

# IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS LINEARES UTILIZANDO O ERA (EIGENSYSTEM REALIZATION ALGORITHM)

**Marco Túlio Santana Alves**

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Engenharia Mecânica

Campus Santa Mônica – Av. João Naves de Ávila, 2121 – 38.408-000 – Uberlândia – MG

mtsaves@mecanica.ufu.br

**Prof. Dr. José Francisco Ribeiro**

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Engenharia Mecânica

Campus Santa Mônica – Av. João Naves de Ávila, 2121 – 38.408-000 – Uberlândia – MG

jribeiro@mecanica.ufu.br

**Resumo.** *O problema de identificação de sistemas tem recebido atenção especial nos últimos anos, sobretudo daqueles que estão estreitamente vinculados ao projeto de sistemas de controle. Este método é largamente utilizado no segmento aeroespacial, sendo, portanto, perfeitamente aplicável em sistemas MIMO – Múltiplas Entradas/Múltiplas Saídas. O ERA (Eigensystem Realization Algorithm), também conhecido como Realização de Auto-Sistema, é um método de identificação que tem como característica principal a utilização do recurso matemático que envolve a decomposição, em valores singulares, da matriz de Hankel, que é montada a partir dos dados experimentais fornecidos pelos sensores posicionados no sistema. Estas saídas devem ser provenientes de excitações (entradas) impulsivas unitárias aplicadas ao sistema, sendo que para cada entrada, independentemente da quantidade de saídas, um ensaio deve ser realizado. Uma vez montada a referida matriz estima-se os parâmetros do modelo, que deve ser descrito na forma de espaço de estados. Neste trabalho, o sistema em questão é linear, possui 2 graus de liberdade e é invariante no tempo, ou seja, a matriz da sua dinâmica é única; diante deste contexto será feita uma comparação entre os modelos real e identificado; para tanto foi codificado, em MATLAB®, o respectivo algoritmo.*

**Palavras chave:** *Identificação de Sistemas, Engenharia Aeroespacial, Eigensystem Realization Algorithm, Hankel, Engenharia de Controle.*

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo de métodos de identificação de sistemas é de suma importância na Engenharia de Controle, já que, em muitas metodologias de controle, é imprescindível conhecer os parâmetros do modelo do sistema que se deseja controlar, sobretudo para aqueles casos em que o modelo analítico é desconhecido ou de difícil determinação.

Neste artigo, discute-se o método ERA – Eigensystem Realization Algorithm – (Juang, 1994), que visa encontrar um modelo matemático que reproduza as propriedades de entrada/saída

do sistema real. Há diferentes formas de representar (ou modelar) um sistema físico. Uma das mais comuns é a que relaciona as entradas e saídas do sistema. Na construção do modelo pode ocorrer que nenhum significado físico possa ser abstraído da realização obtida mas que, no entanto, preserva as propriedades de entrada/saída do sistema real; sob o ponto de vista do controle isso já é suficiente (Lim et al, 1998).

Está assim dividido este trabalho: primeiramente é feita uma exposição dos conceitos que regem o ERA; em seguida seu algoritmo é apresentado e, finalmente, um ensaio experimental é discutido tendo em vista avaliar o procedimento de identificação proposto.

## 2. IDENTIFICAÇÃO VIA REALIZAÇÃO DE AUTO-SISTEMA – ERA

A identificação de sistemas MIMO, multi-entradas e multi-saídas, através do ERA, é baseada na decomposição em valores singulares de uma matriz Hermitiana derivada das saídas do sistema, a matriz de Hankel, que está vinculada aos parâmetros de Markov (Sczibor, 2002).

Tal método de identificação requer o conhecimento das respostas do sistema (sinal dos sensores) submetido à excitação impulsiva nas entradas.

### 2.1. Abordagem Matemática do Método

#### 2.1.1. Descrição do Sistema em Espaço de Estados

Um sistema contínuo, quando discretizado, se transforma em uma equação diferença, como descrito pela Eq. (1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \xrightarrow{Dt} \begin{cases} x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) \\ y(k) = \bar{C}x(k) + \bar{D}u(k) \end{cases} \quad (1)$$

onde:  $Dt$  é o tempo de discretização;  $x(k)$  é o vetor de estados;  $y(k)$  é o vetor da resposta do sistema;  $u(k)$  é o sinal de controle;  $\bar{A}$  é a matriz da dinâmica do sistema;  $\bar{B}$  é a matriz que posiciona os atuadores;  $\bar{C}$  é a matriz que posiciona os sensores e  $\bar{D}$  é a matriz de perturbação dos sensores devido ao atuador.

#### 2.1.2. Os Parâmetros de Markov

Aplicando-se uma entrada impulsiva,  $u(0) = 1$ , na Eq. (1) e assumindo  $x(0) = 0$  como condição inicial, obtém-se, de forma recursiva, a expressão descrita pela Eq. (2)

