

# MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SATÉLITE CONSIDERANDO A ABERTURA DE UM PAINEL SOLAR: ABORDAGEM IDEAL E NÃO-IDEAL

**José Ricardo Soria Porro**

**André Fenili**

Divisão de Mecânica Espacial e Controle (DMC) - INPE

Avenida dos Astronautas, 1758 - Caixa Postal: 515

São José dos Campos - SP

[jricks@uol.com.br](mailto:jricks@uol.com.br), [fenili@dem.inpe.br](mailto:fenili@dem.inpe.br)

**José Manoel Balthazar**

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computacional - UNESP

Rio Claro - SP

[jmbaltha@rc.unesp.br](mailto:jmbaltha@rc.unesp.br)

**Resumo.** *O satélite investigado neste trabalho é constituído de um corpo principal e um painel solar flexível. O modelo matemático leva em consideração não-linearidades relacionadas aos termos de Coriolis e centrípetos decorrentes da dinâmica do satélite enquanto este realiza órbita circular em torno da Terra. As equações de Lagrange são utilizadas para a obtenção das equações governantes do movimento. Essas equações são integradas numericamente utilizando-se o integrador Runge-Kutta de 4ª ordem. Um motor de corrente contínua (atuador) é utilizado para a abertura do painel. Duas abordagens diferentes são utilizadas na modelagem da interação do atuador com o painel solar: na primeira, o motor é tratado como fonte de potência ilimitada (ou ideal) e na segunda, como fonte de potência limitada (ou não ideal). A segunda abordagem é mais realista.*

**Palavras-chave:** *dinâmica, satélite, painel solar, sistema ideal, sistema não-ideal.*

## 1. INTRODUÇÃO

Um satélite, durante o lançamento, deve ter uma configuração compacta, devido a limitação de espaço no veículo lançador. Portanto, dispositivos como hastes, painéis solares, antenas devem ser abertas somente em órbita.

O painel solar é a principal fonte de captação de energia de um satélite. Ao ser modelado, pode ser considerado rígido ou flexível. É constituído por um ou por vários segmentos planos dobrados uns sobre os outros. O impulso necessário para a abertura pode ser gerado por meio de molas do tipo espiral ou pelo uso de um motor de corrente contínua (Porro, 2002).

O conhecimento acerca da atitude de um satélite é muito importante para a definição de ações de controle (Roberson, 1979). Se o veículo lançador é previamente estabilizado (como o veículo Longa Marcha 4B, usado para o lançamento dos satélites CBERS-1 e CBERS-2), as ações de controle são mais fáceis de serem aplicadas, pois o satélite é lançado com os ângulos de atitude previamente conhecidos e próximos dos desejados.

Durante a fase de abertura dos apêndices (antenas, painéis,...), os ângulos de atitude serão perturbados (Thomson e Reiter, 1960; Meirovitch and Calico, 1972; Wie, 1998). As equações governantes são integradas numericamente e verifica-se a influência da abertura dos apêndices sobre a atitude do satélite (Wie, 1986; Porro, 2002). O comportamento dinâmico geral investigado, devido a suas características peculiares, pode ser dividido em três fases distintas (Porro, 2002; Fenili, 2003)

Fase 1 - correção e estabilização da atitude: ocorre antes do acionamento do motor responsável pela abertura do painel e varia de 0 s a 50 s. No intervalo entre 0 s e 10 s é fornecido torque ao satélite com a finalidade de produzir correção da atitude;

Fase 2 - abertura do painel; inicia-se em 50 s e vai até o instante em que o painel encontra-se totalmente aberto (e que dependerá da excitação nos terminais do motor).

Fase 3 – a partir do instante em que o painel encontra-se totalmente aberto.

Considera-se, neste trabalho, que o painel solar seja flexível e que desenvolva pequenas deflexões. No entanto, ao invés de enveredar-se pela teoria do contínuo, a flexibilidade do painel solar é modelada aqui através de uma mola torsional conectada a um corpo rígido. Em outras palavras, a deflexão transversal do painel solar é substituída pela deflexão de uma mola torsional.

