

# **SIMULAÇÃO DO PROBLEMA DE EVOLUÇÃO DO DANO EM UMA BARRA ELASTO-VISCOPLÁSTICA COM ACOPLAMENTO TERMOMECÂNICO EMPREGANDO O GRAFO DE INTERFACE GENÉRICA (GIG)**

**José Maria Andrade Barbosa**

Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Mecânica; e-mail: [jmab@demec.ufpe.br](mailto:jmab@demec.ufpe.br); (081)32718231;

**Félix Christian Guimarães Santos**

Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Mecânica; e-mail: [fcgs@demec..ufpe.br](mailto:fcgs@demec..ufpe.br); ;(081) 32718231;

**Eduardo Roberto de Brito Jr**

Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Mecânica; e-mail: [errbj@yahoo.com.br](mailto:errbj@yahoo.com.br) ; (081)32718231;

**Resumo.** *O estudo de simulação de problemas complexos pelo método do elemento finito emprega uma quantidade muito grande de métodos auxiliares, tais como geração de malha, integração no tempo, resolvedores para equações elípticas, parabólicas e hiperbólicas, resolvedores de sistemas algébricos lineares e não lineares (com diferentes pré-condicionadores), dentre outros. Neste sentido, qualquer investigação numérica do problema passa pela análise de várias combinações de métodos, em busca de formas mais eficazes e eficientes de resolvê-lo. Os métodos convencionais de programação consideram (quando chegam a fazê-lo) somente níveis mais baixos de abstração, que não chegam ao nível da programação e configuração do simulador em si (como articulador de métodos, seguindo um algoritmo de solução pré-determinado). O resultado disto para problemas complexos é que a troca de métodos acarreta invariavelmente uma re-programação radical. Neste trabalho uma representação de algoritmos na forma de grafos orientados acíclicos (o padrão GIG) é aplicada à um problema medianamente complexo permitindo que seu desempenho possa ser melhorado que concerne a sua performance computacional e re-usabilidade.*

**Palavras-chave:** Elementos Finitos, Dano, Efeitos Térmicos.

## **1. INTRODUÇÃO**

Devido ao avanço computacional dos últimos anos, a utilização de modelagens mais completas e sofisticadas para simular e prever o comportamento dos materiais usados em Engenharia de uma forma mais realista e precisa, vem se tornando cada vez mais freqüente. Dado o grande número de variáveis utilizadas, a obtenção das equações do modelo é uma tarefa complexa sendo necessário um procedimento sistemático para atingi-la. Foi desenvolvido um modelo baseado na Mecânica do Dano Contínuo para estudar o comportamento termomecânico de uma barra metálica cilíndrica solicitada axialmente. Uma variável interna de dano  $D$  (Barbosa, 1998; Chaboche, 1990), associada ao grau de degradação do material, foi introduzida para modelar a vida útil da barra. Foi utilizado o Método de Decomposição do Operador –MDO abordado em Barbosa,1998, com o qual pode-se tratar um problema complexo altamente acoplado, decompondo-o em vários sub-problemas

desacoplados, onde métodos numéricos disponíveis e testados podem ser aplicados (Barbosa, 2001). O problema proposto foi decomposto em dois: Um preditor Elástico, resolvido pelo MEF, e um Corretor Termoplástico. A partir da aplicação do

Dada a complexidade do modelo empregado, foi utilizada algumas combinações de métodos, tais combinações poderiam levar, no caso da substituição de algum desses métodos, a uma reprogramação de praticamente tudo. Visando evitar esse problema, utiliza-se neste trabalho a representação de algoritmos na forma de grafos orientados acíclicos (GIG-Pattern), esta representação, permite organizar os códigos de um modo mais fácil e permite adaptá-lo a novas estratégias e também facilita a reutilização dos mesmos (Santos *et al.*, 2003).

