplado x acoplado

	Frequências (Hz)			
Problema desacoplado	220	400	465	540
Problema acoplado	215	405	485	545

Os modos operacionais apresentaram configurações muito próximas para ambos os casos. Os modos operacionais acústicos são mostrados:

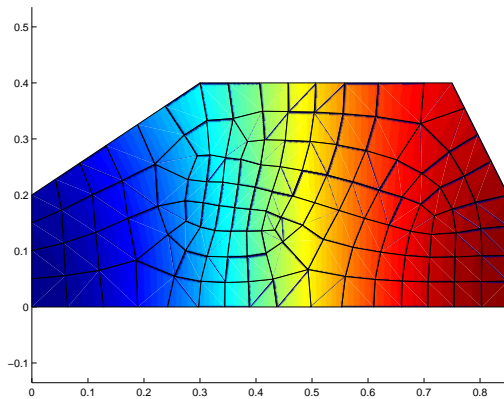


Figura 12: 1^o Modo de Pressão - desacoplado

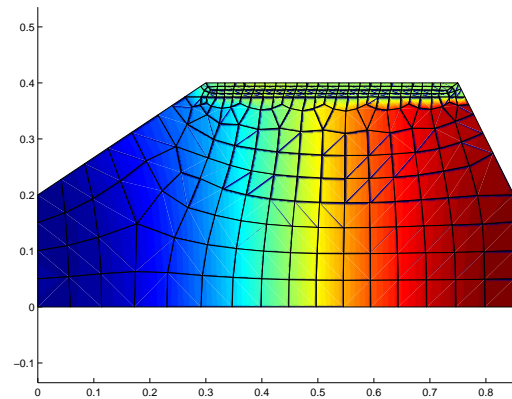


Figura 13: 1^o Modo de Pressão - acoplado

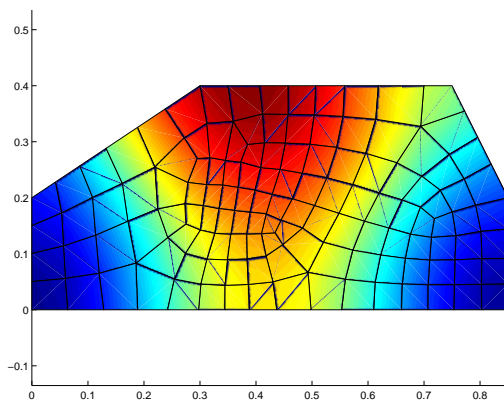


Figura 14: 2^o Modo de Pressão - desacoplado

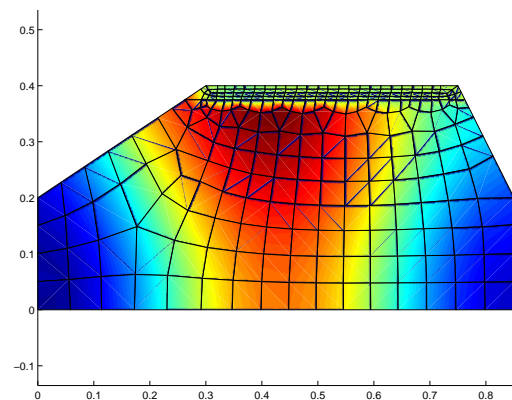


Figura 15: 2^o Modo de Pressão - acoplado

As variações obtidas nas frequências e nos modos próprios da cabine estão relacionados com o modelo de amortecimento escolhido. A variação de volume da cabine para a adição de massa e rigidez no sistema (domínio poroelástico) também contribuiu para a variação dos valores das frequências de ressonância, assim como a utilização de malhas distintas para os dois casos. Conforme mencionado, o exemplo visa mostrar as potencialidades do método numérico, sendo necessário um maior refinamento para a solução de casos práticos mais realistas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho uma formulação simétrica (u, p, ψ) foi apresentada baseando-se nas equações do modelo da poroelasticidade acoplada de Allard-Champoux.

A formulação se mostrou adaptada em uma implementação computacional de Elementos Finitos feita através do software Meflab++.