$$\begin{aligned} k=0 &\Rightarrow \begin{cases} x(1) = \bar{A} \cdot x(0) + \bar{B} \cdot u(0) = \bar{B} \\ y(0) = \bar{C} \cdot x(0) + \bar{D} \cdot u(0) = \bar{D} \end{cases} & k=1 &\Rightarrow \begin{cases} x(2) = \bar{A} \cdot x(1) + \bar{B} \cdot u(1) = \bar{A}\bar{B} \\ y(1) = \bar{C} \cdot x(1) + \bar{D} \cdot u(1) = \bar{C}\bar{B} \end{cases} \\ k=2 &\Rightarrow \begin{cases} x(3) = \bar{A} \cdot x(2) + \bar{B} \cdot u(2) = \bar{A}^2\bar{B} \\ y(2) = \bar{C} \cdot x(2) + \bar{D} \cdot u(2) = \bar{C}\bar{A}\bar{B} \end{cases} & k=3 &\Rightarrow \begin{cases} x(4) = \bar{A} \cdot x(3) + \bar{B} \cdot u(3) = \bar{A}^3\bar{B} \\ y(3) = \bar{C} \cdot x(3) + \bar{D} \cdot u(3) = \bar{C}\bar{A}^2\bar{B} \end{cases} \\ &\dots & k=n &\Rightarrow \begin{cases} x(n+1) = \bar{A} \cdot x(n) + \bar{B} \cdot u(n) = \bar{A}^n\bar{B} \\ y(n) = \bar{C} \cdot x(n) + \bar{D} \cdot u(n) = \bar{C}\bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{cases} \end{aligned}$$

Este processo iterativo permite, então, determinar as seguintes leis de formação, onde  $M_{k-1}$  é conhecido como parâmetro de Markov.

$$\begin{cases} y(0) = \overline{D} \\ y(k) = \overline{CA}^{k-1} \overline{B} = \mathbf{M}_{k-1} \quad (p/x \geq 1) \end{cases} \quad (2)$$

Perceba que os parâmetros de Markov acopla as configurações de sensores e atuadores com a dinâmica do sistema e, denota também, informações quanto a controlabilidade e observabilidade do mesmo.

### 2.1.3. Construção da matriz de Hankel – $\mathbf{H}(k)$

Considerando o elemento  $y_{ij}$  como sendo a saída  $i$  devido à entrada  $j$ , monta-se a matriz dos sinais de saída, que tem dimensão  $ns \times na$ , conforme descrito pela Eq. (3), onde  $ns$  é o número de sensores (saídas) e  $na$  o de atuadores (entradas). É imprescindível para o algoritmo que, para cada entrada adquiram-se todas as saídas, ou seja, não devem ocorrer excitações simultâneas em todas as entradas do sistemas. Cada coluna da matriz  $y(k)$ , descrita na Eq. (3), corresponde às aquisições decorrentes de uma única entrada dentre as várias que o sistema possua. Este requisito deve ser atendido para que não ocorram eventuais correlações entre as várias entradas e as várias saídas (Bendat et al, 1986), o que invalidaria a técnica ora apresentada.

$$y(k) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(k) & y_{1,2}(k) & \cdots & y_{1,j}(k) \\ y_{2,1}(k) & y_{2,2}(k) & \cdots & y_{2,j}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i,1}(k) & y_{i,2}(k) & \cdots & y_{i,j}(k) \end{pmatrix}_{(ns \times na)} \quad (3)$$

o que permite então a conseqüente montagem da matriz de Hankel, descrita pela Eq. (4)

$$\mathbf{H}(k) = \begin{pmatrix} y(k) & y(k+1) & \cdots & y(k+s) \\ y(k+1) & y(k+2) & \cdots & y(k+s+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k+r) & y(k+r+1) & \cdots & y(k+r+s) \end{pmatrix} \quad (4)$$

onde  $r$  e  $s$  são parâmetros que determinarão a dimensão de  $\mathbf{H}(k)$  e são escolhidos segundo os seguintes critérios:  $n = \text{rank}(\overline{A})$ ,  $r > n$ ,  $s > n$ ; segundo Juang e Pappa (1985) não existe um critério mais apurado quanto à escolha de  $r$  e  $s$ .

Ao se substituir os parâmetros de Markov, Eq. (2), na Eq. (4), torna-se possível o desmembramento da matriz de Hankel de forma que apareçam dois termos notáveis, conforme vê-se na Eq. (5), que são as matrizes de Observabilidade e de Controlabilidade representadas por  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$ , respectivamente (Sczibor e Marques, 2003).

A partir da Equação (3), que contempla os parâmetros de Markov, rescreve-se a Eq. (5), como abaixo

$$\overline{\mathbf{H}}(k) = \begin{pmatrix} \overline{CA}^{k-1} \overline{B} & \overline{CA}^k \overline{B} & \cdots & \overline{CA}^{k+s-1} \overline{B} \\ \overline{CA}^k \overline{B} & \overline{CA}^{k+1} \overline{B} & \cdots & \overline{CA}^{k+s} \overline{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{CA}^{k+r-1} \overline{B} & \overline{CA}^{k+r} \overline{B} & \cdots & \overline{CA}^{k+r+s-1} \overline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{C} \\ \overline{CA} \\ \vdots \\ \overline{CA}^r \end{pmatrix} A^{k-1} (\overline{B} \quad \overline{A}^1 \overline{B} \quad \cdots \quad \overline{A}^s \overline{B}) \quad (5)$$

A Equação (5) pode ser rescrita, a partir das definições de Controlabilidade e Observabilidade, conforme abaixo:

$$\bar{H}(k) = \mathcal{O} \bar{A}^{k-1} \mathcal{C} \quad (6)$$

onde  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$  são, respectivamente, as matrizes de Observabilidade e Controlabilidade.

