

ANÁLISE DE EXTREMOS EM SISTEMAS DE CONTROLE LINEARES CONTÍNUOS DE TERCEIRA ORDEM COM PÓLOS E ZEROS REAIS ESTÁVEIS

Célia Aparecida dos Reis

Ali Messaoudi

Neusa Augusto Pereira

Universidade Estadual Paulista, Campus de Ilha Solteira, Departamento de Matemática, Caixa Postal 31, CEP 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil.

Email: celia@fqm.feis.unesp.br, messaoudi@fqm.feis.unesp.br, neusa@fqm.feis.unesp.br.

Resumo: Trata este trabalho de uma análise de pontos críticos e extremos em uma classe de sistemas de controle lineares contínuos de terceira ordem com pólos e dois zeros reais estáveis. São obtidas condições necessárias e suficientes para a determinação de pontos críticos e extremos em uma tal classe de sistemas de controle, levando-se em conta as posições relativas dos pólos e zeros.

Palavras Chaves: Extremos, pontos críticos, resposta a degrau, pólos, zeros.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente os sistemas de controle automático se encontram difundidos em todas as sociedades desenvolvidas. Tais sistemas agem como elemento catalisador na promoção do desenvolvimento e do progresso. O controle automático é essencial no estudo de sistemas de veículos espaciais, guiaamento de mísseis, pilotagem de aviões, robóticos e outros, além de ser aplicado em modernos processos industriais e de fabricação, sistemas biológicos, biomédicos, econômicos e socioeconômicos, de acordo com Franklin (1991), Dorf (1995), Ogata (1998) e Bolton (1995).

Existem alguns problemas como o de controle do eixo de máquinas ferramentas e os de controle de um robô, os quais necessitam seguir uma trajetória pré-definida, onde a resposta a degrau não pode apresentar extremos. Desta forma, o estudo de condições que permitam avaliar overshoot na resposta a degrau é de grande importância na teoria de controle, de acordo com Ogata (1998), El-Khoury (1993), Howell (1997), Rachid (1995), Leon de la Barra (1994, 1994-a), Reis (2003, 2002, 2001), Silva (2001).

Muitas contribuições teóricas recentes têm sido feitas no sentido de clarificar a influência dos zeros e das localizações de pólos e zeros da planta na parte transiente da resposta a degrau (El-Khoury, 1993; Rachid, 1995; Howell, 1997; Goodwin, 1999; León de la Barra, 1994, 1994-a; Lin e Fang, 1997; Moore, 1990; Reis, 2001, 2002, 2003; Silva, 2001).

Apesar de bastante valiosas, essas contribuições ainda não oferecem um quadro claro de como e quais variações extensas nas localizações de pólos e zeros podem influenciar o overshoot e o undershoot. Por exemplo, o problema de determinar o número exato de extremos da resposta a degrau permanece em aberto (El-Khoury, 1993) e mesmo determinando os extremos da resposta a degrau, não existe uma técnica que permita classificá-los, ou seja, faltam condições necessárias e suficientes para a prova da existência de overshoot e undershoot.

Como contribuições dos autores (Reis, 2001, 2002, 2003), foram obtidas condições necessárias e suficientes para a existência de extremos, overshoot e undershoot em sistemas de segunda e terceira ordem, com pólos e zeros reais estáveis. Dessa forma, nesse trabalho, será apresentada uma análise dos pontos críticos e extremos de uma classe de sistemas de controle lineares contínuos de terceira ordem com pólos e dois zeros reais estáveis. Acreditamos que as caracterizações obtidas são de importância na teoria de controle já que permitem uma visão mais esclarecida das condições que possibilitam avaliar pontos críticos e extremos em sistemas lineares contínuos no tempo, além de clarificar um pouco mais a influência dos zeros e localizações de pólos e zeros da planta na parte

transiente da resposta a degrau. Esse trabalho está organizado como segue. Na seção dois apresentam-se as considerações iniciais sobre o trabalho. Na seção três apresentam-se os resultados principais relativos a pontos críticos e extremos da resposta a uma entrada degrau unitário. Na seção quatro as conclusões do trabalho.

