

PROCEDIMENTOS h , p E hp ADAPTATIVOS EM ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS NA ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS DE REISSNER-MINDLIN

Oscar Alfredo Garcia, Dr.Eng.
oscar@grante.ufsc.br

Eduardo Alberto Fancello, Dr.Eng.
fancello@grante.ufsc.br

Paulo de Tarso Rocha Mendonça, Ph.D.
mendonca@grante.ufsc.br
Departamento de Engenharia Mecânica,
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC,
CP. 476, CEP 88.040-900 Florianópolis SC

Resumo: *O método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) constitui hoje uma alternativa valiosa no campo da mecânica computacional. O espaço de aproximação, obtido segundo esta técnica, reúne as características do método de Elementos Finitos de Deslocamento convencional e dos métodos sem malha. A imposição de condições de contorno essenciais de forma simples (quase direta), a baixa sensibilidade à distorção da malha e a versatilidade de construção dos espaços locais evidenciam o potencial desta técnica na abordagem de problemas complexos de mecânica computacional. A capacidade de realizar enriquecimentos p direcionados em coordenadas globais e a possibilidade de incorporar espaços locais ótimos reduz a necessidade de refinamentos h adaptativos para capturar soluções com altos gradientes. Neste trabalho é mostrada a capacidade do espaço de aproximação construído segundo a filosofia do método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na abordagem de problemas de camada limite em flexão de placas e em cascas de material homogêneo elástico linear isotrópico. São analisados os desempenhos das técnicas de adaptatividade h , p e hp na captura de fenômenos de camada limite em placas e cascas modeladas por teorias de primeira ordem.*

Palavras chaves: *Elementos Finitos Generalizados, estratégias h , p e hp adaptativas, camada limite em placas.*

1. INTRODUÇÃO

O método de elementos finitos generalizados (GFEM), que adquiriu esta denominação no fim da década de noventa com o trabalho de Duarte, Oden e Babuska (2000), constitui hoje uma alternativa valiosa na construção de espaços p , h , e hp adaptativos. Esta técnica, oriunda dos métodos sem malha que utilizam a partição de unidade, e tem sua origem atribuída ao Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM) de Melenk e Babuska (1996) e ao hp -Clouds de Duarte e Oden (1996, 1997). A versatilidade dos espaços construídos permitem enriquecimentos p anisotrópicos e a inclusão de modos

da solução nos espaços locais. Somando-se as características supracitadas a um baixo custo computacional, decorrente da conectividade fixa e da imposição direta das condições de contorno essenciais, resulta uma proposta atraente na abordagem do fenômeno de locking e problemas com características locais. Dentre estes últimos podem ser citados os altos gradientes decorrentes de fenômenos de singularidades e de camada limite. Neste artigo são mostradas as potencialidades desta metodologia através da análise de problemas de locking e de camada limite em placas e cascas de material elástico linear homogêneo modeladas com teoria de primeira ordem. O escopo do trabalho constitui-se de três seções. A primeira consta de uma abordagem sucinta do espaço de aproximação e do procedimento dos planos pseudo-tangentes utilizados para aproximar os campos em superfícies com curvaturas não nulas. A segunda e terceira seções correspondem às análises de resultados numéricos e conclusões.

2. CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO

Seja um domínio aberto Ω limitado por um contorno $\partial\Omega$, e seja $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ um conjunto de suportes chamados aqui de nuvens, com centros nas coordenadas \mathbf{X}_α , constituindo uma cobertura de Ω , isto é $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \bar{\Omega}_\alpha$ onde $\bar{\Omega}$ corresponde ao fechamento de Ω .

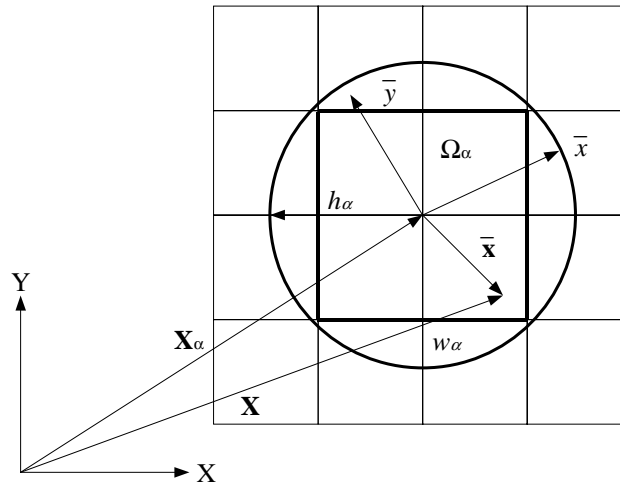


Figura 1: Suporte local da nuvem Ω_α , sistema de coordenadas locais (\bar{x}, \bar{y}) e domínio circular w_α , de radio h_α , das funções de enriquecimento.

