

# **PROJETO E CONSTRUÇÃO DO CONTROLADOR DE UM PÊNDULO INVERTIDO**

**Marcos Mac-Dowell Prehs de Oliveira**

PGMEC, UFF, r. Passo da Pátria/RJ, 24210-240, mmd\_nit@yahoo.com

**Rodrigo Costa de Oliveira**

PGMEC, UFF, r. Passo da Pátria/RJ, 24210-240, rodrigoengenharia@hotmail.com

**Roberto Firmento de Noronha**

PGMEC, UFF, r. Passo da Pátria/RJ, 24210-240, rnoronha@mec.uff.br

**José Andrés Santisteban Larrea**

PGMEC, UFF, r. Passo da Pátria/RJ, 24210-240, jasl@mec.uff.br

**Resumo.** No Brasil, há poucos anos atrás, surgiu uma importantíssima área dentro da engenharia: a mecatrônica, que faz a fusão de conhecimentos de engenharia elétrica e eletrônica aos conhecimentos da engenharia mecânica. Com o surgimento desta nova e promissora área da engenharia, torna-se necessário a esse profissional o domínio da teoria de controle, o que possibilita a modelagem matemática para os diversos sistemas mecânicos bem como o projeto do sistema de controle para os mesmos e uma razoável base de eletrônica para permitir a implementação de controladores para os diferentes sistemas mecânicos. Os conhecimentos de controle e eletrônica são abordados nesse trabalho de cunho didático, mas de grande complexidade, através do projeto de um sistema de controle para um pêndulo invertido. Este artigo apresenta a modelagem matemática bem como o procedimento de projeto e implementação física do controle em malha fechada utilizado no protótipo.

**Palavras-chave:** pêndulo invertido, controle de sistemas mecânicos, sensor ótico.

## **1. INTRODUÇÃO:**

O pêndulo invertido é um equipamento clássico, não só para o ensino, mas também para o teste de técnicas de controle aplicadas a sistemas mecânicos.

Consiste em uma haste com uma massa na sua extremidade superior e conectada através de uma rótula na sua outra extremidade a um carrinho, que anda sobre trilhos paralelos entre si. Tem-se assim um sistema de dois graus de liberdade sendo um o deslocamento horizontal do carrinho e o outro o deslocamento angular da haste no plano vertical. Trata-se, desse modo, de um sistema instável, já que o pêndulo tende a cair por influência da gravidade. Entretanto, este sistema pode ser estabilizado aplicando-se uma força horizontal ao carrinho, fazendo a haste ficar na vertical. Para se conseguir isto, a posição do pêndulo é monitorada através de um sensor e o controlador atua ajustando a tensão elétrica fornecida a um motor, que ao variar o seu torque faz com que varie também a força horizontal atuante sobre o carrinho.

Foi construído um protótipo de um pêndulo invertido, onde o deslocamento horizontal do carrinho é realizado através de um sistema de polias, das quais uma é acionada por um motor CC, conforme apresentado na Fig. 1. O controlador foi implementado através de circuitos de eletrônica analógica, utilizando-se um sensor ótico para determinar a posição angular da haste e fechar, desta

forma, a malha de controle. Neste trabalho é descrito o projeto, a montagem e os resultados alcançados com o controlador. Mas antes é apresentado um levantamento bibliográfico sobre o assunto.