Segundo Juang e Pappa (1985), diante do exposto até o momento, a realização mínima tem a ordem igual ao rank da matriz de Hankel, pois é sabido que as matrizes  $\bar{A}$ ,  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$  tem rank igual a  $n$ , que é a quantidade de estados. Executa-se, então, a decomposição em valores singulares de  $\bar{H}(k)$ , o que resulta em  $\bar{\bar{U}}$ ,  $\bar{\bar{S}}$  (que contém os autovalores de  $\bar{A}$ ) e  $\bar{\bar{V}}$ , como mostrado na Eq. (7):

$$H(k) = \bar{\bar{U}}_{(k+r) \times (k+r)} \cdot \bar{\bar{S}}_{(k+r) \times (k+s)} \cdot \bar{\bar{V}}^T_{(k+s) \times (k+s)} \quad (7)$$

Rescrevendo-se Eq. (7), vem:

$$H(k) = \begin{pmatrix} U & \tilde{U} \end{pmatrix}_{(k+r) \times (k+r)} \cdot \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{pmatrix}_{(k+r) \times (k+s)} \cdot \begin{pmatrix} V^T \\ \tilde{V}^T \end{pmatrix}_{(k+s) \times (k+s)} \quad (8)$$

Logo  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{S}$  e  $\tilde{V}$  são as submatrizes de  $\bar{\bar{U}}$ ,  $\bar{\bar{S}}$  e  $\bar{\bar{V}}$  que contém os valores singulares de magnitudes insignificantes, se comparados aos que compõem as submatrizes  $U$ ,  $S$  e  $V$ , que contém os valores singulares principais de  $\bar{H}(k)$  e que cujas dimensões são apontadas na Eq. (8). Assim, a matriz de Hankel relativa à realização mínima é a seguinte:

$$\bar{H}(k) = U_{(k+r) \times (l:n)} \cdot S_{(l:n) \times (l:n)} V^T_{(l:n) \times (k+s)} \quad (9)$$

onde, nesta notação,  $(l:n)$  significa ou as ' $n$ ' primeiras linhas, ou as ' $n$ ' primeiras colunas da matriz em questão, lembrando que  $n = \text{rank}(\bar{A})$ .

Este preceito quer dizer que apenas os valores singulares realmente relevantes são aproveitados para a estimação dos parâmetros do modelo.

Fazendo-se  $k = 1$  na Eq. (6) e igualando a parte significativa da decomposição da Eq. (8), vem:

$$\bar{H}(1) = U S V^T = U S^{l/2} \cdot S^{l/2} V^T = \mathcal{O} \mathcal{C} \quad (10)$$

De onde se conclui que:

$$\mathcal{O} = U S^{l/2} \quad (11)$$

$$\mathcal{C} = S^{l/2} V^T \quad (12)$$

Como

$$\bar{H}(2) = \mathcal{O} \bar{A} \mathcal{C} \Rightarrow \bar{H}(2) = U S^{l/2} \bar{A} S^{l/2} V^T \quad (13)$$

Aplicando-se a decomposição em valores singulares e as propriedades,  $U^T U = V^T V = I$ , na Eq. (13) e procedendo como abaixo, estima-se a matriz  $\bar{A}$ , mostrada na Eq. (14).

$$U^T \bar{H}(2) V = U^T U S^{l/2} \bar{A} S^{l/2} V^T V = S^{l/2} \bar{A} S^{l/2} \Rightarrow \hat{A} = S^{-l/2} U^T \bar{H}(2) V S^{-l/2} \quad (14)$$

Já para a estimação das matrizes  $\bar{B}$  e  $\bar{C}$  é necessário que sejam definidas duas auxiliares, como mostrado abaixo:

$$E_{ns} = (I_{ns} \quad 0 \quad \dots \quad 0)_{ns \times r-na} \quad (15)$$

$$E_{na} = (I_{na} \quad 0 \quad \dots \quad 0)_{na \times s-ns}^T \quad (16)$$

Associando-se as Eq. (15) e Eq. (16) com as matrizes de Controlabilidade e Observabilidade, respectivamente, obtém-se as matrizes  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ .

$$\hat{B} = \mathcal{C} E_{na} = (\bar{B} \quad \bar{A}^T \bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{s-1} \bar{B}) \cdot \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\hat{C} = E_{ns} \mathcal{O} = (I \quad 0 \quad \dots \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} \bar{C} \\ \bar{C} \bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C} \bar{A}^{r-1} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Substituindo-se as Eq. (11) e Eq. (12) nas Eq. (15) e Eq. (16), respectivamente, obtém-se as matrizes  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  estimadas e também, a partir da Eq. (2), a matriz  $\hat{D}$ . Logo, as matrizes do sistema identificado estão agrupadas abaixo.

$$\hat{A} = S^{-1/2} U^T H(2) V S^{-1/2} \quad \hat{B} = S^{1/2} V^T E \quad \hat{C} = E_{ns} U S^{1/2} \quad \hat{D} = y(0) \quad (19)$$

## 2.2. O Algoritmo

Assim, resumidamente, o fluxograma mostrado na Fig. (1) ilustra o método.

