

# MÉTODOS DE MÍNIMOS QUADRADOS DE GAUSS-NEWTON E ITERAÇÃO DIRETA NA IDENTIFICAÇÃO DE FALHAS ESTRUTURAIS EM CASCAS UTILIZANDO ELEMENTO FINITO HIERÁRQUICO

**Amarildo Tabone Paschoalini**

UNESP Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Brasil Centro, 56 – 15385-000 – Ilha Solteira – SP  
tabone@dem.feis.unesp.br

**Rangel Ferreira do Nascimento**

UNESP Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica

**Silmara Cassola**

USP São Carlos – Departamento de Engenharia Mecânica

**Resumo.** *Este trabalho apresenta uma formulação para identificação de falhas estruturais em cascas, na qual a localização e a extensão da falha estrutural podem ser determinadas corretamente usando apenas um número limitado de frequências naturais. O conhecimento dos modos de vibrar da estrutura danificada não é necessário. O elemento quadrilateral quadrático hierárquico para análise de cascas é utilizado para calcular as equações características da estrutura original e da estrutura danificada. Com base nestas equações características é gerado um conjunto de equações não-lineares, que analisados através do método de Mínimos Quadrados de Gauss-Newton ou do método de Iteração Direta, determinam a falha estrutural. Um exemplo numérico é usado para demonstrar a eficiência da formulação e comparar estes dois métodos.*

**Palavras-chave:** *Método dos elementos finitos, Identificação de falhas estruturais, Cascas, Método de Mínimos Quadrados de Gauss-Newton, Método de Iteração Direta.*

## 1. INTRODUÇÃO

Falhas estruturais podem ser identificadas por várias técnicas não-destrutivas, como emissão acústica, ultra-sônica, termográfica e análise modal. Como qualquer alteração de rigidez, local ou distribuída, resulta em alteração dos parâmetros modais, como frequências naturais e modos de vibrar, a localização e a extensão da falha estrutural podem ser determinadas através do estudo desta alteração das características modais. Além disso, desde que as frequências naturais podem ser determinadas efetivamente medindo-as em um ponto da estrutura e podem ser independente da posição escolhida, o método baseado na medida de frequências naturais é potencialmente muito atraente. Em vários estudos (Chen *et al.*, 1996, Natke *et al.*, 1988 e 1995, Pandey *et al.*, 1995, Topole *et al.*, 1995, Rytter, 1993, Yin *et al.*, 1992 e Tsai *et al.*, 1991) parâmetros modais são usados como a base para a identificação de falhas estruturais. Porém, uma característica comum destes estudos é que o modo de vibrar da estrutura danificada é necessário. Consequentemente, a utilização destes métodos são limitados a estruturas nas quais os modos de vibrar são relativamente fáceis de medir, por exemplo treliças. Para evitar a dificuldade de identificar os modos de vibrar, foram propostos vários métodos que só usam frequências naturais. Cawley & Adams (1979) apresentaram um método para calcular a localização de falhas em estruturas através das alterações nas frequências

naturais. Este método pode ser usado para descobrir e localizar falhas em alguns tipos de estruturas, porém não pode identificar corretamente em casos gerais. Lallement (1988) propôs técnicas para modelar e localizar a falha estrutural baseado na análise de sensibilidade dos autovalores. Link (1990) utilizou a matriz de sensibilidade dos autovalores para calcular os parâmetros de ajuste iniciais que são usados para corrigir o modelo inicial. To & Ewins (1991) apresentaram um procedimento para determinar os parâmetros modais revisados por uma análise de sensibilidade não-linear. O procedimento emprega a propriedade estacionária do quociente de Rayleigh para determinar os autovalores e autovetores modificados.

Bicanic *et al.* (1997) apresentou uma formulação para identificação de falha que usa somente as alterações das frequências naturais da estrutura. O método desenvolvido pode identificar a localização da falha e também determinar a quantidade da falha com um número limitado de frequências naturais. Inicialmente, é desenvolvida uma equação característica que relaciona a alteração relativa da rigidez, depois, são deduzidas duas equações generalizadas relacionadas com os indicadores de falha e as alterações dos modos de vibrar. Finalmente, a técnica dos mínimos quadrados de Gauss-Newton é desenvolvida para calcular os indicadores de falha por serem incógnitas primárias. A eficiência desta técnica foi demonstrada para diferentes estruturas de vigas.

Paschoalini (2001) apresentou um elemento finito com refinamento hierárquico baseado na versão  $p$  para a análise de placas e cascas. O primeiro nível de aproximação é obtido através do elemento finito isoparamétrico quadrilateral quadrático de nove nós, baseado na degeneração do elemento sólido tridimensional e na formulação de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação sucessivos refinamentos hierárquicos são usados com o objetivo de remover a característica de rigidez excessiva do elemento isoparamétrico na análise de placas e cascas.

