

OTIMIZANDO MALHA E FORMA DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS PLANOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE RELOCAÇÃO NODAL

Antonio Pedro Clapis
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica – FEMEC
apclapis@mecanica.ufu.br

Eliane Regina Flôres Oliveira
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Física – FAFIS
eliane@mecanica.ufu.br

Resumo. O desenvolvimento de um modelo automatizado de otimização de malha e forma, num processo de cálculo estrutural utilizando o método de elementos finitos, torna-se uma ferramenta de grande importância na confecção de um projeto idealizado pelo engenheiro. Propõe-se com isto um modo intuitivo de otimização, utilizando o método *r*. Para a forma utiliza-se o balanceamento da energia de distorção dos elementos finitos através das análises sobre um modelo físico e sobre um modelo geométrico. Para a malha, da forma final otimizada, utiliza-se o balanceamento do erro de discretização, determinado baseando-se na norma da energia de deformação. Intercalando aos dois módulos existe uma técnica de remalhagem, balanceando-se as áreas dos elementos triangulares ao longo do domínio do elemento estrutural plano. Um exemplo de aplicação é utilizado para validação do modelo proposto.

Palavras-chave: elemento finito hierárquico, método adaptativo, otimização estrutural.

1. INTRODUÇÃO

A otimização de forma tem atraído grande atenção da comunidade científica e muitas técnicas tem sido desenvolvidas e usadas com sucesso em análises e projetos de engenharia, Allaire (2001). Geralmente, estas técnicas consistem em variar alguns contornos do modelo a ser projetado a fim de melhorar seu comportamento mecânico, como por exemplo, reduzir as altas concentrações de tensões que normalmente acontecem em locais de cantos e furos ou próximos a eles. Este processo normalmente é feito impondo restrições e usando um método de otimização selecionado, onde aspectos tais como definições geométricas, geração de malhas, análise e processamento de resultados são normalmente envolvidos. Além disso, outros elementos fazem um papel decisivo no processo de otimização, tal como análise de sensibilidade e programação numérica de otimização.

Como o progresso da otimização muitas vezes depende do desenvolvimento de um bom modelo de elementos finitos, este trabalho utiliza uma técnica para estimar erros numéricos na discretização de problemas bidimensionais, utilizando-se o elemento finito triangular hierárquico com função de forma quadrática, Zienkiewicz (1983), Adjerid (2001). Verifica-se a existência da homogeneidade do erro ao longo do domínio nos elementos, caso esta não ocorra, os nós livres pré-estabelecidos, serão realocados em função da diferença de gradiente do erro, reiniciando-se uma nova análise do modelo físico otimizando a malha automaticamente. São avaliados dois métodos adaptativos usando relocação nodal (método *r*): método heurístico e método geométrico.

Com o objetivo de atenuar o problema da distorção que ocorre no uso do processo iterativo do método *r*, este trabalho desenvolve uma técnica de remalhagem automática dos

elementos através do balanceamento da área dos mesmos, obtendo-se um método geométrico de relocação nodal. A otimização de forma é baseada no método de otimização de malha, Clapis (1999), sendo que: a formulação da otimização de forma leva em conta a homogeneização da densidade de energia de deformação por distorção dos elementos finitos. O critério de otimalidade é sempre o da máxima densidade de energia de deformação por distorção.

