

# CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA INTEGRADA DE ELASTÔMEROS POR DERIVADAS GENERALIZADAS

**Eduardo Márcio de Oliveira Lopes**

UFSC, Caixa Postal 476, Florianópolis, SC, Brasil, 88040-900, lopes@pisa.ufsc.br

**Carlos Alberto Bavastri**

CEFET/PR, Av. Sete de Setembro, 3165, Curitiba, PR, Brasil, 80230-901, bavastri@cefetpr.br

**João Morais da Silva Neto**

UFSC, Caixa Postal 476, Florianópolis, SC, Brasil, 88040-900, joaoneto@emc.ufsc.br

**José João de Espíndola**

UFSC, Caixa Postal 476, Florianópolis, SC, Brasil, 88040-900, espindol@mbox1.ufsc.br

**Resumo.** *Os materiais viscoelásticos, particularmente os elastômeros, são largamente utilizados no controle passivo de vibrações e ruídos acústicos. Projetos de controle eficazes demandam o conhecimento preciso do comportamento, ou caracterização, desses materiais, em especial, de suas propriedades dinâmicas, quais sejam, o módulo de elasticidade e o correspondente fator de perda. Essas propriedades são dependentes da frequência e da temperatura. A modelagem matemática de materiais viscoelásticos através do uso de derivadas generalizadas tem se revelado como sendo extremamente adequada. Recentemente, uma nova abordagem para a caracterização de materiais viscoelásticos, via derivadas generalizadas, foi introduzida. Nesse artigo, aquela abordagem é aprofundada de modo especial. Mostra-se que, com a modelagem proposta, as várias funções transmissibilidade, obtidas nas várias temperaturas de ensaio, podem ser utilizadas de forma simultânea para a caracterização integrada do material de interesse. Resultados com borracha butílica e silicone são apresentados e discutidos. As características originais do procedimento em tela, bem como a qualidade de seus resultados, são destacadas.*

**Palavras-chave:** *cálculo fracional, controle de vibrações, materiais viscoelásticos.*

## 1. INTRODUÇÃO

Os materiais viscoelásticos, particularmente os elastômeros, são largamente utilizados no controle passivo de vibrações e ruídos acústicos, em aplicações que vão das mais singelas às mais sensíveis. Essas aplicações incluem, dentre outras, equipamentos de laboratório, eletrodomésticos, motores, máquinas em geral, tubulações e componentes aeroespaciais, automotivos e navais.

Projetos de controle eficazes demandam o conhecimento preciso do comportamento, ou caracterização, desses materiais, em especial, de suas propriedades dinâmicas, a saber, o módulo de elasticidade e o correspondente fator de perda. Essas propriedades são dependentes da frequência e da temperatura, dependência essa que, em faixas de grande interesse, é bastante pronunciada.

A modelagem matemática de materiais viscoelásticos através do uso de derivadas generalizadas tem se revelado, ao longo das últimas duas décadas, como extremamente adequada (Bagley e Torvik, 1986; Padovan e Guo, 1988; Pritz, 1998). Por essa modelagem, as relações entre tensão e deformação são expressas por intermédio de derivadas de ordem não inteira, denominadas derivadas fracionárias, ou generalizadas. Dessa forma, com apenas cinco parâmetros, ou mesmo

quatro, é possível se representar um certo material, em oposição aos inúmeros parâmetros requeridos, quando derivadas de ordem inteira são utilizadas naquelas relações.

Espíndola et al (2003) introduziram, recentemente, uma nova abordagem para a caracterização de materiais viscoelásticos, via derivadas generalizadas. Naquela abordagem, descrita adiante, um corpo de prova viscoelástico simples e sua função transmissibilidade são utilizados na identificação das propriedades dinâmicas, em amplas faixas de frequência e temperatura, através do uso de câmara de temperatura controlada.

Nesse artigo, aquela abordagem é aprofundada de modo especial. Mostra-se que, com a modelagem proposta, as várias funções transmissibilidade, obtidas nas várias temperaturas de ensaio, podem ser utilizadas de forma simultânea para a caracterização integrada do material de interesse. Classicamente, todas as abordagens existentes processam as informações obtidas nas várias temperaturas isoladamente para, numa segunda etapa, reuni-las e gerar uma representação completa (Nashif et al, 1985; Oyadiji e Tomlinson, 1991).

## 2. CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA CLÁSSICA

Uma forma estabelecida de se descrever o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos é a representação por módulos complexos. Cada módulo complexo desempenha um papel análogo ao seu correspondente da elasticidade clássica. Contudo, ele não só responde pelas características elásticas (parte real) como também pelas dissipativas (parte imaginária).

Assim, o módulo complexo de cisalhamento  $\bar{G}$  de um certo material pode ser expresso por:

$$\bar{G} = G_R + iG_I \quad (1)$$

onde  $G_R$  é o módulo real de cisalhamento e  $G_I$  o módulo imaginário de cisalhamento.

Definindo-se o fator de perda ao cisalhamento  $\eta_G$  como:

$$\eta_G = G_I / G_R \quad (2)$$

pode-se reescrever a Eq. (1) da seguinte forma:

$$\bar{G} = G_R (1 + i\eta_G) \quad (3)$$

Como os materiais viscoelásticos apresentam dependência tanto da frequência quanto da temperatura, é apropriado indicar que:

$$\bar{G}(\omega, T) = G_R(\omega, T) [1 + i\eta_G(\omega, T)] \quad (4)$$

onde  $\omega$  representa frequência e  $T$  temperatura.

