

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE FORMULAÇÕES PARA ANÁLISE DE SISTEMAS ACOPLADOS FLUIDO-ESTRUTURA

Souto, Carlos d’Andrade¹

Departamento de Mecânica Computacional
Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Caixa Postal 6122
13083-970 Campinas – SP –Brasil
souto@fem.unicamp.br

Ferreira J.V.

Departamento de Mecânica Computacional
Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Caixa Postal 6122
13083-970 Campinas – SP –Brasil
janito@fem.unicamp.br

Pavanello, Renato

Departamento de Mecânica Computacional
Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Caixa Postal 6122
13083-970 Campinas – SP –Brasil
pava@fem.unicamp.br

Diversas formulações de elementos finitos para problemas dinâmicos acoplados fluido-estrutura têm sido desenvolvidas utilizando-se diferentes variáveis para o domínio fluido, tais como a pressão, potencial de deslocamentos, potencial de velocidades, entre outras. Considera-se neste trabalho, uma análise acoplada elastoacústica, onde o cálculo dos modos próprios do sistema envolve a discretização simultânea dos domínios estrutural e fluido pelo método dos elementos finitos. Conforme a representação adotada, pode-se obter diferentes tipos de problemas de autovalores: simétricos ou não simétricos, de primeira ou de segunda ordem. Neste trabalho são analisadas e comparadas cinco formulações para problemas acoplados fluido-estrutura com ênfase nos aspectos numéricos e computacionais da análise modal. Problemas em domínios fechados, ou com condições de contorno essenciais homogêneas serão abordados, para geometrias bidimensionais. Serão avaliados os parâmetros relativos aos requisitos de memória, custo computacional, condicionamento numérico e a esparsidade das matrizes dos sistemas.

Palavras – chave: Interação fluido - estrutura, elementos – finitos, elastoacústica

¹ Autor para correspondência

1-INTRODUÇÃO

Sistemas acoplados fluido – estrutura estão presentes em diversos sistemas utilizados nas engenharias aeroespacial, automotiva, mecânica, naval, nuclear entre outras. O conforto acústico de veículos (um automóvel ou uma aeronave), as vibrações estruturais induzidas pelo ruído dos motores – foguete na carga útil de um lançador espacial, as vibrações da membrana de um auto - falante (bem como o campo de pressão do fluido circundante) e as vibrações de estruturas submersas são alguns exemplos de problemas onde o acoplamento fluido-estrutura deve ser considerado. Neste trabalho nossa atenção está voltada para a análise pelo método dos elementos finitos das vibrações livres de sistemas fluido – estrutura nos quais existe acoplamento (logo nenhum domínio pode ser analisado isoladamente) e onde o domínio fluido é finito e não há escoamento. As oscilações de pressão e os deslocamentos da estrutura podem ser considerados de pequena magnitude.

Para este tipo de problema, diversas formulações foram propostas. Escolher uma formulação para a modelagem matemática de um sistema acoplado fluido – estrutura significa escolher as variáveis que descreverão o comportamento do sistema. Esta escolha tem consequência direta nas propriedades matemáticas dos operadores a serem discretizados. Em função da forma variacional obtida, chega-se a diferentes tipos de problema de auto – valor: quadrático e simétrico, linear e não simétrico ou ainda linear e simétrico.

Uma revisão sobre as formulações de elementos finitos para o problema acoplado elasto - acústico pode ser encontrada no trabalho de Everstine, 1997. Nosso objetivo no entanto é comparar algumas formulações de forma mais específica, no tocante às características numéricas e computacionais de suas implementações, utilizando exemplos numéricos. Para isso utilizamos o programa de elementos finitos “Meflab++”, desenvolvido no Departamento de Mecânica Computacional da UNICAMP o programa ANSYS 6.0 bem como uma implementação específica para ambiente MATLAB.

O exemplo escolhido consiste de uma viga imersa em fluido compressível em uma configuração bidimensional. Os resultados da análise comparativa realizada neste trabalho permitem estabelecer algumas diretrizes para a escolha de formulações mais adaptadas à resolução dos diferentes tipos de problemas elasto-acústicos.

2-FORMULAÇÕES PARA PROBLEMAS ACOPLADOS FLUIDO – ESTRUTURA

Uma síntese das formulações elasto-acústicas estudadas neste trabalho é inicialmente apresentada.