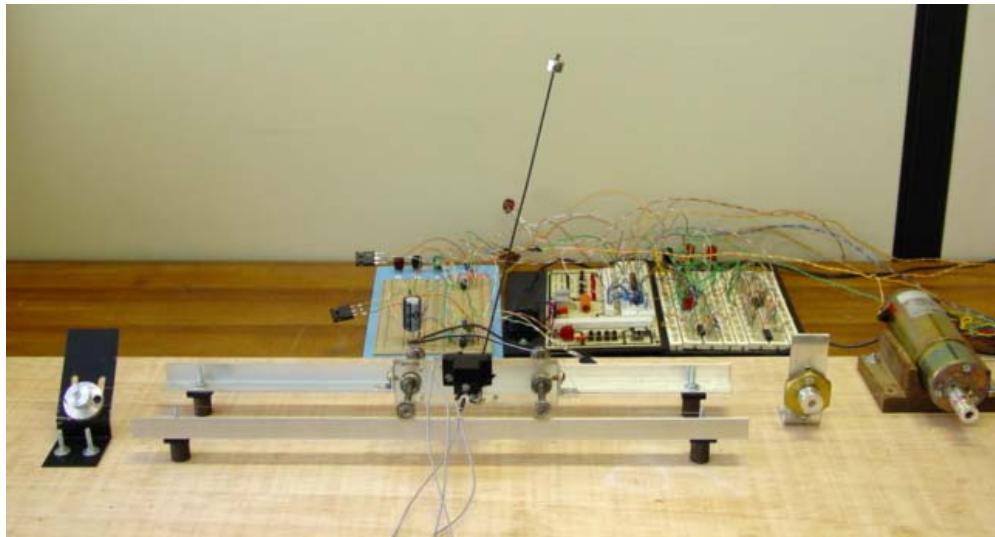


Figura 1. Protótipo do pêndulo invertido

## 2. LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO:

Tem-se, inicialmente, o trabalho de Jianqiang et al. (2002), que utilizaram um pêndulo invertido duplo em paralelo, conforme esquematizado na Fig. (2), para testar a eficiência de um novo controlador *fuzzy* desenvolvido por eles. O controlador possui 6 itens de entrada e um item de saída, sendo baseado, no entanto, na regra de módulos de uma entrada (SIRM). Cada item de entrada é relacionado com uma SIRM e um grau de importância dinâmica. Este controlador é capaz de executar três controles em paralelo: um controle para o deslocamento linear do carro, um segundo controle para o deslocamento angular do pêndulo menor e um terceiro controle para o deslocamento angular do pêndulo maior. Neste trabalho foram realizadas simulações para comprovar que este controle estabiliza o sistema.

Por sua vez, Awtar et al. (2002), para a parte aplicada de um curso de mecatrônica, desenvolveram duas variações do tema: um pêndulo rotativo e um pêndulo dirigido por um braço, também mostrados na Fig. (2), para os quais obtiveram a modelagem matemática, o projeto do controlador e a implementação do sistema de controle.

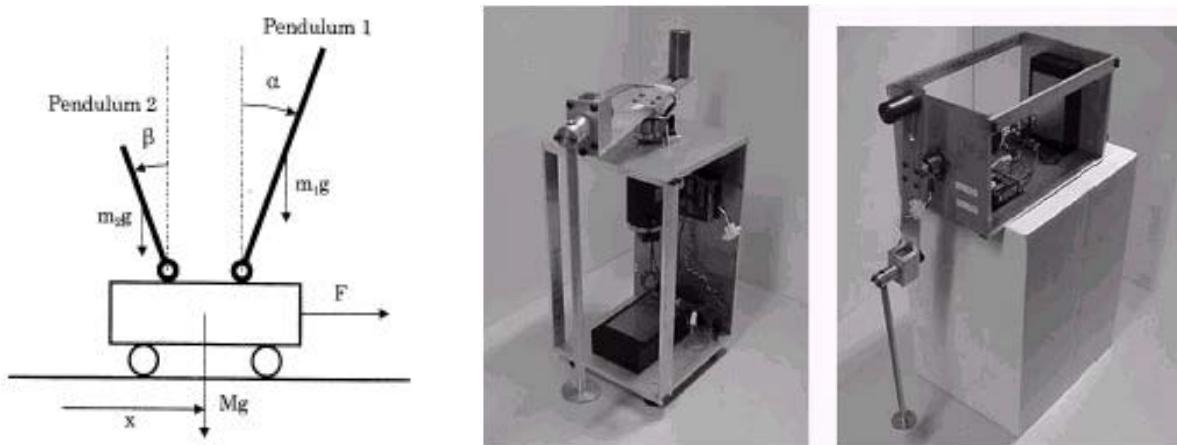


Figura 2. esq.: Pêndulo duplo em paralelo (Jianqiang et al.,2002);  
centro e dir.: Variações de Pêndulos (Awtar et al., 2002)

Na primeira configuração, tem-se um braço no plano horizontal que é conectado a um motor que o faz girar no plano horizontal, o que faz com que o pêndulo que está conectado a este braço possa girar livremente em um plano vertical. Já na segunda configuração, o braço e o pêndulo estão ambos em um plano vertical, sendo que o braço está conectado a um motor. Desse modo, quando o motor gira, o braço e o pêndulo que está conectado a ele têm liberdade para girar ao longo de um plano vertical.

Já Bucklaew e Liu (2001) examinaram a vibração de um sistema físico quando ele era excitado através do movimento de sua base, sendo este movimento manipulado por um controlador simples do tipo derivativo (PD). O objetivo deste trabalho era controlar a vibração de um sistema físico quando este era excitado. O sistema físico a ser controlado, isto é, a planta, foi modelado como um pêndulo invertido. Como pode ser observado na Fig. (3-esq.), o problema foi modelado como um pêndulo invertido duplo, sendo o sistema físico representado pela haste superior e a excitação do sistema físico representada pelo deslocamento angular da haste inferior.

