

MODELO CONSTITUTIVO DE ATRITO BIDIMENSIONAL PARA CONDIÇÕES DE DESLIZAMENTO ISOTRÓPICO

Vargas, Renato T.

Escola Politécnica, Universidade de São Paulo

Rtvargas@usp.br

De Aguiar, João B.

Escola Politécnica, Universidade de São Paulo

Jbaguiar@usp.br

Resumo

Este trabalho faz uma releitura da formulação de constitutiva de contato com atrito, incluindo efeitos de aderência e deslizamento, desenvolvida por Anand. São utilizadas medidas corotacionais, e as suas condições de modelagem abrangem altas pressões de contato. O modelo permite adotar diferentes possibilidades para as rigidezes na interface, através da abordagem da evolução de variáveis de estado, incluindo o encruamento isotrópico. Uma nova forma de solução bi-dimensional para o problema é proposta e implementada. São realizados estudos de natureza qualitativa e comparações com resultados experimentais no âmbito das aplicações para comprovar a eficácia das propostas.

Palavras-chave: atrito, lei constitutiva, encruamento isotrópico

1. INTRODUÇÃO

Contato com atrito entre superfícies é uma área de extensa aplicação em mecânica, abrangendo desde problemas de conformação até a modelagem de implantes cirúrgicos. Embora os avanços sejam significativos na área, persistem várias oportunidades de pesquisa na área de implementação, através do método dos elementos finitos. Neste segmento, em um número significativo de aplicativos, o atrito na interface ainda é baseado na lei de Coulomb, e há necessidade de modelos mais flexíveis para representar a complexidade de fenômenos presentes na interface.

Baseado nos avanços teóricos e na metodologia de solução dos problemas numéricos da elastoplasticidade, este trabalho avança em vários aspectos da modelagem das condições de deslizamento na interface.

Ao nível teórico, as leis constitutivas são formalizadas através da termodinâmica das variáveis internas para caracterizar o comportamento da interface com deslizamento relativo. As variáveis escolhidas são o coeficiente de atrito e o limite de resistência ao deslizamento, ambas dependentes da distância deslizada.

Alguns dos seus principais subsídios são decorrentes do modelo de Anand (1993), que propõe, com base no trabalho de Cheng;Kikuchi (1985), uma lei constitutiva de atrito, isotrópica, isotérmica e independente da velocidade de deslizamento, e implementada para uma dimensão.

Seguindo esta proposta, o presente trabalho fez uma releitura da lei constitutiva de Anand para a situação bi-dimensional, de forma incremental, com a incorporação precisa dos incrementos de deslizamento e nova forma de cômputo do Jacobiano constitutivo.

Os experimentos numéricos foram realizados em duas etapas: estudos qualitativos para verificar a concordância das leis implementadas com as hipóteses de formulação e a execução de aplicações para as quais comprovações experimentais fossem disponíveis.

Os resultados demonstram uma ampla concordância qualitativa dos resultados com as leis propostas. Por outro lado, as aplicações, ainda que em número restrito, demonstram a viabilidade de operacionalizar as leis constitutivas em casos práticos com eficiência e precisão.

2. ANALOGIA COM ELASTOPLASTICIDADE

Curnier (1984) realizou um esforço para sistematizar algumas idéias em torno da analogia entre os conhecimentos da elastoplasticidade e do atrito, sob os seguintes tópicos:

2.1 Decomposição Aditiva

Courtney-Pratt;Eisner (1957) estudaram o movimento relativo de duas superfícies, uma delas móvel (disco) e outra fixa, ambas em platina polida, e sujeitas a forças tangenciais. Os resultados apresentados na figura 1, demonstram a relação aproximadamente linear entre a tração tangencial, afetada da normal, suposta constante, e o deslocamento tangencial relativo durante as operações de carregamento e descarregamento. Embora ocorra um efeito de histerese, é importante apontar que a curva de carregamento / descarregamento é reversível. Esta característica é um dos fundamentos para a analogia com a plasticidade.