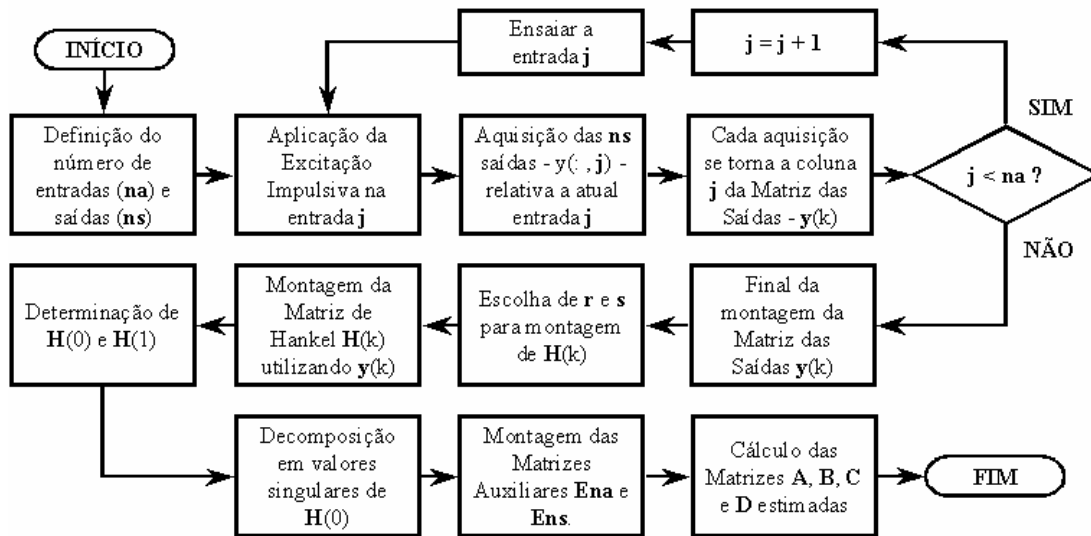


Figura 1. O Fluxograma do ERA

### 3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Para testar o procedimento proposto foram realizados ensaios num sistema mecânico linear de 2 GDL's cuja representação obedece ao esquema mostrado na Fig. (2).

Inicialmente o PC enviou um impulso de amplitude 2 volts gerado pelo programa que foi amplificado e injetado no excitador eletro-mecânico (shaker) que, por sua vez, atuou na Mesa 1. O sinal do sensor foi então adquirido pelo PC e armazenado em disco para posterior processamento.

Para adequar os sinais do experimento ao algoritmo efetuou-se uma normalização destes, dividindo por 2 (dois) os sinais de saída,  $y(t)$ , e os de entrada,  $u(t)$ .

Vale informar que, cada sinal passou filtro passa-baixa de quarta ordem e frequência de corte igual a 220 Hz. Após este procedimento foi calculada a resposta média da saídas a partir das 48 amostras filtradas.

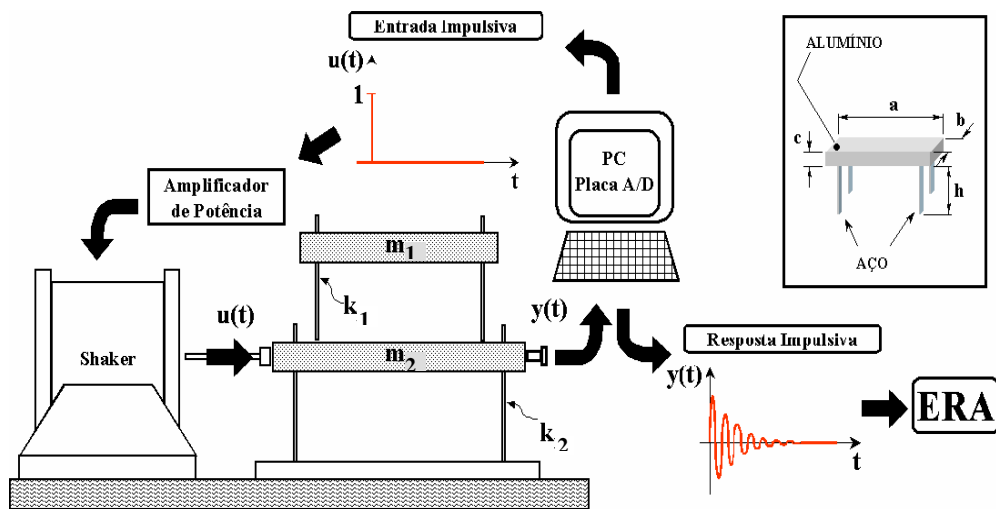


Figura 2: Esquema da bancada experimental utilizada

Tabela 1. Dimensões principais do aparato

	a (mm)	b (mm)	c (mm)	h (mm)	m (kg)
<b>Mesa 1</b>	170	170	6	100	2,22
<b>Mesa 2</b>	250	250	5	60	3,30

As dimensões que aparecem na Fig. (2) são mostrados na Tab. (1).

Os equipamentos utilizados no experimento foram: Excitador Eletro-mecânico (shaker) Brüel & Kjaer Tipo 4808; PC c/ placa de aquisição United Electronic Industries UEI BNC – 70; Sensor de proximidade magnético – DYMAC e Amplificador de Potência Brüel & Kjaer Tipo 2712.

O modelo teórico (analítico) para o sistema supracitado, que será utilizado para futura comparação, é o seguinte:

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} 2,22 & 0 \\ 0 & 3,30 \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 2,0e4 & -2,0e4 \\ -2,0e4 & 5,3e4 \end{bmatrix} & K &= \begin{bmatrix} 0,4217 & -0,4217 \\ -0,4217 & 225,834 \end{bmatrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{GF}{m_2} \end{bmatrix}^T & C &= [0 \quad GS \quad 0 \quad 0] & D &= 0
 \end{aligned}$$

onde  $GF = 47 \text{ V/N}$  (Ganho do Shaker) e  $GS = 5945 \text{ V/m}$  (Ganho do Sensor).

## 4. RESULTADOS

Primeiramente, plotou-se o gráfico da função de coerência para avaliar a fidedignidade dos sinais adquiridos, conforme a figura abaixo.