2 – OTIMIZAÇÃO DE MALHA DE ELEMENTOS FINITOS, UTILIZANDO O MÉTODO DE RELOCAÇÃO NODAL

2.1 - Método 1 – Método Heurístico

O erro por elemento pode ser estimado, em termos da energia de deformação, correspondente às variáveis hierárquicas como:

$$\|e\|_e^2 = \{u_h\}^T [K_{hh}] \{u_h\} \quad (1)$$

onde:

$\{u_h\}$ representa o vetor dos novos graus de liberdade hierárquicos introduzidos, e K_{hh} a matriz de rigidez adicionada em função dos mesmos,

Considerando $\|e\|_e^2$ como uma pressão negativa agindo num elemento finito do modelo geométrico da estrutura, Clapis (1999), o vetor das forças nodais equivalentes, $\{D\}_e$ para um elemento triangular linear é dado por,

$$\{D\}_e = \|e\|_e^2 \begin{Bmatrix} y_{32} \\ -x_{32} \\ -y_{31} \\ x_{31} \\ y_{21} \\ -x_{21} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Impondo-se as condições geométricas de que a forma do contorno não deve ser alterada e levando-se em conta a superposição dos vetores $\{D\}_e$ para todos os elementos, obtém-se um vetor de carga nodal equivalente global, $\{D\}_G$.

Tem-se portanto novas condições de contorno e conseqüentemente uma nova equação de equilíbrio global. A direção $\{d\}_0$ do movimento dos nós com uma ou duas direções livres para se moverem pode ser obtida de:

$$[K]_0 \{d\}_0 = \{D\}_G \quad (3)$$

onde:

$[K]_0$ é a matriz de rigidez obtida do modelo geométrico, $\{d\}_0$ é a “direção de busca” onde procura-se homogeneizar a distribuição da densidade do erro de discretização e $\{D\}_G$ é o vetor carga nodal equivalente global.

Através de uma busca unidimensional, utilizando-se o método da secante, calcula-se o fator de escala (λ^*), o qual minimizará a norma do vetor desbalanceamento ou seja:

$$\min_{\lambda} \left\| D(\{x\} + \lambda \{d\}_0) \right\| \quad (4)$$

onde $\{x\}$ é o vetor de coordenadas dos nós móveis.

Devido a relocação nodal, a densidade do erro de discretização também se altera e o processo de busca é realizado de modo iterativo com a análise de novos modelos físicos discretizados. O programa executa automaticamente o balanceamento dos erros entre os elementos, usando o método do gradiente conjugado para gerar novas direções de busca no caso de não haver convergência numa determinada direção. A condição de ótimo para o problema é que o erro de discretização seja uniformemente distribuído ao longo de todo o domínio.

2.2 - Método 2 – Método Geométrico

Considere um nó e os elementos finitos circunvizinhos ao mesmo, Fig. 1. Sendo o centróide de cada elemento o ponto onde atua uma força atrativa, com origem no nó “comum” e intensidade o indicador de erro do elemento, a resultante destas forças nos fornece uma nova posição do nó, caso exista desequilíbrio entre os indicadores dos erros de discretização na região considerada, Cheng (1993).

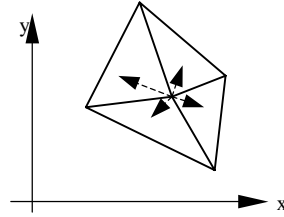


Figura 1 – Esquema de reposicionamento nodal

A soma das contribuições de todos os elementos circunvizinhos, para a coordenada x , vale:

$$x_n^m = x_n^{m-1} + \frac{\sum e^* (x_* - x_n^{m-1})}{\sum e^*} \quad (5)$$

onde m indica o número da iteração, x_n e x_* são, respectivamente, a posição do nó considerado e dos centróides dos elementos circunvizinhos, e e^* é o erro por elemento finito. Este pode ser estimado, em termos da norma da energia de deformação, Eq. (1), onde o critério de parada é a homogeneização do mesmo ao longo do domínio.

Analogamente para a coordenada y , tem-se:

$$y_n^m = y_n^{m-1} + \frac{\sum e^* (y_* - y_n^{m-1})}{\sum e^*} \quad (6)$$

Nota-se que apenas os nós dos vértices do elemento tem a permissão de moverem sendo que os nós do meio do lado se houver, não podem participar do processo de reposicionamento. Suas coordenadas são localizadas no meio entre os nós da extremidade. Este processo tem natureza iterativa onde os nós se movem em direção aos elementos de

indicador de erro maior até não se ter diferença nos indicadores de erro dos elementos ou a relocação dos nós tornar-se suficientemente pequeno.