2.1 Formulação u-p (deslocamentos-pressão)

Esta formulação pioneira e ainda hoje bastante utilizada, foi proposta por Zienkiewicz, 1969. A é discretizada na forma Lagrangiana (deslocamentos) e o fluido na forma Euleriana (pressões). Desconsiderando-se efeitos de amortecimento e de ondas de superfície, a equação matricial discretizada do sistema acoplado para o caso de vibrações livres é:

$$\left(\begin{bmatrix} [K] & -[L] \\ [0] & [H] \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ \rho_f [L]^T & [E] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

onde as matrizes $[M]$, $[K]$, $[E]$, $[H]$ e $[L]$ são respectivamente as matrizes de massa e de rigidez da estrutura, de compressibilidade e volumétrica do fluido e de interface. O parâmetro $\lambda = \omega^2$ representa a frequência angular ω ao quadrado, ρ é a massa específica do fluido.

A Eq. (2.1) possui matrizes não simétricas, perdendo pois, uma característica das matrizes usualmente geradas pelo método dos elementos finitos que permite: um armazenamento utilizando um

menor espaço de memória, a utilização de algoritmos padrão para cálculo de auto – valores e auto vetores. Além disso para o caso de cavidades acústicas completamente fechadas a resolução da Eq. (2.1) conduz a um modo não físico correspondente a um auto-valor nulo.

Pode-se “simetrizar” o sistema fazendo-se, da segunda linha de (2.1):

$$\{p\} = [H]^{-1} \lambda (\rho_f [L]^T \{u\} + [E] \{p\}) \quad (2.2)$$

Substituindo a Eq. (2.2) na Eq. (2.1) chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \rho_f [K] & [0] \\ [0] & [E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \rho_f [M] + \rho_f^2 [L][H]^{-1}[L]^T & \rho_f [L][H]^{-1}[E] \\ [E][H]^{-1}\rho_f [L]^T & [E][H]^{-1}[E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Na Eq. (2.2) é necessário inverter a matriz volumétrica, o que é computacionalmente custoso e não poderá ser feito no caso de cavidades acústicas fechadas pois neste caso a matriz volumétrica será singular. Além disso a matriz de massa do sistema acoplado perderá sua esparsidade.

2.2 Formulação u-u^F (deslocamento-deslocamento)

Esta formulação consiste em tratar tanto o sólido como o fluido pela descrição Lagrangeana. Logo os deslocamentos são as variáveis nodais da estrutura e do domínio fluido. Um fluido compressível invíscido pode ser representado por meio de um sólido elástico isotrópico equivalente cujo módulo de cisalhamento é bastante pequeno porém não nulo como mostrado por Everstine, 1997. Contudo, esta formulação, ao contrário das demais, não inclui implicitamente a condição de irrotacionalidade do fluido. Desta forma modos espúrios de circulação podem surgir. Estes modos podem ocorrer em frequências baixas ou altas e dependem da malha usada na discretização. Para tentar contornar este problema impõe-se como condição adicional a irrotacionalidade do fluido como proposto por Hamdi 1978.

2.3 Formulação u-p-φ (deslocamentos – potencial de deslocamentos – pressão)

A formulação de três campos proposta por Morand, 1979, é simétrica e utiliza duas variáveis nodais para descrever o fluido, a pressão p e o potencial de deslocamentos φ dado por:

$$p = -\rho_f \ddot{\varphi} \quad (2.4)$$

A equação do sistema acoplado em vibrações livres é:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} [K] & [0] & [0] \\ [0] & \frac{1}{\rho_f} [E] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [M] & [0] & [A] \\ [0] & [0] & [B] \\ [A]^T & [B] & -[H] \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{p\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Onde $[A]$ e $[B]$ são matrizes de compressibilidade de acoplamento. Os detalhes para o cálculo de cada uma das matrizes pode ser encontrado em Morand, 1995.

