

INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UMA ALAVANCA DE TRANSMISSÃO CONSIDERANDO EFEITOS NÃO-LINEARES

Silvio Luiz Mariano

smariano@fem.unicamp.br

Alex Pereira do Prado

alexp@fem.unicamp.br

Janito Vaqueiro Ferreira

janito@fem.unicamp.br

Alberto Luiz Serpa

serpa@fem.unicamp.br

Departamento de Mecânica Computacional

Faculdade de Engenharia Mecânica

Universidade Estadual de Campinas

Rua Mendeleiev, s/n - Cidade Universitária "Zeferino Vaz" Barão Geraldo – Campinas – SP – Brasil

Resumo. *Este trabalho apresenta uma investigação numérica do comportamento dinâmico de uma alavanca de câmbio de transmissão mecânica considerando a presença de não-linearidades na estrutura. Na simulação, curvas de resposta em frequência não lineares de primeira ordem da alavanca foram levantadas pela utilização do método de continuação “arc-length” para a resolução de sistemas não-lineares. Efeitos não-lineares, modelados por juntas localizadas foram quantificados por funções descritivas, que linearizam o modelo das juntas para definir as funções de transferência que relacionam os componentes fundamentais de entrada e saída. Para fazer esses modelos simplificados mais semelhantes ao sistema físico, vários parâmetros do modelo foram determinados experimentalmente, incluindo parâmetros do modelo de atrito adotado. Curvas simuladas de funções de resposta em frequência não-lineares foram também obtidas com modelos simplificados da alavanca. Estas investigações mostraram a complexidade de modelar uma estrutura com características não-lineares e a necessidade de modelos mais completos.*

Palavras-chave: *Alavanca de Câmbio, Não-Linearidade, Resposta em Frequência, Modelagem de sistemas mecânicos, Vibro-Impacto.*

1 INTRODUÇÃO

O vibro-impacto em transmissões manuais constitui um problema para os fabricantes de veículos no que diz respeito ao ruído, vibração e confiabilidade (Gaillard e Singh, 2000). Ultimamente um dos desafios da indústria é alcançar uma qualidade acústica cada vez maior em seus automóveis.

Os fenômenos de vibração em baixa frequência, tais como vibro-impacto (“rattle”) de marcha lenta e vibro-impacto de transmissão, vêm sendo estudados na tentativa de se minimizar ruídos indesejáveis, uma vez que o nível de ruído é um dos parâmetros de avaliação da qualidade de um automóvel (Wang, 1997). O sistema de transmissão de potência de um automóvel é altamente não-linear e a dinâmica do vibro-impacto de seus componentes é afetada por vários parâmetros de projeto, incluindo o “backlash”, folgas, frequência de engrenamento, rigidez e amortecimento da embreagem, carregamento e inércia da transmissão (Wang, 1997), que dificultam a análise destes sistemas.

O problema de vibro-impacto é um problema da dinâmica não-linear. O modo de se caracterizar um sistema como linear ou não-linear pode ser baseado na presença ou na ausência da característica de superposição. Um sistema mostra a característica de superposição quando dobrando-se a força de entrada tem-se como resultado o dobro da resposta de vibração e quando a adição das respostas devido a duas contribuições independentes resulta na mesma resposta da aplicação das duas contribuições superpostas. Se a característica de superposição não estiver presente, o sistema é considerado não-linear. Então, quando o sistema for classificado como não-linear, técnicas não-lineares devem estar disponíveis para permitir a inclusão dos fenômenos não-lineares na descrição dinâmica do modelo e para a solução das equações não-lineares do movimento.

A primeira técnica para solução de equações diferenciais não-lineares foi a solução analítica de equações diferenciais (Hayashi, 1964). Embora isto possa dar uma solução exata para casos simples, a maioria dos sistemas não-lineares são complexos, tornando impossível a obtenção de uma solução analítica de forma fechada. Para tanto, métodos foram desenvolvidos para que se encontrassem soluções analíticas aproximadas (Hayashi, 1964).