Seja igualmente um sistema local de coordenadas associado a cada nuvem definido por $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_\alpha^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}_\alpha) / h_\alpha$ onde \mathbf{R}_α é a matriz de rotação, referida ao sistema global de coordenadas, e h_α o radio do domínio circular w_α das funções de enriquecimento, conforme Fig.1.

Seja $\{\varphi_\alpha(\Omega_\alpha)\}_{\alpha=1}^N$ uma partição de unidade associada à cobertura aberta $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$. Em cada subdomínio Ω_α o espaço local \mathcal{Q}_α representa a aproximação local, de forma que a aproximação global é obtida pela expressão $\mathcal{Q} = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha \mathcal{Q}_\alpha$.

O espaço global Q herda as propriedades de convergência dos espaços locais Q_α e a regularidade da partição da unidade (Teorema 1 Melenk e Babuska, (1996)). As funções de enriquecimento locais Q_α podem ser construídas por produto de funções polinomiais ou utilizando modos conhecidos da solução do problema de valores no contorno em questão. No primeiro caso se tem os conjuntos \bar{Q}_α^p e \hat{Q}_α^p obtidos por produto tensorial e produto completo respectivamente. Em problemas bidimensionais estes conjuntos são definidos como:

$$\bar{Q}_\alpha^p = \{L_{ij}(\bar{\mathbf{x}}) : 0 \leq i, j \leq p, i, j \geq 0, p \geq 0\} \quad (1)$$

$$\hat{Q}_\alpha^p = \{L_{ij}(\bar{\mathbf{x}}) : 0 \leq i, j \leq p, 0 \leq i + j \leq p\} \quad (2)$$

Para o caso de enriquecimentos ortotrópicos o conjunto fica definido por $\bar{Q}_\alpha^{(p\bar{x}, p\bar{y})} = \hat{Q}_\alpha^{pm} \mathbf{I} \bar{Q}_\alpha^{(p\bar{x}, p\bar{y})}$ onde $mp = \max\{p\bar{x}, p\bar{y}\}$, e $p\bar{x}$ e $p\bar{y}$ correspondem às ordens polinomiais das bases locais (\bar{x}, \bar{y}) .

As limitações do espaço não permitem um detalhamento maior dos aspectos matemáticos pertinentes. Estes podem ser vistos em Duarte em Babuska (1996, 1997).

Os espaços especiais apresentados neste artigo tem como finalidade observar o comportamento dos fenômenos de camada limite em placas de Mindlin. Isto é levado a cabo pela construção de espaços locais diferenciados sobre as fronteiras analisadas que representam, melhor que as funções polinomiais, o decaimento exponencial dos campos primais e duais. O espaço global construído desta forma pode ser definido como $Q = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha V_{\alpha(\Omega_\alpha \cap \Omega)}$ onde $V_{\alpha(\Omega_\alpha \cap \Omega)} \in H^1_{(\Omega_\alpha \cap \Omega)}$. O espaço $V_\alpha = \{Q_\alpha \cup (\chi \bar{V}_\alpha)\}$, onde Q_α pode ser obtido pelas expressões (1) e (2), o operador χ tem valor unitário sobre a fronteira analisada e zero fora dela. Finalmente o espaço \bar{V}_α responsável pelas características na proximidades das bordas é definido por:

$$\bar{V}_\alpha = \{e^{-\beta r/t} F(r), r \in \wp\} \quad (3)$$

Na expressão (3) t é a espessura da placa e $\wp = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ é uma base polinomial cuja coordenada e medida na direção normal à fronteira analisada. A Fig. 2, mostra o comportamento da função local $F \in V_\alpha$ associada à nuvem de coordenadas $(-1, 1)$.