Granata e Wilson (2001) desenvolveram um modelo biomecânico para avaliar a influência da postura na estabilidade da espinha do corpo humano. Este modelo, que aborda a espinha humana como um pêndulo invertido duplo, como mostrado na Fig. (3-dir.), foi utilizado para determinar o carregamento e a estabilidade da espinha. A entrada do modelo inclui a postura do tronco e uma massa suspensa pelo corpo, já a saída inclui os músculos necessários para garantir a estabilidade da espinha e o carregamento da espinha.

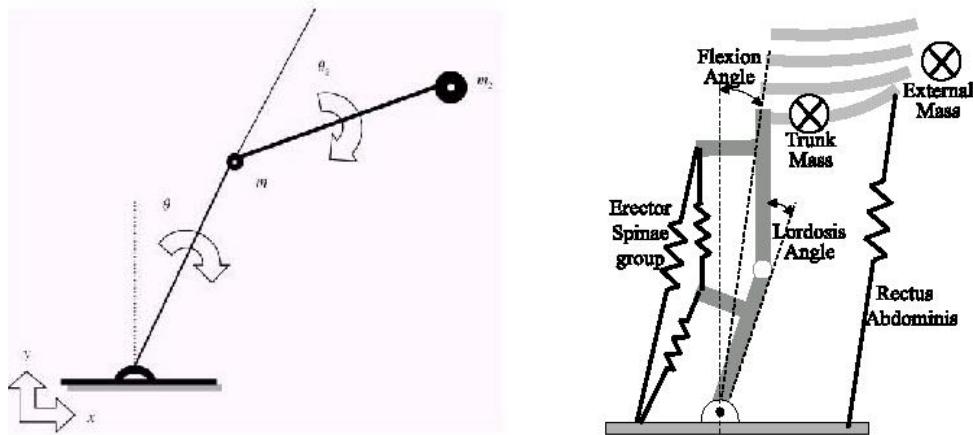


Figura 3. esq.:Pêndulo invertido duplo (Bucklaew e Liu, 2001)  
dir.: Modelo da espinha (Granata e Wilson, 2001)

Tong e Li (2002) desenvolveram um controlador *fuzzy* para sistemas não-lineares onde há presença de incertezas e variáveis de estado que não são passíveis de medição. Para se testar a eficiência do controlador *fuzzy* foram realizadas simulações numéricas utilizando um pêndulo invertido simples, equivalente ao da Fig. (1). Schaocheng e Li (2001) também utilizaram um pêndulo invertido simples para avaliar a eficácia de um controlador *fuzzy* para sistemas não-lineares com incertezas parametrizadas. O pêndulo invertido simples foi ainda utilizado por Yubazaki (2002) para testar um controlador *fuzzy* baseado nas regras de módulos de uma entrada (SIRMs). Este controlador que era composto de 4 entradas tinha a capacidade de controlar simultaneamente o deslocamento angular da haste e o deslocamento angular do carrinho.

Por sua vez, Wu et al. (2002) utilizaram um pêndulo também excitado pela base para testar um controlador baseado em redes neurais. Este pêndulo, no entanto, possuía dois graus de liberdade rotacionais e 3 graus de liberdade de translação. O algoritmo de controle testado possuía um conjunto de redes neurais que era capaz de compensar as não-linearidades do sistema.

Spong et al. (2001) desenvolveram um protótipo de pêndulo invertido, denominado *reaction wheel pendulum*, que consiste de um pêndulo com uma rótula, conforme mostrado na Fig. (4-esq.). Assim como outros, eles utilizaram o protótipo para avaliar o desempenho do algoritmo de controle.

Yavin (1999) desenvolveu um protótipo de um pêndulo invertido rotacional, mostrado na Fig. (4-dir.), com o objetivo de realizar uma modelagem matemática para o sistema e posteriormente encontrar uma lei de controle que estabilize o movimento do pêndulo no plano vertical. O protótipo consiste de um braço giratório no plano horizontal, que é ligado perpendicularmente a um eixo de motor em uma de suas extremidades e na extremidade oposta é montada uma rótula à qual está fixado um pêndulo. Desse modo, quando o motor é ligado, o braço horizontal gira num plano horizontal fazendo com que o pêndulo gire em torno do eixo deste braço horizontal.

