

# REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES EM MÁQUINAS ROTATIVAS UTILIZANDO CONTROLE ÓTIMO

**Ricardo Corrêa Simões**

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Campus Santa Mônica,  
Bloco 1M, Avenida João Naves de Ávila 2160  
rcsimoes@mecanica.ufu.br

**Valder Steffen Jr.**

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Campus Santa Mônica,  
Bloco 1M, Avenida João Naves de Ávila 2160  
vsteffen@mecanica.ufu.br

**Resumo:** *As máquinas rotativas são equipamentos utilizados em aplicações de alto nível de exigência (indústrias aeronáutica, petroquímica, de geração de energia e de alto desempenho). A minimização dos níveis de vibração da máquina é um requisito que deve ser cumprido para que esta opere com eficiência e não venha a apresentar uma quebra prematura. O uso de técnicas de controle ativo de vibrações em rotores tem mostrado ser mais eficiente e versátil que o uso de técnicas de controle passivo. Este trabalho apresenta um estudo preliminar sobre o controle ativo de rotores através do emprego do método do controle ótimo. Primeiramente o comportamento dinâmico do rotor é representado pelo Método dos Elementos Finitos (F.E.M.) e a técnica de redução pseudo-modal é usada para diminuir o tamanho do modelo completo. Então é projetado um controlador ótimo e os ganhos do controle são calculados para cada velocidade de operação do rotor.*

**Palavras-chave:** *Máquinas Rotativas, Resposta ao Desbalanceamento, Controle Ativo, Controle Ótimo.*

## 1. INTRODUÇÃO

As máquinas rotativas são equipamentos utilizados em vários tipos de indústrias, dentre as quais se destacam: petroquímica, aeronáutica e de geração de energia. Devido ao alto nível de exigência de tais serviços, a minimização do nível de vibração no rotor é um requisito que deve ser cumprido. Por outro lado, elevados níveis de vibração podem levar o equipamento à quebra, e isto leva a perdas econômicas, inconvenientes aos usuários de serviços, ou até mesmo perdas de vidas humanas, dependendo do equipamento em questão. Então, o problema que surge é como controlar de forma conveniente a vibração em máquinas rotativas.

O uso de controladores passivos de vibração é a primeira alternativa à disposição dos projetistas, ou seja, reprojeter a máquina modificando o amortecimento distribuído no sistema, especialmente nos mancais. Entretanto, existem máquinas em funcionamento que já apresentam níveis de vibração além dos aceitáveis e também outras máquinas, a serem projetadas, nas quais o uso de sistemas de dissipação passivos não conseguiriam cumprir os requisitos de projeto, quanto aos níveis de vibração máximos

aceitáveis, Adams e MclosKey (1990). O controle ativo atua na estrutura com a tarefa de reduzir suas vibrações, aplicando-lhe forças de controle. Tais forças são calculadas pelo controlador do sistema a partir do sinal de retroalimentação dos sensores e do valor do nível de vibração final que se deseja para o sistema controlado. O surgimento e o desenvolvimento de materiais inteligentes, tais como cerâmicas piezelétricas, fluídos eletro-reológicos e magneto-reológicos, etc, propiciou um grande avanço nas pesquisas acadêmicas na área de controle ativo, restando ainda o desafio de tornar estas técnicas aplicáveis com rentabilidade econômica na maioria das situações industriais.

O uso de técnicas de controle ativo em dinâmica de rotação, com o objetivo de reduzir vibrações, vem despertando o interesse de vários pesquisadores há quase três décadas. Schweitzer e Lange (1976), Burrows et al (1989) propõem o uso de atuadores magnéticos no controle ativo de rotores. Palazzolo et al (1989) mostram a viabilidade do uso de atuadores piezelétricos instalados em um plano para o controle de vibrações de rotores operando em rotações transientes, e Palazzolo et al (1991) fazem também uso de atuadores piezelétricos dispostos em dois planos para realizar a mesma tarefa. Malhis et al (2002) simulam o controle de um rotor através de atuadores piezelétricos usando lógica Fuzzy. Althaus et al (1993), Ulbrich e Althaus (1989) e Nicoletti e Santos (2001) usam atuadores hidráulicos como dispositivo para controlar vibração em rotores. Forte et al (2002) testam um amortecedor com fluído magnetorreológico para a construção de um amortecedor ativo numa bancada de rotor. O presente trabalho apresenta um estudo preliminar sobre o uso do controle ótimo como forma de reduzir vibrações em máquinas rotativas.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS.