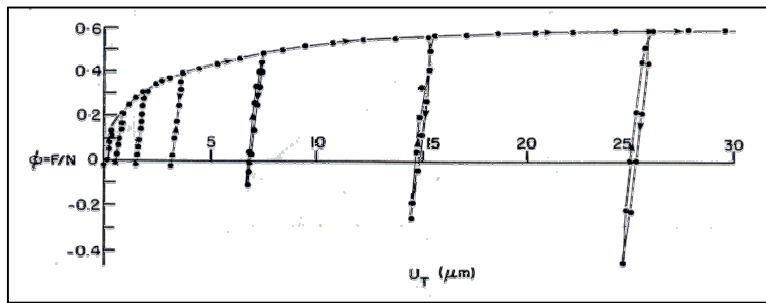


Figura 1. Experimento de Courtney – Pratt ; Eisner

Neste trabalho são adotados os termos aderência - para o deslocamento relativo de caráter reversível ou elástico - e deslizamento - para o deslocamento irreversível ou “plástico”. Na forma incremental os deslizamentos podem ser representados através da decomposição aditiva

$$\Delta \bar{\mathbf{u}} = \Delta \bar{\mathbf{u}}^a + \Delta \bar{\mathbf{u}}^s; \quad \Delta \bar{\mathbf{u}} = \Delta \bar{\mathbf{u}}_n \mathbf{n} + \Delta \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{e}_i \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

onde $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ é o incremento de deslocamento relativo total, $\Delta \bar{\mathbf{u}}^a$ é a parte do incremento de deslocamento em aderência nas direções $i = 1, 2$ e $\Delta \bar{\mathbf{u}}^s$ é a parte desse deslocamento que representa o deslizamento nessas mesmas direções, ligada a uma base local $\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.

Seguindo uma lei elástica linear, pode ser estabelecida uma relação entre as trações tangenciais e os deslocamentos. Na forma incremental,

$$\Delta \mathbf{t} = \Delta t_n \mathbf{n} + \Delta t_i \mathbf{e}_i; \quad \Delta t_n = \Delta \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}; \quad \Delta t_n^\nabla = -k_n \Delta \bar{\mathbf{u}}_n \quad \Delta t_i^\nabla = -k_t \Delta \bar{\mathbf{u}}_i^a \quad (2)$$

onde $k_n > 0; k_t > 0$ são parâmetros de rigidez em aderência da interface. Os experimentos de Courtney-Pratt e Eisner sugerem a interpretação física de parâmetro constitutivo que descreve, respectivamente, o módulo volumétrico e o módulo de cisalhamento na interface.

2.2 Critério de Deslizamento

O deslizamento se inicia apenas quando a magnitude da tensão tangencial iguala-se à resistência ao deslizamento. O critério que determina o início do deslizamento é formalizado através da função $f_c(\mathbf{t}, r) \leq 0$. O vetor \mathbf{t} representa as trações atuantes no ponto de contato e r , é um escalar com dimensões de tensão, chamado de resistência ao deslizamento. A evolução de r é regida por variáveis internas - para caracterizar a modificação das condições de atrito no processo.

A função f_c , segue a forma geral:

$$f_c = t_e - r; \quad t_e = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \quad \wedge \quad r = r(p, \bar{u}_e^s) \quad (3)$$

onde t_e é a tração tangencial equivalente. A imagem da função de carregamento/descarregamento f_c supõe duas possibilidades: $f_c < 0$ quando o par de pontos em contato está na condição de aderência e $f_c = 0$ quando o estado é neutro. Se o carregamento for mantido, as superfícies estarão em aderência, mas se ocorrer um aumento em sua magnitude, haverá um deslizamento relativo, medido pelo deslizamento relativo equivalente \bar{u}_e^s .

2.3 Leis de Fluxo de Deslizamento e Encruamento

Uma vez que se supõe ocorrência de deslizamento somente no plano tangencial, normalidade no plano deviatórico pode ser postulada, o que permite escrever os incrementos de deslocamento como

$$\Delta \bar{u}_i^s = \Delta \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial t_i}; \quad t_i \mathbf{e}_i = \mathbf{t} - t_n \mathbf{n}; \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

A figura 1 também apresenta uma outra característica fenomenológica decorrente do deslizamento relativo entre superfícies. Há uma evolução monotônica da curva a partir de um carregamento crescente, ou seja, a resistência ao deslizamento é constantemente modificada com o aumento do deslizamento relativo. Este comportamento pode ser qualificado como uma típica condição de “encruamento isotrópico” das condições de deslizamento da interface.

O estado de um ponto material na interface em um instante t , é caracterizado pela variável r e a tração aplicada \mathbf{t} . Essencialmente, o modelo constitutivo de atrito é um conjunto de equações diferenciais que descrevem a evolução do par (\mathbf{t}, r) . As alterações nas condições de deslizamento da interface são representadas através de variáveis internas. Como aponta Pisoni (1992), uma das vantagens desta formulação é que “o modelo pode ser estendido para outros regimes de atrito, escolhendo as variáveis internas e as formas de evolução de r ”.

