

# MODELAGEM NUMÉRICA DE GIROSCÓPIO DE SUSPENSÃO CARDÂNICA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

**Maurício Gruzman**

IME - Instituto Militar de Engenharia

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha - Rio de Janeiro, RJ, CEP: 22290-270

e-mail: mgruzman@ig.com.br

**Clódio Alberto Pastro Sarzeto**

IME - Instituto Militar de Engenharia

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha - Rio de Janeiro, RJ, CEP: 22290-270

e-mail: sarzeto@ime.eb.br

**Resumo.** Este trabalho apresenta a modelagem de um giroscópio de suspensão cardânica com dois graus de liberdade. Para tal será utilizada uma formulação com o número máximo de coordenadas onde as equações de movimento ficam sobre a forma diferencial e algébrica (DAE). Nestas equações serão utilizados os parâmetros de Euler como coordenadas de orientação dos corpos que compõem o giroscópio, entretanto, como é difícil interpretar fisicamente os resultados com estas coordenadas, será apresentado um método para a obtenção dos ângulos relativos de rotação entre dois corpos consecutivos.

No modelo desenvolvido serão incluídos desalinhamentos entre os corpos do giroscópio, que são imperfeições construtivas. Por último é apresentada uma simulação de um giroscópio sujeito à aceleração da gravidade e cujo rotor possui desalinhamento. Os resultados desta simulação são comparados com resultados encontrados na literatura.

**Palavras-chave:** giroscópio, simulação.

## 1. INTRODUÇÃO

A modelagem do giroscópio é feita utilizando o número máximo de coordenadas para determinação da cinemática dos corpos (Haug e Deyo, 1991; Brisola, 2002 e Blajer 2002), como alternativa às extensas manipulações algébricas para a obtenção das equações diferenciais de movimento com número mínimo de coordenadas. Em contrapartida, as referidas equações ficam sobre a forma diferencial e algébrica (DAE) ao invés da forma diferencial ordinária e podem apresentar dificuldades na solução numérica, HAUG et al (1989).

Para evitar a ocorrência de singularidades matemáticas na matriz coeficiente das equações de movimento, Haug et al (1992), são utilizados parâmetros de Euler para a orientação dos corpos, entretanto, como é difícil interpretar fisicamente os resultados com parâmetros de Euler, a orientação de cada corpo é apresentada através do ângulo de rotação do corpo em relação ao corpo anterior, em torno do eixo da junta de revolução (o único deslocamento angular entre dois corpos consecutivos se dá em torno desta junta). Ou seja, os resultados são obtidos em parâmetros de Euler, mas são apresentados com os ângulos de rotação relativos entre os corpos.

Considera-se que o giroscópio é composto por quatro corpos rígidos (base do giroscópio, anel externo, anel interno e rotor), com três juntas de revolução, sendo uma entre cada par de corpos. Com uma única junta de revolução entre cada par de corpos evita-se a redundância nas equações de restrição cinemática (causada pela ocorrência de duas equações de restrição cinemática idênticas), que resultaria em uma singularidade da matriz jacobiana das restrições cinemáticas. Como não se deseja obter o valor das reações nas juntas, mas apenas o comportamento dinâmico do giroscópio, tal hipótese simplificadora não traz nenhum prejuízo aos resultados, pois, ao se trabalhar com giroscópios compostos por corpos rígidos, obtém-se o mesmo comportamento dinâmico, utilizando-se uma ou duas junta de revolução (que sejam colineares) entre cada par de corpos.

## 2. ORIENTAÇÃO DE UM CORPO COM PARÂMETROS DE EULER

Segundo o Teorema de Euler, mencionado por Haug et al (1989), qualquer orientação de um corpo no espaço tridimensional pode ser obtida por uma única rotação  $\chi$  em torno de um vetor unitário  $\mathbf{U}$  a partir de uma orientação de referência (referencial global), que neste trabalho será o referencial inercial. Os quatro parâmetros de Euler são definidos como:

$$e_0 = \cos(\chi/2), \quad e_1 = U_x \sin(\chi/2), \quad e_2 = U_y \sin(\chi/2), \quad e_3 = U_z \sin(\chi/2)$$

onde  $U_x$ ,  $U_y$  e  $U_z$  são as componentes do vetor  $\mathbf{U}$  nos eixos  $X Y Z$  do referencial global.

