IDENTIFICAÇÃO DO AMORTECIMENTO UTILIZANDO DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Odair Antonio Nunes Junior E-mail: odair@dem.feis.unesp.br
UNESP – FEIS "Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira"
Av. Brasil nº56 - CEP-15385-000 – Ilha Solteira – SP - Fone: (018) 3743 1041

Adailton Silva Borges E-mail: adailton@dem.feis.unesp.br
UNESP – FEIS "Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira"
Av. Brasil nº56 - CEP-15385-000 – Ilha Solteira – SP - Fone: (018) 3743 1041

João Antonio Pereira E-mail: japereir@dem.feis.unesp.br
UNESP – FEIS "Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira"
Av. Brasil nº56 - CEP-15385-000 – Ilha Solteira – SP - Fone: (018) 3743 1041

Resumo: *O presente artigo mostra uma estimativa do amortecimento usando uma técnica de identificação baseada apenas na resposta, denominada Decomposição no Domínio da Freqüência (DDF). Neste caso, o amortecimento é estimado sem conhecer as forças de excitação do sistema. O trabalho discute como identificar o amortecimento de uma estrutura medindo apenas a resposta da estrutura, quando a mesma é submetida a algum tipo de excitação de banda larga. São abordados os conceitos básicos envolvidos na análise modal conhecendo apenas as respostas, cuja a formulação é baseada na decomposição no domínio da freqüência. A matriz de densidade espectral de saída é decomposta em um conjunto de sistemas de um grau de liberdade utilizando a técnica da decomposição em valores singulares (SVD) e posteriormente as razões de amortecimento são estimados. A técnica foi ilustrada em um sistema simulado de dois graus de liberdade e os resultados obtidos mostraram-se muito promissores. Posteriormente, os resultados serão avaliados com testes experimentais.*

Palavras-chave*: Análise Modal, Amortecimento, Decomposição no Domínio da Freqüência, Decremento Logarítmico, Densidade Espectral de Potência.*

1. INTRODUÇÃO

A identificação modal é o processo de estimativa dos parâmetros modais de uma estrutura a partir das respostas de vibração medidas em um conjunto de posições previamente selecionadas da estrutura. Na análise modal convencional, a formulação do problema leva a um modelo matemático, o qual permite estabelecer uma relação entre a excitação (input) e a resposta (output) da estrutura em termos dos seus parâmetros modais, freqüência natural, razão de amortecimento e modos de vibrar (Ewins, D. J, 1984; Soneys, R., 1992; Maia, S., 1997). A relação entrada-saída é calculada a partir da excitação e das respostas capturadas nos respectivos pontos de excitação e medição previamente selecionados. Neste caso, obtém-se um conjunto de funções complexas $H_{ij}(i\omega)$ que estabelece uma relação entre a força de excitação aplicada no ponto *j* e a resposta medida no ponto *i*, denominadas Funções de Resposta em Freqüência FRF(s).

Os parâmetros modais do modelo são estimados a partir das FRF(s) medidas, geralmente em condições de laboratório bem controladas em que a excitação da estrutura é medida. Entretanto, o comportamento vibro-acústico de uma estrutura em condições de operação, pode ser significativamente diferente da situação de um teste de laboratório, devido a efeitos de pré-tensão, suspensão do sistema e outros. Portanto, a identificação do modelo modal da estrutura a partir das condições de operação poderia ser mais adequada. Na Análise Modal utilizando apenas a resposta do modelo, esta situação poderia ser melhor satisfeita. Neste caso, seriam utilizados apenas os dados das respostas e as forças de excitação não necessitariam ser medidas como no caso clássico. As chamadas técnicas de identificação modal com base apenas na resposta (Brincker, R, L. Zhang and P. Andersen, 2000) permite a identificação modal sem conhecer a excitação.

