

EFEITO DA QUALIDADE, REFINAMENTO E DISTRIBUIÇÃO DE ELEMENTOS SOBRE A EFICÁCIA DO PROCEDIMENTO P-ADAPTATIVO EM PROBLEMAS FLUIDO-ESTRUTURA

Horacio Valadares Duarte

Departamento de Engenharia Mecânica- UFMG
Av. Antonio Carlos, 6627 - Campus Pampulha
CEP 31270-901 - Belo Horizonte, MG, Brasil

Renato Pavanello

Departamento de Mecânica Computacional - FEM - UNICAMP
C.P. 6122 - CEP 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

Resumo. Este trabalho compara diferentes discretizações do domínio do problema fluido-estrutura e seu efeito sobre o comportamento do estimador de erros. O problema resolvido empregando o Método dos Elementos Finitos na versão p , e a Formulação em Pressão utilizada para descrever o problema fluido-estrutura. O procedimento numérico foi testado usando o problema clássico placa-cavidade bidimensional. Foram empregados elementos de viga para estrutura e elementos triangulares para o domínio fluido e usadas funes de forma hierárquicas em ambos os casos. O processo p -adaptativo testado para diferentes malhas e os resultados são comparados com resultados analíticos disponíveis.

Palavras-chave: Elementos Finitos Formulação p , Interação Fluido-Estrutura, Problemas de Autopar, Estimadores de Erro.

1. INTRODUÇÃO

O emprego da formulação (u, P) em problemas fluido-estrutura resulta em uma matriz de acoplamento que torna o problema assimétrico. A formulação assimétrica em pressão e deslocamentos apresenta desvantagens do ponto de vista do desempenho computacional, por outro lado, esta formulação é uma das mais econômicas em termos de espaço de memória requerido usando apenas uma variável por nó no domínio fluido (Morand e Ohayon, 1995).

Esta característica é bastante importante para o estimador de erro que foi implementado, o estimador baseado no trabalho de Friberg (Friberg et al., 1987). O estimador de Friberg foi escolhido uma vez que o erro não é estimado localmente no elemento mas empregando a matriz global gerada pelo problema. Como as variáveis usadas para descrever o fenômeno no domínio fluido e estrutural são diferentes, e como os fenômenos descritos pelas equações são também diferentes, os estimadores de erro locais são de implementação mais difícil nos problemas fluido-estrutura.

Os procedimentos usados para descrever o comportamento do fluido com a variável deslocamento introduzem raízes espúrias e a correção quase sempre leva a ao uso de coeficientes arbitrários (Ousset I. et al., 1978; Wang X. and Bathe K.-J., 1997). Destes métodos o único que não usa coeficientes arbitrários é o trabalho publicado por Alonso (Alonso A. et al., 1999). Os modos espúrios são ocasionados pela dificuldade de se impor a condição de irrotacionalidade, no trabalho de Alonso esta condição é imposta definindo-se a variável potencial de deslocamento de forma análoga ao clássico potencial de velocidades da mecânica dos fluidos. Alonso é o único a implementar um estimador de erro h -adaptativo, no entanto, a técnica apresenta alguns problemas na interface de acoplamento, e parece ser aplicável apenas ao problema bidimensional.

O estimador usado neste trabalho foi desenvolvido e publicado por (Duarte et al., 2002)

para o problema fluido-estrutura na formulação simétrica ou em potencial de velocidades. Em outra publicação (Duarte et al., 2002) o estimador foi aplicado ao problema não simétrico. Este artigo pretende explorar o efeito de diferentes discretizações sobre o comportamento do estimador comparando os resultados com os poucos resultados analíticos publicados (Shin et al., 1983). O problema analisado será o de uma cavidade acústica bidimensional.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de acústica interna analisado neste trabalho constitui-se de uma cavidade fechada por elemento estrutural flexível, modelado como uma viga por se tratar de problema bidimensional, Figura (1-A). Para possibilitar o emprego de soluções analíticas da referência (Shin et al., 1983) foi imposta a condição de pressão nula para as outras paredes.

2.1. Matrizes Globais para o Problema Fluido-Estrutura na Formulação em Pressão

A equação dinâmica da viga considerando-se a hipótese de Euler-Bernoulli é dada por:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - A \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (1)$$

tendo como condições de contorno $w = 0$ em Γ_e^e , sendo Γ_e^e a região da fronteira onde o deslocamento w normal ao eixo da viga é nulo. Os termos E e I são respectivamente o módulo de elasticidade do material da viga e o momento de inércia em relação a linha neutra, q o carregamento, A é a área da seção transversal, ρ representa a densidade do material. A equação que descreve o problema acústico bidimensional é a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

onde P representa as oscilações de pressão em torno de ponto de equilíbrio, c é a velocidade do som no meio. Dentre outras as condições de contorno são:

$$P = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_{p=0}^f \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial n} = \rho_0 \frac{\partial \dot{u}_n}{\partial t} \quad \text{em} \quad \Gamma_{pe}^f \quad (3)$$

A primeira equação representa a condição de pressão nula $\Gamma_{p=0}^f$. A segunda condição é a equação de conservação de momento linear normal parede, que representa a condição de acoplamento entre parede elástica e fluido quando $\dot{u}_n = \dot{w}_n$ onde w é o deslocamento normal a viga.

