

ESTUDO DA ESTABILIDADE DE UM BRAÇO ROBÓTICO NÃO-RÍGIDO COM AÇÃO DA GRAVIDADE

Víctor Orlando Gamarra-Rosado¹

Afonso Henrique Castilho²

UNESP – FE/G – Campus de Guaratinguetá

Departamento de Mecânica, CP 205

12516-410 Guaratinguetá, SP, Brasil

E-mail: ¹ victor@feg.unesp.br, ² afonsohc@uol.com.br

Maurício Guimarães da Silva

Instituto de Aeronáutica e Espaço – IAE–ASA–L / CTA

Departamento de Aerodinâmica

12.200-100 São José dos Campos, SP, Brasil

E-mail: maugsilva@uol.com.br

Resumo. *Apresenta-se neste trabalho o modelo dinâmico de um braço robótico planar vertical, com dois elos não-rígidos e duas juntas revolutas, onde se considera a ação da gravidade. Utiliza-se a formulação de Newton-Euler e a teoria elementar das vigas, junto com o método dos elementos finitos. Também, apresenta-se o estudo da estabilidade segundo o método de Liapunov baseando-se na análise dos autovalores da matriz de Jacobi. Estudo importante no controle de posição do braço e na melhora da sua performance.*

Palavras-chave. *Robótica, Braço não-rígido, Modelagem dinâmica e estabilidade, Método de Liapunov.*

1. INTRODUÇÃO

No caso particular dos manipuladores robóticos, a análise dinâmica desempenha um papel importante no projeto mecânico e no sistema de controle. A flexibilidade existente nos elos, acoplamentos ou transmissões, atuadores, etc. resultam em vibrações o que aumentam a instabilidade e reduzem a performance do sistema.

A maioria das análises e dos controles de robôs industriais é baseada na concepção de que o braço do robô é formado por um conjunto de corpos rígidos, e que são capazes de levantar cargas de pesos variáveis. Estudos relacionados com o comportamento de braços robóticos leves (não-rígidos), de material adequado e dimensões - área da seção reta - bastante reduzidas, são muito mais complexos. Neste caso, o braço tornar-se-á flexível o que, inevitavelmente, causará o aparecimento de deflexões ou, pelo menos, vibrações, acarretando problemas de precisão e de estabilidade no posicionamento final da extremidade livre. Por isso, a determinação de um modelo matemático para um braço não-rígido e o correspondente projeto do seu sistema de controle tem exigido muito dos engenheiros que trabalham nesta área (Hollerbach, 1980; Sunada e Dubowsky, 1983; Cannon e Schmitz, 1984; Book, 1984 e 1993; Wang e Vidyasagar, 1987; Chang e Hamilton, 1991; e Xi *et al.* 1993).

Usoro *et al.* 1986, utilizaram a aproximação do Lagrangeano e o método dos elementos finitos para a modelagem de um manipulador com dois braços flexíveis. Como em outras pesquisas do

gênero (Gamarra-Rosado *et. al.* 1996), o método dos elementos finitos, baseado na teoria elementar das vigas, também foi empregado na determinação do modelo matemático deste sistema.

Neste trabalho, apresenta-se a dinâmica de um braço não-rígido o qual considera os efeitos da gravidade junto com a carga na extremidade livre do braço. O modelo é obtido através da superposição do movimento elástico de pequenas amplitudes, deslocamento elástico, em relação a configuração rígida. E finalmente, apresenta-se o estudo da estabilidade do braço robótico segundo o método de Liapunov baseando-se na análise dos autovalores da matriz de Jacobi. Com base nestes resultados, pretende-se implementar o controle de posição do braço, evitando níveis de vibração e melhorando sua performance.

