

# CÁLCULO DE SOLUÇÕES DE CASCAS ELÁSTICAS DELGADAS ATRAVÉS DO USO DE TÉCNICAS DE ADAPTAÇÃO DE MALHAS

**Carlos Augusto de Souza**

Campus Universitário Darcy Ribeiro

Universidade de Brasília-UnB

Prédio da Faculdade Tecnologia - Bloco C

Departamento de Engenharia Mecânica - ENM

Asa Norte, Brasília-D.F. , CEP: 70910-900

[carlosdesouza@unb.br](mailto:carlosdesouza@unb.br)

**Resumo:** A espessura relativa é um parâmetro importante nas equações de cascas. No cálculo de cascas muito finas ( $\varepsilon$  pequeno), a solução  $u_\varepsilon$  apresenta camadas limites, i.e. estreitas regiões (cuja espessura diminui com  $\varepsilon$ ) onde a solução ou suas derivadas tendem a infinito quando  $\varepsilon$  tende a zero. Neste artigo são apresentadas simulações numéricas, via métodos dos elementos finitos, de carregamentos de cascas uniformemente hiperbólicas. Obviamente, para obter-se cálculos precisos, é necessário o refinamento da malhas nas camadas limite. Assim, é empregado um processo de adaptação de malha que permite um cálculo iterativo automático de alta qualidade.

**Palavras-chave:** casca delgada, camada limite, malha adaptativa.

## 1 INTRODUÇÃO

Neste artigo queremos estudar a propagação de singularidades nos sistemas de cascas hiperbólicas (a superfície média da casca tem curvaturas principais de sinais opostos). De fato, as teorias de cascas de Kirchhoff-Love e Mindlin são baseadas em sistemas de equações elípticas para  $\varepsilon > 0$  e suas soluções possuem as propriedades clássicas de regularidade. Entretanto, o sistema limite obtido quando  $\varepsilon$  tende a zero é elíptico somente se a superfície média é ela mesma elíptica. Quando a superfície média tem pontos hiperbólicos ou parabólicos o problema limite

tem verdadeiras linhas características (as linhas assintóticas da superfície média da casca). Neste caso, dados de entrada singulares (nas condições de contorno ou no carregamento imposto) produzem singularidades que se propagam ao longo das linhas características em regiões situadas longe de onde foram originadas.

Em certos casos, estas singularidades são distribuições (por exemplo como um  $\delta$  ou um  $\delta'$ ) na direção transversal às linhas características e se propagam ao longo destas e a deformação e a energia se concentram nestas regiões que são nomeadas camadas limites ou camadas internas. Para valores de  $\varepsilon$  pequenos mas diferentes de zero as soluções são regulares com regiões de comportamento singular, i.e. regiões estreitas (cuja espessura diminui com  $\varepsilon$ ) onde a solução ou suas derivadas tendem à infinito quando  $\varepsilon$  tende a zero.

Neste artigo são mostradas simulações numéricas realizadas empregando-se o elemento finito de cascas DKT (implementado por [Bernadou & Mato Eiroa (1987)] no código de elementos finitos MODULEF). As incógnitas deste elemento são as componentes tangenciais do deslocamento da casca  $u_1$  e  $u_2$ , a componente normal  $u_3$  e as componentes de rotação da normal à superfície média  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . A adaptação da malha é realizada através do código BAMG, desenvolvido por [Hecht (1998)] no INRIA (*Institut national de recherche en informatique et en automatique* - França). Os cálculos numéricos mostram as vantagens da utilização de malhas adaptadas à este tipo de problema.

O primeiro estudo de caso é um problema clássico encontrado em [Huang & Hinton (1986)], [Bernadou & Mato Eiroa (1987)], [Kanok-Nukulchai (1979)] e [Meek & Tan (1986)]. Este problema não apresenta singularidades mas os dois seguintes são casos onde existem singularidades decorrentes da condição de contorno ou do carregamento aplicado que apresenta uma discontinuidade. Nestes dois casos de singularidades são feitos cálculos da casca com valores da espessura  $\varepsilon$  muito pequenos que permitem estudar a forma e a espessura das camadas limite (no contorno do domínio) e interna (no interior do domínio).