3 – ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO DE FORMA

Propõem-se um método de otimização de forma com base no método de otimização de malha, Clapis(1999). O método adaptativo em questão leva em consideração o desbalanceamento do erro de discretização do modelo, enquanto que a formulação da otimização de forma toma por base o desbalanceamento da densidade de energia de deformação por distorção dos elementos finitos. O critério de otimalidade utilizado é o da máxima densidade de energia de deformação por distorção, de forma que os elementos com menor energia migrem para as áreas onde as densidades de energia são maiores.

Considere-se U_D^e como uma pressão negativa agindo num elemento finito do modelo geométrico da estrutura, o vetor das forças nodais equivalentes, $\{D\}_e$, para um elemento triangular é dado por:

$$\{D\}_e = U_D^e \begin{Bmatrix} y_{32} \\ -x_{32} \\ -y_{31} \\ x_{31} \\ y_{21} \\ -x_{21} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Da superposição dos vetores $\{D\}_e$ para todos os elementos obtém-se um vetor de carga nodal equivalente global, $\{D\}_G$. A direção $\{d\}_0$ do movimento dos nós pode ser obtido de:

$$[K]_0 \{d\}_0 = \{D\}_G \quad (8)$$

onde $[K]_0$ é a matriz de “rigidez” obtida do modelo geométrico.

Portanto, $\{d\}_0$, passa a ser uma “direção de busca” procurando homogeneizar a distribuição da densidade de energia de distorção,

$$\underset{\alpha}{MINIMIZAR} \left\| \{D(\{x\} + \alpha \{d\}_0)\} \right\| \quad (9)$$

onde $\{x\}$ é o vetor das coordenadas nodais dos nós livres para realocarem-se nas duas ou em uma das direções.

4 – ALGORITMO DE REMALHAGEM

O código numérico de remalhagem permite remalhar malhas de elementos finitos em problemas bidimensionais, utilizando elementos triangulares hierárquicos com funções de forma de grau 2. Automaticamente, o vetor desbalanceamento, na formulação geométrica de relocação nodal, é função do diferencial entre as áreas dos elementos funcionando como cargas nodais passando pelos centróides dos elementos circunvizinhos ao nó considerado,

Cheng (1993). Verifica-se se existe uma homogeneidade de áreas dos elementos da malha na região considerada, caso esta não ocorra, os nós livres, pré-estabelecidos, serão deslocados em função da resultante das cargas. As novas coordenadas x e y valem:

$$x_n^m = x_n^{m-1} + \frac{\sum A^* (x^* - x_n^{m-1})}{\sum A^*} \quad y_n^m = y_n^{m-1} + \frac{\sum A^* (y^* - y_n^{m-1})}{\sum A^*} \quad (10)$$

onde m indica o número da iteração, x_n e x^* são, respectivamente, a posição do nó considerado e dos centróides dos elementos circunvizinhos, e A^* é a área de cada elemento finito.

Este processo tem natureza iterativa onde os nós se movem até diminuir a distorção entre as áreas dos elementos ou a relocação dos nós valor $(x_n^m - x_n^{m-1})$ tornar-se suficientemente pequena.

5 – AUTOMAÇÃO DOS ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO DE FORMA, REMALHAGEM E OTIMIZAÇÃO DE MALHA

Com o objetivo de corrigir a distorção dos elementos após a otimização de forma, confeccionou-se um código numérico acoplando o otimizador de forma, o remalhador e o otimizador de malha de maneira iterativa e automática. A Figura 2 mostra o fluxograma do acoplamento.