## 2. GEOMETRIA

A geometria utilizada neste trabalho consistiu em um modelo unidimensional. Consideramos o problema de uma barra cilíndrica solicitada axialmente. A barra possui comprimento  $L$  e área seccional  $A$  sendo definido então o seu domínio  $\Omega = (0, L)$  e o contorno  $\Gamma = \{0, L\}$ . A barra é engastada em uma das extremidades e submetida a diferentes solicitações na extremidade livre, tais solicitações podem ser em deslocamento prescrito ou força prescrita.

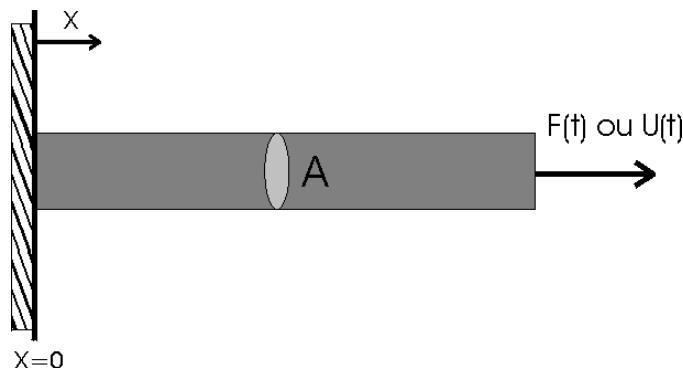


Figura 1. Geometria do problema

A geometria da barra é definida com relação à um segmento de reta, isto quer dizer que para cada ponto deste segmento uma região plana finita é definida. Definimos um sistema de referência colocando-se sua origem em um dos extremos e o eixo “x” colinear com o segmento de referência (só consideraremos as barras com segmento de referência como centróide de todas as suas seções transversais). Chamaremos de  $L$  o comprimento do segmento de referência e  $A(x)$  a área da seção transversal no ponto  $x$  do segmento de referência.

As equações que regem o modelo são descritas pela relação cinemática,

$$\varepsilon = \frac{du(x)}{dx} \quad (1)$$

Partindo de um balanço de forças em um modelo infinitesimal, obtemos a seguinte equação de equilíbrio:

$$-\frac{\partial(\sigma A(x))}{\partial x} + k(x)u(x) = f(x); \text{ em } \Omega = (0, L) \text{ e } \Gamma = \{0, L\} \quad (2)$$

onde  $\sigma$  corresponde a tensão,  $k(x)$  é a matriz de rigidez  $u(x)$  é o deslocamento e  $f(x)$  corresponde a forças por unidade de comprimento ao longo da barra.

### 3. MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO COM DANO E COM ACOPLAMENTO TÉRMICO

Estruturas submetidas a condições adversas de solicitação mecânica e/ou térmica, podem vir a ter sua resistência mecânica diminuída devido a processos de degradação do material como fluência e fadiga. Utilizando o enfoque da Termomecânica dos Processos Irreversíveis, é possível desenvolver modelos mais adequados, onde o processo de degradação do material é caracterizada através de uma variável interna chamada de dano. Os efeitos da degradação do material serão considerados neste modelo, por uma variável interna chamada dano ( $D$ ). A variável  $D$  ( $0 \leq D \leq 1$ ) pode ser interpretada como uma medida local da degradação (dano) do material, quando  $D = 0$  o material está virgem e  $D = 1$  o material está completamente danificado.

#### 3.1. Equações de Estado

As equações de estado do modelo proposto serão apresentadas. Estas equações são apropriadas para a simulação do comportamento de aços inoxidáveis. O conjunto de variáveis internas responsável pela caracterização do comportamento de materiais elasto-viscoplásticos é composto por duas variáveis:  $p$  (deformação plástica acumulada) e  $c$  (variável associada ao endurecimento isotrópico). As variáveis  $Y$  e  $X$  são variáveis auxiliares diretamente associadas ao endurecimento isotrópico e cinemático. A variável  $B^D$  representa a força termodinâmica associada à variável do dano,  $D$ . Para o caso uniaxial tem-se as seguintes equações de estado:

$$\sigma = (1 - D)E[(\varepsilon - \varepsilon^p) - \alpha(\theta - \theta_0)] \quad (3)$$

$$B^p = -Y = -(1 - D)(b[1 - e^{-dp}] + \sigma_p) \quad (4)$$

$$B^c = -\frac{2}{3}X = -(1 - D)(ac); X = X_1 + X_2; c = c_1 + c_2 \quad (5)$$

$$B^D = E[\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p) - \alpha(\theta - \theta_0)][(\varepsilon - \varepsilon^p) + b \cdot (p + \frac{1}{d}e^{-dp}) + \sigma_p \cdot p + \frac{3}{4}[a_1(c_1)^2 + a_2(c_2)^2]] \quad (6)$$