2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Considera-se o sistema de controle linear contínuo no tempo, monovariável e estável descrito pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^2 (T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^3 (\tau_j s + 1)} \quad (2.1)$$

sendo que:

- $T_i, i = 1, 2$ são constantes reais estritamente positivas;
- $\tau_j > 0, j = 1, 2, 3$ são as constantes de tempo do sistema;
- $z_i = -1/T_i$, são os zeros de $G(s)$;
- $\lambda_j = -1/\tau_j, j = 1, 2, 3$ são os pólos de $G(s)$;
- $\lambda_j \neq \lambda_i, \lambda_j \neq z_i$ para todo $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$.

Considera-se, ainda, que o tempo t pertença ao intervalo $[0, +\infty)$ e que:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 \quad e \quad z_1 < z_2 < 0. \quad (2.2)$$

Observa-se que $G(s)$ pode ser escrita, na forma de pólos e zeros, do seguinte modo:

$$G(s) = \frac{-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z_1 z_2} \frac{\prod_{i=1}^2 (s - z_i)}{\prod_{j=1}^3 (s - \lambda_j)}, \quad (2.3)$$

O lema, dado a seguir, fornece a resposta a uma entrada degrau unitário, para a classe de sistemas cuja função de transferência tem a forma dada por (2.3). A prova é feita levando-se em conta a expansão em frações parciais de $G(s)$.

LEMA 2.1: A resposta a uma entrada degrau unitário da classe de sistemas de controle linear, cuja função de transferência seja dada por (2.3), tem a forma:

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^3 c_i e^{\lambda_i t} \quad (2.4)$$

sendo que:

$$(i). \quad c_1 = -\frac{\lambda_2 \lambda_3}{z_1 z_2} \frac{(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}; \quad (2.5)$$

$$(ii). \quad c_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{z_1 z_2} \frac{(\lambda_2 - z_1)(\lambda_2 - z_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}; \quad (2.6)$$

$$(iii). \quad c_3 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} \frac{(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}. \quad (2.7)$$

Além disso, considera-se que $y(0) = 0$ e $y'(0) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z_1 z_2}$.

3. DETERMINAÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS CRÍTICOS DE $y(t)$.

Considera-se o sistema de controle linear estável, contínuo no tempo, monovariável, com três pólos reais distintos e com dois zeros reais distintos e negativos, descrito pela função de transferência (2.3), cuja resposta a uma entrada degrau unitário $y(t)$ tem a forma (2.4) - (2.7).

Inicialmente, de (2.4), tem-se que:

$$y'(t) = \sum_{i=1}^3 c_i \lambda_i e^{\lambda_i t}. \quad (3.1)$$

Então, de (3.1), tem-se que:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + c_3 \lambda_3 e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t} = 0. \quad (3.2)$$

Em (3.2), fazendo:

$$k_i = c_i \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{e} \quad \beta_j = \lambda_j - \lambda_1, \quad j = 2, 3, \quad (3.3)$$

e substituindo (3.3) em (3.2), obtém-se:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{k_2}{k_1} e^{\beta_2 t} + \frac{k_3}{k_1} e^{\beta_3 t} = 0. \quad (3.4)$$

Em (3.4) defina $\alpha_i = \frac{k_i}{k_1}$, $i = 2, 3$. Então, de (3.4), tem-se que:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 e^{\beta_3 t} = 0. \quad (3.5)$$

Seja $f(t)$ a função definida a partir de (3.5), dada por:

$$f(t) = 1 + \alpha_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 e^{\beta_3 t}. \quad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6), observa-se que os pontos críticos de $y(t)$ são os pontos t_o pertencentes a $[0, +\infty)$ para os quais $f(t_o) = 0$. Além disso, nota-se ainda, que:

$$f(t) = \frac{y'(t)}{k_1 e^{\lambda_1 t}}. \quad (3.7)$$

Tem-se, então, o seguinte resultado principal, o qual fornece uma condição necessária e suficiente para a determinação dos extremos de $y(t)$, além da classificação dos mesmos.

