

# **DETERMINAÇÃO DE CARGAS EM PÓRTICOS PLANOS UTILIZANDO TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO BASEADAS EM RESPOSTAS DINÂMICAS**

**Jhojan Enrique Rojas Flores**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.

Av. João Naves de Ávila 2160 - Campus Santa Mônica - CP 593 - CEP 38400902 - Uberlândia/MG  
[jerojas@mecanica.ufu.br](mailto:jerojas@mecanica.ufu.br)

**Domingos Alves Rade**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.

Av. João Naves de Ávila 2160 - Campus Santa Mônica - CP 593 - CEP 38400902 - Uberlândia/MG  
[domingos@ufu.br](mailto:domingos@ufu.br)

**Resumo:** Este trabalho apresenta um estudo acerca do efeito conhecido por enrijecimento por tensões e sua influência sobre as características dinâmicas de sistemas estruturais. É proposto um procedimento inverso para a identificação de cargas externas a partir das respostas dinâmicas observadas. Para tanto, utilizam-se modelos de elementos finitos de pórticos planos. As respostas dinâmicas são caracterizadas em termos dos parâmetros modais (freqüências e modos naturais de vibração) e de funções de resposta em freqüência. As variações observadas das freqüências naturais em função da magnitude do carregamento são interpretadas no contexto de um critério dinâmico para determinação de cargas críticas de flambagem. O procedimento de identificação é ilustrado através de simulações numéricas nas quais as freqüências e os modos naturais de vibração da estrutura sujeita ao carregamento externo são usados para formar uma função objetivo tendo como variáveis de projeto as cargas que são supostas desconhecidas. O processo de minimização da função objetivo utiliza um algoritmo de busca linear baseado no método de Lagrange-Newton-SQP (programação quadrática seqüencial). Com base nos resultados obtidos, conclui-se acerca da eficiência da técnica de identificação na determinação de cargas pelo uso das respostas dinâmicas.

**Palavras chave:** identificação, problemas inversos, respostas dinâmicas, flambagem.

## **1. INTRODUÇÃO**

Em diversas situações é de fundamental importância conhecer os carregamentos externos a que estão submetidas as estruturas de Engenharia Civil em condições reais de serviço, com o objetivo de avaliar o nível de segurança, verificar as considerações adotadas no projeto e, se necessário, promover o redimensionamento dos elementos estruturais para novas condições operacionais. Um fator que dificulta a determinação experimental do carregamento resulta da freqüente inviabilidade de se introduzirem transdutores na estrutura durante sua montagem, previamente à aplicação das cargas.

Por outro lado, é bem conhecido o fato que as solicitações externas têm significativa influência sobre as características dinâmicas de componentes estruturais, através do efeito conhecido por stress-stiffening (enrijecimento por tensões) (Mead, 2001; Greening e Lieven, 1999, 2000 e

2003). Este efeito ocorre igualmente em outros tipos de elementos estruturais, tais como vigas, placas e cascas, conforme evidenciado por Lurie (1952).

Considerando a influência exercida pelo carregamento estático externo sobre as respostas vibratórias, torna-se possível, em princípio, obter, por um procedimento inverso, informação acerca do nível e distribuições de cargas, a partir das respostas dinâmicas medidas na estrutura e de um modelo numérico relacionando as cargas e as respostas dinâmicas.

Um procedimento desta natureza tem numerosas vantagens práticas, tais como:

- a relativa facilidade de medição e processamento das respostas dinâmicas e a ampla acessibilidade a pontos de medição, considerando que as respostas dinâmicas são características globais das estruturas;
- possibilidade de empregar procedimentos já bem estabelecidos de excitação e captação das respostas dinâmicas.

Por outro lado, os problemas de identificação, também denominados problemas inversos, possuem algumas dificuldades intrínsecas, dentre as quais podem-se citar:

- a precisão dos resultados da identificação é determinada pela precisão do modelo matemático disponível;
- do ponto de vista numérico, os problemas de identificação são geralmente mal-condicionados, o que significa que sua solução é muito sensível à presença de incertezas e ruídos que, inevitavelmente, contaminam os dados experimentais utilizados;
- por razões de natureza prática, os dados experimentais utilizados são invariavelmente incompletos, tanto no sentido espacial (respostas conhecidas em um número limitado de posições), quanto no espectral (respostas determinadas em uma banda de freqüências). Conseqüentemente, a unicidade da solução não pode ser assegurada.