Aplicando o procedimento de elementos finitos e feita a aproximação com o emprego das funções de forma convencionais e hierárquicas, para maiores detalhes (Duarte H. V., 2003), o sistema acima pode ser escrito na forma matricial já na configuração típica do problema de autopar (Morand e Ohayon, 1995):

$$\begin{bmatrix} [K_e] & -[L] \\ 0 & [H_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_e] & 0 \\ \rho_f [L]^T & \frac{1}{c^2} [E_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Nas expressões acima $[K_e]$ e $[M_e]$ são as matrizes de rigidez e de massa para a viga, $[H_f]$ e $[E_f]$ são respectivamente as matrizes volumétrica e de compressibilidade para o fluido e $[L]$ a matriz de acoplamento. As funções de forma empregadas para viga foram publicadas na referência (Duarte H. V., 2003), as funções usadas para os elementos fluidos foram definidas por Peano (Peano A., 1976).

malha	Nº nós fluido	Nº elementos fluido	α_{med} fluido	h_{med} fluido	Nº elementos estrutura
<i>F108</i>	75	108	0,910	0,606	16
<i>F272</i>	161	272	0,949	0,402	8
<i>F261</i>	159	261	0,955	0,407	14

Tabela 1: CARACTERÍSTICAS DAS MALHAS EMPREGADAS NO PROBLEMA FLUIDO-ESTRUTURA.

2.2. Estimador de Erro de Friberg Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura em formulação de Pressão ou Não Simétrica

As expressões para o estimador de erro foram deduzidas a partir da formulação em potencial de velocidade (Duarte et al., 2002), e são dadas pela Equação (5) para o domínio estrutural e Equação (6) para o fluido. O estimador é baseado em propriedades das funções hierárquicas no conceito usado por Peano (Peano A., 1976).

$$\eta_{i,j}^e = \frac{\left(K_{e(n+1,n)} \psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{(n+1,q)} \psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n)} \psi_w \right)^2}{k_i \left(K_{e(n+1,n+1)} - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n+1)} \right)} \quad (5)$$

$$\eta_{i,j}^f = \frac{\left(-\frac{1}{\rho_f} H_{f(q+1,q)} \psi_\theta - \lambda_i^{(k)} \left[L_{(n,q+1)} \right]^T \psi_w + \frac{(\lambda_i^{(k)})^2}{\rho_f c^2} E_{f(q+1,q)} \psi_\theta \right)^2}{k_i \left(\frac{1}{\rho_f} \left[H_{f(q+1,q+1)} - \left(\frac{\lambda_i^{(k)}}{c} \right)^2 E_{f(q+1,q+1)} \right] \right)} \quad (6)$$

Nas expressões acima $\eta_{i,j}$ é o erro relativo associado à i -ésima frequência, estimado para o elemento j . Portanto, o erro estimado da i -ésima frequência corresponderá a soma dos erros estimados para esta frequência para todos os graus de liberdade de todos os elementos fluidos e estruturais. Os índices n e q simbolizam as dimensões das matrizes da estrutura e do fluido respectivamente e $n+q = k$. Os termos ψ_w e ψ_θ referem-se aos componentes dos autovetores que correspondem às matrizes da estrutura e do fluido. Estas equações são expressas em função das submatrizes resultantes da discretização do domínio para as variáveis pressão e deslocamento e foram usadas com bons resultados no problema não simétrico (Duarte et al., 2002).

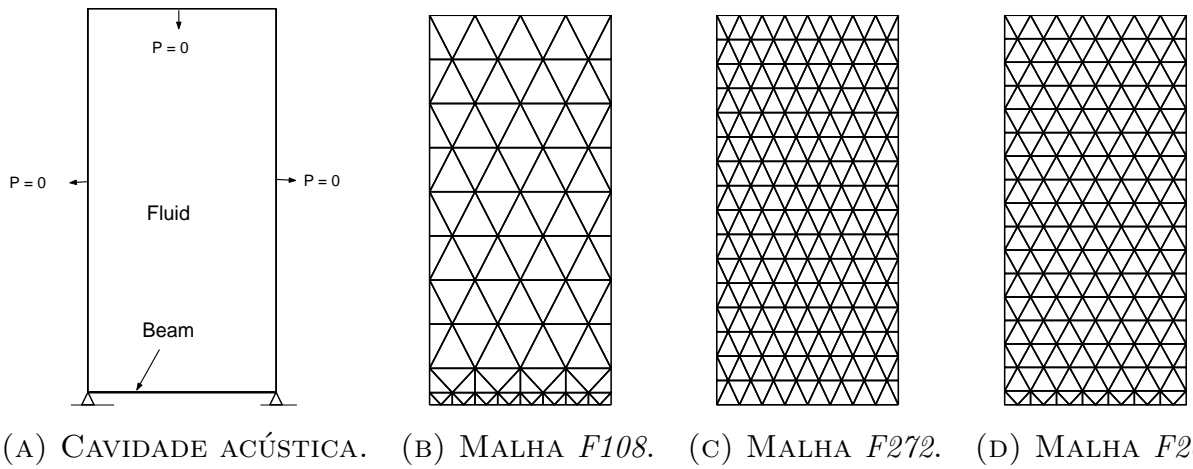


Figura 1: ARRANJO DA CAVIDADE ACÚSTICA E MALHAS EMPREGADAS NA DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO FLUIDO.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS e ANÁLISE

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos da aplicação do estimador de erro desenvolvido para o problema fluido-estrutura. O problema teste foi publicado por Y. S. Shin (Shin et al., 1983) e foi escolhido por apresentar resultados analíticos para as frequências associadas aos modos estruturais.

Os resultados numéricos referem-se à configuração apresentada na Figura (1-A). O arranjo é basicamente uma placa fechando a cavidade retangular. O fluido está confinado no interior da cavidade, a interface do fluido é exclusivamente com a placa, a condição de contorno nas outras três paredes é de pressão nula. Para o problema bidimensional que será analisado, a placa é modelada como uma viga, e neste problema a viga é bi-apoiada com rotação livre nos apoios. O problema analisado empregou os seguintes valores: comprimento da cavidade $L_T = 3,048\text{ m}$, altura $H = 6,096\text{ m}$. Para a viga foi usado módulo de elasticidade $E = 2,068 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$, momento de inércia em relação a linha neutra $I = 0,1675 \times 10^{-4}\text{ m}^4$, área da seção transversal $A = 0,005058\text{ m}^2$, densidade $\rho_e = 7830,8\text{ Kg/m}^3$. O fluido ocupando o espaço interno foi caracterizado pela densidade $\rho_0 = 999,21\text{ Kg/m}^3$ e pela velocidade da perturbação no meio $c = 1524\text{ m/s}$.