O objetivo do presente trabalho é investigar numericamente o comportamento dinâmico de uma alavanca de transmissão mecânica, tendo como foco a obtenção de curvas de resposta em frequência não-lineares. Os modelos desenvolvidos são simples, porém consideram efeitos não-lineares de atrito e de folga mecânica.

2 CONCEITOS DE MODELAGEM DE ESTRUTURAS NÃO-LINEARES

2.1 Modelos de Juntas Não-Lineares

Muitas estruturas são compostas por mecanismos de união que interligam as subestruturas. Como a modelagem desses mecanismos é complicada, modelos analíticos preditos podem não corresponder aos modelos físicos (Ewins e Imregun, 1986). Estes mecanismos de união, conhecidos como juntas, podem ser definidos como qualquer conexão entre duas subestruturas. As superfícies de contato das juntas são definidas como interface (Prado, 2002).

Uma junta pode ser linear ou não-linear, dependendo da relação força-resposta. Juntas não-lineares são juntas onde o efeito não-linear é representativo na faixa de resposta de interesse. Estas juntas são facilmente encontradas em juntas projetadas para fácil montagem e desmontagem de subestruturas. Seu comportamento dinâmico é de difícil predição e sensível a vários parâmetros. A característica mais evidenciada de uma junta não-linear é a sua resposta em frequência, que quando excitada numa frequência responde em várias frequências, resultando numa distorção da resposta.

No caso de juntas não-lineares, o primeiro passo a ser feito é a escolha de uma força de excitação que permita identificar e caracterizar a junta facilmente (Prado, 2002). Atualmente o método de excitação usado em estudos de vibração para sistemas não-lineares é o método de excitação senoidal, devido às suas características e precisão (Storer e Tomlinson, 1993).

2.1.1 Rigidez Anti-Simétrica Linear por Partes

Um elemento confinado em um alojamento com folga $2x_{critico}$ e uma rigidez constante ($K = cte$) pode ter uma relação entre força e resposta escrita como:

$$f = \begin{cases} K(x - x_{critico}) & x \geq x_{critico} \\ 0 & |x| < x_{critico} \\ K(x + x_{critico}) & x \leq -x_{critico} \end{cases} \quad (1)$$

como mostra a Figura 1.

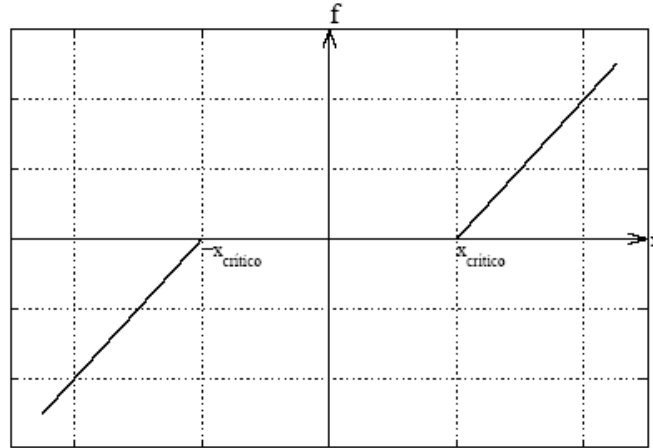


Figura 1. Característica da rigidez anti-simétrica linear por partes

2.1.2 Modelo de Microdeslizamento de Ren

O modelo de microdeslizamento de Ren (Ren, 1992) é um modelo de atrito que usa uma área pequena da interface como elemento básico em vez de utilizar um elemento em cada aspereza. Cada área é modelada como um elemento bilinear. Uma rigidez de área h é definida com uma rigidez inicial total com que a área contribui. A rigidez de área total de área h é a unidade. Definindo a rigidez de área, o problema é transformado do modelo de junta no domínio do deslocamento em $x[0, \infty]$ para o domínio $h[0, 1]$, onde $x_i = x(h_i)$. A relação força-deformação pode ser escrita da seguinte forma:

$$F = \begin{cases} Kx & x < a \\ \frac{-K(x - a + x(b - \ln x + \ln a))}{b} & a \leq x < e^b \\ \frac{Ka(e^b - 1)}{b} & x \geq ae^b \end{cases} \quad (2)$$

onde a representa a máxima deformação elástica, e b representa a diferença entre o microdeslizamento e os elementos bilineares. Quando o elemento é sujeito à cargas cíclicas, dependendo dos valores escolhidos de a e b , diferentes ciclos de histerese podem ser formados.