O objetivo deste trabalho é a identificação de falhas estruturais em cascas utilizando somente as alterações das frequências naturais considerando a formulação desenvolvida por Bicanic *et al.* (1997) e o elemento finito apresentado por Paschoalini (2001). Um exemplo numérico é usado para demonstrar a eficiência da formulação e comparar o método de Mínimos Quadrados de Gauss-Newton e o método de Iteração Direta na resolução do conjunto de equações não-lineares.

## 2. FORMULAÇÃO: ELEMENTO FINITO COM REFINAMENTO HIERÁRQUICO

O campo de deslocamento do elemento de casca é interpolado a partir das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  quadrilaterais quadráticas, e é dado por:

$$\bar{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \bar{\mathbf{d}}_i + \mathbf{z} \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{\mathbf{v}}_{1i} \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{z} \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{\mathbf{v}}_{2i} \cdot \mathbf{b}_i \quad (1)$$

O refinamento da expansão quadrática especificada pela Eq. (1) pode ser conseguido adicionando-se a ela funções de forma hierárquicas  $M_{pk}(\xi, \eta)$  de ordem superior a dois (Babuska *et al.*, 1981). As funções  $M_{pk}(\xi, \eta)$  são polinômios de grau  $p$  associados a cada um dos lados do elemento ( $k = 1, 2, 3$  e  $4$ ) ou são polinômios de grau  $p$ , do tipo bolha, associados ao elemento ( $k = 5, 6, 7, \dots$ ). Neste trabalho o refinamento da expansão quadrática foi feito adicionando-se funções de forma hierárquicas de 3º, 4º e 5º graus. As funções de forma utilizadas foram definidas em termos das integrais dos Polinômios de Legendre (Szabo *et al.*, 1991).

Desta forma o deslocamento  $\bar{\Delta}$  dado pela Eq. (1) para o caso do elemento isoparamétrico, torna-se:

$$\bar{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^9 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \bar{\mathbf{d}}_i + \mathbf{z} \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{\mathbf{v}}_{1i} \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{z} \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{\mathbf{v}}_{2i} \cdot \mathbf{b}_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 M_{pk}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \bar{\mathbf{d}}_{pk} \quad (2)$$

para o caso de elemento paramétrico do tipo hierárquico. Nesta expressão  $\bar{\mathbf{d}}_{pk}$ , de componentes  $a_{pk}$ ,  $b_{pk}$  e  $c_{pk}$  segundo os eixos X, Y e Z do sistema de referência global, é o vetor constituído dos

parâmetros hierárquicos. As funções  $M_{pk}(\xi, \eta)$  quando inseridas na Eq. (1) não modificam o nível de aproximação do elemento, no entanto, a incógnita  $\bar{d}_{pk}$  deixa de ter o significado físico de variável nodal. Na realidade, as componentes de  $\bar{d}_{pk}$  são parâmetros dependentes das incógnitas nodais  $\bar{d}_i$ ,  $a_i$  e  $b_i$ . De uma maneira compacta, a Eq. (2) pode, ainda, ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (3)$$

na qual  $\{u\}$  é uma matriz constituída dos deslocamentos  $u(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $v(\xi, \eta, \zeta)$  e  $w(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $[N]$  é uma matriz constituída das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  e  $M_{pk}(\xi, \eta)$ , e  $\{a\}$  é uma matriz constituída dos deslocamentos nodais  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$ ,  $a_i$  e  $b_i$  e dos parâmetros hierárquicos  $a_{pk}$ ,  $b_{pk}$  e  $c_{pk}$ .

De acordo com as hipóteses básicas da teoria de placa e casca (Timoshenko *et al.*, 1959) e em função da solicitação do elemento, um ponto genérico vai apresentar, segundo o sistema de referência local  $(x', y', z')$ , a ele associado, o seguinte estado de deformação específica:

$$\begin{Bmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ g_{x'y'} \\ g_{y'z'} \\ g_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_{x'}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_{y'}} & 0 \\ \frac{1}{l_{y'}} & \frac{1}{l_{x'}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_{z'}} & \frac{1}{l_{y'}} \\ \frac{1}{l_{z'}} & 0 & \frac{1}{l_{x'}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ou ainda,

$$\{e'\} = [L] \cdot \{u'\} \quad (5)$$

na qual,  $\{u'\}$  corresponde aos deslocamentos segundo o sistema de referência local e  $[L]$  é o operador linear. Os deslocamentos  $\{u'\}$  podem ser dados em função dos deslocamentos globais  $\{u\}$  de acordo com a seguinte expressão:

$$\{u'\} = [q]^T \cdot \{u\} \quad (6)$$

sendo que  $[q]$  é uma matriz constituída dos cossenos diretores do sistema de referência local com relação ao sistema de referência global. Pode-se reescrever a Eq. (6) como:

$$\{e'\} = [L] \cdot [q]^T \cdot \{u\} = [L] \cdot [q]^T \cdot [N] \cdot \{a\} \quad (7)$$

na qual  $\{e'\}$  é uma matriz coluna, constituída das deformações específicas e distorções em um ponto genérico do elemento segundo o sistema de referência local,  $[B]$  uma matriz constituída das derivadas das funções de forma e  $\{a\}$  uma matriz coluna constituída dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos.