Nesta formulação o número de graus de liberdade do fluido é dobrado, uma vez que o mesmo é descrito por duas variáveis. Além disso, Mellado., 2001 mostra que as matrizes do sistema acoplado são singulares, o sistema possui modos com frequência nula e o problema de autovalor é de difícil resolução utilizando-se os algoritmos tradicionais. Morand, 1995 propõe eliminar todos os graus de liberdade do potencial de deslocamentos, menos um, obtendo-se matrizes menores. Para isso são feitas partições no vetor de graus de liberdade $\{\varphi\}$ e nas matrizes $[H]$, $[A]$ e $[B]$ da seguinte forma:

$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} H_{11} & \{H_{12}\} \\ \{H_{21}\} & [H_{22}] \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & \{A_{12}\} \\ \{A_{21}\} & [A_{22}] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & \{B_{12}\} \\ \{B_{21}\} & [B_{22}] \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Reescrevendo $\{\varphi_2\}$ em termos de $\{u\}, \{p\}, \varphi_1$, tem-se:

$$\{\varphi_2\} = \rho_f [H_{22}]^{-1} [A_{22}]^T \{u\} + \rho_f [H_{22}]^{-1} [B_{22}]^T \{p\} - \rho_f [H_{22}]^{-1} [H_{12}]^T \varphi_1 \quad (2.8)$$

Introduzindo-se a Eq. (2.8) na Eq. (2.7) obtém-se, após algumas manipulações:

$$\left(\begin{bmatrix} [K] & [0] & \{0\} \\ [0] & \frac{1}{\rho_f} [E] & \{0\} \\ \{0\}^T & \{0\}^T & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [M] + [A_{22}] [H_{22}]^{-1} [A_{22}]^T & [A_{22}] [H_{22}]^{-1} [B_{22}]^T & \{a\} \\ [B_{22}] [H_{22}]^{-1} [A_{22}]^T & [B_{22}] [H_{22}]^{-1} [B_{22}]^T & \{b\} \\ \{a\}^T & \{b\}^T & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{p\} \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Onde: $\{a\}^T = \{1 \ \dots \ 1\}_{1 \times N_F^p} \times [A]_{N_F^p \times N_S}^T$ $\{b\}^T = \{1 \ \dots \ 1\}_{1 \times N_F^p} \times [B]_{N_F^p \times N_F^p}^T$

Na prática a matriz de massa da Eq.(2.9) pode ser obtida por condensação estática da matriz de massa da Eq. (2.5), conservando-se os todos os graus de liberdade de deslocamentos, de pressão e apenas um grau o primeiro grau de liberdade de potencial de deslocamentos como mostrado por Morand, 1995.

Na Eq. (2.5) o acoplamento esta presente na matriz de massa do sistema acoplado. Alternativamente Morand, 1995, mostra que o acoplamento pode ocorrer na matriz de rigidez, conforme mostrado abaixo:

$$\left(\begin{bmatrix} [K] & [0] & -[L] \\ [0] & [0] & [D] \\ -[L]^T & [D] & -\frac{1}{\rho_f} [E] \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [M] & [0] & [0] \\ [0] & \frac{1}{\rho_f} [H] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\varphi\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

onde: $[D]$ é uma matriz volumétrica de acoplamento $p \ \varphi$.

Morand, 1979 mostra que pode-se eliminar os graus de liberdade do potencial de deslocamentos, obtendo-se

$$\left(\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & \frac{1}{\rho_f} [E] \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [M] + \rho_f [L][H]^{-1}[L]^T & [L][H]^{-1}[E]^T \\ [E][H]^{-1}[L]^T & [E][H]^{-1}[E]^T \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

que é equivalente à Eq. (2.3).

Eliminando-se os graus de liberdade de pressão, obtém-se:

$$\left(\begin{bmatrix} [K] + \rho_f [L][E]^{-1}[L]^T & [L][E]^{-1}[D]^T \\ [D][E]^{-1}[L]^T & [D][E]^{-1}[D]^T \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & \frac{1}{\rho_f} [H] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Novamente há o custo computacional de se inverter a matriz $[E]$ que contudo é sempre não singular, pois deriva de uma forma quadrática positivo-definida. Logo, esta formulação pode ser usada no caso de sistemas fechados. No entanto as matrizes onde há acoplamento perdem esparsidade tanto na Eq. (2.11) quanto na Eq. (2.12).

Alguns autores (Sandberg, 1988 e Ding, 2001) utilizaram diferentes interpolações para os campos de pressão e potencial de deslocamentos na formulação com acoplamento na massa, baseando-se no fato de que o potencial de deslocamentos é a integral da pressão. Isto permite que um menor número de graus de liberdade seja utilizado no campo de potencial de deslocamentos do fluido.

