

# APLICAÇÃO DE MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA A PREVISÃO DO CRESCIMENTO DE TRINCAS DE FADIGA

Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr., [jorge@unb.br](mailto:jorge@unb.br)  
Juliana Alcântara Andaló, Eng. Mec., [juliana@andalo.ecn.br](mailto:juliana@andalo.ecn.br)

UnB – Universidade de Brasília  
Departamento de Engenharia Mecânica – ENM  
Campus Universitário Darcy Ribeiro – Asa Norte  
70910-900 – Brasília - DF - Brasil

**Resumo.** Fadiga é conhecida como a maior causa de falha de componentes estruturais. Sob o ponto de vista da Mecânica da Fratura, o dano por fadiga de componentes submetidos a cargas dinâmicas pode ser quantificado pelo tamanho da trinca dominante e a falha ocorrerá quando essa trinca alcançar um tamanho crítico. Devido a natureza aleatória das propriedades mecânicas e dos esforços atuantes nos componentes mecânicos, o fenômeno de propagação de trincas é um fenômeno eminentemente aleatório, fazendo com que o mesmo só possa ser quantificado de maneira conveniente por meio de métodos probabilísticos. Esse trabalho tem como objetivo descrever o comportamento dos parâmetros que controlam o fenômeno de propagação de trincas e quantificar a influência de tais parâmetros sobre a vida de componentes estruturais. Nesse sentido, os métodos de Monte Carlo, FOSM E ASM foram implementados e aplicados a um problema de integridade estrutural.

**Palavras Chaves.** Confiabilidade, Fratura, Modelos Probabilísticos, Crescimento de Trinca.

## 1. INTRODUCÃO

O procedimento clássico para o estudo da propagação de trincas de fadiga é realizado usando-se o diagrama que correlaciona a velocidade de propagação da trinca,  $da/dN$ , com a gama do fator de intensidade de tensões,  $\Delta K$ , cuja definição é apresentada na Eq. (1).

$$\Delta K = \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot F \quad (1)$$

onde  $\Delta\sigma$  é a gama de tensão, quantificada pela diferença entre os extremos de tensão atuantes no ponto analisado, isto é,  $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$  e  $F$  é um fator associado a geometria, ao tipo de carregamento e ao tamanho relativo da trinca.

Conforme ilustrado na fig. (1), em escala logarítmica o diagrama ( $da/dN$ ,  $\Delta K$ ) possui forma sigmoidal. Com base nesse diagrama verifica-se a existência de três regimes de propagação da trinca.

O regime I é caracterizado pela reduzida ou insignificante taxa de propagação, sendo fortemente dependente do fator de intensidade de tensões, da carga média, das condições ambientais, da micro estrutura e de um parâmetro conhecido como limiar de propagação da trinca,  $\Delta K_{th}$ , para o qual pode ou não ocorrer a propagação da trinca. O parâmetro  $\Delta K_{th}$  pode ser primariamente associado ao módulo de Young,  $E$ , à tensão de escoamento,  $\sigma_y$ , e a um parâmetro que caracteriza o tamanho de grão,  $I^*$ , sendo relacionados pela seguinte Eq. (2).

$$\Delta K_{th} = \sqrt{E \cdot \sigma_y \cdot I^*} \quad (2)$$

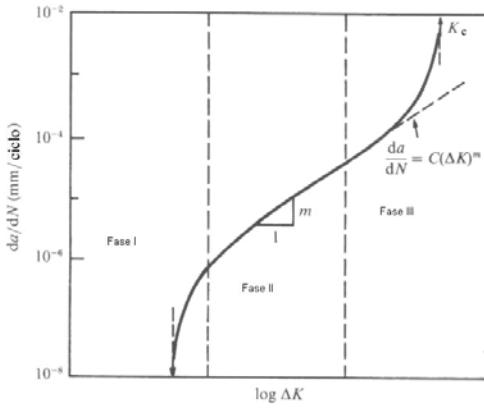


Figura 1. Comportamento Típico do Diagramma ( $da/dN, \Delta K$ ) (Suresh, 1998).

O regime II caracteriza-se pela propagação da trinca ser controlada pelas deformações cíclicas atuantes em torno da ponta da trinca, apresentando-se pouco sensível à microestrutura, à carga média, à condições ambientais. e pela baixa sensibilidade. Nessa região a relação ( $da/dN, \Delta K$ ), em escala logarítmica, possui derivada aproximadamente constante e a previsão do crescimento de trincas pode se realizada usando-se a lei de Paris (Paris et al., 1963) que na sua forma mais simples é representadas pela Eq. (3).

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K)^m \quad (3)$$

onde  $da$  é o tamanho instantâneo da trinca,  $dN$  é a o número de ciclos aplicados na estrutura,  $C$  e  $m$  são, respectivamente, o coeficiente e o expoente de Paris.