Aplicando o *Princípio do Trabalho Virtual* e o *Princípio de D'Alembert*, chega-se à determinação das matrizes de rigidez e de massa do elemento:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot |J(\mathbf{x}, \mathbf{h})| \cdot d\mathbf{x} \, d\mathbf{h} \, dz \quad (8)$$

$$[M^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{r} \cdot [N]^T \cdot [N] \cdot |J(\mathbf{x}, \mathbf{h})| \cdot d\mathbf{x} \, d\mathbf{h} \, dz \quad (9)$$

na qual,  $[D']$  é uma matriz quadrada, simétrica, constituída das constantes elásticas do material,  $|J(\mathbf{x}, \mathbf{h})|$ , o determinante da matriz jacobiano da transformação global-local. A equação característica para um sistema estrutural com  $n$  graus de liberdade pode ser expressa da forma:

$$[K] \cdot [\Phi] = [M] \cdot [\Phi] \cdot [\Lambda] \quad (10)$$

na qual  $[K]$  e  $[M]$  são respectivamente as matrizes  $(n \times n)$  de rigidez e massa,  $[\Lambda]$  a matriz diagonal  $(n \times n)$  que contém os  $n$  autovalores  $\lambda_i$  e  $[\Phi] = \{\{f_1\}, \dots, \{f_i\}, \dots, \{f_n\}\}$  a matriz  $(n \times n)$  que contém os  $n$  autovetores  $\{f_i\}$ .

Inicialmente, para se obter os autovalores e autovetores o sistema isoparamétrico é resolvido:

$$[K_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] = [M_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] \cdot [\Lambda_{iso}] \quad (11)$$

Sendo  $n_{iso}$  o número de graus de liberdade da análise isoparamétrica,  $[K_{iso}]$ ,  $[M_{iso}]$ ,  $[\Phi_{iso}]$  e  $[\Lambda_{iso}]$  são submatrizes  $(n_{iso} \times n_{iso})$ . A solução obtida através da primeira análise do sistema pode ser refinada introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro grau:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & [\Lambda_{iso,h3}] \\ [\Lambda_{h3,iso}] & [\Lambda_{h3}] \end{bmatrix} \quad (12)$$

na qual as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico já foram obtidas anteriormente na análise inicial. Sendo  $n_{h3}$  o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na primeira reanálise,  $[K_{iso,h3}]$ ,  $[M_{iso,h3}]$ ,  $[\Phi_{iso,h3}]$  e  $[\Lambda_{iso,h3}]$  são submatrizes  $(n_{iso} \times n_{h3})$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise,  $[K_{h3}]$ ,  $[M_{h3}]$ ,  $[\Phi_{h3}]$  e  $[\Lambda_{h3}]$  são submatrizes  $(n_{h3} \times n_{h3})$  correspondentes ao sistema hierárquico para a primeira reanálise. Da mesma maneira, pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da segunda reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de quarto grau, e assim por diante. Portanto, para a  $i$ -ésima análise pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & \dots & [K_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [K_{hi,iso}] & \dots & [K_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & \dots & [\Phi_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Phi_{hi,iso}] & \dots & [\Phi_{hi}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{iso}] & \dots & [M_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [M_{hi,iso}] & \dots & [M_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & \dots & [\Phi_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Phi_{hi,iso}] & \dots & [\Phi_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & \dots & [\Lambda_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Lambda_{hi,iso}] & \dots & [\Lambda_{hi}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

na qual as submatrizes correspondentes a  $i$ -ésima análise foram obtidas anteriormente na análise anterior ( $i-1$ ). Verifica-se que para cada reanálise é necessário apenas calcular as submatrizes relacionadas com as novas variáveis hierárquicas introduzidas. As submatrizes calculadas nas análises anteriores permanecem inalteradas o que diminui o esforço computacional de maneira apreciável.

### 3. FORMULAÇÃO: IDENTIFICAÇÃO DE FALHAS

São consideradas as equações características da estrutura original e da estrutura danificada:

$$(K - I_i M) f_i = 0 \quad (14)$$

$$(K^* - I_i^* M^*) f_i^* = 0 \quad (15)$$

nas quais  $K$  e  $M$  são, respectivamente, as matrizes de rigidez e massa global para a estrutura original,  $I_i$  e  $f_i$  são, respectivamente, os  $i$ -ésimos autovalores e os correspondentes autovetores para a estrutura original. As incógnitas com um sobrescrito  $*$  se referem à estrutura danificada.