O módulo real de cisalhamento e o correspondente fator de perda são referenciados como propriedades dinâmicas do material em questão.

Face ao exposto acima, decorre que o conhecimento cabal do comportamento dinâmico de um certo material viscoelástico só pode ser obtido após esse ser ensaiado ao longo de amplas faixas de frequência e temperatura. Via de regra, o que resulta dos diversos procedimentos experimentais existentes é um conjunto de curvas, em uma banda de frequência característica do procedimento empregado, estando cada curva associada a uma temperatura de ensaio, como ilustrado na Fig. (1).

Para diversos materiais de interesse, a chave para se obter uma caracterização dinâmica ampla, a partir de dados experimentais limitados, é o assim chamado princípio de superposição frequência-temperatura (Ferry, 1980; Nashif et al, 1985). Partindo da observação de que os efeitos de frequência e temperatura em materiais viscoelásticos são qualitativa e reciprocamente equivalentes,

esse princípio estabelece que as diversas curvas de propriedades dinâmicas podem ser superpostas, em uma temperatura de referência qualquer, por meio de deslocamentos em frequência apropriados, formando, assim, duas curvas mestre únicas, uma para cada propriedade.

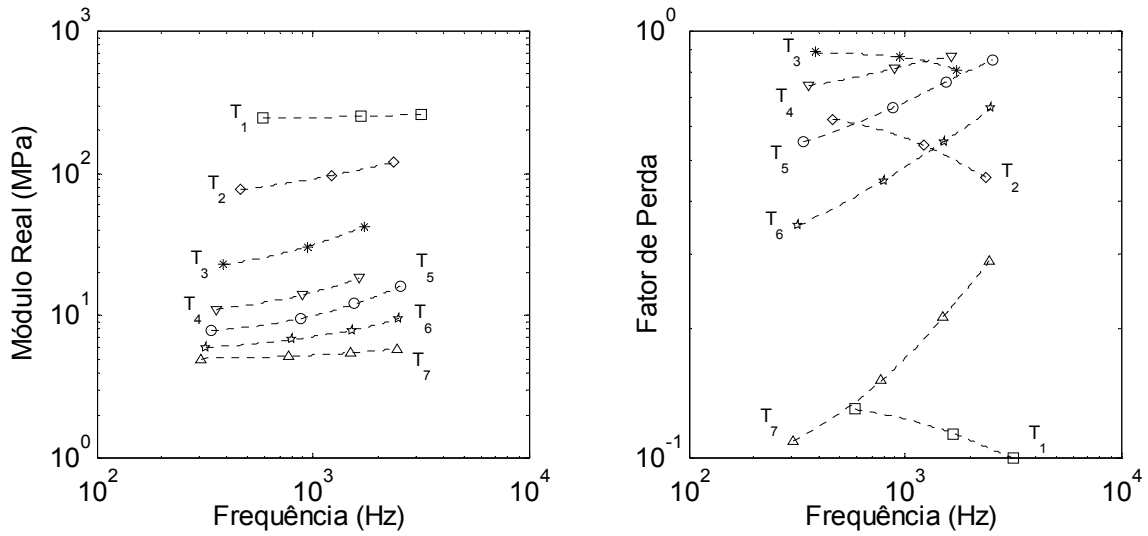


Figura 1. Gráficos de propriedades dinâmicas medidas: (a) módulo real (b) fator de perda (fontes: Nashif et al, 1985; Espíndola, 1990)

Matematicamente, tem-se que:

$$G_0(\omega_r) = (T_0 \rho_0 / T \rho) G(\omega, T) \quad (5)$$

$$(\eta_G)_0(\omega_r) = \eta_G(\omega, T) \quad (6)$$

onde  $\omega_r (= \alpha_T(T)\omega)$  é a frequência reduzida,  $\alpha_T$  é o fator de deslocamento (cujos valores são  $0 < \alpha_T < 1$ , para  $T > T_0$ ,  $\alpha_T = 1$ , para  $T = T_0$ , e  $\alpha_T > 1$ , para  $T < T_0$ ),  $T_0$  é a temperatura de referência (em escala absoluta),  $\rho$  é a densidade e  $\rho_0$  é a densidade à temperatura de referência.

As expressões acima estabelecem que, exceto por um fator ( $T_0 \rho_0 / T \rho$ ) para o módulo de cisalhamento (via de regra, desprezável), as propriedades dinâmicas obtidas a uma frequência  $\omega$  e temperatura  $T$  são iguais às propriedades dinâmicas a uma frequência composta  $\omega_r$  e a uma temperatura  $T_0$ . Embora a temperatura de referência seja arbitrária, sua escolha, para um certo conjunto de dados experimentais, terá influência na qualidade da representação final obtida.