Nas seções seguintes, apresentam-se os aspectos teóricos do procedimento de identificação de cargas a partir das respostas dinâmicas, seguindo-se a descrição de aplicações de simulação numérica, a título de validação do procedimento sugerido e avaliação de suas principais características operacionais.

## 2. MODELAGEM DO EFEITO DE ENRIJECIMENTO POR TENSÕES

Considere-se o elemento bidimensional de viga modelado segundo a teoria de Euler-Bernoulli, incluindo o efeito da carga axial, ilustrado na Fig. 1.

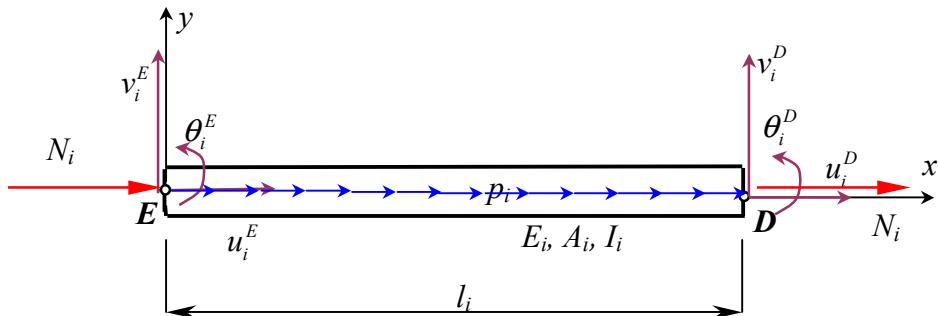


Figura 1. Elemento bidimensional de viga.

Na figura acima,  $u_i^E$  e  $u_i^D$  são os deslocamentos nodais longitudinais,  $v_i^E$  e  $v_i^D$  são os deslocamentos nodais transversais,  $\theta_i^E$  e  $\theta_i^D$  são as rotações das seções transversais,  $l_i$  é o comprimento do elemento,  $E_i$  é o módulo de elasticidade do material,  $A_i$  é a área da seção transversal,  $I_i$  é o momento de inércia,  $p_i$  é o carregamento longitudinal distribuído e  $N_i$  é o esforço axial concentrado nas extremidades do elemento. Os índices  $E$  e  $D$  representam os deslocamentos e rotações à esquerda e direita do elemento respectivamente.

Utilizando uma função de interpolação linear para o deslocamento longitudinal e aproximação cúbica para o deslocamento transversal, obtém-se as seguintes expressões para a matriz de rigidez elementar e a matriz de massa consistente elementar (Zienkiewicz e Taylor, 1989):

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \frac{E_i A_i}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{E_i A_i}{l_i} & 0 & 0 \\ \frac{12E_i I_i}{l_i^3} + \frac{6}{5} \frac{N_i}{l_i} & \frac{6E_i I_i}{l_i^2} + \frac{1}{10} N_i & 0 & -\frac{12E_i I_i}{l_i^3} - \frac{6}{5} \frac{N_i}{l_i} & \frac{6E_i I_i}{l_i^2} + \frac{1}{10} N_i & \\ \frac{4E_i I_i}{l_i} + \frac{2}{15} N_i l_i & 0 & -\frac{6E_i I_i}{l_i^2} - \frac{1}{10} N_i & \frac{2E_i I_i}{l_i} - \frac{1}{30} N_i l_i & & \\ & \frac{E_i A_i}{l_i} & 0 & 0 & 0 & \\ & & \frac{12E_i I_i}{l_i^3} + \frac{6}{5} \frac{N_i}{l_i} & -\frac{6E_i I_i}{l_i^2} - \frac{1}{10} N_i & & \\ & & & \frac{4E_i I_i}{l_i} + \frac{2}{15} N_i l_i & & \end{bmatrix} \quad (1)$$

sim

$$\mathbf{M}_i = \frac{m_i}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22l_i & 0 & 54 & -13l_i \\ & & 4l_i^2 & 0 & 13l_i & -3l_i^2 \\ & & & 70 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & -22l_i \\ & & & & & 4l_i^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

sim

onde  $m_i = \rho_i A_i l_i$ , sendo  $\rho_i$  a densidade volumétrica do material.

Deve-se observar que o esforço longitudinal intervém nos componentes da matriz de rigidez referentes aos graus de liberdade de flexão.

Após montagem das equações de movimento em nível global, as equações do movimento resultantes são dadas por:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{p}) \mathbf{X}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (3)$$

onde  $\mathbf{p}$  designa o vetor das forças axiais aplicadas nos elementos que compõem o modelo de elementos finitos.