A falha estrutural é considerada somente como uma alteração na matriz de rigidez, portanto não há nenhuma alteração na matriz de massa

$$K^* = K + \Delta K \quad (16)$$

$$M^* = M \quad (17)$$

na qual  $\Delta K$  é a alteração da matriz de rigidez global. A alteração de rigidez leva a uma alteração nas características modais. Então, as alterações em um autovalor  $\Delta I_i$  e um autovetor  $\Delta f_i$  podem ser expressas na forma

$$\Delta \mathbf{I}_i = \mathbf{I}_i^* - \mathbf{I}_i \quad (18)$$

$$\Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^* - \mathbf{f}_i \quad (19)$$

Além disso, é assumido que a alteração de rigidez devido à falha estrutural não levará a qualquer alteração dos autovalores. Usando as Eqs. (16), (17) (18) e (19), a alteração nos autovetores pode ser expressa a partir da Eq. (15):

$$\Delta \mathbf{f}_i = -\mathbf{f}_i - (\mathbf{K} - \mathbf{I}_i^* \mathbf{M})^{-1} \Delta \mathbf{K} (\mathbf{f}_i + \Delta \mathbf{f}_i) \quad (20)$$

Da decomposição espectral, e assumindo que o autovetores originais são normalizados, o termo  $(\mathbf{K} - \mathbf{I}_i^* \mathbf{M})^{-1}$  pode ser expresso como

$$(\mathbf{K} - \mathbf{I}_i^* \mathbf{M})^{-1} = \sum_{k=1}^N \frac{\mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^T}{\mathbf{I}_k^* - \mathbf{I}_i^*} \quad (21)$$

Nesta equação somente os autovalores que diferem entre a estrutura original e a estrutura com falha são considerados para evitar que o denominador da Eq. (21) desapareça.

Levando em conta a Eq. (21), a Eq. (20) pode ser reescrita como

$$\Delta \mathbf{f}_i = -\mathbf{f}_i + \frac{\mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{K} (\mathbf{f}_i + \Delta \mathbf{f}_i) \mathbf{f}_i}{\Delta \mathbf{K} \mathbf{I}_i} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{\mathbf{f}_k^T \Delta \mathbf{K} \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k^T \Delta \mathbf{K} \Delta \mathbf{f}_i}{\mathbf{I}_i^* - \mathbf{I}_k} \mathbf{f}_k \quad (22)$$

Pré-multiplicando a Eq. (15) por  $\mathbf{f}_i^T$ , temos

$$\mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{K} (\mathbf{f}_i + \Delta \mathbf{f}_i) = \Delta \mathbf{I}_i + \Delta \mathbf{I}_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{f}_i \quad (23)$$

Desprezando o termo de alta ordem,

$$\mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{K} (\mathbf{f}_i + \Delta \mathbf{f}_i) = \Delta \mathbf{I}_i \quad (24)$$

Substituindo na Eq. (24), a Eq. (22) se torna

$$\Delta \mathbf{f}_i = \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{\mathbf{f}_k^T \Delta \mathbf{K} \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k^T \Delta \mathbf{K} \Delta \mathbf{f}_i}{\mathbf{I}_i^* - \mathbf{I}_k} \mathbf{f}_k \quad (25)$$

Pode ser visto da Eq. (25) que a alteração de um autovetor pode ser expressa como uma combinação linear do autovetor original. Quando  $k$  é bastante grande, os termos com subscritos maior que  $k$  podem ser desconsiderados. Então,  $N$  pode ser substituído adequadamente por  $NC$ , denotando o número de modos de vibrar originais disponíveis, e a Eq. (25) pode ser reescrita como

$$\Delta \mathbf{f}_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{NC} C_{ik} \mathbf{f}_k \quad (26)$$

na qual o fator de participação modal  $C_{ik}$  é definido como:

$$C_{ik} = \frac{\mathbf{f}_k^T \Delta \mathbf{K} \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k^T \Delta \mathbf{K} \Delta \mathbf{f}_i}{\mathbf{I}_i^* - \mathbf{I}_k} \quad (27)$$

Reorganizando a Eq. (27), temos que

$$\mathbf{f}_k^T \Delta K \mathbf{f}_i + \sum_{l=1, l \neq i}^{NC} C_{il} \mathbf{f}_k^T \Delta K \mathbf{f}_l + \mathbf{I}_k C_{ik} - \mathbf{I}_i^* C_{ik} = 0 \quad (28)$$

Usando as Eqs. (26) e (27), a Eq. (23) pode ser reescrita como

$$\mathbf{f}_i^T \Delta K \mathbf{f}_i + \sum_{l=1, l \neq i}^{NC} C_{il} \mathbf{f}_i^T \Delta K \mathbf{f}_l - \Delta \mathbf{I}_i = 0 \quad (29)$$

na qual o termo de alta ordem desaparece exatamente devido à ortogonalidade do autovetor original.