A determinação do fator de deslocamento  $\alpha_T$  é de crucial importância para o processo de consolidação das curvas. Tipicamente, o que se faz é estimar os valores que fazem com que as curvas parciais se desloquem em frequência, de tal modo que superposições completas sejam alcançadas na temperatura de referência (Ferry, 1980). Uma expressão útil pode ser obtida pelo ajuste desses valores a uma equação empírica, consistente com a experiência e conhecida como equação WLF (Williams-Landel-Ferry), qual seja:

$$\log_{10} \alpha_T(T) = \left[ -\theta_1 (T - T_0) / (\theta_2 + T - T_0) \right] \quad (7)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são parâmetros a serem determinados para cada material. Um gráfico típico de fator de deslocamento versus temperatura absoluta é apresentado na Fig. (2a).

Uma vez consolidadas, as propriedades dinâmicas são exibidas, de forma padronizada (ISO 10112, 1991), em nomogramas, conhecidos como nomogramas de frequência reduzida, como ilustrado na Fig. (2b). Esses nomogramas têm sido adotados tanto por pesquisadores quanto

fabricantes de materiais viscoelásticos. Expressões paramétricas têm sido ajustadas aos dados, de sorte que representações contínuas estejam disponíveis, tanto gráfica quanto analiticamente.

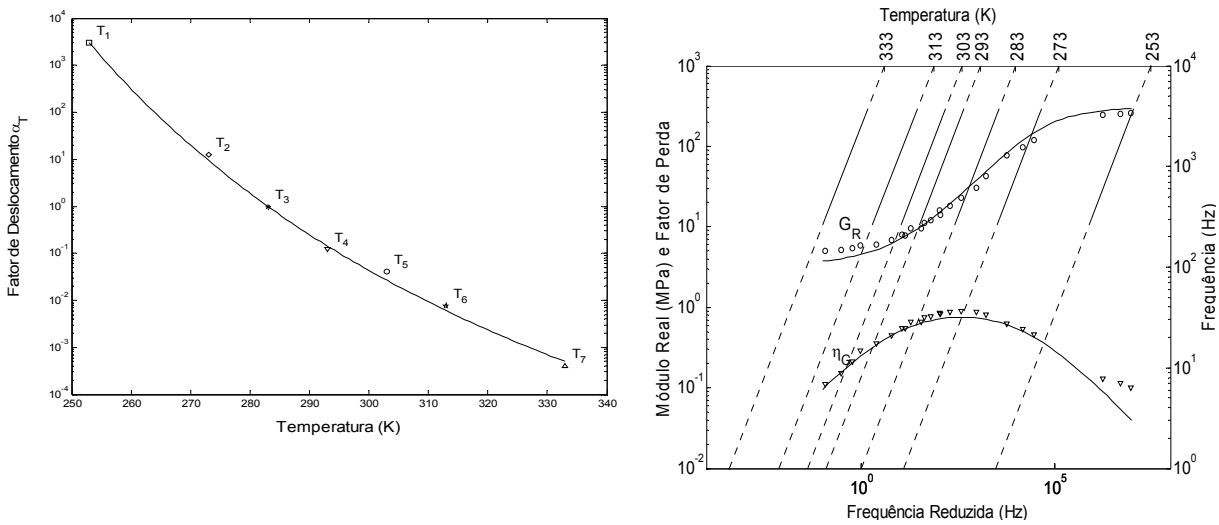


Figura 2. Gráficos de caracterização dinâmica: (a) fator de deslocamento versus temperatura (b) nomograma de frequência reduzida (fontes: ISO 10112, 1991; Espíndola, 1990)

### 3. ABORDAGEM POR DERIVADAS GENERALIZADAS

O módulo complexo de cisalhamento de um certo material viscoelástico pode ser descrito por uma expressão paramétrica simples, porém representativa, derivada pelo uso de cálculo fracional e teoria de transformadas (Bagley e Torvik, 1986), qual seja:

$$\bar{G}(\omega) = \frac{G_L + G_H b(i\omega)^\beta}{1 + b(i\omega)^\beta} \quad (8)$$

onde  $G_L$  é o módulo elástico,  $G_H$  o módulo vítreo,  $b$  um parâmetro real e  $\beta$  a ordem da derivada generalizada (ou fracionária) associada, sendo que  $0 < \beta < 1$ .

O cálculo fracional tem sido aplicado, com sucesso, para se descrever o comportamento viscoelástico linear de polímeros. Nessas análises, as relações tensão-deformação são formuladas em termos de derivadas de ordem não inteira, ditas fracionais, ou generalizadas, em lugar dos clássicos operadores de ordem inteira.

Considere-se, agora, a abordagem introduzida por Espíndola et al (2003), para a determinação do módulo complexo de cisalhamento de elastômeros, baseado no modelo representado na Fig. (3).

Esse modelo consiste em uma massa  $m$ , conectada a uma base rígida vibrante através de um elemento flexível, cuja flexibilidade é fornecida simplesmente por sua porção viscoelástica. Com essa hipótese, a rigidez (complexa)  $\bar{k}$  desse elemento pode ser escrita como:

$$\bar{k}(\omega) = \nu \bar{G}(\omega) \quad (9)$$

em que  $\nu$  é uma constante que só depende da geometria do elemento e suas inserções metálicas.

O movimento  $x(t)$  da base é prescrito e, por hipótese, não retroalimentado.