Foram empregadas para discretizar o domínio fluido as malhas *F108* mostrada na Figura (1-B) acoplada com a viga discretizada por 16 elementos, a malha *F272* vista na Figura (1-C) acoplada à viga discretizada por 8 elementos e na Figura (1-D) está a malha *F261* acoplada a viga com 14 elementos. Na Tabela (1) estão resumidas as principais características destas malhas. Nessa tabela h_{med} é a dimensão característica da malha obtida da média das arestas

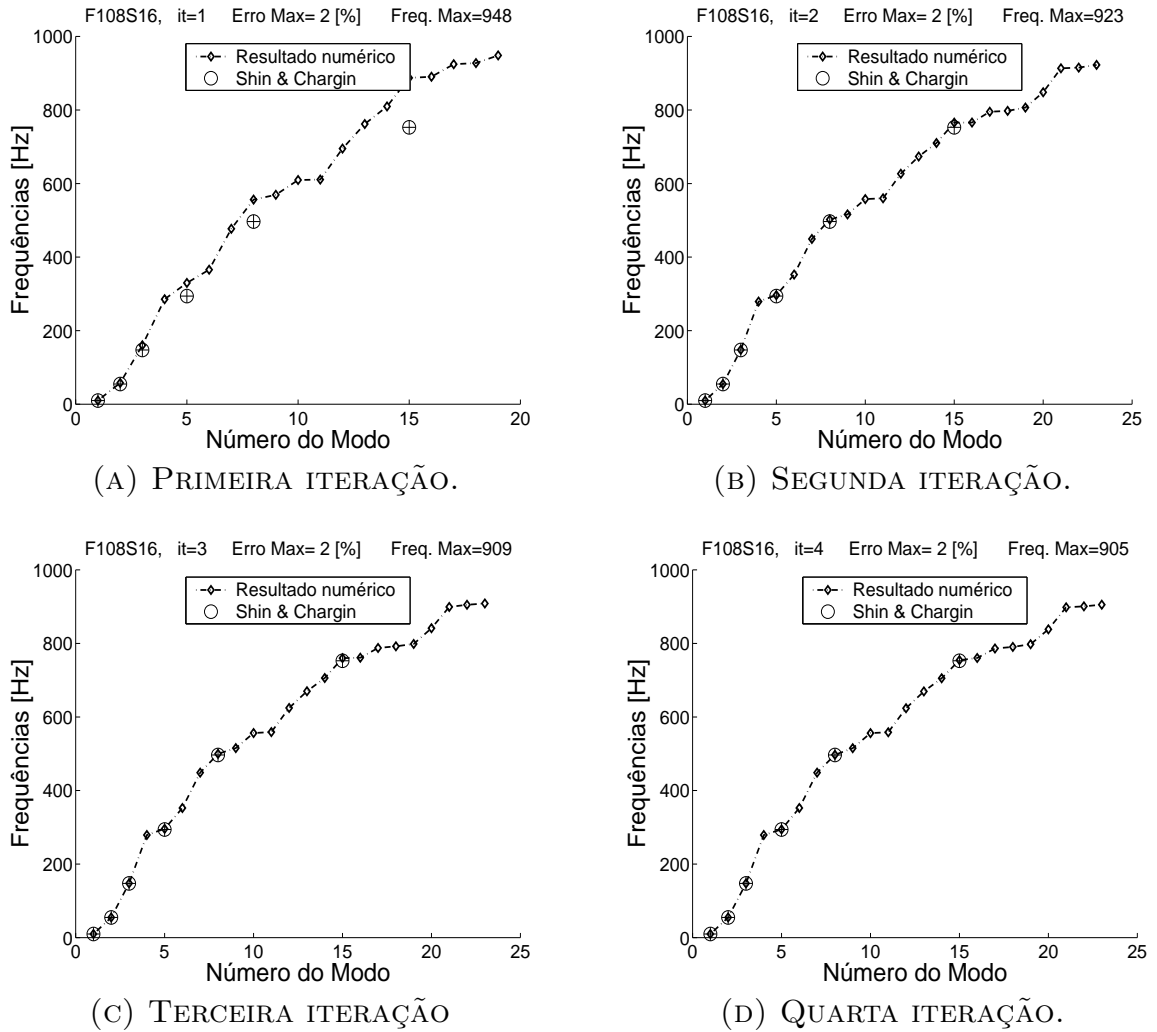


Figura 2: EVOLUÇÃO DAS FREQUÊNCIAS CALCULADAS E TEÓRICAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO PARA MALHA *F108*. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.

dos elementos triangulares. O coeficiente de distorção da malha α_{med} é dado pela média do coeficiente de distorção dos elementos definido como (Lo S. H., 1991):

$$\alpha_i = \frac{4\sqrt{3}A_i}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \quad (7)$$

sendo l_1 , l_2 e l_3 os lados e A_i a área do elemento triangular.