Além disso, é assumido um modelo escalar de falha, portanto a alteração na matriz de rigidez pode ser expressa na forma

$$\Delta K = \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{a}_j K_j \quad (30)$$

na qual  $\mathbf{a}_j$  é o indicador escalar de falha para o  $j$ -ésimo elemento,  $K_j$  é a contribuição do elemento  $j$  na a matriz de rigidez global e  $NE$  é o número de elementos estruturais.

Então, as Eqs. (29) e (28) podem ser rescritas na forma

$$\sum_{j=1}^{NE} a_{iji} \mathbf{a}_j + \sum_{j=1}^{NE} \sum_{l=1, l \neq i}^{NC} a_{kjl} C_{il} \mathbf{a}_j - (\mathbf{I}_i^* - \mathbf{I}_i) = 0 \quad (31)$$

e, finalmente, como

$$\sum_{j=1}^{NE} a_{kji} \mathbf{a}_j + \sum_{j=1}^{NE} \sum_{l=1, l \neq i}^{NC} a_{kjl} C_{il} \mathbf{a}_j - (\mathbf{I}_i^* - \mathbf{I}_i) C_{ik} = 0 \quad (32)$$

na qual  $\mathbf{a}_{iji}$ ,  $\mathbf{a}_{ijl}$ ,  $\mathbf{a}_{kji}$  e  $\mathbf{a}_{kjl}$  são os coeficientes de sensibilidade de rigidez, que podem ser definidos de uma forma geral como

$$a_{kji} = \mathbf{f}_k^T K_j \mathbf{f}_i \quad (33)$$

Combinando os conjuntos de Eqs. (31) e (32) pode-se escrever um sistema de equações não-lineares com um total de  $NEQ = NL * NC$  equações, relacionadas aos indicadores escalar de falha  $\mathbf{a}_j$  e aos fatores de participação modal  $C_{ik}$ .  $NL$  é o número de frequências naturais disponíveis. Neste trabalho foram utilizados o método de Mínimos Quadrados de Gauss-Newton (Chen, 1997) e o método de Iteração Direta (Chen, 1997) para resolver este conjunto de equações e encontrar as incógnitas  $\mathbf{a}_j$  e  $C_{ik}$ .

A convergência  $\Delta \alpha$  pode ser calculada a partir do indicador escalar de falha de cada elemento:

$$\Delta \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{NE} |\Delta \mathbf{a}_j| \quad (34)$$

Uma vez encontrados os fatores de participação modal  $C_{ik}$ , usando as Eqs. (19) e (26) os autovetores para a estrutura danificada podem ser calculados como

$$\mathbf{f}_i^* = \mathbf{f}_i + \sum_{k=1, k \neq i}^{NC} C_{ik} \mathbf{f}_k \quad (35)$$

na qual a correlação dos autovalores para a estrutura original e para a estrutura danificada pode ser comparada utilizando o Coeficiente Modal de Correlação (*Modal Assurance Criterion – MAC*), definido como:

$$MAC(k,i) = \frac{|\mathbf{f}_k^T \mathbf{f}_i^*|^2}{|\mathbf{f}_k^T \mathbf{f}_k| |\mathbf{f}_i^{*T} \mathbf{f}_i^*|} \quad (36)$$

Valores do coeficiente  $MAC(k,i)$  iguais à unidade indicam uma perfeita correlação entre o modo original  $k$  e o modo danificado  $i$ , e valores do coeficiente  $MAC(k,i)$  iguais a zero indicam total ausência de correlação entre os mesmos.

#### 4. EXEMPLO NUMÉRICO

A seguir são apresentados os resultados obtidos com o elemento finito hierárquico na identificação de falhas estruturais em cascas, considerando a análise isoparamétrica do elemento quadrilateral quadrático ( $p=2$ ) e as análises hierárquicas de terceiro grau ( $p=3$ ), quarto grau ( $p=4$ ) e quinto grau ( $p=5$ ). A formulação hierárquica possibilita utilizar diferentes expansões polinomiais em diferentes lados do elemento e nos próprios elementos, mas neste trabalho o refinamento adaptativo não é explorado. O refinamento hierárquico foi feito utilizando expansões polinomiais de mesmo grau ao longo dos lados e dos elementos.