Como existem quatro parâmetros para representar três graus de liberdade de rotação eles não são independentes e relacionam-se através da seguinte equação:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{p} = 1 \quad (1)$$

onde:  $\mathbf{p} = [e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3]^T$

Com isso tem-se que:

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (2)$$

A matriz de transformação de coordenadas do referencial local ( $x y z$ ) para o referencial global ( $X Y Z$ ) é dada por Haug et al (1989):

$$\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - 0.5 & e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_1 e_3 + e_0 e_2 \\ e_1 e_2 + e_0 e_3 & e_0^2 + e_2^2 - 0.5 & e_2 e_3 - e_0 e_1 \\ e_1 e_3 - e_0 e_2 & e_2 e_3 + e_0 e_1 & e_0^2 + e_3^2 - 0.5 \end{bmatrix} \quad (3)$$

A matriz de transformação entre dois referenciais locais (matriz de transformação do referencial local fixo no corpo  $j$  para o fixo no corpo  $i$ ) é dada por:

$${}_i \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \quad (4)$$

onde:

$\mathbf{A}_i$  – Matriz de transformação de coordenadas, do referencial fixo no corpo  $i$  para o referencial global.

$\mathbf{A}_j$  – Matriz de transformação de coordenadas, do referencial fixo no corpo  $j$  para o referencial global.

## 3. ÂNGULO DE ROTAÇÃO RELATIVO ENTRE DOIS CORPOS

Quando dois corpos  $i$  e  $j$  tem dois eixos em comum ( $z_i$  e  $z_j$ ), onde o corpo  $j$  gira em torno do eixo  $z_j$  (eixo da junta de revolução), conforme ilustrado na Fig. (1), pode-se obter o ângulo de rotação entre estes corpos em torno dos referidos eixos projetando-se um vetor unitário fixo no corpo  $j$  ( $\mathbf{f}_j$ , por exemplo) no referencial local que é fixo no corpo  $i$ .

Na Fig. (2) é apresentado o vetor  $\mathbf{f}_j$  na base formada pelos eixos  $x_i y_i z_i$  ( $(\mathbf{f}_j)_i$ ), vetor esse que é dado por:  $(\mathbf{f}_j)_i = {}_i \mathbf{A}_j \mathbf{f}_j'$

onde  $\mathbf{f}_j'$  é o vetor fixo no corpo  $j$ , paralelo a  $x_j$ , em coordenadas do sistema local  $x_j y_j z_j$ .

- Se o vetor unitário  $(\mathbf{f}_j)_i$  estiver no primeiro quadrante,  $\phi$  é dado por:

$$\phi = \arccos((\mathbf{f}_j)_{xi} / \|\mathbf{f}_j\|) = \arccos((\mathbf{f}_j)_{xi} / 1) = \arccos((\mathbf{f}_j)_{xi})$$

- Se o vetor unitário  $(\mathbf{f}_j)_i$  estiver no segundo quadrante:  $\phi = \arccos((\mathbf{f}_j)_{yi}) + \pi/2$

- Se o vetor unitário  $(\mathbf{f}_j)_i$  estiver no terceiro quadrante:  $\phi = \arccos(-(\mathbf{f}_j)_{xi}) + \pi$

- Se o vetor unitário  $(\mathbf{f}_j)_i$  estiver no quarto quadrante:  $\phi = \arccos(-(\mathbf{f}_j)_{yi}) + 3\pi/2$

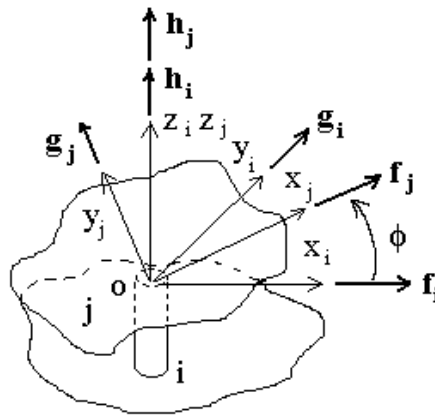


Figura1. Ângulo de rotação entre dois corpos em torno do eixo da junta de revolução