Nos casos de comportamento singular da casca é estudada a propagação das singularidades e são feitas estimativas da ordem de grandeza das camadas limite e interna. Um estudo teórico de um problema modelo similar ao problema de cascas foi feito por [Karamian *et al.* (2000)] e [De Souza *et al.* (2002)]. Os resultados obtidos nestes trabalhos são utilizados aqui para se fazer uma análise comparativa entre soluções analíticas e numéricas.

## 2 Geometria da casca hiperbólica

Designamos por  $\mathcal{E}^3$  o espaço euclidiano e sua base ortonormal  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Considera-se o domínio  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -50in \leq x, y \leq 50in\}$  e  $S$  a superfície hiperbólica parametrizada pela carta local  $(\Omega, \vec{\phi})$ , com  $\vec{\phi}(x, y) = (x, y, \frac{xy}{c})$ . Na casca em estudo tomamos  $c = 250$ .

Os vetores tangente  $\vec{a}_\alpha = \partial_\alpha \vec{\phi}$  que definem o plando tangente à superfície  $S$  em todos os

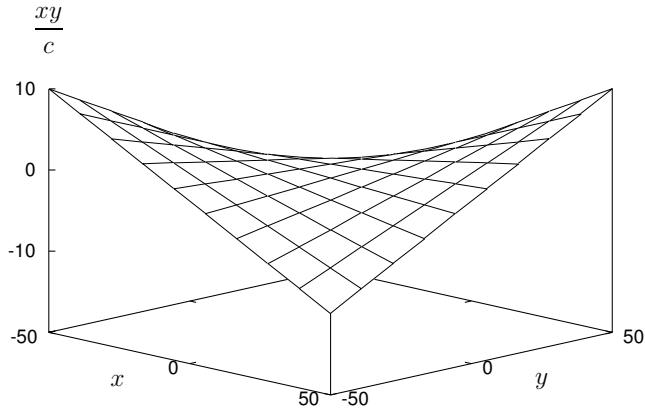


Figura 1: Casca hiperbólica em forma de sela

pontos  $\vec{\phi}(x, y)$  e o vetor normal ao plano tangente  $\vec{a}_3$  são dados por

$$\vec{a}_1 = (1, 0, \frac{y}{c}), \quad \vec{a}_2 = (0, 1, \frac{x}{c}) \quad \text{e} \quad \vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}(-y, -x, c).$$

A segunda forma fundamental da superfície média  $S$  é dada por

$$b_{11} dx^2 + 2b_{12} dxdy + b_{22} dy^2$$

onde

$$b_{11} = b_{22} = 0 \quad \text{e} \quad b_{12} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}$$

são as componentes covariantes da segunda forma fundamental.

Para estudar a superfície  $S$  calcula-se

$$b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = \frac{1}{x^2 + y^2 + c^2} > 0.$$

Assim, a superfície média da casca é uniformemente hiperbólica e existem duas linhas assintóticas em cada um dos pontos da casca. Estas linhas são definidas pela equação

$$b_{11} dx^2 + 2b_{12} dxdy + b_{22} dy^2 = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}} dxdy = 0.$$

Como o termo  $\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}$  é sempre positivo, as linhas assintóticas são dadas por  $x = \text{const}$  e  $y = \text{const}$ .

### 3 Casca hiperbólica engastada sob pressão uniforme

A casca hiperbólica descrita na seção anterior é engastada em todo o seu contorno e é simulada como uma casca fina carregada por uma pressão uniforme em todo o seu domínio. As características do material são: módulo de Young  $E = 28500lb/in^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,4$ , espessura da casca  $e = 0.8in$  e pressão  $p = 0.01lb/in^2$  exercida normalmente à casca.

O gráfico da figura 2a mostra o valor da componente normal do deslocamento  $u_3$  no ponto  $O = (0,0)$ . As soluções foram calculadas com malhas uniformes e adaptadas e comparadas com os resultados obtidos por [Huang & Hinton (1986)] (elemento finito QUAD9\*\*). Não existem simetrias neste problema e todo o domínio foi discretizado.