Das equações de movimento (3) é derivado o seguinte problema de autovalor:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{p}) - \lambda \mathbf{M}] \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (4)$$

onde  $\lambda = \omega^2$  designa os autovalores (freqüências naturais) e  $X$  os autovetores (modos naturais de vibração).

A matriz das funções de resposta em freqüência (FRFs) são calculadas como indicado a seguir:

$$\mathbf{H}(\omega) = [\mathbf{K}(\mathbf{p}) - \omega^2 \mathbf{M}]^{-1} \quad (5)$$

As equações acima mostram que as respostas dinâmicas dependem das forças axiais aplicadas nos elementos da estrutura, as quais, por sua vez, dependem diretamente do carregamento externo a que a estrutura está submetida. Isto significa que, antes de realizar a análise dinâmica, primeiramente devem ser determinadas as forças axiais que solicitam cada elemento, a partir de uma análise estática do efeito do carregamento externo na estrutura.

### 3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

O procedimento de identificação de esforços externos proposto consiste na minimização de uma função objetivo traduzindo a diferença normalizada entre as freqüências e modos naturais obtidos experimentalmente sobre a estrutura sujeita ao carregamento a ser determinado, e as correspondentes respostas dinâmicas previstas pelo modelo de elementos finitos. Neste problema de otimização, as variáveis de projeto são as cargas externas a serem introduzidas no modelo de elementos finitos. Busca-se, assim, determinar as cargas a serem aplicadas no modelo que conduzam à melhor reprodução das respostas experimentais da estrutura carregada.

A função objetivo utilizada neste trabalho é definida da forma:

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m \left\{ W_\omega \frac{|\omega_i^{(m)}(\mathbf{p}) - \omega_i^{(e)}|}{\omega_i^{(e)}} + W_V \frac{\|V_i^{(m)}(\mathbf{p}) - V_i^{(e)}\|}{\|V_i^{(e)}\|} + W_M \{1 - MAC[V_i^{(m)}(\mathbf{p}), V_i^{(e)}]\} \right\} \quad (6)$$

onde:

- $MAC[V_i^{(m)}(\mathbf{p}), V_i^{(e)}] = \left\{ \frac{[V_i^{(m)}(\mathbf{p})]^T V_i^{(e)}}{\|V_i^{(m)}(\mathbf{p})\| \|V_i^{(e)}\|} \right\}^2$  é o conhecido *Modal Assurance Criterion*;
- $m$  é o número de modos utilizados;
- $\mathbf{p}$  é o vetor das cargas externas a serem identificadas;
- $\omega_i^{(m)}(\mathbf{p})$  e  $V_i^{(m)}(\mathbf{p})$  são as freqüências e os modos naturais previstos pelo modelo de elementos finitos, respectivamente;
- $\omega_i^{(e)}(\mathbf{p})$  e  $V_i^{(e)}(\mathbf{p})$  são as freqüências e os modos naturais experimentais da estrutura carregada, respectivamente;
- $W_\omega$ ,  $W_V$  e  $W_M$  são fatores de ponderação.

### 3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

#### 3.1. Descrição da Estrutura-Teste

Para ilustrar os procedimentos desenvolvidos neste trabalho, é utilizado o modelo de elementos finitos de um pórtico plano, constituído por elementos de vigas bidimensionais de Euler-Bernoulli.

O modelo do pórtico de aço é ilustrado na Fig. 2, suas dimensões e propriedades mecânicas do material são apresentadas na mesma figura.

Na Fig. 2, observa-se que o modelo é constituído por 24 nós e 24 elementos. Cada nó possui 3 graus de liberdade que correspondem ao deslocamento longitudinal, deslocamento transversal e à rotação. Desta forma, o modelo consta de um total de 66 graus de liberdade, número este obtido após a restrição dos graus de liberdade dos nós engastados na base do pórtico.