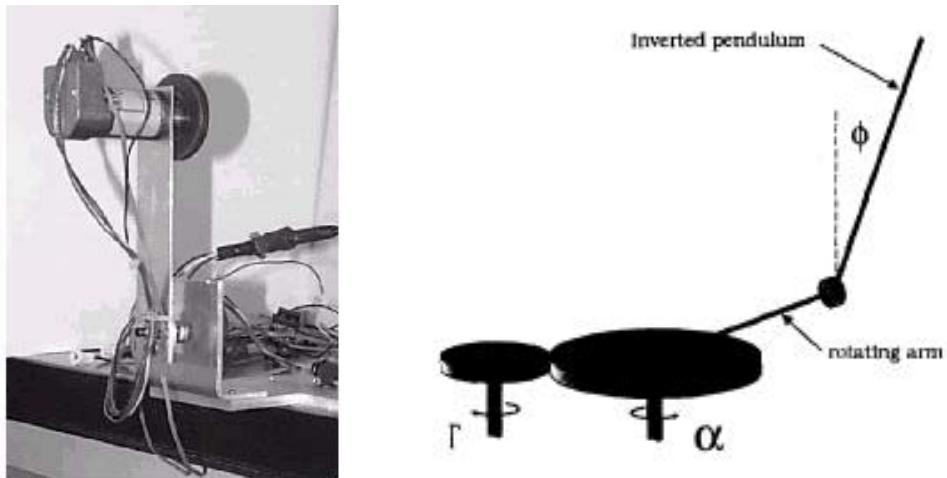


Figura 4. esq.: Pêndulo de Roda de Reação (Spong et al., 2001)  
dir.: Pêndulo Invertido Rotacional (Yavin, 1999)

Cheng et al. (2002) utilizaram um pêndulo invertido duplo com o objetivo de projetar um controlador que tivesse alta precisão e alta resolução. Para tanto, foi desenvolvido um controlador do tipo *fuzzy*, utilizando um computador para estabilizar o pêndulo duplo ao longo de um plano vertical. Na Fig. (5) é apresentado um esquema do sistema de controle.

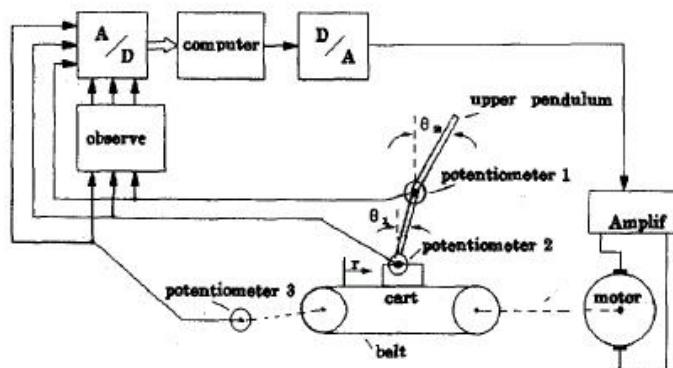


Figura 5. Sistema de controle de um pêndulo duplo (Cheng et al., 2002)

Voltando ao pêndulo invertido simples, ele foi utilizado por Chang et al. (2002), para testar um controlador do tipo integrativo derivativo (PID) auto-ajustável, e por Xiong e Litz (2002), para avaliar um controlador que se baseia em algoritmos genéticos.

Tem-se assim que um levantamento bibliográfico, não-exaustivo, aponta 13 exemplos de aplicações de pêndulo, dos quais cinco utilizando o pêndulo invertido simples e o restante, variações deste. Algumas aplicações apresentadas têm finalidade didática, outras de representação e modelagem de sistemas que se comportam de maneira similar, mas, em geral, são de avaliação de desempenho de diferentes técnicas de controle.

### 3. MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem do pêndulo invertido é encontrada em livros textos de teoria de controle, tais como os de Ogata (1990) e Bélanger (1995). Para o protótipo em questão, ela é apresentada por Oliveira et al. (2002). Tem-se as Eq. (1), que descrevem a dinâmica do sistema mecânico, as Eq. (2), responsáveis pela descrição da resposta do motor C.C., e as Eqs. (3), que correlacionam os dois conjuntos de equações entre si:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \dot{\theta}^2 &= F \\ \ddot{x} \cos \theta + l\ddot{\theta} - g \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{i} &= -\frac{Ri}{L_a} - \frac{k_e N \dot{\theta}_e}{L_a} + \frac{v}{L_a} \\ \ddot{\theta}_e &= \frac{N k_t i}{J_e} - \frac{T_l}{J_e} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} T_l &= F \cdot r \\ x &= \theta_e \cdot r \end{aligned} \quad (3)$$