As frequências analíticas usadas como referência são dadas pela expressão (Shin et al., 1983):

$$\omega_{n_e}^2 \left(\rho_e A + e_e \frac{\rho_0 \tanh(H\beta_n)}{\beta_n} \right) = EI \left(\frac{n_e \pi}{L} \right)^4 \quad (8)$$

sendo:

$$\beta^2 = \left| \frac{\omega_{n_e}^2}{c^2} - \left(\frac{n_e \pi}{L} \right)^2 \right| \quad (9)$$

nestas expressões L é o comprimento da interface fluido-estrutura, H a altura do domínio fluido, c a velocidade acústica do fluido, ρ_e e ρ_0 as densidades do material da estrutura e do fluido respectivamente. A é a área da seção transversal, E o módulo de elasticidade, e I o momento de inércia, todos referentes à viga e e_e é a profundidade da placa em contato com o fluido. Neste problema foi usada a profundidade $e_e = 1,0 \text{ m}$. A frequência ω_{n_e} é chamada predominante estrutural do problema acoplado, e $n_e = 1, 2, 3, 4, \dots \infty$. Na realidade ocorrerão os modos

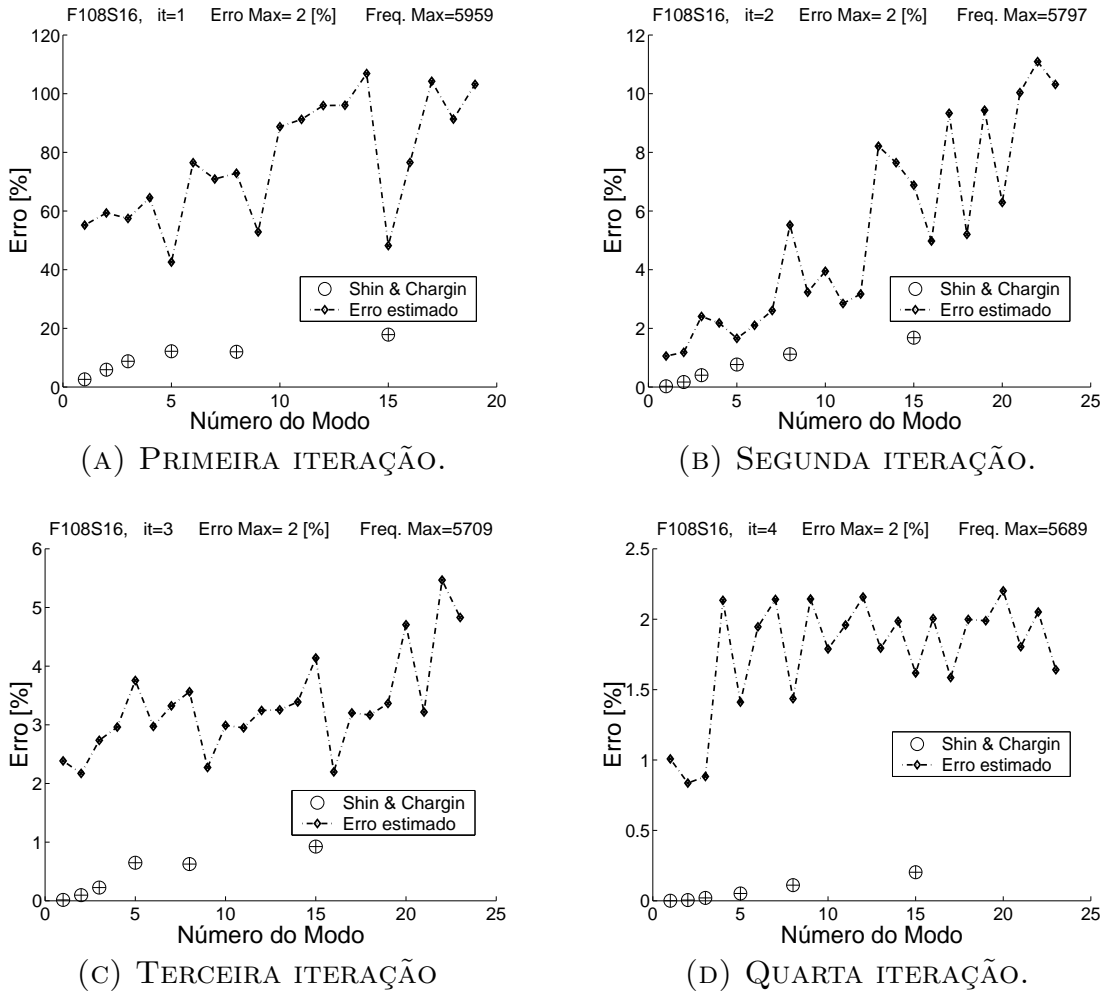


Figura 3: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS ASSOCIADOS ÀS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO. MALHA *F108*.