Um dos desafios nesta formulação está relacionado à modelagem da origem e evolução da resistência ao deslizamento. Esta dificuldade é ligada à natureza complexa dos mecanismos que contribuem para a sua formação como o intertravamento, deformação e fratura das rugosidades, adesão de novas superfícies, formação de partículas causadas pelo desgaste das superfícies.

Assim, a resistência ao deslizamento r é uma função não só da pressão p , como também do estado α da interface $r = \hat{r}(p, \alpha)$, que deve ser especificado em cada modelo de acordo com uma variável interna adequada.

O “encruamento isotrópico” na interface pode ser modelado por apenas uma variável escalar – é comum a utilização do deslizamento relativo equivalente (análogo da deformação plástica equivalente).

Por outro lado, para o caso do “encruamento cinemático”, é necessária a adição de uma variável correspondente à translação da superfície de deslizamento no espaço de trações (o análogo na plasticidade é a tensão de fundo (back-stress)).

Se em determinada interface, as resistências aos deslizamentos forem diferenciadas nas diferentes direções do plano de deslizamento, elas podem ser representadas através de uma formulação anisotrópica.

A seguir são apresentadas as formulações do modelo constitutivo para comportamento isotrópico. O desenvolvimento do modelo isotrópico, aqui desenvolvido em detalhe, é um caso particular de modelos mais gerais, Vargas (2003).

3. FORMULAÇÃO DAS LEIS CONSTITUTIVAS

3.1 Decomposição do Incremento de Deslocamento

No caso de uma descrição de Lagrange incremental, com equilíbrio verificado a intervalos discretos, se supõe que as condições na configuração n , tempo t , sejam conhecidas, i.e., $\langle \mathbf{t}; \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_n \mathbf{n} + \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{e}_i / \bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{u}}_i^a + \bar{\mathbf{u}}_i^s, i=1,2; \mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{u}}_e^s) \rangle$ e que o incremento de deslocamento relativo $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ seja conhecido. O problema se resume em computar as condições de interface na configuração seguinte, $n+1$, $\tau = t + \Delta t$, o que pressupõe a atualização das trações bem como dos deslocamentos e resistência.

Uma interface com um encruamento isotrópico, conforme evidências experimentais apresentadas por Courtney-Pratt; Eisner e Tong; Anand (1993) pode apresentar evoluções diversas. Se este encruamento não envolver translação de superfície¹, for independente da razão de carregamento, como proposto em Cheng; Kikuchi (1985), então :

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\mathbf{u}}_e^s} \dot{\bar{\mathbf{u}}_e^s}; \quad \mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{u}}_e^s); \quad \bar{\mathbf{u}}_e^s = \sqrt{\bar{\mathbf{u}}_1^{s2} + \bar{\mathbf{u}}_2^{s2}} \quad (5)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_e^s$ representa o deslizamento acumulado relativo equivalente. Dessa forma, considerando o incremento entre posições sucessivas na superfície de deslizamento, Eq. (3), resulta, da condição de consistência que

$$\Delta f_c = \frac{\partial f_c}{\partial t_1} \Delta t_1^\nabla + \frac{\partial f_c}{\partial t_2} \Delta t_2^\nabla + \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{r}} \Delta \mathbf{r}; \quad \mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\mu, s^*, \mathbf{p}); \quad \Delta f_c = 0 \quad (6)$$

onde

$$\frac{\partial f_c}{\partial t_i} = \frac{t_i}{t_e} = m_i; \quad i=1,2 \quad \wedge \quad \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{r}} = -1 \quad (7)$$

sendo m_i a normal à superfície $\text{surf } f_c$, e

$$\Delta t_i^\nabla = -k_i \Delta \bar{\mathbf{u}}_i^a; \quad \Delta \bar{\mathbf{u}}_i^a = (\Delta \bar{\mathbf{u}}_i - \Delta \bar{\mathbf{u}}_i^s); \quad \mathbf{t}^\nabla = \dot{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{t} \quad i=1,2. \quad (8)$$

a forma corotacional incremental das trações tangenciais. Mais, o incremento de resistência, derivado do encruamento superficial, e descartado qualquer descarregamento, apresenta incremento