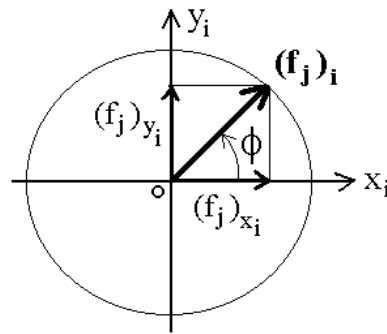


Figura 2.  $(f_j)_i$  : Projeção do vetor  $f_j$  no referencial  $x_i y_i z_i$

#### 4. RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS NO GIROSCÓPIO

Neste trabalho a base do giroscópio, o anel externo, o anel interno e o rotor serão chamados, respectivamente, de corpo 0, corpo 1, corpo 2 e corpo 3. Como o corpo 0 não possui nenhum grau de liberdade (é fixo em relação ao referencial global) e, considerando que os eixos do seu referencial local coincidem com os eixos do referencial global, tem-se seis equações de restrições cinemáticas absolutas sobre este corpo, inclusas nos seguintes vetores:

- vetor das restrições cinemáticas absolutas sobre as coordenadas  $x, y, z$  (no referencial global) da origem do referencial local do corpo 0:

$$\Phi^{r_0} = r_0 = 0 \quad (5)$$

que corresponde a três equações escalares:  $\Phi^{x_0=x_0}=0$ ,  $\Phi^{y_0=y_0}=0$  e  $\Phi^{z_0=z_0}=0$ ;

- vetor das restrições cinemáticas absolutas sobre os parâmetros de Euler  $e_1, e_2, e_3$  do corpo 0 ( $e_{1_0}, e_{2_0}, e_{3_0}$ ):

$$\Phi^{p_0} = 0 \quad (6)$$

que corresponde a três equações escalares:  $\Phi^{e_{1_0}=e_{1_0}}=0$ ,  $\Phi^{e_{2_0}=e_{2_0}}=0$  e  $\Phi^{e_{3_0}=e_{3_0}}=0$ .

A junta de revolução apresentada na Fig. (3), que restringe cinco graus de liberdade relativos de um corpo (três de translação e dois de rotação), é representada por cinco equações de restrição cinemática: três vêm da restrição cinemática esférica e as outras duas da restrição decorrente do paralelismo entre os eixos  $z_i$  e  $z_j$ . A restrição cinemática esférica, dada pela Eq. (7), estabelece uma relação analítica que representa dois pontos  $P_i$  e  $P_j$ , fixos respectivamente nos corpos  $i$  e  $j$ ,

coincidentes no espaço tridimensional. A restrição de paralelismo, dada pela Eq. (8), é composta por duas equações escalares, dadas pela Eq. (9) e Eq. (10), que estabelecem que os vetores  $\mathbf{h}_i$  e  $\mathbf{g}_i$  permanecem sempre ortogonais a  $\mathbf{h}_j$ .

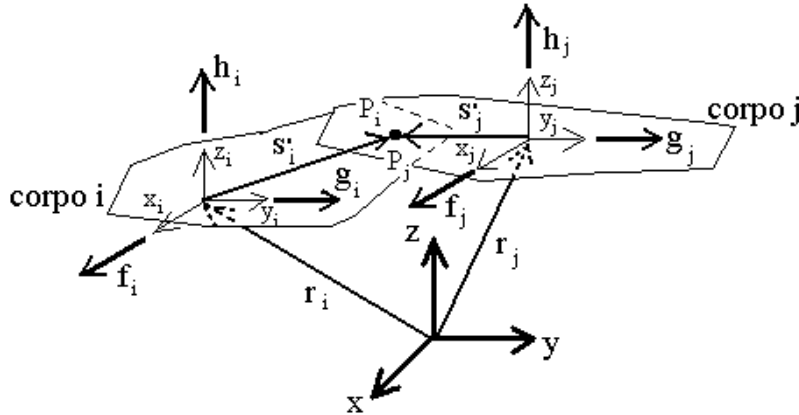


Figura 3. Dois corpos unidos por uma junta de revolução

$$\Phi^S(P_i, P_j) = \mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{s}_j' - \mathbf{r}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{s}_i' = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\Phi^{p1}(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) = \begin{bmatrix} \Phi^{dl}(\mathbf{f}_i, \mathbf{h}_j) \\ \Phi^{dl}(\mathbf{g}_i, \mathbf{h}_j) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\Phi^{dl}(\mathbf{f}_i, \mathbf{h}_j) = \mathbf{f}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \mathbf{h}_j' = 0 \quad (9)$$

$$\Phi^{dl}(\mathbf{g}_i, \mathbf{h}_j) = \mathbf{g}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \mathbf{h}_j' = 0 \quad (10)$$

onde:

$\mathbf{f}_i$ ,  $\mathbf{g}_i$ ,  $\mathbf{h}_i$  - Vetores unitários paralelos, respectivamente, aos eixos  $x_i$   $y_i$   $z_i$  em coordenadas deste sistema local.