A órbita descrita pelo satélite é considerada circular e, portanto, a energia potencial gravitacional não influencia a dinâmica estudada. O movimento investigado ocorre totalmente no plano da órbita da Terra. O sistema de referência inercial está localizado no centro da Terra. Todos os termos não-lineares associados aos efeitos de Coriolis e centrípetos são considerados. Não se considera nenhum tipo de controle de atitude neste trabalho.

A Fig. (1) apresenta o modelo geométrico do satélite investigado.

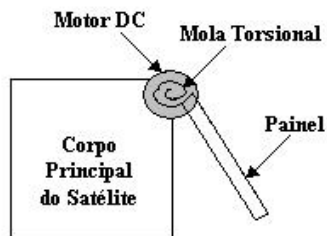


Figura 1. Modelo do satélite.

Dois tipos diferentes de abordagem podem ser utilizados na modelagem matemática da interação atuador-estrutura. A saber: ideal e não ideal (Kononenko, 1969).

Na abordagem ideal, a fonte de potência (motor DC, por exemplo) é considerada ilimitada. O atuador atua sobre a estrutura (painel solar, neste trabalho), modificando sua dinâmica. No entanto, a dinâmica da estrutura não influencia a dinâmica do motor. Nesse caso, a excitação é função apenas do tempo e seu perfil pode ser prescrito.

Na abordagem não ideal, a fonte de potência é considerada limitada. De acordo com esse modelo, a dinâmica do atuador é influenciada pela dinâmica da estrutura. Assim sendo, o perfil da excitação depende tanto do tempo quanto da dinâmica desconhecida da estrutura, não podendo, portanto, ser prescrita. Nesse caso, as equações governantes do atuador e as equações governantes da estrutura são dependentes uma da outra e devem ser integradas ao mesmo tempo.

## 2. EQUAÇÕES GOVERNANTES DO MOVIMENTO

A Fig (2) apresenta os sistemas de coordenadas utilizadas neste trabalho. A Tabela (1) discrimina todas as coordenadas generalizadas consideradas neste trabalho.

Tabela 1. Coordenadas generalizadas: nomenclatura.

Símbolo	Descrição
$\theta_1$	Posição angular do corpo principal do satélite em relação ao sistema de referência inercial, $X_i Y_i$
$\theta_2$	Posição angular final do painel solar ( $\theta_2 - \theta_3 = \text{deflexão}$ )
$\theta_3$	Posição angular do eixo do motor em relação ao sistema de referência local XY
$\alpha_1$	Ângulo de atitude do satélite em relação ao sistema de referência inercial, $X_i Y_i$

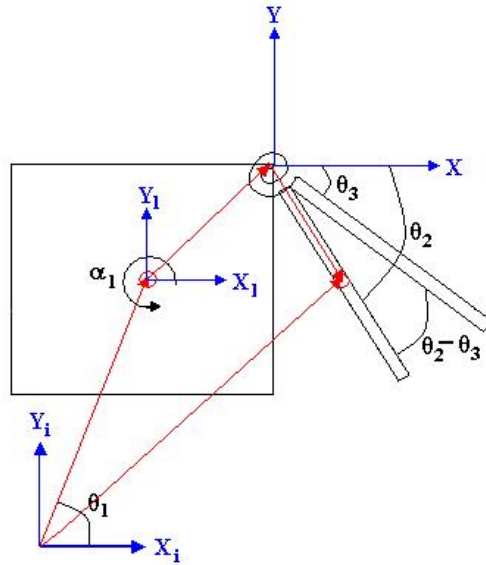


Figura 2. Sistemas de referência.

Na figura 2, a deflexão do painel é dada por  $\theta_2 - \theta_3$ .