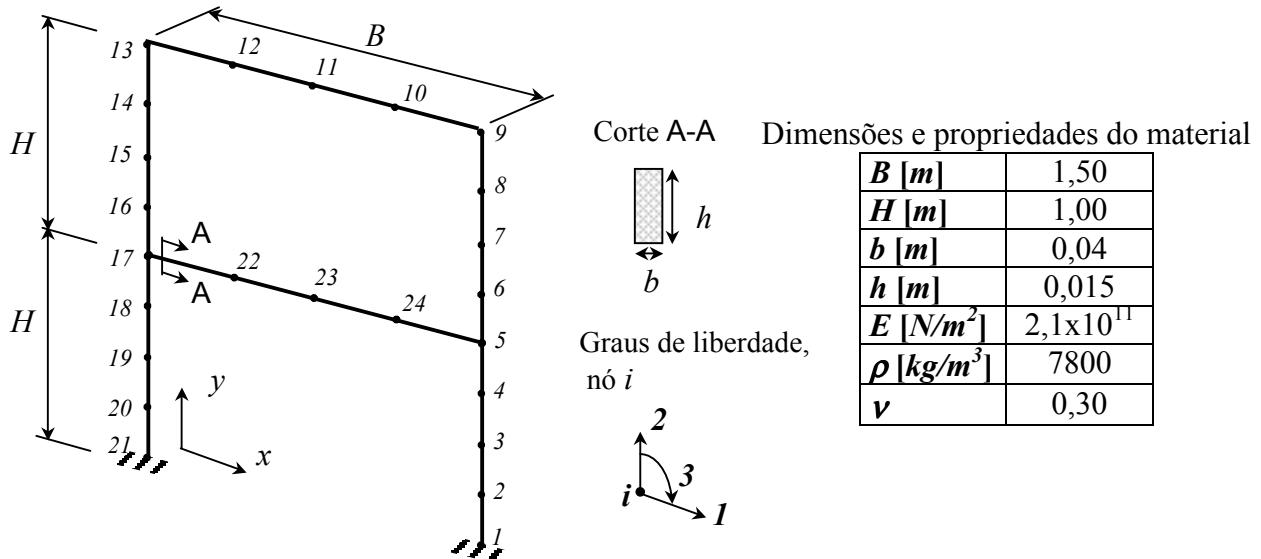


Figura 2. Modelo de elementos finitos de um pórtico.

A modelagem desta estrutura foi desenvolvida em ambiente MATLAB<sup>®</sup>. O modelo foi validado pela confrontação das respostas dinâmicas (parâmetros modais e funções de resposta em freqüência) com seus semelhantes, obtidos por meio de simulações realizadas em um programa comercial de elementos finitos. O efeito do carregamento nas respostas dinâmicas foi incluído na modelagem, os bons resultados na comparação das respostas dinâmicas confirmaram a confiabilidade do modelo utilizado.

### 3.2. Caracterização da Influência das Cargas Externas Sobre as Respostas Dinâmicas

A partir da aplicação de uma força concentrada vertical (paralela ao eixo  $y$ ), aplicada no nó central da viga superior (nó número 11) (ver Fig. 2), caracteriza-se a influência do carregamento sobre comportamento dinâmico da estrutura. Para tanto, o valor e sentido da força aplicada é variado, calculando-se, para os diferentes valores, as freqüências naturais do pórtico.

A Fig. 3 ilustra a modificação das freqüências naturais em função da variação da magnitude e do sentido de aplicação da carga (valores positivos indicam força aplicada segundo a orientação do eixo  $y$ ).