Uma casca cilíndrica modelada com 16 elementos e 81 nós é usada para demonstrar a eficiência da formulação e comparar o método de Mínimos Quadrados de Gauss-Newton (GNLS) e o método de Iteração Direta (DI) na resolução do conjunto de equações não-lineares. Nesse exemplo é assumido que todas frequências naturais são livres de ruído e que existe uma perfeita correlação entre os modos da estrutura original e os modos da estrutura com falha. Um dos lados curvos da casca cilíndrica é considerado engastado e os demais são livres. A casca tem as seguintes propriedades: dimensões  $S = L = 0.3048$  m, raio de curvatura  $R = 0.6096$  m, espessura  $t = 3.048 \times 10^{-3}$  m, módulo de elasticidade  $E = 2.068 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, densidade  $\rho = 7.80 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup> e módulo de Poisson  $\nu = 0.3$ . A geometria da casca cilíndrica é mostrada na Fig. (1a) e os elementos numerados na Fig. (1b).

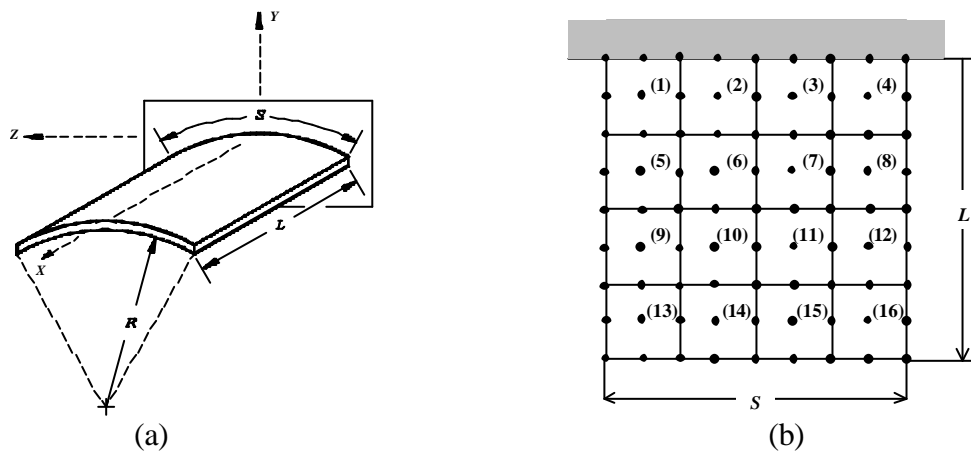


Figura 1. Casca cilíndrica engastada, geometria (a) e elementos numerados (b).

Dois cenários hipotéticos de falha são induzidos através da redução do módulo de elasticidade em diferentes elementos com diferentes magnitudes, como mostra a Tab. (1). Fixando o número de frequências naturais da estrutura com falha igual ao número de elementos ( $NL=NE=16$ ), dois números de autovetores da estrutura original ( $NC=18$  e  $NC=24$ ) são selecionados para o processo de identificação de falha.

Tabela 1. Cenários hipotéticos de falha induzidos através da redução do módulo de elasticidade em diferentes elementos com diferentes magnitudes.

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Cenário 1	-5%	0%	-3%	0%	-5%	-3%	0%	-5%	0%	-2%	-5%	0%	0%	-3%	0%	-2%
Cenário 2	-2%	0%	0%	-5%	0%	0%	-3%	0%	-2%	-5%	0%	0%	-3%	0%	-2%	0%

Os métodos de Mínimos Quadrados de Gauss-Newton (GNLS) e de Iteração Direta (DI) são utilizados para comparar a convergência do indicador escalar de falha ( $\Delta\alpha$ ) para os cenários hipotéticos de falha, como mostra a Tab. (2).

Tabela 2. Convergência  $\Delta\alpha$  do método de Mínimos Quadrados de Gauss-Newton (GNLS) e do método de Iteração Direta (DI) para os cenários hipotéticos de falha.

ITERAÇÃO	MÉTODO	CENÁRIO 1		CENÁRIO 2	
		NC = 18	NC = 24	NC = 18	NC = 24
1	DI	8.20e-001	9.50e-001	8.40e-001	9.80e-001
	GNLS	7.10e-001	7.50e-001	8.10e-001	8.40e-001
2	DI	2.29e-001	2.75e-001	2.37e-001	2.79e-001
	GNLS	6.39e-002	9.86e-002	7.06e-002	1.12e-001
3	DI	6.42e-002	7.94e-002	6.69e-002	7.97e-002
	GNLS	5.75e-003	1.30e-002	6.16e-003	1.49e-002
4	DI	1.80e-002	2.29e-002	1.89e-002	2.27e-002
	GNLS	5.18e-004	1.71e-003	5.37e-004	1.98e-003
5	DI	5.02e-003	6.63e-003	5.33e-003	6.47e-003
	GNLS	4.66e-005	2.24e-004	4.68e-005	2.63e-004
6	DI	1.41e-003	1.92e-003	1.51e-003	1.85e-003
	GNLS	4.20e-006	2.95e-005	4.08e-006	3.50e-005
7	DI	3.93e-004	5.54e-004	4.25e-004	5.26e-004
	GNLS	3.78e-007	3.88e-006	3.56e-007	4.66e-006
8	DI	1.10e-004	1.60e-004	1.20e-004	1.50e-004
	GNLS	3.40e-008	5.10e-007	3.10e-008	6.20e-007