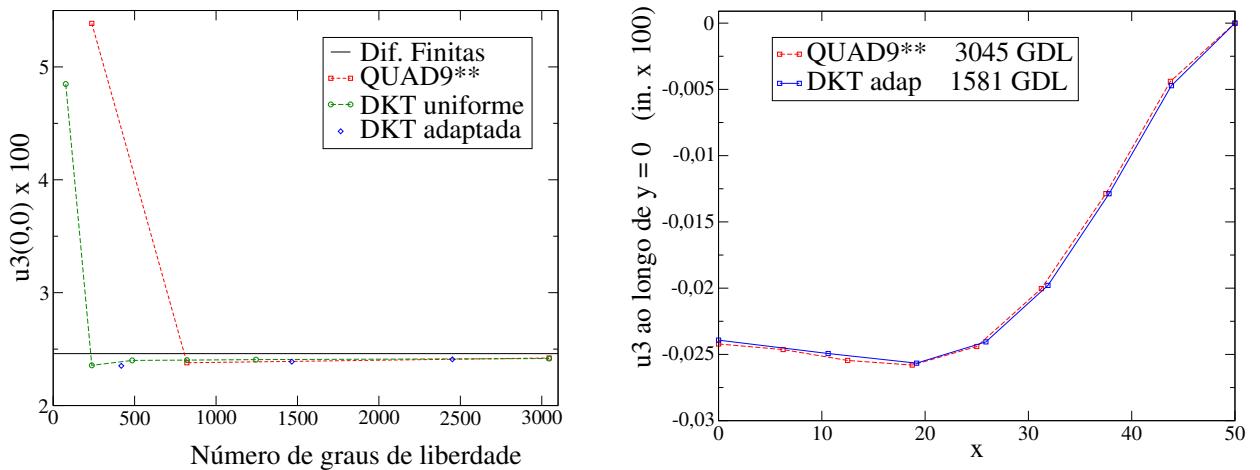


Figura 2: a) Componente normal do deslocamento  $u_3(O)$  em função do número de graus de liberdade (GDL). b) Deslocamento  $u_3$  ao longo  $y = 0$  calculado com os elementos QUAD9\*\* ([Huang & Hinton (1986)]) e DKT adaptado.

Analizando estes gráficos pode-se concluir que para este valor de espessura ( $e = 0.8in$  e  $\varepsilon = 0.8 \times 10^{-2}$ ) não é necessário o emprego de técnicas de adaptação de malhas, porque a solução é suficientemente regular. A convergência com o elemento finito DKT utilizado aqui é mais rápida do que com o elemento QUAD9\*\* implementado por Huang [Huang & Hinton (1986)]. Do gráfico 2b constata-se que os resultados obtidos com os elementos QUAD9\*\* e DKT são quase coincidentes, mas o segundo utiliza uma malha mais grosseira, com pouco mais da metade no número de graus de liberdade (GDL) do primeiro. Isto confirma a qualidade do elemento finito do tipo DKT utilizado aqui.

### 4 Casca hiperbólica parcialmente engastada submetida à carregamento de pressão uniforme

O problema é o mesmo da seção anterior mas a borda direita do domínio ( $x = 50$ ) é deixada livre, ou seja, sem nenhuma restrição de deslocamento. Esta borda é uma linha

assintótica e, segundo a teoria de cascas elásticas delgadas e os problemas modelos estudados em [Karamian *et al.* (2002)], uma camada limite deve se desenvolver nesta região. Para observar a formação da camada limite nesta região faz-se variar o valor da pressão normal com o valor numérico da espessura da casca, i.e.,  $p = e \text{ lb/in}^2$  e os cálculos são feitos para valores de  $e$  iguais à 0.001, 0.002, 0.003, 0.005, 0.008 e 0.01.

A figura 3a mostra o deslocamento normal  $u_3$  calculado com uma malha uniforme com 16641 nós (45957 GDL) e com valor de espessura  $e = 0.001$  ( $\varepsilon = 10^{-5}$ ). A figura 3b apresenta uma malha adaptada à este problema. Deste segundo gráfico constata-se a existência de camadas limites não apenas na borda livre ( $x = 50\text{in}$ ) mas também em todo o resto do contorno do domínio que apresenta malha mais refinada do que na parte central. Isto pode ser constatado através da grande concentração de elementos em torno do contorno do domínio.