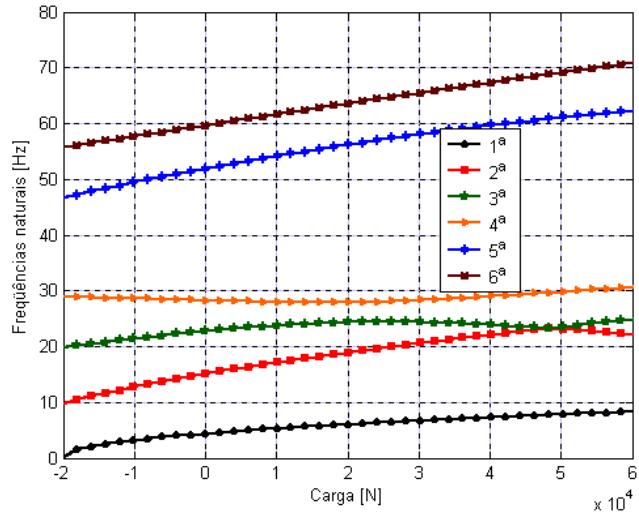
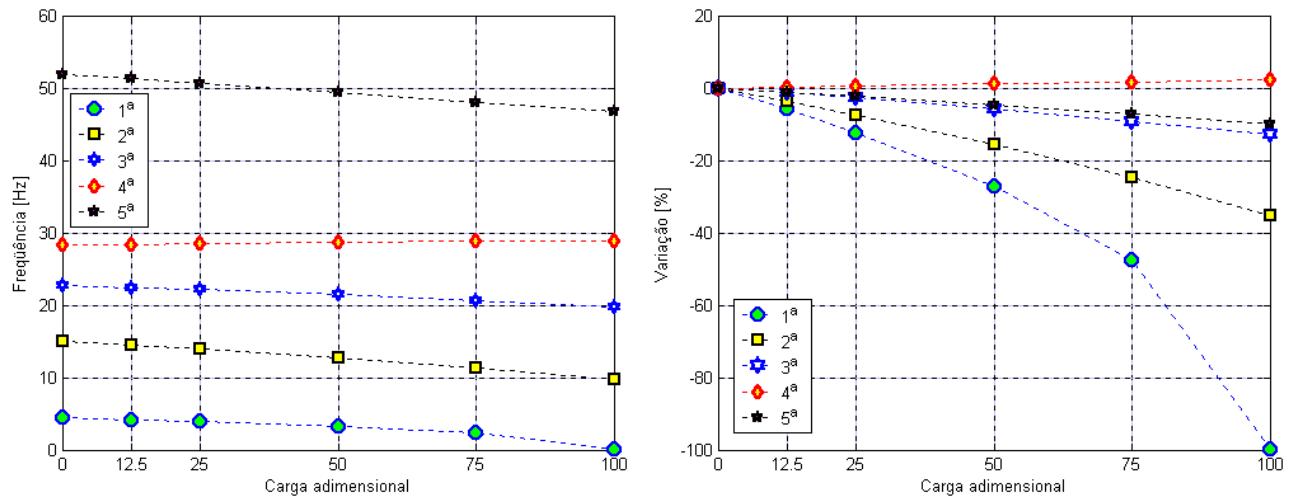


Figura 3. Variação das freqüências naturais em função da magnitude e sentido do carregamento.

Na figura anterior, observa-se a diminuição das freqüências naturais à medida que a carga oposta a  $y$  aumenta, ou seja, o pórtico perde rigidez com o acréscimo da carga. Verifica-se também que a primeira freqüência natural torna-se nula quando a estrutura é solicitada com o valor da carga que corresponde à carga de flambagem linear. Este resultado ilustra o critério dinâmico para a determinação da carga de flambagem, que consiste em encontrar a carga que anula a primeira freqüência natural (Chajes, 1974). Realizando este procedimento, para o caso estudado, encontra-se o, para a carga de flambagem da estrutura, o valor:  $P_{crit} = 20121$  [N].

A Fig. 4 mostra as variações (absolutas e relativas) das freqüências naturais em função de frações da carga crítica de flambagem, para os dois sentidos de aplicação da carga externa. Observa-se que, em geral, as freqüências naturais não apresentam nenhuma relação de proporcionalidade em relação à carga. A primeira freqüência natural sofre maiores variações que as demais e à medida que a carga se aproxima ao valor crítico, estas variações são mais acentuadas. A partir da segunda freqüência natural, nota-se que os valores das freqüências variam com o aumento de carga de forma aproximadamente linear. Quando o sentido da força aplicada é positivo em relação ao eixo  $y$ , verifica-se o aumento das freqüências naturais com o acréscimo de carga, ou seja, ocorre o enrijecimento da estrutura.