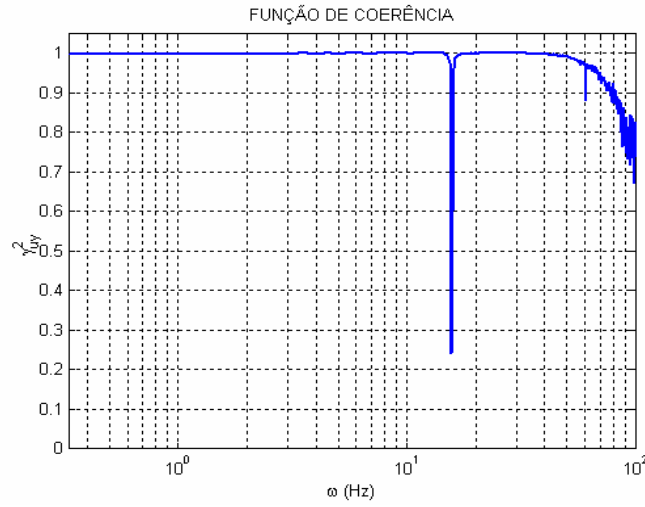


Figura 3. Função de Coerência  $g^2_{uy}$  entre a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$  do sistema físico

A Figura (3), além de mostrar a plotagem simultânea das funções resposta em frequência dos sistemas real e identificado, mostra também a plotagem dos erros no ganho ( $\Delta e_{GANHO}$ ) e na fase ( $\Delta e_{\phi}$ ) relativo ao sistema físico real onde os cálculos foram realizados segundo a Eq. (19).

$$De_{GANHO} = FRF_{REAL}^{GANHO} - FRF_{IDENT.}^{GANHO} \quad \text{e} \quad De_f = FRF_{REAL}^f - FRF_{IDENT.}^f \quad (20)$$

onde:  $FRF_{REAL}^{GANHO}$  e a  $FRF_{IDENT.}^{GANHO}$  são as FRF's dos sistemas real e identificado (Comparativo de Ganho) e a  $FRF_{REAL}^{GANHO}$  e a  $FRF_{IDENT.}^{GANHO}$  são as FRF's dos sistemas real e identificado (Comparativo de Fase)

### 4.1. Resultados para o Modelo de ordem n = 6

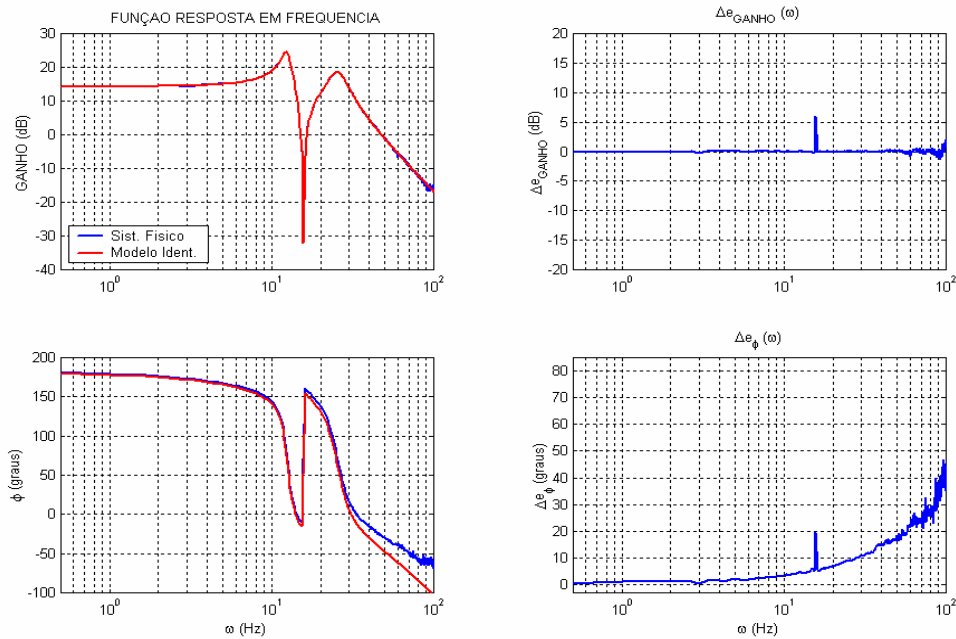


Figura 4. Função Resposta em Frequência dos sistema físico real e do seu modelo estimado com os erros no ganho e na fase em relação ao sistema físico real ( $n = 6$ ).

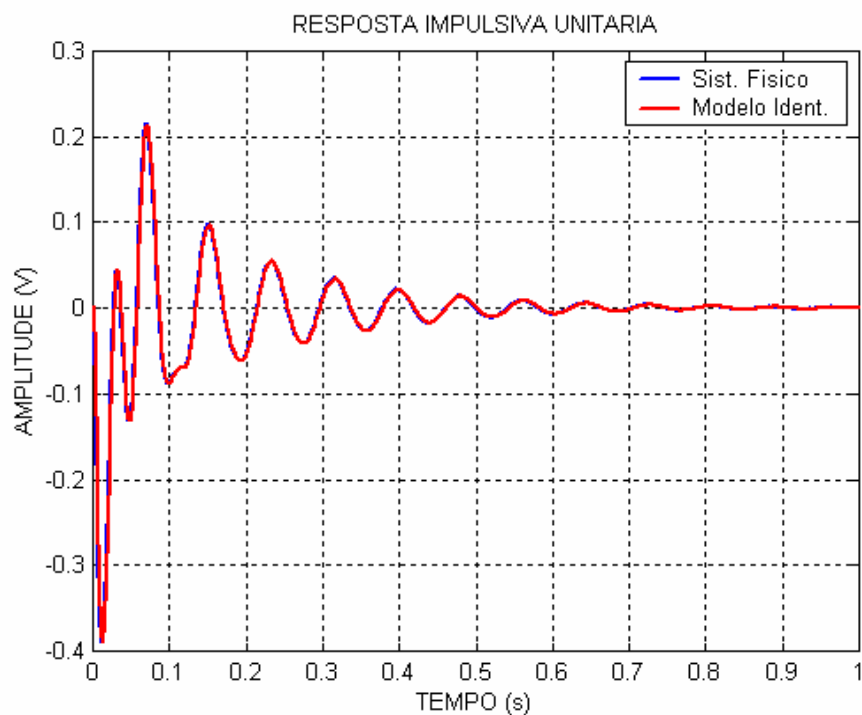


Figura 5. Respostas Impulsivas dos sistemas físico e do modelo identificado ( $n = 6$ )