A simetria proporcionou um ganho de eficiência na solução do sistema de equações lineares, mas por outro lado faz-se necessário o aumento do número de graus de liberdade.

A presença de materiais absorvedores com propriedades poroelásticas definidas podem

propiciar um elevado grau de amortecimento ao sistema global, o que corresponde a um importante parâmetro no projeto acústico de sistemas.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fapesp, ao CNPq e à Capes pelo suporte financeiro.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

Referências

- Allard, J. -F., (1993), *Propagation of Sound in Porous Media: Modeling Sound Absorbing Materials*, Elsevier Publishing Company, New York, 573p.
- Biot, M.A., (1956), "The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid", *Journal of Acoustical Society of America*, v DE-28, pp 168-191.
- Biot, M.A., (1962), "Generalized Theory of Acoustic Propagation in Porous Dissipative Media", *Journal of Acoustical Society of America*, v DE-34, pp 1254-1264.
- Bourbié, T., Coussy O. and Zinszner B., (1987), *Acoustics of Porous Media*, Institut Français du Pétrole Publications, Paris, 240p.
- Dazel, O., Sgard, F. and Lamarque, C. -H., (2002), "An extension of Complex Modes for the resolution of Finite-Element Poroelastic Problems", *Journal of Sound and Vibration*, v DE-253(2) pp 421-445.
- Görransson, P., (1998), "A 3-D, Symmetric, Finite Element Formulation of the Biot Equations with application to acoustic wave propagation through an elastic porous medium", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v DE-41, pp 167-192.
- Johnson, D.L., Koplik, J., Dashen, R., (1987), "Theory of dynamics permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media", *Journal of Fluid Mechanics*, v DE-176, pp 379-402.
- Panneton, R. and Atalla, N., (1997), "Low-Frequency Approximations for Acoustic Porous Materials: Linerisation of the Poroelastic Eigenvalue Problem", *Transactions of the CSME*, v DE-4, pp 4001-413.
- Silva Júnior, F. I., Pavanello, R., (2003), "Numerical Analysis of the coupled poroelasticity using the Finite Element Method", *Proceedings 17th COBEM (Brazilian Congress of Mechanical Engineering)*, ABCM, FMS-32-1210-SM, pp 2813-2823.
- Zwikker, C., Kosten C. W. (1949), *Sound Absorbing Materials*, Elsevier Publishing Company, New Jersey, 350p.

STUDY OF SYMMETRIC FORMULATIONS IN THE COUPLED POROELASTICITY

Francisco Ilson da Silva Júnior¹

Renato Pavanello²

Janito Vaqueiro Ferreira³

State University of Campinas

Faculty of Mechanical Engineering

Department of Computational Mechanics

13083-970 - Campinas - SP

¹ ilson@fem.unicamp.br, ² pava@fem.unicamp.br, ³ janito@fem.unicamp.br

Abstract. *Actually, in many absorbing systems designs developed by the automobile and aeronautical industries, it is necessary the continuous decrease in the noise levels. In this context, the international standards are more severe, imposing limits for the vibro-acoustic requirements. The development of reliable design tools is necessary to generate technology with a low cost. Simulation programs are quite spread and they can be applied in absorbing system designs. In the present work, some finite element formulations are analyzed in fluid-structure coupling systems. The problem of elastic and acoustic waves propagation in the acoustic and poroelastic medias will be treated. Symmetric and non symmetric matricial equations based on the Biot classic theory and in the theory of sound propagation in poroelastic medias done by Allard-Champoux are studied. The non symmetric formulation is written in terms of the structural displacement " u " and of the acoustic pressure " p " and compared with symmetric formulations written in terms of the structural displacement " u ", acoustic pressure " p " and fluid displacement potential " ψ ". The numerical implementation is based on the finite element method and has your code in C++ language (object oriented programming). An acoustic analysis of a simplified vehicle cabin model is presented to characterize the precision and the efficiency of the symmetrical formulation.*

Keywords: Poroelasticity, symmetric formulation, C++