Quando o valor de b está próximo de zero, o ciclo de histerese é o parecido com o elemento bilinear mostrado na Figura 2.

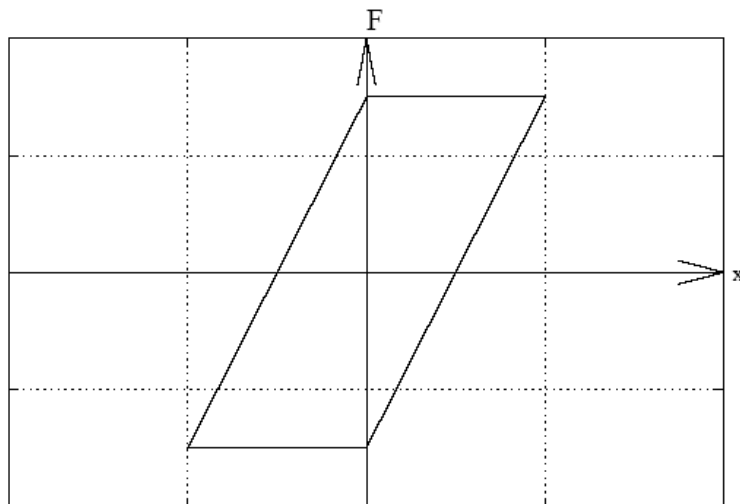


Figura 2. Característica de um elemento bilinear

Quando b começa a aumentar, o ciclo de histerese tem um mistura de macro e microdeslizamento como mostrado na Figura 3.

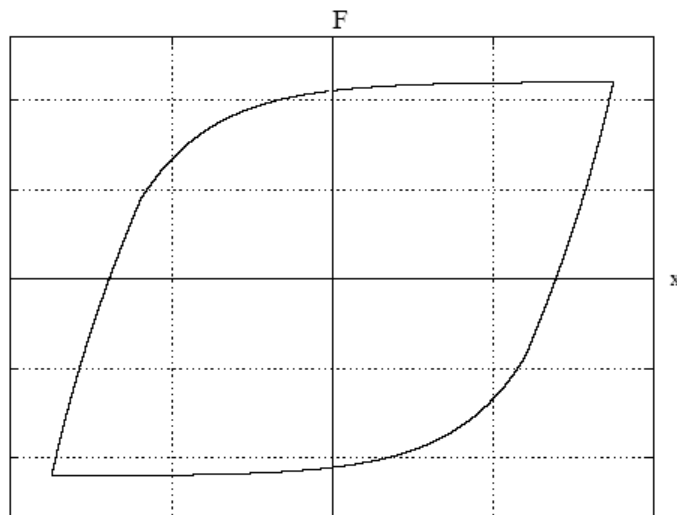


Figura 3. Macro e microdeslizamento

2.2 Resposta em Frequência de Estruturas Não-Lineares

A análise no domínio da frequência de estruturas não-lineares é caracterizada por um conjunto de respostas em frequência (RFs) que pode ser definido como quantidades dependentes da frequência calculadas a partir da relação entre a resposta e a força de excitação harmônica. Para estruturas não-lineares, a resposta em frequência exibe duas diferenças principais quando comparada à definição para um sistema linear. A primeira diferença é que a resposta total de um sistema não-linear no domínio do tempo é representada no domínio da frequência por uma sequência de respostas em frequência ao invés de apenas uma função como no caso linear. Quanto mais intensas as não-linearidades, mais funções de resposta em frequência serão necessárias para melhor representar a resposta total. Por outro lado, para uma ampla classe de não-linearidades a maior parte dos efeitos dominantes está contida nas chamadas respostas em frequência de primeira, segunda e terceira ordem e estas são frequentemente suficientes para caracterizar o sistema precisamente (Sanliturk et al., 1997; Vinh e Liu, 1989). A segunda diferença é que cada resposta em

freqüência é função de múltiplas variáveis, mesmo para um sistema sujeito a uma única excitação. Esta característica aumenta a dificuldade da análise de estruturas não-lineares.