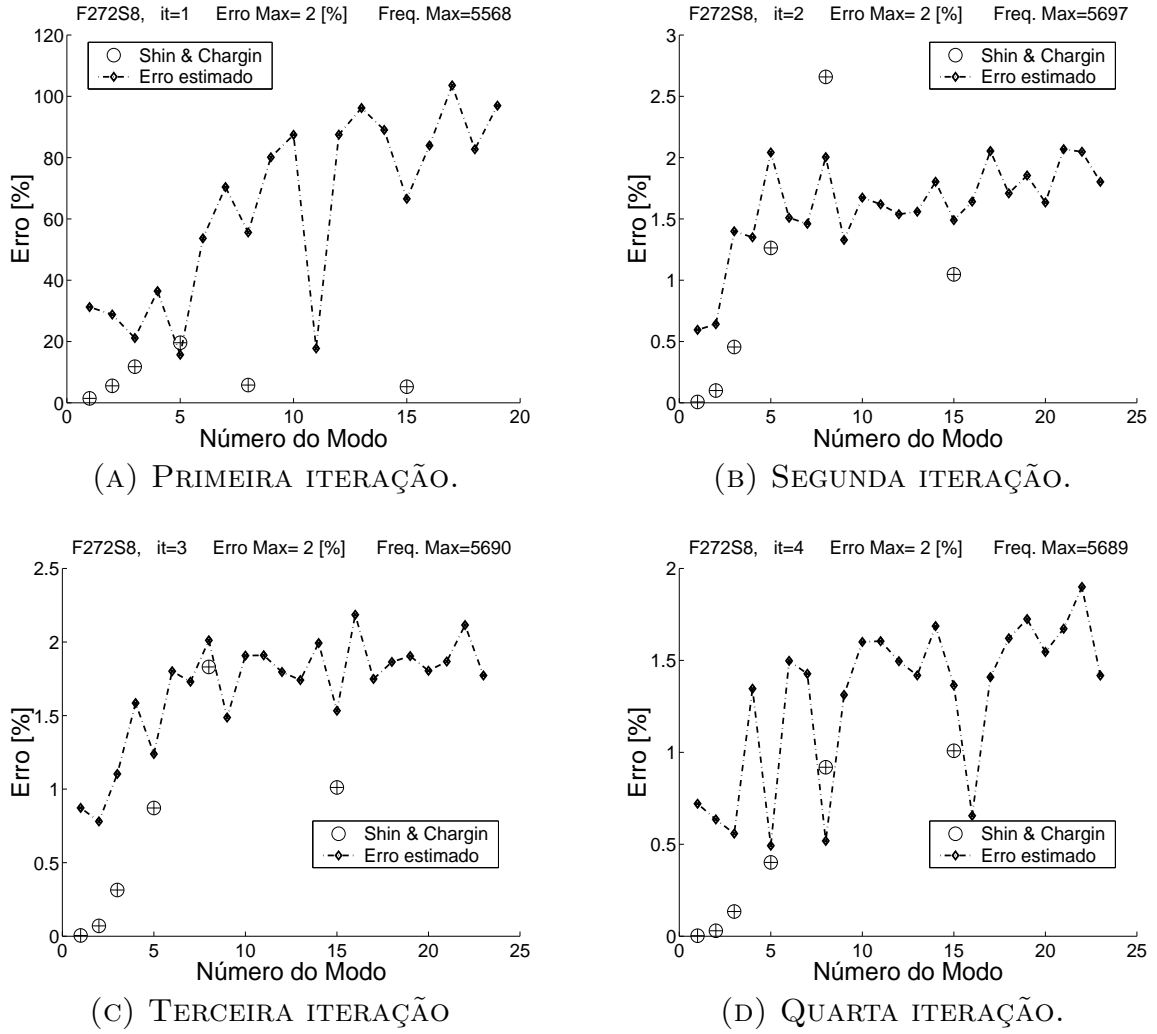


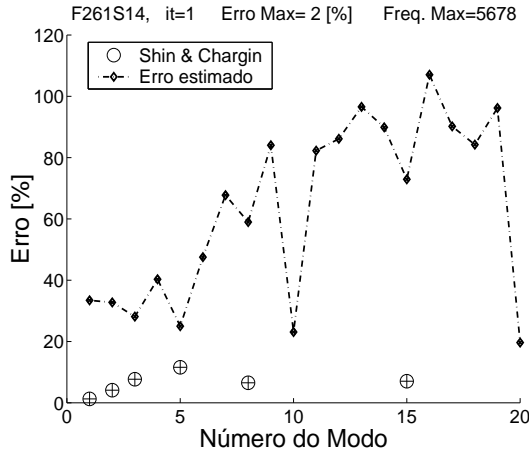
Figura 4: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS ASSOCIADOS ÀS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO. MALHA *F272*.

predominante fluido e modos fluido-estrutura, mas para eles não há uma expressão analítica. Das Equações (8) e (9) e para os dados do problema, as seis primeiras frequências predominante estrutural são: $\omega_1 = 9, 9$, $\omega_2 = 54, 8$, $\omega_3 = 147, 4$, $\omega_4 = 294, 1$, $\omega_5 = 496, 7$, $\omega_6 = 752, 9$, valores expressos em Hertz.

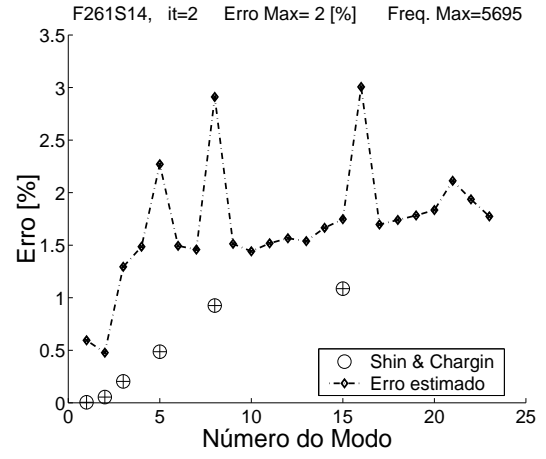
No processo p -adaptativo cujos resultados estão plotados nos gráficos apresentados a seguir empregou-se o estimador dado pelas Equações (5) e (6). O estimador foi aplicado apenas à formulação não simétrica. Nestes casos o limite superior de frequência foi de 955 *Hertz* e o erro máximo prescrito de 2,0%. Será denominado erro real ou erro calculado o erro obtido da diferença entre o resultado numérico e o resultado analítico e erro estimado será o erro obtido a partir das Equações (5) e (6).

O processo adaptativo para malha *F108*, apresentado nas Figuras (2) e (3), foi interrompido antes de alcançar o erro prescrito. A Figura (3) mostra que os erros calculados em relação aos modos estruturais, ou predominantemente estruturais, são muito inferiores aos estimados, mas aparentemente o erro associado aos modos fluidos não permitiu a convergência para o valor de erro prescrito. Possivelmente, este comportamento deve-se à pouca resolução da malha no domínio fluido.