### 2.1. Equações do Movimento

Rotores flexíveis são sistemas dinâmicos compostos por elementos tais como discos, eixos flexíveis, mancais e selos. A equação que descreve o movimento do rotor pode ser obtida aplicando-se a equação de Lagrange, Eq.(1), às expressões que fornecem as energias para os elementos do rotor. Informações mais detalhadas sobre as equações do movimento do rotor podem ser encontradas em Lalanne e Ferraris (1998).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Fq_i \quad (1)$$

onde  $q_i$  são as coordenadas generalizadas independentes,  $Fq_i$  são as forças generalizadas e  $T$  e  $U$  são as energias cinética e de deformação do sistema, respectivamente.

O elemento de disco é assumido como sendo rígido e portanto tem apenas energia cinética. Os elementos de eixo têm tanto energia cinética como de deformação. Um elemento finito de eixo é mostrado na Fig.(1): o elemento tem 2 nós, sendo que cada nó tem 4 graus de liberdade, ou seja, 2 translações ( $u$ ,  $v$ ), and 2 rotações ( $\theta$ ,  $\psi$ ).

Os graus de liberdade do elemento de eixo podem ser arranjados dentro de dois vetores,  $\delta u$  (deslocamento ao longo da direção  $X$ ) e  $\delta w$  (deslocamento ao longo da direção  $Z$ ), Eq.(2) e Eq. (3), respectivamente.

$$\delta u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \quad (2)$$

$$\delta w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \quad (3)$$

Os deslocamentos  $u$  and  $w$  podem ser aproximados por:

$$u = N_1(y)\delta u \quad (4)$$

$$w = N_2(y)\delta w \quad (5)$$

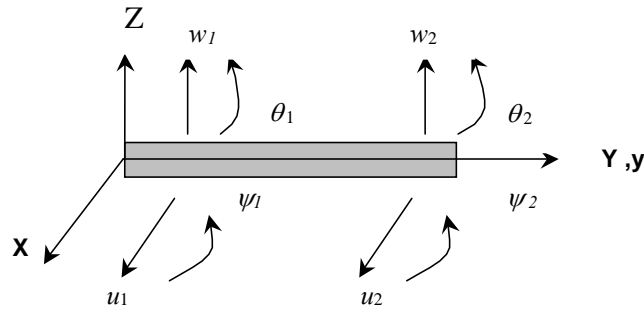


Figura 1. Graus de liberdade de um elemento finito de eixo

onde  $N_1(y)$  e  $N_2(y)$  são funções de forma cúbica para uma viga em flexão. As relações entre deslocamentos e rotações são dadas:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

A energia cinética  $T_s$  e a energia de deformação  $U_s$  são dadas pelas seguintes expressões:

$$T_s = \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left\{ (\dot{\theta})^2 + (\dot{\psi})^2 \right\} dy + \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left\{ (\dot{u})^2 + (\dot{w})^2 \right\} dy - 2I\rho\omega \int_0^L \dot{\psi}\theta dy + \rho IL\Omega^2 \quad (8)$$

$$U_s = \frac{E \cdot I}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (9)$$

onde  $I$  é o momento de inércia de área da seção transversal do eixo,  $S$  é a área da seção transversal do eixo,  $\rho$  é a densidade do material do eixo e  $L$  é o comprimento do elemento. Substituindo as aproximações feitas para os deslocamentos do rotor dentro das Eq.(8) e Eq.(9) e aplicando a equação de Lagrange na expressão resultante, obtém-se a matriz de massa clássica ( $M$ ), a matriz de massa secundária ( $M_s$ ), a matriz giroscópica ( $G$ ) e a matriz de rigidez ( $K$ ) para os elementos de eixo. A matriz de massa clássica e a matriz de massa secundária dos elementos de eixo devem ser somada à matriz de massa dos elementos de discos. Deve-se também somar as matrizes giroscópicas dos elementos de eixo às dos elementos de discos. Igualmente, deve-se somar as matrizes de rigidez dos elementos de eixo às matrizes de rigidez dos elementos de mancal. Todas estas matrizes são detalhadas em Lalanne e Ferraris (1998).