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \Delta \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\mathbf{u}}_i^s} \Delta \bar{\mathbf{u}}_i^s; \quad i=1,2 \quad \Delta \mathbf{p} = k_n \Delta u_n; \quad \mathbf{p} = -\mathbf{t}_n \quad (9)$$

¹ Equivalente ao modelo de von Mises na elastoplasticidade.

e também requer o cômputo das componentes do incremento de deslizamento, Eq. (4)

$$\Delta \bar{u}_i^s = \Delta \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial t_i}; \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Portanto, substituindo as expressões acima na Eq. (6), resulta, na forma vetorial que

$$\Delta f_c^\nabla = \mathbf{m} \cdot (\Delta \mathbf{t}^\nabla + \Delta \boldsymbol{\Omega} \mathbf{t}) - \left(\frac{\partial r}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial r}{\partial \bar{\mathbf{u}}^s} \cdot \Delta \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{t}} \right) \quad (11)$$

logo, uma vez resolvida a equação, o multiplicador relativo de contato resulta

$$\Delta \lambda_c = - \frac{k_t m_1 \Delta \bar{u}_1 + k_t m_2 \Delta \bar{u}_2 + h_p \Delta p}{k_t + h_t \xi}; \quad \xi = \frac{\bar{u}_1^s}{\bar{u}_e^s} m_1 + \frac{\bar{u}_2^s}{\bar{u}_e^s} m_2; \quad h_p = \frac{\partial r}{\partial p}; \quad h_t = \frac{\partial r}{\partial \bar{u}_e^s} \quad (12)$$

A avaliação desta relação fica, no entanto, prejudicada pelo fato de não conhecermos as componentes do vetor unitário tangencial \mathbf{m} . Contudo para as trações podemos escrever que

$$t_i(\tau) = t_i(t) + \Delta t_i^\nabla = t_i(t) - k_t [\Delta \bar{u}_i - \Delta \lambda_c m_i(\tau)] = t_i^p(\tau) + k_t m_i(\tau) \Delta \lambda_c \quad (13)$$

onde o preditor $t_i^p = t_i - k_t \Delta \bar{u}_i$ foi utilizado. Ao definir o vetor \mathbf{m}^p segundo

$$\mathbf{m}_i^p = \frac{t_i^p(\tau)}{t_e^p}; \quad t_e^p(\tau) = \sqrt{t_1^{p2} + t_2^{p2}} \quad (14)$$

substituição na Eq. (13) mostra que

$$\mathbf{m}^p t_e^p = \mathbf{m} t_e + k_t \mathbf{m} \Delta \lambda_c \quad (15)$$

e, portanto

$$\mathbf{m} = \omega \mathbf{m}^p; \quad \omega = \frac{t_e^p}{t_e + k_t \Delta \lambda_c} \quad (16)$$

Dessa forma $\omega^r = 1$, uma vez que ambos vetores na expressão acima são unitários. E, com isso, substituição das componentes de \mathbf{m}^p na Eq. (12) permite o cálculo do incremento do multiplicador de contato λ_c .

3.2 Atualização das Variáveis Internas

Uma vez feita a decomposição acima, as diversas variáveis podem ser atualizadas. Atualizado o incremento de deslocamento tangencial relativo, Eq. (10), a Eq. (13) pode ser usada para atualizar as trações, bem como o deslizamento relativo equivalente,

$$\bar{u}_e^s(\tau) = \bar{u}_e^s(t) + \Delta \bar{u}_e^s; \quad \Delta \bar{u}_e^s = \xi \Delta \lambda_c \quad (17)$$

Atualização da resistência, em cada forma particular de equação de apresentação, envolve atualizar umas quantas variáveis. No caso em que se adota a forma proposta por BAY et. al(1987),

$$r = s^* (\bar{u}_e^s) \tanh \left[\frac{\mu(\bar{u}_e^s) p}{s^* (\bar{u}_e^s)} \right] \quad (18)$$

que depende de um coeficiente de atrito,

$$\mu = \mu_0 + (\mu_s - \mu_0) [1 - \exp(-\bar{u}_e^s / \bar{u}_\mu)]; \quad \mu = \hat{\mu}(\bar{u}_e^s) \quad (19)$$

função de três variáveis experimentais $\langle \mu_0; \mu_s; \bar{u}_\mu \rangle$; de uma resistência de saturação,

$$s^* = s_0^* + (s_s^* - s_0^*) [1 - \exp(-\bar{u}_e^s / \bar{u}_{s^*})]; \quad s^* = \hat{s}^*(\bar{u}_e^s) \quad (20)$$