2. DESCRIÇÃO E DINÂMICA DO BRAÇO ROBÓTICO

O braço robótico planar em estudo consiste de dois elos não-rígidos e duas juntas revolutas. Conforme mostra a Fig. (1), considera-se que o braço se movimenta somente ao longo do plano vertical (x, z). O elo superior faz um ângulo $\phi(t)$ com o eixo z , que é representado na vertical, e o elo inferior faz um ângulo $\beta(t)$ com a mesma direção vertical. O sistema inercial (x, z) é denominado sistema de referência e os sistemas de coordenadas locais (x^1, z^1) e (x^2, z^2) são afixados no elo superior e inferior, respectivamente, e são móveis; l^1 e l^2 são os comprimentos do elo superior e inferior, respectivamente; J_1, J_2 e J_P são os momentos de inércia dos atuadores e da carga na extremidade livre; M_{A1} e M_{A2} são as massas dos atuadores localizadas nas juntas revolutas; e M_P a massa da carga na extremidade livre do braço; Z_i^1 e Z_j^2 são as coordenadas local do ponto nodal i e j , respectivamente; U_i^1 e U_j^2 são as deflexões locais do ponto nodal i e j , respectivamente; e T_1 e T_2 são os torques aplicados nos elos superior e inferior, respectivamente.

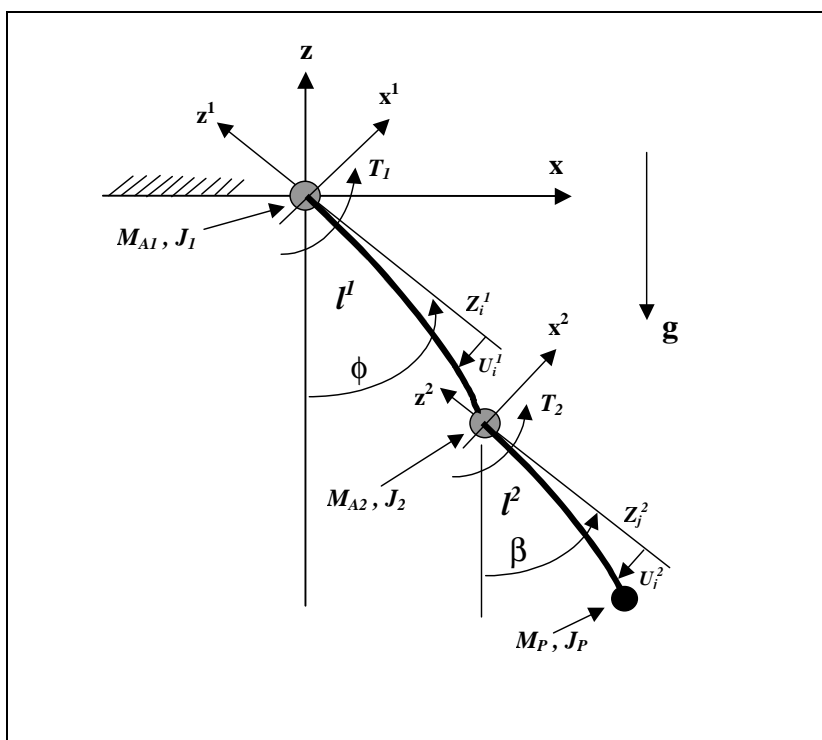


Figura 1. Configuração do braço robótico.

Para o cálculo das forças e momentos que atuam no braço, a massa própria do elo superior será dividida em n elementos infinitesimais de massa e a do elo inferior, em m elementos. Cada um destes pontos de concentração de massa será denominado ponto nodal. Portanto, no sistema como um todo, existirá um total de $(n+m+1)$ pontos nodais. A carga da extremidade livre do braço

inferior será considerada como uma carga concentrada e localizada no último ponto nodal do elo inferior. As massas dos atuadores são consideradas como massas concentradas nos pontos nodais iniciais de cada elo. É conveniente esclarecer que, o asterisco como índice (*) está relacionado com o último ponto nodal de cada elo, de modo que f_*^1 representa a força que atua no último ponto nodal do elo superior e f_*^2 , a força que age no último ponto nodal do elo inferior. As massas dos atuadores são consideradas como massas concentradas nos pontos nodais iniciais de cada elo.

A força total que age no elo inferior é calculada no sistema de coordenadas (x_p, z_p) paralelo ao sistema local (x^1, z^1) e com origem na junta que liga os dois elos, conforme mostra a Fig. (2). As posições das massas dos atuadores M_{A1} e M_{A2} e a carga aplicada na extremidade livre do braço inferior M_P , também são mostradas nessa figura, assim como, R_H e R_V os quais são os esforços externos de reação relacionados com o apoio do sistema.