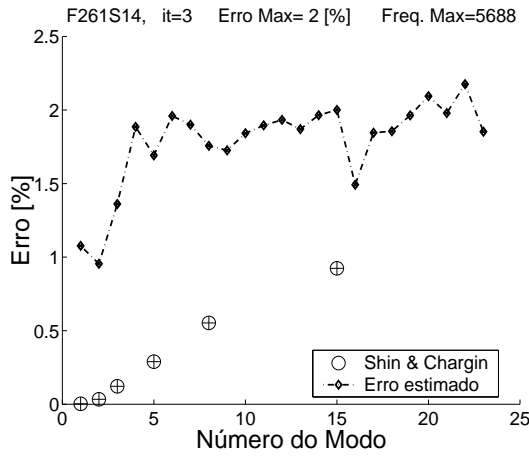
O processo adaptativo para malha *F272* é apresentado nas Figuras (4) e (6). A malha *F272* é uma malha muito mais refinada e menos distorcida do que a malha *F108*, ver Tabela (1), e além de permitir que o erro fosse mantido abaixo do erro prescrito em toda a faixa de interesse ao final do processo, possibilitou também que o erro estimado fosse bem próximo ao erro real ou calculado. E este é um fator determinante na confiabilidade do processo adaptativo, o erro estimado deve ser sempre superior ao real para garantir que este seja inferior ao valor prescrito.



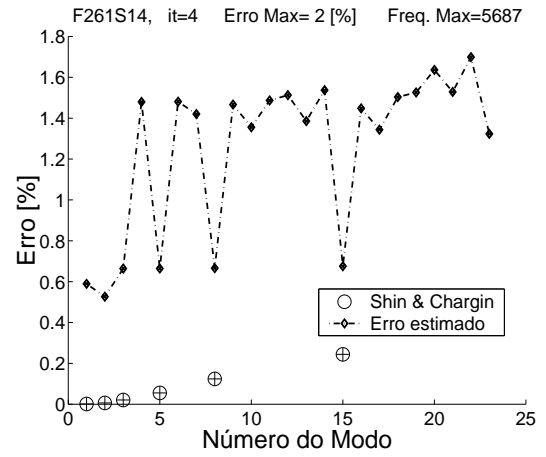
(A) PRIMEIRA ITERAÇÃO.



(B) SEGUNDA ITERAÇÃO.



(C) TERCEIRA ITERAÇÃO.



(D) QUARTA ITERAÇÃO.

Figura 5: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS ASSOCIADOS ÀS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO. MALHA *F261*.

Mas para que o estimador não aumente muito a ordem das funções de interpolação durante o processo adaptativo é necessário que os erros estimados e reais estejam próximos.

A Figura (4) indica que o erro estimado durante o processo p -adaptativo com esta discretização era inferior ao erro real. Este fato aponta para uma perda de qualidade dos resultados já na segunda iteração, quando o modo 8, ou o quinto modo estrutural dominante, e o modo 15, ou sexto modo estrutural dominante, apresentavam erros reais bem superiores ao estimado. Mas como o erro prescrito não havia sido alcançado, a continuidade do processo adaptativo levou esses modos predominantemente estruturais a ter seu erro corretamente indicado. Mas se o erro prescrito fosse um pouco maior, o processo teria sido interrompido sem que os erros reais estivessem abaixo do valor estabelecido. Este comportamento é bem diferente do comportamento da malha *F108*, onde o erro estimado é sempre maior que o erro real.

A malha *F272* é mais refinada e apresenta um grau de distorção menor do que o apresentado pela malha *F108*, mas esta apresenta refinamento maior na interface com a viga. Os modos de referência também são modos estruturais predominantes. Como os elementos da viga para os dois casos não tiveram graus hierárquicos atribuídos pelo estimador, é de se supor que a maior confiabilidade do estimador usando a malha *F108* deve-se à maior definição do domínio fluido próximo da interface com o elemento estrutural. O maior número de cruzamento de modos estruturais que ocorreu durante o processo iterativo da malha *F272* reforça a hipótese. O cruzamento de modos deve ser entendido como a mudança na ordem correta dos modos devido aos erros nas frequências.