A energia potencial armazenada no satélite é do tipo elástica. Essa energia está associada à deflexão do painel solar e é dada por:

$$V = \frac{1}{2} k_{mola} (\theta_2 - \theta_3)^2 \quad (1)$$

A energia cinética armazenada no satélite é dada por:

$$T = T_{corpo\ principal} + T_{painel} \quad (2)$$

onde:

$$T_{corpo\ principal} = \frac{1}{2} m_{sat} r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_{sat} \{\dot{\alpha}\}^T \cdot [I_{sat}] \cdot \{\dot{\alpha}\} \quad (3)$$

$$T_{painel} = \frac{1}{2} m_{painel} r_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_{painel} \{\dot{\theta}\}^T \cdot [I_{painel}] \cdot \{\dot{\theta}\} \quad (4)$$

onde  $m_{sat}$  representa a massa do corpo principal do satélite,  $m_{painel}$  representa a massa do painel,  $I_{sat}$  representa a matriz de inércia do corpo principal do satélite em relação aos eixos principais cuja origem situa-se no centro de massa do mesmo e  $I_{painel}$  representa a matriz de inércia do painel em relação aos eixos principais cuja origem situa-se no centro de massa do mesmo

Nas Eq. (3) e Eq. (4):

$$\{\dot{\alpha}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_1 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\{\dot{\theta}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$[I_{sat}] = \begin{bmatrix} I_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[I_{painel}] = \begin{bmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

As equações governantes do movimento são obtidas substituindo as expressões (1) e (2) nas equações de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (9)$$

onde:

$$L = T - V \quad (10)$$

e

$$q_i = \theta_1, \theta_2 \text{ e } \alpha_1$$

e são dadas por:

$$a_{11} \ddot{\theta}_1 + a_{12} \ddot{\theta}_2 + a_{13} \ddot{\alpha}_1 + c_{11} \dot{\theta}_2^2 + c_{12} \dot{\alpha}_1^2 + c_{13} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + c_{14} \dot{\alpha}_1 \dot{\theta}_1 + c_{15} \dot{\alpha}_1 \dot{\theta}_2 = \tau_1 \quad (11)$$

$$a_{21} \ddot{\theta}_1 + a_{22} \ddot{\theta}_2 + a_{23} \ddot{\alpha}_1 + c_{21} \dot{\theta}_1^2 + c_{22} \dot{\alpha}_1^2 + c_{23} \dot{\alpha}_1 \dot{\theta}_1 + k_{mola} (\theta_2 - \theta_3) = \tau_2 \quad (12)$$

$$a_{31} \ddot{\theta}_1 + a_{32} \ddot{\theta}_2 + a_{33} \ddot{\alpha}_1 + c_{31} \dot{\theta}_1^2 + c_{32} \dot{\theta}_2^2 + c_{33} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + c_{34} \dot{\alpha}_1 \dot{\theta}_2 = \tau_3 \quad (13)$$

A Eq. (11) representa a equação governante do movimento para a variável teta1, a Eq. (12) representa a equação governante do movimento para a variável teta2 e a Eq. (13) representa a equação governante do movimento para a variável alfa1.

Os coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{31}$ ,  $a_{32}$ ,  $a_{33}$  estão associados à matriz de massa do sistema completo, os coeficientes  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{31}$ ,  $c_{32}$  estão associados aos termos centrípetos e os coeficientes  $c_{13}$ ,  $c_{14}$ ,  $c_{15}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{34}$  estão associados aos termos de Coriolis. As expressões para cada um desses coeficientes encontram-se no Apêndice.

### 3. A MODELAGEM DA FONTE DE POTÊNCIA LIMITADA

O balanço de tensão elétrica (diferença de potencial) em um motor de corrente contínua controlado por armadura pode ser representado, de acordo com a Lei de Kirchoff, por:

$$L_m \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_b \dot{\theta}_{motor} = U \quad (14)$$

A somatória dos torques em relação ao eixo do motor fornece a equação mecânica do motor de corrente contínua controlado por armadura, representada por:

$$\tau_m = k_t i_a - c_m \dot{\theta}_{motor} - I_{motor} \ddot{\theta}_{motor} \quad (15)$$

Na Tab. (2), encontram-se os valores dos coeficientes das Eq. (14) e Eq. (15).