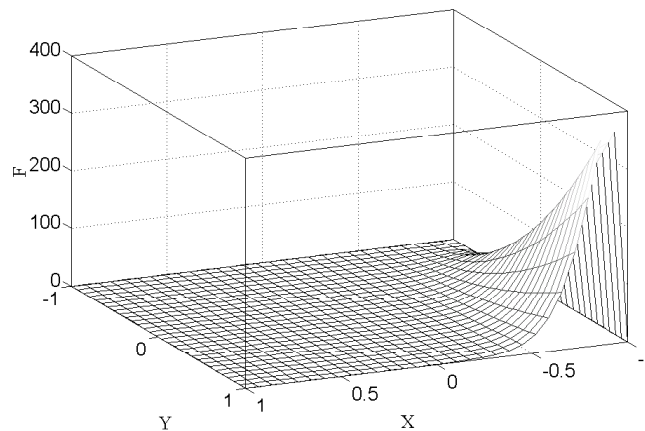


Figura 2: Função de forma associada à nuvem com coordenadas $(-1, 1)$

2.1 Espaço de aproximação em superfícies curvas

Um dos desafios dos métodos sem malha é a construção dos espaços de enriquecimento em superfícies curvas. A estratégia proposta fundamenta-se na definição de uma base para cada suporte de nuvem. Para um nuvem de coordenadas \mathbf{X}_α é estabelecido um plano *pseudo tangente* π_α , através da base pseudo normal associada à nuvem, como mostrado na Fig.3.

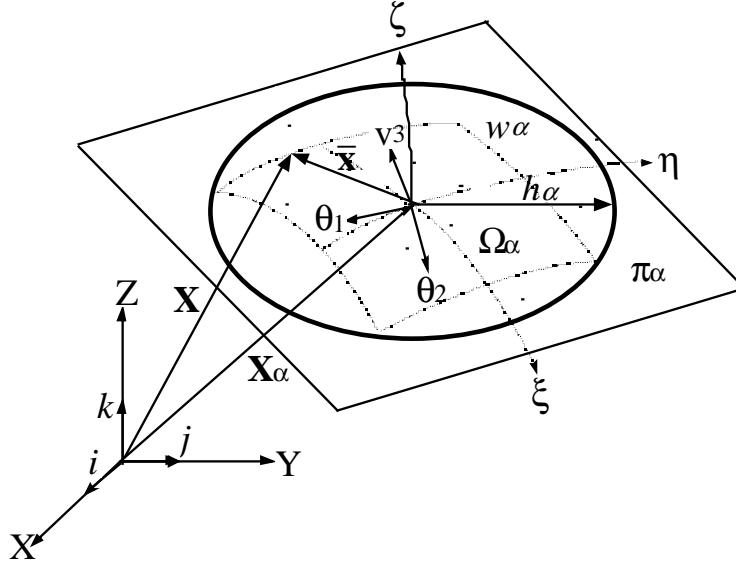


Figura 3: Elementos da base local da nuvem α $[\theta_1, \theta_2, v_3]$, plano pseudo tangente π_α coordenada local $\bar{\mathbf{x}}$ do ponto analisado, suporte Ω_α da nuvem e domínio w_α das funções de enriquecimento.

O suporte local das funções de enriquecimento é um círculo de raio h_α definido sobre o plano π_α , de forma que $w_\alpha = \{\bar{\mathbf{x}}(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq h_\alpha\}$ onde, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{Q}_\alpha^T(\mathbf{X} - \mathbf{X}_\alpha)$ e \mathbf{Q}_α é a matriz de rotação correspondente à base da nuvem α , e \mathbf{P} um operador de projeção da superfície sobre o plano, isto é $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. O processo de construção das funções de enriquecimento sobre os planos *pseudo tangentes* é levado a cabo pelas expressões (1), (2) e (3). Como o produto pela partição da unidade é feito no domínio paramétrico do elemento, as funções não se alteram. Os gradientes, porém, sofrem uma transformação do tipo $\nabla_\xi \psi(\xi, \eta) = \mathbf{PJ}[\mathbf{Q}_\alpha \nabla_x \psi(\bar{\mathbf{x}})]$. A montagem da matriz de rigidez e do vetor de carga consistente é realizada da forma usual utilizada em processos p adaptativos.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

São apresentados dois conjuntos de resultados numéricos. O primeiro corresponde à análise de locking em placas e cascas. O segundo corresponde a alguns resultados de problemas de camada limite. Em todos os casos, a geometria é modelada com elementos quadriláteros de oito nós, com partição de unidade bilinear definida pelos nós dos vértices.

3.1. Locking.

A análise de locking é feita mediante dois exemplos. O primeiro consiste numa placa quadrada simplesmente apoiada (hard) de 16 mm de lado e 0,1 mm de espessura. A mesma está sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio de $-0,1$ MPa. Devido à simetria da geometria e do carregamento, é analisado apenas um quadrante da mesma.