Conceitualmente, as respostas em freqüência (RF) de primeira ordem são uma extensão das funções de resposta em freqüência (FRF) de estruturas lineares para estruturas não-lineares. No caso de uma excitação senoidal pura, a resposta em freqüência de primeira ordem de uma estrutura não-linear é definida como a relação espectral da resposta x_i e da força f_j à freqüência de excitação, ω , escrita como:

$$H_{ij}^{11}(\omega, F_j^1) = \frac{X_i^1(\omega, F_j^1)}{F_j^1(\omega)} \quad (3)$$

Neste caso, apenas o componente da freqüência fundamental da resposta x composta de r harmônicas é usado e todas as sub-harmônicas, super-harmônicas e combinações de ambas são ignoradas.

2.3 O método *Arc-Length*

O método *arc-length* de Crisfield (Crisfield, 1997) é um dos mais populares métodos para traçar caminhos complexos no espaço carregamento/deslocamento. Suas curvas apresentam grande similaridade com curvas de resposta em freqüência não-lineares.

A matriz da equação diferencial de movimento para uma estrutura não-linear sujeita a uma força externa $\{f\}$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]x + \{f_{nl}\} = \{f\} \quad (4)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa, $[C]$ é a matriz de amortecimento viscoso, $[K]$ é a matriz de rigidez, $\{f_{nl}\}$ é a força não-linear e $\{\ddot{x}\}, \{\dot{x}\}$ e $\{x\}$ são respectivamente os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento.

Assumindo que a excitação é harmônica e que a resposta é dominada pela sua resposta harmônica, pode-se escrever a matriz da equação diferencial agora no domínio da freqüência:

$$([K] - \omega^2[M] + i\omega[C] + [\Theta^1])\{X^1\} = \{F_{app}\} \quad (5)$$

onde Θ^1 é a função descritiva de primeira ordem, F_{app} é a força harmônica aplicada no sistema e X^1 é a primeira componente harmônica da resposta para aquele nível de força aplicada.

Para se obter a resposta em freqüência não-linear é necessário escolher a variável a ser controlada. Essa variável pode ser a força aplicada no sistema, que nesse caso depende do nível do sinal harmônico mandado ao excitador do sistema e a sua respectiva freqüência.

Uma vez definida a variável a ser controlada, uma equação na forma residual considerando uma entrada e uma saída, relacionando a força aplicada no sistema e a força analítica a ser controlada pode ser escrita como:

$$\Psi(V, \lambda\omega) = |F_{app}(V, \lambda\omega)| - F_{ana} \quad (6)$$

onde V e ω são respectivamente a amplitude de deslocamento e o “vetor de carregamento externo fixo”. O escalar λ é um “parâmetro de nível de carga”, $|F_{app}(V, \lambda\omega)|$ é o módulo de força aplicada na estrutura medida e F_{ana} é o nível de força analítica para ser controlado (Ferreira, 2002).

A equação (6) pode ser resolvida por muitos procedimentos incrementais (Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado, Quasi-Newton, etc.) nos quais a força aplicada pode ser aplicada. Todavia esses métodos não são apropriados para a solução de problemas onde os caminhos de resposta precisam ser traçados além dos pontos limite. Em várias situações, tais como em problemas de instabilidade estrutural onde métodos de continuação são empregados, o método arc-length parece ser o mais indicado.

O método arc-length é descrito dentro dos métodos de continuação e é aplicado para se obter o traçado de uma solução. Basicamente, o método arc-length considera primeiro um fator de carregamento λ , como uma variável na equação residual (6). Então uma nova equação de restrição é acrescentada a equação de equilíbrio residual (6) definindo o próximo ponto da solução em uma intersecção entre as curvas da solução usando técnicas iterativas convencionais para obter o ponto de equilíbrio.

Para resolver diretamente as variáveis do sistema estendido, um de deslocamento V e outro da variável de carregamento λ , usando métodos iterativos, é necessário primeiro linearizar a equação residual, com V e λ , junto com a restrição relevante do método arc-length pelas séries de Taylor.