Onde

M	- massa do carrinho	m	- massa na extremidade da haste
x	- deslocamento do carrinho	$\theta$	- deslocamento angular da haste
l	- comprimento da haste	F	- força aplicada ao carrinho
g	- aceleração da gravidade	N	- razão de redução da caixa
i	- corrente elétrica passando pelo motor	v	- tensão elétrica aplicada ao motor
$k_e$	- constante da FCEM do motor	$k_t$	- constante de torque do motor
R	- resistência da armadura do motor	$L_a$	- indutância da armadura do motor
$\theta_e$	- ângulo de rotação do eixo de saída da caixa de redução		
$T_l$	- torque útil fornecido pelo conjunto motor - caixa de redução		
$J_e$	- momento de inércia polar efetivo em relação ao eixo de saída da caixa.		
r	- raio da polia fixada no eixo de saída da caixa de redução		

Juntando-se as equações (1), (2) e (3), obtém-se o modelo não linear da planta, dadas pelas Eq.(4), e linearizando-as em torno da posição de equilíbrio, pode-se obter as equações de estado para o modelo linear da planta, Eq. (5):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{(ml \sin \theta) \dot{\theta}^2 - mg \sin \theta \cos \theta + (N k_t i / r)}{M + m \sin^2 \theta + (J_e / r^2)} \\ \ddot{\theta} &= \frac{(M + m + (J_e / r^2)) g \sin \theta - (ml \sin \theta \cos \theta) \dot{\theta}^2 - (N k_t i \cos \theta) / r}{l(M + m \sin^2 \theta + (J_e / r^2))} \\ \dot{i} &= -\frac{N k_e}{L_a r} \dot{x} - \frac{R}{L_a} i + \frac{v}{L_a} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-mqr^2}{Mr^2 + J_e} & 0 & 0 & \frac{Nk_t r}{Mr^2 + J_e} \\ 0 & \frac{(Mr^2 + mr^2 + J_e)g}{l(Mr^2 + J_e)} & 0 & 0 & \frac{-Nk_t r}{l(Mr^2 + J_e)} \\ 0 & 0 & -\frac{Nk_e}{L_a r} & 0 & \frac{-R}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} v \quad (5)$$

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + [0]v$$

#### 4. PROJETO DE CONTROLE:

##### 4.1. Implementação do Controlador:

A partir das equações de estado, Eq. (5), e da seleção do motor adequado, determina-se a função de transferência da planta,  $G_p(s)$ , dada pela Eq. (6), a qual possui cinco pólos (-420; -211; -23; 0; 23) e quatro zeros ( $-2,73 \times 10^8$ ;  $2,73 \times 10^8$  e dois zeros na origem):

$$G_p(s) = \frac{-9,095 \times 10^{-13} s^4 - 2,328 \times 10^{-10} s^3 + 6,803 \times 10^4 s^2 - 2,235 \times 10^{-7} s}{s^5 + 631,2 s^4 + 8,814 \times 10^4 s^3 - 3,42 \times 10^5 s^2 - 4,804 \times 10^7 s} \quad (6)$$

Em seguida, foi necessário desenvolver outra função de transferência para o controlador, pois a apresentada em Oliveira et al. (2002) não estava apresentando os resultados esperados. Assim, para estabilizar o sistema foram adicionados três pólos (dois na origem e um em -1000) e três zeros: -5; -25 para anular o efeito do pólo em -23 da planta e -212 para anular o efeito do pólo em -211 da planta. Foi escolhido um ganho crítico,  $k_c$ , de 609, o que fornece um sistema de fase não-mínima com um zero no semiplano direito do plano s. A partir dos pólos e zeros adicionados para estabilizar o sistema e do ganho crítico selecionado, chegou-se à função de transferência para o controlador,  $G_c(s)$ , dada pela Eq. (7):

$$G_c(s) = \frac{609 \cdot (s + 25)(s + 212)(s + 5)}{s^2(s + 1000)} \quad (7)$$

A função de transferência para o controlador, Eq. (7), pode ser reproduzida fisicamente através de um circuito baseado em amplificadores operacionais. Depois de obtidas as funções de transferência para vários filtros, foi realizada uma combinação de 4 filtros em série, de modo que multiplicando-as em cascata, fornecessem um número de pólos e zeros igual ao da função de transferência do controlador (três zeros e três pólos, sendo dois zeros na origem). O diagrama deste circuito é apresentado na Fig. (6):