A opção por uma abordagem de sistema dinâmico ideal ou por uma abordagem de sistema dinâmico não-ideal (Kononenko, 1969) envolve considerações feitas na modelagem matemática com relação à representação do torque  $\tau_m$ , que indicará o acoplamento (ou não) entre motor e a estrutura. Esse torque é dado por:

$$\tau_m = k_{mola} (\theta_2 - \theta_3) \beta \quad (16)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro regulador (ou seja, se  $\beta=1$  obtém-se a condição necessária para o sistema não ideal e se  $\beta=0$  obtém-se a condição necessária para o sistema ideal).

Tabela 2. Especificações técnicas do motor

Descrição	Símbolo	Unidade	Valor
Tensão de armadura	U	V	1.500
Resistência da armadura	$R_a$	$\Omega$	1.100
Indutância do motor	$L_m$	H	$2.300 \cdot 10^{-3}$
Constante FEM	$k_b$	V.s/rad	$5.530 \cdot 10^{-2}$
Constante de torque do motor	$k_t$	N.m/A	$5.518 \cdot 10^{-2}$
Atrito interno ao motor	$c_m$	N.m s/rad	$6.752 \cdot 10^{-6}$
Inércia do motor	$I_{motor}$	Kg m <sup>2</sup>	$3.890 \cdot 10^{-5}$
Massa do motor	M	kg	5.800

#### 4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

As simulações numéricas foram realizadas considerando-se dois valores para a constante de rigidez da mola (aqui representando a flexibilidade do painel solar). Para cada uma dessas situações foram considerados o caso ideal e o caso não-ideal. As três fases citadas anteriormente são especificadas da seguinte maneira:

A primeira fase (correção da atitude) ocorre de 0 s a 10 s.

A segunda fase (abertura do painel) ocorre de 50 s a 90 s.

A terceira fase (após a abertura do painel) ocorre de 90 s a 150 s.

Nas simulações realizadas, observa-se que o deslocamento angular (orbital) do satélite,  $\theta_1$ , não excedeu  $10^\circ$  e a dinâmica da abertura do painel teve pouca influência neste comportamento.

A Fig. (3) mostra o perfil de tensão prescrito aplicado aos terminais do motor e o perfil de torque prescrito aplicado ao corpo principal do satélite com o intuito de corrigir a atitude antes do acionamento do motor. Essa correção se faz por meio de jatos localizados no corpo principal do satélite.