novamente função do conjunto de constantes $\langle s_0^*; s_s^*; \bar{u}_{s^*} \rangle$; além da pressão p , a atualização pode ser expressa como,

$$\begin{aligned} \mu(\tau) &= \mu(t) + \Delta\mu \\ \Delta\mu &= h_\mu \Delta\bar{u}_e^s; \quad h_\mu = h_{\mu_0} \left[1 - \frac{\mu(\tau)}{\mu_s} \right]; \quad h_{\mu_0} = \frac{\mu_s}{\bar{u}_\mu} \end{aligned} \quad (21)$$

de forma que

$$\mu(\tau) = \mu_s \frac{\mu(t) + h_{\mu_0} \Delta\bar{u}_e^s}{\mu_s + h_{\mu_0} \Delta\bar{u}_e^s} \quad (22)$$

De forma idêntica, a atualização de s^* , feita nos mesmos moldes, conduz a

$$\begin{aligned} s^*(\tau) &= s^*(t) + \Delta s^* \\ \Delta s^* &= h_{s^*} \Delta\bar{u}_e^s; \quad h_{s^*} = h_{s_0^*} \left[1 - \frac{s^*(\tau)}{s_s^*} \right]; \quad h_{s_0^*} = \frac{s_s^*}{\bar{u}_{s^*}} \end{aligned} \quad (23)$$

de maneira que,

$$s^*(\tau) = s_s^* \frac{s^*(t) + h_{s_0^*} \Delta\bar{u}_e^s}{s_s^* + h_{s_0^*} \Delta\bar{u}_e^s} \quad (24)$$

Evidentemente,

$$p(\tau) = p(t) + \Delta p \quad (25)$$

Algoritmo do Modelo

Atualização das trações normais

$$\mathbf{t}_n(\tau) = \mathbf{t}_n(t) - k_n \Delta \bar{\mathbf{u}}_n; \quad \Delta \bar{\mathbf{u}}_n = \Delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$$

Cálculo do preditor elástico:

$$\mathbf{t}^{pV}(\tau) = \mathbf{t}^V(t) + k_T \Delta \bar{\mathbf{u}}$$

Verificação da condição de deslizamento:

Se

$$t_e^p(\tau) < r(t) \quad \text{processo está em aderência}$$

Senão

$$t_e^p(\tau) \geq r(t) \quad \text{e o processo está em deslizamento.}$$

Calcular $\Delta \lambda_c$ e atualizar $\Delta \bar{\mathbf{u}}_1^s; \Delta \bar{\mathbf{u}}_2^s$

Calcular $\Delta \bar{\mathbf{u}}_c^s$ e atualizar

$$\mu(\tau) \text{ e } s^*(\tau)$$

Calcular $r(\tau)$

Calcular o fator de retorno radial $\text{rrf} = \frac{r}{t_e^p}$

Calcular

$$t_1 = \text{rrf} * t_1^p \quad \text{e} \quad t_2 = \text{rrf} * t_2^p$$

Calcular o Jacobiano.

Retornar para o solucionador no principal do programa.

3.3 Módulo de Linearização

O modelo constitutivo apresentado acima requer, para sua implementação, que o módulo de linearização, definido por

$$\mathbf{M} = \partial_{\Delta \bar{\mathbf{u}}} \mathbf{t}; \quad \mathbf{t} = t_n \mathbf{n} + t_i \mathbf{e}_i; \quad \Delta \mathbf{u} = \Delta u_n \mathbf{n} + \Delta u_i \mathbf{e}_i; \quad i = 1, 2 \quad (26)$$

seja computado. Para tanto podemos começar pela Eq. (8) acima,

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^p + k_t \mathbf{m} \Delta \lambda_c; \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}(\tau) \quad (27)$$

onde,

$$t_n^p = t_n + k_n \Delta u_n; \quad t_i^p = t_i + k_t \Delta u_i; \quad i = 1, 2 \quad (28)$$

representam as componentes do vetor \mathbf{t} no instante τ em termos daquelas no instante t enquanto

que $\mathbf{m} = m_n \mathbf{n} + m_i \mathbf{e}_i$; $m_n = 0$, $m_i = \frac{t_i}{t_e}$ de maneira que

$$\mathbf{M} = \partial_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{t}^p + k_t \Delta \lambda_c \partial_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{m} + k_t \mathbf{m} \partial_{\Delta \mathbf{u}} \Delta \lambda_c. \quad (29)$$