As técnicas de análise modal utilizando apenas a saída são aplicadas geralmente para estruturas de grande porte, tanto na área de engenharia civil como mecânica, visto que essas estruturas são difíceis de serem excitadas artificialmente. Neste caso, uma forma mais adequada para excitar a estrutura do que aplicar um carregamento artificial é considerar o carregamento natural como uma fonte de excitação. Exemplos desses tipos de excitações incluem cargas da onda em estruturas *offshore*, cargas do vento em edifícios, cargas do tráfego em pontes e outros. A excitação das estruturas pode ser realizada pelas próprias cargas naturais (ambiente) que atuam no modelo, o que torna difícil o controle ou medida das forças que excitam a estrutura. Nesses casos, são medidas apenas as respostas naturais da estrutura e os parâmetros modais são estimados através da identificação modal utilizando apenas a saída. As principais vantagens dessa técnica seriam a economia de tempo na montagem dos testes experimentais, pois não é necessário a utilização de um equipamento para excitar a estrutura, além do que, os testes não interferem na operação da estrutura e a resposta medida representa exatamente as condições reais de operação da mesma. Em contra partida, a identificação dos parâmetros de interesse é mais complexas, pois a entrada não é conhecida e as medidas são geralmente contaminadas com ruído.

O presente artigo discute como identificar o amortecimento de uma estrutura medindo apenas a resposta da estrutura, quando a mesma é submetida a algum tipo de excitação de banda larga. São abordados os conceitos básicos envolvidos na análise modal conhecendo apenas as respostas, cuja a formulação é baseada na decomposição no domínio da freqüência. A matriz de densidade espectral de saída é decomposta em um conjunto de sistemas de um grau de liberdade utilizando a técnica da decomposição em valores singulares (SVD) e posteriormente as razões de amortecimento são estimados.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A relação entre a entrada (excitação) f(t) e a saída x(t) de um sistema no domínio da freqüência pode ser expressa (Bendat e Piersol, 1993; Maia, 1997), pela Eq. (1).

$$G_{xx}(jw) = \overline{H}(jw)\, G_{ff}(jw)\, H^T(jw) \quad (1)$$

onde, $G_{ff}(j\omega)$ é a matriz densidade espectral de potência (PSD) da entrada e $G_{xx}(j\omega)$ é a matriz densidade espectral de saída. Para r entradas, G_{ff} é de ordem rxr e a matriz de saída G_{xx} é de ordem mxm, sendo m é o número de respostas medidas. $H(j\omega)$ é a matriz Função de Resposta em Freqüência (FRF) de ordem mxr, a barra na matriz H denota o conjugado complexo e o sobrescrito T denota a transposta.

A matriz H pode ser adequadamente reescrita na forma de frações parciais (Formenti, 1997 e Heylen et al., 1993), Eq. (2).

$$H(jw) = \sum_{K=1}^{n} \frac{R_K}{jw - l_K} + \frac{\overline{R}_K}{jw - \overline{l}_k} \quad (2)$$

onde, R_k é definido como o resíduo para o K-ésimo pólo, n é o número de modos. Na Análise Modal o resíduo R_k pode ser definido em termos dos modos, Eq. (3).

$$R_k = j_k g_k^{\ T} \quad (3)$$

onde, φ_k é o k-ésimo modo de vibrar e γ_k é o vetor participação modal. Assumindo que a entrada seja um ruído branco, tem-se que a matriz de densidade espectral é constante, ou seja, $G_{xx}(jw)$ é igual a uma constante C. Rescrevendo a Eq. (1) em termos da Eq. (2), tem-se a Eq. (4).

$$G_{xx}(jw) = \sum_{i}^{n} \sum_{l}^{n} \left[\frac{R_k}{jw - l_K} + \frac{\overline{R}_k}{jw - l_K} \right] C \left[\frac{R_s}{jw - l_s} + \frac{\overline{R}_s}{jw - \overline{l}_s} \right]^H \quad (4)$$

onde, o sobrescrito H denota o complexo conjugado. Agora, efetuando as multiplicações dos termos da Eq. (4) e utilizando o teorema da fração parcial de Heaviside, a densidade espectral de saída pode ser redefinida na forma de pólos e resíduos, Eq. (5).

$$G_{xx}(jw) = \sum_{k=l}^{n} \frac{A_k}{jw - l_k} + \frac{\overline{A}_k}{jw - \overline{l}_k} + \frac{B_k}{-jw - l_k} + \frac{\overline{B}_k}{-jw - \overline{l}_k} \quad (5)$$

Assim como a matriz densidade espectral de saída, a matriz de resíduo A_k é de ordem mxm e é dada pela Eq. (6).