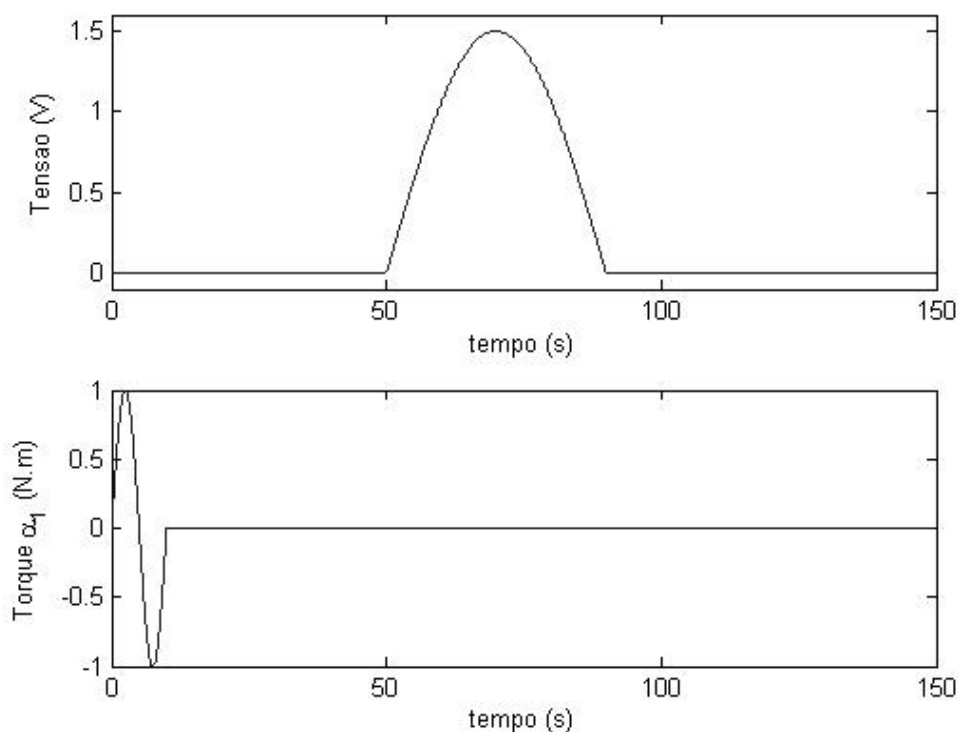


Figura 3. Perfis de tensão elétrica aplicada ao motor e de torque aplicado ao corpo principal do satélite

A Fig. (4) mostra o comportamento temporal do ângulo de atitude do satélite.

Figura (5) mostra o comportamento temporal da posição angular do eixo do motor. Quando se considera a abordagem não-ideal, esta posição varia mais rapidamente do que quando se considera a abordagem ideal. Na primeira abordagem, após a abertura do painel, o eixo do motor continuará recebendo alguma energia proveniente da vibração do painel (essa energia associada à deflexão do painel), conforme mostra a figura (região ampliada).