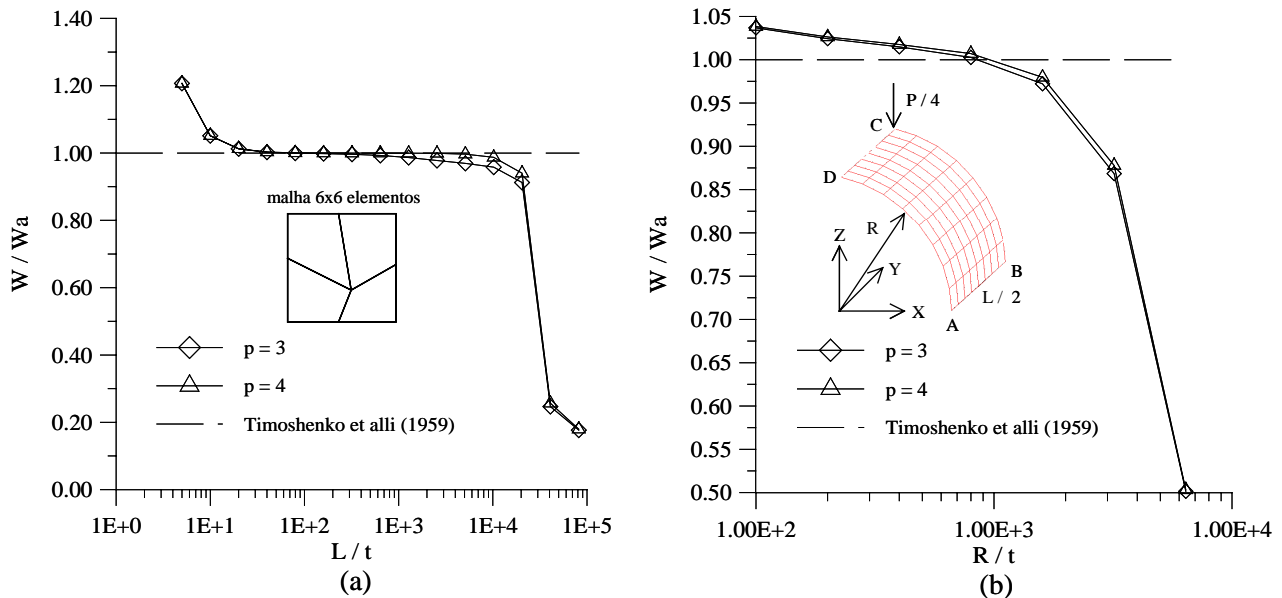


Figura 4: (a) Deslocamento transversal normalizado do ponto central da placa com relação a razão L/t , (b) deslocamento transversal normalizado do ponto C da casca cilíndrica puncionada com relação à razão R/t .

Este exemplo é discretizado com uma malha distorcida de 2×2 elementos quadrangulares para os quais é utilizada uma regra de integração completa de 6×6 pontos de Gauss. O segundo exemplo consiste numa casca cilíndrica com carregamento auto-equilibrado obtido pela aplicação de duas cargas diametralmente opostas. O cilindro tem 600 mm de comprimento, 300 mm de raio e espessura e carregamentos variáveis de forma a obter o mesmo deslocamento na direção de aplicação da carga. Devido à simetria de geometria e carregamento, é analisado apenas um octante do cilindro. O octante analisado é discretizado com 8×8 elementos quadrangulares sob os quais utiliza-se integração completa de 6×6 pontos de Gauss. Ambos os exemplos são constituídos de material elástico linear e isotrópico com $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa para a placa e $E = 3,0 \cdot 10^6$ MPa para a casca, sendo $\nu = 0.3$ para ambos exemplos. Os resultados são mostrados na Fig. 4(a) e 4(b). A Fig. 4(a) mostra ausência de locking, mesmo para a malha distorcida, para uma razão largura espessura inferior a 10^4 e espaço de aproximação de quarta ordem. No caso do cilindro puncionado mostrado na Fig. 4(b) observa-se a forte ocorrência de locking de membrana a partir de uma relação $R/t > 1 \times 10^3$ mesmo para espaços construídos com base polinomial de quarta ordem.