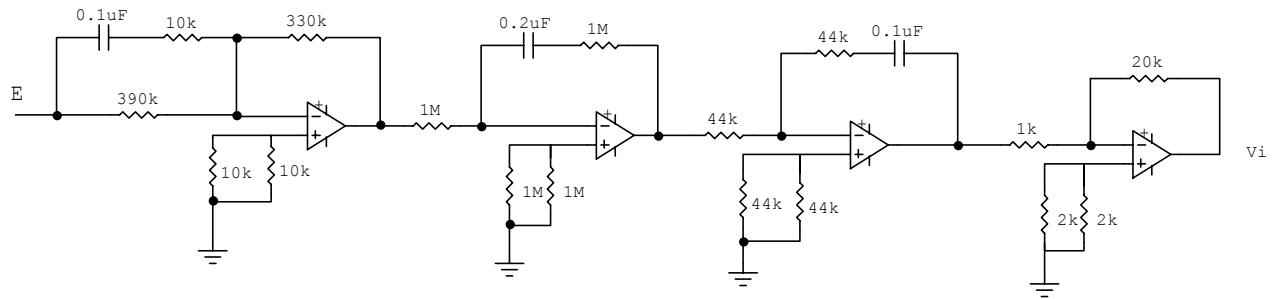


Figura 6. Diagrama do circuito eletrônico do controlador

#### 4.2. Implementação do Sensor Ótico

Para o sensoriamento da posição da haste, decidiu-se utilizar um sistema ótico composto de um par de dispositivos fotoelétricos, onde um LED infravermelho funciona como fonte luminosa, cuja intensidade pode ser considerada constante. Pode-se também considerar que a corrente no coletor do foto-transistor será proporcional à intensidade de luz incidente sobre ele. Foi confeccionado o anteparo para o sensor ótico com as dimensões mostradas na Fig.(7-esq.), utilizando uma chapa de alumínio de 2mm de espessura.

As dimensões deste anteparo foram definidas de modo a garantir que quando o pêndulo estivesse na vertical, a metade da área do foto-transistor estaria iluminada. Para evitar o escorregamento do anteparo ao longo da extensão do eixo do pêndulo foram também confeccionados dois pequenos cilindros que continham um furo com diâmetro de 6,3mm e outro furo perpendicular a este, para a entrada de parafusos. Os cilindros foram montados no eixo anteriormente mencionado de modo a prender o anteparo do sensor, evitando assim seu deslizamento ao longo do eixo. Os parafusos utilizados aqui tinham como objetivo uma melhor fixação dos cilindros no eixo.

Terminada a etapa de construção do sensor ótico, passou-se para a definição do circuito eletrônico do mesmo. Depois de alguns testes em laboratório, definiu-se o circuito eletrônico que é mostrado na Fig.(7-dir.):

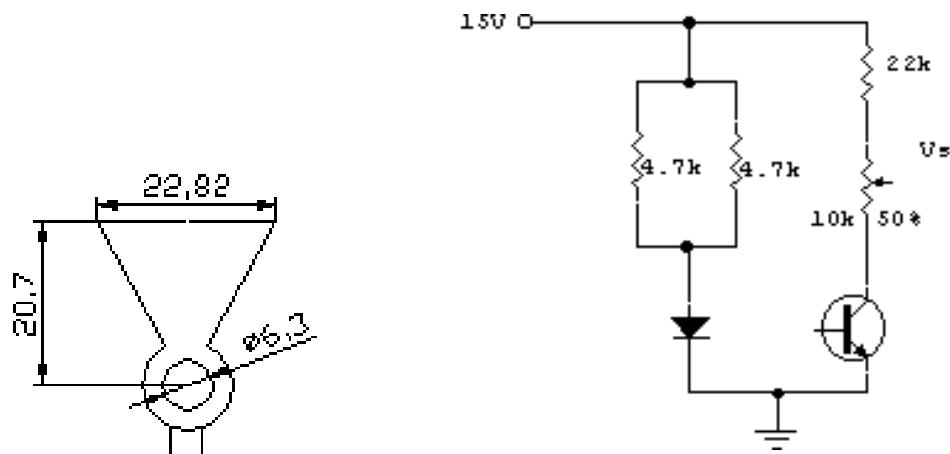


Figura 7. esq.: Anteparo para o sensor. dir.: Circuito eletrônico do sensor

Observando a figura, pode-se notar que duas resistências em paralelo de 4,7k estão em série com o LED. E em série com o foto-transistor receptor estão uma resistência de 22k e um potenciômetro de 10k. Este potenciômetro é utilizado com o objetivo de se ajustar a tensão no coletor quando o pêndulo está na vertical, isto é, garantir uma tensão de 7,5v para esta posição, haja visto que o conjunto é alimentado por uma tensão de 15v.