$\mathbf{f}_j$ ,  $\mathbf{g}_j$ ,  $\mathbf{h}_j$  - Vetores unitários paralelos, respectivamente, aos eixos  $x_j$   $y_j$   $z_j$  em coordenadas deste sistema local.

$\mathbf{r}_i$  - Vetor de posição do centro de massa (e origem do referencial local) do corpo i em relação ao referencial global em coordenadas do sistema global.

$\mathbf{r}_j$  - Vetor de posição do centro de massa (e origem do referencial local) do corpo j em relação ao referencial global em coordenadas do sistema global.

$\mathbf{s}_i'$  - Vetor da origem do referencial  $x_i y_i z_i$  a  $P_i$  em coordenadas do sistema  $x_i y_i z_i$ .

$\mathbf{s}_j'$  - Vetor da origem do referencial  $x_j y_j z_j$  a  $P_j$  em coordenadas do sistema  $x_j y_j z_j$ .

O sistema possui três juntas de revolução, que são representadas por quinze equações de restrições cinemáticas. As restrições cinemáticas absolutas sobre a base do giroscópio são representadas por seis equações, totalizando vinte e uma equações de restrição cinemática (Eq.(11)).

$$\Phi = [\Phi^0 \quad \Phi^{p0} \quad \Phi_1^S \quad \Phi_1^{p1} \quad \Phi_2^S \quad \Phi_2^{p1} \quad \Phi_3^S \quad \Phi_3^{p1}]^T = \mathbf{0} \quad (11)$$

As restrições dos parâmetros de Euler (uma equação para cada corpo) fornecem as quatro equações restantes:

$$\Phi^P = [\mathbf{p}_0^T \mathbf{p}_0 - 1 \quad \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 - 1 \quad \mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2 - 1 \quad \mathbf{p}_3^T \mathbf{p}_3 - 1]^T \quad (12)$$

onde,  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  e  $\mathbf{p}_3$  são, respectivamente, os vetores dos parâmetros de Euler dos corpos 0,1,2 e 3.

## 5. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE SISTEMAS COMPOSTOS POR CORPOS RÍGIDOS COM RESTRIÇÕES

O sistema de equações diferenciais e algébricas de movimento, na forma matricial, para um sistema composto por corpos rígidos com restrições e com os sistemas locais de coordenadas de cada corpo com origem nos centros de massas dos mesmos, é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \Phi_r^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}' & \Phi_{\pi'}^T \\ \Phi_r & \Phi_{\pi'} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{w}}' \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^A \\ \mathbf{n}'^A - \tilde{\mathbf{w}}' \mathbf{J}' \mathbf{w}' \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde:

$\mathbf{M}$  - Matriz de massa do sistema.

$\mathbf{J}'$  - Tensor de inércia do sistema, em coordenadas dos sistemas locais.

$\mathbf{f}^A$  - Vetor de forças aplicadas no sistema, em coordenadas do sistema global.

$\mathbf{n}'^A$  - Vetor de torques aplicados no sistema, em coordenadas dos sistemas locais.

$\mathbf{w}'$  - Vetor das velocidades angulares do sistema, em coordenadas dos sistemas locais.

$\lambda$  - Vetor dos multiplicadores de Lagrange do sistema.

$\Phi_r$  e  $\Phi_{\pi'}$  - Matrizes Jacobianas do vetor das restrições cinemáticas do sistema.

$\gamma$  - Vetor que corresponde ao lado direito da equação cinemática para cálculo das acelerações do sistema.

Na Eq. (13) encontram-se a derivada segunda do vetor  $\mathbf{r}$  e a derivada primeira do vetor  $\mathbf{w}'$  em relação ao tempo. Deseja-se conhecer as coordenadas de posição e orientação (e suas derivadas primeiras) do sistema. Para tal deve-se reduzir a ordem do sistema, entretanto  $\mathbf{w}'$  não é integrável. Existe, porém, uma relação entre velocidade angular e derivada primeira do vetor dos parâmetros de Euler:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \mathbf{G}^T \mathbf{w}' \quad (14)$$

onde a matriz  $\mathbf{G}$  para um corpo  $i$  é dada por Haug et al (1989):

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{1_i} & \mathbf{e}_{0_i} & \mathbf{e}_{3_i} & -\mathbf{e}_{2_i} \\ -\mathbf{e}_{2_i} & -\mathbf{e}_{3_i} & \mathbf{e}_{0_i} & \mathbf{e}_{1_i} \\ -\mathbf{e}_{3_i} & \mathbf{e}_{2_i} & -\mathbf{e}_{1_i} & \mathbf{e}_{0_i} \end{bmatrix} \quad (15)$$

e,  $\mathbf{G} = \text{diag}(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4)$ .