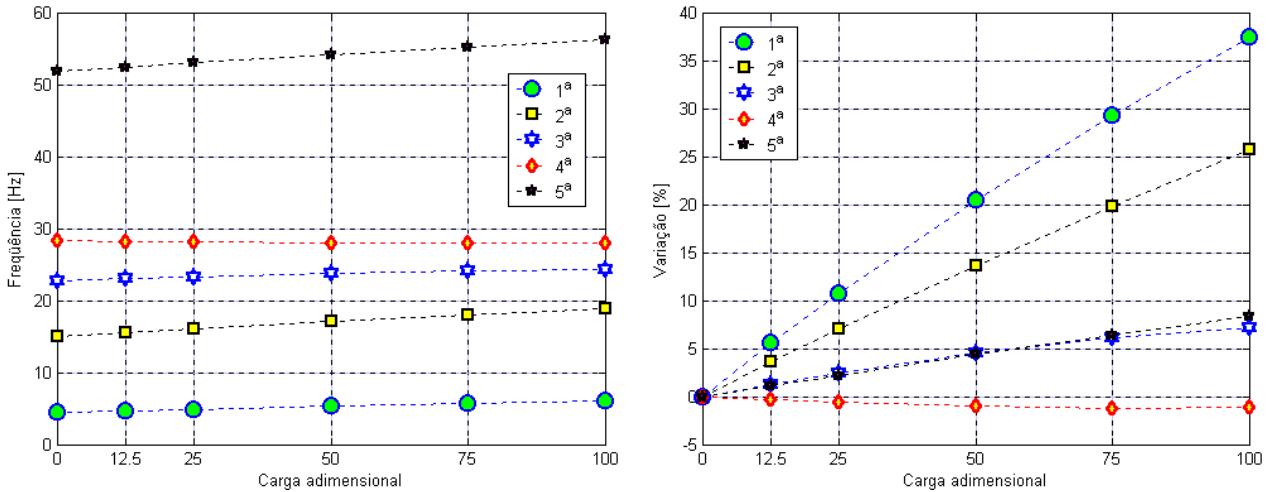


Figura 4. Freqüências naturais do pórtico em função do acréscimo da carga.

A Fig. 5 permite observar a influência do carregamento externo sobre algumas funções de resposta em freqüência do pórtico. São mostradas as amplitudes das FRFs pontuais e cruzadas correspondentes ao deslocamento transversal nos nós 7 e 9 do modelo ilustrado na Fig. 2, considerando-se um carregamento externo aplicado para baixo. Observa-se que quanto maior a carga aplicada, as ressonâncias e anti-ressonâncias tornam-se cada vez menores até que, sob o valor da carga de flambagem, o primeiro pico de ressonância ocorre à freqüência zero.

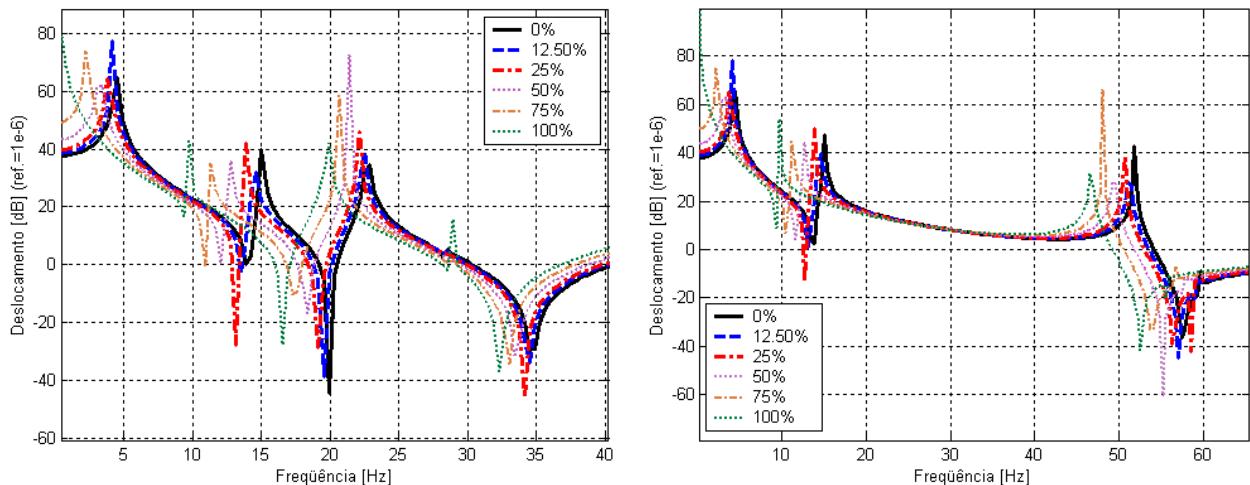


Figura 5. Amplitudes das FRFs  $H_{77}$  e  $H_{79}$  para diferentes valores da carga adimensional

### 3.3. Identificação de Cargas Externas

Com o objetivo de avaliar a eficiência da técnica de identificação de cargas externas, foi proposto identificar a magnitude de cada uma das forças esquematizadas na Fig. 6, na qual estão indicados os valores exatos. Neste problema, a posição e o sentido de aplicação das cargas foram consideradas conhecidas, de acordo com a ilustração da Fig. 6.