## 2.2. O Controlador

As equações em espaço de estado para o rotor são dadas por:

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot u \quad (10-a)$$

$$Y = C \cdot X + D \cdot u \quad (10-b)$$

onde  $X$  é o vetor de estado,  $Y$  é o vetor de resposta,  $A$  é matriz da dinâmica do sistema,  $B$  é a matriz de controle do sistema,  $C$  é matriz de resposta e  $D$  é a matriz que relaciona a força de controle  $u$  com a resposta do sistema  $Y$ , sendo geralmente uma matriz nula. Para sistemas mecânicos vibratórios com  $n$  graus de liberdade, o vetor  $X$  é definido como:

$$X = \{x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \cdots \quad \dot{x}_n\}^T \quad (11)$$

então, a matriz dinâmica  $A$  é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} Z & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot D_S \end{bmatrix} \quad (12)$$

onde  $Z$  é uma matriz nula de dimensão  $n \times n$ ,  $I$  é uma matriz identidade de dimensão  $n \times n$ ,  $M$  é a matriz de massa do sistema,  $K$  a matriz de rigidez e  $D_S$  é a matriz de amortecimento. No caso do estudo de sistemas giroscópicos,  $D_S$  engloba a matriz de amortecimento e a matriz giroscópica. A matriz  $B$  está relacionada com os atuadores presentes no sistema e a matriz  $C$  tem ver com os sensores.

A técnica da redução pseudo-modal é usada para reduzir a ordem do modelo de elementos finitos e visa estabelecer o controle para os  $m$  primeiros modos do rotor. Seja a base de transformação  $\Phi$  formada pelos  $m$  primeiros modos do sistema não-amortecido e não-giroscópico associado. As matrizes de massa, rigidez e amortecimento + giroscópica reduzidas são dadas respectivamente por:

$$\tilde{M} = \Phi^T \cdot M \cdot \Phi \quad (13)$$

$$\tilde{K} = \Phi^T \cdot K \cdot \Phi \quad (14)$$

$$\tilde{D}_S = \Phi^T \cdot D_S \cdot \Phi \quad (15)$$

Assim a nova matriz dinâmica é definida:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} Z & I \\ -\tilde{M}^{-1} \cdot \tilde{K} & -\tilde{M}^{-1} \cdot \tilde{D}_S \end{bmatrix} \quad (16)$$

As equações em espaço de estado para o sistema reduzido são então dadas por:

$$\dot{X}_R = \tilde{A} \cdot X_R + \tilde{B} \cdot u \quad (17-a)$$

$$Y = \tilde{C} \cdot X_R + D \cdot u \quad (17-b)$$

onde  $\tilde{B}$  e  $\tilde{C}$  são as matrizes de controle e de resposta do sistema reduzido, respectivamente, e o vetor  $X_R$  é dado por:

$$X_R = \{p \ \dot{p}\} \quad (18)$$

A resposta do sistema giroscópico ( $\delta$ ) é escrita como uma combinação linear dos modos do sistema não-giroscópico associado:

$$\delta = \Phi \cdot p \quad (19)$$

### 2.2.1. O Controle Ótimo

O advento dos computadores digitais conduziu ao desenvolvimento e a utilização da teoria de controle moderno. Esta teoria permite a obtenção de um desempenho ótimo que atende a algum critério de desempenho especificado. Ela envolve a minimização (ou maximização) de um dado *índice de desempenho* (I.D.). Este método, ao contrário das técnicas de controle convencionais, faz uso acentuado de análise matemática.

Dado o sistema descrito pela eq. (17-a), segundo Ogata (1970), considera-se que o problema de controle ótimo é encontrar a matriz  $K_O$  que multiplica o vetor de estado  $X_R$  e fornece a força de controle  $u$ :

$$u = -K_O \cdot X_R(t) \quad (20)$$

de modo a minimizar o I.D. definido por:

$$J = \int_0^\infty (X_R^t \cdot Q \cdot X_R + u^t \cdot R \cdot u) dt \quad (21)$$

onde  $Q$  é uma matriz positiva-definida (ou positiva-semidefinida) real e simétrica que está relacionada com a importância relativa de cada estado e  $R$  é uma matriz positiva-definida real e simétrica que está relacionada como gasto de energia para se efetuar o controle (regulador quadrático linear). O diagrama de blocos da Fig.(2) mostra a configuração de um sistema usando o controle ótimo.