No regime III a derivada da relação  $da/dN$  versus  $\Delta K$  é crescente até a propagação instável da trinca. Nesse regime a taxa de propagação é sensível à carga media, à condições ambientais, e a espessura da peça. Em materiais frágeis, admite-se que o regime III surge quando o valor máximo do fator de intensidade de tensões,  $K_{Max} = \sigma_{Max} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot F$ , aproxima-se de um valor crítico, denominado tenacidade a fratura do material,  $K_c$ , provocando uma aceleração na propagação da trinca. Nesse sentido, um material poderá resistir sem fraturar de maneira frágil enquanto  $K_{max}$  estiver abaixo do valor crítico  $K_c$ . Assim, baseando na Eq. (1) é possível escrever a Eq. (4) que permite prever o tamanho crítico que uma trinca alcançará para que sua propagação ocorra de forma instável.

$$a_c = \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{K_c}{F \cdot \sigma_{Max}} \right)^2 \quad (4)$$

Em materiais que, excessiva ductilidade, não apresente valores válidos de  $K_c$ , nas condições de ensaio, o regime II é dominante, mas sob condições de grandes deformações plásticas.

Vários estudos (Khodadad et al., 2000; Kozin et al., 1981; Dolinski, 1992; Wang, 1995; Shen et al., 2001) reconhecem que o fenômeno propagação de trincas de fadiga apresenta um comportamento eminentemente aleatório. Sob o ponto de vista probabilístico, Shen et al. (2001) afirma que a taxa de propagação e o coeficiente de Paris são bem descritos por uma distribuição log-normal, conforme mostrado na Fig. (2a). Já o expoente de Paris é melhor descrito por uma distribuição normal, conforme ilustrado na Fig. (2b). Além disso, devido a dificuldades em se determinar de forma apropriada as condições de projeto, tais como : comportamento do material, carregamento atuantes na estrutura, uma previsão consistente da vida de fadiga só pode ser quantificada de forma apropriada utilizando-se ferramentas estatísticas e de análise probabilística. Nesse aspecto, o desenvolvimento de modelos que permitam realizar a previsão da vida média e estimar os níveis de confiabilidade associados a essa previsão análises de confiabilidade de componentes submetidos falhas por fratura torna-se uma tarefa fundamental para o desenvolvimento de projetos confiáveis.

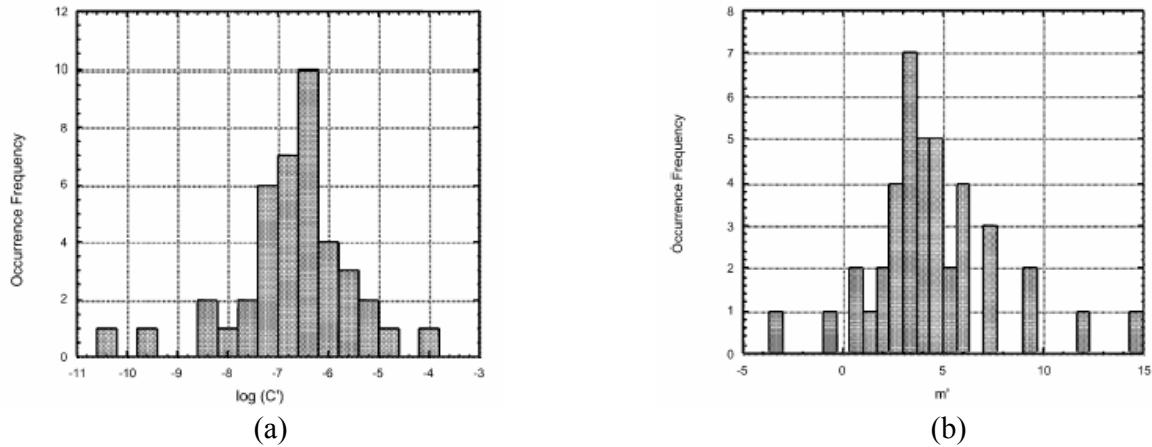


Figura 2. Distribuição dos Parâmetros de Paris – Constante  $C$  (2.a) e Exponente  $m$  (2b) (Shen et al, 2001).

Tipicamente o desempenho de componentes estruturais sob uma condição específica de falha é definida por uma função conhecida como função de estado limite,  $G(\mathbf{X})$ , onde  $\mathbf{X}$  representa o vetor de variáveis aleatórias associadas às incertezas do sistema (níveis de carregamento, características do material, variações geométricas, etc). Assim, se  $\mathbf{X}$  assumir uma configuração, por exemplo,  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , então o valor de  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definirá um possível estado de funcionamento do sistema (Harr, 1987). Para avaliar as condições de integridade do sistema três possíveis situações podem ser definidas:

- $G(\mathbf{X}) > 0 \Rightarrow \mathbf{X}$  está contida numa região segura, isto é, o sistema não falhará,
- $G(\mathbf{X}) = 0 \Rightarrow \mathbf{X}$  está contida na hiper superfície que separa a condição de falha da integra,
- $G(\mathbf{X}) < 0 \Rightarrow \mathbf{X}$  está contida numa região de falha, isto é, o sistema falhará.