Exemplo de aplicação – Anel cilíndrico sob pressão interna

A estrutura a ser otimizada neste exemplo é a seção transversal de um anel cilíndrico submetido a uma pressão interna $p=1 \text{ kgf/cm}^2$. Devido a dupla simetria, modelou-se apenas um quarto da seção transversal do anel de diâmetro interno 10cm e diâmetro externo 16cm. A Figura 3 mostra a geometria, dimensões, condições de apoio e o carregamento do anel. O objetivo do problema é obter o menor volume possível com a tensão equivalente máxima não ultrapassando 10 Kgf/cm^2 . O projeto requer que a forma circular seja mantida e o diâmetro interno não seja alterado. Outros dados utilizados são: módulo de elasticidade 100000 Kgf/cm^2 , coeficiente de Poisson 0,3 e comprimento do anel 1cm.

A Figura 4 mostra o modelo físico e os modelos geométricos utilizados na otimização de forma (55 elementos triangulares lineares), na remalhagem e na otimização da malha (55 elementos triangulares hierárquicos com expansão quadrática na função de forma), conforme mostra as figuras (a), (b), (c) e (d) respectivamente.

Considerando-se o estado plano de tensões, chega-se a forma otimizada após 2 iterações, quando utiliza-se “somente” o programa otimizador de forma e o critério de parada pré estabelecido (tensão equivalente máxima), Fig. 5(a). Nota-se, neste caso, que o volume da seção transversal passou de $30,63 \text{ cm}^3$ para $14,55 \text{ cm}^3$ (redução de 52,5%) observando-se também, na região de tensões máximas grandes distorções dos elementos finitos ocasionada pelas relocações nodais no balanceamento da energia de distorção, o que é uma característica desfavorável do método r.