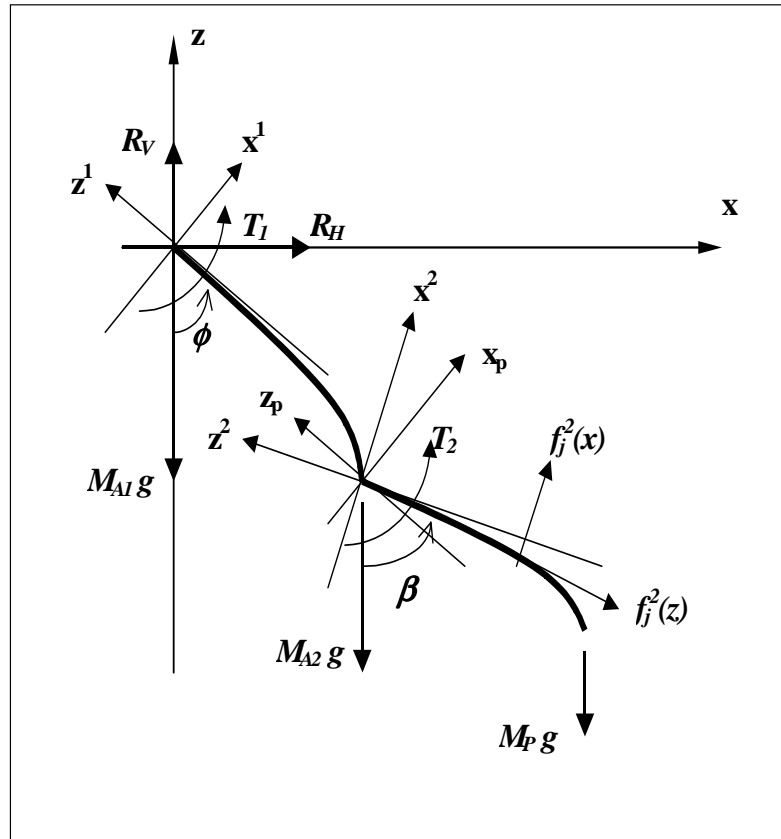


Figura 2. Diagrama de corpo-livre do sistema robótico

O torque T_2 que age no elo inferior no sistema de coordenadas local (x^2, z^2) , onde f_j^{22} representa as componentes dos esforços neste elo, obtém-se a seguir (Gamarra-Rosado, 1999),

$$\sum T = 0 \Rightarrow T_2 + \sum_{j=1}^m [f_j^{22}(x)Z_j^2 + f_j^{22}(z)U_j^2] = 0 \quad (1)$$

$$T_2 = -\sum_{j=1}^m M_j^2 \left[(U_*^1 \ddot{\phi} - Z_*^1 \dot{\phi} \dot{\phi} + 2\dot{U}_*^1 \dot{\phi} + \ddot{Z}_*^1) \sin(\phi - \beta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(U_*^1 \dot{\phi} \ddot{\phi} + Z_*^1 \ddot{\phi} + 2\dot{Z}_*^1 \dot{\phi} - \ddot{U}_*^1 \right) \cos(\phi - \beta) - g \sin \beta] Z_j^2 - \sum_{j=1}^m M_j^2 \left(U_j^2 \dot{\beta} \ddot{\beta} + Z_j^2 \ddot{\beta} + 2\dot{Z}_j^2 \dot{\beta} - \ddot{U}_j^2 \right) Z_j^2 - \\
& - \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[\left(-U_*^1 \ddot{\phi} + Z_*^1 \dot{\phi} \ddot{\phi} - 2\dot{U}_*^1 \dot{\phi} - \ddot{Z}_*^1 \right) \cos(\phi - \beta) + \left(U_*^1 \dot{\phi} \ddot{\phi} + Z_*^1 \ddot{\phi} + 2\dot{Z}_*^1 \dot{\phi} - \ddot{U}_*^1 \right) \sin(\phi - \beta) - \right. \\
& \left. - g \cos \beta] U_j^2 - \sum_{j=1}^m M_j^2 \left(-U_j^2 \ddot{\beta} + Z_j^2 \dot{\beta} \ddot{\beta} - 2\dot{U}_j^2 \dot{\beta} - \ddot{Z}_j^2 \right) U_j^2 \quad (2)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, do somatório dos torques, pode-se obter a expressão do torque T_l a seguir,