Essas situações são representadas na Fig. (3), onde a função de estado limite é funcionalmente definida pela margem de segurança,  $g(C - D) = 0$ . Nesse sentido, se as variáveis aleatórias  $\mathbf{X}$  puderem ser definidas por uma função de densidade de probabilidade  $f(\mathbf{X})$  então, a probabilidade de falha estrutural,  $P_f$ , poderá ser obtida por meio da Eq. (5).

$$P_f = \int_{\Omega} f(\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} \quad (5)$$

onde  $\Omega$  representa o domínio de falha no espaço dos parâmetros de projeto, ou seja:  $\mathbf{X} / G(\mathbf{X}) \leq 0$ .

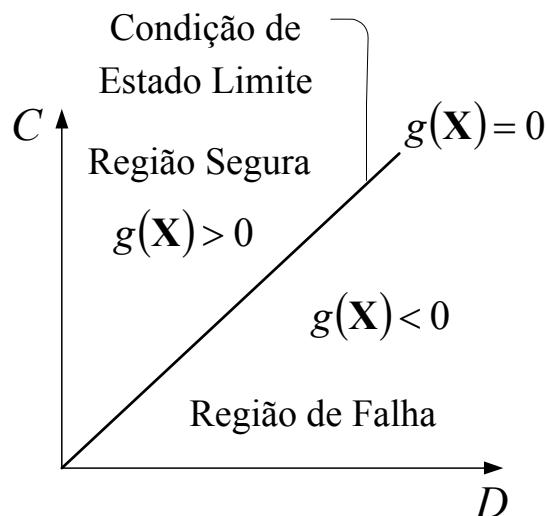


Figura 3. Representação Gráfica dos Possíveis Estados de um Componente Estrutural

Devido a complexidade que a função  $f(\mathbf{X})$  pode assumir e a incapacidade de definir precisamente o domínio de falha, a estimativa de  $P_f$  tem que ser realizada por meio de métodos alternativos (Harr, 1987).

Considerando a qualidade das informações necessárias para descrever o modelo e a exatidão da resposta obtida, esses métodos são classificados em Exatos e Aproximados. De forma geral, pode-se definir os métodos exatos como aqueles que procuram determinar a probabilidade de falha por meio da integração da função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis de estado do sistema. A integração analítica e a caracterização da função de densidade de probabilidade conjunta são fatores limitantes para a aplicação desse método.. O método de integração numérica e o método de Monte Carlo são classificados como pertencentes a essa categoria (Harr, 1987; Bilal et al., 1984). Tipicamente, para a executar tal integração é necessário assumir que as variáveis de estado possuem distribuição Gaussiana ou alguma distribuição que possa ser transformada em Gaussiana, por exemplo a distribuição log-normal. Já os métodos aproximados costumam ser usados para minimizar a carga computacional necessária para resolver os métodos exatos, para isso as relações funcionais entre as variáveis de estado do problema são simplificadas. Dessa forma, a probabilidade de falha estimada por esses métodos é apenas uma aproximação do seu valor real, estando a incerteza dessa aproximação relacionada a forma de construção do modelo (Ferreira, 2002). Os mais usados e conhecidos dessa categoria são denominados de FORM (First Order Reliability Method) e de ASM (Advanced Second Moment Method). Para o desenvolvimento desses métodos somente os dois primeiros momentos são usados, a média e a variância. A principal vantagem do uso desses métodos consiste na simplicidade dos modelos matemáticos. A maior dificuldade que se pode encontrar no uso dos métodos de primeira ordem está associada a necessidade de expressar-se a função de estado limite de forma implícita. O objetivo desse trabalho é o de apresentar um conjunto de metodologias que permitem quantificar o dano médio e a probabilidade de falha em componentes estruturais sujeitos a condições de falha por fadiga quando a história de carregamento e o material apresentam comportamento aleatório.

## 2. MÉTODOS DE CONFIABILIDADE

A segurança absoluta de uma estrutura não pode ser garantida devido à imprevisibilidade de diversos fatores presentes em um projeto. A fim de contornar essa dificuldade são usados modelos de previsão de confiabilidade. Dos modelos existentes os mais comumente usados são abaixo apresentados.

### 2.1. Método de Monte Carlo

O termo Monte Carlo foi introduzido por John Von Neumann como um código de guerra associado ao seu trabalho em Los Alamos durante a Segunda Guerra Mundial. De uma maneira genérica são chamadas de métodos de Monte Carlo as técnicas de construção e simulação de modelos físicos ou matemáticos que usam recursos estocásticos. A utilização desse procedimento é validada pela Lei dos Grandes Números. (Harr, 1987). Assim, com base no enunciado da Lei dos Grandes Números, se freqüência relativa de ocorrência de um evento,  $f_a$ , for definida segundo a Eq. (6).

$$f_a = \frac{n_a}{n} \quad (6)$$

onde  $n_a$  é o número de vezes que o evento acontece após  $n$  tentativas. Se  $P(A) = p$  for a probabilidade de ocorrência do evento  $A$ . Então, para todo número positivo  $\varepsilon$ , é possível demonstrar a seguinte desigualdade representada na Eq. (7).