Na Figura (3), todas as quantidades envolvidas são escritas no domínio da frequência. O equilíbrio dinâmico da massa é expresso por:

$$\bar{k}(\omega) [\bar{X}(\omega) - \bar{Y}(\omega)] = -m\omega^2 \bar{Y}(\omega) \quad (10)$$

donde resulta:

$$\bar{T}(\omega) = \frac{\bar{Y}(\omega)}{\bar{X}(\omega)} = \frac{\bar{k}(\omega)}{\bar{k}(\omega) - m\omega^2} \quad (11)$$

A função  $\bar{T}(\omega)$  pode ser chamada transmissibilidade complexa e é uma função resposta em frequência ligando a saída  $\bar{Y}(\omega)$  à entrada  $\bar{X}(\omega)$  (observe-se que  $\bar{X}(\omega)$  e  $\bar{Y}(\omega)$  são as transformadas de Fourier de  $x(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente).

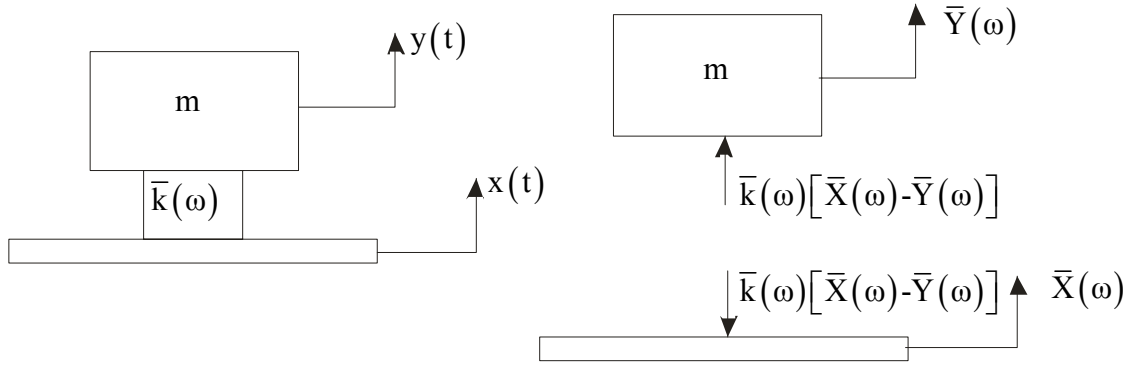


Figura 3. Modelo para a determinação do módulo complexo de cisalhamento

Com o uso da Exp. (9), sendo  $\bar{G}(\omega)$  dado pela Exp. (8) e  $m_v = m/\nu$ , a Exp. (11) torna-se:

$$\bar{T}(\omega) = \frac{\bar{G}(\omega)}{\bar{G}(\omega) - m_v \omega^2} \quad (12)$$

A função  $\bar{T}(\omega)$ , dada pela Exp. (12), é um modelo para a transmissibilidade complexa, tal que  $\bar{T}(\omega) = f(\omega, G_L, G_H, b, \beta, m_v)$ .

Considere-se, a seguir, que  $y(t)$  e  $x(t)$  são medidos digitalmente nos instantes de tempo  $t_i$ ,  $i = 1, N$ , onde  $N$  é um número da forma  $N = 2^n$ , sendo  $n$  um número inteiro. A partir dessas duas séries temporais, a transmissibilidade experimental  $\bar{T}_E(\omega_j)$  é computada como:

$$\bar{T}_E(\omega_j) = S_{XY}(\omega_j) / S_{YY}(\omega_j), \quad j = 1, p \quad (13)$$

onde  $p$  é um número inteiro, menor ou igual a  $N / 2$ ,  $\omega_{N/2}$  é a frequência de Nyquist,  $S_{XY}(\omega_j)$  é o espectro cruzado de potência de  $x(t)$  e  $y(t)$  e  $S_{YY}(\omega_j)$  é o auto-espectro de potência de  $y(t)$ .

Defina-se o vetor complexo  $\bar{e}$ , cujas entradas são:

$$\bar{e}_j = \bar{T}(\omega_j) - \bar{T}_E(\omega_j), \quad j = 1, p \quad (14)$$

Pode-se, então, definir uma função objetivo tal que:

$$f(x) = [\bar{e}]^H [\bar{e}] \quad (15)$$

onde  $x$  é um vetor tal que  $x^T = [G_L, G_H, b, \beta, m_v]$ .

Acima, o índice H significa transposto do conjugado e o índice T significa transposto.

Computando-se o vetor  $x$  de forma a minimizar  $f(x)$ , ou seja, de sorte que a soma dos erros quadráticos definida pela Exp. (15) alcance seu valor mínimo, obtêm-se os valores dos parâmetros materiais na temperatura de ensaio. A repetição desse procedimento em outras temperaturas resulta no levantamento de parâmetros para toda a faixa de interesse.

De posse dos parâmetros materiais acima, curvas de fator de perda versus módulo real para cada temperatura de ensaio podem ser construídas num gráfico como o da Fig. (4), conhecido como “wicket plot” (ASTM E756, 1998). Seu uso, nesse contexto, permite que sejam determinados valores únicos de  $G_L$  e  $G_H$ , correspondentes aos limites inferior e superior do módulo real. Permite, também, que se visualize a curva com maior fator de perda. A temperatura associada a essa curva é escolhida como a temperatura de referência, ao passo que os valores de  $b$  e  $\beta$  identificados para essa curva são tomados como valores únicos desses parâmetros para a representação conjunta final.