$$A_k = R_K C \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\overline{R}_S^T}{-l_K - \overline{l}_S} + \frac{R_S^T}{-l_K - l_S} \right) \quad (6)$$

A contribuição do k-ésimo modo, neste caso, é dada pela Eq. (7).

$$A_k = \frac{R_k C \overline{R}_K^T}{2a_K} \qquad (7)$$

onde, α_K é o negativo da parte real de $l_K = -a_K + jw_K$. No caso de um sistema pouco amortecido este termo torna-se dominante e portanto o resíduo torna proporcional ao modo de vibrar do sistema.

$$A_k \propto R_K C \overline{R}_K \qquad (8)$$

Substituindo a Eq. (3) na Eq. (8), o resíduo pode ser redefinido em termos do k-ésimo modo.

$$R_K = j_K g_K{}^T C g_K j^T \qquad (9)$$

Para uma dada freqüência ω, apenas um número limitado de modos contribuirá significativamente para o resíduo, tipicamente um ou dois modos. Isso permite fixar o número de modos de interesse e a densidade espectral de saída, no caso de sistemas levemente amortecidos, pode ser definida em termos desse conjunto de modos, Sub(ϕ).

$$G_{yy}(jw) = \sum_{k=p}^{q} \frac{d_k f_k f_k^T}{jw - l_k} + \frac{\overline{d}_k \overline{f}_k \overline{f}_k^T}{jw - \overline{l}_k} \qquad (10)$$

onde p, q e Sub (ϕ), definem o conjunto de modos utilizados na análise. Portanto, a decomposição modal da matriz espectral é dada em termos de um dado conjunto de modos, os quais formam o conjunto de modos dominantes. A Equação (10) leva a resultados similares aos obtidos diretamente pela Eq. (1).

3. IDENTIFICAÇÃO DO AMORTECIMENTO

A estimativa do amortecimento neste caso será feita, utilizando uma técnica de identificação baseada apenas na resposta, denominada Decomposição no Domínio da Freqüência DDF (Brincker, R, L. Zhang and P. Andersen, 2000), isto é, o amortecimento do modelo é estimado sem que as forças de excitação do sistema sejam medidas.

Na decomposição no domínio da freqüência, uma vez estimada a matriz de densidade espectral, a mesma não é utilizada diretamente como na identificação clássica. Definida a matriz espectral nos pontos discretos de freqüência ($\omega = \omega_i$), a mesma é decomposta para cada ponto de freqüência, utilizando o conceito de decomposição em valores singulares (SVD). Se a excitação for exatamente um ruído branco, e a estrutura for levemente amortecida e apresentar modos geometricamente ortogonais a decomposição da matriz densidade espectral de saída leva a um conjunto de auto funções, cada uma correspondendo a um sistema de 1 grau de liberdade. Os vetores singulares são usados para a estimativa dos modos de vibrar da estrutura e as freqüências naturais e razões de amortecimento são obtidas a partir da transformada inversa de Fourier da auto função densidade espectral de cada sistema de 1GL. A Eq. (11) mostra a decomposição da densidade espectral de saída.

$$G_{xx}(jw_i) = U_i S_i U_i^H \tag{11}$$

A matriz U_i é uma matriz unitária formada dos vetores singulares u_{ij} e S_i é uma matriz diagonal contendo os valores singulares s_{ij} da matriz de densidade espectral de saída nas proximidades de um pico correspondente ao r-ésimo modo. Portanto, as amplitudes dominantes são devidas a um determinado modo ou algum outro modo próximo. No caso de apenas um modo dominante existe apenas um único termo na Eq. (10) e de acordo com a teoria da Decomposição no Domínio da Freqüência, o primeiro vetor singular u_{i1} leva a uma estimativa do próprio modo, e o correspondente valor singular é a função de densidade espectral do correspondente sistema de um único grau de liberdade (1GL).

$$\widehat{f} = u_{i1} \tag{12}$$

A função de densidade espectral é identificada em torno do pico comparando o modo estimado com os vetores singulares para os pontos de freqüência em torno do pico. Quando um dado vetor singular apresenta uma alta correlação com o correspondente valor singular pertence à função densidade do sistema 1GL. A correlação dos vetores neste caso é avaliada a partir do MAC valor (Alemang, 82) entre os vetores, se a partir de um dado ponto de freqüência, nenhum valor singular tem um vetor singular com MAC-valores acima de um dado valor pré-definido, a procura por partes coincidentes com a função de densidade espectral é terminada e as linhas de freqüências restantes são completadas com zeros.