2.4 Formulação u- ϕ (deslocamentos – potencial de velocidades)

A formulação u- ϕ proposta por Everstine, 1981 é uma modificação da formulação u-p. Define-se uma nova variável nodal para o fluido, o potencial de velocidades dado por:

$$\phi = -\frac{1}{\rho_f} \int_0^t p dt \quad (2.13)$$

e a equação do sistema acoplado passa a ser escrita da seguinte maneira:

$$\left(\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [H] \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} [0] & [L] \\ [L]^T & [0] \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [E] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

A Eq. (2.14) descreve um problema de auto – valor quadrático que a exemplo da Eq. (2.1), não pode ser resolvido pelos algoritmos tradicionais.

Caso adote-se como constante na Eq. (2.13) $1/\rho_f$, o sinal de $[L]^T$ é trocado e a matriz coeficiente do termo de velocidade torna-se anti – simétrica. A equação do sistema acoplado é então semelhante a de um sistema giroscópico. Morand, 1995 afirma que esta formulação apresenta modos de frequência nula,.

2.5 Formulação u- ϕ -p_o (deslocamentos – potencial de velocidades – pressão hidrostática)

A formulação u- ϕ -p_o proposta por Olson, 1985 é uma modificação da formulação que utiliza o potencial de velocidades e a pressão hidrostática como variáveis do fluido. A pressão hidrostática, ao contrário do potencial de velocidades, não é uma variável nodal e assume um valor constante para todo o domínio fluido. Logo, o fluido é discretizado apenas em termos de ϕ . A pressão em cada ponto do fluido é dada por :

$$p = p_o - \rho_f \dot{\phi} \quad (2.15)$$

e a equação discretizada do sistema acoplado é:

$$\left(\begin{bmatrix} [K] & [0] & [K_{PS}]^T \\ [0] & -[H] & [0] \\ [K_{PS}] & [0] & [K_{PP}] \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} [0] & [C_{FS}]^T & [0] \\ [C_{FS}] & [0] & [C_{PF}]^T \\ [0] & [C_{PF}] & [0] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M] & [0] & [0] \\ [0] & -[E] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\phi\} \\ p_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

As dimensões de $[C_{PF}]$, $[K_{PS}]$ e $[K_{PP}]$ são, respectivamente $n_F \times 1$, $n_S \times 1$ e 1×1 (n_F é o número de graus de liberdade do fluido e n_S é o número de graus de liberdade da estrutura). O problema de autovalor é simétrico e quadrático com autovalores e autovetores reais e não apresenta modos de frequência nula.

3-COMPARAÇÃO ENTRE AS FORMULAÇÕES

Com o que foi apresentado no item 2, podemos observar as vantagens e desvantagens de cada formulação, que são apresentadas resumidamente na Tab. 3.1. Dentre as formulações analisadas, escolhemos implementar e comparar diretamente as formulações u-p, u-p- ϕ , u-p- ϕ_I e u- ϕ , pois são capazes de resolver problemas com domínio fluido aberto ou fechado, não apresentam problemas de autovalor de segunda ordem e são utilizadas por um considerável número de autores, principalmente u-p e u-p- ϕ .

Tabela –3.1 Quadro comparativo das formulações
V - Vantagens D - Desvantagens

Formulação		
u-p	V	1)Um GDL ⁽¹⁾ p/nó fluido.
	D	1)Auto – valor não simétrico 2)Modos de frequência nula.
u-u ^F	V	1)Auto – valor simétrico 2)Fácil implementação da interface.
	D	1)Três GDL p/nó fluido; 2)Penalidade necessária para impor irrotacionalidade ao fluido; 3)Presença de modos de circulação.
u-p- ϕ	V	1)Problema de auto – valor simétrico.
	D	1)Dois GDL p/nó fluido; 2)Modos de frequência nula;3)Matrizes singulares.
u-p- ϕ_I	V	1)Problema de auto – valor simétrico.
	D	1)Necessidade de inversão da matriz [H ₂₂]; 2)Modos de frequência nula 3)Uma das matrizes não esparsa.
u- ϕ	V	1)Um GDL p/nó fluido; 2)Auto – valor simétrico
	D	1)Auto – valor quadrático; 2)Modos de frequência nula.
u- ϕ	V	1)Um GDL p/nó fluido; 2)Auto – valor simétrico.
	D	1)Necessidade de inversão da matriz [E], 2)Uma das matrizes não esparsa.
u- ϕ -p _o	V	1)Um GDL p/nó fluido (p _o não é variável nodal);2)Auto – valor simétrico.
	D	1)Auto – valor quadrático.