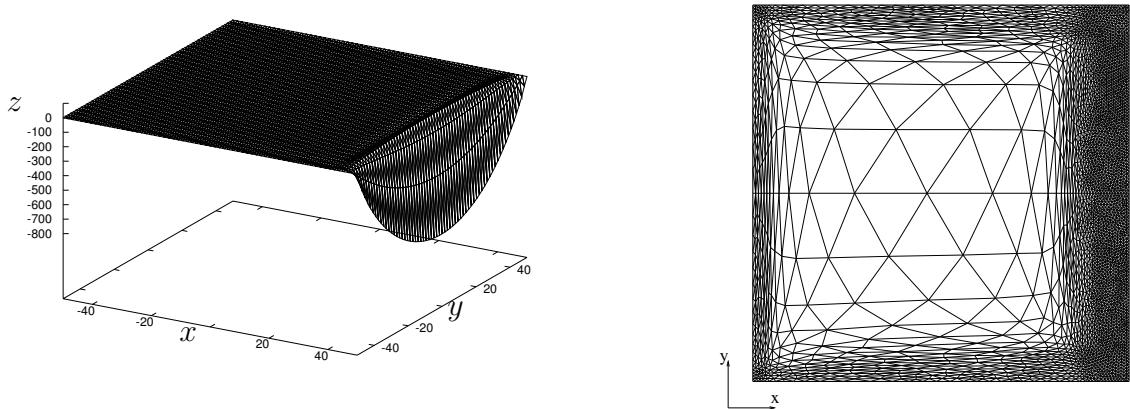


Figura 3: a) Deslocamento normal  $u_3$  com malha uniforme de 16641 nós b) Malha adaptada com 12480 nós (34515 GDL).

Na verdade, as bordas engastadas do domínio são curvas características onde, segundo [Karamian *et al.* (2000)], devem existir camadas limite de espessura  $\eta_1$  de ordem de grandeza  $\varepsilon^{1/3}$ . Na borda livre a espessura da camada limite  $\eta_2$  é de mesma ordem ( $\eta_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$ ) e o deslocamento normal  $u_3$  é de ordem  $\eta^{-2} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2/3})$ .

Para estudar estas camadas limite toma-se o valor de  $u_3$  ao longo da linha  $y = 0\text{in}$  (a linha horizontal que divide o domínio em duas partes iguais). A figura 4 mostra dois gráficos: a)  $u_3$  sobre esta linha na região da primeira camada limite ( $x \in [-50, -25]$ ); b)  $u_3$  sobre esta linha na região da segunda camada limite ( $x \in [30, 50]$ ), ou seja, a borda livre do domínio. Os resultados apresentados foram obtidos a partir de malhas adaptadas com aproximadamente 40000 GDL com valores de  $\varepsilon$  entre  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$ .

Além de visualizar o comportamento do deslocamento normal  $u_3$  na região das camadas limites estes gráficos permitem fazer a estimativa da ordem de grandeza da espessura destas camadas bem como da ordem de grandeza de  $u_3$  na borda livre. Do gráfico 4b mede-se o valor da espessura  $\eta_2$  da camada limite. Esta medida é feita calculando-se a distância entre a borda livre ( $x = 50\text{in}$ ) e o valor da coordenada  $x$  para o qual  $u_3$  atinge seu valor máximo. Em seguida, no gráfico 5a traça-se os valores de  $\eta_2$  em função de  $\varepsilon^{1/3}$ . O comportamento linear dos