Depois de definido e montado o circuito eletrônico do sensor, passou-se à etapa de levantamento da curva do sensor, isto é, a curva tensão no coletor versus deslocamento angular do pêndulo, que fornece o ganho do sensor. Para a obtenção desta curva foram utilizados um transferidor, para o registro da posição angular, e um multímetro, para a medição da tensão elétrica no coletor. Antes de iniciar as medições, calibrou-se o sensor ótico, isto é, com o pêndulo na posição vertical, calibrou-se o anteparo de modo que o multímetro registrasse 7,5v nesta situação. Terminada a calibração, foram realizadas 21 medições de diferentes ângulos para o pêndulo variando de -10 a 10 graus. Para cada valor destes deslocamentos angulares foram realizadas três diferentes medidas de tensões registradas no coletor. Com isso, obteve-se o gráfico da curva do sensor, que é mostrada na Fig.(8).

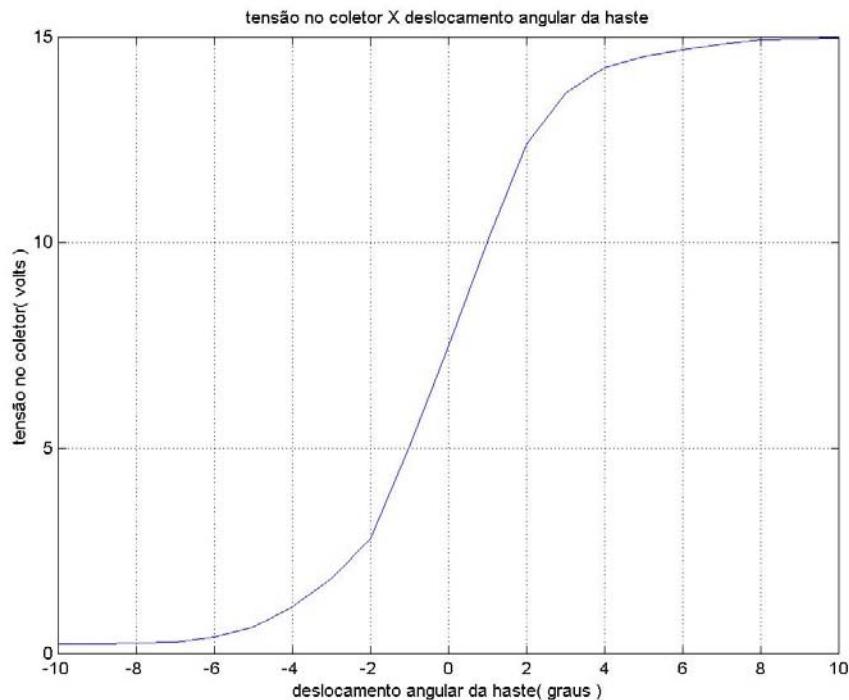


Figura 8. Curva de resposta do sensor

Para o trecho linear da curva acima plotada, que está compreendido entre -3 e 3 graus, verificou-se que o coeficiente angular da curva era igual a 2,129 V/grau. Este valor fornece o ganho do sensor, isto é, a relação entre a tensão do coletor e o deslocamento angular da haste.

Por fim, o diagrama de blocos da malha fechada é ilustrado na Fig.(9):

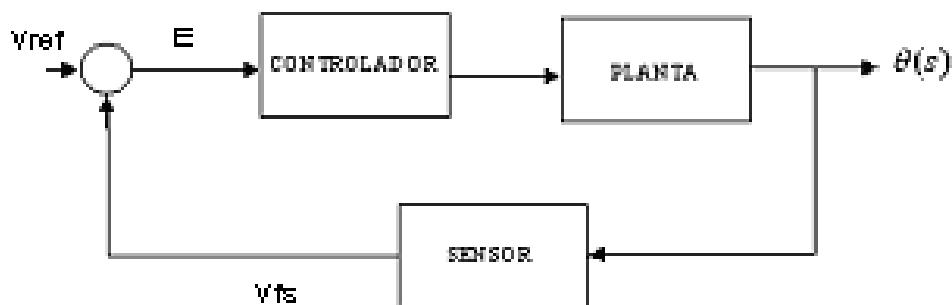


Figura 9. Malha fechada

## **5. CONCLUSÕES:**

Foi montado um protótipo de um pêndulo invertido simples, controlado analogicamente. Esta forma de controle, apesar de eficiente, apresenta uma limitação característica de sua simplicidade, pois o registro dos sinais de entrada e da resposta precisa ser implementado à parte. Presentemente, se está considerando a aquisição desses sinais para permitir a identificação experimental das características da planta.