#### 3.2. Leis de Evolução

As leis de evolução do material formam um conjunto completo de equações constitutivas para um sólido elasto-viscoplástico. Estas são apresentadas a seguir :

$$\dot{\varepsilon}^p = \left\langle \frac{f(\sigma, x, y)}{K} \right\rangle^N \operatorname{sgn}(\sigma - X) \quad (7)$$

$$\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p| \quad (8)$$

$$c_1 = \dot{\varepsilon}^p - (\frac{2}{3})(\frac{\varphi_1}{a_1})X_1\dot{p} \quad (9)$$

$$c_2 = \dot{\varepsilon}^p - (\frac{2}{3})(\frac{\varphi_2}{a_2})X_2\dot{p} \quad (10)$$

$$\dot{D} = \frac{B^D}{S_0}\dot{p} \quad (11)$$

### 3.3. Equação da Energia:

A equação da energia para os materiais estudados envolve o acoplamento entre as respostas mecânica e térmica, tendo sido identificado dois termos de acoplamento: o acoplamento interno e o térmico. Através desses dois termos os processos mecânicos afetam a resposta térmica, e uma vez que os parâmetros do material dependem da temperatura, a resposta mecânica é afetada pela evolução da temperatura. Para a geometria considerada, tem-se a seguinte equação de energia:

$$\rho \cdot c_e \cdot \dot{\theta} = d_1 + acpT \quad (12)$$

onde,

$$d_1 = \sigma \dot{\varepsilon}^p - Y \dot{p} - X \dot{c} + B^D \dot{D} \quad (13)$$

$$acpT = \theta \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \dot{p} + \frac{2}{3} \frac{\partial X}{\partial \theta} \dot{c} - \frac{\partial B^D}{\partial \theta} \dot{D} \right] \quad (14)$$

Os termos  $d_1$  e  $acpT$  representam respectivamente o acoplamento interno e o acoplamento térmico. O termo  $\sigma \dot{\varepsilon}^p$  é o que mais contribui para a elevação da temperatura do material. Os termos associados aos endurecimentos isotrópicos e cinemático ( $Y \dot{p}$  e  $X \dot{c}$ ), contribuem retirando calor do material. O termo de acoplamento  $\theta \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \right]$  é responsável pelo efeito termoelástico e praticamente só se manifesta na região elástica. Os termos de acoplamento térmico associados aos endurecimentos isotrópicos ( $\theta \left[ \frac{\partial Y}{\partial \theta} \dot{p} \right]$ ) contribui para o aumento da temperatura e o cinemático ( $\theta \left[ \frac{2}{3} \frac{\partial X}{\partial \theta} \dot{c} \right]$ ) contribui para o decréscimo da temperatura. Os termos de acoplamento associados à variável dano ( $B^D \dot{D}$  e  $\theta \left[ \frac{\partial B^D}{\partial \theta} \dot{D} \right]$ ) contribuem para a elevação da temperatura.

## 4. SOLUÇÃO DO PROBLEMA ELÁSTICO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A forma forte do problema é dada por:

$$-\frac{\partial \sigma A(x)}{\partial x} + k(x)u(x) = f(x), \text{ em } \Omega = (0, L) \quad (15)$$

no problema considera-se a área constante, logo pode-se escrever a equação da forma:

$$-\frac{A \partial \sigma}{\partial x} + k(x)u(x) = f(x), \text{ em } \Omega = (0, L) \quad (16)$$