Considerando a equação de restrição proposta por (Crisfield, 1997) no formato geral:

$$a = (\Delta V^2 + \Delta \lambda^2 \psi^2 \omega^2) - \Delta l^2 \quad (7)$$

onde Δl é o raio fixo da equação desejada, os escalares ΔV , $\Delta \lambda$ e ω são o deslocamento e fator de carga incrementais.

Estes métodos requerem valores iniciais próximos para que o procedimento iterativo convirja para pontos de soluções corretos. Então, o procedimento que obtém o próximo ponto de equilíbrio $(V, \lambda \omega)$ normalmente consiste em duas fases, uma fase de predição e uma fase de correção. Os procedimentos preditores são aplicados para estimar a primeira solução e determinar a solução a ser seguida. Os métodos corretivos iterativos são usados para calcular a sequência de estimações e obter a solução convergida.

Depois de convergir para a solução $(V, \lambda \omega)$, a aceleração e a força são medidas para o cálculo de um ponto da RF. Depois o procedimento é repetido até o caminho da solução estar concluído até a taxa de frequência especificada.

É importante lembrar que no procedimento de linearização do método arc-length, ambos termos $\frac{\partial \psi}{\partial V}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ devem ser calculados a partir da equação residual (4).

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Foi desenvolvido um modelo para a obtenção da resposta em frequência da alavanca de transmissão mecânica. As equações dos modelos apresentam dois termos relativos a funções descritivas: dff que é o termo que representa a função descritiva de folga e dfh relativo a função descritiva de atrito ou histerese.

O modelo de atrito que segue é o modelo de macro e microdeslizamento de Ren, apresentado na seção 2.1.2, e é descrito pela equação (2), podendo ser representado pelas Figura 2 e Figura 3, podendo assumir qualquer uma das formas, de acordo com os valores dos parâmetros a , b , e K , que foram determinados experimentalmente (Prado, 2002). Este efeito de atrito está presente na rótula da alavanca, onde se tem contato entre duas superfícies distintas.

O modelo de folga utilizado é o modelo de rigidez anti-simétrica linear por partes apresentado na seção 2.1.1. O referido efeito se localiza no contato entre a haste da alavanca e seu respectivo alojamento no conjunto do câmbio.

O modelo de 32 graus de liberdade da alavanca de transmissão mecânica é composto por um grau de liberdade relativo ao deslocamento da base e os restantes pela viga, que foi modelada pelo método dos elementos finitos. Para tanto, foi utilizado para a modelagem da alavanca um elemento

do tipo viga. Os movimentos estão contidos no plano X-Y e a alavanca possui apenas rotação na rótula. O modelo completo é descrito pelo sistema de equações (8).

Na equação (8), os efeitos não-lineares de atrito e folga estão representados pelas funções descritivas df_h e df_f respectivamente.

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 \\ 0 & [M]_{31 \times 31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_{31} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & [C]_{31 \times 31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{31} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b + df_f & -df_f \\ -df_f & [K]_{31 \times 31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & & & \\ & c_{99} + c_h & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn} \end{bmatrix}_{31 \times 31}; [K] = \begin{bmatrix} d_{ff} + k_{11} & & & \\ & k_{99} + d_{fh} & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_{nn} \end{bmatrix}_{31 \times 31}$$

m_b	→	0,3 kg
k_f	→	111350 [N/m]
k_b	→	$2.1.10^9$ [N/m]
c_b	→	$k_b.0,0015$ [Ns/m]
c_h	→	0,42 [Nms/rad]
folga	→	0,5 [mm]
df_f	→	Função descritiva da folga – Rigidez anti-simétrica linear por partes
df_h	→	Função descritiva do atrito – Modelo de Ren
$ F(t) $	→	2,0; 3,1; 4,1 [N]