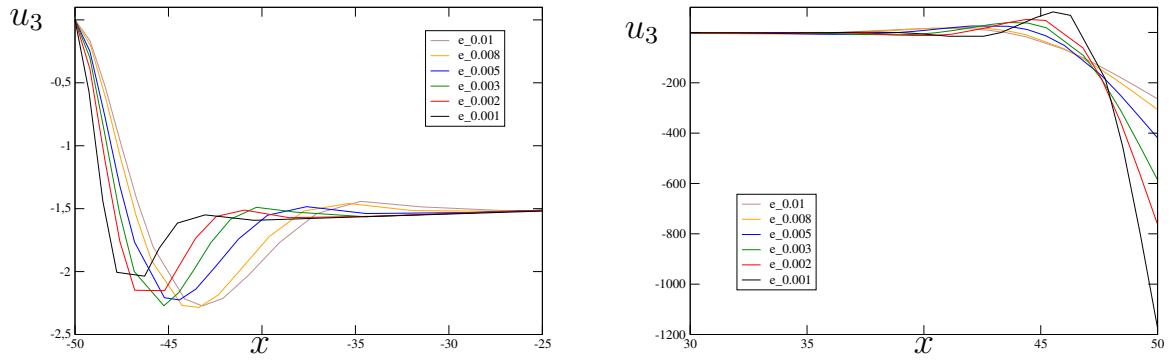


Figura 4:  $u_3$  sobre a linha  $y = 0$  in: a) Camada limite 1, próxima à borda engastada ( $x = -50$  in) b) Camada limite 2, próxima à borda livre ( $x = 50$  in).

valores de  $\eta_2$  em função dos valores de  $\varepsilon^{1/3}$  comprova os resultados teóricos que afirmam que  $\eta_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$ . A boa concordância entre os pontos calculados e a linha reta que representa a teoria comprova a qualidade do cálculo utilizando-se malhas adaptadas.

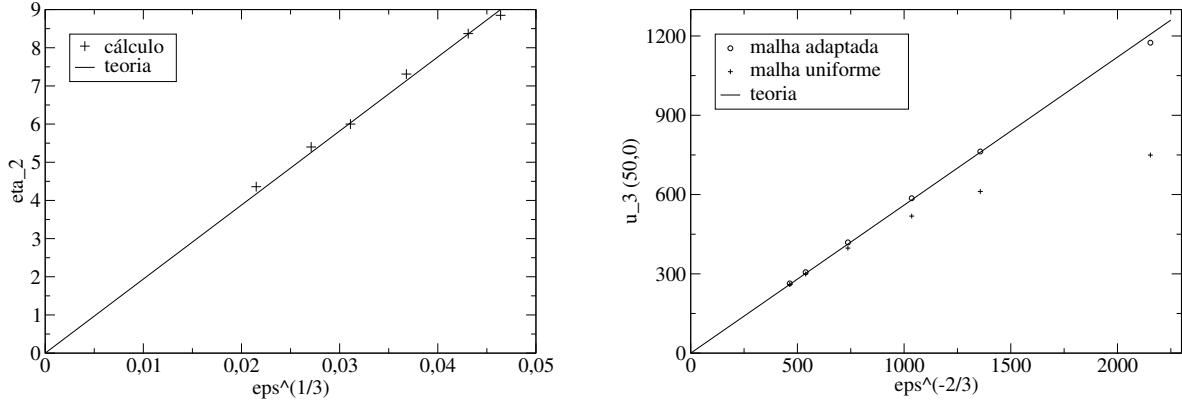


Figura 5: a) Espessura da camada limite 2 ( $\eta_2$ ) em função de  $\varepsilon^{1/3}$  b) Deslocamento normal  $u_3$  no ponto  $(50, 0)$  em função de  $\varepsilon^{-2/3}$

Para se construir o gráfico da figura 5b toma-se o valor máximo do deslocamento normal  $u_3$  no gráfico 4b e traça-se este valor em função do valor de  $\varepsilon^{-2/3}$ . Desta forma confirma-se a afirmação teórica de que em uma linha assintótica onde desenvolve-se uma camada limite tem-se  $u_3 = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2/3})$ . Neste caso a estimativa foi feita empregando-se valores de  $u_3$  obtidos à partir de cálculos com malhas adaptadas (com aproximadamente 40000 GDL) e uniformes (com 45957 GDL).

Deste gráfico observa-se o comportamento linear e a boa concordância obtida entre teoria e os resultados obtidos com as malhas adaptadas, enquanto que os valores de  $u_3$  resultantes do cálculo com malhas uniformes são inferiores e não apresentam a linearidade que comprovaria a ordem de grandeza do deslocamento normal na região de camada limite. Este exemplo mostra

claramente a vantagem do cálculo feito com malhas adaptadas. Em cálculos realizados posteriormente verificou-se que para obter-se resultados similares aos obtidos com malhas adaptadas empregando-se malhas uniformes é necessário diminuir significativamente o passo da malha uniforme, elevando-se consideravelmente o número de GDL (em mais de 200000 GDL para os menores valores de  $\varepsilon$ ).