Um levantamento bibliográfico, realizado concomitantemente, mostrou que o dispositivo, seja na sua forma original, seja de uma forma modificada, é extensivamente utilizado. Algumas aplicações encontradas têm finalidade didática, outras de representação e modelagem de sistemas que se comportam de maneira similar, mas, em geral, são de avaliação de desempenho de diferentes técnicas de controle.

## **6. AGRADECIMENTOS:**

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq pela concessão de bolsas que tornaram possível este projeto.

## **7. REFERÊNCIAS:**

- Awtar, S. et al., 2002, "Inverted Pendulum Systems: Rotary and Arm-driven – A Mechatronic System Design Case Study", *Mechatronics*, Vol. 12, pp. 357-370.
- Bélanger, P.R., 1995, "Control Engineering - A Modern Approach", Saunders College Pub., EUA.
- Bucklaew, T.P. e Liu, C.S., 2001, "Pitchfork – Type Bifurcations in a Parametrically Excited, PD-Controlled Pendulum or Manipulator", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 247 pp. 655-672.
- Chang, W. et al., 2002, "A Self-tuning PID Control for a Class of Nonlinear Systems Based on the Lyapunov Approach", *Journal of Process Control*, Vol. 12, pp. 233-242.
- Cheng, F. et al., 1996, "Fuzzy Control of a Double-inverted Pendulum", *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 79, pp. 315-321.
- Granata, K.P. e Wilson, S.E., 2001, "Trunk Posture and Spinal Stability", *Clinical Biomechanics* Vol. 16, pp. 650-659.
- Jianqiang, Yi et al., 2002, A New Fuzzy Controller for Stabilization of Parallel-type Double Inverted Pendulum System", *Fuzzy Sets and Systems* , Vol. 126, pp. 105-119.
- Ogata, K., 1990, "Modern Control Engineering", 2<sup>a</sup>ed., Prentice-Hall Int., Nova Iorque.
- Oliveira, R.C., Noronha, R.F., Santisteban, J.A. e Lima, L.T.G., 2002, "Modelagem Matemática e Projeto de Controle de Sistemas Mecânicos - O Pêndulo Invertido", II Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM 2002, João Pessoa/Pb, anais em CDROM.
- Spong, M.W. et al., 2001, "Nonlinear Control of Reaction Wheel Pendulum", *Automatica*, Vol. 37, pp. 1845-1851.
- Tong, S. e Li, H., 2002, "Observer-based Robust Fuzzy Control of Nonlinear Systems with Parametric Uncertainties", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 131, pp.165-184.
- Wu, Q. et al., 2002, "Neural Inverse Modeling and Control of a Base-excited Inverted Pendulum", *Engineering Applications for Artificial Intelligence*, Vol. 15, pp. 261-272.
- Xiong, N. e Litz, L., 2002, "Reduction of Fuzzy Control Rules by Means of Premise Learning – Method and Case Study", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 132, pp. 217-231.
- Yavin, Y., 1999, "Control of a Rotary Inverted Pendulum", *Applied Mathematics Letters*, Vol. 12, pp. 131-134.

## **8. DIREITOS AUTORAIS:**

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído neste trabalho.

# **DESIGN AND MOUNTING OF AN INVERTED PENDULUM CONTROLLER**

**Marcos Mac-Dowell Prehs de Oliveira**

PGMEC, UFF, r. Passo da Pátria/RJ, 24210-240, mmd\_nit@yahoo.com

**Rodrigo Costa de Oliveira**

PGMEC, UFF, r. Passo da Pátria/RJ, 24210-240, rodrigoengenharia@hotmail.com

**Roberto Firmento de Noronha**

PGMEC, UFF, r. Passo da Pátria/RJ, 24210-240, rnoronha@mec.uff.br

**José Andrés Santisteban Larrea**

PGMEC, UFF, r. Passo da Pátria/RJ, 24210-240, jasl@mec.uff.br

***Abstract.** In Brazil, few years ago, appeared a very important area inside of engineering: the mechatronics, which merges the knowledge of electric and electronic engineering with the knowledge of engineering mechanics. With the appearance of this new and promising area of engineering, it becomes necessary for this new professional to have the domain of the control theory, that makes possible the mathematical modeling of several mechanical systems as well as the design of the control system for same and a reasonable base of electronics to allow the implementation of controllers for the different mechanical systems. The knowledge of control and electronics are dealt with in this work through the design of a control system for an inverted pendulum. This article presents the mathematical modeling as well as the design procedure and physical implementation of the closed loop control used on the prototype.*

**Keywords.** inverted pendulum, mechanical systems control, optical sensor.