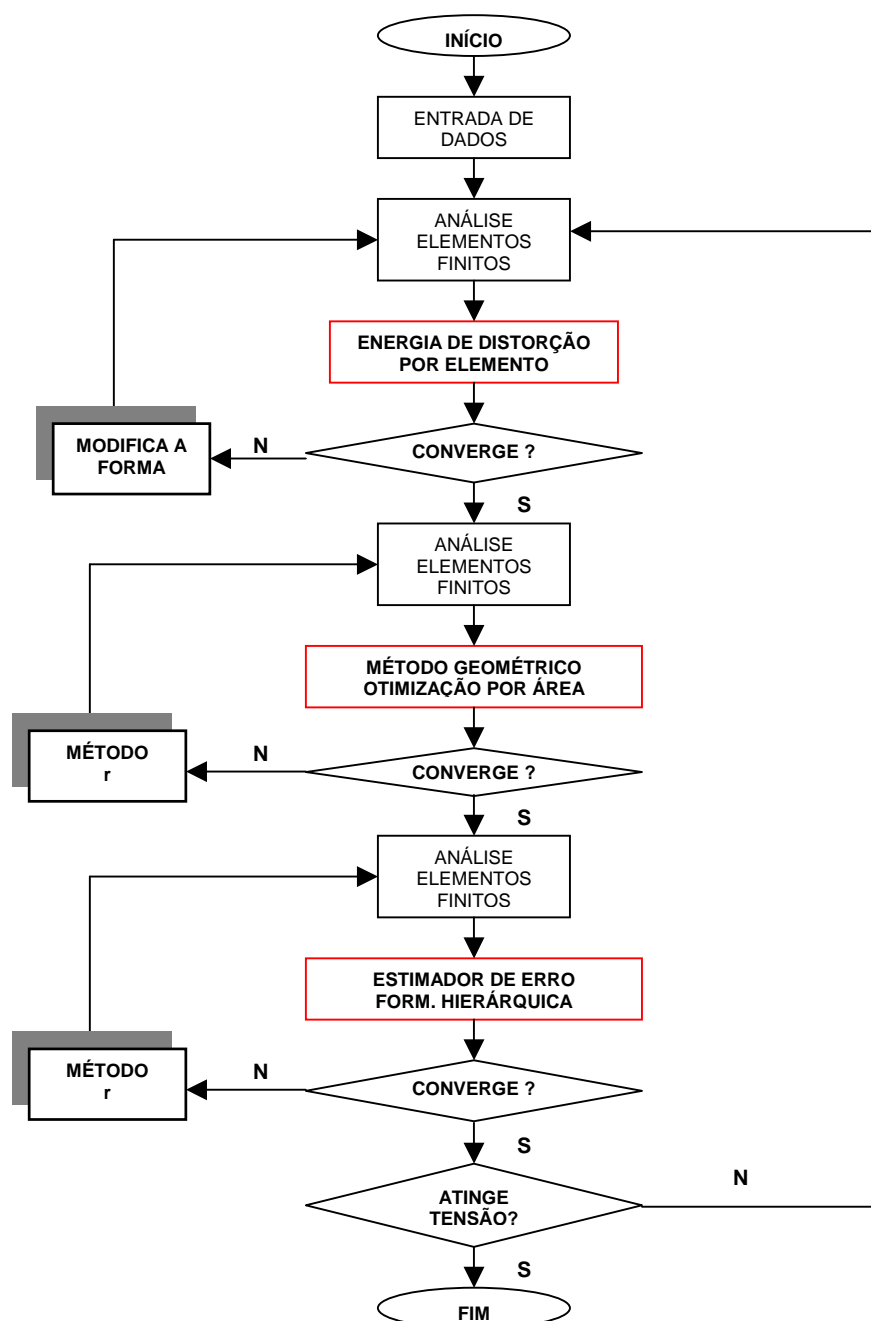


Figura 2 – Fluxograma: otimiza a forma, remalha e otimiza a malha

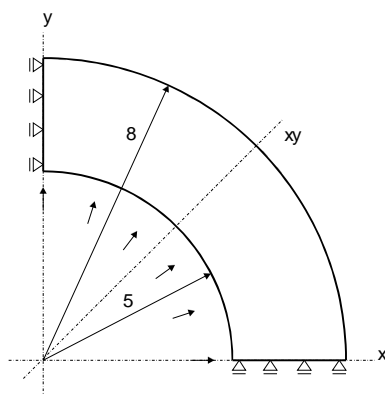


Figura 3 – Tubo cilíndrico sob pressão interna, cotas em cm

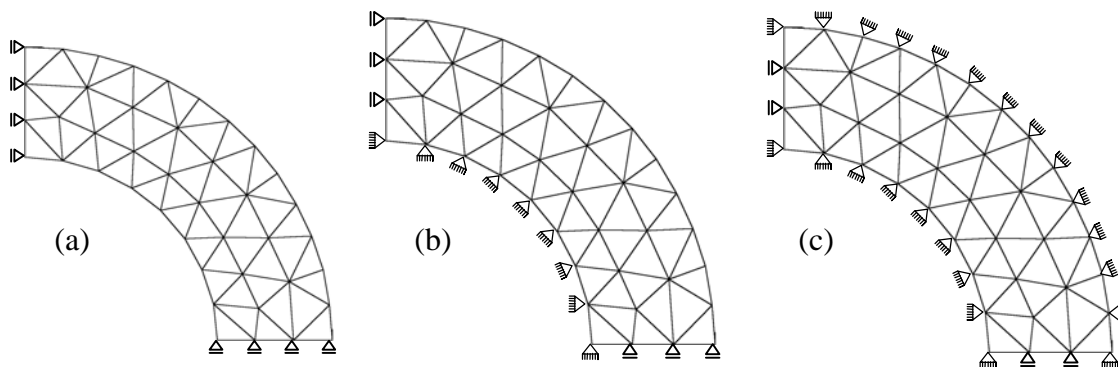


Figura 4 – Discretizações: (a) modelo físico, (b) modelo geométrico da forma e (c) modelo geométrico da malha.