O fator  $\alpha_T$  é calculado, nas temperaturas de ensaio, pela seguinte expressão (Lopes, 1998):

$$\alpha_T(T) = (b/b_0)^{1/\beta} \quad (16)$$

onde  $b_0$  é o valor do parâmetro  $b$  na temperatura de referência.

Ressalta-se que a abordagem sumarizada acima não usa a representação de elastômeros por derivadas generalizadas para tão somente ajustar dados experimentais relativos àqueles materiais. Ela faz daquela representação a sua pedra angular, sendo essa uma de suas inovações.

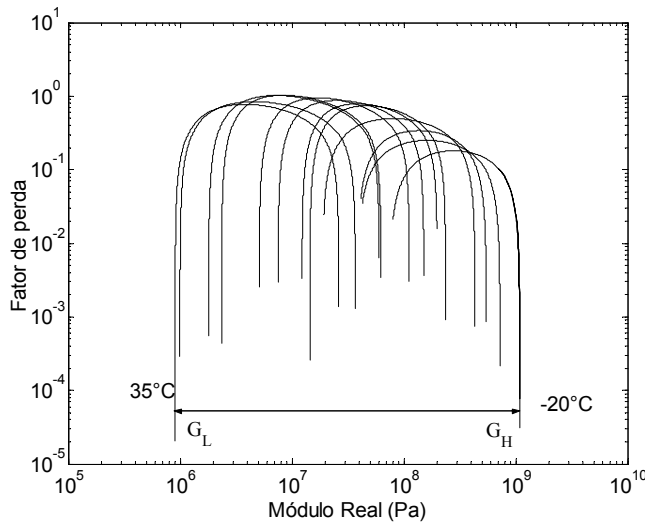


Figura 4. “Wicket plot” (fonte: Espíndola et al, 2003)

#### 4. CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA INTEGRADA

A Expressão (8) pode ser ampliada pela inserção da Exp. (16), para a inclusão dos efeitos de temperatura (Lopes, 1998), de forma que:

$$\bar{G}(\omega, T) = \frac{G_L + G_H b_0 [i\alpha_T(T)\omega]^\beta}{1 + b_0 [i\alpha_T(T)\omega]^\beta} \quad (17)$$

Sendo o fator de deslocamento dado pela Exp. (7), tem-se, para a transmissibilidade complexa:

$$\bar{T}(\omega, T) = \frac{\bar{G}(\omega, T)}{\bar{G}(\omega, T) - m_v \omega^2} \quad (18)$$

em que  $\bar{T}(\omega, T) = f(\omega, T, G_L, G_H, b_0, \beta, m_v, \theta_1, \theta_2, T_0)$ .

Defina-se, agora, a matriz complexa  $\bar{E}$ , cujas entradas são:

$$\bar{e}_{jk} = \bar{T}(\omega_j, T_k) - \bar{T}_E(\omega_j, T_k), \quad j=1, p \quad \text{e} \quad k=1, q \quad (19)$$

onde q é o número de temperaturas de ensaio.

Pode-se, então, definir uma nova função objetivo, tal que:

$$f(x) = \sum_{k=1}^q \left[ \sum_{j=1}^p (\bar{e}_{kj})^C (\bar{e}_{jk}) \right] \quad (20)$$

onde o índice C significa conjugado e  $x^T = [G_L, G_H, b_0, \beta, m_v, \theta_1, \theta_2, T_0]$ .

A minimização de  $f(x)$  permite que todas as transmissibilidades experimentais sejam utilizadas simultaneamente para a determinação integrada dos parâmetros finais do elastômero em tela, incluindo-se aqueles relativos ao fator de deslocamento. Dessa forma, numa única etapa, obtêm-se os elementos necessários à caracterização completa do material, tanto de forma gráfica, pelo nomograma de frequência reduzida, quanto de forma analítica, pelas Exp. (7) e (17).

A novidade do procedimento exposto reside no levantamento concomitante das dependências em frequência e temperatura, tal como elas se manifestam no conjunto das transmissibilidades experimentais. Ressalta-se a introdução da temperatura de referência como um dos parâmetros a ser identificado, de modo a explicitar sua importância na qualidade dos resultados a serem obtidos.

## 5. RESULTADOS EM ELASTÔMEROS USUAIS

A Figura (5) ilustra uma montagem experimental típica para a obtenção das transmissibilidades.