#### 4.1. Resultados para o Modelo de ordem $n = 4$

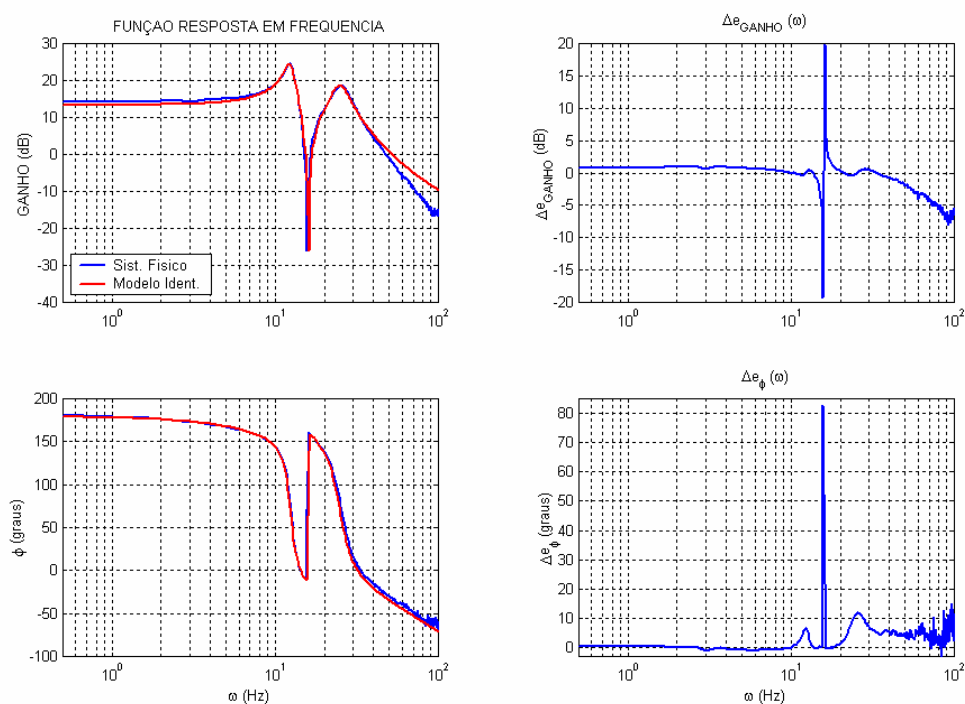


Figura 6. Função Resposta em Frequência dos sistema físico real e do seu modelo estimado com os erros no ganho e na fase em relação ao sistema físico real ( $n = 4$ )



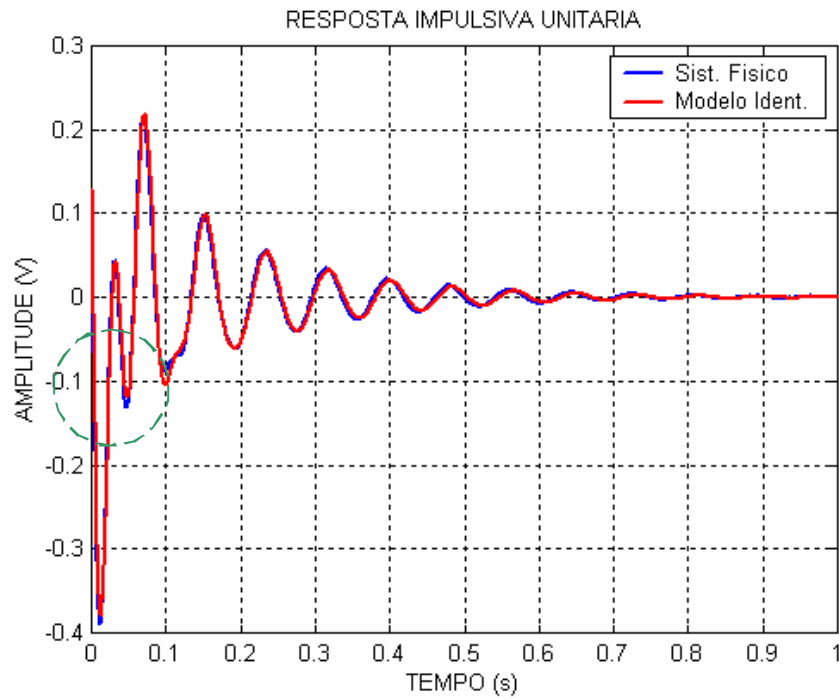


Figura 7. Respostas Impulsivas dos sistemas físico e do modelo identificado ( $n = 4$ )

Para obtenção destes resultados foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros:  $n_a = 1$  (número de atuadores),  $n_s = 1$  (número de sensores) e  $r = s = 250$  (dimensão da matriz de Hankel).

O gráfico abaixo constitui uma forma de truncar o tamanho do modelo. Para tanto normalizou-se a diagonal da matriz  $\bar{\bar{S}}$  pelo seu máximo valor singular ( $\mathbf{S}$ ), adotando como critério de truncamento  $\mathbf{S} > 0,1$ .