De posse da Eq. (14) e realizando a seguinte substituição de variáveis:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{s} \quad (16)$$

Pode-se montar um sistema DAE de primeira ordem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \Phi_r^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}' & \Phi_{\pi'}^T \\ \Phi_r & \Phi_{\pi'} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{w}}' \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^A \\ \mathbf{n}'^A - \tilde{\mathbf{w}}' \mathbf{J}' \mathbf{w}' \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (17)$$

O sistema pode ser resolvido numericamente para  $\dot{\mathbf{s}}$  e  $\dot{\mathbf{w}}$  e em seguida integrado para a obtenção das posições e velocidades, (Haug, 1989; Fox e Zomaya 2000; Haug e Deyo, 1991 e Brisola 2002).

Este algoritmo é conhecido como integração direta, que é fácil de ser implementado e computacionalmente rápido, porém podem ocorrer violações nas restrições cinemáticas do sistema, uma vez que nas equações de movimento consideram-se apenas as restrições nas acelerações e não as equações das restrições nas posições, velocidades e parâmetros de Euler. Um algoritmo que também considera tais equações é o de partição de coordenadas, onde após cada passo de integração (ou sequência de passos compreendidos dentro de um pequeno intervalo de integração), interrompe-se o processo e corrige-se os resultados da integração, de modo que as equações de restrições nas posições, velocidades e dos parâmetros de Euler sejam satisfeitas.

Para se verificar a satisfação das equações de restrições nas posições e dos parâmetros de Euler, utiliza-se os resultados de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{r}$  obtidos na integração numérica das equações de movimento como estimativas iniciais para o método de Newton-Raphson, cujo objetivo é a resolução numérica do sistema de equações algébricas não lineares das restrições cinemáticas e restrições nos parâmetros de Euler. Entretanto, como existem mais coordenadas do que equações de restrição (pois o sistema possui três graus de liberdade), é necessário decompô-las em dependentes ( $\mathbf{u}$ ) e independentes ( $\mathbf{v}$ ), sendo a quantidade destas últimas igual a quantidade de graus de liberdade do sistema e supõe-se que os seus valores, obtidos na integração numérica das equações de movimento, são corretos. O método de Newton-Raphson é, então, utilizado para corrigir as coordenadas dependentes ( $\mathbf{u}$ ). O próximo passo é verificar se a equação de restrições nas velocidades é satisfeita:

$$\Phi_q \dot{\mathbf{q}} = \Phi_t \quad (18)$$

O vetor  $\mathbf{q}$  é composto por todas as coordenadas do sistema e  $\dot{\mathbf{q}}$  por todas as velocidades do sistema. Como existem mais variáveis do que equações de restrição, a matriz jacobiana  $\Phi_q$  não será uma matriz quadrada, não podendo ser invertida para se obter  $\dot{\mathbf{q}}$ . Decompõe-se, então, os vetores  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$  em coordenadas dependentes e independentes e velocidades independentes ( $\dot{\mathbf{v}}$ ) e dependentes ( $\dot{\mathbf{u}}$ ), para que estas últimas sejam corrigidas. As velocidades independentes são obtidas da integração numérica das equações de movimento. Com a decomposição de  $\mathbf{q}$  em  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  (e de  $\dot{\mathbf{q}}$  em  $\dot{\mathbf{u}}$  e  $\dot{\mathbf{v}}$ ) a Eq. (18) fica sendo:

$$\Phi_u \dot{\mathbf{u}} + \Phi_v \dot{\mathbf{v}} = -\Phi_t \quad (19)$$

A matriz  $\Phi_u$  que é quadrada pode ser invertida para a obtenção de  $\dot{\mathbf{u}}$ . No caso do giroscópio montado em um referencial inercial não há restrições diretoras, com isso  $\Phi_t = 0$ , e  $\dot{\mathbf{u}}$  fica:

$$\dot{\mathbf{u}} = -\Phi_u^{-1} \Phi_v \dot{\mathbf{v}} \quad (20)$$

## 6. DESALINHAMENTOS ENTRE OS CENTROS GEOMÉTRICOS DOS CORPOS

Considera-se que os centros de massa de cada corpo coincidem com seus centros geométricos, que por sua vez podem estar desalinhados devido a imprecisões de montagens, conforme se observa nas figuras 4, 5 e 6, onde o problema é ilustrado utilizando-se como exemplo o desalinhamento do centro geométrico do corpo 3 em relação ao centro geométrico do corpo 2.