A partir da identificação da função densidade espectral do sistema de 1GL, a função densidade espectral é transformada para o domínio do tempo, utilizando a transformada de Fourier inversa e a freqüência natural e o amortecimento são obtidos a partir da resposta de um sistema de um grau de liberdade.

O conceito de decremento logarítmico é utilizado para o cálculo do amortecimento e da freqüência a partir da resposta no tempo (decaimento livre), que é equivalente à função de auto correlação do sistema 1GL. Primeiramente todos os extremos r_k correspondentes aos picos da função de auto correlação são encontrados e o decremento logarítmico δ é então dado pela Eq. (13).

$$d = \frac{2}{k}\ln\left(\frac{r_0}{|r_k|}\right) \tag{13}$$

onde, r_0 é o valor inicial da função de auto correlação e r_k é o k-ésimo extremo. Assim, o decremento logarítmico e o valor inicial na função de correlação podem ser encontrados por regressão linear e o fator de amortecimento é calculado pela Eq. (14):

$$V = \frac{d}{\sqrt{\left(d^2 + 4p^2\right)}} \tag{14}$$

4. SIMULAÇÃO DE UM SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE.

A técnica descrita acima é utilizada para a identificação do amortecimento de um sistema simulado de dois graus de liberdade. O sistema em questão é formado por um sistema amortecido do tipo massa mola, e é excitado com ruído branco de densidade espectral unitária (G_{ff}=1). Em seguida é calculada a matriz de densidade espectral de saída (G_{xx}), utilizando a Eq.(1). A decomposição da matriz espectral em valores singulares é feita conforme discutido no item (3), na estimativa da densidade espectral os pontos de freqüência com MAC-valores abaixo de 0.5 não são utilizados, ou seja, é feita uma limitação na função de densidade espectral. A Figura (1) mostra a matriz de densidade espectral do sistema em análise.

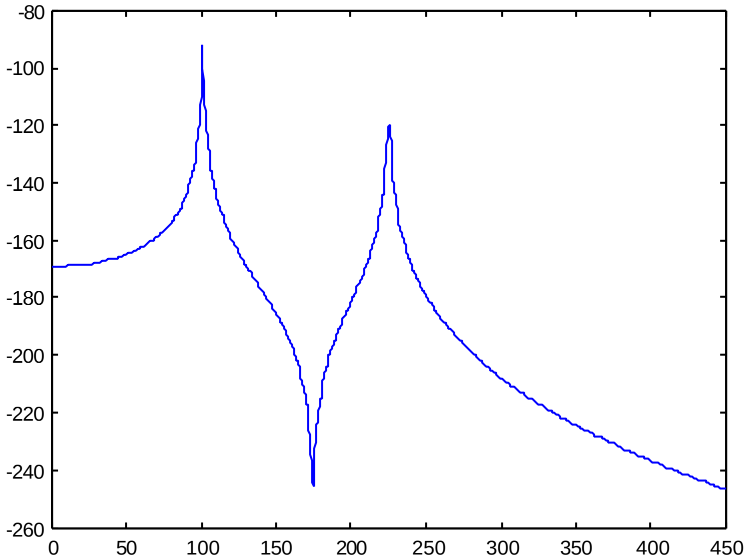
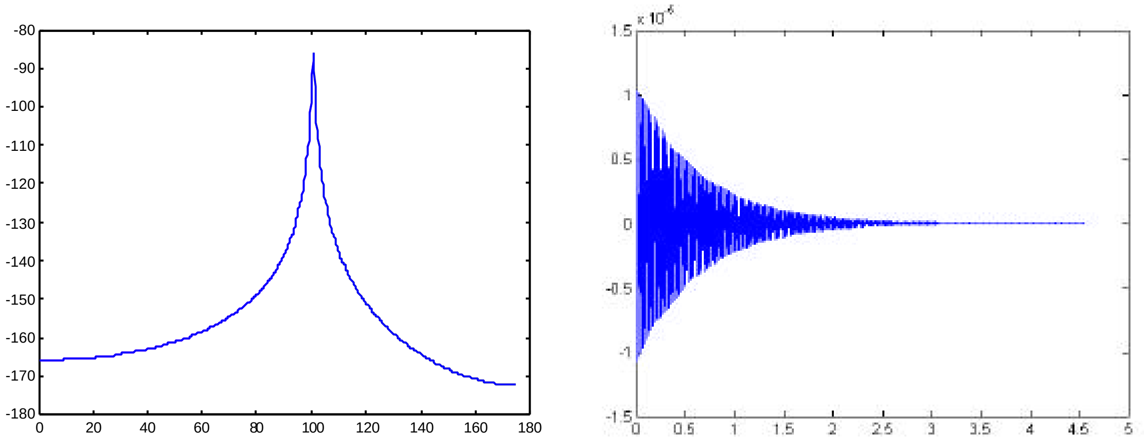