TEOREMA 3.1: Sob as hipóteses anteriormente postas, $y(t)$ apresenta um único extremo em t_o se e somente se for válida uma das seguintes condições:

- (i). $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < z_2$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2$ ou $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2$;
- (ii). $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3)$ e $f(t_o) = 0$ e $f'(t_o) = 0$, sendo $f(t)$ dada por (3.6).

Além disso, o extremo apresentado por $y(t)$ é um ponto de máximo.

Para a prova do Teorema 3.1, são necessários alguns resultados, os quais serão enunciados a seguir.

LEMA 3.1: $f(t)$ dada por (3.6) apresenta um único ponto crítico se e somente se $-\frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_3\beta_3} > 1$.

Prova: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{(\beta_3 - \beta_2)t} = -\frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_3\beta_3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\beta_3 - \beta_2} \ln\left(-\frac{\alpha_2\beta_2}{\beta_3\alpha_3}\right) \Leftrightarrow -\frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_3\beta_3} > 1$.

LEMA 3.2:

- (i). Se $\alpha_3 < 0$ e $k_1 > 0$ então $y(t)$ apresenta um único extremo;
- (ii). $\alpha_3 < 0$ e $k_1 > 0$ se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < z_2$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2$.

Prova: Tem-se de (3.6) que $f(t) = 1 + \alpha_2 e^{\beta_2 t} + \alpha_3 e^{\beta_3 t}$ e $f(0) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z_1 z_2 k_1}$. Como

$-\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z_1 z_2} > 0$, $f(0) > 0$ já que $k_1 > 0$. Mas $0 < \beta_1 < \beta_2$, então a parcela $\alpha_3 e^{\beta_3 t}$ domina $f(t)$ e

então, como $\alpha_3 < 0$, tem-se que $f(0) > 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$. Assim a Fig. 01, dada a seguir, mostra

as possibilidades para o gráfico de $f(t)$. Pelo Lema 3.1, $f(t)$ possui no máximo um ponto crítico e então, existe um único t_o pertencente a $[0, +\infty)$ tal que $f(t_o) = 0$ o que implica na existência de um único ponto crítico de $y(t)$ em t_o . Agora, de (3.7), $f(t) = \frac{y'(t)}{k_1 e^{\lambda_1 t}}$. Como $k_1 > 0$ e $f(t) > 0$ se $t < t_o$,

então $y'(t) > 0$ se $t < t_o$. Além disso, como $k_1 > 0$ e $f(t) > 0$ se $t > t_o$, $y'(t) < 0$ se $t < t_o$. Portanto, $y(t)$ possui um máximo em t_o e o item (i) está provado.

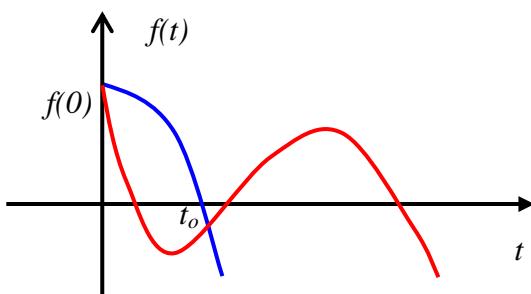


Figura 01. Possibilidades para a forma do gráfico de $f(t)$.

Para a prova de (ii), de (2.5), (2.7) e (3.3) e como $\alpha_i = \frac{k_i}{k_1}$, $i = 2, 3$, observa-se que:

$$\alpha_3 < 0 \Leftrightarrow \frac{c_3 \lambda_3}{c_1 \lambda_1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)}{(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_3^2 - (z_1 + z_2)\lambda_3 + z_1 z_2}{\lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2} < 0$$

e

$$k_1 > 0 \Leftrightarrow c_1 \lambda_1 > 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2) > 0 \Leftrightarrow \lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2 > 0.$$
(3.7)

Assim, de (3.7), $\alpha_3 < 0$ e $k_1 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2 > 0$ e $\lambda_3^2 - (z_1 + z_2)\lambda_3 + z_1 z_2 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < \lambda_3 < z_2$ ou $\lambda_1 < z_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2$, o que prova o Lema 3.2.