Multiplicando a equação acima por uma função de teste e integrando por partes obtém-se a forma fraca do problema:

$$\int_0^L \left[ \sigma A \frac{\partial v}{\partial x} + K u v \right] dx = \int_0^L f v dx + \sigma A v \Big|_0^L \quad (17)$$

Substituindo  $\sigma = (1-D)E[(\varepsilon - \varepsilon^P) - \alpha(\theta - \theta_0)]$  na equação acima e reorganizando os termos tem-se:

$$\begin{aligned} -(1-D)EA v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L + \int_0^L (1-D)EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \int_0^L kuv = \int_0^L fv - v(1-D)EA \varepsilon^P \Big|_0^L + \int_0^L (1-D)EA \varepsilon^P \frac{\partial v}{\partial x} - \\ -(1-D)EA v \alpha(\theta - \theta_0) \Big|_0^L + \int_0^L (1-D)EA \alpha(\theta - \theta_0) \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (18)$$

Os termos  $-v(1-D)EA \varepsilon^P \Big|_0^L$  e  $-(1-D)EA v \alpha(\theta - \theta_0) \Big|_0^L$  são considerados nulos, pois esta integração é resolvida a nível de elemento estas equações são no contorno, então tem-se:

$$-(1-D)EA v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L + \int_0^L (1-D)EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \int_0^L kuv = \int_0^L fv - \int_0^L (1-D)EA \varepsilon^P \frac{\partial v}{\partial x} + \int_0^L (1-D)EA \alpha(\theta - \theta_0) \frac{\partial v}{\partial x} \quad (19)$$

Da equação acima tem-se que no domínio

$$\int_0^L (1-D)EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \int_0^L kuv = \int_0^L fv - \int_0^L (1-D)EA \varepsilon^P \frac{\partial v}{\partial x} + \int_0^L (1-D)EA \alpha(\theta - \theta_0) \frac{\partial v}{\partial x} \text{ em } (0, L) \quad (20)$$

e o termo do contorno é dado por:

$$-(1-D)EA v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L \quad (21)$$

A noção básica introduzida pelo Método dos Elementos Finitos foi a construção de funções de forma baseadas em uma aproximação linear da geometria e do deslocamento. Para um elemento finito qualquer, mostrado na figura, ficamos com as Funções de Forma:

$$\psi_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad (22)$$

$$\psi_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (23)$$

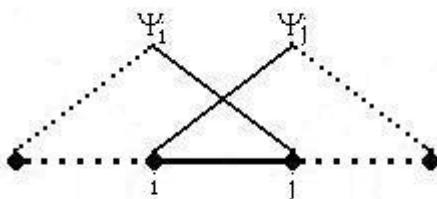


Figura 2. Funções de forma para um elemento finito

Aplicando as funções de forma acima definidas na forma fraca obtemos um sistema de equações algébricas da forma:

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\beta} = \underline{F} \quad (24)$$

Onde as contribuições de um elemento são definidas pela matriz de rigidez do elemento:

$$\underline{\underline{K}}^e (1 - D) \frac{EA}{hi} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

e as contribuições devido a plastificação e a temperatura dada pelos vetores:

$$\underline{\underline{F}}^{ep} = -(1 - D) EA \varepsilon^p \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\underline{\underline{F}}^{e\theta} = (1 - D) EA \alpha (\theta - \theta_0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

onde  $hi$  corresponde o comprimento do elemento.

## 5. MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DO OPERADOR

Apesar das generalidades e sofisticações das equações constitutivas consideradas neste trabalho, técnicas numéricas realmente simples podem ser utilizadas para se obter uma solução aproximada do problema descrito, conseguindo-se uma boa estabilidade e precisão nos resultados obtidos.