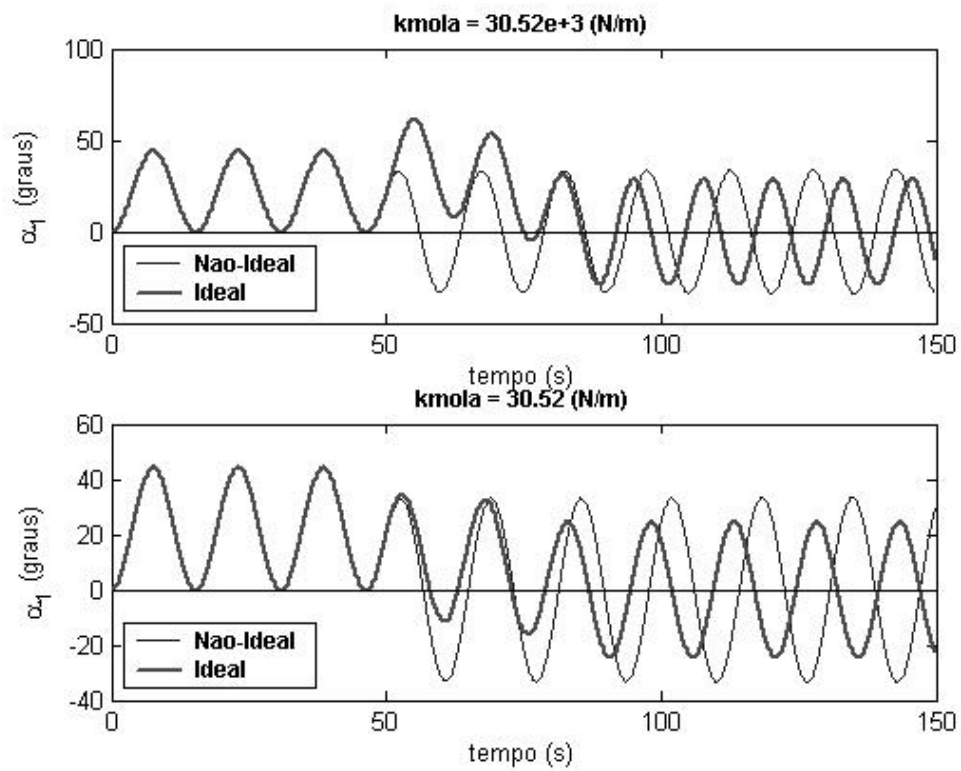


Figura 4. Ângulo de atitude,  $\alpha_1$

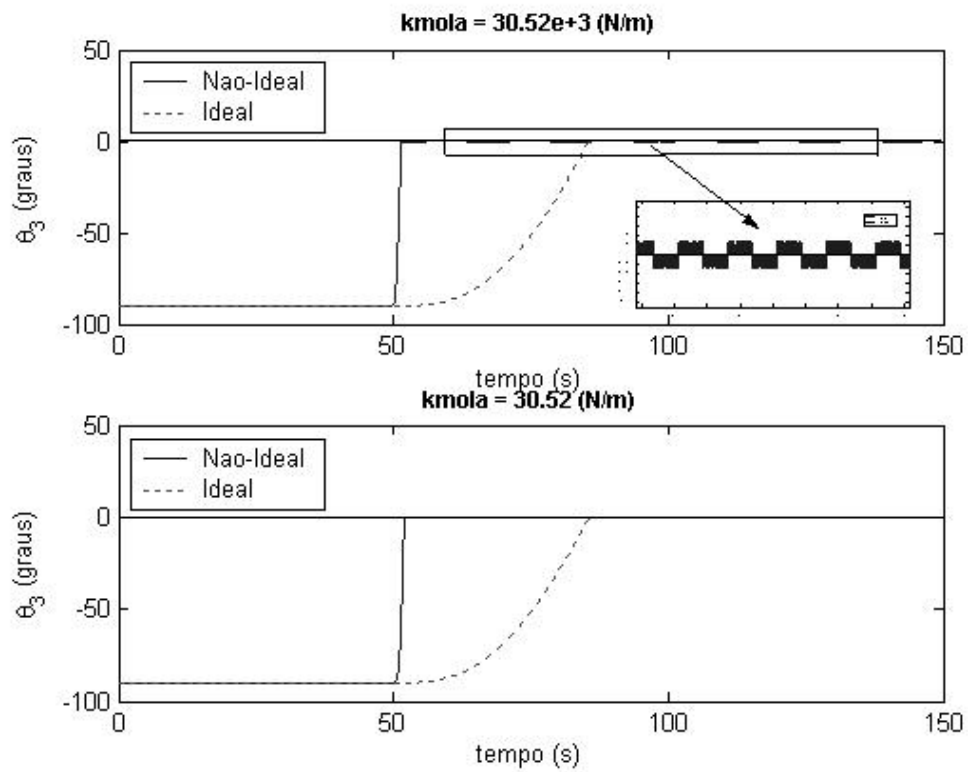


Figura 5 Posição angular do eixo do motor.

A Fig. (6) mostra a diferença entre a posição angular do eixo do motor e a posição final do painel, ou seja, a deflexão do painel (da mola).

Quando se considera a abordagem ideal, a amplitude e a frequência de vibração do painel são maiores que para o caso não ideal. Em outras palavras, o painel pode ser comparado neste caso com uma viga engastada em uma superfície muito rígida. Na abordagem não-ideal, a interação entre o atuador e a estrutura garante que a energia acumulada no painel seja absorvida pelo atuador, diminuindo a amplitude e a frequência da vibração (em relação ao sistema ideal).