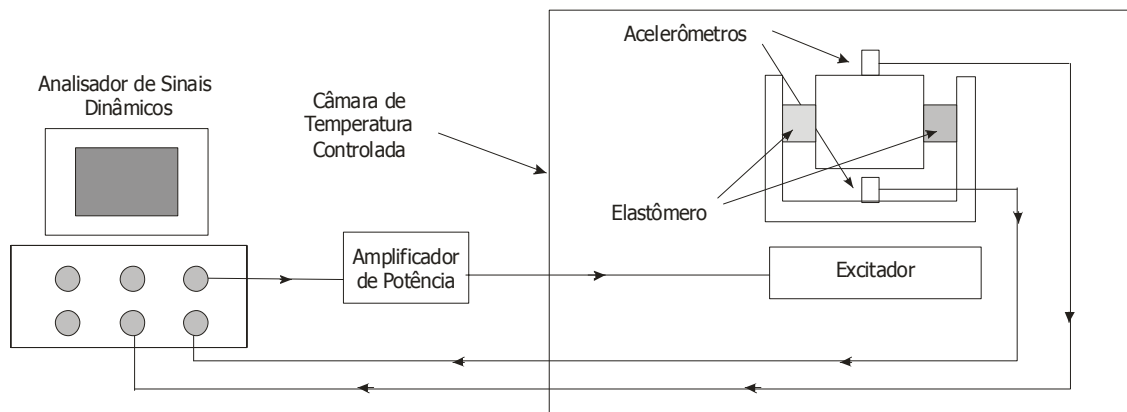


Figura 5. Montagem experimental típica

As Figuras (6a) e (6b) apresentam os gráficos de caracterização dinâmica de um exemplar de borracha butílica, obtidos através do procedimento em tela. As temperaturas de ensaio são indicadas pelas linhas diagonais do nomograma, sendo a faixa de frequência de ensaio indicada pelos trechos contínuos daquelas linhas. Observa-se no nomograma que, nas faixas em que a borracha butílica foi ensaiada, foram levantadas informações do final da região elástica ao início da vítrea.

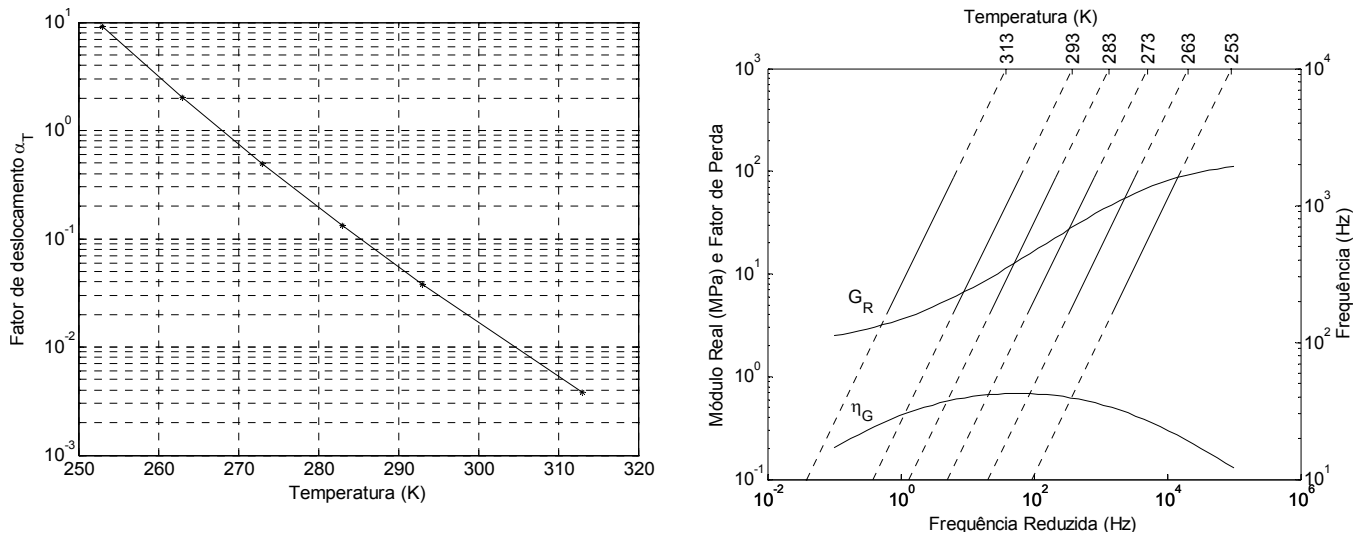


Figura 6. Gráficos de caracterização dinâmica para borracha butílica:  
(a) fator de deslocamento versus temperatura (b) nomograma de frequência reduzida

A qualidade da identificação realizada pode ser observada na Fig. (7), onde são comparadas as transmissibilidades experimental e teórica para cada temperatura de ensaio.