Para a aproximação da solução dos problemas de evolução quase-estática propõe-se uma técnica numérica simples baseada nos Métodos de Decomposição do Operador (van der Houwen, Messina, 1998; Zohdi, 2004). A idéia básica do método consiste numa decomposição aditiva do problema original numa seqüência de outros mais simples do tipo preditor/elástico e corretor/termoplástico de forma que possam ser aplicados métodos numéricos clássicos dos quais se conheça bem o comportamento de estabilidade e convergência. Abaixo, tem-se um fluxograma mostrando a técnica para solução do problema unidimensional:

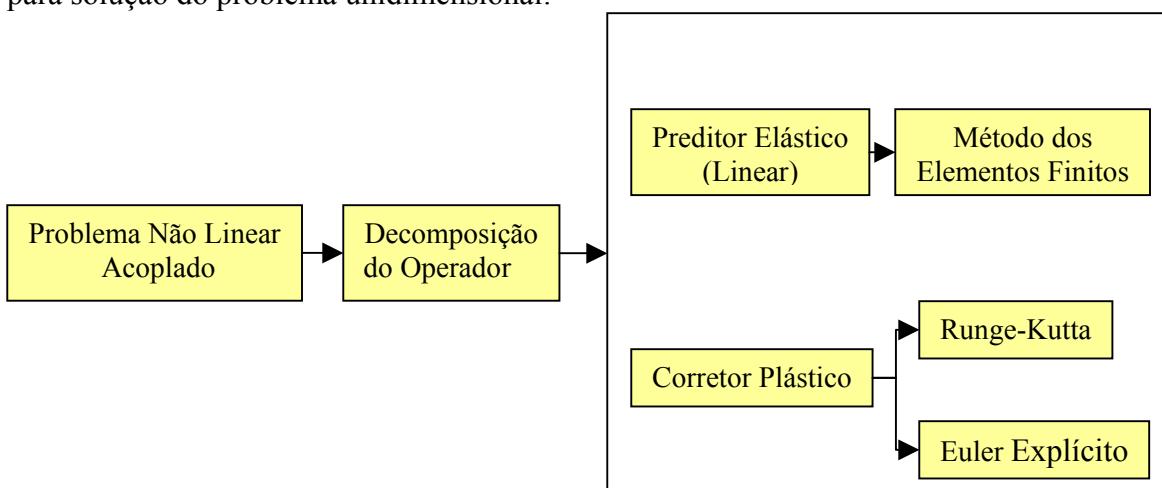


Figura 3. Decomposição do operador

## 6. GRAFO DE INTERFACE GENÉRICA

O uso da tecnologia workflow (Santos *et al*, 2003) ajuda no desenvolvimento de estratégias computacionais mais flexíveis e versáteis. Com a finalidade de implementar diferentes processos de maneira flexível e automática, o GIG-Pattern (Generic Interface Graph for processes control) foi desenvolvido. A implementação do GIG surgiu da necessidade que os pesquisadores do Departamento de Engenharia Mecânica da UFPE tinham de organizar os seus códigos de um modo mais fácil para adaptá-lo a novas estratégias e também permitir a reutilização dos mesmos.

A estrutura do GIG é mostrada a seguir:

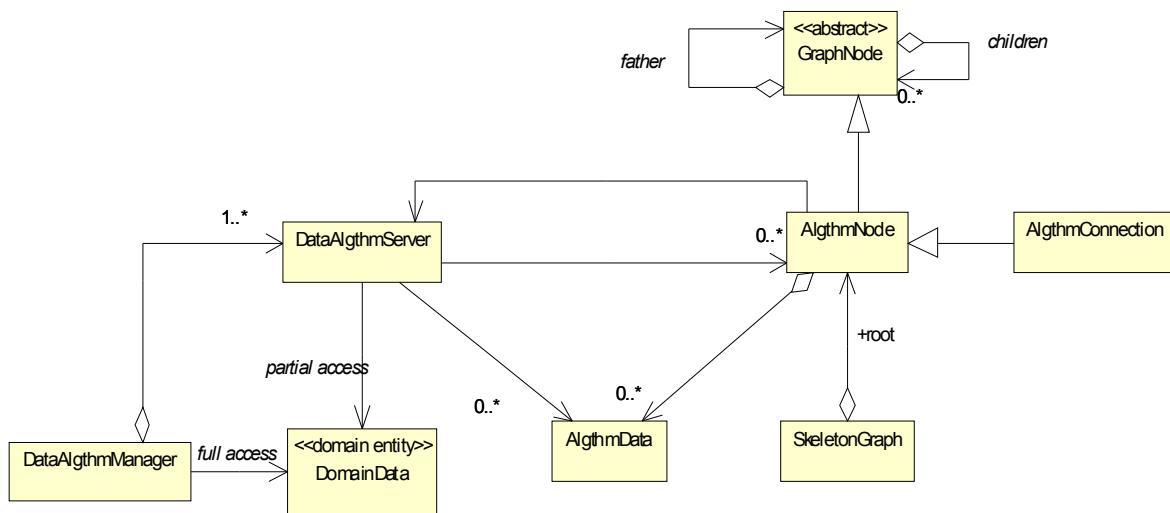


Figura 4. Estrutura do GIG

### 6.1 Grafo para o Modelo Proposto

Será apresentado nesta seção, o grafo do modelo proposto. O problema foi dividido em vários algoritmos, estes algoritmos foram divididos em fenômenos, os quais possuem uma menor hierarquia no grafo. Cada fenômeno foi organizado em grupos, obedecendo as variáveis utilizadas por cada fenômeno e os seu métodos de solução. Por fim os grupos foram reunidos em um bloco único. O grafo é mostrado abaixo:

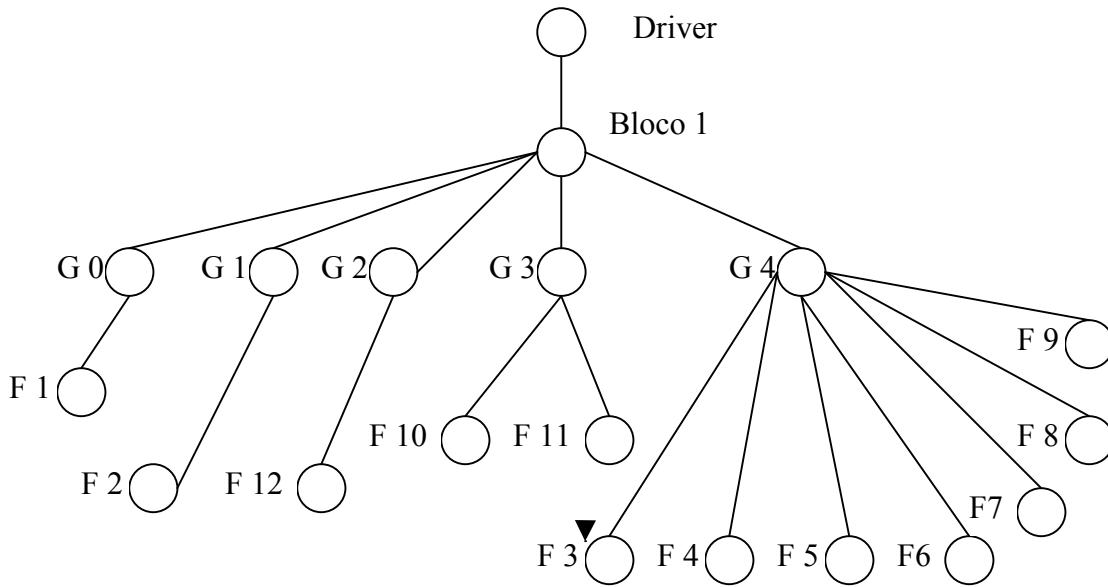


Figura 5. Grafo para o modelo

O fenômeno 1 corresponde aos deslocamentos nodais, o 2 está relacionado com a deformação total, o 3 corresponde a temperatura, o 4 diz respeito a tensão, o 5 é a deformação plástica, o 6 a deformação plástica acumulada, o 7 é o dano, o 8 e o 9 são variáveis internas associadas ao endurecimento cinemático, o 10 corresponde ao endurecimento cinemático, o 11 o endurecimento isotrópico e o 12 corresponde a função de plastificação.

## 7. CONCLUSÕES

Foi apresentado um esquema computacional para simular um problema não linear acoplado aplicando uma representação algorítmica dentro do padrão do Grafo de Interface Genérica-GIG.