## 5 Casca hiperbólica engastada submetida à carregamento singular

O problema é o mesmo da seção 3 (todas bordas do domínio engastadas) mas o carregamento não é mais uma pressão uniforme e sim um carregamento singular proporcional à espessura da casca sobre o segmento de linha  $y = x$  com  $x > 0$  (chamado aqui segmento de  $\overline{AB}$ ), i.e., uma distribuição de Dirac (ou massa de Dirac) sobre esta linha.

Um problema modelo similar a este foi estudado por [De Souza *et al.* (2002)], onde foi demonstrado que  $u_3$  apresenta uma singularidade do tipo  $\delta$  sobre a linha  $\overline{AB}$  quando a espessura da casca tende a zero. As linhas  $x = 0$  e  $y = 0$  são curvas características e a discontinuidade do carregamento no ponto  $O = (0, 0)$  implica numa singularidade do tipo  $\delta'$  em  $u_3$  (quando  $\varepsilon$  tende a zero), a qual se propaga sobre  $x = 0$  e  $y = 0$ .

Os cálculos foram feitos para valores de espessura da casca iguais a 0.01, 0.02, 0.03, 0.05 e 0.1 ( $\varepsilon$  entre  $10^{-4}$  e  $10^{-3}$ ) com malhas uniformes (a mais fina com 45957 GDL) e adaptadas. As malhas resultantes do processo de adaptação para os valores de espessura de 0.01 (59595 GDL) e 0.1 (35039 GDL) são mostrados na figura 6.

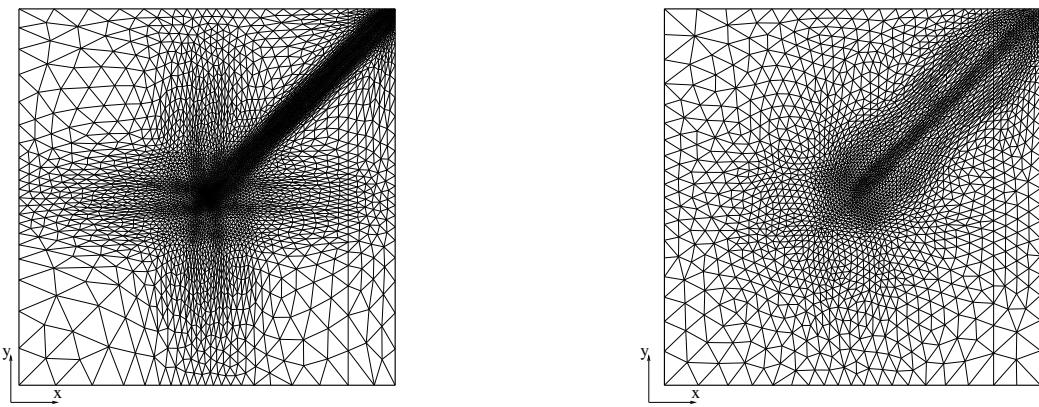


Figura 6: Malhas resultantes do processo de adaptação: a)  $e = 0.01\text{in}$  b)  $e = 0.1\text{in}$

Para estudar a primeira singularidade do problema (sobre o segmento  $\overline{AB}$ ) mostra-se na figura 7a o deslocamento normal  $u_3$  ao longo da linha  $x = 37.5$  calculado com vários valores de espessura da casca. Observa-se que a singularidade no ponto  $y = 37.5$  tende a uma distribuição de Dirac  $\delta$  quando a espessura tende a zero. A figura 7a comprova que a espessura desta camada

interna  $\eta_1$  é de ordem  $\varepsilon^{1/2}$ , contrariamente às camadas sobre as linhas características que são sempre de ordem  $\varepsilon^{1/3}$ .