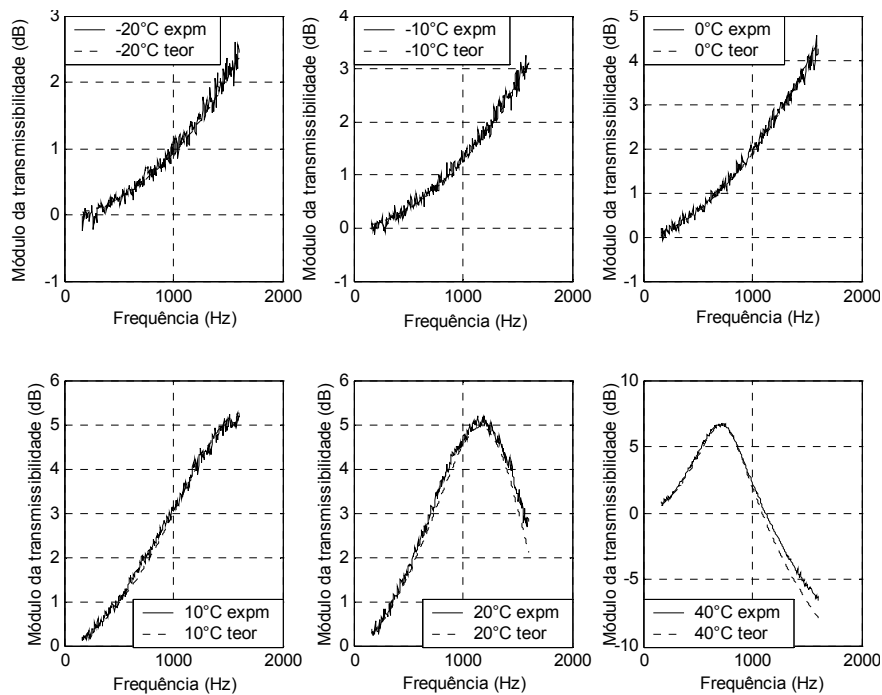


Figura 7. Transmissibilidades experimentais e teóricas para borracha butílica

As Figuras (8a) e (8b) mostram os gráficos de caracterização dinâmica de um exemplar de silicone, enquanto a Fig. (9) ilustra as transmissibilidades experimentais e teóricas correspondentes.

Para o silicone, só foram colhidas informações da região elástica, o que, via de regra, dificulta a estimação de valores iniciais para os parâmetros. Aqui, contudo, foram usados valores iniciais típicos e tanto a convergência foi tranquila quanto os resultados foram excelentes, vide Fig. (9).

Cabe observar que, em ambos os casos expostos acima, foi utilizada, por simplicidade e conveniência, a técnica de otimização de Nelder e Mead (“simplex”). Salienta-se que só foram considerados, no processo de minimização, os pontos experimentais associados a valores de coerência iguais ou bastante próximos de 1.



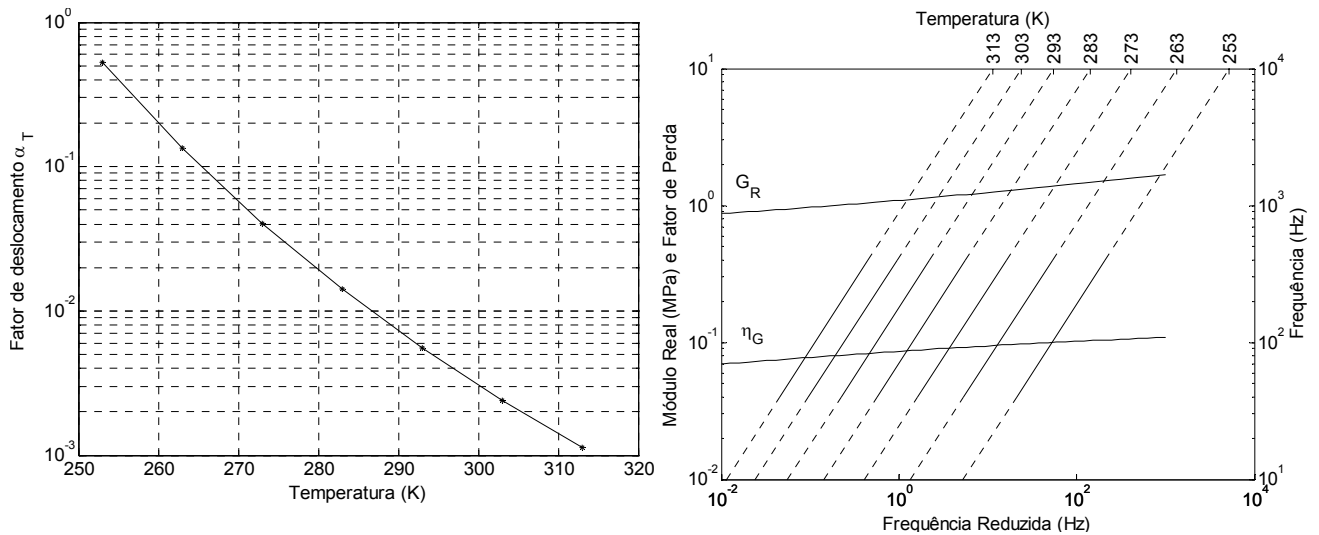


Figura 8. Gráficos de caracterização dinâmica para silicone:  
(a) fator de deslocamento versus temperatura (b) nomograma de frequência reduzida