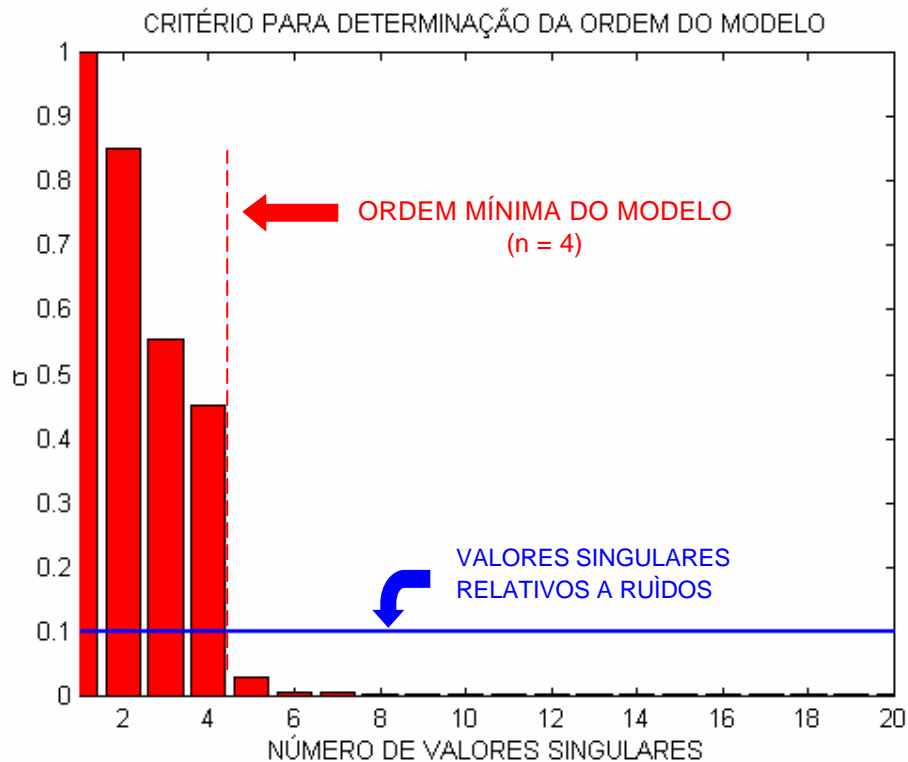


Figura 8. Critério de truncamento do tamanho do modelo

Os valores abaixo da linha limite na Fig. (8) corresponde aos valores singulares relativos a ruídos no sistemas (modos computacionais).

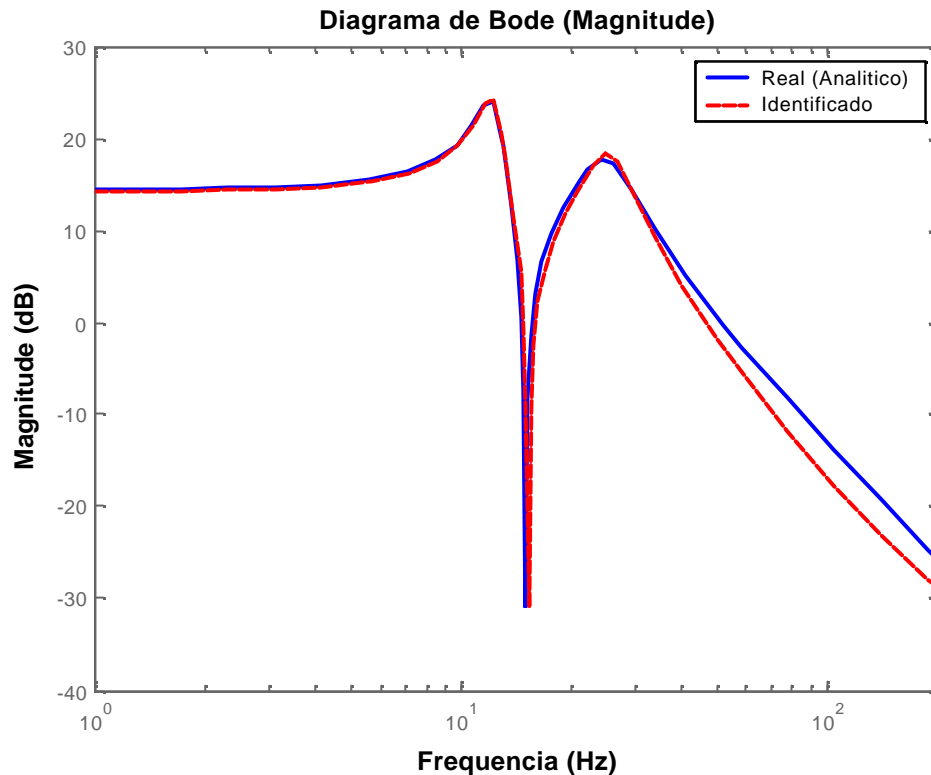


Figura 9. Comparativo (Magnitude da FRF) entre os Sistemas Físico (Analítico) e Identificado.

## 5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Para a ordem  $n = 6$  a Fig. (4) revela uma boa concordância entre o comportamento do sistema físico real e o seu modelo no domínio da frequência, já para o modelo de ordem  $n = 4$ , a Fig. (6) revela um pequeno mas perceptível deslocamento na frequência. As maiores diferenças ocorrem a partir de 40 Hz, conforme as próprias Fig. (4) e Fig. (6). Este comportamento é explicado pela Fig. (3), onde a partir de 40 Hz a função de coerência decresce notoriamente. Veja que na frequência de anti-ressonância a coerência é baixa (0,25). Este fato que justifica a dificuldade de identificação da amplitude do ganho nesta frequência, o que era esperado (Bendat e Piersol, 1986). Ainda na Fig. (4) percebe-se que o erro, tanto no Ganho quanto na Fase, se mantém em patamares bastante aceitáveis, em níveis adequados tendo em vista o projeto de controladores.