3.2 Camada Limite

Os resultados de camada limite são observados para o esforço cortante através de dois exemplos. O primeiro consiste numa placa simplesmente apoiada (soft) sobre a linha $X=0$ e (hard) nas fronteiras de coordenadas $Y=0$ e $Y=L=\pi$. A placa tem 0.01mm de espessura e está sujeita a uma carga uniformemente distribuída de $-0,1$ MPa. A placa de dimensão infinita na direção X , é, por

conveniência, truncada em $X = L = \pi$. Neste exemplo são utilizadas duas estratégias de enriquecimento adaptativo sobre os nuvens associadas aos nós 1, 2 e 3 da Fig.5(a). A primeira, “1”, consiste num refino local ortotrópico $(p_x, p_y) = (8, 4)$, isto é, com polinômios de grau $p_x = 8$ e $p_y = 4$ em x e y . A segunda estratégia “2”, consiste num espaço local do tipo $(e^{-x/t}, p_y)$ com $p_y = 4$. As nuvens restantes foram enriquecidas isotropicamente com $p_x = p_y = 4$.

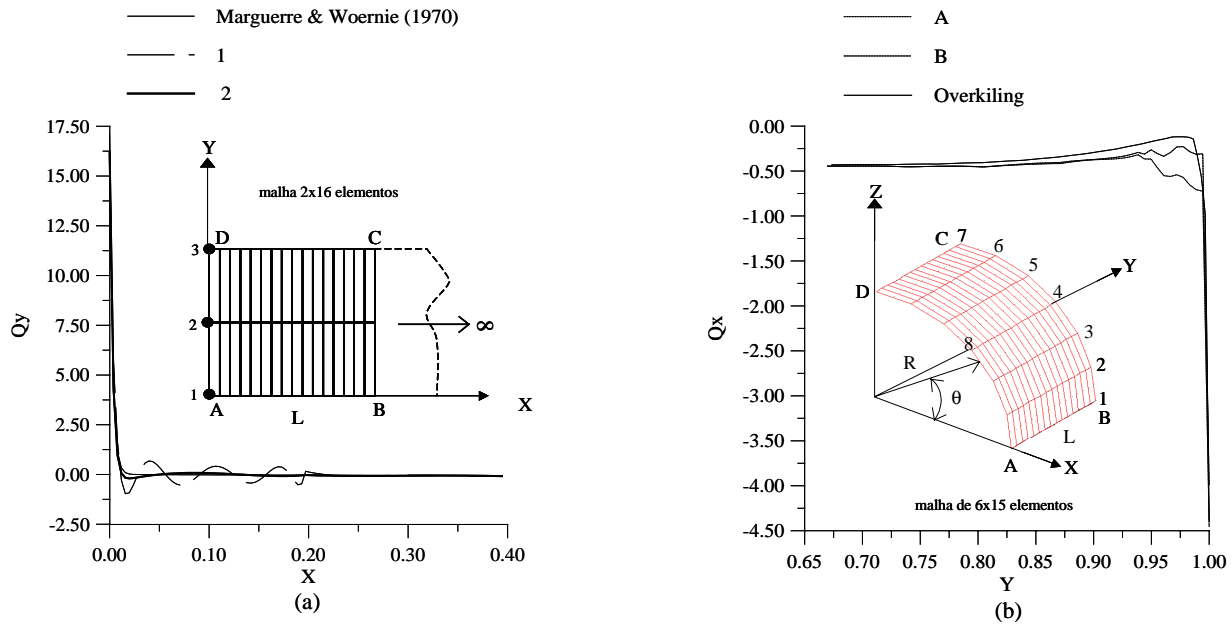


Figura 5: (a) Variação do esforço cortante Q_y nos dois primeiros elementos ao longo da linha AD; (b) variação dos últimos 5 elementos, sobre a linha 8-4, adjacentes à borda livre BC.

O segundo exemplo é constituído de uma casca cilíndrica de 1m de diâmetro, 2m de comprimento e espessura de 0,01 m com a borda BC (Fig.5(b)) livre. A casca é sujeita a uma carga auto equilibrada variando senoidalmente no sentido radial da forma $P = P_o \cos(2\theta)$ com $P_o = 1\text{Pa}$. As propriedades materiais neste exemplo são $E = 1 \times 10^7 \text{ Pa}$ e $\nu = 1/3$. Neste caso é analisado um octante sob condições de contorno de simetria com a malha indicada na Fig. 5(b). Para este exemplo foram utilizadas duas estratégias de enriquecimento local das nuvens associadas aos nós 1,...,7. A primeira estratégia, “A”, consiste num enriquecimento local isotrópico do tipo $(p_x, p_y) = (7, 7)$. A segunda, “B”, é feita por um enriquecimento ortotrópico do tipo $(p_x, p_y) = (4, 7)$. As nuvens restantes, em ambos os casos, são enriquecidas isotropicamente com $p_x = p_y = 4$.