⁽¹⁾ Grau de liberdade

Para comparar o desempenho computacional destas formulações, analisamos um modelo bidimensional, mostrado na Fig. 3.1, com as condições de contorno do fluido com a superfície superior livre e fechada. Nas superfícies laterais o fluido é considerado em contato com uma parede rígida e na superfície inferior é aplicada a condição de contorno de interface fluido-estrutura.

As malhas foram geradas no ANSYS e as matrizes globais dos sistemas de equação foram geradas no Meflab++. Os problemas de autovalor de cada formulação foram resolvidos utilizando-se o MATLAB. Os domínios estrutural e fluido possuem, respectivamente, 66 e 481 (com superfície superior livre) ou 468 (com superfície superior fechada) graus de liberdade. Em ambos os domínios foram utilizados elementos quadrilaterais bilineares com 4 nós localizados nos vértices. As dimensões mostradas na Fig. 3.1 estão em milímetros e as propriedades dos materiais dos domínios estrutural e fluido são: $E=2.1 \cdot 10^{11}$ N/m², $\rho=7000$ Kg/m³, $\nu=0.3$ para a estrutura e $\rho=1000$ Kg/m³ e $c=1500$ m/s (velocidade do som no fluido) para o fluido.

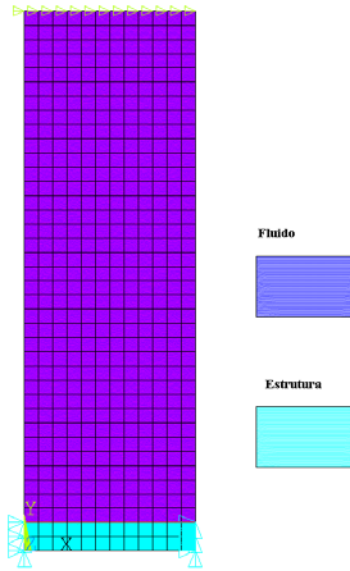


Figura 3.1 Problema aberto

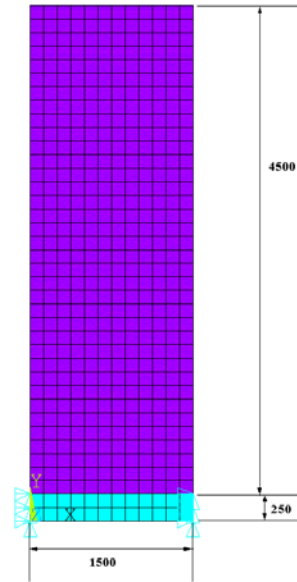


Figura 3.2 Problema fechado

Analizamos o tempo de processamento, a memória ocupada, a esparsidade das matrizes, o número de autovalores nulos, e o condicionamento dos autovalores como parâmetros em cada implementação.

O tempo de processamento para o cálculo dos autovalores e autovetores é normalizado considerando-se 1 para a formulação mais rápida. Para o caso das formulações u-p- φ_I e u- φ o tempo necessário às operações de inversão de matrizes também é incluído no tempo de cálculo dos autovalores e autovetores.

Como memória ocupada considera-se apenas o espaço de memória necessário para acomodar as matrizes de massa e rigidez do sistema acoplado.

A esparsidade das matrizes foi avaliada pela razão entre o número de elementos não nulos e o número total de elementos da matriz.

O problema de autovalores generalizado associado às vibrações livres tem a forma:

$$[K]\{x\} = \lambda[M]\{x\} \quad (2.17)$$

Reduzindo-se a um problema de autovalores padrão chega-se a:

$$[M]^{-1}[K]\{x\} = \lambda\{x\} \quad (2.18)$$

Em alguns casos foi possível utilizar o algoritmo especial disponível no MATLAB versão 6.5 para matrizes simétricas porém em algumas formulações isto não foi possível devido à singularidade de uma das matrizes. Na maior parte dos casos foi necessário reduzir-se o problema para a forma padrão (perdendo-se a vantagem da simetria porém utilizando-se então o algoritmo QZ mais estável) conforme a Eq. (2.18) para obter resultados precisos nas frequências naturais (valores comparados com os obtidos no ANSYS).