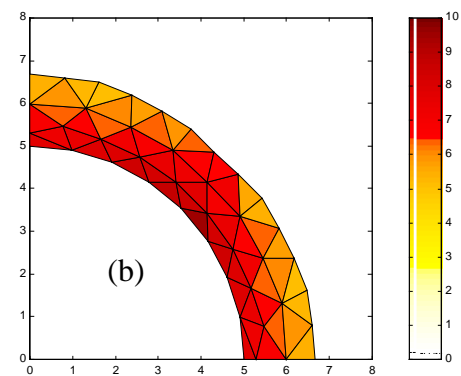
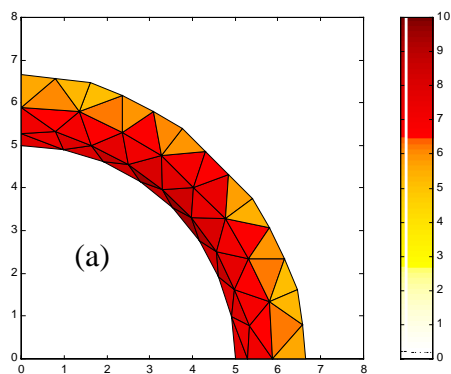


Figura 5 – (a) Forma 1 (2 iterações) e (b) Forma 2 / HEU (1 iteração, 2ª vez).

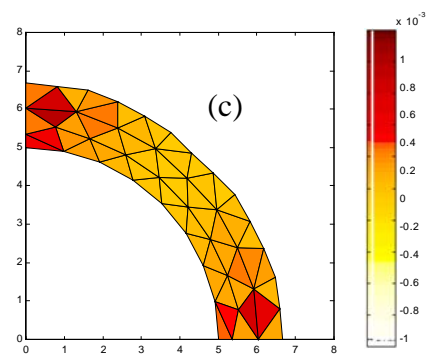
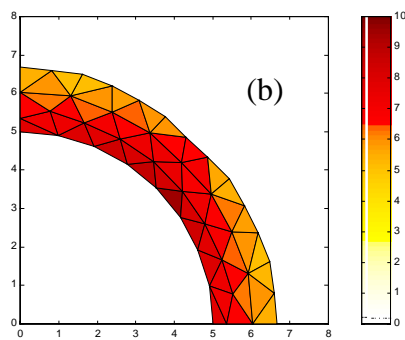
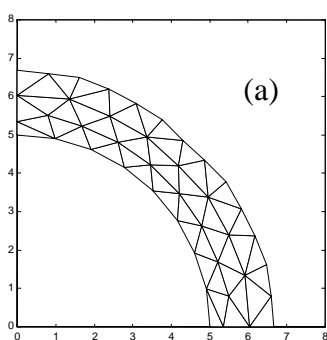


Figura 6 – (a) Remalhagem / HEU (5 iterações, 2ª vez), (b) Otimização da malha / HEU – tensões equivalentes (8 iterações, 2ª vez), (c) Otimização da malha / HEU - erros de discretização (8 iterações, 2ª vez).

Implementando-se a mudança de forma com a intercalação dos módulos de remalhagem e de otimização de malha no processamento numérico e, estimando-se para a análise em questão o número de iterações para cada módulo tem-se para o método heurístico: uma iteração para a forma, cinco iterações para a remalhagem e oito iterações para a otimização de malha, Figuras 5(b), 6(a), 6(b), respectivamente. A Figura 6(c) mostra os erros de discretização após a otimização da malha.