A primeira das derivadas indicada acima pode ser efetuada diretamente e resulta ser

$$\mathbf{K} = k_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + k_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (30)$$

sendo $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ o produto tensorial dos versores normais e \mathbf{I} o tensor unitário de ordem 2. Da mesma forma a segunda derivada acima pode ser escrita como,

$$\partial_{\Delta u} \mathbf{m} = -\frac{k_t}{t_e^p} [\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{m}^p \otimes \mathbf{m}^p] \quad (31)$$

uma vez que $\mathbf{m} = \mathbf{m}^p$ como mostrado acima. Já o último termo da expressão acima requer consideração do termo de resistência uma vez que $\Delta\lambda_c = \frac{t_e^p - r}{k_t}$, sendo $r = r(\mu, s^*, p)$. Assim,

$$\partial_{\Delta u} \Delta\lambda_c = \mathbf{m}^p - \frac{1}{k_t} \partial_{\Delta u} r; \quad \partial_{\Delta u} r = \frac{\partial r}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \Delta \mathbf{u}} + \frac{\partial r}{\partial s^*} \frac{\partial s^*}{\partial \Delta \mathbf{u}} + \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \Delta \mathbf{u}} \quad (32)$$

Novamente ao efetuarmos as derivações, encontramos,

$$\partial_{\Delta u} \mu = \bar{h}_\mu \partial_{\Delta u_i} \Delta \bar{u}_e^s \mathbf{e}_i; i=1,2 \quad \bar{h}_\mu = \frac{h_\mu}{[1 - \frac{\partial h_\mu}{\partial \mu} \Delta \bar{u}_e^s]} \quad (33)$$

$$\partial_{\Delta u} s^* = \bar{h}_{s^*} \partial_{\Delta u_i} \Delta \bar{u}_e^s \mathbf{e}_i; i=1,2 \quad \bar{h}_{s^*} = \frac{h_{s^*}}{[1 - \frac{\partial h_{s^*}}{\partial s^*} \Delta \bar{u}_e^s]} \quad (34)$$

$$\partial_{\Delta u} p = -k_n \mathbf{n} \quad (35)$$

Ao combinarmos os resultados acima, obtemos para a primeira direção local,

$$\frac{\partial \Delta\lambda_c}{\partial \Delta u_1} = \frac{m_1^p - \frac{1}{k_t} \beta_1 \zeta \Delta\lambda_c}{1 + \frac{1}{k_t} \alpha \zeta}; \quad \beta_1 = \frac{\bar{u}_1^s}{\bar{u}_e^s} \left| \frac{\partial m_1^p}{\partial \Delta u_1} \right| + \frac{\bar{u}_2^s}{\bar{u}_e^s} \left| \frac{\partial m_2^p}{\partial \Delta u_1} \right| \quad (36)$$

sendo,

$$\alpha = \frac{\bar{u}_1^s}{\bar{u}_e^s} |m_1^p| + \frac{\bar{u}_2^s}{\bar{u}_e^s} |m_2^p|; \quad \zeta = \frac{\partial r}{\partial \mu} \bar{h}_\mu + \frac{\partial r}{\partial s^*} \bar{h}_{s^*} \quad (37)$$

enquanto que para a segunda direção, se obtém de forma semelhante que,

$$\frac{\partial \Delta\lambda_c}{\partial \Delta u_2} = \frac{m_2^p - \frac{1}{k_t} \beta_2 \zeta \Delta\lambda_c}{1 + \frac{1}{k_t} \alpha \zeta}; \quad \beta_2 = \frac{\bar{u}_1^s}{\bar{u}_e^s} \left| \frac{\partial m_1^p}{\partial \Delta u_2} \right| + \frac{\bar{u}_2^s}{\bar{u}_e^s} \left| \frac{\partial m_2^p}{\partial \Delta u_2} \right| \quad (38)$$

de forma que com o simples adicionar dos resultados acima se obtém a expressão necessária de \mathbf{M} .

4. RESULTADOS

4.1 Verificação

Considerando que a magnitude do deslizamento determina a evolução da resistência, foi realizado um experimento submetendo um bloco a deslocamentos diferentes nas direções 1 e 2. Ao bloco, quadrado, com dimensões unitárias, é aplicado deslocamento de forma quasi-estática, no

primeiro passo desde (0;0) até a posição de coordenadas (2,0; 1,0) e, no segundo passo, retornado à posição de origem. É esperado que as trações em 1 e 2 sejam diferentes, uma vez que os deslocamentos foram diferentes. Como o deslizamento na direção 1 é superior ao da direção 2, a interface deve sofrer um encruamento superior nesta direção e, portanto, desenvolver trações maiores em 1.