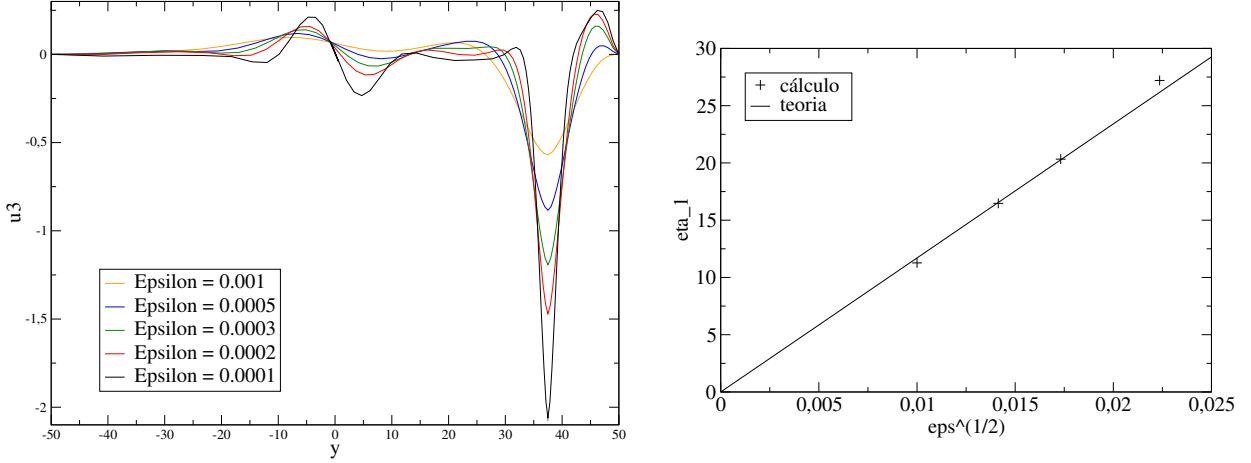


Figura 7: a) Deslocamento  $u_3$  ao longo da linha  $x = 37.5$  b) Estimativa da ordem de grandeza da espessura da camada interna  $\eta_1 = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$

Para estudar a segunda singularidade do problema mostra-se na figura 8a o deslocamento  $u_3$  ao longo da linha  $x = 25.0$  calculado com vários valores de espessura da casca. Na região central do gráfico ( $y = 0$ ) o comportamento de  $u_3$  se assemelha à uma série de funções contínuas que tendem a uma distribuição do tipo  $\delta'$  quando a espessura da casca tende a zero. O gráfico da figura 8b mostra que a espessura desta camada interna que se propaga à partir do centro do domínio é de ordem  $\varepsilon^{1/3}$ , visto que as linhas de propagação são as características da superfície média da casca.

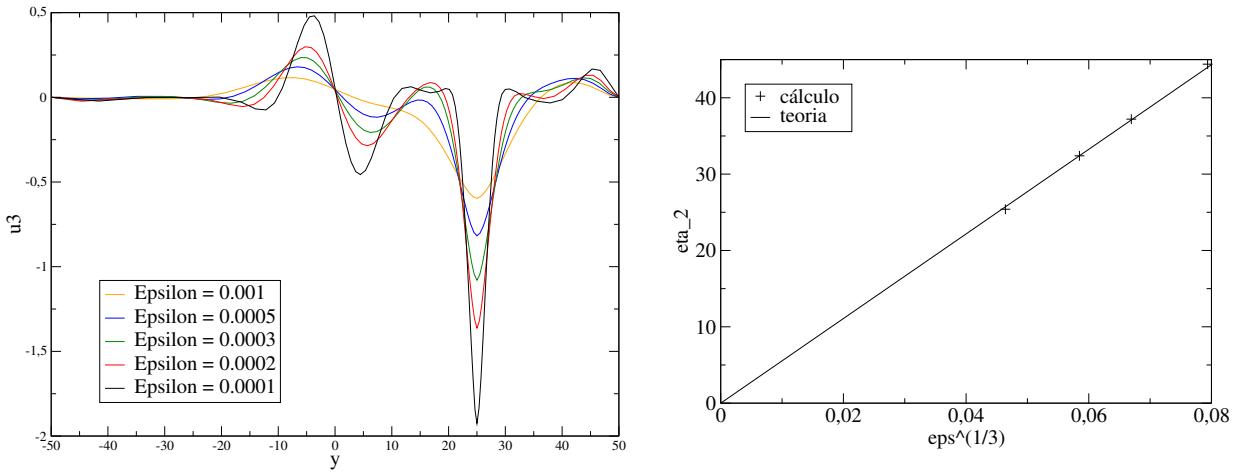


Figura 8: a) Deslocamento  $u_3$  ao longo da linha  $x = 25.0$  b) Estimativa de ordem de grandeza da espessura da segunda camada interna  $\eta_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$