Para calcular um indicador do condicionamento numérico do problema de autovalor da Eq. (2.18) utilizamos o número de condição dos autovalores dado por, Saad, 1992:

$$\mu_i = Cond(\lambda) = (\cos \theta(\{x\}_i, \{y\}_i))^{-1} \quad (2.19)$$

Sendo λ_i o i-ésimo autovalor e $\{x\}_i$ e $\{y\}_i$ os seus respectivos autovetores à direita e à esquerda. Para o problema de autovalores generalizado utilizamos como indicador de condicionamento, Stewart, 1978:

$$\gamma_i = \sqrt{\{y\}_i^H [K] \{x\}_i + \{y\}_i^H [M] \{x\}_i} \quad (2.20)$$

Os autovetores são normalizados de forma que suas normas Euclidianas sejam unitárias. Nas Eqs (2.19) e (2.20), valores pequenos de γ_i^{-1} e μ_i indicam bom condicionamento.

4-RESULTADOS

Os parâmetros comparativos apresentados no item 3 são mostrados na Tab. 4.1.

Tabela 4.1 Resultados numéricos (Sistema. Aberto: A; Sistema. Fechado: F)

		Tempo de proc. ⁽¹⁾	Memória (bytes)	Pior valor do indicador ⁽³⁾	Espars. de [K]	Espars. de [M]	Autovalores nulos
u-p	A	2,3	114.308	1,8637 (μ_i) ⁽²⁾	(0.0168)	(0.0154)	0
	F	2,9	117.076	1,6883x10 ¹¹ (μ_i) ⁽²⁾	(0.0163)	(0.0150)	1
u-p- φ Eq (2.5)	A	5,6	116.480	1,0024 (μ_i) ⁽²⁾	(0.0047)	(0.0122)	468
	F	6,3	119.508	1,2509 x10 ⁰⁶ (μ_i) ⁽²⁾	(0.0046)	(0.0119)	482
u-p- φ Eq. (2.10)	A	28,5	116.480	3,2400 x10 ¹¹ (γ_i^{-1})	(0.0126)	(0.0043)	0
	F	28,4	119.508	6,4800 x10 ¹¹ (γ_i^{-1})	(0.0123)	(0.0042)	1
u-p- φ_1	A	2,6	1.423.972	4,2995 x10 ¹⁰ (μ_i) ⁽²⁾	(0.0166)	(0.8064)	1
	F	2,6	1.500.792	4,2995 x10 ¹⁰ (μ_i) ⁽²⁾	(0.0162)	(0.8107)	2
u- φ	A	1	1.418.156	3,5961 x10 ⁻¹² (γ_i^{-1})	(0.8073)	(0.0153)	0
	F	1,01	1.494.844	3,5961 x10 ⁻¹² (γ_i^{-1}) ⁽³⁾	(0.8116)	(0.0149)	1

⁽¹⁾ Normalizado ⁽²⁾ Reduzido ao problema de autovalor comum ⁽³⁾ Nos 10 primeiros modos.

Nas Figs. (4.1) e (4.2) pode-se observar o padrão de esparsidade, das matrizes globais dos sistema.