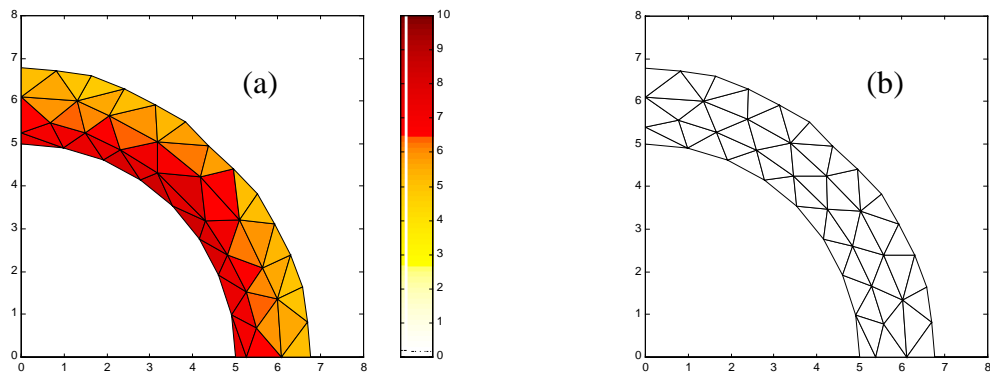


Figura 7 – (a)Forma 2 / GEO – tensões equivalentes (1 iteração, 2ª vez), (b) Remalhagem / GEO (5 iterações, 2ª vez).

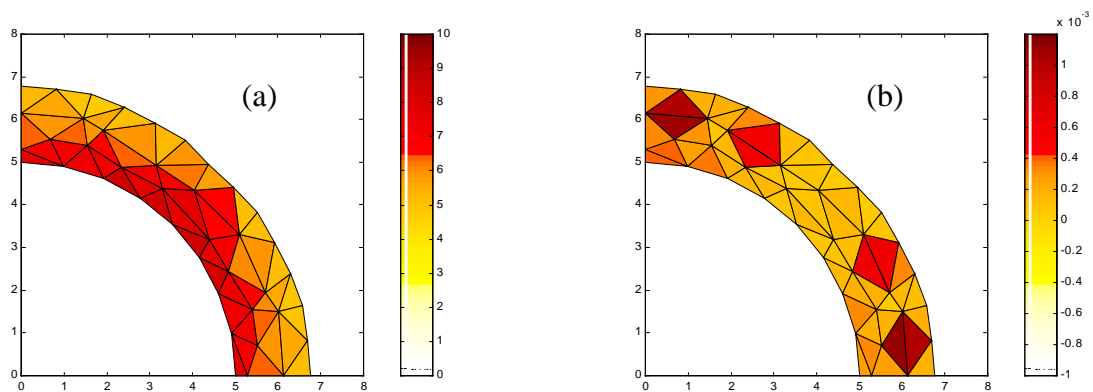


Figura 8 – (a)Otimização da malha / GEO – tensões equivalentes (5 iterações, 2ª vez), (b) Otimização da malha / GEO – erros de discretização (5 iterações, 2ª vez).

Através do método geométrico tem-se: uma iteração para a forma, cinco iterações para a remalhagem e cinco iterações para a otimização de malha, Fig. 7(a), 7(b) e 8(a) respectivamente. A Figura 8(b) mostra os erros de discretização após a otimização da malha.

Observa-se que no processo de otimização de forma, intercalando-se os três módulos (forma, remalha e malha), a distorção dos elementos finitos é bem menor que no caso onde foi utilizado “somente” o otimizador de forma. Obtém-se uma discretização final de qualidade melhorada o que com certeza se deve a influência da introdução do módulo de remalhagem no processo, é o que mostra a Fig.8(b) com a distribuição homogênea dos erros no domínio do modelo. Usando-se a otimização conjunta forma-remalha-malha, pelo método heurístico, o volume passou de $30,63 \text{ cm}^3$ para $14,79 \text{ cm}^3$ (redução de 51,71%), sendo que pelo método geométrico, o volume final foi de $15,91 \text{ cm}^3$ com uma redução de 48,06%.