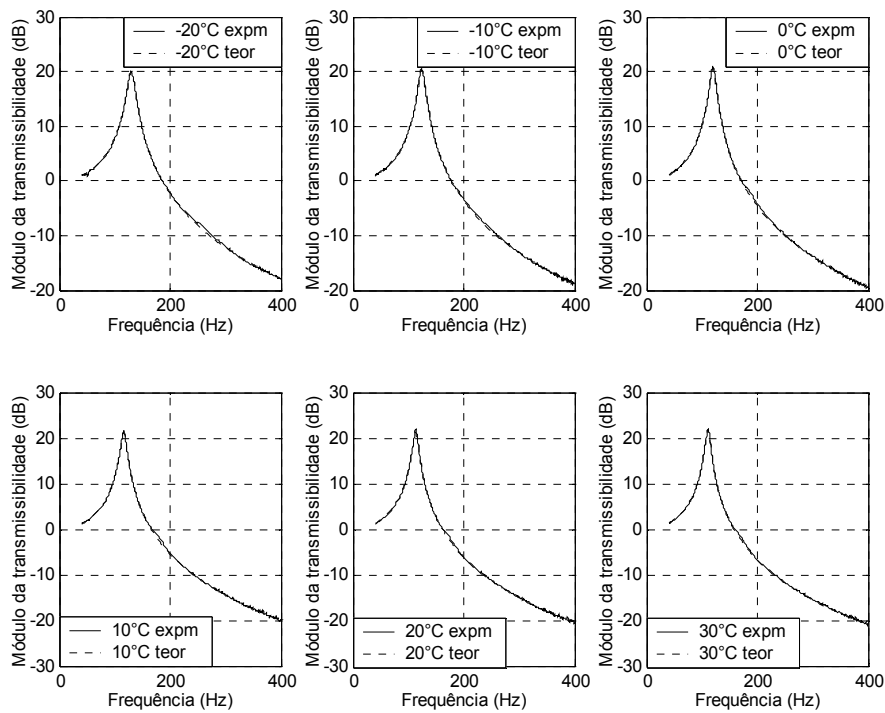


Figura 9. Transmissibilidades experimentais e teóricas para silicone

## 6. CONCLUSÕES

Um procedimento para a caracterização dinâmica integrada de elastômeros foi descrito, sendo os resultados de sua aplicação em exemplares de borracha butílica e silicone apresentados e discutidos.

A originalidade do procedimento exposto reside no levantamento concomitante das dependências em frequência e temperatura dos materiais ensaiados, tal como elas se manifestam nos dados experimentais. A qualidade dos resultados obtidos convalida o procedimento em tela.

## 7. REFERÊNCIAS

ASTM E756, 1998, "Standard Test Method for Measuring Vibration-Damping Properties of Materials", ASTM.

- Bagley, R. L. and Torvik, P. J., 1986, "On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior", *Journal of Rheology*, Vol. 30, No. 1, pp. 133-155.
- Espíndola, J. J., 1990, "Projeto de Isoladores Aeronáuticos", Relatório final à Fundação Banco do Brasil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.
- Espíndola, J. J., Silva Neto, J. M. e Lopes, E. M. O., 2003, "On the Measurement of the Dynamic Properties of Viscoelastic Materials", *Anais do 2º DINCON*, Ed.: J. M. Balthazar et al, Vol. 2, São José dos Campos, Brasil, pp. 2452-2464.
- Ferry, J. D., 1980, "Viscoelastic Properties of Polymers", John Wiley & Sons.
- ISO 10112, 1991, "Damping Materials – Graphical Presentation of the Complex Modulus", ISO.
- Lopes, E. M. O., 1998, "On the Experimental Response Reanalysis of Structures with Elastomeric Materials", PhD Thesis, University of Wales Cardiff, Cardiff, UK.
- Nashif, A.D., Jones, D.I.G. and Henderson, J.P., 1985, "Vibration Damping", John Wiley & Sons.
- Oyadiji, S. O. and Tomlinson, G. R., 1991, "Establishing the Validity of the Master Curve Technique for Complex Modulus Data Reduction", *Proceedings of Damping '91*, Vol. 1, San Diego, USA, pp. DBC1-DBC20.
- Padovan, J. and Guo, Y., 1988, "General Response of Viscoelastic Systems Modelled by Fractional Operators", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 325, No. 2, pp.247-275.
- Pritz, T., 1998, "Frequency Dependencies of Complex Moduli and Complex Poisson's Ratio of Real Solid Materials", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 214, No. 1, pp.83-104.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## INTEGRATED DYNAMIC CHARACTERIZATION OF ELASTOMERS BY GENERALIZED DERIVATIVES

**Eduardo Márcio de Oliveira Lopes**

UFSC, PO Box 476, Florianópolis, SC, Brazil, 88040-900, lopes@pisa.ufsc.br

**Carlos Alberto Bavastri**

CEFET/PR, Av. Sete de Setembro, 3165, Curitiba, PR, Brazil, 80230-901, bavastri@cefetpr.br

**João Moraes da Silva Neto**

UFSC, PO Box 476, Florianópolis, SC, Brazil, 88040-900, joaoneto@emc.ufsc.br

**José João de Espíndola**

UFSC, PO Box 476, Florianópolis, SC, Brazil, 88040-900, espindol@mbox1.ufsc.br

**Abstract.** *Viscoelastic materials, particularly elastomers, are broadly used in passive vibration and noise control. Efficacious control designs demand the characterization of the materials' behaviour, especially of their modulus of elasticity and loss factor. Those properties are frequency and temperature dependent. The mathematical modelling of viscoelastic materials by generalized derivatives has revealed itself as extremely adequate. A new approach to the characterization of viscoelastic materials by generalized derivatives has been introduced recently. In this paper, that approach is deepened. It is shown that, by the proposed modelling, the various transmissibility functions, obtained at various test temperatures, can be simultaneously used to an integrated characterization of a given material. Results to butyl rubber and silicone are presented and discussed. The originality of the procedure, as well as the quality of its results, are highlighted.*

**Keywords:** *fractional calculus, vibration control, viscoelastic materials.*