Pode-se verificar que os métodos utilizados convergem em poucas iterações ( $\Delta\alpha < 1.0e-3$  é um resultado aceitável), entretanto a convergência do método de Mínimos Quadrados de Gauss-Newton (GNLS) é encontrada mais rapidamente. Os valores do indicador escalar de falha calculados por ambos os métodos são praticamente idênticos. Os resultados são mostrados nas Fig. (2), (3), (4) e (5).

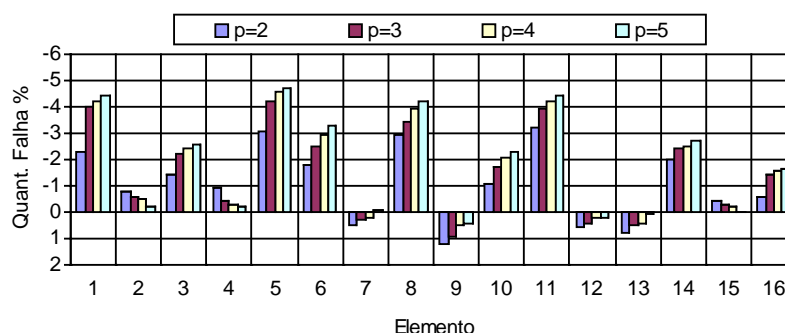


Figura 2. Identificação da falha estrutural para o cenário 1 ( $NL=16$  e  $NC=18$ ).



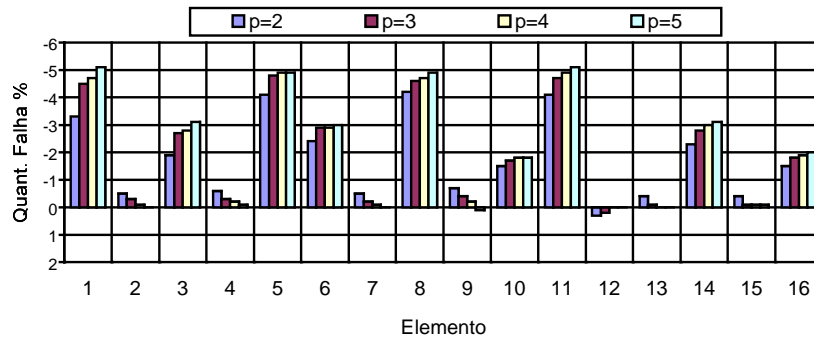


Figura 3. Identificação da falha estrutural para o cenário 1 ( $NL=16$  e  $NC=24$ ).

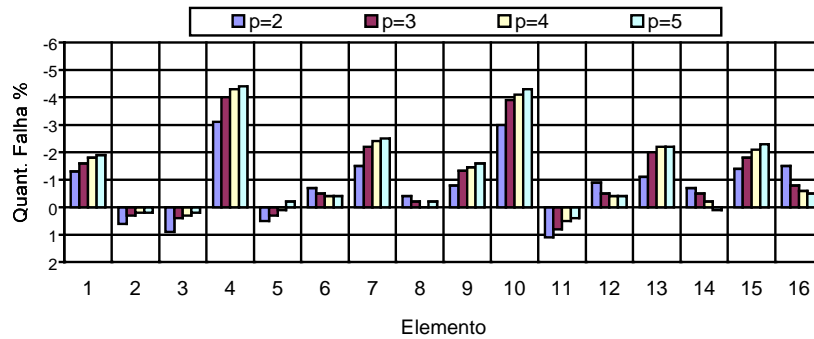


Figura 4. Identificação da falha estrutural para o cenário 2 ( $NL=16$  e  $NC=18$ ).

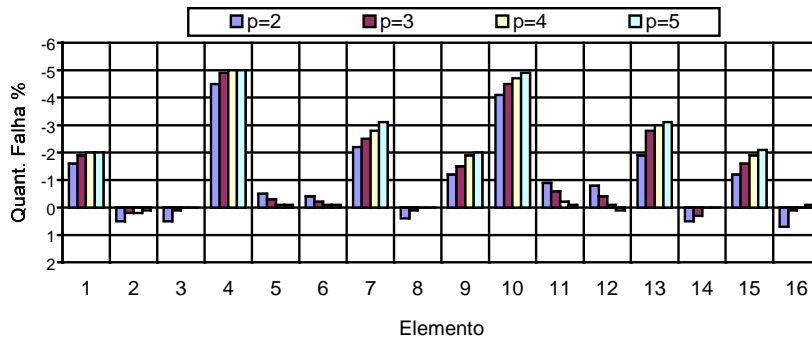


Figura 5. Identificação da falha estrutural para o cenário 2 ( $NL=16$  e  $NC=24$ ).