i) Caso 1 - Centro geométrico do corpo 3 desalinhado com o centro geométrico do corpo 2 devido a um desalinhamento da junta de revolução em relação ao corpo 2. Neste caso  $\mathbf{s}_3' = 0$  e a restrição cinemática esférica fica:  $\Phi^S(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2) = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{s}_2' = 0$

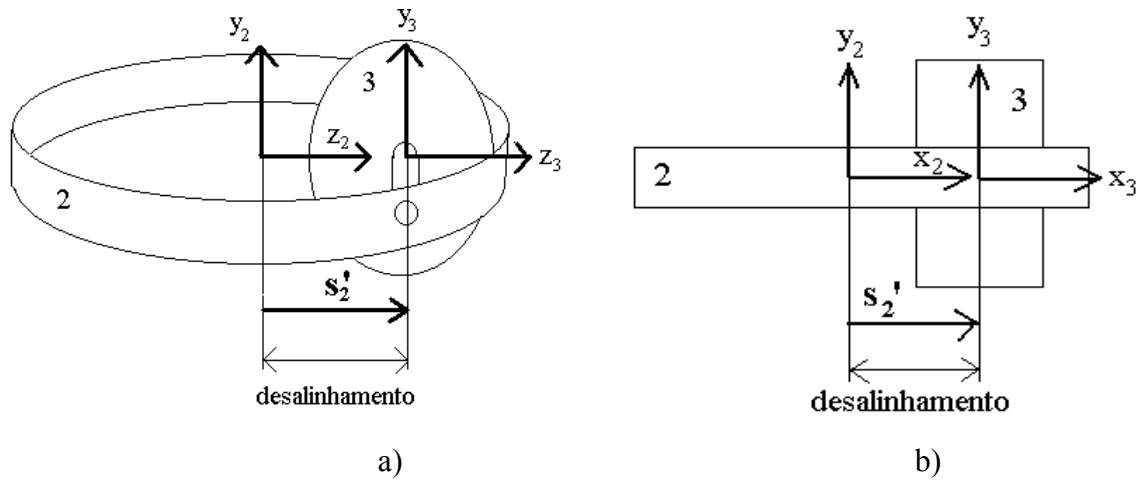


Figura 4. Desalinhamento da junta de revolução em relação ao corpo 2

ii) Caso 2 - Centro geométrico do corpo 3 desalinhado com centro geométrico do corpo 2 devido a um desalinhamento do corpo 3 em relação a junta de revolução. Neste caso a restrição cinemática esférica fica:  $\Phi^S(P_3, P_2) = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{s}_3' = \mathbf{0}$

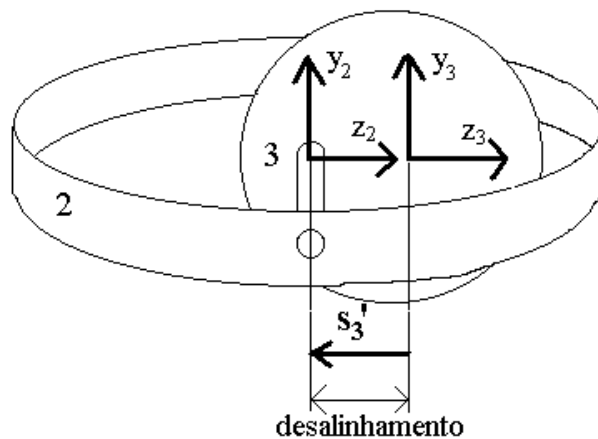


Figura 5. Desalinhamento do corpo 3 em relação a junta de revolução

iii) Caso 3 – Combinação das imperfeições apresentadas nos itens i) e ii). Neste caso a restrição cinemática é a mesma da Eq. (7).