$$\sum T = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 + \sum_{i=1}^n \left[f_i^1(x) Z_i^1 + f_i^1(z) U_i^1 \right] + F_x Z_*^1 + F_z U_*^1 = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
T_1 = T_2 - \sum_{i=1}^n M_i^1 \left(\dot{\phi} \dot{\phi} U_i^1 + \ddot{\phi} Z_i^1 + 2\dot{\phi} \dot{Z}_i^1 - \ddot{U}_i^1 \right) Z_i^1 + \\
+ \sum_{i=1}^n M_i^1 g \sin \phi Z_i^1 - \sum_{i=1}^n M_i^1 \left(-\ddot{\phi} U_i^1 + \dot{\phi} \dot{Z}_i^1 - 2\dot{\phi} \dot{U}_i^1 - \ddot{Z}_i^1 \right) U_i^1 + \sum_{i=1}^n M_i^1 g \cos \phi U_i^1 - \\
- \sum_{j=1}^m M_j^2 \left(\dot{\phi} \dot{\phi} U_*^1 + \ddot{\phi} Z_*^1 + 2\dot{\phi} \dot{Z}_*^1 - \ddot{U}_*^1 - g \sin \phi \right) Z_*^1 - \\
- \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[\left(\dot{\beta} Z_j^2 + \dot{\beta} \dot{U}_j^2 + 2\dot{\beta} \dot{Z}_j^2 - \ddot{U}_j^2 \right) \cos(\phi - \beta) + \left(-\ddot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{Z}_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{U}_j^2 - \ddot{Z}_j^2 \right) \sin(\phi - \beta) \right] Z_*^1 - \\
- \sum_{j=1}^m M_j^2 \left(-\ddot{\phi} U_*^1 + \dot{\phi} \dot{Z}_*^1 - 2\dot{\phi} \dot{U}_*^1 - \ddot{Z}_*^1 - g \cos \phi \right) U_*^1 - \\
- \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[\left(-\ddot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{Z}_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{U}_j^2 - \ddot{Z}_j^2 \right) \cos(\phi - \beta) + \left(\ddot{\beta} Z_j^2 - \dot{\beta} \dot{U}_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{Z}_j^2 + \ddot{U}_j^2 \right) \sin(\phi - \beta) \right] U_*^1 \quad (4)
\end{aligned}$$

Da teoria elementar das vigas junto com o método de elementos finitos (Clough e Penzien, 1982), obtém-se na forma matricial a expressão para o elo inferior,

$$K^2 V^2 = f^{22} \quad (5)$$

onde, K^2 é a matriz de rigidez ($2m \times 2m$) para uma viga sujeita a esforços, e

$$\begin{aligned}
V^2 & \equiv \left(U_1^2, Z_1^2, U_2^2, Z_2^2, U_3^2, Z_3^2, \dots, U_m^2, Z_m^2 \right)^T; \text{ e} \\
f^{22} & \equiv \left[f_1^{22}(x), f_1^{22}(z), f_2^{22}(x), f_2^{22}(z), f_3^{22}(x), f_3^{22}(z), \dots, f_m^{22}(x), f_m^{22}(z) \right]^T
\end{aligned}$$

Para o elo superior, devido à ação do torque T_2 na extremidade livre do elo, a expressão será dada por,

$$\begin{bmatrix} K' & K \\ K^T & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^1 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde, $V^1 \equiv \left(U_1^1, Z_1^1, U_2^1, Z_2^1, U_3^1, Z_3^1, \dots, U_n^1, Z_n^1 \right)^T$; $f^1 \equiv \left[f_1^1(x), f_1^1(z), f_2^1(x), f_2^1(z), f_3^1(x), f_3^1(z), \dots, f_n^1(x), f_n^1(z) \right]^T$ e, s é a inclinação na extremidade livre do elo superior.

3. MATRIZ DE JACOBI E ANALISE DA ESTABILIDADE

A seguir, apresenta-se o estudo da estabilidade do sistema e para isto, consideram-se algumas hipóteses a fim de viabilizar a análise. Entre elas, observa-se que a deformação ao longo do eixo $z^{1,2}$ é desprezível e não compromete os resultados. Desta forma, como a aceleração em z é nula, as forças que agem num ponto nodal qualquer do elo superior e inferior somente terão componentes em x . Assim, as expressões dos torques nos respectivos atuadores serão simplificadas.