$$\text{Prob}[|f_a - p| \geq \varepsilon] \leq \frac{p \cdot (1-p)}{n \cdot \varepsilon^2} \quad (7)$$

ou seja: a medida que o número de tentativas  $n$  cresce, a freqüência relativa das amostra,  $f_a$ , tende ao valor exato da probabilidade do evento acontecer. (Meyer, 1983, Dachs, 1988)

### 2.2. Método de Primeira Ordem Segundo Momento - FOSM

Nesse método, as estimativas da média e da variância da função de distribuição de  $G(\mathbf{X})$  são realizadas usando o vetor média e a matriz de covariâncias associadas as variáveis aleatórias do problema. Expandindo  $G(\mathbf{X})$  em série de Taylor em torno dos valores médios de  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$ , e limitando a série aos termos lineares, as aproximações de primeira ordem da média e da variância de  $G(\mathbf{X})$  serão definidas pelas Eqs. (3) e (4). Se  $G(\mathbf{X})$  for representada por uma distribuição de probabilidade qualquer,

o risco de falha será quantificado pela probabilidade  $P(G(\mathbf{X}) < E[G(\mathbf{X})])$ . Entretanto, assumindo que tal distribuição seja aproximadamente normal com média  $E[G(\mathbf{X})]$  e desvio padrão  $(Var[G(\mathbf{X})])^{1/2}$ , ou seja:  $G(\mathbf{X}) \approx N[E[G(\mathbf{X})], (Var[G(\mathbf{X})])^{1/2}]$ , o risco de falha será estimado pela diretamente pela distribuição normal reduzida, ou seja, através das Eqs. (8) a (10).

$$E[G(\mathbf{X})] = G(\hat{\mathbf{X}}) = G(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \quad (8)$$

$$Var[G(\mathbf{X})] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial G(\hat{\mathbf{X}})}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial G(\hat{\mathbf{X}})}{\partial x_j} \right) \cdot Cov[x_i, x_j] \quad (9)$$

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) \quad (10)$$

onde  $\beta$  é uma nova medida de risco de falha índice de confiabilidade,  $\beta$ , definida pela Eq. (11).

$$\beta = \frac{E[G(\mathbf{X})]}{\sqrt{Var[G(\mathbf{X})]}} \quad (11)$$

### 2.3. Método Avançado de Segundo Momento - ASM

A aplicação do método de confiabilidade de primeira ordem segundo momento conduz a bons resultados quando as variáveis aleatórias envolvidas no problema forem normalmente distribuídas e a equação de estado limite for linear. Com o objetivo de evitar tais inconvenientes, recomenda-se a utilização do método avançado de segundo-momento. Nesse método a expansão em série de Taylor da função de estado limite é linearizada não em torno dos valores médios das variáveis aleatórias, mas em um ponto qualquer da superfície de falha  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , denominado ponto de controle. Nesse método específico, o índice de confiabilidade,  $\beta$ , é definido como a menor distância entre a superfície de falha à origem do sistema de coordenadas reduzidas  $(\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_n)$ . Usando o sistema de coordenadas originais, os pontos de controle e o índice de confiabilidade serão determinados resolvendo-se iterativamente o sistema de Eqs. (12).

$$\alpha_i = \frac{\left( \frac{\partial G(\mathbf{X}^*)}{\partial \mathbf{X}_i} \right) \cdot \sigma_{x_i}}{\left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial G(\mathbf{X}^*)}{\partial \mathbf{X}_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \right]^{1/2}} \quad (12a)$$

$$x_i^* = \hat{x}_i - \alpha_i \cdot \beta \cdot \sigma_{x_i} \quad (12b)$$

$$G(\mathbf{X}^*) = 0 \quad (12c)$$

De forma semelhante ao método de primeira-ordem segundo-momento, a relação entre a probabilidade de falha,  $P_f$ , e o índice de confiabilidade,  $\beta$ , é estimado segundo a Eq. (11).

Em muitas situações reais, as variáveis que governam as funções de estado limite são não gaussianas. Rackwitz e Fiessler (Bilal, 1984) demonstram que funções de distribuição de probabilidades não gaussianas podem ser utilizadas nas Eqs. (13) desde que tais distribuições sejam transformadas em distribuições gaussianas equivalentes. Tipicamente, tal transformação é realizada aproximando-se as distribuições não gaussianas por gaussianas com mesmo valor médio e mesmo P-percentil. Paloheimos (1973) sugere adotar a probabilidade P associada à distribuição Gaussiana equivalente como igual à probabilidade de falha  $P_f$  se a variável for associada ao carregamento, ou  $(1 - P_f)$  se a mesma for associada à resistência. Já e Fiessler (1973) sugerem que as distribuições gaussianas equivalentes, definidas pelos parâmetros de média,  $\bar{x}_i^N$ , e de desvio-padrão equivalentes,  $\bar{\sigma}_i^N$ , sejam avaliados considerando as seguintes hipóteses: (i) A função de distribuição acumulada e a função de densidade de probabilidade das distribuições reais e das Gaussianas equivalentes devem ser iguais nos pontos de

controle. (ii) Os desvios padrão e os valores médios associados às variáveis Gaussianas equivalentes sejam estimados segundo as Eqs. (13).