Os resultados apresentados nas figuras 2 e 3 demonstram estas hipóteses. Podem ser observadas as magnitudes superiores de tração desenvolvidas na direção 1, com relação a 2 (aproximadamente o dobro). Também pode ser verificado o efeito Bauschinger nas duas direções.

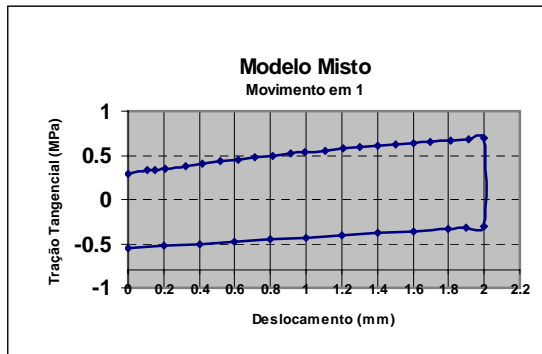


Figura 2. Trações na direção 1

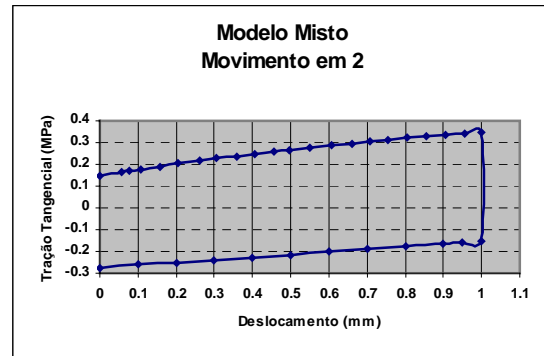


Figura 3. Trações na direção 2

4.2 Aplicação

A extrusão, figura 4, é apropriada à simulação de uma lei constitutiva de interface porque o atrito é o principal mecanismo de dissipação de energia no processo. Nesse caso um deslocamento de 6 mm, axial, é aplicado a um cilindro extrusor. Resultados das simulações da lei de encruamento isotrópica utilizando 240 elementos axisimétricos de 4 nós para grandes deslocamentos e deformações são apresentados. Eles se referem à evolução força de reação no sentido axial da extrusão (eixo 2 negativo) em relação ao deslocamento da peça e utilizaram $\mu_0 = 0,33$; $\mu_s = 0,577$; $s_0^* = 108$; $s_s^* = 220$, com $h_{\mu_0} = 0,418$; $h_{s_0} = 44$.

Foram simuladas quatro situações identificadas pela cor no gráfico: com os coeficientes de atrito $\mu = 0,33$ (verde) e $\mu = 0,577$ (azul), limites da lei de encruamento (μ_0 e μ_s). A simulação considerou também parâmetros diferentes para a resposta normal; em laranja é considerada uma rigidez normal menor. Modelo 1 = amarelo; Modelo 2 = laranja

Os resultados experimentais são apresentados em vermelho.