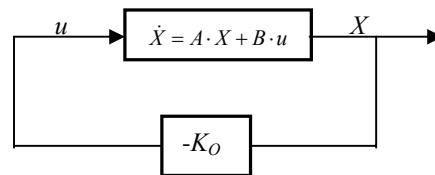


Figura 2. Fluxograma do controle ótimo de um sistema

A matriz  $K_O$  que resolve o problema de controle ótimo é dada por:

$$K_O = R^{-1} \cdot \tilde{B}^t \cdot P \quad (22)$$

onde  $P$  é uma matriz positiva-definida obtida resolvendo-se a Eq.(23), conhecida como Equação de Riccati.

$$\tilde{A}^t \cdot P + P \cdot \tilde{A} - P \cdot \tilde{B} \cdot R^{-1} \cdot \tilde{B}^t \cdot P + Q = 0 \quad (23)$$

### 3. ATUADORES PIEZELÉTRICOS.

Os atuadores piezelétricos aparecem como uma alternativa importante para o controle de máquinas rotativas. Materiais piezelétricos, quando submetidos a deformação mecânica, geram cargas elétricas em sua superfície, sendo este efeito conhecido como efeito piezelétrico direto. Ao contrário, quando aplica-se uma tensão elétrica na superfície destes materiais, eles se deformam e este fenômeno é denominado efeito piezelétrico inverso. Se uma cerâmica piezelétrica for colada na superfície de uma estrutura e submetida a uma tensão elétrica controlada, pode-se então aplicar um momento na estrutura.

Em determinadas aplicações, como no caso aqui estudado, a necessidade inerente de alta rigidez, faz com que o atuador piezelétrico seja constituído de uma pilha de discos de cerâmica piezelétrica, montados uns sobre os outros e conectados eletricamente em paralelo., Fig. (3).



Figura 3. Atuadores piezelétricos de pilha de discos

### 4. RESULTADOS DE SIMULAÇÕES.

Foram feitas simulações computacionais para testar o desempenho do controlador ótimo para um rotor excitado por uma força de desbalanceamento. A matriz de ganho  $K_O$  foi calculada para cada velocidade de operação do rotor. O cálculo desta matriz foi realizado usando a função *dlqr* do programa Matlab®. Os argumentos de entrada desta função são as matrizes  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $Q$ ,  $R$ .

A Figura (4) mostra o modelo de elementos finitos do rotor a ser controlado, assim definido: 14 elementos de eixo, 2 elementos de disco (nós 1 e 15) e 2 elementos de mancal (nós 3 e 13). A massa dos discos e dos mancais é de 1,5 Kg, os mancais são simétricos nas direções  $x$  e  $z$  com rigidez  $8 \cdot 10^6$  N/m. A força de controle é aplicada nos nós dos mancais nas direções  $x$  e  $z$ . A dimensão da matriz  $A$  do sistema completo é  $120 \times 120$ , os oito primeiros modos do sistema não-giroscópico são usados para compor a matriz de transformação  $\Phi$ , sendo portanto a dimensão da matriz  $\tilde{A}$  usada para calcular o controlador de ordem  $16 \times 16$ .