Mesmo fazendo estas simplificações, obtém-se um sistema de equações totalmente acopladas e não-lineares devido aos esforços centrífugos e de Coriolis que, após sofrerem uma reorganização de seus termos pode ser escrito na forma matricial,

$$M(\omega)\ddot{\omega} + h(\dot{\omega}, \omega) = \tau \quad (7)$$

onde, $\ddot{\omega} = \{\ddot{U}_1^1, \ddot{U}_2^1, \dots, \ddot{U}_1^2, \ddot{U}_2^2, \dots, \ddot{U}_m^2, \ddot{U}_n^1, \ddot{\beta}, \ddot{\phi}\}$ e h contém todos os termos não-lineares. Linearizando esta expressão em torno do valor nominal $\tilde{\omega}$ e assumindo que, $\omega = \tilde{\omega} + \delta\omega$; $\dot{\omega} = \tilde{\dot{\omega}} + \delta\dot{\omega}$; $\ddot{\omega} = \tilde{\ddot{\omega}} + \delta\ddot{\omega}$; e $\tau = \tilde{\tau} + \delta\tau$, obtém-se a matriz de Jacobi para este sistema (Hongzhao *et al.* 1994),

$$J(t, \tilde{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}h_1 & -M^{-1}h_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Analisando o sistema com apenas um nodo para cada elo, torna-se possível determinar os autovalores aplicando-se a relação: $|J(t, \tilde{y}) - \lambda I| = 0$. Assim, de acordo com os critérios de estabilidade segundo o método de Liapunov, se a parte real das raízes for positiva, a resposta do sistema divergirá e o sistema será considerado instável. Por outro lado, quando a parte real for negativa, o sistema será estável. Portanto, pode-se concluir das análises das expressões dos autovalores obtidos que embora o sistema seja estável, a resposta se encontra na margem da região estável. Caso o modelo não seja obtido de forma acurada e bastante preciso o sistema pode-se tornar instável com muita facilidade.

4. MODELO SIMULADO

O sistema robótico tem sido simulado seguindo o diagrama de blocos segundo a Fig. (3) e tem-se utilizado os valores dos parâmetros do modelo conforme a Tab. (1).

Tabela 1. Parâmetros utilizados na simulação

l^1, l^2	Comprimentos do 1º e 2º elo	0,3 [m]
n, m	Numero de elementos em cada elo	4
E	Modulo de Elasticidade de Young	$1,3 \times 10^{12}$ [N/m ²]
ρ	Massa por unidade de comprimento	0,1 [Kg/m]
I	Inércia da seção circular dos elos	$0,3 \times 10^{-12}$ [m ⁴]
M_P	Carga na extremidade livre do braço	2×10^{-3} [Kg]
M_{A1}, M_{A2}	Massa de cada Atuador	8×10^{-2} [Kg]
ϕ_d, β_d	Ângulos desejados nas Juntas	0,768 e 0,384 [rad]

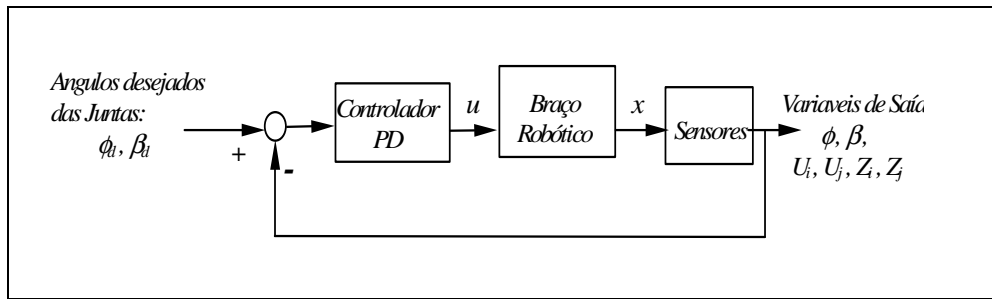


Figura 3. Diagrama de blocos da simulação

Observa-se na Fig. (4), que a linha contínua corresponde ao comportamento da junta definida pelo ângulo ϕ (Braço), e a linha tracejada corresponde ao comportamento da junta definida pelo ângulo β (Antebraço). Para uma manobra bastante brusca e rápida conforme a simulada, podem-se observar certas oscilações na resposta permanente devido as perturbações originadas pelas deflexões ou deslocamentos que ocorrem nas extremidades finais de cada elo, conforme a Fig. (5).