Tabela 1. Parâmetros do modelo

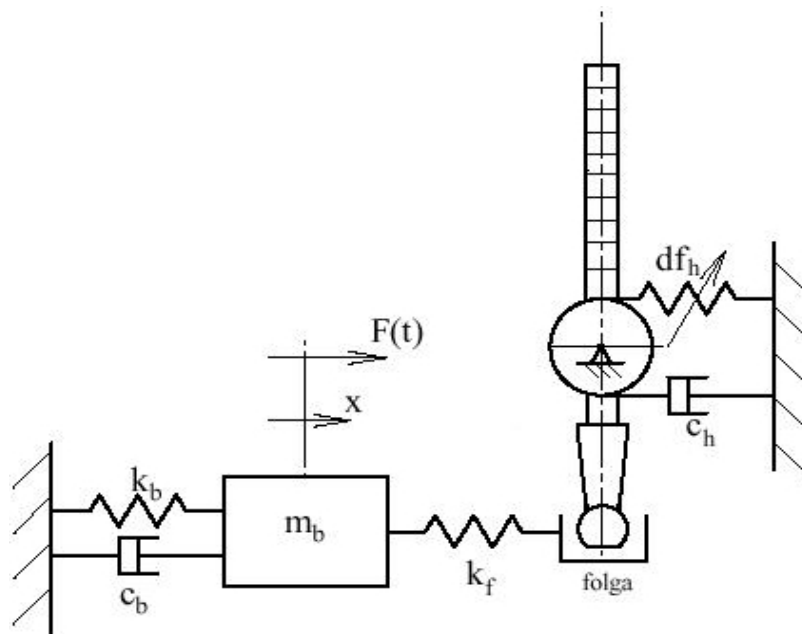


Figura 4. Modelo da Alavanca de Transmissão mecânica – 32gdl

As simulações foram realizadas com uma excitação senoidal $F(t)$ com os valores de 2,0N, 3,1N e 4,1N. O método arc-length foi usado para obter o traçado da equação e o raio inicial equivalente utilizado foi de 0,05 Hz.

4 RESULTADOS

As figuras 5 e 6 mostram as curvas de resposta em frequência obtidas para o sistema simulado. Mesmo em se tratando de um sistema com muitos graus de liberdade, o segundo pico da RF encontra-se num valor muito distante do primeiro, estando fora da faixa de interesse.

Pode-se observar na Figura 5 o efeito não-linear causado pelo modelo de junta utilizado para representar a folga, na qual o pico da RF inclina-se para a direita, indicando um aumento de rigidez. A rigidez do sistema aumenta pois o movimento da massa da base (m_b) torna-se maior que a folga, ocasionando um contato entre a ponta da alavanca e a parede do alojamento de rigidez k_f (Figura 4).

Quanto maiores foram as forças de excitação, maiores foram os efeitos não-lineares nas RFs. O modelo de atrito usado na transmissão influenciou no amortecimento da estrutura.