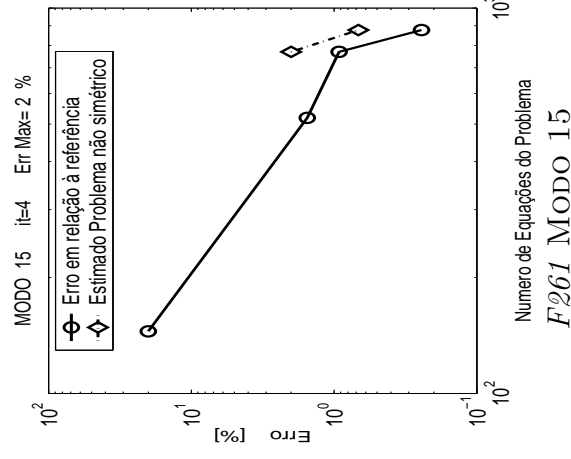
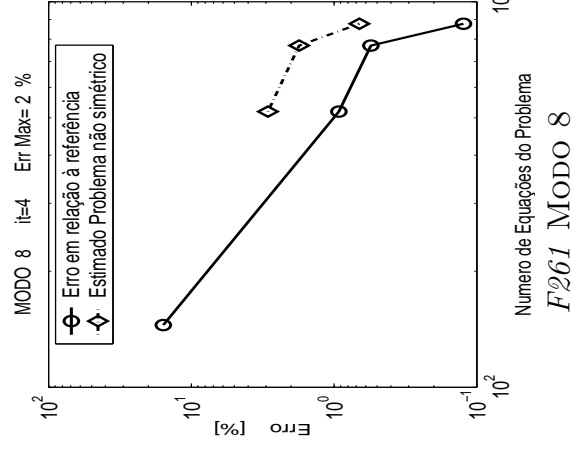
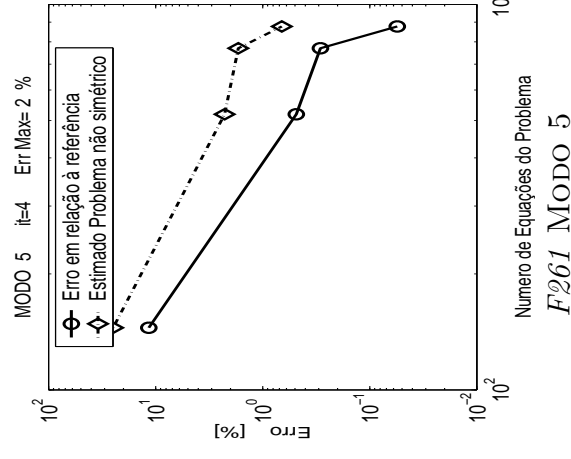
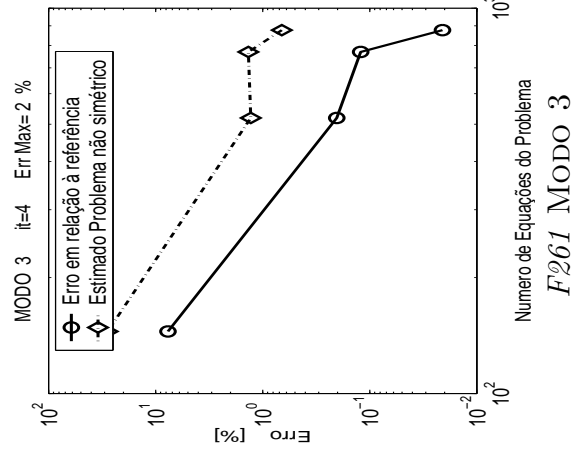
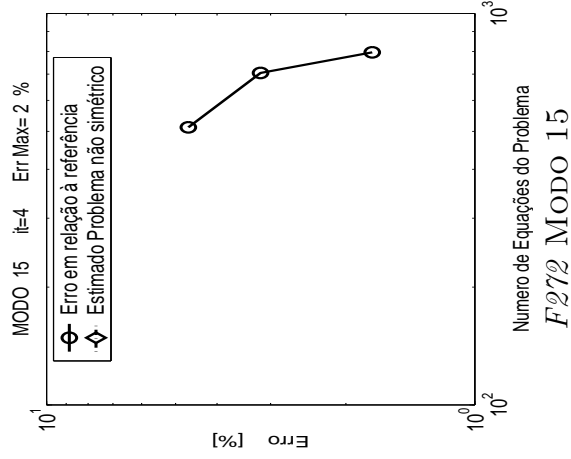
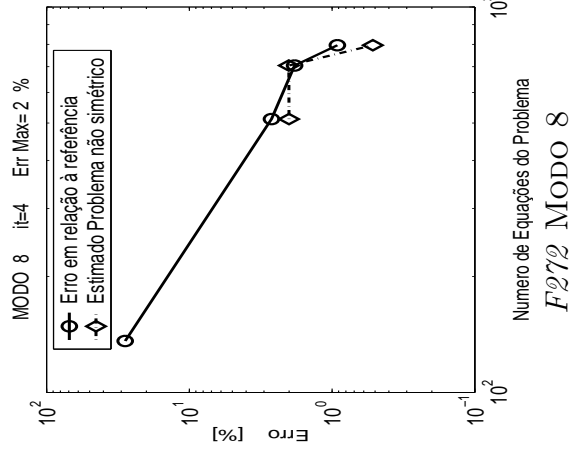
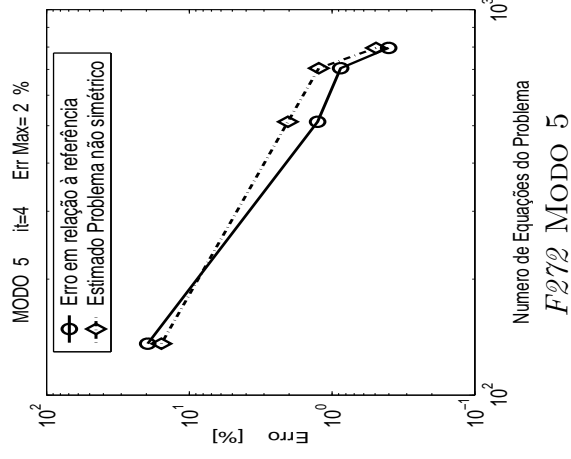
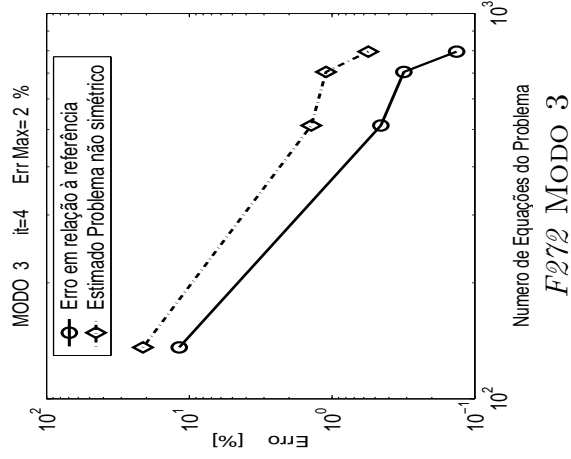


Figura 6: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM RELAÇÃO AO GRAU DE LIBERDADE DO SISTEMA. MODOS RELATIVOS A MALHA *F272* GRÁFICOS SUPERIORES E PARA A MALHA *F261* FIGURAS INFERIORES. MODOS PREDOMINANTE E ESTRUTURAIS.