$$\bar{\sigma}_i^N = \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_i(\mathbf{X}_i^*)]\}}{f_i(\mathbf{X}_i^*)} \quad (13a)$$

$$\bar{x}_i^N = \mathbf{X}_i^* - \Phi^{-1}[F_i(\mathbf{X}_i^*)] \cdot \sigma_{\mathbf{X}_i}^N \quad (13b)$$

onde  $F_i$  e  $f_i$  são, respectivamente, as funções de distribuição e de densidade de probabilidade de  $X_i$ , e  $\Phi()$  e  $\phi()$  são as funções de distribuição acumulada e densidade de probabilidade Gaussianas.

### 3. CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE

Tipicamente a condição de falha estrutural é definida pela equação de estado limite, cuja forma mais simples é a margem de segurança, apresentada na Eq. (14).

$$G(\mathbf{X}) = C(\mathbf{X}_c) - D(\mathbf{X}_d) \quad (14)$$

onde  $C(\mathbf{X}_c)$  e  $D(\mathbf{X}_d)$  são, respectivamente, funções associadas à capacidade do elemento estrutural suportar uma determinada solicitação e solicitação especificamente.

Na análise de propagação de trinca, a função de demanda construída substituindo a Eq. (1) na Eq. (3), integrando a expressão resultante. Escrita em termos do número total de ciclos,  $N_f$ , gastos para propagar a trinca de um tamanho inicial,  $a_i$ , até um tamanho final,  $a_f$ , conforme apresentado na Eq. (15).

$$N_f = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C \cdot (\Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot F)^m} \quad (15)$$

O tamanho inicial da trinca,  $a_i$ , pode ser definido com base na distribuição estatística de trincas pré-existentes, produzidas durante o processo de fabricação, ou pode ser avaliado considerando as variáveis que definem o limiar de propagação da trinca, o que resultará na Eq. (16).

$$a_i = \frac{E \cdot \sigma_y \cdot l^*}{(\sigma \cdot F)^2 \cdot \pi} \quad (16)$$

O tamanho final da trinca,  $a_f$ , pode ser estimado em termos da Eq. (4). Considerando, *a priori*, que o componente estrutural deve ter um tempo de vida útil, a função de capacidade pode ser considerada uma variável randômica associada a um número específico de ciclos  $N$ . Dessa maneira, a equação de estado limite para a vida de um componente estrutural sujeito a propagação de uma trinca de fadiga pode ser definida de acordo com a Eq. (17).

$$G(N_{Crit}, C, \Delta C, \Delta\sigma_i, K_{Ic}) = N_{Crit} - \int_{a_i}^{\frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma \cdot F} \right)^2} \frac{da}{C \cdot (\Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot F)^m} \quad (17)$$

### 4. METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO DOS MODELOS DE CONFIABILIDADE

Uma vez apresentados os modelos de confiabilidade e construída a função de estado limite do problema, a validação dos modelos de previsão será conduzida por meio da análise de propagação de uma trinca central atuante na placa apresentada na Fig. (3). Nessa análise os resultados estimados pelos métodos ASM e FOSM serão comparados aos obtidos segundo a técnica de Monte Carlo, visto que tal técnica enquadra-se na classe dos métodos exatos. As variáveis de estado usadas nessa análise serão os tamanhos inicial e final da trinca, respectivamente,  $2a_i$  e  $2a_f$ , a largura da peça,  $2b$ , o coeficiente e o expoente de Paris, respectivamente,  $C$  e  $m$ . Com relação ao comportamento estatístico dessas variáveis será assumido que as mesmas possuirão distribuição Gaussiana com valores médios apresentados na Tab. (1), com coeficientes de variação iguais a 5%. O fator de intensidade de tensões para o modo I de propagação,  $K_I$ , é expresso segundo a Eq. (18).

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot F(a/b) \quad (18)$$

onde o fator de forma será quantificado por meio da fórmula de Koiter modificada (Tada, 1973), descrita pela Eq. (19).

$$F(a/b) = \frac{1 - 0,5 (a/b) + 0,370 (a/b)^2 - 0,044 (a/b)^3}{\sqrt{1 - a/b}} \quad (19)$$

Tabela 1. Características Básicas da Fratura

Parâmetro	Valor
Largura da Placa, $2b$ [m]	0,6
Tamanho Inicial da Trinca, $2a_i$ [m]	$2 \times 10^{-3}$
Tensão Aplicada, $\sigma$ [MPa]	120
Coeficiente de Paris, $C$ [ MPa $\cdot \sqrt{m}$ ]	$6,87 \times 10^{-12}$
Expoente de Paris, $m$	3
Tenacidade à Fratura, $K_{IC}$ [ MPa $\cdot \sqrt{m}$ ]	55

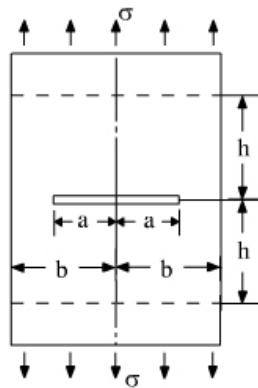


Figura 3. Placa com Furo Central.