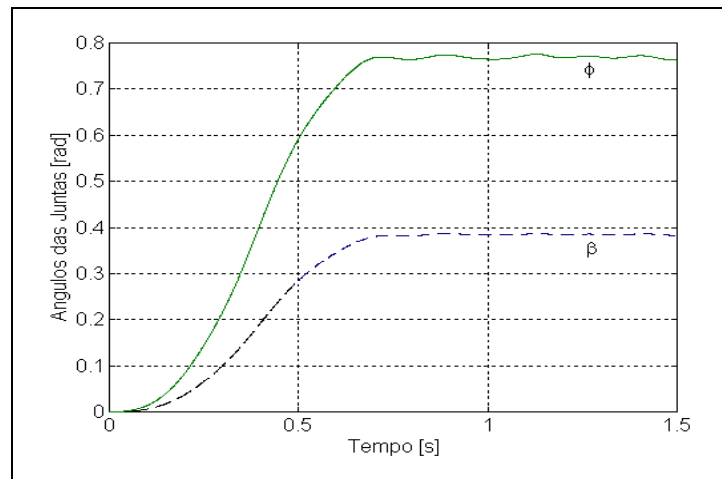


Figura 4. Respostas das juntas revolutas

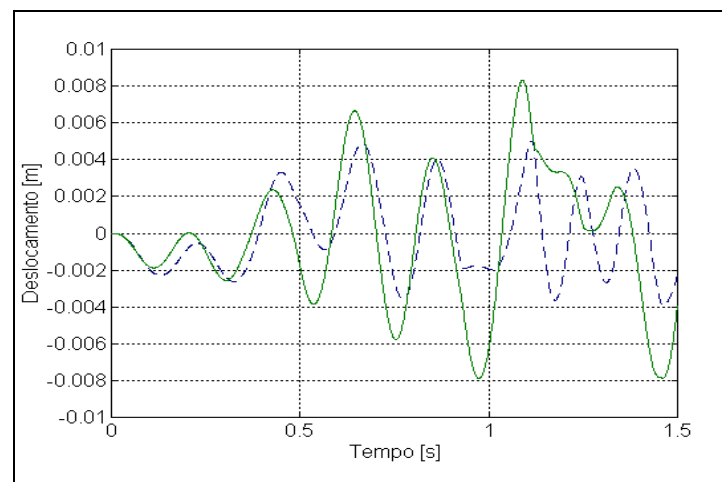


Figura 5. Deslocamento nas extremidades finais de cada elo

Nesta Figura (5) são visíveis as deflexões ou deslocamentos que ocorrem nas extremidades finais dos elos (na junta 2 e na extremidade livre do braço, respectivamente). Como pode-se observar estas respostas são totalmente acopladas o que verifica o modelo dinâmico do braço. Estas oscilações que ocorrem nos elos, assim como nas juntas, podem causar o aparecimento de vibrações, acarretando problemas de precisão e de estabilidade no posicionamento final da extremidade livre.

Estes resultados serão levados em consideração em futuros trabalhos na área de controle para efeito de precisão do efetuador do manipulador.

5. CONCLUSÕES

Um fator de importância é o entendimento do que vem a ser estabilidade para sistemas dinâmicos. No caso do braço robótico não-rígido, não há dúvidas que a instabilidade está relacionada com as deflexões da extremidade de cada elo ou, mais propriamente, está relacionada com a vibração a que fica sujeita o braço não-rígido durante a manobra. Porém o fato do braço vibrar não quer dizer que ele seja instável. O conceito de estabilidade segundo Liapunov está relacionado com a trajetória no espaço dos estados e isto significa que a posição do braço está variando continuamente em função do seu deslocamento angular e da deformação a que fica sujeito durante o movimento.