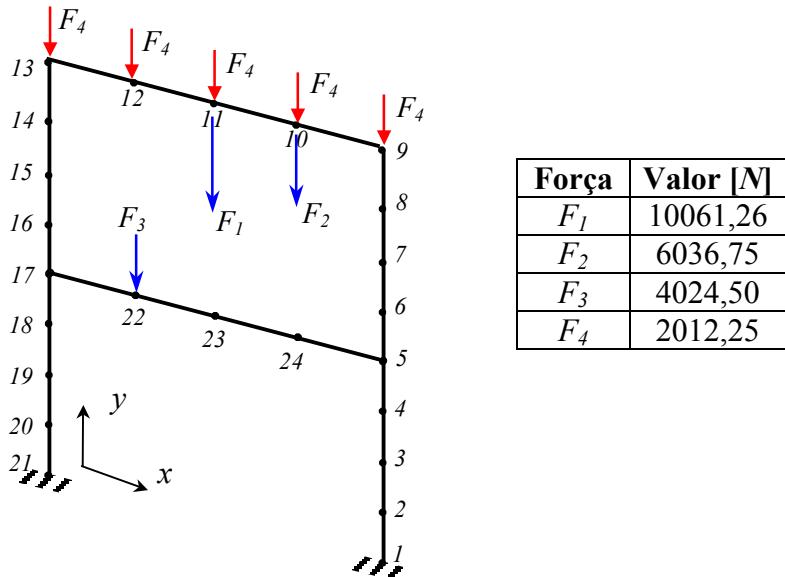


Figura 6. Cargas externas aplicadas no pórtico.

A função objetivo foi construída usando os 6 primeiros conjuntos de parâmetros modais e restringindo o valor da carga total identificada entre zero e o valor correspondente à primeira carga de flambagem. Propôs-se identificar sucessivamente, diferentes cenários de carregamento, caracterizados por um número crescente de cargas desconhecidas, objetivando avaliar a influência do número de incógnitas do desempenho do procedimento de identificação. No caso mais simples, quando foi identificada somente uma força, adotou-se a ponderação  $W_M = 0$ . A partir da identificação simultânea de duas até cinco forças, todos os fatores de ponderação da função objetivo, tiveram valor unitário.

Os resultados mostrados na Tab. 2, considerando os diferentes cenários de carregamento, permitem concluir que a técnica de otimização utilizada na identificação de várias cargas é eficiente, já que a minimização da função objetivo é alcançada e a diferença percentual entre as cargas conhecidas e identificadas é muito pequena. Nota-se, contudo, que quando são identificadas simultaneamente 5 forças, os resultados são menos precisos, o que pode ser atribuído à natural dificuldade de se resolver o problema de otimização em um espaço de busca de dimensão mais elevada. Em todos os casos, o tempo de processamento necessário mostrou-se bastante reduzido.

Tabela 2. Cargas identificadas no pórtico.

Carga [N]				Erro [%]	Função Objetivo		Tempo [min.]
	Identificada	E. Inicial	Exata		Inicial	Final	
$F_1$	- 10061,25	-15000	-10061,26	$9 \times 10^{-5}$	0,63	$1,7 \times 10^{-7}$	0,11
$F_1$	-10061,26	-12000	-10061,26	$9 \times 10^{-8}$			
$F_2$	-6036,75	-5000	-6036,75	$9 \times 10^{-8}$	4,21	$3,06 \times 10^{-7}$	0,23
$F_1$	-10061,20	-12000	-10061,26	$6 \times 10^{-4}$			
$F_2$	-6036,81	-5000	-6036,75	$9 \times 10^{-4}$	4,18	$2,93 \times 10^{-6}$	0,38
$F_3$	-4024,49	-3000	-4024,50	$2 \times 10^{-4}$			
$F_4$	-2077,72	-10000	-2012,25	3,25			
$F_4$	-1869,46	-10000	-2012,25	7,10			
$F_4$	-2064,72	-10000	-2012,25	2,61	16,44	$9,03 \times 10^{-5}$	0,62
$F_4$	-2084,93	-10000	-2012,25	3,61			
$F_4$	-1964,50	-10000	-2012,25	2,37			

A Fig. 7, ilustra a evolução da função objetivo durante o procedimento de minimização.

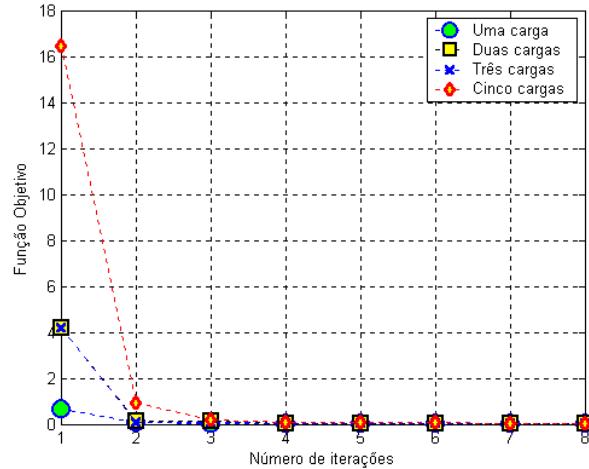


Figura 7. Evolução do valor da função objetivo.