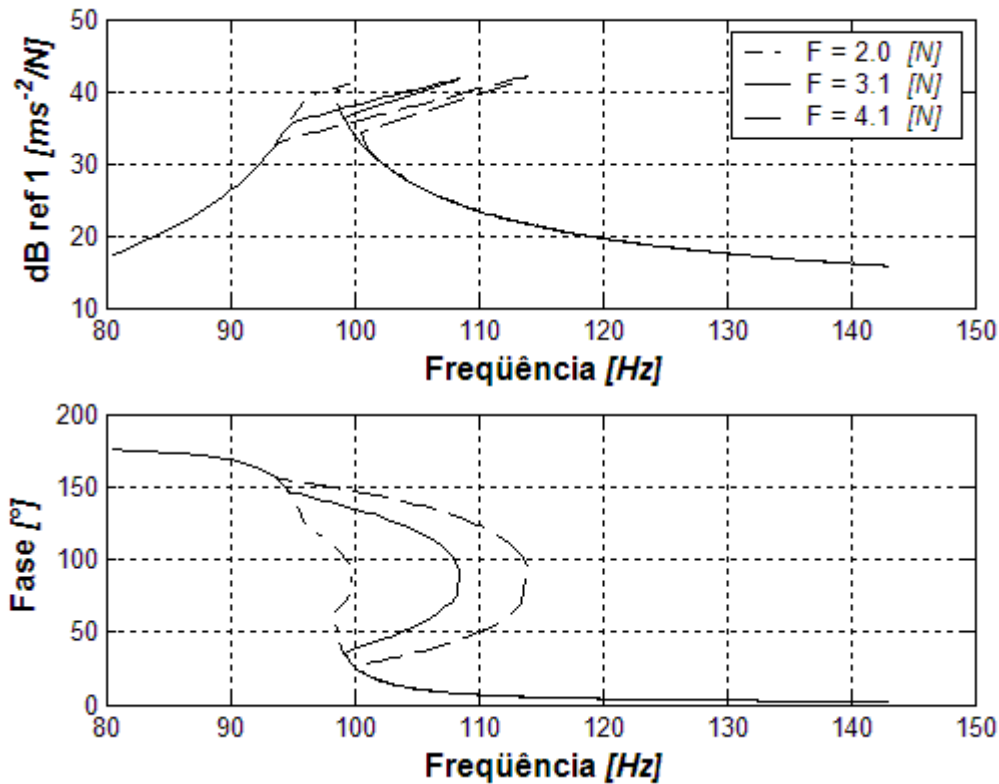


Figura 5. RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica

O gráfico da Figura 6 é uma representação em três dimensões da inertância do modelo da alavanca de transmissão, tendo como eixos a frequência, a amplitude real e a amplitude imaginária. Pode-se ver nesse gráfico os diferentes traçados das RFs para distintas forças de excitação.

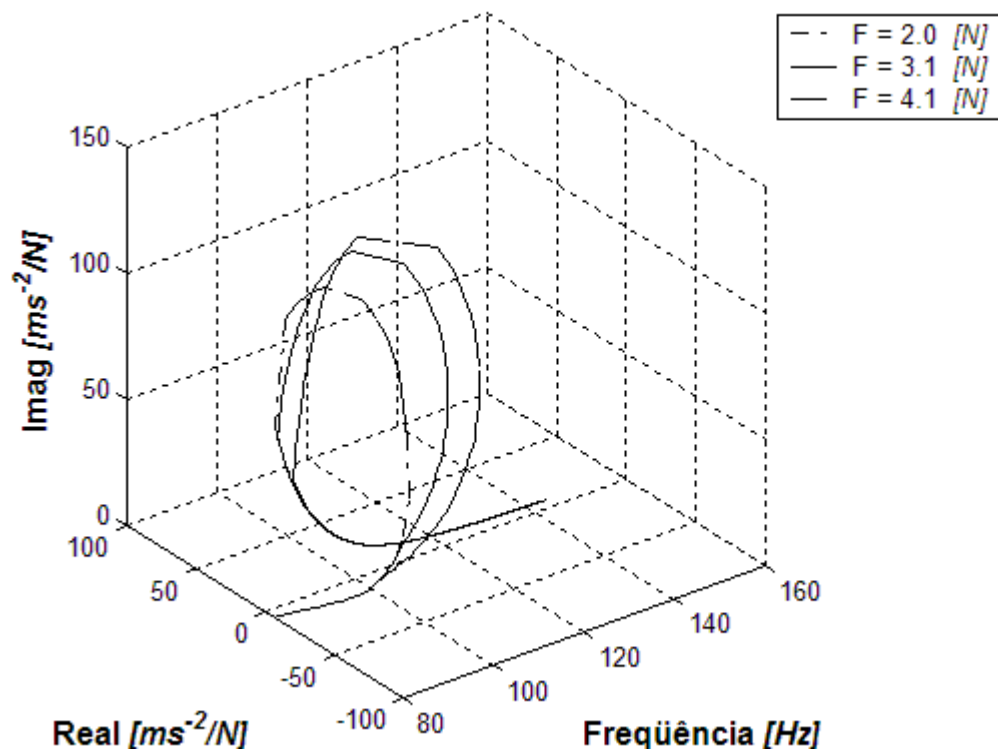


Figura 6. RFs do modelo da alavanca de transmissão mecânica – Representação em três dimensões

5 CONCLUSÕES

A simulação numérica realizada mostra os efeitos que diversas não-linearidades podem causar nas curvas de resposta em frequência deste sistema mecânico. Para este modelo um esforço computacional muito grande foi necessário para o cálculo das respostas em frequência. O raio da restrição calculado pelo método *arc-length* diminuía muito quando o traçado da curva começava a ser alterado devido aos efeitos não-lineares, que se iniciavam por volta de 96Hz, para que não interceptasse outras soluções. Estes caminhos podem ser visualizados pelo gráfico tridimensional da Figura 6.