LEMA 3.3:

- (i). $\alpha_3 < 0$ e $k_1 < 0$ se e somente se $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < z_2 < \lambda_3$ ou $z_1 < \lambda_1 < z_2 < \lambda_2 < \lambda_3$;
- (ii). Se $\alpha_3 < 0$ e $k_1 < 0$ então $y(t)$ não apresenta extremos;

Prova: Tem-se que $\alpha_3 < 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)}{(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_3^2 - (z_1 + z_2)\lambda_3 + z_1 z_2}{\lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2} < 0$ e $k_1 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2 < 0$. Daí, $\alpha_3 < 0$ e $k_1 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2 < 0$ e $\lambda_3^2 - (z_1 + z_2)\lambda_3 + z_1 z_2 > 0 \Leftrightarrow z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < z_2 < \lambda_3$ ou $z_1 < \lambda_1 < z_2 < \lambda_2 < \lambda_3$, o que prova o item (i). Por Rachid (1995), a resposta a uma entrada degrau unitário do sistema $G(s)$ com uma tal configuração de pólos e zeros não possui extremos e o Lema 3.3 está provado.

LEMA 3.4:

- (i). Se $\alpha_3 > 0$ e $k_1 < 0$ então $y(t)$ apresenta um único extremo;
- (ii). $\alpha_3 > 0$ e $k_1 < 0$ se e somente se $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2$.

Prova: De (3.6), tem-se que $f(0) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z_1 z_2 k_1}$ e como $k_1 < 0$, $f(0) < 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. Assim

a Fig. 02, dada a seguir, mostra as possibilidades para o gráfico de $f(t)$. Pelo Lema 3.1, $f(t)$ apresenta um único ponto crítico e então, existe um único t_o pertencente a $[0, +\infty)$ tal que $f(t_o) = 0$ o que implica na existência de um único ponto crítico de $y(t)$ em t_o . Agora, de (3.7), $f(t) = \frac{y'(t)}{k_1 e^{\lambda_1 t}}$. Como $k_1 < 0$ e $f(t) < 0$ se $t < t_o$, então $y'(t) > 0$ se $t < t_o$. Além disso, como $k_1 < 0$ e $f(t) < 0$ se $t > t_o$ e então $y'(t) < 0$ se $t < t_o$. Portanto, $y(t)$ possui um máximo em t_o e o item (i) está provado.

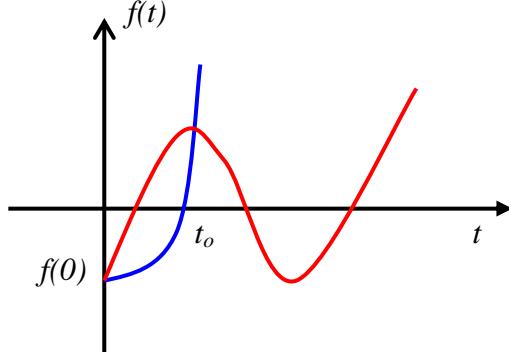


Figura 02. Possibilidades para a forma do gráfico de $f(t)$.

Para a prova de (ii), tem-se que:

$$\alpha_3 > 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)}{(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_3^2 - (z_1 + z_2)\lambda_3 + z_1 z_2}{\lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2} > 0 \text{ e}$$

$$k_1 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2 < 0.$$

Assim,

$$\alpha_3 > 0 \text{ e } k_1 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2 < 0 \text{ e } \lambda_3^2 - (z_1 + z_2)\lambda_3 + z_1 z_2 < 0 \Leftrightarrow z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_2, \text{ o que prova (ii).}$$

LEMÁ 3.5:

- (i). Se $\alpha_3 > 0$ e $k_1 > 0$ então $y(t)$ pode apresentar até dois extremos;
- (ii). $\alpha_3 > 0$ e $k_1 > 0$ se e somente se $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3$.