O estudo individualizado de cada elo do braço robótico caracterizou-se como uma boa alternativa para a análise da estabilidade de tais sistemas. As equações originais eram muito extensas para permitir qualquer tipo de análise, porém, após a separação dos elos elas se tornaram mais compactas. Embora tenha sido possível fazer o estudo da estabilidade dos elos, ele está longe de ser simples, tendo em vista a grande quantidade de termos que fazem parte das equações necessárias para a análise do sistema. A análise independente dos elos só foi viável porque a redução das matrizes de quarta ordem do braço robótico para matrizes de segunda ordem dos elos foi feita sem descaracterizar a expressão geral do sistema e foi feita, também, levando-se em consideração as interações entre os elos. Com base nestes resultados, pretende-se implementar o controle de posição do braço robótico, evitando níveis de vibração e melhorando sua performance.

6. REFERÊNCIAS

- Book, W.J., 1984, "Recursive lagrangian dynamics of flexible manipulator arms", Int. Journal of Robotics Research, Vol. 3, No. 3, pp. 87-101.
- Book, W.J., 1993, "Controlled motion in an elastic world", Journal Dyn. Syst. Meas. Contr., Vol. 115, pp. 252-261.
- Cannon, R. H. Jr. and Schmitz, E., 1984, "Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot", International Journal of Robotics Research, Vol. 3, No. 3, pp.62-75.
- Chang, L.W. and Hamilton, J.F., 1991, "Dynamics robotic manipulators with flexible links", ASME J. Dyn. Sys., Meas., and Control, Vol. 113, pp. 54-59.
- Clough, R. and Penzien, J., 1982, Dynamics of structures. Mac Graw-Hill, NY.
- Gamarra-Rosado, V.O. et. al., 1996, "Automation and cybernetics: Control of a flexible one-link manipulator", The International Journal of Systems & Cybernetics - Kybernetes, Vol. 25, No. 5, pp.38-47.
- Gamarra-Rosado, V. O., 1999, "Dynamics modeling and simulation of a flexible robotic manipulator", Robotica, Cambridge, Vol. 17, pp. 523-528.
- Hollerbach, J. M., 1980, "A recursive lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity", IEEE Trans. On Systems, Man. And Cybernetics, Vol. SMC-10, No. 11, pp. 730-736.
- Hongzhao, L., Xianmin, Z. and Weiqing, C., 1994, "Stability analysis of a flexible arm", In: Conference Minneapolis, Robotics: Kinematics, Dynamics and Control, ASME, pp. 39-44.

- Sunada, W.H. and Dubowsky, S., 1983, "On the dynamic analysis and behavior of industrial robotic manipulators with elastic members", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 105, No. 1, pp. 42-51.
- Usoro, P.B. et. al., 1986, "A finite element/Lagrange approach to modelling lightweight flexible manipulator", Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, Vol. 108, pp. 198-205.
- Wang, D. and Vidyasagar, M., 1987, "Control of a flexible beam from optimum step response", IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, pp. 1567-1572.
- Xi, F. and Fenton, R. G., 1993, "Special configurations of flexible link manipulators", Mechanism and Machine Theory, Vol. 28, No. 6, pp. 795-807.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

STABILITY STUDY OF A NONRIGID TWO-LINK ROBOTIC ARM INCLUDING THE GRAVITY EFFECTS

Víctor Orlando Gamarra-Rosado¹

Afonso Henrique Castilho²

UNESP - Paulista State University

FEG - College of Engineering

DME - Division of Mechanical Engineering

Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333, C.P. 205

12516-410 Guaratinguetá - SP Brazil

E-mail: ¹ victor@feg.unesp.br, ² afonsohc@uol.com.br

Maurício Guimarães da Silva

Institute of Aeronautics and Space – IAE–ASA–L / CTA

Division of Aerodynamics

12.200-100 São José dos Campos, SP, Brasil

E-mail: maugsilva@uol.com.br

Abstract. *This work presents the dynamic modeling of a vertical planar robotic arm with two nonrigid links interconnected by two revolute joints and a payload at its free end, so it is considered the gravity effects. The dynamic equations was obtained using the Newton-Euler's formulation together with the elementary beam theory based on the finite element method. Also, it is studied the stability according to Liapunov's approximation method. The stable criteria are established by means eigenvalue analysis of Jacobi matrix. This study is fundamental to apply a control strategy.*

Keywords. *Robotics, Nonrigid arm, Dynamic modeling and stability, Liapunov's method.*