Os resultados do exemplo da Fig. 5(a) mostra um melhor comportamento dos espaços locais V_α comparado com aqueles obtidos com bases polinomiais. Além de apresentar valores mais próximos da solução de referência, (Marguerre & Woernie, 1969) os resultados não apresentam oscilações significativas da solução no último elemento, como ocorre com bases polinomiais. Para o esforço cortante na casca mostrado na Fig. 5(b) observa-se, como esperado, que os resultados dos refinamentos locais p ortotrópicos são mais próximos da solução de referência (overkiling) do que aquela obtida com enriquecimento local p isotrópico.

4. CONCLUSÕES

Os resultados da análise de locking mostram-se satisfatórios para placas, ratificando resultados obtidos previamente por procedimentos p adaptativos, de forma que nos espaços construídos com base polinomial de quarta ordem não se observa a sua ocorrência. O mesmo não pode ser afirmado para a casca cilíndrica puncionada a qual constitui um exemplo crítico de locking de membrana. Entretanto consegue-se atingir a solução analítica com uma razão de $R/t = 1 \times 10^3$, o que normalmente não é possível com o procedimento clássico de usar bases polinomiais de baixa ordem com sub-integração. Os resultados de camada limite evidenciam a potencialidade da metodologia, permitindo que a otimização local do espaço de aproximação seja feita por meio de refino p direcionados ou pela utilização de espaços locais construídos com modos conhecidos da solução do problema como o espaço V_α . De forma geral observou-se um bom desempenho da metodologia nos problemas analisados.

5. REFERÊNCIAS

- Duarte, C. A., Babuska, I. and Oden, J. T., 2000, "Generalized Finite Element Methods in three dimensional structural mechanics problems", *Computer & Structures*, 77, pp. 215-232.
- Duarte, C. A., Babuska, I., 1997, "Mesh independent p-orthotropics enrichment using the Generalized Finite Element Methods", Technical Report, TICAM, The University of Texas at Austin, Austin TX, 78712, USA.
- Duarte, C. A., Oden, J. T., 1996, "An adaptative method using clouds", *Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering*, 139, pp. 237-262.
- Marguerre K & Woernie, H. T., 1969, "Elastic Plates", Blaisdell Publishing, Co., Waltham.
- Garcia, O. Facello, E. A., Barcellos C. and Duarte, C. A., 2000, " hp -Clouds in Mindlin's thick plate model", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 1381-1400.
- Melenk J. M. and Babuska, I., 1996, "The Partition of Unity Finite Elements Methods: Basic theory and applications", *Computer Methods and Applied Mechanics in Engineering*, 139, pp.289-314.
- Timoshenko S. P. and Woinowsky-Krieger S., 1959, "Theory of plates and shells", 2a. Ed., McGraw-Hill Book Company, INC. New York.

h , p AND hp ADAPTIVE PROCEDURES IN GENERALIZED FINITE ELEMENTS IN THICK PLATES AND SHELL ANALYSIS

Oscar Alfredo Garcia, Dr.Eng.
oscar@grante.ufsc.br

Eduardo Alberto Fancello, Dr.Eng.
fancello@grante.ufsc.br

Paulo de Tarso Rocha Mendonça, Ph.D.
mendonça@grante.ufsc.br
Departamento de Engenharia Mecânica,
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC,
CP. 476, CEP 88.040-900 Florianópolis SC

Abstract: *The Generalized Finite Element method (MEFG) constitutes today a valuable alternative in computational mechanics. The approximation space, obtained by this technique, include characteristics of both, the conventional displacement finite element method and the meshless methods. The imposition of essential boundary conditions in an almost direct form, a low sensitivity to mesh distortion and the versatility in the construction of local spaces points to a great potential in this technique to deal with complex problems in computational mechanics. The capability to perform orthotropic p -enrichment in global coordinates and also incorporate optimum local spaces reduces the necessity of h -adaptive refinements to capture high gradient solutions.*

This paper shows the capabilities of approximation spaces built by the Generalized Finite Element Method to deal with boundary layer in plate and shell bending problems. The behavior of the h , p and hp -adaptive techniques are observed when applied to model boundary layers in first order plates and shells models.

Key words: *Generalized Finite Elements, h , p and hp adaptivities, boundary layer in plates and shells*