Prova: Tem-se que $\alpha_3 > 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda_3 - z_1)(\lambda_3 - z_2)}{(\lambda_1 - z_1)(\lambda_1 - z_2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_3^2 - (z_1 + z_2)\lambda_3 + z_1 z_2}{\lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2} > 0$ e

$$k_1 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2 > 0.$$

Assim, $\alpha_3 > 0$ e $k_1 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1^2 - (z_1 + z_2)\lambda_1 + z_1 z_2 > 0$ e $\lambda_3^2 - (z_1 + z_2)\lambda_3 + z_1 z_2 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < z_1 < z_2$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 < z_1 < z_2 < \lambda_3$ o que prova (ii).

A prova de (i), segue do fato que se $\alpha_3 > 0$ e $k_1 > 0$, então $f(0) > 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$, já que

$f(0) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{z_1 z_2 k_1}$. Assim, podem ocorrer três possibilidades para o gráfico de $f(t)$, mostradas na

Fig. 03, a seguir.

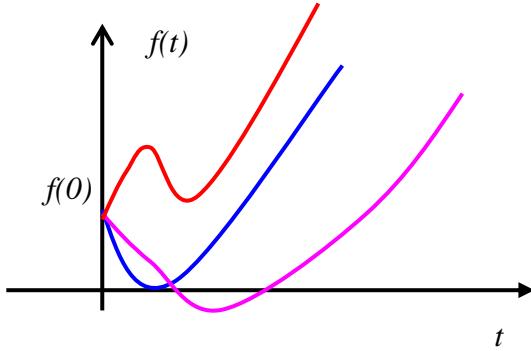


Figura 03. Possibilidades para a forma do gráfico de $f(t)$.

Prova do TEOREMA 3.1: A prova segue diretamente dos Lemas 3.2, 3.4 e 3.5.

Observa-se, do Lema 3.3, que se $z_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < z_2 < \lambda_3$ ou $z_1 < \lambda_1 < z_2 < \lambda_2 < \lambda_3$ então $y(t)$, dada por (2.4) - (2.7), não apresenta overshoot e nem undershoot, já que não apresenta extremos. Tal resultado coincide com os resultados obtidos por Rachid (1995).

EXEMPLO: Considere o sistema cuja função de transferência seja dada por:

$$G(s) = \frac{\left(\frac{1}{2}s + 1\right)(5s + 1)}{\left(\frac{1}{4}s + 1\right)\left(\frac{1}{3}s + 1\right)(s + 1)}. \quad (3.8)$$

Observa-se que $G(s)$ possui zeros $z_1 = -2$ e $z_2 = -0.2$, além dos pólos $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = -1$, satisfazendo então as condições do Teorema 3.1. A Fig. 04, a seguir, mostra o gráfico da resposta a uma entrada degrau unitário $y(t)$ para esse sistema. Observa-se que o sistema apresenta um único ponto de máximo e um overshoot de aproximadamente 300 %.

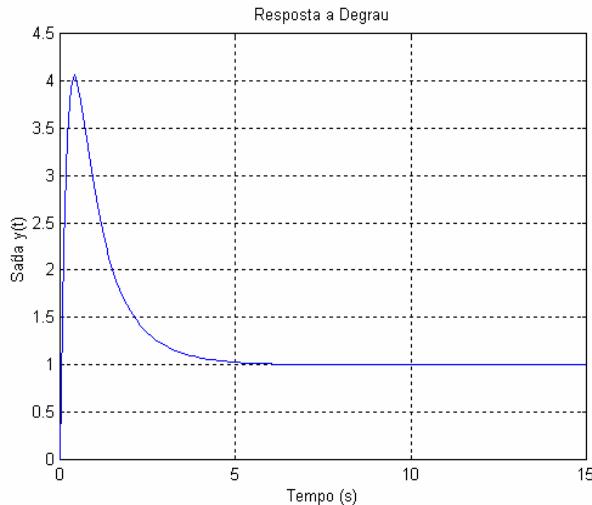


Figura 04: Resposta a uma entrada degrau unitário para $G(s)$ dada por (3.8).