#### 4.1. Implementação do Método de Monte Carlo

Para a implementação do método de Monte Carlo as equações (17) e (19) foram discretizadas conforme apresentado nas Eqs. (20).

$$N_i = \sum_{j=0}^{J-1} \frac{\delta_i}{C_i (\sigma \sqrt{\pi (a_{i_i} + j \delta_i)} F(a/b))^{m_i}} \quad i = 0, 1, 2, \dots, I-1; j = 0, 1, 2, \dots, J-1 \quad (20a)$$

$$F(a/b) = 1 - 0,5 \left( \frac{a_{i_i} + j \delta_i}{b_i} \right) + 0,370 \left( \frac{a_{i_i} + j \delta_i}{b_i} \right)^2 - 0,044 \left( \frac{a_{i_i} + j \delta_i}{b_i} \right)^3 \quad (20b)$$

onde  $\delta_i$  é a variação do tamanho da trinca a cada ciclo, sendo quantificada segundo as Eqs. (21) e (22),  $I$  é um parâmetro associado ao número de termos aleatórios que deverão ser gerados para a simulação do processo de crescimento da trinca (quanto maior o valor de  $I$ , maior a consistência da análise estatística) e  $J$  é o parâmetro associado ao número de passos dados durante a integração numérica (quanto maior o valor de  $J$ , maior preciso é a integração e maior é o tempo de integração).

$$\delta_i = \frac{(a_{f_i} - a_{i_i})}{J} \quad (21)$$

$$a_f \cdot F\left(\frac{a_f}{b}\right) = \frac{K_{IC}^2}{\sigma^2 \cdot \pi} \quad (22)$$

Para a resolução numérica da integral utilizou-se o método de Simpson. Com a intenção de avaliar o processo de integração e a consistência das previsões estatísticas gráficos correlacionando a estimativa média, o desvio padrão e o coeficiente de variação do número de ciclos para falha,  $N$ , em relação ao tamanho da amostra,  $I$ , foram construídos e analisados.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

De forma a avaliar a consistência dos resultados obtidos segundo o método de Monte Carlo foi conduzida uma análise de convergência dos parâmetros estatísticos da vida de fadiga,  $N$ . Assim, com base nesses resultados foram construídos os gráficos apresentados na Fig. (5), que permitem verificar que as estimativas estatísticas para a média e para o desvio padrão obtidas segundo o método de Monte Carlo começam a ter consistência estatística quando o tamanho da amostra é da ordem de  $10^5$  elementos. Após a validação do modelo de Monte Carlo, a função de densidade de probabilidade foi estimada e verificou-se que o fenômeno de propagação de trinca possui um elevado nível de dispersão e assimetria, conforme ilustrado na Fig. (6).