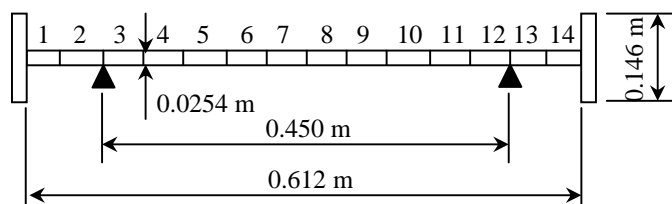


Figura 4: Rotor

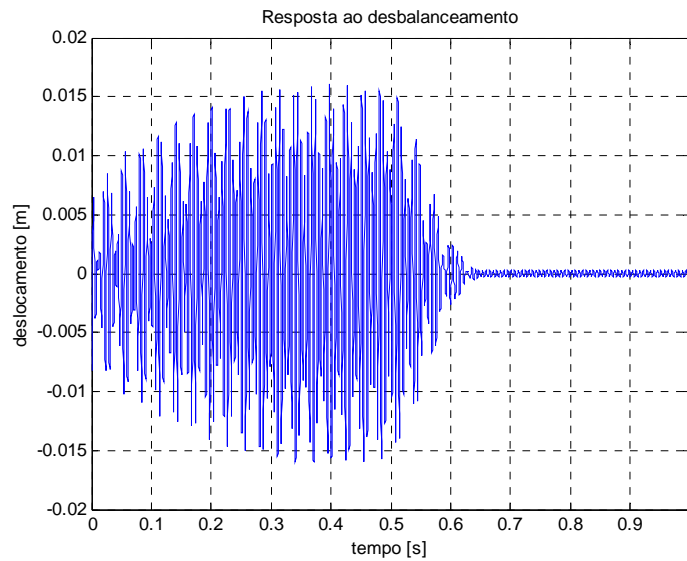


Figura 5. Resposta ao desbalanceamento no nó 1, direção  $x$

O rotor é excitado por uma massa desbalanceada de 0.005 Kg, localizada na borda do disco do nó 15, e opera numa faixa de 0 a 25000 rpm. Dentro desta faixa existem três velocidades críticas: 10060, 10940 e 13820 rpm. A Figura (5) mostra a resposta ao desbalanceamento no nó 1 na direção  $x$  com a máquina operando a 10060 rpm. O controle começa a atuar sobre o rotor no instante de tempo 0,5 segundos.

A resposta ao desbalanceamento em função da velocidade de operação da máquina é mostrada nas figuras 6 a 10. Na primeira situação, os valores da matriz  $R$  são constantes para qualquer velocidade de operação (Fig. (6) e Fig. (7)), e estes valores foram escolhidos de forma a controlar o rotor operando na sua primeira velocidade crítica. No segundo caso, os valores da matriz  $R$  podem variar, dependendo da velocidade de operação da máquina, (Fig. (8), Fig.(9) e Fig.(10)) .