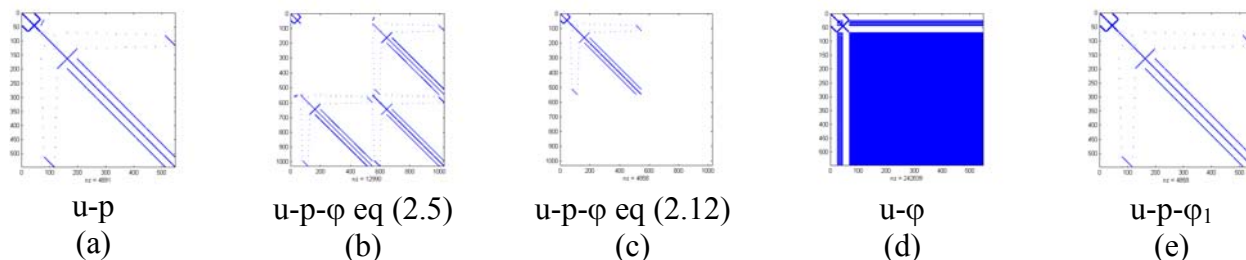


Figura 4.1 – Padrão de esparsidade das matrizes de rigidez do problema fechado

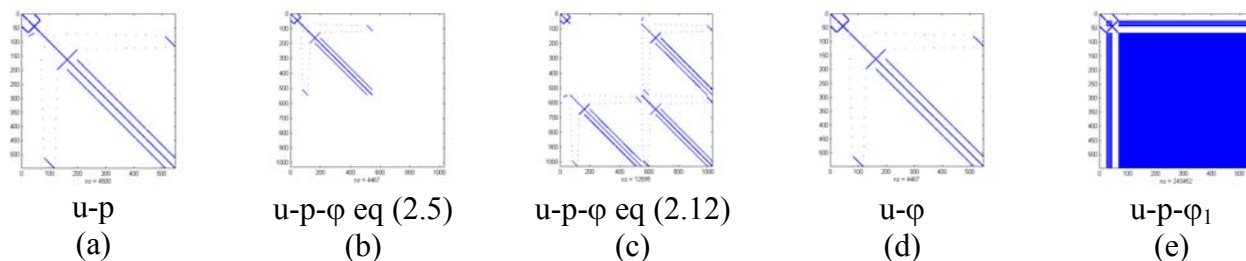


Figura 4.2 – Padrão de esparsidade das matrizes de massa do problema fechado

5-CONCLUSÕES

Tempo de processamento – Uma vez que não foi possível utilizar algoritmos otimizados para matrizes simétricas, consideramos o tempo de processamento como um parâmetro apenas informativo. De uma maneira geral, podemos esperar que os algoritmos de cálculo de autovalores/autovetores para matrizes simétricas sejam mais rápidos que para matrizes não simétricas quando implementados em linguagens de programação como C ou FORTRAN.

Memória ocupada – As formulações u-p- ϕ e u-p apresentaram desempenho muito semelhante e bastante superior ao das demais formulações, com pequena vantagem para u-p. A simetria e o elevado grau de esparsidade das matrizes das formulações u-p- ϕ compensa o fato de dobrarem o número de graus de liberdade do fluido. As formulações u- ϕ e u-p- ϕ_1 apresentam grande desvantagem neste parâmetro, pois embora sejam simétricas, perdem muito em esparsidade.

Modos de frequência nula - Quanto à presença de modos computacionais nulos, as formulações u-p e u- ϕ mostraram-se bastante superiores. No entanto, procedimentos de “shifting” no cálculo de autovalores talvez possam resolver este problema nas demais formulações, principalmente u-p- ϕ com acoplamento na massa.

Condicionamento dos autovalores – O problema fechado mostrou-se de uma maneira geral, mais crítico em quase todas as formulações. A formulação u- ϕ é claramente superior às demais no aspecto condicionamento dos autovalores.

Deve-se ressaltar que as formulações simétricas requerem algoritmos de cálculo de autovalores e autovetores mais comumente utilizados e de mais simples implementação que formulações não simétricas ou ainda que formulações simétricas cujo problema de autovalor é de segunda ordem. As formulações de três campos mesmo sendo simétricas apresentam problemas de singularidade e matrizes não positivo – definidas Mellado., 2001. Também necessitam de algoritmos tradicionais adaptados Sandberg, 1988, perdendo um pouco a vantagem da simplicidade dos algoritmos. Para as formulações não simétricas é necessário usar métodos como o descrito em Yu, 1986, que utiliza as iterações por sub – espaços para obter um sistema não - simétrico reduzido resolvido por meio do algoritmo QZ.

A escolha de uma formulação fluido – estrutura será influenciada por fatores como o tipo de algoritmo de cálculo de autovalores/autovetores disponível e a possibilidade de utilizar tipos de dados com grande capacidade de armazenamento (matrizes simétricas em banda e esparsas, por exemplo). A formulação u- ϕ é extremamente vantajosa dos pontos de vista do condicionamento dos autovetores e dos modos de frequência nula, embora ocupe muita memória. As formulações de três campos podem ser interessantes caso se utilize técnicas de “shifting” que possam evitar a singularidade de suas matrizes.