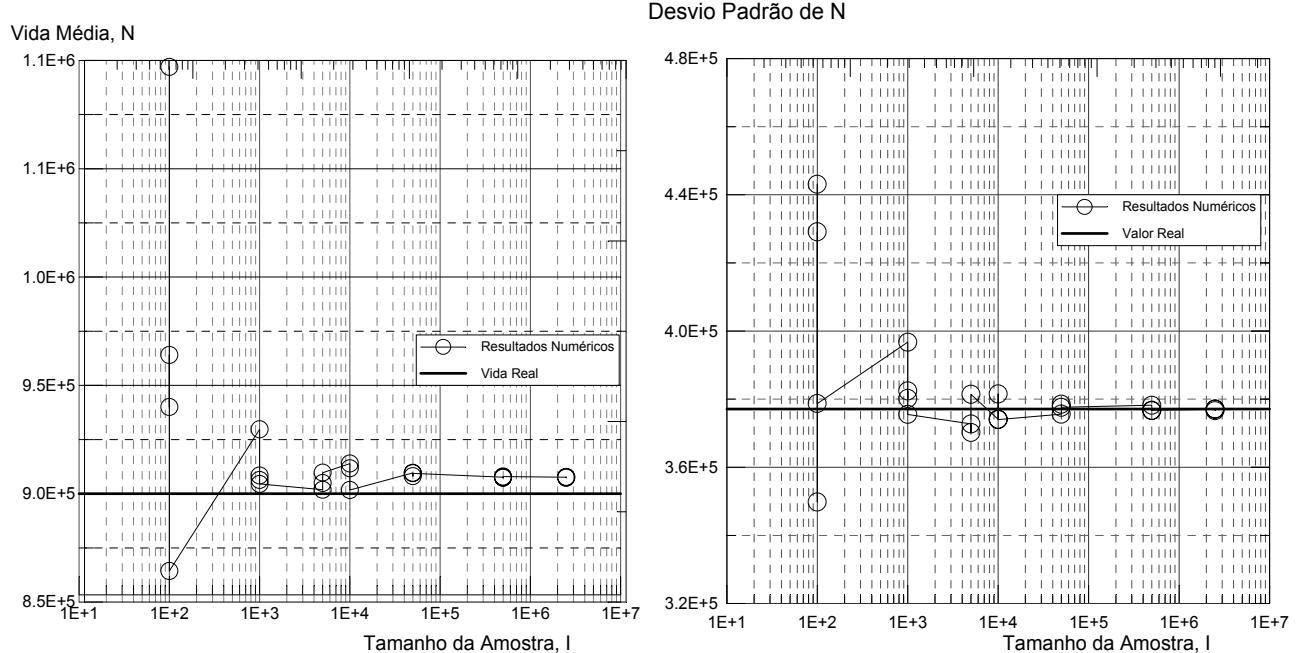


Figura 5. Estimativas para a Média e para o Desvio Padrão em Função do Tamanho da Amostra, I

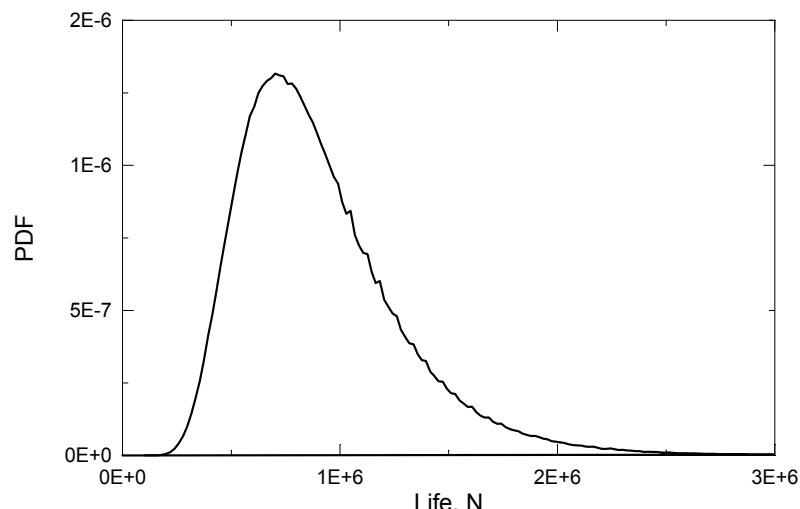


Figura 6. Aproximação da Função de Densidade de Probabilidade Baseado na Técnica de Monte Carlo.

Na Fig. (7) são apresentadas as estimativas de confiabilidade para os métodos de Monte Carlo, FOSM e ASM. Com base nesses resultados pode-se verificar que as estimativas realizadas utilizando o método avançado de segundo momento, ASM, apresentaram os menores erros quando comparadas aos resultados obtidos por Monte Carlo.