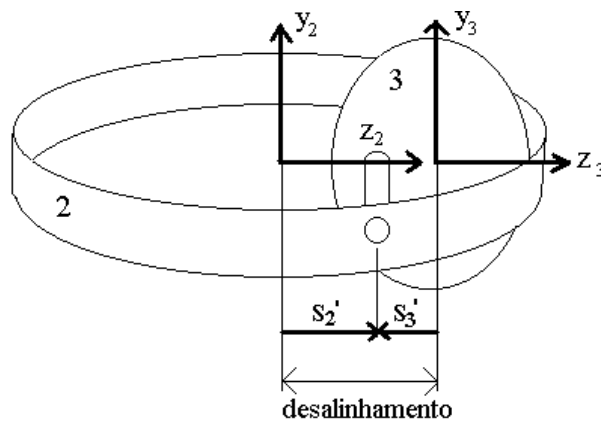


Figura 6. Combinação dos dois desalinhamentos

## 7. RESULTADOS DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Será apresentada neste item apenas uma simulação numérica, relativa ao desalinhamento apresentado na Fig. (4b). Considera-se que os corpos do giroscópio possuem as seguintes massas e tensores de inércia:

$$M_0 = 1 \times 10^{-3} \text{ kg}, \quad M_1 = 10 \times 10^{-3} \text{ kg}, \quad M_2 = 10 \times 10^{-3} \text{ kg} \text{ e } M_3 = 80 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$\mathbf{J}'_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2$$

$$\mathbf{J}'_1 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2$$

$$\mathbf{J}'_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2$$

$$\mathbf{J}'_3 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2$$

e que o centro geométrico do rotor encontra-se com um desalinhamento de 0.000125m em relação ao centro geométrico do anel interno, na direção do eixo  $x_2$ . Considera-se, ainda, que o centro de massa dos corpos coincidem com seus centros geométricos e que a aceleração da gravidade é de  $-10 \text{ m/s}^2$  na direção do eixo Y. Para se incluir os efeitos da aceleração da gravidade no sistema basta utilizar o vetor  $\mathbf{f}^A$  da Eq. (13), igual a:

$$\mathbf{f}^A = \mathbf{M} \mathbf{a}_g \quad (21)$$

onde  $\mathbf{a}_g$  é o vetor da aceleração da gravidade do sistema que é dado por:

$$\mathbf{a}_g = [0 \quad -10 \quad 0 \quad 0 \quad -10 \quad 0 \quad 0 \quad -10 \quad 0 \quad 0 \quad -10 \quad 0]^T \text{ m/s}^2 \quad (22)$$

No instante inicial o rotor possui velocidade angular absoluta de 100 rad/s em torno do eixo  $x_3$  e os anéis interno e externo encontram-se parados e perpendiculares entre si. O tempo de simulação foi de 1s. A resolução das equações diferenciais e algébricas de movimento do sistema foi feita com o algoritmo de partição de coordenadas, com correção de variáveis a cada 0.0005s e passo máximo de integração de 0.0001s.

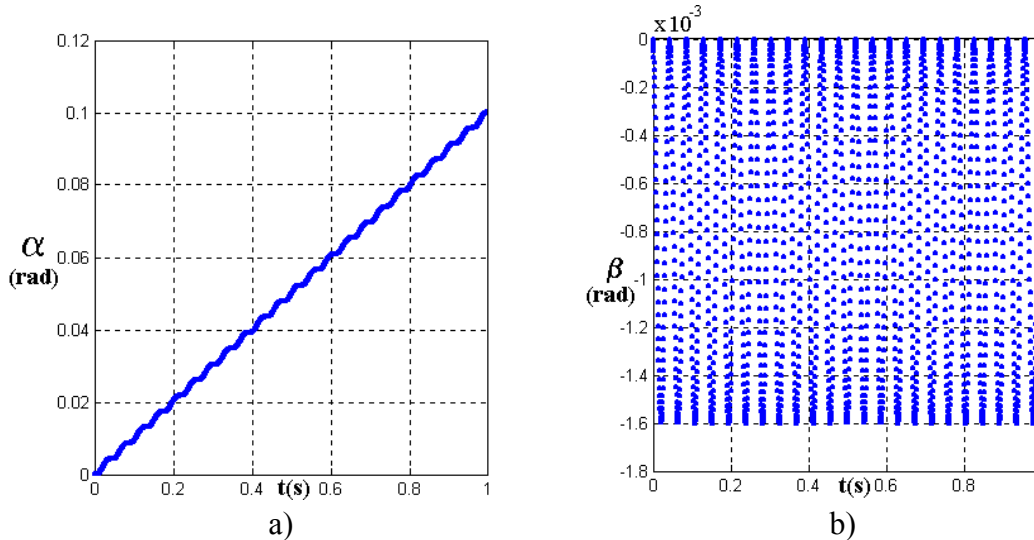


Figura 7.  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$

onde:

$\alpha$  - ângulo relativo entre o anel externo e a base do giroscópio.