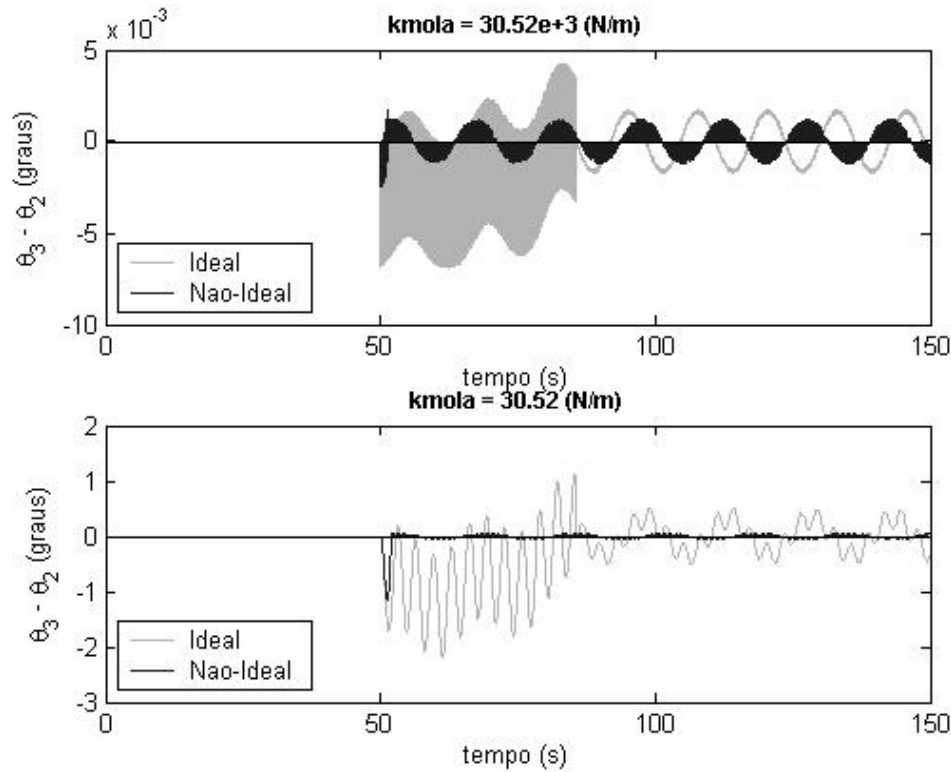


Figura 6. Deflexão do painel.

## 5. CONCLUSÕES

O deslocamento angular do satélite,  $\theta_1$ , associado a seu movimento orbital, não sofreu significativa influência da dinâmica da abertura do painel (segundo os parâmetros considerados).

Observou-se que a frequência e a amplitude de vibração do painel para o caso ideal são maiores que essas mesmas quantidades para o caso não ideal, sob as mesmas condições.

Para o sistema não ideal, o comportamento dinâmico do painel afeta o comportamento dinâmico do motor, fazendo com que o deslocamento angular do eixo do motor atinja a posição desejada (para a abertura do painel) mais rapidamente do que para o caso ideal, aonde o motor não sofre qualquer influência da dinâmica do painel. Os resultados para  $\theta_1$  e suas derivadas mostrados aqui para o caso ideal apresentam apenas o comportamento dinâmico do motor como sistema independente (desacoplado do painel).



## 6. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor gostaria de agradecer a Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e o segundo autor gostaria de agradecer a FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo suporte dado para a realização desta pesquisa.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Fenili, A. and Porro, J. R. S., "Modeling and Numerical Simulation of Nonlinear Dynamics in Satellite Solar Array Deployment", Proceedings of the X DINAME, March 2003, pp. 405-409.
- Kononenko, V. O.: *Vibrating Systems with a Limited Power Supply*, Iliffe Books Ltd., 1969.
- Meirovitch, L. and Calico, R. A., "Stability of Motion of Force-Free Spinning Satellites with Flexible Appendages", J. Spacecraft, Vol. 9, NO. 4, April 1972, pp. 237-245.
- Porro, J. R. S., "Dinâmica de Atitude de um Satélite Artificial Considerando a Abertura de um Painel Solar", II Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, CONEM, August 2002.
- Porro, J. R. S., "Estudo da Dinâmica de Um Satélite Artificial Considerando Abertura do Painel Solar", Master Thesis, INPE, 2002, 195p.
- Roberson, R. E., "Two Decades of Spacecraft Attitude Control", J. Guidance and Control, Vol. 2, NO. 1, Jan.-Feb. 1979, pp. 3-8.
- Thomson, W. T. and Reiter, G. S., "Attitude Drift of Space Vehicles", The Journal of the Astronautical Sciences, 1960, pp.29-34.
- Wie, B., Furumoto, N. and Banerjee, A.K., "Modeling and Simulation of Spacecraft Solar Array Deployment", Journal of Guidance and Control, Vol. 9, Sept.-Oct. 1986, pp. 593-598.
- Wie, B., Space vehicle dynamics and control, Reston: AIAA Education Series, 1998, 661p.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## 9. APÊNDICE