Figura 1 – Matriz de densidade espectral de saída de um sistema de dois graus de liberdade.

Inicialmente a resposta do sistema foi dividida em 2 regiões distintas, visto que os modos estão bem separados e a decomposição da matriz de densidade espectral de saída foi feita para um conjunto de freqüências discretas em torno do primeiro modo, obtendo assim a curva de densidade espectral correspondente a um sistema de um grau de liberdade, como ilustra a Fig. (2a). A Figura (2b) mostra a resposta do sistema de um grau de liberdade no domínio do tempo, obtida a partir da transformada inversa de Fourier da densidade espectral. Calculando a resposta livre do sistema para um grau de liberdade, o amortecimento é obtido utilizando o método do decremento logarítmico para um sistema de (1GL).

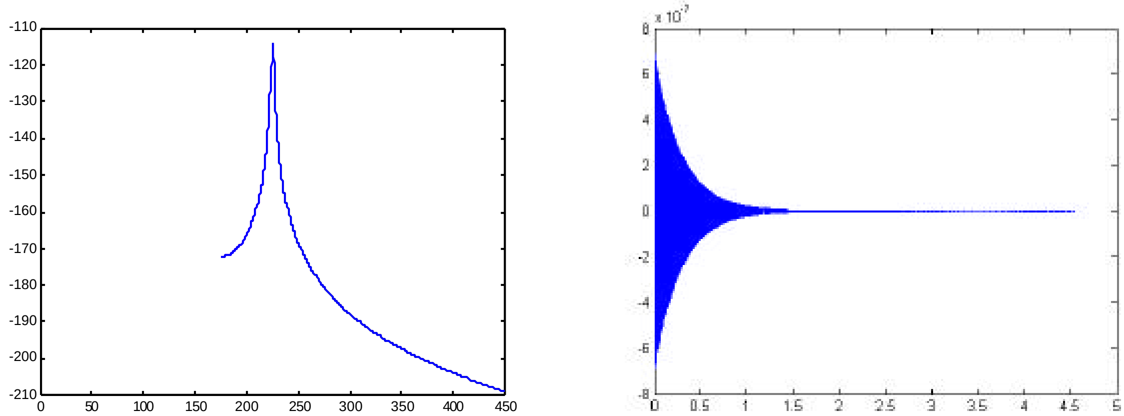


(a) (b)

Figura 2 – (a) Valores singulares da decomposição da matriz densidade espectral.
(b) Transformada inversa de Fourier da função de valores singulares.

A curva da Fig. (2b) é utilizada para definir os valores das amplitudes dos picos utilizados na regressão linear da resposta, com o auxílio da Eq. (13) e Eq. (14), calcula-se o fator de amortecimento do primeiro modo.

Um procedimento similar foi utilizado para o segundo modo, obtendo-se assim a decomposição da resposta em valores singulares e posteriormente sua correspondente função densidade espectral, 1GL, conforme ilustrado na Fig. (3).



(a) (b)

Figura 3 – (a) Valores singulares da decomposição da matriz densidade espectral (2º modo).
(b) Transformada inversa de Fourier da função de valores singulares (2º modo).

A Tabela (1) mostra uma comparação dos valores de amortecimento utilizados na simulação dos dados utilizados na análise e os valores estimados a partir da Decomposição no Domínio da Freqüência. Os valores obtidos, conforme ilustrado, apresentam-se bem próximos dos valores utilizados na geração dos dados, com uma diferença em torno de 3%.