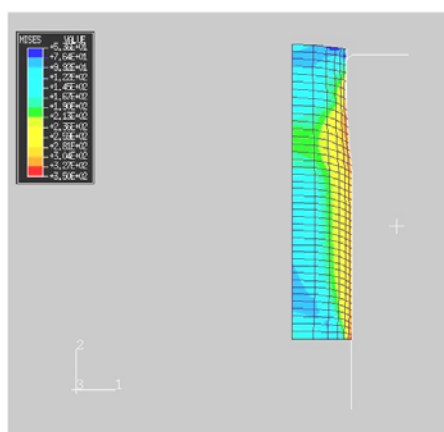


Figura 4. Modelo de Extrusão

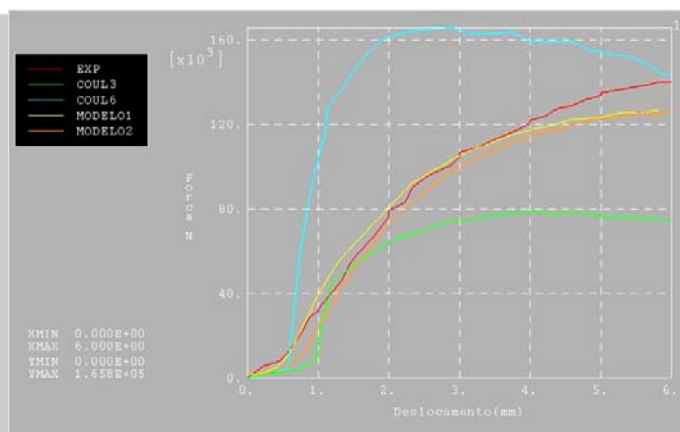


Figura 5. Reações com diferentes leis de Atrito

O encruamento isotrópico modelado através da lei constitutiva tem o efeito de aproximar o modelo numérico do experimental, comparativamente ao modelo de Coulomb.

5. CONCLUSÕES

As soluções qualitativas obtidas pelo modelo estão em acordo com o esperado. Com a lei de atrito isotrópica é possível captar os efeitos de encruamento com o deslizamento, e estes são insensíveis a movimentos cíclicos. O surgimento de um efeito Bauschinger na transição do sentido do movimento, efeito este verificado através de resultados experimentais disponíveis na literatura, não aparece aqui.

Nesta linha de pesquisa surgem várias oportunidades de continuidade, entre outras: consideração dos efeitos de temperatura e velocidade nas leis constitutivas; adoção de funções lineares e / ou não lineares para a rigidez tangencial; o efeito de encruamento cinemático poderia ser representado por uma função não linear.

Uma necessidade imediata para a continuidade destas pesquisas se refere à realização de experimentos mais adequados, com o objetivo específico de estudar os efeitos modelados pelas formulações constitutivas desenvolvidas e implementadas neste trabalho.

6. REFERÊNCIAS

- Anand, L. A Constitutive Model for Interface Friction. **Computational Mechanics**. vol. 12, p. 197-213, 1993.
- Bay, N.; Wanheim, T.; Avitzur, B. Models for friction in metal forming. **Manufacturing Technology Review**, vol. 2, p. 372-378, 1987.
- Cheng, J., Kikuchi, N., An Analysis of Metal Forming Processes Using Large Deformation Elastic-plastic Formulations, **Comp. Meths. in Applied Mechanics and Eng.**, vol. 40, p. 71-108, 1985.
- Courtney - Pratt, J. S.; Eisner, E. The Effect of Tangential Force on the Contact of Metallic Bodies. **Proc. of the Royal Society A** 238, 529-550, 1957.
- Curnier, A., A Theory of Friction, **Int. J. Solids Structures**, vol. 20, 7, p. 637-647, 1984.
- Fredriksson, B., Finite Element Solution of Surface Nonlinearities in Structural Mechanics with Special Emphasis to Contact and Fracture Mechanics Problems, **Computers & Structures**, vol.6, 1976.
- Pisoni, A. **A Constitutive Model for Friction in Metal-Working**, 1993, 138 pag., Dissertação (Mestrado), Massachussets Institute of Technology.
- Tong, W., Anand, L. A Constitutive Model for Friction in Forming. **Annals of the CIRP**, vol. 42,p. 361-366, 1993.
- Wriggers, P., vu van, T. and Stein, E., Finite element Formulation of Large Deformation Impact-Contact Problems with Friction, **Computers and Structures**, vol. 37, p. 319-331, 1990.
- Wriggers, P., (2002) **Computational Contact Mechanics**. John Wiley & Sons. England.
- Zhong (1993) - **Finite Element Procedures for Contact Impact Problems**. Oxford University Press, New York.
- Vargas, R.T., Formulação e Implementação de uma Lei Constitutiva de Atrito, 2003, 117 pag, Tese (Doutorado), Universidade de São Paulo

TITLE: 2D CONSTITUTIVE MODEL OF FRICTION FOR ISOTROPIC SLIDING CONDITIONS

Renato Teixeira Vargas

Escola Politécnica – Universidade de São Paulo

João Batista de Aguiar

Escola Politécnica – Universidade de São Paulo

Abstract: A contact constitutive formulation embodying adherence/slip in a isotropic fashion developed by Anand, is revisited. Corotational measures are used, and conditions standing from low to high pressure considered. The model allows for different degrees of interface rigidity, and state variable evolution under isotropic contact hardening. A new form of two-dimensional implicit solution is derived and implemented. Several verification cases are run and metal-working applications simulated. Results are compared with the ones obtained with other models.

Keywords friction, constitutive law, isotropy