## 4. CONCLUSÕES

As simulações numéricas evidenciam que as freqüências naturais e as funções de resposta em freqüência são alteradas com o módulo, direção e sentido de aplicação das cargas em sistemas estruturais constituídos por elementos de vigas. Cargas de compressão axial reduzem as freqüências naturais associadas aos modos de flexão, ou seja, tornam a estrutura mais flexível, enquanto cargas de tração as incrementam, provocando enrijecimento. Ficou também evidenciada a possibilidade de se identificar o carregamento externo a partir do conhecimento de um conjunto de respostas dinâmicas, procedimento que pode ser explorado em diversas situações práticas da engenharia de estruturas.

Como parte da continuação deste trabalho, em busca do aperfeiçoamento do algoritmo de identificação, estão sendo utilizados métodos heurísticos de otimização, os quais dispensam estimativas iniciais para as cargas desconhecidas, que devem ser fornecidas como ponto de partida para método clássico de otimização. Pretende-se também considerar o problema mais difícil em que não se conhece a posição e/ou sentido de aplicação das forças externas, além de realizar a validação experimental da metodologia de identificação, etapa esta que se encontra atualmente em curso.

## 5. AGRADECIMENTOS

J. E. Rojas agradece à CAPES e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFU pela concessão de sua bolsa de mestrado. D. A. Rade agradece ao CNPq pelo suporte às suas atividades de pesquisa através do processo 501051/2003-1.

## 6. REFERÊNCIAS

- Chajes, A., 1974, "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Greening, P.D., Lieven, N.A.J., 2000, "Effect of Experimental Pre-stress and Residual Stress on Modal Behavior", Philosophical Transactions of Royal Society London A 359, pp. 97-111.
- Greening, P.D., Lieven, N.A.J., 2003, "Identification and Updating of Loading in Frameworks Using Dynamic Measurements", Journal of Sound and Vibration, Vol. 260, pp. 101-115.
- Greening, P.D., Lieven, N.A.J., 1999, "Modeling Dynamic Response of Stressed Structures", Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Florida, pp. 103-108.

Lurie, H., 1952, "Lateral Vibrations as Related to Structural Stability", Journal of Applied Mechanics, pp. 195-204.

MATLAB® Version 6.0, 2001, The Mathworks, Inc., Natick, MA.

Mead, D. J., 2001, "Free Vibrations of Self-strained Assemblies of Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 249, pp. 101-127.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 1989, "The Finite Element Method", 4th ed, Vols. 1 and 2. New York: McGraw-Hill, 1989.

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores retêm os direitos autorais deste trabalho e são responsáveis pelo seu conteúdo.

# DETERMINATION OF LOADS IN FRAMES USING IDENTIFICATION METHODS BASED IN DYNAMIC RESPONSES

**Jhojan Enrique Rojas Flores**

Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering

Av. João Naves de Ávila 2160 - Campus Santa Mônica – P.O. Box 593 - CEP 38400902 - Uberlândia/MG, Brazil

[jerojas@mecanica.ufu.br](mailto:jerojas@mecanica.ufu.br)

**Domingos Alves Rade**

Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering

Av. João Naves de Ávila 2160 - Campus Santa Mônica – P.O. Box 593 - CEP 38400902 - Uberlândia/MG, Brazil

[domingos@ufu.br](mailto:domingos@ufu.br)

**Abstract:** This paper presents a study on the influence of the so-called stress-stiffening effect on the dynamic characteristics of structural systems. It is proposed an inverse procedure intended for the determination of external loads, given the dynamic responses of the loaded structure and a finite element model. The dynamic responses are characterized in terms of modal parameters (natural frequencies and mode shapes) as well as frequency response functions. The variations observed in the natural frequencies as functions of the loads are interpreted in the context of a dynamic criterion for determination of critical buckling loads. The identification procedure is illustrated by means of numerical simulations in which natural frequencies and mode shapes of the structure subjected to external loads are used to form a cost function having those loads, assumed to be unknown, as the design variables. The optimization problem is solved by using a linear search algorithm based on the Lagrange-Newton-SQP (Sequential Quadratic Programming) method. Based on the results obtained, it is concluded about the efficiency of the load identification method based on the dynamic responses.

**Keywords:** system identification, inverse problems, dynamic responses, buckling.