6-AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

7-DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

8-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ding, W.P., Chen, H.L., 2001; “*A symmetrical finite element model for structure-acoustic coupling analysis of an elastic, thin-walled cavity*” **Journal of Sound and Vibration** England v.243 n.3 p.547-559, 2001
- Everstine, G.C., 1981 *Letter to the Editor: “A Symmetric Potential Formulation for Fluid-Structure Interaction”*. **Journal of Sound and Vibration** England v.79 n.1 p.157-160, 1981
- Everstine, G.C., 1997 “*Finite Element Formulations of Structural Acoustics Problems*”. **Computers & Structures** England v.65 n.3 p.307-321, 1997
- Hamdi M. A. Oussett, Y., 1978 “*A Displacement Method for the Analysis of Coupled Fluid-Structure Systems*” **International Journal for Numerical Methods in Engineering** England v.13 p.139-150, 1978
- Mellado, M. & Rodrigez, R., 2001 “*Efficient solution of fluid-structure vibration problems*” **Applied Numerical Mathematics** v.36, pp.389-400, 2001
- Morand, H.J.-P., Ohayon, R., 1979 “*Substructure variational analysis of the vibrations of coupled fluid – structure systems. Finite elements results*” **Int. Journal of Numerical Methods in Engineering**, 14, pp 741-755, 1979
- Morand, H.J.-P., Ohayon, R., 1995 “*Fluid Structure Interaction*” John Wiley & Sons, Paris, 1995
- Olson, L.G., Bathe, K. J., 1985 “*Analysis of Fluid-Structure Interaction. A Direct Symmetric Coupled Formulation Based on the Fluid Velocity Potential*” **Computers and Structures**, vol.21, n° ½, pp.21-32, 1985.
- Saad, Y., 1992 “*Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*” Manchester University Press, Manchester, 1992
- Sandberg, G. & Goranssoon, P., 1988 “*A symmetric finite element formulation for acoustic-fluid structure interaction analysis*” **Journal of Sound and Vibration**, 123(3), pp.507-515, 1988.
- Stewart, G. W. , 1978 “*Perturbation Theory for the Generalized Eigenvalue Problem*” **Recent Advances in Numerical Analysis**, Academic Press, New york, 1978
- Yu, I.W., 1986 “*Solution of Large Unsymmetric Eigensystems for Fluid/Structure Interaction Problems*” **Nuclear Science and Engineering**, 92, pp.157-161, 1986
- Zienkiewicz, O.C.; Newton, 1969, E. “*Coupled Vibrations of a Compressible Fluid*” In: Proceedings of International Symposium on Finite Elements Techniques Stuttgart Junho 1969 p.359-379

COMPARATIVE ANALYSIS OF SOME FINITE - ELEMENT FORMULATIONS FOR FLUID-STRUCTURE COUPLED SYSTEMS

Souto, Carlos d'Andrade¹

Departamento de Mecânica Computacional
Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Caixa Postal 6122
13083-970 Campinas – SP –Brasil
souto@fem.unicamp.br

Ferreira J.V.

Departamento de Mecânica Computacional
Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Caixa Postal 6122
13083-970 Campinas – SP –Brasil
janito@fem.unicamp.br

Pavanello, Renato

Departamento de Mecânica Computacional
Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Caixa Postal 6122
13083-970 Campinas – SP –Brasil
pava@fem.unicamp.br

Many finite-element formulations for fluid-structure coupled problems has been developed in the last years. The fluid domain variables used can be: pressure, displacements potentials, velocity potentials, e.g. We consider in this work the modal analysis of a coupled elasto - acoustic system performed by the finite-element method. According to the formulation adopted, one can obtain different types of eigenvalue problems: symmetric or non-symmetric, first order or second order. In this work some formulations for fluid - structure coupled problems are analyzed comparatively focused on the numerical and computational aspects when a modal analysis is performed by the finite - element method. Simple geometry systems with different boundary conditions (fluid with free surface and closed fluid domain) are analyzed. Special attention is given to core memory needed, computational costs and numerical precision.

Key words: Fluid-Structure Interaction, Finite-elements, elastoacoustics

¹ All correspondence should be addressed to this author