6. CONCLUSÕES

O problema de otimização de forma foi formulado utilizando um método iterativo consistente baseado num princípio de bom senso (método heurístico), não numa formulação puramente matemática, acoplada ao método dos elementos finitos, o qual foi basicamente a ferramenta principal que nos levou a atingir os objetivos previamente estabelecidos, que é o acoplamento do otimizador de forma, o remalhador e otimizador de malha de modo iterativo e automático.

Desenvolveu-se um programa de elementos finitos para otimizar a forma de um elemento estrutural baseado na homogeneização da energia de distorção entre os elementos, adaptado iterativamente com um remalhador e com um otimizador de malha, a cada iteração ou a partir de um certo número de iterações previamente fixado.

Conclui-se que o otimizador de forma deve ser acoplado ao otimizador de malha desde que o modulo de remalhagem seja introduzido para que a distorção dos elementos seja corrigida após a otimização da forma e a convergência do sistema seja alcançada.

Na formulação numérica do modulo otimizador de forma deve-se usar o elemento triangular linear, pois se usando o elemento triangular hierárquico o programa torna-se lento e de difícil convergência.

Na utilização do programa em estruturas onde existe alta concentração de tensões, a técnica de acoplar o otimizador de forma com o remalhador e o otimizador de malha conduz a forma ótima com um decréscimo no valor das tensões equivalentes e uma melhor distribuição de tensões ao longo do contorno quando comparado com o uso somente do programa otimizador de forma, Oliveira (2003).

Pode-se observar ainda que, a medida que o procedimento aqui apresentado tende a suavizar a distribuição de tensões no contorno, o mesmo pode resultar em economia de material, pois o volume final é menor que o inicial, o que abre a perspectiva de utiliza-lo no projeto ótimo de componentes estruturais.

Como o programa utiliza o método de elementos finitos, que é uma eficiente técnica para obter soluções aproximadas para problemas onde a solução exata é difícil de ser obtida, a forma de discretizar-se a malha inicial, o tipo e o número de elementos influenciam nos resultados finais da forma estrutural otimizada.

7. REFERÊNCIAS

- Adjerid, S., Aiffa, M., Flaherty, J. E., 2001, "Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements", *Compt. Methods Appl. Engrg.* 190, 2925-2941.
- Allaire, G., Henrot, A., 2001, "On some recent advances in shape optimization", *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 329, Série II b, p. 383-396.
- Cheng, Jung-Ho, 1993, "Adaptative grid optimization for structural analysis- geometry-based approach", *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.*, 107, 1-22.
- Clapis, A. P., 1999, "Um método heurístico de otimização de forma de componentes estruturais no estado plano de elasticidade linear", Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Oliveira, E. R. F., 2003, "Otimização de forma de elementos estruturais planos", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.
- Zienkiewicz, O. C., Gago, J. P. de S. R. and Kelly, D. W., 1983, "The hierarchical concept in finite element analysis", *Comp. Struct.*, 16, 53-65.

OPTIMIZING STRUCTURAL PLANE ELEMENTS THROUGH REPOSITIONING METHOD

Eliane Regina Flôres Oliveira¹
Federal University of Uberlândia - UFU
School of Física - FAFIS
eliane@mecanica.ufu.br

Antonio Pedro Clapis²
Federal University of Uberlândia –UFU
School of Mechanical Engineering - FEMEC
apclapis@mecanica.ufu.br

Abstract. The development of an automated model of mesh and shape optimization, in a structural calculate process using finite elements method, becomes a tool of great importance in the making of a project idealized by the engineer. With this intends an intuitive way of the optimization using the method r. For the shape the balancing distortion energy of the finite elements is used through the analyses on a physical model and on a geometric model. For the mesh, in the final shape optimized, the balancing the error discretization is used, certain basing on the norm of the deformation energy. Inserting to the two modules a regriding technique exists, balancing the areas of the triangular elements along the domain of the structural plane element. Application example is used for validation of the proposed model.

Keywords: hierarchical finite element, adaptive method, shape optimization