O modelo unidimensional que foi utilizado é o de uma barra metálica inelástica submetida a carregamentos em força ou deslocamentos. O desenvolvimento das equações do modelo é baseado numa teoria constitutiva com variáveis internas onde são inseridos efeitos de viscoplasticidade, endurecimento material, acoplamento termomecânico, e de degradação material. Apesar de se tratar de um problema de difícil solução, mostrou-se que soluções numéricas podem ser facilmente obtidas, a partir de métodos clássicos, se a técnica de decomposição do operador for aplicada.

Foi aplicado um algoritmo baseado no MEF solução do preditor elástico e sugere-se esquemas de Euler ou Runge-Kutta na solução do preditor termoplástico. Uma representação algorítmica na forma de grafos orientados acíclicos (o padrão GIG) foi aplicada ao problema e seu desempenho pode então ser analisado no que concerne ao desempenho e re-usabilidade. Pode-se notar também a facilidade que o GIG trouxe no ponto que diz respeito a modificação do modelo. Novas variáveis agora podem ser acrescentadas sem ser necessário uma re-programação radical.

## 8. REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. M. A., Estudo da Localização da Deformação em Materiais Elasto-Viscoplásticos Levando em Conta Efeitos Térmicos e de Inércia, Doutorado em Eng. Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1998, Tese DR.

BARBOSA, J. M. A., PACHECO, P. M. C. L., COSTA MATTOS, H. S., Analisis Anisotermico de la Evaluacion del Daño en Barras Elasto-viscoplasticas Sometidas a Cargamentos Dinamicos, Revista Internacional de Informacion Tecnologica, vol 12 , n. 5, 2001.

CHABOCHE, Jean, LEMAITRE, Jean. Mechanic of Solid Materials, Cambridge University, 1990.  
SANTOS, F. C. G., VIEIRA, Mardoqueu Souza, LENCASTRE, Maria, Workflow for Simulators Based on Finite Element Method, Computational Science - ICCS , ISSN 0302-9743, Springer-Verlag, 2003, v.II, p. 555-564, 2003.

VAN DER HOUWEN, P.J., MESSINA, E., Splitting methods for second-order initial value problems, Numerical Algorithms 18 233–257 233, 1998.

ZOHDI, T. I., Modeling and Simulation of a Class of Coupled Thermo-chemo-mechanical Process in Multiphase Solids, Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng., n 193, pp 679-699, 2004.

## SIMULATION OF THE DAMAGE EVOLUTION PROBLEM IN ELASTOVISCOPLASTIC BARS EMPLOYING THE GENERIC INTERFACE GRAPH (GIG)

### **José Maria Andrade Barbosa**

Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Mecânica; email: [jmab@demec.ufpe.br](mailto:jmab@demec.ufpe.br); (081)32718231;

### **Félix Christian Guimarães Santos**

Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Mecânica; email: [fcgs@demec.ufpe.br](mailto:fcgs@demec.ufpe.br); ;(081) 32718231;

### **Eduardo Roberto de Brito Jr**

Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Mecânica; email: [errbj@yahoo.com.br](mailto:errbj@yahoo.com.br) ; (081)32718231;

**Abstract:** Computer simulation systems for complex problems using the finite element method usually needs a large number of auxiliary methods such as mesh generation methods, time integration schemes, solution schemes for elliptic, parabolic and hyperbolic equations, solvers for linear and nonlinear algebraic systems, error estimation and adaptation schemes and so on.. Therefore, any numerical investigation of such a problem needs the performance analysis of various combinations of methods, in the search for more efficient and accurate solution procedures. The conventional programming methods consider only lower levels of abstraction, instead of extending the abstraction consideration as far as the level of the simulator programming and configuration – considering the simulator as a methods articulator or as a reconfigurable and reprogrammable workflow. One of the consequences of this practice for complex problems is that the exchange of methods invariably implies in a radical and extensive reprogramming. In this work an algorithm computer representation in the form of directed acyclic graphs –following the pattern GIG – is applied to a reasonably complex problem and its quality can be improved in what concerns performance and reusability.

**Keywords:** Finite Element, Damage, Thermal Effects.