$\beta$  - ângulo relativo entre o anel interno e o anel externo.



A inclinação da reta em torno da qual ocorre a oscilação do ângulo  $\alpha$ , bem como o período de oscilação e a amplitude do ângulo  $\beta$  obtidos na simulação encontram-se coerentes com os resultados previstos por Cannon et al (1967).

## 8. CONCLUSÃO

A utilização do número máximo de coordenadas mostra-se bastante conveniente para a modelagem de um giroscópio de suspensão cardânica com dois graus de liberdade, que possui desalinhamentos entre os centros geométricos dos corpos. Tal formulação é conveniente, pois evitam-se as extensas manipulações algébricas necessárias para a obtenção das equações diferenciais de movimento com número mínimo de coordenadas. Com a utilização do número máximo de coordenadas tem-se, em contrapartida, mais equações para serem resolvidas numericamente, implicando em maiores tempos de processamento. Um outro fator que contribui para o aumento no tempo de processamento são as etapas de correção dos resultados da integração. Entretanto, deve-se enfatizar que, com o surgimento de computadores cada vez mais velozes, tal desvantagem da modelagem com o número máximo de coordenadas em relação a modelagem com o número mínimo de coordenadas torna-se cada vez menos relevante.

## 9. REFERÊNCIAS

- BLAJER, W., 2002, “Augmented Lagrangian Formulation: Geometrical Interpretation and Application to Systems with Singularities and Redundancy”, Multibody Systems Dynamics Vol. 8, September 2002, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 141-159.
- BRISOLA, Marcelo S., 2002, “Análise Cinemática e Dinâmica de Sistemas Multicorpos Rígidos em Movimento Tridimensional”, dissertação M.Sc., IME, 158 p.
- CANNON, Robert H., 1967, “Dynamics of Physical Systems”, McGraw-Hill, USA, pp 167 -178, 617-626.
- FOX, B., JENNINGS, L.S., ZOMAYA, A.Y., 2000, “Numerical Computation of Differential-Algebraic Equations for the Approximation of Artificial Satellite Trajectories and Planetary Ephemerides”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 67 September 2000, Houston, pp 574-580.
- HAUG, Edward J., 1989, “Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems”, Allyn and Bacon, Massachusetts, 498 p.
- HAUG, Edward J., , DEYO, Roderic C., 1991, “Real-Time Integration Methods for Mechanical System Simulation”, NATO ASI Series F: Computer and Systems Sciences, Vol 69., Springer-Verlag, Germany, 352 p.
- HAUG, Edward J., 1992, “Intermediate Dynamics”, Prentice Hall, New Jersey, 420 p.

## 10. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## NUMERICAL MODELLING OF A GYROSCOPE WITH CARDAN SUSPENSION AND TWO DEGREES OF FREEDOM

**Maurício Gruzman**

IME - Instituto Militar de Engenharia

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha - Rio de Janeiro, RJ, CEP: 22290-270

e-mail: mgruzman@ig.com.br

**Clódio Alberto Pastro Sarzeto**

IME - Instituto Militar de Engenharia

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha - Rio de Janeiro,RJ, CEP: 22290-270

e-mail:sarzeto@ime.eb.br

**Abstract.** This work presents the modelling of a gyroscope with cardan suspension and two degrees of freedom. For the modelling, a formulation with a maximal number of coordinates will be used, where the equations of motion appear as differential-algebraic equations (DAE). In those equations Euler parameters will be used as orientation coordinates for the gyroscope bodies, but, as it is difficult to have a physical understanding of the results shown by those coordinates, a method to obtain the relative angle of rotation between two consecutive bodies will be presented.

It will be included in the model misalignments between the bodies, which are constructive imperfections. At last will be presented a simulation of a gyroscope under the gravity acceleration and with a misaligned rotor. The results of the simulation are compared to results found in the literature.

**Keywords:** gyroscope, simulation.