A utilização do processo de adaptação de malha neste segundo caso é essencial para o cálculo da solução nas regiões de camadas. Constatata-se também o grande refinamento das malhas nas regiões de propagação das singularidades, principalmente para os menores valores da espessura da casca.

## 6 Conclusão

O elemento finito DKT implementado no código MODULEF fornece resultados satisfatórios para a solução de problemas de cascas elásticas delgadas. A solução de problemas singulares exige a utilização de técnicas iterativas de adaptação de malhas quando se quer permanecer com um número de graus de liberdade compatível com um cálculo efetivo em estações de trabalho de pequeno porte.

## 7 Agradecimentos

O autor agradece ao *Laboratoire de Modélisation en Mécanique* pela sua acolhida, aos professores E. Sanchez-Palencia e D. Leguillon pela orientação e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro à esta pesquisa.

## Referências

- [Bernadou & Mato Eiroa (1987)] Bernadou, M. & Mato Eiroa 1987 Approximation de problèmes lineaires de coques minces par une méthode d'éléments finis de type D.K.T. *Rapports de Recherche 699* INRIA, Rocquencourt.
- [De Souza *et al.* (2002)] De Souza, C. A., Leguillon, D. & Sanchez-Palencia, E. 2002 *Adaptive mesh computation of a shell-like problem with singular layers*, submetido à Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
- [Hecht (1998)] Hecht, F. 1998 Bidimensional anisotropic mesh generator, INRIA, Rocquencourt.
- [Huang & Hinton (1986)] H. C. Huang & E. Hinton 1986 A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. *Int. J. Num. Meth. in Engng.* **22**, 73–92.
- [Kanok-Nukulchai (1979)] W. Kanok-Nukulchai 1979 A simple and efficient finite element for general shell analysis. *Int. J. Num. Meth. in Engng.* **14**, 179–200.
- [Karamian *et al.* (2000)] Karamian, P., Sanchez-Hubert, J. & Sanchez-Palencia, E. 2000 Model problem for boundary layers of thin elastic shells. *Math. Mod. and Num. Anal.* **34**, 1–30.
- [Karamian *et al.* (2002)] Karamian, P., Sanchez-Hubert, J. & Sanchez-Palencia, E. 2000 Propagation of singularities and structure of layers in shells - Hyperbolic case. *Computers & Structures* **80**, 747–768.
- [Meek & Tan (1986)] J. L. Meek & H. S. Tan 1986 A faceted shell element with loof nodes. *Int. J. Num. Meth. in Engng.* **23**, 49–67.

# ADAPTIVE MESH PROCEDURE FOR COMPUTING HYPERBOLIC AND ELLIPTIC THIN SHELLS

**Carlos Augusto de Souza**

Campus Universitário Darcy Ribeiro

Universidade de Brasília-UnB

Prédio da Faculdade Tecnologia - Bloco C

Departamento de Engenharia Mecânica - ENM

Asa Norte, Brasília-DF, BRAZIL , CEP: 70910-900

[carlosdesouza@unb.br](mailto:carlosdesouza@unb.br)

**Abstract:** The relative thickness  $\varepsilon$  is a significant parameter in the shell equations. In calculations of very thin shells ( $\varepsilon$  small), the solution  $u_\varepsilon$  present boundary layers, i.e. narrow areas (the thickness of which decreases with  $\varepsilon$ ) where the solution or its derivatives tends to infinite when  $\varepsilon$  tends to 0. We present numerical simulations by finite elements concerning uniformly hyperbolic shells. Obviously, to make precise calculations, we need a refined mesh in the layers. Thus, we employ a mesh adaptation process which allows a high quality automatic iterative calculation.

**Keywords:** thin shells, boundary layer, adapatation process.