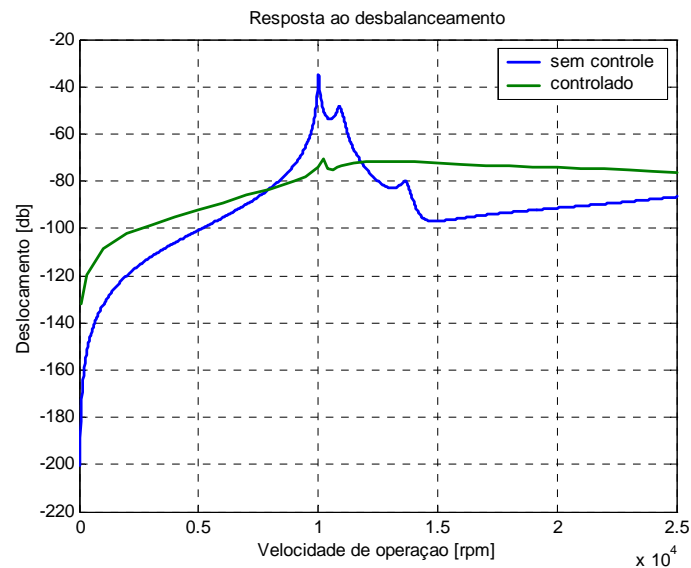


Figura 6: Resposta ao desbalanceamento no nó 1, direção  $x$

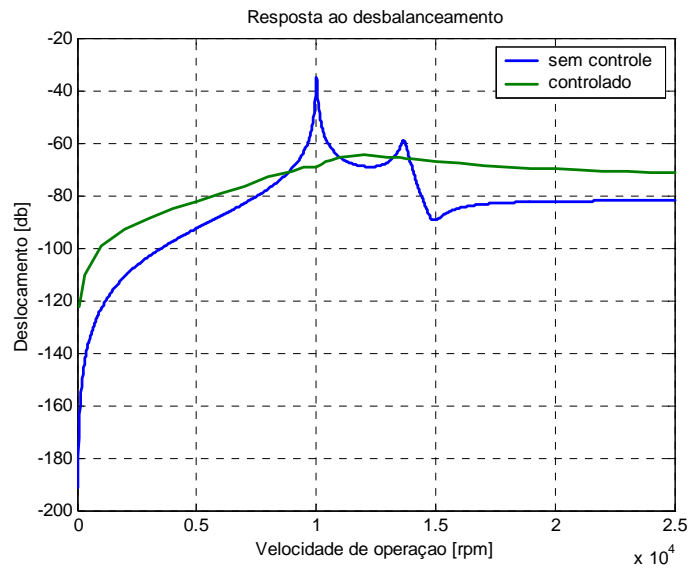


Figura 7. Resposta ao desbalanceamento no nó 8, direção  $x$

A Figura (6) e a Fig. (7) mostram que os controladores obtidos usando  $R$  com valores constantes atenuam a vibração do rotor na sua primeira e segunda velocidades críticas observadas no nó 1, e na sua primeira e terceira velocidades críticas observadas no nó 8. A vibração do rotor controlado é maior que a do sistema sem controle em velocidades de operação menores que a primeira crítica e maiores que terceira crítica. Isto pode ser explicado pelo fato de que os valores de  $R$  foram escolhidos para minimizar a vibração na primeira crítica, e o uso desses mesmos valores para velocidades diferentes compromete o funcionamento adequado do controlador.

Variando  $R$  com a velocidade de operação, há uma queda considerável na vibração do rotor para velocidades abaixo da primeira crítica, como pode ser visto nas figuras 8 a 10. Porém, a vibração do rotor controlado ainda é maior do que a do sistema sem controle para velocidades de operação maiores que a terceira crítica conforme observadas nos nós 1 e 8. Isto pode ser devido à redução modal, que causa um fenômeno conhecido como *spillover* (espalhamento). O espalhamento é a influência dos modos mais altos, que são desprezados na redução modal, sobre a faixa de frequência considerada

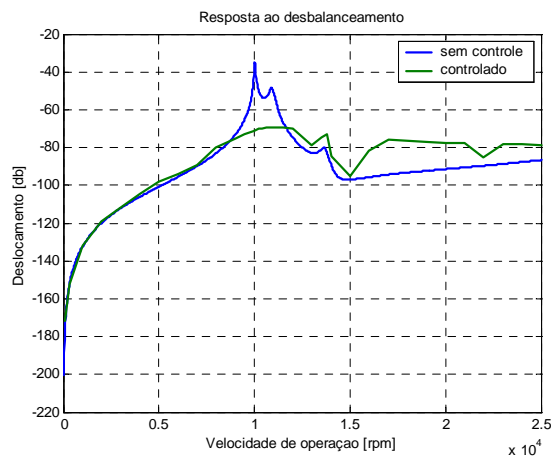


Figure 8. Resposta ao desbalanceamento no nó 1, direção  $x$



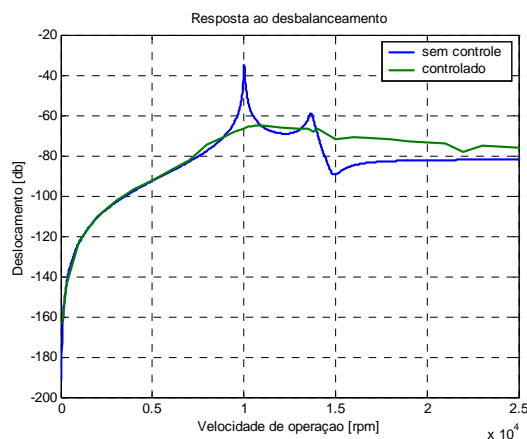


Figure 9. Resposta ao desbalanceamento no nó 8, direção  $x$

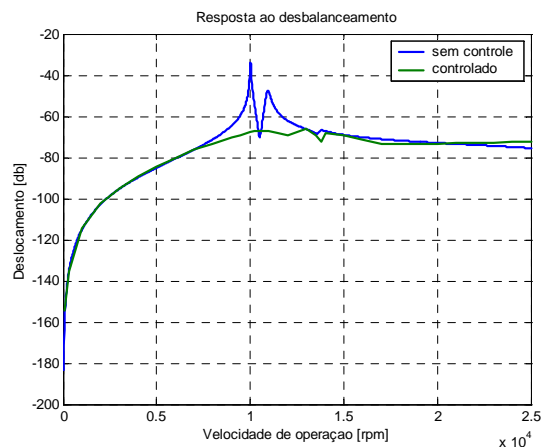


Figure 10. Resposta ao desbalanceamento no nó 15, direção  $x$

## 5. CONCLUSÕES.

Os controladores ótimos projetados apresentaram boa performance para atenuar a vibração do rotor na sua primeira e segunda velocidades críticas. A performance também pode ser considerada satisfatória para terceira crítica. Para velocidades de operação maiores que a terceira crítica os controladores não foram eficientes. O próximo passo dessa pesquisa será calcular um controlador para o rotor funcionando em regime transiente.