## 5. CONCLUSÕES

Considerando o exemplo numérico utilizado para identificação de falhas estruturais em cascas, pode-se verificar que a análise hierárquica de terceiro grau ( $p=3$ ), quarto grau ( $p=4$ ) e quinto grau ( $p=5$ ) apresentaram excelentes resultados em comparação com a análise isoparamétrica quadrática ( $p=2$ ). Estes resultados indicam que a localização e a quantidade de falha podem ser determinadas corretamente usando apenas um número limitado de frequências naturais. Pode-se verificar que os métodos utilizados convergem em poucas iterações, entretanto a convergência do método de Mínimos Quadrados de Gauss-Newton (GNLS) é encontrada mais rapidamente do que o método de Iteração Direta. Os valores do indicador escalar de falha calculados por ambos os métodos são praticamente idênticos para  $\Delta\alpha < 1.0e-3$ .

## 6. REFERÊNCIAS

- Babuska, I., Szabo, B.A. and Katz, I.N., 1981, "The p-version of the Finite Element Method", SIAM J. Num. Anal., Vol. 21, N. 6, pp. 1180-1207.
- Bicanic, N. and Chen, H.P., 1997, "Damage Identification in Framed Structures Using Natural Frequencies", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 40, pp. 4451-4468.
- Cawley, P. and Adams, R.D., 1979, "The Location of Defects in Structures from Measurements of Natural Frequencies", J. Strain Anal., Vol. 14, pp. 49-57.
- Chen, H.P. and Bicanic, N., 1996, "Identification of the Location and the Extended of Structural Damage from Modified Eigenvalues – A Two-Stage Iterative Method", Proc. 4<sup>th</sup> ACME-UK, N. Bicanic and B.E. Richards (ed.), Glasgow, pp. 164-167.
- Lallement, G., 1988, "Localisation Techniques", Structural Safety Evaluation Based on System Identification Approaches, Vieweg, Braunschweig, FRG, pp. 212-233.
- Link, M., 1990, "Identification and Correction of Errors in Analytical Models Using Test Data – Theoretical and Practical Bounds", Proc. 8<sup>th</sup> Int. Modal Analysis Conf., Kissimmee, pp. 570-578.
- Pandey, A.K. and Biswas, M., 1995, "Damage Diagnostics of Truss Structures by Stimulation of Flexibility Change", Modal Anal. IJAEMA, Vol.10, pp. 104-117.
- Paschoalini, A.T., 2001, "The Hierarchical Nine-Node Shell Finite Element", UNICAMP – Campinas Staty University, Brazil, Doctoral Thesis (in portuguese).
- Szabó, B.A. and Babuska, I., 1991, "Finite Element Analysis", Wiley-Interscience, New York.
- Timoshenko, P. and Woinowsky-Krieger, S., 1959, "Theory of Plates and Shells", 2ed., Kogakusha: McGraw-Hill.
- To, W.M. and Ewins, D.J., 1991, "Non-linear Sensivity Analysis of Mechanical Structures Using Modal Data", J. Mech. Engng. Sci., Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 205, pp. 67-75.
- Topole, K.G. and Stubbs, N., 1995, "Nondestructive Damage Evaluation in Complex Structures from a Minimum of Modal Parameters", Modal Anal. IJAEMA, Vol. 10, pp. 95-103.

## GAUSS-NEWTON LEAST SQUARES AND DIRECT ITERATION TECHNIQUES IN DAMAGE IDENTIFICATION OF SHELL STRUCTURES USING HIERARCHICAL FINITE ELEMENT

**Amarildo Tabone Paschoalini**

UNESP Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Brasil Centro, 56 – 15385-000 – Ilha Solteira – SP  
tabone@dem.feis.unesp.br

**Rangel Ferreira do Nascimento**

UNESP Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica

**Silmara Cassola**

USP São Carlos – Departamento de Engenharia Mecânica

**Abstract.** *This paper discusses a structural damage identification in shell structures, where both the location and the extend of structural damage in shell structures can be correctly determined using only a limited number of measured and no knowledge of the modal shapes of the damaged structure is required. The hierarchical finite element based on the p-version concept for the analysis of shells is used to calculation of the characteristic equations for the original and damaged structure, a set of equations is generated. The Gauss–Newton Least Squares technique and Direct Iteration technique are utilized to determine structural damage from the derived equations. Finally, numerical example is used to demonstrate the effectiveness of the method.*

**Keywords:** *Finite element method, Structural damage identification, Shell, Gauss–Newton Least Squares technique, Direct Iteration technique.*