Deve-se salientar também, que para a modelagem representativa do sistema, diversos parâmetros foram obtidos experimentalmente, tais como parâmetros de atrito e rigidez.

Deste modo foi possível obter o um modelo matemático deste sistema com não-linearidades localizadas e o levantamento das suas respectivas curvas de resposta em frequência a ser utilizado na próxima etapa de estudo de sensibilidade dos parâmetros.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de expressar gratidão ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, à Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior – CAPES e à Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP pelo apoio financeiro para o desenvolvimento do trabalho.

7 REFERÊNCIAS

- Crisfield, M. A., 1997, "Nonlinear finite Element Analysis of Solids and Structures", volume 1,2. John Wiley and Sons.
- Ewins, D. J. and Imregun, M., 1986, "State-of-the-art assessment of structural dynamic response analysis methods (dynas)", *Shock and Vibration Bulletin*, 56:59–90.
- Ferreira, J. V. and Serpa, A. L., 2002, "Application of the arc-length method in nonlinear frequency response", In 20th IMAC, pages 1349–1355.
- Gaillard, C. and Singh, R., 2000, "Dynamic analysis of automotive clutch dampers", *Applied Acoustics*, (60):399–424.
- Hayashi, C., 1964, "Non-Linear Oscillations in Physical Systems", Mc Graw-Hill.
- Prado, A. P., 2002, "Investigação teórica e experimental de uma alavanca de transmissão mecânica considerando efeitos não-lineares", Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, Brasil, 97p.
- Ren, Y., 1992, "The analysis and identification of friction joint parameters in the dynamic response of structures", PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, Exhibition Road, London, SW7 3DU.
- Sanliturk, K. Y., Imregun, M., and Ewins, D. J., 1997, "Harmonic balance vibration analysis of turbine blades with friction dampers", *ASME Journal of Vibrations and Acoustics*, 119:96–103.
- Storer, D. M. and Tomlinson, G. R., 1993, "Recent developments in the measurement and interpretation of higher order transfer functions from nonlinear structures", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7(2):173–189.
- Vinh, T. and Liu, H., 1989, "Extension of modal analysis to nonlinear systems (possibility, mathematical models, limitation)", In 7th IMAC, pages 1379–1385.
- Wang, Y., 1997, "Modeling and analysis of automotive transmission rattle", *Society of Automotive Engineers*, pages 1457–1462.

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE DYNAMICAL BEHAVIOUR OF A MECHANICAL TRANSMISSION GEARSHIFT LEVER CONSIDERING NONLINEAR EFFECTS.

Silvio Luiz Mariano

smariano@fem.unicamp.br

Alex Pereira do Prado

alexp@fem.unicamp.br

Janito Vaqueiro Ferreira

janito@fem.unicamp.br

Alberto Luiz Serpa

serpa@fem.unicamp.br

Computational Mechanics Department
Faculty of Mechanical Engineering
State University of Campinas
13083-970 Campinas-SP, Brazil

Abstract. *This work presents a numerical investigation of the dynamical behaviour of a gearshift lever of mechanical transmission considering the presence of nonlinearities in the structure. In the simulation, first order nonlinear frequency response curves of the lever were computed by using the arc-length continuation method for solving nonlinear systems. Nonlinear effects, modeled by localized joints, were quantified by describing functions, which linearized the joints to define transfer functions that related fundamental components of the input and output. In order to make these simplified models more closely to the physical system, several parameters of the model were experimentally determined, including parameters of the adopted friction model. Simulated curves of first order nonlinear frequency response were also obtained with simplified models of the lever. These investigations showed the complexity of modeling a structure with nonlinear characteristics and the need of more complete models.*

Keywords: *Gearshift Lever, Nonlinearity, Frequency Response, Mechanical Systems Modeling, Rattle.*