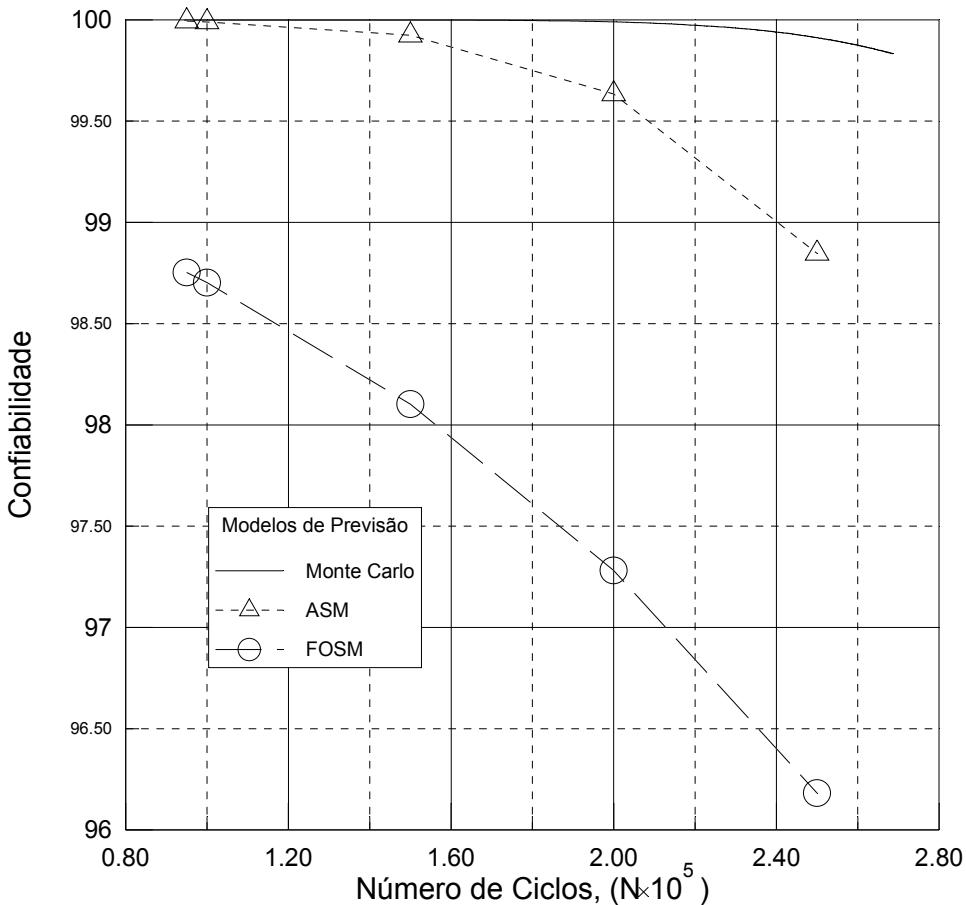


Figura 7. Comparação entre os Métodos de Confiabilidade.

## 6. CONCLUSÕES

Esse trabalho apresentou três metodologias de previsão de confiabilidade aplicadas ao problema de propagação de trincas sob condições aleatórias. Nesse sentido, os métodos de Monte Carlo, FORM e ASM foram implementados e aplicados na análise de um problema de propagação de uma trinca central em uma placa plana. O método de Monte Carlo permitiu verificar uma grande dispersão distribuição da vida de propagação da trinca. Comparando as previsões de confiabilidade obtidas segundo os métodos FORM e ASM verificou-se que somente o ASM produziu resultados comparáveis aos estimados segundo Monte Carlo, demonstrando a possibilidade de usar-se tal técnica para estimar a confiabilidade de componentes estruturais trincados.

## 7. REFERENCIAS

- Bilal, M.A. and Haldar, A., 1984, "Practical Structural Reliability Techniques", Journal of The Structural Division, ASCE, Vol. 110, No. 8, pp. 1707-1724.
- Dachs, J.N.W., 1988, "Estatística Computacional", LTC Ltda., Rio de Janeiro, Brazil.
- Dolinski, K., 1992, "Statistic modeling and statistical verification of crack growth under constant amplitude loading", Engng Fract Mech; 43(2): pp. 195-216.
- Ferreira, J.L.A., 2002, "Aplicação do Método de Segundo Momento – ASM – Na Previsão de Confiabilidade de Falha por Fadiga", Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Brasília.

- Harr, M.E., 1987, "Reliability-Based Design in Civil Engineering", Dover Publications, Inc., New York, Chapters 3 and 4.
- Khodadad Motarjemi, A. A., Kokabi, A.H. a, Burdekin, F.M. b, 2000, "Comparison of fatigue life for T and cruciform welded joints with different combinations of geometrical parameters", *Engineering Fracture Mechanics* 67 (2000), pp. 313-328
- Kozin, F., Bogdanoff, J.L., 1981, "A critical analysis of some probabilistic models on fatigue crack growth", *Engng Fract Mech* 1981;14(1): pp. 38-51.
- Meyer, P.L., 1987, "Probabilidade: Aplicações à Estatística", Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro, Brazil.
- Paris, P.C. and Erdogan, F., 1963, "A critical analysis of crack propagation laws", *J. Bas. Eng., Trasns. ASME*, p. 528.
- Shen, W., Soboyejo, A.B.O. and Soboyejo, W.O., 2001, "Probabilistic Modeling of Fatigue Crack Growth in Ti - 6 Al - 4 V", *International Journal of Fatigue*, pp. 917-925.
- Suresh, S., "Fatigue of Materials", 1998, Cambridge University Press, United Kingdom.
- Wang, G.S., 1995, "Intrinsic statistical characteristics of fatigue crack growth rate", *Engng Fract Mech*; 51(5): pp.787-803.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## PROBABILISTIC MODELS OF FATIGUE CRACK GROWTH

**Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr., [jorge@unb.br](mailto:jorge@unb.br)**  
**Juliana Alcântara Andaló, Eng. Mec., [juliana@andalo.ecn.br](mailto:juliana@andalo.ecn.br)**

UnB – Universidade de Brasília  
 Mechanical Engineering Department – ENM  
 Campus Universitário Darcy Ribeiro – Asa Norte  
 70910-900 – Brasília - DF - Brasil

**Abstract.** Fatigue is known to be a major cause of failure of a large number of structural components. From a fracture mechanics point of view, fatigue damage of a component subject to dynamic loading can be measured by the size of the dominant crack, and failure occurs when this crack reaches a critical size. It is widely recognized that fatigue crack growth is fundamentally a random phenomenon that can only be quantified in terms of probability and statistics. The two main reasons for the randomness in fatigue crack growth behavior are the random material resistance to fatigue crack growth and the random loading. The goal of this work is to describe the statistical behavior of the parameters that control the fatigue crack growth and quantifying the influence of such parameters on the life of the structural component. In this sense, the Monte Carlo method, FOSM and ASM methods were implemented and applied in a structural problem and the probability of failure was calculated. Since the Monte Carlo regards of an exact method, it was used to be compared with the rest of the methodologies.

**Keywords.** Reliability, Fracture, Probabilistic Modeling, Fatigue Crack Growth.