Estes resultados apontam para a possibilidade de discretizações intermediárias com desempenho superior às malhas empregadas. A malha *F261* foi incluída como um exemplo desta possibilidade, é mais refinada no domínio fluido em relação à malha *F108* e mais refinada na interface em relação à malha *F272*. A Figura (5) mostra a evolução do erro das frequências durante o processo iterativo para a malha *F261*. Como esperado, os erros estimados mantiveram-se acima dos erros reais ou calculados durante o processo adaptativo e o erro real ficou abaixo do valor do erro prescrito ao final do processo. No entanto, o erro calculado ficou bem abaixo do erro estimado pelo menos para os modos estruturais predominantes.

Para as malhas *F272* e *F261* estão apresentadas na Figura (6) a evolução dos erros estimados e calculados em relação à solução analítica. Estes gráficos foram traçados após o pós-processamento, identificação e ordenamento correto dos modos 3, 5, 8 e 15. Para este conjunto de modos predominante estruturais em ambas as malhas foi observada a ocorrência de modos cruzados no processo de convergência. Nestes casos, foram plotados apenas os erros calculados para o modo, o erro estimado neste caso não foi incluído por não referir-se ao modo físico, portanto, não apresentando significado sob esta ótica.

Uma outra diferença entre as discretizações mais refinadas na interface com a estrutura, malhas *F108* e *F261*, e a malha com refinamento uniforme *F272* está no correto ordenamento dos modos. Para a malha *F108*, com 16 elementos na interface com a viga, não houve cruzamento de modos durante o processo de convergência do 15º modo. A malha *F261*, com 14 elementos na interface, apresenta cruzamento de modos para o 15º modo nas duas primeiras iterações. Para a malha *F272*, com 8 elementos na interface, o 15º modo não fica corretamente ordenado ao final do processo iterativo, Figura (6).

Esta mudança no correto ordenamento dos modos, ou cruzamento de modos, ocorre com modos muito próximos cuja diferença no valor das frequências está abaixo do erro máximo prescrito. Para as malhas *F108* e *F261*, o erro real para as frequências dos modos predominantes estruturais são muito menores que os erros dos modos fluidos, ver Figuras (3) e Figura (5), então o ordenamento correto dos modos predominante estruturais é mais rápido.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho mostra que o estimador para problemas de interação fluido-estrutura na formulação não simétrica em deslocamento e pressão apresenta bons resultados. A precisão e a convergência dos resultados numéricos apresentados são globalmente satisfatórias. Os resultados apontam para a necessidade da implementação de uma versão hp adaptativa uma vez que o estimador mostra-se sensível à discretização do domínio.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES, FAPESP e FAPEMIG pelo apoio à realização deste trabalho.

6. REFERÊNCIAS

- Alonso A., Dello Russo A. and Vampa V., 1999, "A posteriori Error Estimates in Finite Element Solution of Structure Vibration Problems with Applications to Acoustical Fluid-Structure Analysis", Computational Mechanics, Vol. 23, pp. 231-239.
- Duarte H. V., Pavanello R., 2002, "Estimador de Erro para Método dos Elementos Finitos Hierárquicos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura na Formulação Simétrica", Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, João Pessoa.
- Duarte H. V., Pavanello R., 2002, "Estimador de Erro para Método dos Elementos Finitos Hierárquicos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura na Formulação Não Simétrica", Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, João Pessoa.

- Duarte H. V., 2003, "Estimador de Erro para a Formulação p do Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura", Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, Tese de Doutorado.
- Friberg, O., Mller P., Makovička, D., Wiberg NE., 1987, "An Adaptive Procedure for Eigenvalue Problems Using The Hierarchical Finite Element Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pp. 319-335.
- Handi M. A., Ousset I. and Verchery G., 1978, "A Displacement Method for the Analysis of Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 13, pp 139-150.
- Lo S. H., 1991, "Volume Discretization into Tetrahedra-I. Verification and Orientation of Boundary Surfaces", Computers & Structures, Vol. 39, No. 5, pp 493-500.
- Morand Henri J. P., Ohayon R., 1995, "Fluid-structure Interaction, Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, West Sussex, England.
- Peano A., 1976, Hierarchies of Conforming Finite Elements for Plane Elasticity and Plate Bending & Comp. & Maths with Appls., vol. 2, pp. 211-224.
- Shin Y. S., Chargin M. K., 1983, "Acoustic Responses of Coupled Fluid-Structure System by Acoustic-Strutural Analogy", Shock Vibration Bulletin, vol. 53, No. 2, pp. 11-21.
- Wang X. and Bathe K.-J., 1997, "Displacement/Pressure Based Mixed Finite Element Formulations for Acoustic Fluid-Structure Interaction Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, pp 2001-2017.

7. DIREITOS AUTORIAIS

Os autores são detentores dos direitos autorais deste trabalho e os únicos responsáveis pelo seu conteúdo.

THE EFFECT OF REFINEMENT QUALITY AND DISTRIBUTION OF ELEMENTS ON FLUID-STRUCTURE FEM p -ADAPTIVE PROCESS.

Horacio Valadares Duarte

Departamento de Engenharia Mecânica- UFMG
Av. Antonio Carlos, 6627 - Campus Pampulha
CEP 31270-901 - Belo Horizonte, MG, Brasil

Renato Pavanello

Departamento de Mecânica Computacional - FEM - UNICAMP
C.P. 6122 - CEP 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

Abstract. *This paper presents the fluid-structure discretization effect on the error estimator behaviour. The p -adaptive process is tested using the Friberg's estimator for p -version of the Finite Element Method. The test problem is a internal acoustic cavity closed by a elastic beam. The numerical results of the fluid-structure problem in the unsymmetrical formulation (u, p) are compared with analytical solution for different meshes. The two-dimensional fluid-structure problem use hierarchical shape functions for beam and triangular fluid elements.*

Keywords: *Finite Element Method, Fluid-Structure Interaction, Eigenvalues problems, Error Estimator, p -approximation.*