## 6. REFERÊNCIAS.

- Adams, M. L., and McClosKey, T. H., 1990, "A Feasibility and Technology Assessment For Implementation of Active Rotor Vibration Control System in Power Plant Rotating Machinery".
- Althaus, J., Stelter, P., Feldkamp, B. and Adam, H., 1993, "Aktives Hydraulisches Large Für Eine Schneckenzenrifuge", Schwingungen in Rotierenden Maschinen II, Wiesbaden, Germany, pp.28-36.
- Burrows, C. R., Sahinkaya, M. N. and Clements, S., (1989), "Active Vibration Control of Flexible Rotors: An Experimental and Theoretical Study", Proc. R. Soc. London. A 422, pp.123-146.
- Forte, P., Paternò, M., and Rustighi, E., 2002, "A Magnetorheological Fluid Damper for Rotor Applications" Proc. of Sixth International Conference on Rotor Dynamic, Sydney, Australia, Vol I, pp.63-70.

- Lalane, M., and Ferraris, G., 1997, "Rotordynamics Prediction in Engineering," 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York.
- Malhis, M., Gaudiller, L., and Der Hagopian, J., 2002, "Fuzzy Modal Control of a Flexible Rotor by Piezoelectric Actuators Arranged on a Plane", Proc. of Sixth International Conference on Rotor Dynamic, Sydney, Australia, Vol I, pp.101-108
- Nicoletti, R., and Santos, I. F., 2001, "Vibration Reduction of Rotating Systems Using Tilting-Pad Bearings and PD Controllers", Proc. of Ninth International of Dynamic Problems of Mechanics, Florianópolis, Brazil, pp.303-308.
- Ogata, K., 1970, "Engenharia de Controle Moderno", Editora Prentice/Hall do Brasil Ltda., Rio de Janeiro.
- Palazzolo, A. B., Lin, R. R., Alexander, R. M., Kascak, A. F., Montague, G. T. 1989, "Piezoelectric Pusher for Active Vibration Control of Rotating Machinery", Transactions of ASME, July, Vol. 111, 298-305.
- Palazzolo, A. B., Kascak, A. F., Montague, G. T., and Kiraly, L. J., 1991, "Hybrid Active Vibration Control of Rotorbearing Systems Using Piezoelectric Actuators", Modal Analysis, Modelling, Diagnostics, and Control - Analytical and Experimental, ASME, Vol. 38.
- Schweitzer, G., and Lange, R., 1976, "Characteristics of a Magnetic Rotor Bearing for Active Vibration Control", In ImechE Conf. On Vibs. In Rotating Machinery, Cambridge, Paper no. C239/76.
- Ulbrich, H., and Althaus, J., 1989, "Actuator Design for Rotor Control", 12th Conference on Vibration and Noise, Montreal, Canada, pp.17-22

## **VIBRATION REDUCTION IN ROTATING MACHINES USING OPTIMAL CONTROL**

**Ricardo Corrêa Simões**

School of Mechanical Engineering, Federal University of Uberlândia, Campus Santa Mônica Building 1M, João Naves de Ávila Avenue 2160, Uberlandia MG  
rcsimoes@mecanica.ufu.br

**Valder Steffen, Jr.**

School of Mechanical Engineering, Federal University of Uberlândia, Campus Santa Mônica, Building 1M, João Naves de Ávila Avenue 2160, Uberlandia MG  
vsteffen@mecanica.ufu.br

**Abstract:** *Rotating machines are used in various industrial applications involving sophisticated technology and submitted to high performance requirements (aeronautical, petrochemical, energy generation, etc). The attenuation of the vibration level of these machines assures safe and efficient operation, while avoids premature collapse. The use of vibration active control techniques in flexible rotors has shown to be more efficient and versatile than the use of passive control techniques. This paper presents a preliminary study about active control of rotors by using optimal control techniques. First, the dynamic behavior of the rotor is modeled by using the Finite Element Method (F.E.M.), then the pseudo-modal reduction technique is used to reduce the size of the complete model. Finally, an optimal controller is designed and control gains are calculated for each operation speed of the rotor.*

**Key-Words:** *Rotating Machines, Unbalance Response, Active Control, Optimal Control.*