4. CONCLUSÕES

Foram obtidas nesse trabalho, condições necessárias e suficientes para a determinação e classificação dos extremos da resposta a uma entrada degrau unitário em sistemas de controle lineares contínuos no tempo, de terceira ordem com pólos e dois zeros reais estáveis, em função das posições relativas dos pólos e zeros desse sistema. Acredita-se que com os resultados obtidos foi dado um passo importante para um melhor entendimento da influência das posições relativas de pólos e zeros para a ocorrência de pontos críticos e extremos em sistemas de controle lineares e contínuos no tempo.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bolton, W. (1995). *Engenharia de Controle*, 1.ed. Makron Books do Brasil Editora Ltda, São Paulo.
- Dorf R. C. & Bishop R. H. (1995). *Modern Control Systems*, 7 ed. Addison-Wesley, New York.
- El-Khoury, M. et all. (1993). Influence of Zero Locations on the Number of Step-response Extrema. *Automatica*, vol. 29, nº 6, pp. 1571-1574.
- Franklin, G. F. et alii, (1991) A. *Feedback Control of Dynamic Systems*, 3ed. Addison-Wesley, New York.
- Goodwin, G. C., et alii. (1999). Fundamental Limitations due to jw-axis zeros in SISO Systems. *Automatica*, vol. 35, pp. 857 - 863.

- Howell, J. R. (1997). Some classes of Step-response Model Without Extrema. *Automatica*, vol. 33, nº 7, p. 1427 - 1428.
- León de la Barra, B.A. (1994). On undershoot in SISO systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, nº 3, pp. 578-581.
- León de la Barra, B.A., Fernández, M. A. (1994-a). Transient Properties of Type m Continuous Time Scalar Systems. *Automática*, vol. 30, nº 9, pp. 1495-1496.
- Lin, S. and Fang, C., (1997), "Nonovershooting and Monotone Nondecreasing Step Response of a Third-Order SISO Linear System". *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 42, nº 9, p. 1299-1303.
- Moore, K. L and Bhattacharyya, S. P, (1990), "A Technique for Choose Zero Locations for Minimal Overshoot". *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 35, nº 5, pp. 577-580.
- Ogata, K. (1998) Engenharia de Controle Moderno. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro.
- Rachid, A. (1995). Some conditions on zeros to avoid step-response extrema. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 40, nº 8, pp. 1501-1503.
- Reis, C. A., Silva N. A. P. (2001). Condições Necessárias e Suficientes Para a Existência de Overshoot em Sistemas Lineares Contínuos e de Segunda Ordem. *Anais da 1ª Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle*, São Carlos, S. P., pp.176-179.
- Reis, C. A., Silva, N. A. P., Teixeira, M. C. M.(2002). O Overshoot e o Undershoot em Sistemas de Controle Lineares Contínuos no Tempo: Um Tutorial. Segundo Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2002), João Pessoa, PB.
- Reis, C. A., Alves, T. A. (2003).Determinação e Classificação dos Pontos Críticos em Sistemas de Controle Lineares de Terceira Ordem. Anais do DINCON 2003, 2º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle da SBMAC, São José dos Campos, S.P., pag. 1576-1585.
- Silva N. A. P., Reis, C. A. (2001), On The Definition of Type R_u Undershoot in The Step Response. *Anais da 1ª Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle*, São Carlos, S.P. pag.170-175.
- MATLAB The Language of Technical Computing, Version 5, 1997.

ANALYSIS OF EXTREMES IN THE LINEAR CONTROL CONTINUOUS TIME SYSTEM OF THIRD ORDER WITH ZEROS AND POLES STABLE REAL

Célia Aparecida dos Reis
 celia@fqm.feis.unesp.br

Ali Messaoudi
 messaoudi@fqm.feis.unesp.br

Neusa Augusto Pereira
 neusa@fqm.feis.unesp.br

Paulist State University, Campus de Ilha Solteira, Department of Mathematics, P. O. Box 31, CEP 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brazil.

Abstract: This paper analysis critical points and extremes that can occur in the step-response of a linear control continuous time system of third order with zeros and real stable poles. It is presented a necessary and necessary and sufficient condition for the existence of extremes in the step-response of third order continuous time transfer functions, based on its poles and zeros.

Keywords: Extremes, critical points, step-response, poles, zeros