## 6. CONCLUSÕES

O algoritmo de identificação ERA foi aplicado em um sistema de 2 GDL's e revelou-se, como esperado, bastante eficiente.

Alguns elementos de ordem prática merecem destaque no experimento realizado. O primeiro se refere à necessidade de se realizar inúmeros experimentos para, a partir destes, extrair o comportamento médio do sistema, e que serão usados para aplicação no algoritmo. O uso do filtro passa-baixa nos sinais de saída melhorou o desempenho do identificador. A presença desse filtro deverá ser considerada quando, por exemplo, o modelo identificado for utilizado no projeto de controladores.

Outro elemento importante é a escolha da dimensão do sistema. Neste trabalho, as características físicas do sistema ensaiado, indicaram, claramente, a presença de dois modos de vibrar. Apesar disso, o sistema tinha, de fato, 3 GDL's, pois o excitador eletromecânico (shaker) estava acoplado às mesas, o que adicionou um grau de liberdade, determinando os tamanhos das matrizes de estado ( $n = 6$ ). Ainda sim o foco do trabalho estava na identificação do sistema de 2 GDL's; veja que a Fig. (8) revela a real ordem do sistema. Apesar da ordem revelada ser  $n = 4$  a Fig. (6) mostra uma diferença apreciável no ganho DC que se traduz num erro de 7,8% em relação ao sistema físico real.

A potencialidade do método é ratificada pela Fig. (9), onde é feita uma comparação entre os modelos analítico e identificado, já que, até o momento, foram comparados os sistemas físico real e identificado.

Em outras situações deverá ser feita uma análise de sensibilidade do comportamento do algoritmo para diferentes valores de 'n'. Na construção da matriz de Hankel os parâmetros  $r$  e  $s$  devem também ser escolhidos com cuidado para que não sejam comprometidos o desempenho computacional e a precisão na identificação.

Uma virtude do método é a sua simplicidade de implementação computacional.

Tal método foi aplicado em outros sistemas existentes no Laboratório de Sistemas Mecânicos da FEMEC-UFU, revelando-se, também, bastante eficiente, o que mostrou uma característica de generalidade bastante importante do método. Um ensaio com múltiplas-entradas e múltiplas-saídas é o próximo passo na investigação da robustez do método

Investigar a sensibilidade do métodos aos seus parâmetros intrínsecos, como por exemplo  $r$  e  $s$ , e estudar eventuais melhoramentos para tratar sistemas com atraso e pequenas não-linearidades, também são temas para trabalhos posteriores.

## 7. AGRADECIMENTOS

À FAPEMIG pelo incentivo dado através da bolsa, ao Prof. José Francisco Ribeiro e ao Doutorando Patrick Cardoso pelo acompanhamento constante.

## 8. REFERÊNCIAS

- Bendat, J. S., Piersol A. G., 1986, Random Data: Analysis and Measurement Procedures, 2<sup>a</sup> ed., Willey, New York, USA.
- Juang, J., Pappa, R., 1985, "An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for Modal Parameter Identification and Model Reduction", Journal Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, N° 5, pp 620-627.
- Juang, J. N., 1994, Applied System Identification, 1<sup>a</sup> ed., Prentice Hill, New Jersey, USA.
- Lim, R. K., Phan, M. Q., Longman, R. W., 1998, "State-Space System Identification with Identified Hankel Matrix", Department of Mechanical and Aerospace Engineering Technical Report, N° 3045, Princeton University.
- Sczibor, V., 2002, "Identificação Modal de uma estrutura aeronáutica via Algoritmo de Realização de Sistemas", Dissertação de Mestrado, School of Engineering of São Carlos, Universidade de São Paulo, Brazil, 147p.
- Sczibor, V., Marques, F. D., 2003, "Wing Structure Modal Parameter Estimation and Qualification Using ERA", COBEM 2003, ABCM.

## 9. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# MECHANICAL LINEAR SYSTEMS IDENTIFICATION USING THE ERA (EIGENSYSTEM REALIZATION ALGORITHM)

## **Marco Túlio Santana Alves**

Federal University of Uberlândia  
School of Mechanical Engineering  
Campus Santa Mônica, Building M, 2121 João Naves de Ávila Avenue.  
mtsalves@mecanica.ufu.br

## **José Francisco Ribeiro**

Federal University of Uberlândia  
School of Mechanical Engineering  
Campus Santa Mônica, Building M, 2121 João Naves de Ávila Avenue.  
jribeiro@mecanica.ufu.br

**Abstract.** *The system identification problem has received special attention in recent years, mainly for those people who are narrowly involved with control system design. This method is widely used within aerospace sector, being, therefore, perfectly applicable in MIMO systems, Multiple Input/Multiple Output. The ERA is an identification method whose main characteristic is to decompose, in singular values, the Hankel matrix, which is built from the experimental data supplied by the sensors placed on the system. These outputs must be obtained by the unitary impulsive excitements (inputs) applied to the system, where, for each input, irrespectively of the outputs quantity, a experiment must be executed. Once built the related matrix the model parameters are estimated, that must be described under the state-space form. In this paper, a comparision is made between the real physical model of a 2 DOF's linear mechanical system and the identified model; to get it, the respective algorithm was codified in MATLAB®.*

**Keywords:** *System Identification, Aerospace Engineering, Eigensystem Realization Algorithm, Hankel, Control Engineeringl.*