$$a_{11} = m_{painel}(b^2 + q^2) + (m_{painel} + m_{sat})r^2 + (2m_{painel}(bq \cos \theta_2 + qr \cos \alpha_1 + br \cos(\theta_2 + \alpha_1)))$$

$$a_{12} = b m_{painel} (b + (q \cos \theta_2 + r \cos(\theta_2 + \alpha_1)))$$

$$a_{13} = m_{painel}(b^2 + q^2) + (2bq \cos \theta_2 + qr \cos \alpha_1 + br \cos(\theta_2 + \alpha_1))$$

$$a_{21} = b m_{painel} (b + (q \cos \theta_2 + r \cos(\theta_2 + \alpha_1)))$$

$$a_{22} = I_{z_{painel}} + b^2 m_{painel}$$

$$a_{23} = b m_{painel} (b + q \cos \theta_2)$$

$$a_{31} = m_{painel}(b^2 + q^2 + (2bq \cos \theta_2 + qr \cos \alpha_1 + br \cos(\theta_2 + \alpha_1)))$$

$$a_{32} = b m_{painel} (b + (q \cos \theta_2))$$

$$a_{33} = I_{z_{sat}} + m_{painel}(b^2 + q^2) + (2b m_{painel} q \cos \theta_2)$$

$$c_{11} = -m_{painel} r (q \sin \alpha_1 + b \sin(\theta_2 + \alpha_1))$$

$$c_{12} = -2b m_{painel} (q \sin \theta_2 + r \sin(\theta_2 + \alpha_1))$$

$$c_{13} = -b m_{painel} (q \sin \theta_2 + r \sin(\theta_2 + \alpha_1))$$

$$\begin{aligned}
c_{14} &= -2m_{painei} r (q \sin \alpha_1 + b \sin(\theta_2 + \alpha_1)) \\
c_{15} &= -2b m_{painei} (q \sin \theta_2 + r \sin(\theta_2 + \alpha_1)) \\
c_{21} &= b m_{painei} q \sin \theta_2 \\
c_{22} &= 2b m_{painei} q \sin \theta_2 \\
c_{23} &= b m_{painei} (q \sin \theta_2 + r \sin(\theta_2 + \alpha_1)) \\
c_{31} &= m_{painei} r (q \sin \alpha_1 + b \sin(\theta_2 + \alpha_1)) \\
c_{32} &= -2b m_{painei} q \sin \theta_2 \\
c_{33} &= -2b m_{painei} q \sin \theta_2 \\
c_{34} &= -b m_{painei} q \sin \theta_2
\end{aligned}$$

## MATHEMATICS MODELING OF A SATELLITE CONSIDERING THE DEPLOYMENT OF A SOLAR ARRAY: IDEAL AND NO-IDEAL APPROACH

**José Ricardo Soria Porro**

Divisão de Mecânica Espacial e Controle (DMC) - INPE

Av. dos Astronautas, 1758 – Cx Postal 515 – São José dos Campos - SP

[jricks@uol.com.br](mailto:jricks@uol.com.br)

**André Fenili**

Divisão de Mecânica Espacial e Controle (DMC) - INPE

Av. dos Astronautas, 1758 – Cx Postal 515 – São José dos Campos - SP

[fenili@dem.inpe.br](mailto:fenili@dem.inpe.br)

**José Manoel Balthazar**

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computacional

UNESP - Rio Claro –SP

[jmbaltha@rc.unesp.br](mailto:jmbaltha@rc.unesp.br)

*Abstract. The satellite investigated in this work is composed by two parts: a main body and a flexible solar panel. All nonlinear terms are kept on the analysis while the satellite develops a circular orbit around the earth. The mathematical model is derived through the Lagrangian formalism and the resulting governing equations of motion are numerically integrated using a fourth order Runge-Kutta. A DC motor is used for the solar array deployment. Two different approaches are considered regarding the interaction between the panel and the actuator: in the first one the DC motor is treated like an ideal energy source and in the second one, the same DC motor is treated like a nonideal energy source. The second approach is more realistic.*

*Keywords. rigid body dynamics, solar array deployment, ideal system, nonideal system.*