Tabela 1 – Fator de amortecimento exato e estimado.

Modos	***Exato*** z	***Estimado*** $\hat{z}$	***Erro***
1º modo	0,01	0,0097	3 %
2º modo	0,01	0,0096	4 %

5. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

O artigo discute a utilização de uma técnica relativamente nova de identificação baseada apenas na saída do modelo, utilizando a decomposição no domínio da freqüência. A técnica é baseada na decomposição da matriz função densidade espectral de potência usando o método da decomposição em valores singulares. A matriz densidade espectral de saída é decomposta em vários sistemas de um grau de liberdade, sendo que cada modo corresponde a um sistema individual de um grau de liberdade. A técnica foi ilustrada com um exemplo simulado e os resultados obtidos foram bem próximos dos valores esperados.

A técnica é de fácil implementação, e mostrou ser eficiente na identificação de parâmetros modais usando apenas a resposta, entretanto, para uma melhor avaliação da sua potencialidade é necessário a utilização de dados experimentais.

6. REFERÊNCIAS

ALLEMANG, R., 1982, *"Experimental Modal Analysis Bibliography"* Proceedings of the I-IMAC.

BENDAT, JULIUS S AND ALLAN G. PIERSOL., 1993, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis,* John Wiley & Sons.

BRINCKER, B.; ZHANG, L.; ANDERSEN, P.; 2000, *"Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition"*, Proceedings of the XVIIIIMAC.

EWINS, D. J., 1984, *"Modal Testing: Theory and Practice,"* John Wiley & Sons Inc, New York.

FORMENTI, D., 1997, "Analytical and Experimental Modal Analysis," Proceedings of Experimental Analysis Course, U. C., Cincinnati, Ohio.

Heylen, W., et al., 1994, "Modal Análisis Theory and Testing," Course on Modal Analysis Theory and Practice, ISMA 19, Leuven.

MAIA, S., et al., 1997, *"Theoretical and Experimental Modal Analyzis"*, Research Studies Press Lta.

SONEYS, R., et al., 1992, "*Trends in Experimental Modal Analysis,*" *Proceedings of the XVII International Seminar on Modal Analysis, Leuven*.

DAMPING IDENTIFICATION USING FREQUENCY DOMAIN DECOMPOSITION

Odair Antonio Nunes Junior

UNESP - FEIS " Faculdade of Engineering Ilha Solteira"

Department of Mechanical Engineering

Av. Brasil nº56 CEP-15385-000 – Ilha Solteira - SP
Fax: (018) 3742-2992 Phone: (018) 3743 1041

E-mail: odair@dem.feis.unesp.br

Adailton Silva Borges

UNESP - FEIS " Faculdade of Engineering Ilha Solteira"

Department of Mechanical Engineering

Av. Brasil nº56 CEP-15385-000 – Ilha Solteira - SP
Fax: (018) 3742-2992 Phone: (018) 3743 1041

E-mail: adailton@dem.feis.unesp.br

João Antonio Pereira

UNESP - FEIS " Faculdade of Engineering Ilha Solteira"

Department of Mechanical Engineering

Av. Brasil nº56 CEP-15385-000 – Ilha Solteira - SP
Fax: (018) 3742-2992 Phone: (018) 3743 1041

E-mail: japereir@dem.feis.unesp.br

Abstract: *The present paper shows the estimate of the damping by using a technique of identification based only output of system, call of Frequency Domain Decomposition (FDD), in this case, the damping is esteemed without knowing the forces of excitation of the system. The present paper discusses the study of the experimental modal analysis using only the response, in this case, the structure can be excited from your own operation conditions. The technique was illustrated in the simulation of a system of two degrees of freedom. Starting from Decomposition in Singular Values of the Function of Spectrum Density of response, the system was decomposed in two systems of one degree of freedom. The methodology was used initially in the identification of simulate models, whose obtained results were compared directly with the data used in the simulation, in other words, a base of exact comparison was used to evaluate the acting of the results. Later, the results will be evaluated with experimental tests.*

keywords: *Modal Analysis, Damping, Frequency Domain Decomposition, Logarithmic Decrement, Power Spectrum Density.*